

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Holý** Jméno: **Jan** Osobní číslo: **411177**
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**
Zadávací katedra/ústav: **Katedra řídicí techniky**
Studijní program: **Kybernetika a robotika**
Studijní obor: **Systemy a řízení**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Regularizace v rekonstrukci obrazu vodivosti bodové nehomogenity

Název diplomové práce anglicky:

Regularization in the conductivity imaging problem of a point inhomogeneity

Pokyny pro vypracování:

Provedte rešerši regularizačních technik v elektrické impedanční tomografii (EIT). Ukažte, že bez použití regularizace je rekonstrukce obrazu nejednoznačná. Provedte srovnání běžných regularizačních technik v případě rekonstrukce obrazu s bodovou nehomogenitou.

Provedte revizi výpočtu těžiště obrazu pro různé geometrie domény a zvažte návrh vhodnější metody. Základní požadavky lze tedy rozdělit do následujících bodů:

- 1) rešerše regularizačních technik v EIT,
- 2) ukažte nejednoznačnost obrazové rekonstrukce bez regularizace,
- 3) provedte srovnání běžných regularizačních technik na rekonstrukci bodové nehomogenity,
- 4) zrevidujte způsob výpočtu těžiště obrazu a zvažte návrh vhodnější metody.

Mezi běžné regularizační techniky lze vedle základní Tikhonovy regularizace počítat algoritmus maximální aposteriorní pravděpodobnosti s vyhlazujícími regularizačními maticemi. Pro hodnocení obrazu bodové nehomogenity použijte amplitudu těžiště, chybu polohy těžiště a vzájemnou korelaci monochromatických obrazů rekonstrukce a simulačního modelu (získaných řezem v polovině rozsahu amplitud). Pro práci využijte volně dostupný toolbox EIDORS pro Matlab. Aby byly obrazy srovnatelné, zajistěte pro každý typ regularizace naladění regularizačního parametru na stejnou hodnotu obrazového šumu.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications. Bristol ; Philadelphia: CRC Press, 2004.
- [2] R. A. Williams and M. S. Beck, Process Tomography: Principles, Techniques, and Applications. Butterworth-Heinemann, 1995.
- [3] N. Polydorides and W. R. B. Lionheart, "A Matlab toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography: a contribution to the Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software project," Meas. Sci. Technol., vol. 13, no. 12, p. 1871, 2002.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Jan Cagáň, katedra měření FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **15.02.2019**

Termín odevzdání diplomové práce: **07.01.2020**

Platnost zadání diplomové práce:

do konce letního semestru 2020/2021

Ing. Jan Cagáň
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra Systémů a řízení



**Regularizace v rekonstrukci obrazu vodivosti bodové
nehomogenity**

**Regularization in the conductivity imaging
problem of a point inhomogeneity**

Diplomová práce

Bc. Jan Holý

Magisterský program: Systémy a řízení
Vedoucí: Ing. Jan Cagáň

Praha, leden 2020

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Jan Cagáň
Katedra měření
Elektrotechnická fakulta
České vysoké učení technické v Praze
Technická 2
160 00 Praha 6
Česka Republika

Prohlášení

„Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.“

V Praze, dne 6.ledna 2020

.....
Bc. Jan Holý

Abstrakt

V této práci byly analyzovány algoritmy inverzních metod, které se používají v elektrické impedanční tomografii. Účelem této analýzy bylo určit kvalitu rekonstruovaného obrazu rozložení impedance s bodovou nehomogenitou. Bodovou nehomogenitou je myšlena malá oblast s rozdílnou impedancí.

Určení rozložení impedance bylo použito pro reálný a simulovaný vzorek karbonového kompozitního materiálu za účelem odhalení jeho poruchy. Bylo předpokládáno, že porucha na kompozitním materiálu se při rekonstrukci projeví jako bodová nehomogenita ve vodivostním obrazu.

V rámci analýzy algoritmů inverzních metod byly popsány regularizační algoritmy filtrující spektrum, algoritmy lineární a nelineární inverze s regularizací. Dále byly nově implementovány algoritmy zakládající se na kombinaci lineárních regularizací. U regularizací bylo také potřeba stanovit míru jejich zásahu do výsledku inverzní úlohy. Tato míra se stanovuje hyperparametrem. Pro určení hodnoty hyperparametru byly vyzkoušeny tyto metody: metoda L-krivky, metoda zobecněné křížové validace, metoda volby parametru šumového čísla a metoda nejlepšího rozlišení, která byla v rámci práce implementována.

Vybrané algoritmy inverzních metod byly porovnány na základě přesnosti určení bodové nehomogenity na simulovaných i reálných datech. Algoritmus určení polohy bodové nehomogenity byl implementován v rámci této práce. Kvalita algoritmu inverzní metody byla vyhodnocena na základě průměrné odchylky, která byla určena buď ze simulací rozdílných poloh bodové nehomogenity, nebo několika měření odlišných nehomogenit. Na základě výsledků byly vybrány vhodné inverzní metody pro různé odstupy signálu od šumu, které nejlépe určovaly polohu bodové nehomogenity. Byly také vybrány nejlepší inverzní metody pro rekonstrukci obrazu z reálného měření.

Klíčová slova: Inverzní úloha, elektrická impedanční tomografie, elektrická odporová tomografie, rozdílová rekonstrukce, dopředná úloha, prior, lineární inverze s regularizací, metody filtrování spektra, nelineární inverze s regularizací, hyperparametr

Abstract

In this thesis, a set of algorithms for an inverse solution was analyzed. These are heavily used in electrical impedance tomography. The main goal of this thesis was to establish the quality of the reconstructed image of the decomposition of impedance with point inhomogeneity. By the term point inhomogeneity, a small region with different impedance is meant.

Furthermore, the reconstructed image of the decomposition of impedance was used to detect material defects of a simulated and real sample made of carbon composite. It had been assumed that the defect in the material would result in a point inhomogeneity in the reconstructed image. There was a description of several algorithms which were used in the inverse problem, together with the inverse regularization algorithms based on spectral filtering, linear inversion with regularization and nonlinear inversion with regularization. We also established an optimal value for a hyperparameter, which is there to control the trade-off between conformance to data and conformance to the prior. For this purpose, the following algorithms were employed: method L-Curve, Generalized cross-validation, method fixed noise figure, and method best resolution.

In addition, we summarized and compared the chosen inversed method algorithms. As a primary indicator of relevance, we chose a detection location of point inhomogeneity. As it has already been mentioned, we tested algorithms on simulated data as well as on real measurements. For this purpose, we also implemented an algorithm for the detection of locations of point inhomogeneity. The correctness of these algorithms was based on two main factors. Firstly, on standard deviations of several locations of simulated point inhomogeneity. Secondly, on the level of deviations in several different inhomogeneities in real data measurement. Based on these measurements, we determined which of the tested algorithms reconstruct the point inhomogeneity from data most accurately. By testing data, we mean a specific type of signal load which determined the discrepancy between the signal and the noise. We also determined the best method for real data measurement based on the results of quality image reconstruction.

Keywords: Inverse problems, electrical impedance tomography, hyperparameter, linear inversion with regularization, nonlinear inversion with regularization, spectral filtering, differential image reconstruction

Poděkování

Děkuji Ing. Cagáňovi za skvělé vedení mé diplomové práce, trpělivost, ochotu pomoci a korekci textu. Děkuji mé rodině za skvělé zázemí, které mi poskytla, u celého mého studia na vysoké škole a při tvorbě této práce. Také děkuji Janu Uhlíkovi za rady k překladu abstraktu.

Seznam tabulek

8.1	Porovnání nového a starého algoritmu při hledání bodové nehomogenity na reálných datech	49
D.1	Určení polohy nehomogenity pro $SNR = 10$	61
D.2	Určení polohy nehomogenity pro $SNR = 5$	63
D.3	Určení polohy nehomogenity pro $SNR = 2$	65
D.4	Určení polohy nehomogenity pro $SNR = 1$	67
E.1	Určení polohy bodové nehomogenity	70

Seznam obrázků

2.1	Měřící soustava	5
2.2	Blokový diagram měřící soustavy [10]	6
6.1	Grafické zobrazení metody pro hledání hyperparametru [33]	36
6.2	Znázornění výpočtu hodnoty průměrného odstupu od šumu [33]	37
6.3	Křivka nejlepšího rozlišení s vyznačenou optimální hodnotou $Br(\alpha^*)$	38
7.1	Síť vygenerovaná pro inverzní úlohu	41
7.2	Síť vygenerovaná pro dopřednou úlohu s malou nehomogenitou uprostřed	41
A.1	Relativní velikosti singulárního čísla citlivostní matice	51
A.2	Rekonstrukce obrazu pro odlišné počty singulárních čísel se signálem bez šumu	52
A.3	Rekonstrukce obrazu pro odlišné počty singulárních čísel, při odstupu signálu od šumu $SNR = 5$	53
B.1	L-Křivka pro Tikhonův prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$	54
B.2	Tvar křivky funkce $G(\alpha)$ pro Tikhonův prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$	55
B.3	L-Křivka pro NOSER prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$	55
B.4	Tvar křivky funkce $G(\alpha)$ pro NOSER prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$	55
B.5	L-Křivka pro Laplaceův prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$	56
B.6	Tvar křivky funkce $G(\alpha)$ pro Laplaceův prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$	56
C.1	Rekonstrukce s Tikhonovým priorem	57
C.2	TSVD regularizace	58
C.3	Regularizace s NOSER priorem	58
C.4	Regularizace s Laplaceovou priorem	58

Obsah

Abstrakt	iv
Abstract	v
Poděkování	vi
Seznam tabulek	vii
Seznam obrázků	viii
1 Úvod	1
2 Sběr dat	4
3 Dopředná úloha	7
3.1 Matematický model	7
3.2 Okrajové podmínky	8
3.3 Metoda konečných prvků	9
3.4 Řešení okrajové úlohy	10
3.5 Řešení slabé úlohy	11
3.6 Jakobián	14
4 Inverzní úloha	15
4.1 Použité statistické metody	15
4.2 Statistická inverze	16
4.2.1 Numerická integrace	18
4.3 Inverze jako statistický problém	18
4.4 Inverze jako deterministický problém	19
4.5 Lineární inverze	20
4.5.1 Pseudoinverze	21
4.5.2 Singulární rozklad	22
4.6 Zobecněný singulární rozklad	26
4.7 Nelineární inverze	27
4.8 Absolutní a rozdílový obraz	28
5 Regularizace	30
5.0.1 TSVD	30
5.0.2 Tikhonova regularizace	31
5.0.3 NOSER	32
5.0.4 TV Regularizace	32

6	Volba hyperparametru	34
6.0.1	L-Křivka	34
6.0.2	Zobecněná křížová validace	35
6.0.3	Volba šumového čísla	35
6.0.4	Parametr Noise Performance	36
6.0.5	Metoda nejlepšího rozlišení	37
6.0.6	Implementace metody nejlepšího rozlišení	38
7	Rekonstrukce obrazu bodové nehomogenity	40
7.1	Simulace	40
7.2	Rekonstrukce obrazu bez regularizace	42
7.3	Rekonstrukce obrazu s regularizací	43
7.3.1	TSVD	43
7.3.2	Lineární inverze s regularizací	43
7.3.3	Nelineární inverze s regularizací	44
7.3.4	Kombinace regularizací	45
7.4	Určení polohy bodové nehomogenity	46
7.5	Porovnání inverzních metod na vyhodnocení bodové nehomogenity	46
8	Závěr	48
8.1	Kvalita rekonstrukce bodové nehomogenity	49
8.2	Srovnání metod výběru hyperparametru	49
A	Rekonstrukce matice TSVD	51
B	Porovnání L-Křivky a GCV křivky	54
C	Porovnání regularizací	57
D	Detekce nehomogenity na simulovaných datech	59
E	Detekce nehomogenity na reálných datech	69
	Bibliografie	74

Kapitola 1

Úvod

Elektrická impedanční tomografie (dále již pouze tomografie) vyhodnocuje rozložení admitivity v tělese, na základě měření napětí na elektrodách, které jsou připojeny na jeho povrchu.

Tomografie se využívá v geofyzice při hledání ložisek minerálů [1]. Dále se zkoumá její uplatnění v lékařství při neinvazivním vyšetření lidské tkáně [2]. Příkladem může být vyšetření plicní embolie nebo rakoviny prsu. Tomografie se také používá k nedestruktivnímu testování materiálů a při hledání koroze [3].

Komponenty z karbonových kompozitních materiálů nacházejí své uplatnění v celé řadě průmyslových odvětví. Díky svým dobrým fyzikálním vlastnostem dokáží poskytnout při nižší váze lepší pevnostní vlastnosti než duralové slitiny. Proto se karbonové kompozity začaly využívat v letectví, automobilovém průmyslu a v mnoha dalších oblastech.

V leteckém průmyslu je kladen velký důraz na bezpečnost. Je proto potřeba vyvíjet spolehlivé metody pro nedestruktivní testování karbonových kompozitů, kterými musí letadlo pravidelně procházet. Mezi základní metody nedestruktivního testování materiálu patří vizuální ohledání a kontrola poklepem. Mezi moderní testovací metody patří ultrazvuk, radiografie, termografie a testování vířivými proudy. Nejrozšířenějšími metodami na testování kompozitu je ultrazvukový a-test a c-test.

Aby bylo možné detekovat poruchu na povrchu letadla, je potřeba letadlo odstavit a zkontrolovat kritická místa, na kterých je velká pravděpodobnost na vznik impaktů, jako jsou povrchy kolem oken a dveří. Tato kontrola je časově a potažmo i finančně náročná. Proto se zkoumají metody, jak omezit čas uzemnění letadla potřebný k preventivní prohlídce a zároveň nesnížit bezpečnost letecké dopravy.

Jednou z možností, jak zkrátit čas potřebný ke kontrole karbonového kompozitu na letadle, je zabudovat senzory přímo do materiálu a vyhodnocovat poruchy materiálu průběžně bez toho, aby se letadlo muselo odstavit z provozu. Proto se zkoumá možnost využití tomografie pro detekci poruchy na kompozitním materiálu. U této metody lze do

povrchu letadla zabudovat měřící elektrody a vyhodnocovat průběžně změny napětí na těchto elektrodách. První publikace, která se zabývá možností tomografické detekce poruchy na karbonovém kompozitním materiálu, byla publikována Baltopoulosem (2010) [4].

V této diplomové práci použijeme tomografii k vyhodnocení bodové nehomogenity na vzorku karbonového kompozitu, který je umístěn na povrchu letadla. V tomografii vyhodnocujeme pouze reálnou složku impedance a vyhodnocení probíhá oproti stavu naměřeném při homogenním stavu tělesa. Tento typ impedanční tomografie se nazývá relativní odporová tomografie.

Testovaný kompozitní materiál vznikl vrstvením tkaniny utkané z uhlíkových vláken a pryskyřice. Protože materiál není homogenní, vodivost je anizotropní. Vodivost materiálu ve směru po vláknech se pohybuje v řádech tisíců až deseti tisíců siemensů na metr a vodivost materiálu v příčném směru je o dva řády nižší. Materiál má zanedbatelný kapacitní charakter [5]. V této diplomové práci budeme uvažovat materiál s izotropní vodivostí. I s tímto zjednodušením lze v našem případě dobře vyhodnotit polohu bodové nehomogenity.

K vyhodnocení nasbíraných dat bude použit program Matlab s nástrojem EIDORS¹, který je dostupný pod GNU licenci (GNU General Public License). Nástroj EIDORS (Electrical Impedance Tomography and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software) obsahuje soubor algoritmů, které řeší dopřednou a inverzní úlohu. Tyto algoritmy se využívají v elektrické impedanční tomografii a v difúzní optické tomografii. Ke generování sítě, kterou se aproximuje elektromagnetické pole, je v programu EIDORS integrován nástroj Netgen². Pro hledání hyperparametru pomocí L-Křivky a zobecněné křížové validace byl použit balíček jehož popis můžeme najít v publikaci Hansen (2007) [6]³. Pro prokládání grafu polynomem byl použit nástroj Symbolic Polynomial Manipulation.⁴

Toto práce je rozdělena následujícím způsobem. V druhé kapitole je popsán způsob měření reálného tělesa. V kapitole tři až šest je proveden teoretický rozbor úlohy. Teoretický rozbor úlohy je rozdělen na dopřednou úlohu, která se zabývá výpočtem napětí na měřících elektrodách a inverzní úlohu, která se naopak zabývá výpočtem rozložení admitivity v tělese z naměřeného napětí na elektrodách. Inverzní úloha může být řešena lineární i nelineární formou. Inverzní úloha je špatně podmíněna, a proto se zavádí regularizace úlohy, která zajišťuje existenci a opakovatelnost řešení úlohy. Regularizace ovlivňuje výsledný vodivostní obraz. Míra toho, jak dalece regularizace ovlivňuje výsledek inverzní

¹<http://EIDORS3d.sourceforge.net/>

²<https://sourceforge.net/projects/netgen-mesher/files/netgen-mesher/>

³<http://www.imm.dtu.dk/~pcha/Regutools/>

⁴<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/9577-symbolic-polynomial-manipulation>

úlohy, je dán hyperparametrem. V této kapitole je také popsána implementace volby hyperparametru prostřednictvím metody nejlepšího zaostření. Sedmá kapitola se zabývá rekonstrukcí bodové nehomogenity inverzní úlohou bez regularizace i s regularizací. V závěru této kapitoly je porovnávána detekce polohy bodové nehomogenity pro různé typy lineárních regularizací s různými metodami stanovení hyperparametru na simulovaných i naměřených datech. Za účelem zlepšení detekce polohy bodové nehomogenity byl vytvořen nový algoritmus. Tento algoritmus je založen na prokládání vodivostního obrazu polynomem. Místo bodové nehomogenity je určeno jako maximum polynomu. Algoritmus tak vylepšuje původní nástroj implementovaný v nástroji EIDORS, který je založen na určení těžiště tělesa.

Kapitola 2

Sběr dat

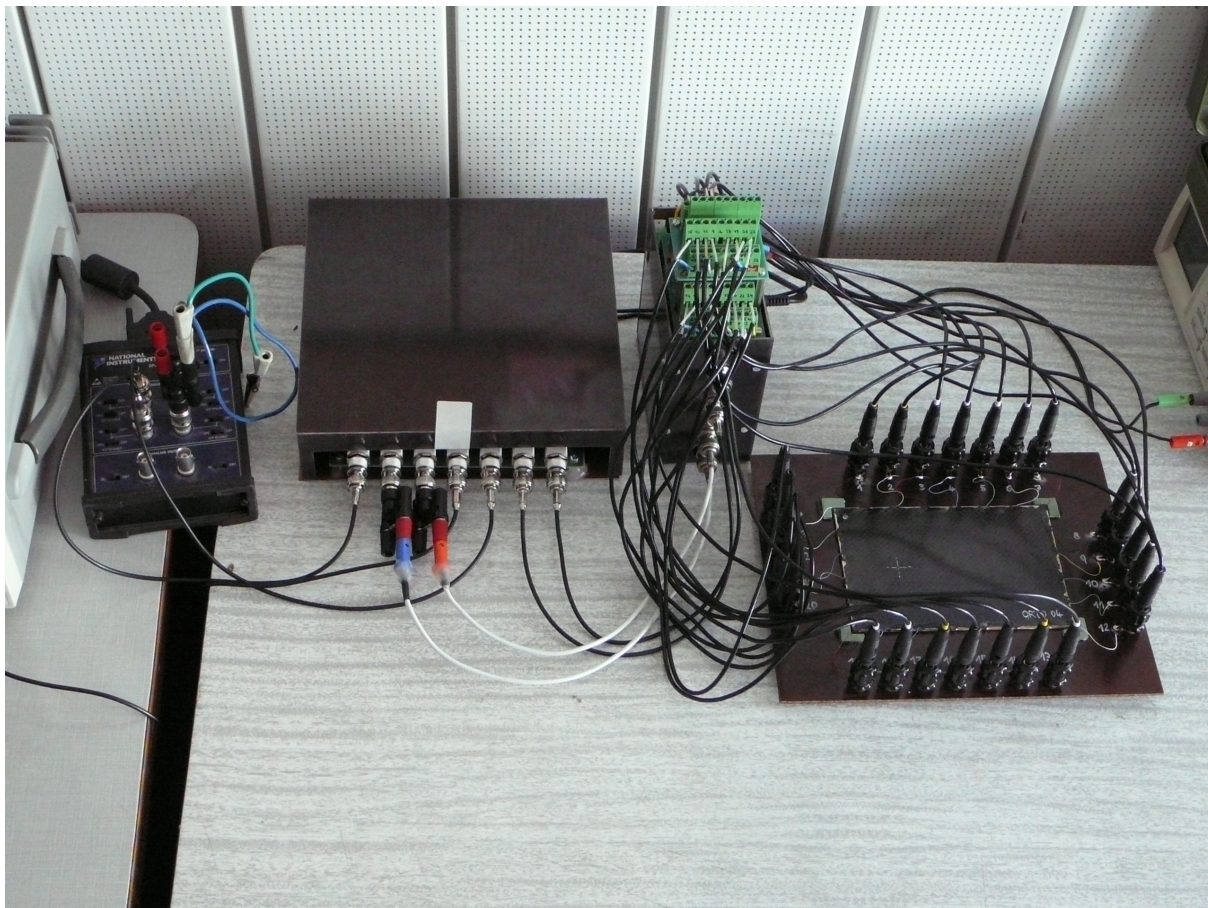
Měření probíhá na kompozitním vzorku, na který byly z boku nainstalovány elektrody. Z povrchu materiálu musela být před nainstalováním elektrod chemicky odstraněna pryskyřice a ochranný povlak uhlíkových vláken(sizing) tak, aby se elektrody přímo dotýkaly uhlíkové tkaniny a tím se minimalizoval přechodový odpor mezi elektrodou a materiálem. Elektrody jsou nainstalovány postupným vrstvením stříbrného laku. Srovnání přechodového odporu elektrod, které jsou nalepeny na chemicky očištěný povrch a na povrch bez chemického očištění je uvedena v práci Cagáňa (2016). [7]. Elektrody jsou umístěny tak, aby byly rovnoměrně rozmístěny kolem oblasti, ve které vyhodnocujeme nehomogenitu. Měření napětí na elektrodách probíhá při proudovém buzení. Pro proudové buzení se používají dvě elektrody, na kterých se neměří napětí a tím se minimalizuje vliv přechodového odporu na rekonstruovaný obraz. Podrobný popis měřicí soustavy můžeme najít v práci Cagáň (2016) [7]. Pro přepínání mezi měřeními a stimulacemi na jednotlivých elektrodách je použit multiplexor popsáný v práci Cagáně (2017) [8]

Protože potřebujeme z měřeného napětí odfiltrovat rušivý signál, používáme jako proudové buzení harmonický signál o frekvenci 1 kHz. K vyfiltrování užitečné složky signálu se používá Lock-in zesilovač. Lock-in zesilovač umožňuje měřit velmi slabé hodnoty napětí střídavého signálu, a to i v případě velmi silně zašuměného signálu. Efektivní hodnota proudového buzení elektrod je 4 mA.

Při budícím harmonickém signálu je nutné vyloučit výskyt skin efektu. Skin efekt je jev, který nastává u střídavého proudu, kdy elektromagnetické pole je vytlačováno na povrch materiálu. Tento jev je nežádoucí, protože zabraňuje odhalení poruchy uvnitř materiálu. Dle práce Todoroki(2012)[9] lze tento jev, při námi použité frekvenci a tloušťce materiálu 4 mm, zanedbat.

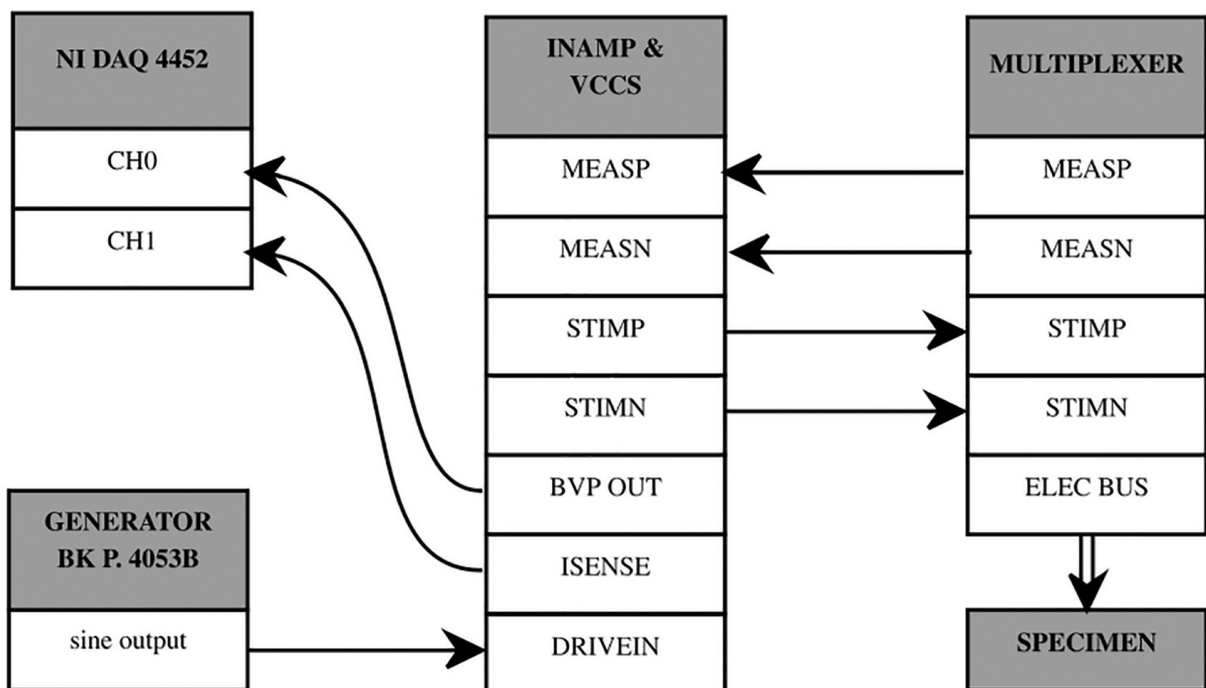
Měřicí vzor nazýváme pravidlo, podle kterého vybíráme elektrody, na kterých měříme napětí. Budící vzor nazýváme pravidlo, podle kterého vybíráme budící elektrody. V našem případě jsou vybírány protilehlé elektrody jako budící. Napětí je měřeno vždy na dvou

sousedních elektrodách. Náš vzorek obsahuje celkem 24 elektrod. Provedeme celkově 12 různých proudových stimulací. Při každé proudové stimulaci odebereme celkem vzorků 20 napětí. Tedy máme cyklus s celkově 240 naměřenými napětími. Abychom zvýšili přesnost a určili rozptyl měření, je možné provést několik měřících cyklů a naměřené hodnoty zprůměrovat.



Obrázek 2.1: Měřící soustava

Na obrázku 2.2 je zobrazen blokový diagram měřící soustavy. Je zde znázorněn přístrojový zesilovač (INAMP), s proudovým zdrojem (VCCS), který je implementovaný jako napěťově proudovým konvertorem, u kterého je napětí řízeno generátorem BK PRECISIONS 4053B. Sběr dat probíhá prostřednictvím PCI karty NI DAQ 4452 [7]. Aby bylo možné provádět automaticky přepínat proudové a budící vzory je zde multiplexor [8].



Obrázek 2.2: Blokový diagram měřicí soustavy [10]

Kapitola 3

Dopředná úloha

Cílem tomografie je sestavit a vyřešit rovnice inverzní úlohy, která určuje z naměřených napětí na elektrodách, umístěných na okraji sledované domény, prostorové rozložení vodivosti materiálu. Inverzní úloha je špatně podmíněná. Špatná podmíněnost je zapříčena tím, že rozdílné vodivosti v tělese se projevují malými změnami napětí na elektrodách. Také je způsobena značným nepoměrem známých a neznámých proměnných. Výsledná vodivost je proto snadno zkreslena šumem. Důsledkem špatné podmíněnosti je nestabilní řešení rovnice, z jehož příčiny se malá odchylka při měření na elektrodách projeví velkou odchylkou na výsledných rekonstruovaných vodivostech. První řešení obrácené úlohy pro elektrickou tomografii bylo publikováno Calderonem [11]. Abychom mohli řešit špatně podmíněnou úlohu zavádíme regularizaci.

Pro výpočet inverzní úlohy je potřeba vypočítat úlohu dopřednou. Dopředná úloha je okrajová úloha. Matematický model okrajové úlohy je odvozen z Maxwellových rovnic. Okrajové podmínky popisují napětí a proud na hranici zkoumaného tělesa. Aby bylo možné tuto spojitou úlohu řešit, musíme provést diskretizaci elektromagnetického pole. K diskretizaci bylo vytvořeno několik nástrojů: metoda hraničních prvků, metoda konečných diferencí a metoda konečných prvků. Tato práce pro modelování elektromagnetického pole používá metodu konečných prvků [12]. Teoretická část této kapitoly vychází z práce Holdera 2004 [13].

3.1 Matematický model

Matematický model elektromagnetického pole v materiálu na oblasti Ω , popíšeme diferenciální rovnicí, která vychází z Maxwellových rovnic. A to z Faradayova zákona elektromagnetické indukce 3.3 a z Ampérova zákona celkového proudu 3.4. Pro odvození

diferenciální rovnice budeme předpokládat, že materiál je izotropní, disperzní a lineární.

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3.2)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \quad (3.4)$$

V tomografii využíváme k buzení harmonický signál, proto vyjádříme Maxwellovy rovnice v harmonickém tvaru 3.5, 3.6. Nadále budeme pracovat s komplexní reprezentací polí. Doposud tedy byly veličiny funkcí místa a času. nyní již budeme pracovat s fázory, které značíme stříškou

$$\operatorname{rot} \hat{E} = -i\omega\mu\hat{H} \quad (3.5)$$

$$\operatorname{rot} \hat{H} = i\omega\hat{D} + \hat{J}. \quad (3.6)$$

Na následujících řádcích budeme pracovat pouze již s fázory a označení stříškou vynecháme. Předpokládáme, že uvnitř prostoru není přítomen zdroj energie, tedy celkový proud se rovná proudu vodivostnímu $J = J_c$. Dosadíme do rovnice 3.6 Ohmův zákon $J_c = \sigma E$ a za D dosadíme $D = \epsilon E$. Rovnici 3.6 pak přepíšeme jako

$$\operatorname{rot} H = (i\omega\epsilon + \sigma)E. \quad (3.7)$$

Dále předpokládáme kvazi-statickou aproximaci. Tedy při nízkých frekvencích můžeme zanedbat intenzitu magnetického pole $\operatorname{rot} E = 0$ a tedy $E = -\nabla\phi$. Po aplikaci divergence na rovnici 3.7 a dosazením $E = -\nabla\phi$ dostáváme matematický popis spojitěho rozložení potenciálu v materiálu

$$0 = \nabla \cdot (i\omega\epsilon + \sigma) \nabla \phi = \nabla \cdot \gamma \nabla \phi, \quad (3.8)$$

kde funkce γ je admitivita. Admitivitu považujeme za časově invariantní funkci závislou na poloze. V našem případě materiál nemá kapacitní charakter, proto se budeme zabývat pouze reálnou složkou admitivity tedy vodivostí.

3.2 Okrajové podmínky

Nyní když máme matematický popis rozložení potenciálu v materiálu, potřebujeme sestavit rovnice okrajových podmínek na tělese Ω . Okrajové rovnice se skládají z vyjádření

podmínek prvního a druhého typu. Okrajová podmínka prvního typu se nazývá Dirichletova okrajová podmínka, podmínka druhého typu se nazývá Neumannova okrajová podmínka.

Dirichletova okrajová podmínka specifikuje napětí na hranici tělesa Ω . Protože existuje přechodový odpor Z_k mezi elektrodou a materiálem, nemůžeme napětí na elektrodě pokládat U_k za stejné jako napětí na materiálu, na kterém je tato elektroda umístěna $\phi \neq U_k$. Proto musíme použít rovnici kompletního elektrodového modelu 3.9, který počítá s přechodovým odporem.

$$\phi + Z_k \gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} = U_k \quad (3.9)$$

Neumanova okrajová podmínka definuje proud, který vstupuje do oblasti Ω . Je vyjádřena pro elektrody rovnicí 3.10 a mimo elektrody rovnicí 3.11.

$$\int_{E_k} \gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = I_k \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, N \quad (3.10)$$

$$\gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{pro } \partial\Omega \setminus \cup_{k=1}^N E_k, \quad (3.11)$$

kde I_k je budící proud, kterými jsou stimulovány budící elektrody. Budící elektrody jsou vybrány podle řídicího vzoru. Do okrajových podmínek také zahrnujeme rovnice 3.12 a 3.13, které vyjadřují to, že uvnitř oblasti Ω není přítomen zdroj napětí ani proudu

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0 \quad (3.12)$$

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0. \quad (3.13)$$

Soustavu rovnic 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 nazýváme klasickou formulací okrajové úlohy.

3.3 Metoda konečných prvků

Jednou z metod, jak modelovat elektromagnetické pole, je metoda konečných prvků. Tato metoda rozkládá elektromagnetické pole na prvky, v jejichž uzlových bodech jsou určovány potenciály. Uzly nemusí být v tělese rovnoměrně rozloženy. V místech, ve kterých očekáváme prudké změny potenciálu, volíme hustší rozložení uzlů. Naopak v místech, ve kterých se potenciál nemění, můžeme volit řidší rozložení.

Metoda konečných prvků aproximuje rozložení potenciálu v materiálu funkcemi tvarovými, které jsou lineární nebo parabolické. Vyšší řády tvarových funkcí se nepoužívají,

neboť řešení má tendenci oscilovat [12].

Tvarové funkce tvoří funkce aproximační. Aproximační funkce je definována na každém uzlu sítě. Aproximační funkce w_i na uzlu i je součtem tvarových funkcí všech elementů, které obsahují uzel i

$$w_i = \sum_j w_i^j, \quad (3.14)$$

kde w_i^j je tvarová funkce j obsahující uzel i . Každá tvarová funkce se na jednom uzlu rovná jedné a na ostatních uzlech se rovná nule. Součet aproximačních funkcí na uzlech aproximuje potenciál ϕ

$$\phi \approx \sum_{i=1}^N u_i w_i, \quad (3.15)$$

kde w_i je aproximační funkce a u_i je potenciál na uzlu i . Tuto aproximační funkci dosadíme do rovnice rozložení elektromagnetického pole v materiálu 3.8.

$$0 = \nabla \cdot (i\omega\epsilon + \sigma) \nabla \phi \approx \nabla \cdot \gamma \nabla \sum_{i \in \text{uzly}} u_i w_i. \quad (3.16)$$

3.4 Řešení okrajové úlohy

Protože v našem případě nelze určit výsledek klasicky formulované okrajové úlohy, převedeme zadání na její slabou formulaci. Hlavní výhodou řešení slabě definované úlohy je snížení požadavku na diferenciaci řešení. V této kapitole ukážeme převod mezi klasickou a slabou formulací okrajové úlohy.

Mějme hraniční úlohy s okrajovými podmínkami prvního a druhého typu a rovnicí, která popisuje pole uvnitř tělesa Ω , které definujeme

$$L(u) = 0, \quad (3.17)$$

ve které je L diferenciální operátor nad funkcí u . Říkáme, že řešení rovnice 3.17 je klasické řešení okrajové úlohy, pokud splňuje rovnici 3.17 na celém definičním oboru a zároveň splňuje okrajové podmínky. Klasické řešení musí být v našem případě alespoň dvakrát diferencovatelné. Protože aproximace řešení rovnice 3.16 nemá spojitou první diferenci v uzlových bodech, musíme podmínky řešení úlohy oslabit. Převedeme rovnici 3.17 na slabou formulaci okrajové úlohy

$$\int_{\Omega} v L(\tilde{u}) dV = 0, \quad (3.18)$$

kde funkci v nazýváme testovací nebo váhová funkce. Řešení rovnice 3.18 říkáme slabé řešení okrajové úlohy. Slabé řešení aproximuje klasické řešení okrajové úlohy funkcí \tilde{u} a také snižuje požadavky na jeho diferenciaci.

Slabou formulaci úlohy můžeme řešit několika způsoby podle typu zvolené váhové funkce. Jedná se o metodu nejmenších čtverců, metodu vážených reziduí a Galerkinovou metodu. Zvolená váhová funkce minimalizuje zbytek (*rez*) v rovnici

$$\int_{\Omega} L(\tilde{u})dV \neq 0 = rez. \quad (3.19)$$

V našem případě je metoda konečných prvků řešena Galerkinovou metodou, u které se volí testovací funkci v stejná jako funkce aproximující řešení \tilde{u} .

3.5 Řešení slabé úlohy

Klasické řešení úlohy 3.16 předpokládá existenci spojitých druhých derivací potenciální funkce ϕ . Což je v našem případě problém, proto rovnici převedeme na slabou formulaci okrajové úlohy

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV = 0, \quad (3.20)$$

kde v je testovací funkce. Protože aproximujeme funkci ϕ lineárními funkcemi, narazíme na problém, že rovnice 3.20 obsahuje druhou diferencii, která je u lineárních funkcí rovna vždy nule. Proto musíme snížit derivaci funkce ϕ . Ke snížení derivace použijeme vektorovou identitu 3.21 a větu o divergenci 3.22.

$$\nabla \cdot (v \gamma \nabla \phi) = \gamma \nabla \phi \cdot \nabla v + v \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) \quad (3.21)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F dV = \oint F \cdot ndS \quad (3.22)$$

Po dosazení vektorové identity 3.21 do slabé formulace okrajové úlohy 3.20 dostáváme rovnici

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \gamma \nabla \phi) dV - \int_{\Omega} \gamma \nabla \phi \cdot \nabla v dV = 0, \quad (3.23)$$

na kterou aplikujeme větu o divergenci 3.22

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi v) dV = \int_{\partial\Omega} v \gamma \nabla \phi \cdot ndS. \quad (3.24)$$

Do upravené rovnice dosadíme Dirichletovu okrajovou podmínku a rovnicí kompletního elektrodového modelu 3.9. Tím dostaneme konečný tvar slabě formulované okrajové úlohy

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla \phi \cdot \nabla v dV = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (U_k - \phi) v dS. \quad (3.25)$$

Řešení této rovnice okrajové úlohy již musí pouze splňovat integrovatelnost prvních slabých derivací funkce ϕ a funkce admitivity γ musí být omezená [14]. Rovnici 3.25 řešíme metodou konečných prvků a Galerkinovou metodou. Dosadíme tedy za ϕ aproximační funkci 3.15 a stejnou funkci dosadíme za testovací funkci v . Pro lepší přehlednost budeme značit testovací funkci vlnovkou. Po dosazení dostáváme

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla \sum_{i=1}^N u_i w_i \cdot \nabla \tilde{w}_j dV = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} \left(U_k - \sum_{i=1}^N u_i w_i \right) \tilde{w}_j dS \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.26)$$

Rovnici upravíme tak, abychom mohli vytknout potenciál na uzlech u_i a potenciál na elektrodách U_k

$$\sum_{i=1}^N u_i \left(\int_{\Omega} \gamma \nabla w_i \cdot \nabla \tilde{w}_j dV + \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} w_i \tilde{w}_j dS \right) - \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} U_k \tilde{w}_j dS = 0 \quad (3.27)$$

pro $j = 1, 2, \dots, N$.

Pro úplné zadání okrajové úlohy musíme ještě upravit Neumanovu okrajovou podmínku 3.9. Nejdříve do rovnice Neumanovi okrajové podmínky dosadíme aproximaci potenciálu 3.15 a dostaneme

$$I_k = \int_{E_k} \gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (U_k - \phi) dS = \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} \left(U_k - \sum_{i=1}^N u_i w_i \right) dS \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.28)$$

Neumanovu rovnici dále upravíme tak, abychom vytkli potenciál na uzle u_i a potenciál na elektrodách U_k

$$I_k = \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} U_k dS - \sum_{i=1}^N \left(\int_{E_k} \frac{1}{Z_k} w_i dS \right) u_i \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.29)$$

Upravené rovnice pro fyzikální model elektromagnetického pole a Neumanovu okrajovou podmínku zapíšeme maticově

$$Yp = c, \quad (3.30)$$

kde matici Y nazýváme systémovou nebo admitanční maticí [15]

$$Y = \begin{bmatrix} A_M + A_Z & A_V \\ A_V^T & A_D \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Prvky submatic systémové matice definujeme jako

$$A_{M_{ji}} = \int_{\Omega} \gamma \nabla w_i \nabla \tilde{w}_j dV \quad (3.32)$$

$$A_{Z_{ji}} = - \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} w_i \tilde{w}_j dS \quad (3.33)$$

$$A_{V_{ik}} = \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} w_i dS \quad (3.34)$$

$$A_{D_k} = \text{diag} \left(\int_{E_k} \frac{1}{Z_k} dS \right), \quad (3.35)$$

vektor neznámých p

$$p = \begin{bmatrix} u \\ U \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

ve kterém je vektor napětí na uzlech u a vektoru napětí na elektrodách U . Vektor pravé strany c

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

ve kterém I je proudová injektáž. Rovnici 3.29 a 3.28 lze spojit do jedné rovnice

$$\sum_{k=1}^N I_k \tilde{W}_j = \sum_{i=1}^N u_i \int_{\Omega} \gamma \nabla w_i \cdot \nabla \tilde{w}_j dV + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (U_k - u_i w_i) (\tilde{W}_j - \tilde{w}_j) dS$$

pro $j = 1, 2, \dots, N$.

$$(3.38)$$

Aby existovalo jednoznačné řešení rovnice 3.30 musíme vybrat uzel, který budeme považovat za zem nebo mít nulový potenciál [16].

Pro řešení soustavy rovnic 3.30 můžeme využít vlastnosti systémové matice Y . Tato matice je řídká a symetrická. V případě, že matice Y je reálná, což se týká našeho případu, protože zanedbáváme kapacitní vlastnosti materiálu, je matice také pozitivně definitivní. Dopřednou úlohu řešíme přímou nebo iterační metodou [15]. Přímá využívá maticového rozkladu. V případě, když je systémová matice reálná, můžeme provést Cholevskyho roz-

klad, pro komplexní matici provedeme LU rozklad. Jako iterační metody se používá metoda konjugovaných gradientů pro případ reálné matice, v případě komplexní matice se používá metoda bi-sdružených gradientů.

3.6 Jakobián

K výpočtu inverzní úlohy musíme sestavit citlivostní matici neboli Jakobián. Citlivostní matice dává do vztahu změnu vodivosti na změně napětí na elektrodách.

Citlivostní matice je definována vztahem

$$J = \begin{pmatrix} \partial V(I_1^d)/\partial\gamma_1 & \cdots & \partial V(I_1^d)/\partial\gamma_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial V(I_K^d)/\partial\gamma_1 & \cdots & \partial V(I_K^d)/\partial\gamma_j \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

kde výraz $\partial V(I_n^d)$ udává změnu okrajového napětí na elektrodách při řídicím proudovém vzoru I_n^d a $\delta\gamma_m$ je změna admitivity na uzlu. Citlivostní matici lze vypočítat přímým výpočtem nebo pomocí adjoint metody.

Přímý způsob výpočtu citlivostní matice vychází z její definice. U metody přímého výpočtu citlivostní matice sestavujeme dopřednou úlohu pro perturbaci admitivity na každém uzlu sítě a pro všechny řídicí proudové vzory. Tento způsob je výpočetně velmi náročný, protože síť obsahuje tradičně tisíce až deseti tisíce uzlů. Proto se používá pro výpočet citlivostní matice adjoint metoda.

Adjoint metoda je odvozena v literatuře několika způsoby [17], [18]. Hlavní výhodou adjoint metody je zmenšení výpočetní náročnosti citlivostní matice. Nemusí se počítat dopředná úlohy pro každou perturbaci na každém uzlu sítě. Stačí, když se vypočítá pro každý proudový vzor gradient napětí při řídicím proudovém vzoru I^d a gradient napětí při měřícím vzoru I^m

$$\frac{\partial V^{d,m}}{\partial\gamma} = \int_{\Omega} \nabla u(I^d) \nabla u(I^m). \quad (3.40)$$

Výpočet změny na i prvku sítě při jednotkovém budícím proudu vypočítáme jako

$$\frac{\partial V_i^{d,m}}{\partial\gamma_i} = \int_{\Omega_i} \nabla u(I^d) \nabla u(I^m). \quad (3.41)$$

Kapitola 4

Inverzní úloha

Nyní již máme připraveny nástroje pro výpočet inverzní úlohy. Způsoby řešení inverzní úlohy rozdělíme na statistické a deterministické metody. Statistické metody řeší inverzní úlohu algoritmy založené na metodě MCMC (Monte Carlo Monte Chain) [18]. Deterministické metody řeší inverzní úlohu lineárními a nelineárními algoritmy. Odvození deterministického řešení vychází ze statistického a deterministického rozboru úlohy. Pro popis lineární metody zavedu pseudoinverzi a popíši algoritmus singulárního rozkladu a zobecněného singulárního rozkladu. Singulární rozklad použiji také pro detailní rozbor špatné podmíněnosti inverzní úlohy. U nelineární inverze popíši nejrozšířenější Gauss-Newtonův optimalizační algoritmus. Teoretický rozbor inverzní úlohy vychází z práce Kaipia 1999 [18].

Aby se dala špatně podmíněná úloha řešit, musíme zavést regularizaci. Regularizace zajišťuje, že úloha je dobře podmíněna za cenu zhoršené přesnosti výsledku dané úlohy. Musíme tedy určit optimální způsob zásahu regularizace do inverzní úlohy. Zásah regularizace ovlivňuje hyperparametr. Optimalizace hyperparametru minimalizuje zhoršení výsledku, který je dáno zásahem regularizace.

4.1 Použité statistické metody

Ke statistické inverzi používáme Bayesovskou statistiku. Bayesovská statistika zpřesňuje odhad počáteční pravděpodobnosti, která je dána znalostí modelu, dalšími pozorováními. Základem bayesovské statistiky je Bayesův vzorec

$$\pi(x, y) = \pi(x|y)\pi(y) = \pi(y|x)\pi(x) \quad (4.1)$$

$$\pi(y|x) = \frac{\pi(x, y)}{\pi(x)} = \frac{\pi(x, y)}{\int \pi(x, y)dy}, \quad (4.2)$$

ve kterém je x vektor nepřímo pozorovatelných parametrů systému, y je vektor přímo pozorovatelných stavů systému. Výraz $\pi(x)$ nazýváme apriorní hustota pravděpodobnosti neboli prior. Prior udává počáteční odhad o pravděpodobnostním rozdělení nepřímo pozorovaných stavů systému. Tento pravděpodobnostní odhad není závislý na vstupních datech. Výraz $\pi(y|x)$ nazýváme věrohodnostní funkcí (likelihood function). Věrohodnostní funkce je sdružená hustota pravděpodobnosti všech prvků výběru. Výraz $\pi(x|y)$ se nazývá aposteriorní pravděpodobnost. Pro konkrétní pozorování $Y = y$ vyjádříme aposteriorní pravděpodobnost vztahem

$$\pi(x|y) \propto \pi(y|x)\pi(x). \quad (4.3)$$

V inverzní úloze maximalizujeme aposteriorní rozdělení funkce

$$\arg \max_x \pi(x, y) = \arg \max_x \pi(x|y) = \arg \max_x \pi(y|x)p(x). \quad (4.4)$$

Jestliže neznáme apriorní informaci o rozdělení náhodné veličiny, maximalizujeme věrohodnostní funkci

$$\arg \max_x \pi(y|x). \quad (4.5)$$

4.2 Statistická inverze

Uvažujme pravděpodobnostní prostor (Σ, F, P) , kde Σ je neprázdná množina všech elementárních jevů, F je množina náhodných jevů, která obsahuje podmnožinu měřitelných elementárních jevů a zobrazení P přiřazuje každému náhodnému jevu reálné číslo z intervalu $[0, 1]$.

Dále mějme zobrazení nepřímo měřitelných stavů $(M, N) : \Sigma \rightarrow C^k$, kde M je admitivita a N je šum a zobrazení přímo měřitelných stavů napětí na elektrodách $V : \Sigma \rightarrow R^n$. Funkce F definuje vztah mezi přímo a nepřímo pozorovatelnými stavy modelu

$$V = F(M, N). \quad (4.6)$$

Aposterioorní rozdělení pravděpodobnosti inverzní úlohy $\pi(v|m, n)$ pro danou vodivost $m \in M$ a šum $n \in N$ je rovno $\delta(v - F(m, n))$, kde δ je Diracova funkce. Mějme pravděpodobnostní rozdělení $\pi(v, m, n)$, pak podle Bayesovy věty platí

$$\pi(v, m, n) = \pi(v|m, n)\pi_{pr}(m, n) = \delta(v - F(m, n))\pi_{pr}(m, n). \quad (4.7)$$

Pravděpodobnostní rozdělení $\pi_{pr}(m, n)$ je apriorní pravděpodobnost. Pro zjednodušení

úlohy budeme považovat šum nezávislý na stavech modelu a tedy

$$\pi_{pr}(m, n) = \pi_{pr}(m)\pi_{noise}(n). \quad (4.8)$$

Dále budeme uvažovat šum aditivního charakteru, tedy rovnici 4.6 přepíšeme

$$V = F(M, N) = h(M) + N. \quad (4.9)$$

Potřebujeme se zbavit závislosti funkce hustoty pravděpodobnosti $\pi(m, v, n)$ na šumu. Musíme proto integrovat hustotu pravděpodobnosti přes šum, při integraci využijeme vlastnosti šumu 4.8, 4.9

$$\begin{aligned} \pi(m, v) &= \int \delta(v - F(m, n))\pi_{pr}(m, n)dn = \\ &= \int \delta(v - h(m) - n)\pi_{pr}(m)\pi_{noise}(v - h(m))dn = \pi_{pr}(m)\pi_{noise}(v - h(m)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Z bayesovského vzorce dostáváme pro hustotu pravděpodobnosti

$$\pi(m, v) = \pi_{pr}(m)\pi_{noise}(v - h(m)) = \pi(m)\pi(v|m) \quad (4.11)$$

Hodnoty podmíněného očekávání vyjádříme vzorcem

$$m_{|v} = \int m\pi(m|v)dx. \quad (4.12)$$

Výpočet této hodnoty je na rozdíl od maximalizace aposteriorní pravděpodobnosti integrální problém [18]. Chceme-li získat představu o spolehlivosti odhadu, potřebujeme získat interval spolehlivosti. Marginální hustotu pravděpodobnosti počítáme jako

$$\pi(m_i|v) = \int m\pi(m|v)dm_1, \dots, dm_{i-1}, dm_{i+1}, \dots, dm_n. \quad (4.13)$$

Z marginální hustoty pravděpodobnosti určíme interval spolehlivosti pro daný parametr. Podle vzorce

$$P_c = \int_{\tilde{m}_i - \delta m_i}^{\tilde{m}_i + \delta m_i} \pi(m_i|v)dm_i, \quad (4.14)$$

kde \tilde{m}_i je střední hodnota odhadu proměnné m_i a δm_i je rozsah, pro který platí, že hodnota m_i leží v intervalu δ s pravděpodobností P_c . Pro výpočet hodnoty podmíněného očekávání je zapotřebí spočítat integrál z aposteriorní pravděpodobnosti. Tento integrál se počítá numerickou metodou, která je založena na metodě Monte Carlo.

4.2.1 Numerická integrace

Integrál podmíněného očekávání a interval spolehlivosti je vypočítán metodou MCMC Monte Carlo Markov Chain, která slouží k aproximaci výpočtu integrálu.

Metoda Monte Carlo integrace spočívá v přibližném výpočtu integrálu funkce. V našem případě potřebujeme určit integrál funkce

$$F(x) = \int g(x)p(x), \quad (4.15)$$

kde $p(x)$ je hustota pravděpodobnostního rozdělení měření a $g(x)$ je měřicí funkce. Numerickou integrací aproximujeme integrál funkce sumou

$$F(x) = \int g(x)p(x) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N g(X_i), \quad (4.16)$$

kde $\{X_1 \cdots X_i \cdots X_n\}$ jsou vzorky hodnot, které odpovídají pravděpodobnostnímu rozdělení p . Pro generaci náhodného vzorku X_i se používá Gibbsův nebo Metropolisův Hastingsův algoritmus.

4.3 Inverze jako statistický problém

V dalších řádcích textu budeme předpokládat, že rozdělení šumu π_{noise} odpovídá Gaussovu rozdělení s kovarianční maticí C_v a střední nulovou hodnotou. Vyjádříme věrohodnostní funkci podle vzorce 4.11 jako

$$\pi(d|m) = \pi_{noise}(v - h(m)) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(d - h(m))^T C_v^{-1}(d - h(m)) \right\} \quad (4.17)$$

a podle vzorce 4.11 vyjádříme hustotu apriorního rozdělení náhodné veličiny m jako

$$\pi_{pr}(m) \propto \exp \{(-\beta W(m))\}, \quad (4.18)$$

kde platí, že $W(m) \geq 0$ a $\beta > 0$. Parametr β definuje, jak dalece důvěřujeme apriorní informaci. Jestliže předpokládáme, že apriorní informace má normální rozdělení, vyjádříme hustotu apriorního rozdělení náhodné veličiny m jako

$$\pi_{pr}(m) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(m - m^*)^T C_m^{-1}(m - m^*) \right\}, \quad (4.19)$$

kde C_m je kovarianční matice vodivosti se středem v m^* . Aposteriorní pravděpodobnost rozdělení vyjádříme jako

$$\pi(m|d) \propto \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2}(d - h(m))^T C_v^{-1}(d - h(m)) - \beta W(m) \right) \right\} \quad (4.20)$$

respektive jako

$$\pi(m|d) \propto \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2}(d - h(m))^T C_v^{-1}(d - h(m)) - \frac{1}{2}(m - m^*)^T C_m^{-1}(m - m^*) \right) \right\} \quad (4.21)$$

pro normální rozdělení apriorní informace.

Výpočet inverzní úlohy bez regularizace spočívá v maximalizaci věrohodnostní funkce 4.19 což odpovídá řešení výrazu

$$\tilde{m} = \arg \min_m \frac{1}{2}(d - h(m))^T C_v^{-1}(d - h(m)). \quad (4.22)$$

Jestliže známe apriorní hustotu pravděpodobnosti, pak ve výpočtu inverzní úlohy maximalizujeme aposteriorní pravděpodobnost 4.20 řešíme rovnici

$$\tilde{m} = \arg \min_m \left(\frac{1}{2}(d - h(m))^T C_v^{-1}(d - h(m)) + \alpha W(m) \right). \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

V případě normálního rozdělení vodivosti 4.21 minimalizujeme výraz

$$\tilde{m} = \arg \min_m \left((d - h(m))^T C_v^{-1}(d - h(m)) + (m - m^*)^T C_m^{-1}(m - m^*) \right). \quad (4.25)$$

Maximalizace aposteriorní pravděpodobnosti odpovídá řešení inverzní úlohy s regularizací.

4.4 Inverze jako deterministický problém

Mějme funkci $h(m)$, která převádí admitivitu na odpor na elektrodách

$$v = h(m). \quad (4.26)$$

Funkci h linearizujeme, a tedy dostaneme, že

$$v = Hm. \quad (4.27)$$

Naším cílem je najít takové \tilde{m} , které minimalizuje Euklidovu normu v rovnici

$$\tilde{m} = \arg \min_m \|v - Hm\|_2. \quad (4.28)$$

V našem případě je tato úloha špatně podmíněná a odpovídá řešení inverzní úlohy bez regularizace. Proto řešením této optimalizační úlohy nedosáhneme dobrého výsledku. Musíme přidat podmínku pro parametr m , která bude zahrnuta ve funkci $W(m)$ a hledat řešení rovnice

$$\tilde{m} = \arg \min_m (\|v - Hm\|_2 + \alpha W(m)), \quad (4.29)$$

ve které je funkce $W(m) \geq 0$ a hyperparametr $\alpha > 0$. Zvláštním tvarem funkce $W(m)$ je případ, ve kterém funkce $W(m)$ odpovídá Euklidově normě

$$W(m) = \|L(m - m^*)\|_2, \quad (4.30)$$

kde L je matice, pro kterou platí, že $L^T L$ je pozitivně semidefinitní matice. Lineární inverze s regularizací hledá řešení rovnice

$$\tilde{m} = \arg \min_m (\|v - Hm\|_2 + \alpha \|L(m - m^*)\|_2). \quad (4.31)$$

4.5 Lineární inverze

Lineární inverze s regularizací lze interpretovat jako statistický problém minimalizující aposteriorní pravděpodobnost, ve které má vodivost normální rozdělení 4.25, nebo jako deterministickou inverzi, kde funkce $W(m)$ odpovídá Euklidově normě 4.31.

Výsledné rovnice deterministické 4.31 i statistická 4.25 interpretace jsou navzájem převoditelné. Pro zjednodušení budeme předpokládat stejný nezávislý šum na všech elektrodách. Ve statistické interpretaci se vyskytuje kovarianční matice C_m a C_v . Protože předpokládáme stejný nezávislý šum na všech elektrodách, kovarianční matice C_v lze vyjádřit jako $C_v^{-1} = \frac{1}{s_v^2} I$. V deterministické inverzi se vyskytují parametry α a matice prioru L . Parametry rovnic z lineárního a statistického rozboru úlohy převedeme jako [19]

$$\alpha = \frac{s_v}{s_m} \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{s_m^2} L^T L = C_m^{-1}, \quad (4.33)$$

kde s_m je změna velikosti amplitudy vodivosti a s_v je průměrná velikost šumu měření na

elektrodách.

Lineární inverzní úlohy řešíme pseudoinverzí. Pseudoinverzní matici, kterou je potřeba určit, lze vypočítat prostřednictvím singulárního rozkladu. Singulárním rozkladem lze také určit, zda je úloha dobře podmíněná. Jiným způsobem, jak řešit lineární inverzní úlohu s regularizací, je zobecněným singulárního rozkladu.

4.5.1 Pseudoinverze

Pseudoinverze rozšiřuje pojem inverze na obdélníkové a singulární matice. Matici A^\dagger nazýváme pseudoinverzní maticí k matici A , jestliže splňuje následující podmínky

$$AA^\dagger A = A \quad (4.34)$$

$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \quad (4.35)$$

$$(AA^\dagger)^* = AA^\dagger \quad (4.36)$$

$$(A^\dagger A)^* = A^\dagger A. \quad (4.37)$$

Jestliže pro matici $A \in R^{m \times n}$ platí, že $m < n$ a matice má plnou řádkovou hodnost, pak existuje pseudoinverzní matice A^\dagger k matici A , kterou lze vypočítat jako

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T. \quad (4.38)$$

Tedy rovnici

$$c = Ax, \quad (4.39)$$

kde A splňuje předcházející podmínky, řešíme pseudoinverzí následujícím způsobem

$$c = Ax \quad (4.40)$$

$$A^T c = A^T Ax \quad (4.41)$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T c. \quad (4.42)$$

Pseudoinverzi se také nazývá Moore–Penrose inverze. Řešení rovnice x prostřednictvím pseudoinverze je minimální vzhledem k Euklidově normě.

Výpočet \tilde{m} regularizované úlohy 4.31, ve které předpokládáme $m^* = 0$, provedeme pseudoinverzí rovnice

$$\bar{v} = \bar{H}m, \quad (4.43)$$

kde

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H \\ \alpha L \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Z této rovnice pseudoinverzí vyjádříme m a dostaneme vzorec, podle kterého počítáme řešení lineární regularizované úlohy

$$m = (\bar{H}^T \bar{H})^{-1} \bar{H}^T \bar{v} = \bar{H}^\dagger \bar{v} \quad (4.46)$$

$$m = (H^T H + \alpha^2 L^T L)^{-1} H^T v. \quad (4.47)$$

4.5.2 Singulární rozklad

Mějme obdélníkovou matici $A \in R^{m \times n}$. Matici lze prostřednictvím singulárního rozkladu (SVD - Singular Value Decomposition) vyjádřit jako

$$A = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^q u_i \sigma_i v_i^t, \quad (4.48)$$

kde matice U a V jsou unitární matice. Unitární matice je ortonormální matice, pro kterou platí, že k ní Hermitovsky sdružená matice je maticí inverzní. Matice Σ je diagonální matice s nezápornými čísly na diagonále. Tato čísla se nazývají singulární čísla. Singulární čísla jsou na diagonále uspořádána tak, že

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q \geq 0. \quad (4.49)$$

Pseudoinverzní matici je možné počítat prostřednictvím singulárního rozkladu. Při singulárním rozkladu matice vzniká chyba zaokrouhlením. Tuto chybu je potřeba eliminovat, protože při inverzní úloze se tato chyba výrazně promítne do výsledku obrazu vodivosti. Abychom omezili vliv chyby zaokrouhlením zavedeme pojem maticové hodnoty.

Mějme matici $A \in R^{m \times n}$, která má hodnotu r . Vlivem zaokrouhlování při výpočtu singulárního rozkladu matice, vzroste hodnota maticového rozkladu na hodnotu $n > r$. Abychom omezili chybu v inverzní úloze, hledáme matici \bar{A} , která bude mít po singulárním

rozkladu hodnost r , a která se bude co nejvíce blížit původní matici

$$\min \|A - \bar{A}\|_2. \quad (4.50)$$

Definujeme numerickou hodnost matice A , při toleranci $\eta \geq 0$

$$r_\eta = r_\eta(A, \eta) = \min_{\|E\|_2 \leq \eta} \text{rank}(A + E), \quad (4.51)$$

dále definujeme matici A_r

$$A_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^t, \quad (4.52)$$

kde pro parametr r platí, že $r \leq n$ a pravá strana odpovídá singulárnímu rozkladu matice A pro $r = n$. Pro matici A_r platí

$$\min_{\text{rank}(\bar{A})=r} \|A - \bar{A}\|_2 = \min \|A - A_r\|_2 = \sigma_{r+1}, \quad (4.53)$$

kde matice A_r má numerickou hodnost r_η právě tehdy, když

$$\sigma_r > \eta \geq \sigma_{r+1}. \quad (4.54)$$

Numerická hodnost r je nejčastěji definována jako singulární číslo, které splňuje rovnici [20]

$$\sigma_r > \epsilon \cdot \sigma_1, \quad (4.55)$$

nebo rovnici

$$\sigma_r > \epsilon \cdot \|A\|_F. \quad (4.56)$$

Podmínka 4.56 se používá v praxi k zjištění numerické hodnosti matice. Aby byla numerická hodnost dobře definovaná, musí existovat dostatečně velká mezera mezi singulárními čísly σ_r a σ_{r+1} . V případě špatně podmíněné matice nelze numerickou hodnost matice určit, protože neexistuje dobře definovaná mezera mezi singulárními čísly. Mezera mezi singulárními čísly je definována vzorcem

$$\omega_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}. \quad (4.57)$$

Nyní, když jsme se seznámili se singulárním rozkladem, přejdeme k řešení inverzní úlohy prostřednictvím singulárního rozkladu a pseudoinverze. Pseudoinverzní matici můžeme vypočítat prostřednictvím singulárního rozkladu jako

$$A^\dagger = \sum_{i=1}^{n=\text{rank}(A)} \frac{v_i u_i^T}{\sigma_i}. \quad (4.58)$$

Kdybychom dokázali zabránit chybám při výpočtu singulárního rozkladu, a tedy hodnost matice a numerická hodnost matice by byly shodné. Mohli bychom vypočítat řešení inverzní úlohu jako

$$x = A^\dagger b = \sum_{i=1}^{n=\text{rank}(A)} \frac{v_i u_i^T}{\sigma_i} b. \quad (4.59)$$

Protože však tato chyba existuje, numerická hodnost matice se liší od hodnosti matice. Musíme proto řešení inverzní úlohy upravit na

$$x_{r_\eta} = A_{r_\eta}^\dagger b = \sum_{i=1}^{r_\eta < n=\text{rank}(A)} \frac{v_i u_i^T}{\sigma_i} b. \quad (4.60)$$

Řešení této úlohy se nebude lišit více než o η .

V další části se budeme zabývat tím, jak určíme, zda je matice dobře podmíněna. Jestliže je matice dobře podmíněná, pak úloha je stabilní a řešení inverzní úlohy dává dobré výsledky. Podmíněnost matice je charakterizována číslem podmíněnosti κ . Jestliže se toto číslo blíží jedné, pak inverzní úloha dává přesné výsledky. Naopak, jestliže toto číslo nabývá vysoké hodnoty, pak je úloha špatně podmíněná. Číslo podmíněnosti je definováno vztahem

$$\kappa = \frac{\|A\|_2}{\|A^\dagger\|} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{rank}(A)}} \quad (4.61)$$

$$\kappa_k = \frac{\sigma_1}{\sigma_k}. \quad (4.62)$$

$$(4.63)$$

Nyní ukážeme vztah mezi číslem podmíněnosti a stabilitou řešení. Mějme rovnici

$$Ax = b \quad (4.64)$$

$$(4.65)$$

a provedme permutaci na této soustavě

$$Ax + A\delta x + \delta Ax + \delta A\delta x = b + \delta b. \quad (4.66)$$

Za podmínky $\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$, je vztah mezi změnou řešení rovnice, relativní změnou na vstupních datech a změnou modelu, dán vztahem

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right). \quad (4.67)$$

Jestliže předpokládáme, že $\kappa(A)\|\delta A\| \ll \|A\|$ potom rovnici upravíme

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right), \quad (4.68)$$

z rovnice vidíme, že jestliže κ je malé, pak odchylka ve změně modelu a změně vstupních dat, nemá velký vliv na změnu řešení rovnice. A naopak jestliže κ je velká, pak i malá změna ve vstupních datech nebo v určení modelu má velký vliv na změnu řešení rovnice.

Singulární rozklad použijeme také pro rozbor Tikhonovi regularizace. Pro Tikhonovu regularizaci platí, že matice L v rovnici 4.31 je jednotková matice. Jestliže předpokládáme, že vodivost $m^* = 0$, řešení inverzní úlohy přepíšeme prostřednictvím singulárního rozkladu [21] jako

$$m = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i, \quad (4.69)$$

ve kterém člen

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \quad (4.70)$$

se nazývá filtrační faktor. Obecně může být podoba filtračního faktoru f různá a souhrnně nazýváme inverzní úlohu ve tvaru

$$m = \sum_{i=1}^r f_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \quad (4.71)$$

metody spektrálního filtrování [21].

Řešit inverzní úlohu 4.31 prostřednictvím singulárního rozkladu, lze i pro jinou než jednotkovou matici L . Jestliže matice L má plnou hodnost, lze provést transformaci souřadnic a řešit rovnici v novém souřadném systému. Původní soustavu převedeme do nového

souřadného systému $\bar{H} = HL^{-1}$, $\bar{m} = Lm$, $\bar{v} = v$ a rovnici

$$\tilde{m} = \arg \min_{\bar{m}} (\|\bar{v} - \bar{H}\bar{m}\|_2 + \alpha\|\bar{m} - \bar{m}^*\|_2) \quad (4.72)$$

řešíme stejně jako Tikhonovu regularizace. Výsledek v původních souřadnicích dostaneme zpětnou transformací $m = L^{-1}\bar{m}$.

4.6 Zobecněný singulární rozklad

Zobecněný singulární rozklad rozšiřuje singulární rozklad na maticovou dvojici (A, L) , ve které maticová dvojice má rozměry $A \in R^{m \times n}$, $L \in R^{n \times p}$ kde $m \leq n \leq p$. Dále předpokládejme, že pro jádra matic platí $N(A) \cap N(L) = 0$, tedy matice

$$\begin{bmatrix} A \\ L \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

má plnou řádkovou rovnost. Tento maticový rozklad nebyl standardizován, a proto může mít různé podoby, v této práci zvolím rozklad definovaný v programu MATLAB. Maticová dvojice je rozložena na maticový součin

$$A = U\Lambda X^T \quad (4.74)$$

$$L = VMX^T, \quad (4.75)$$

kde matice $U \in R^{m \times m}$ a matice $V \in R^{p \times p}$ jsou unitární matice. Matice $X \in R^{n \times n}$ je nesingulární čtvercová matice. Matice $\Lambda \in R^{m \times m}$ je diagonální matice, ve které jsou prvky na diagonále posunuty o k , tak že $k = 0$ pro $m > n$, $k = n - m$ pro $m \leq n$. Prvky na diagonále jsou seřazeny tak, že

$$0 \leq \Lambda_1 \leq \dots \leq \Lambda_p \leq 1. \quad (4.76)$$

Matice $M \in R^{p \times n}$ je diagonální matice, ve které jsou prvky na diagonále seřazeny tak, že

$$\mu_1 \geq \dots \geq \mu_p \geq 0. \quad (4.77)$$

Diagonální prvky matic Λ a M jsou normovány tak, aby platilo

$$\Lambda_i^2 + \mu_i^2 = 1 \text{ pro } i = 1 \dots p. \quad (4.78)$$

Pro zobecněný singulární rozklad maticové dvojice (A, L) definujeme zobecněná singulární čísla jako

$$\gamma_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \quad \text{pro } i = 1 \cdots p. \quad (4.79)$$

Řešení inverzní úlohy 4.31 definujeme prostřednictvím zobecněného singulárního rozkladu jako

$$m = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \alpha^2} \frac{u_{i+k}^T b}{\Lambda_i} y_i, \quad (4.80)$$

kde $Y = X^{-T}$ (inverze transpozice) a $k = 0$ pro $m > n$ a $k = n - m$ pro $m \leq n$.

4.7 Nelineární inverze

Inverzní úloha se řeší také nelineárními iterativními algoritmy. Nejběžnější algoritmem je Gauss-Newtonova optimalizační metoda. Nelineárními algoritmy lze minimalizovat i jiný než Euklidovský tvar funkce $W(m)$.

Označme ztrátovou funkci ψ

$$\psi = \|v - h(m)\|_2 + \alpha W(m), \quad (4.81)$$

Gauss-Newtonova metoda spočívá v nalezení minima v okolí bodu m_i na druhém stupni Taylorova rozvoje funkce ψ

$$\psi(m_i + \delta m) \approx \tilde{\psi}(m_i + \delta m) = \psi(m_i) + \psi'(m_i)\delta m + \frac{1}{2}\psi''(m_i)\delta m^2. \quad (4.82)$$

Toto minimum je výchozí hodnota pro další krok algoritmu, který vypočítáme jako

$$m_{i+1} = m_i + s_i \delta m, \quad (4.83)$$

kde parametr s_i určuje délku iteračního kroku.

Abychom našli minimum funkce 4.82 v okolí bodu m_i položíme první derivaci podle δm rovnou nule

$$0 = \frac{\partial}{\partial \delta m} \left(\psi(m_i) + \psi'(m_i)\delta m + \frac{1}{2}\psi''(m_i)\delta m^2 \right) \quad (4.84)$$

$$0 = \psi'(m_i) + \psi''(m_i)\delta m. \quad (4.85)$$

Následně z rovnice vyjádříme δm

$$\delta m = -\frac{\psi'(m_i)}{\psi''(m_i)}, \quad (4.86)$$

kde $\psi'(m_i)$ je gradient a $\psi''(m_i)$ je hessián funkce v bodě m_i . Gradient a hessián funkce ψ lze vyjádřit jako

$$\psi' = -2\frac{\partial h(m)}{\partial m}^T (v - h(m)) + \alpha DW(m) \quad (4.87)$$

$$\psi'' = 2\frac{\partial h(m)}{\partial m}^T \frac{\partial h(m)}{\partial m} + \frac{\partial^2 h(m)}{\partial m^2} (v - h(m)) + \alpha D^2 W(m). \quad (4.88)$$

V hessiánu zanedbáme druhé derivace funkce $h(m)$

$$\psi'' = 2\frac{\partial h(m)}{\partial m}^T \frac{\partial h(m)}{\partial m} + \alpha D^2 W(m). \quad (4.89)$$

Jestliže funkci $h(m)$ linearizujeme $h(m) \approx Hm$, $\frac{\partial h(m)}{\partial m} \approx Jm$ a funkci $W(m)$ vyjádříme jako Euklidovu normu $W(m) = \|L(m - m^*)\|_2$, pak iterační krok Gauss-Newtonovi optimalizační metody vyjádříme jako

$$m_{i+1} = m_i - s_i (J_i^T J_i + \alpha L^T L)^{-1} (J_i^T (v - Hm_i) - \alpha L^T L(m_i - m^*)). \quad (4.90)$$

Při výpočtu se v některých situacích provede pouze jeden iterační krok Gauss-Newtonova algoritmu. Tento algoritmus se pak nazývá jako Gauss-Newtonův jednokrokový algoritmus [22].

4.8 Absolutní a rozdílový obraz

V popisu inverzní úlohy jsme se doposud zabývali absolutní tomografií, která vyhodnocuje absolutní vodivost materiálu. K detekování poruchy na kompozitním materiálu vyhodnocujeme relativní změnu vodivosti oproti neporušenému stavu. Tedy v našem případě inverzní problém je definován jako

$$\delta \tilde{m} = \arg \min_{\delta m} \|J\delta m - \delta d\|_2, \quad (4.91)$$

regularizovaná inverzní úloha je definována jako

$$\delta\tilde{m} = \arg \min_{\delta m} \|J\delta m - \delta d\|_2 + \alpha W(m). \quad (4.92)$$

Opět se jedná o špatně podmíněnou úlohu. Řešení inverzní úlohy odpovídá předchozí teorii, kde vodivost m odpovídá relativní změně vodivosti δm . Matice H odpovídá citlivostní matici J a napětí na elektrodách v odpovídá relativní změně napětí oproti homogennímu stavu δv . Regularizace předpokládá $m^* = 0$, protože výchozí vodivost materiálu je bez poruchy. Řešení lineární inverzní úlohy pak vyjádříme jako

$$\delta m = (J^T J + \alpha L^T L)^{-1} J^T \delta d. \quad (4.93)$$

Kapitola 5

Regularizace

Regularizace inverzní úlohy je způsob, jak úlohu vyřešit i přes její špatnou podmíněnost. Základním způsobem regularizace je spektrální filtrování, kdy jsou singulární čísla vynásobena filtrační funkcí. Filtrační funkce je definována tak, aby snížila vliv malých singulárních čísel na výsledek inverzní úlohy.

Další možností regularizace je zahrnutí apriorní informace o datech. Jako apriorní informace může sloužit znalost o velikosti a struktuře vodivosti, nebo předpoklad o spojitosti a hladkosti vodivostní funkce.

Jestliže funkce apriorní informace odpovídá Euklidově normě, pak lze řešit inverzní úlohu lineární inverzí. Naopak funkce apriorní informace, která neodpovídá euklidovskou normě, se musí řešit nelineární inverzí.

Je možné kombinovat jednotlivé regularizace dohromady [23], [24].

5.0.1 TSVD

TSVD (Truncated Singular Value Decomposition) patří mezi základní regularizační metody. TSVD nahrazuje singulární čísla, která způsobují vysokou citlivost inverzní úlohy na šum, nulami. Výsledek inverzní úlohy rozepíšeme prostřednictvím singulárního rozkladu

$$m = \sum_{i=1}^n f_i \frac{u_i^T d}{\sigma_i} v_i, \quad (5.1)$$

kde filtrační faktor f_i definujeme jako

$$f_i = 1 \quad \text{pro } i \leq k \quad (5.2)$$

$$f_i = 0 \quad \text{pro } i > k. \quad (5.3)$$

Parametr k ve filtrační funkci je kladné celé číslo $k \leq n$.

5.0.2 Tikhonova regularizace

Tikhonova regularizace minimalizuje výslednou odchylku od výchozí vodivosti m^* . Regularizační funkci definujeme jako

$$W(m) = \|I(m - m^*)\|_2, \quad (5.4)$$

kde I je jednotková matice. Jestliže $m^* = 0$, pak výsledek inverzní úlohy lze rozepsat prostřednictvím singulárního rozkladu jako

$$m = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha} \frac{u_i^T d}{\sigma_i} v_i \quad (5.5)$$

s filtračním faktorem

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2}. \quad (5.6)$$

Jestliže singulární číslo $\sigma_i \gg \alpha$, pak pro filtrační faktor platí $\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \approx 1$, naopak pro singulární čísla $\sigma_i \ll \alpha$ platí $\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \approx 0$.

Zobecněná Tikhonova regularizace je založena na minimalizaci Euklidovy normy [25]

$$W(m) = \|L(m - m^*)\|_2, \quad (5.7)$$

kde L je matice. Tuto matici budeme označovat jako prior. Matice typicky splňuje Morozovovu doplňkovou podmínku [25], tedy existuje $\beta > 0$ tak, že pro všechna $m > 0$ platí

$$\|Hm\|_2 + \|Lm\|_2 \geq \beta \|m\|_2. \quad (5.8)$$

Matice L může aproximovat diferenciální operátor první a druhé derivace. První derivace penalizuje spojitost funkce, druhá derivace penalizuje hladkost řešení [26]. Matice L může také definovat hornopropustní frekvenční filtr. Hornopropustní filtr pak penalizuje vysoko-frekvenční změny. Mezi tyto filtry patří Laplaceův hornopropustní filtr, který aproximuje Laplaceův operátor. Jádru aproximačního filtru je definováno pro čtyři sousední uzly jako

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

kde sousední uzly nabývají hodnotu -1 a samotný uzel má hodnotu 4 . Další možností je aproximovat Gaussův hornopropustní filtr, jehož jádro je dáno jako [27]

$$f(x, y) = \delta(x, y) - \frac{\pi^2}{\omega_0^2} e^{-(\pi^2/\omega_0^2)(x^2+y^2)}. \quad (5.10)$$

5.0.3 NOSER

Tento algoritmus byl publikován v práci [22]. Název regularizace je odvozen ze zkratky "Newton one-step error regularization". Regularizace byla použita v původní publikaci v Gauss-Newtonově jednokrokovém algoritmu. Tato regularizace se ovšem s úspěchem používá i v lineární inverzi. Algoritmus definuje matici L jako diagonální matici

$$L = \sqrt{\text{diag}(J^T J)}. \quad (5.11)$$

Regularizace vychází z předpokladu, že hodnota výrazu $\frac{\partial V}{\partial m_i} \frac{\partial V}{\partial m_j}$ má větší hodnotu pro uzly i a j , které jsou blízko u sebe. Naopak pro uzly, které jsou daleko od sebe platí, že hodnota výrazu je nižší. Jestliže $i = j$ pak hodnota výrazu je vždy kladná, tedy prvky diagonální matice $\text{diag}(J^T J)$ jsou kladná čísla. Matice $L^T L$ je tedy u regularizace NOSER pozitivně definitivní a stabilizuje inverzní úlohu.

5.0.4 TV Regularizace

TV regularizace (Total Variation regularization) minimalizuje rozdíly mezi admitivitou na sousedních uzlech. Na rozdíl od zobecněné Tikhonovy regularizace, u které se minimalizuje Euklidova norma, TV regularizace minimalizuje normu L^1 . Výhodou této normy je, že regularizační funkce nepenalizuje nespojitosti. Regularizační funkce je vyjádřena vztahem

$$TV(m) = \int_{\Omega} \nabla m d\Omega, \quad (5.12)$$

který dále rozepíšeme

$$TV(m) = \sum_{j \in \text{hrany}} l_j |m_{h(j)} - m_{k(j)}|, \quad (5.13)$$

kde l_j je délka hrany j , která leží mezi uzlem h a k . Rovnici regularizační funkce dále přepíšeme na

$$TV(m) = \sum_{j \in \text{hrany}} |L_j m| = Lm, \quad (5.14)$$

kde L_j je řádek řídké matice L , který je nenulový ve dvou sloupcích pro uzly h a k , do kterých vede hrana j . Řádek matice lze rozepsat jako

$$L_j = [0, \dots, 0, l_j, 0, \dots, -l_j, 0, \dots, 0]. \quad (5.15)$$

Regularizační funkce $TV(\Theta)$ není diferencovatelná v bodech, pro které platí $m_{h(j)} = m_{k(j)}$. Protože potřebujeme funkci diferencovatelnou ve všech bodech, musíme regularizační funkci $TV(\Theta)$ modifikovat na

$$TV_\beta(m) = \int_\Omega \sqrt{|\nabla m|^2 + \beta} d\Omega, \quad (5.16)$$

kde β je parametr, pro který platí $\beta > 0, \beta \rightarrow 0$.

Regularizační úloha s TV priorem se řeší nelineárními iteračními algoritmy jako je Gauss-Newtonova metoda. U těchto algoritmů je volba hyperparametru složitější než v případě lineární inverze, protože hodnota hyperparametru se může volit pro každý krok iterace odlišně. Běžně se volí dvě hodnoty hyperparametru. První hodnota pro počáteční krok algoritmu a druhá hodnota pro další iterační kroky [28]. Směr iteračního kroku δm v Gauss-Newtonově algoritmu pro inverzní úlohu s TV regularizací se vyjádří jako [29]

$$\delta m = - (J_i^T J_i + \alpha L^T E_i^{-1} F_i L)^{-1} (J_i(Hm_i - d) - \alpha L^T E_i^{-1} L m_i), \quad (5.17)$$

kde

$$E_i = \text{diag}(\eta_j) \quad (5.18)$$

$$F_i = \text{diag} \left(1 - \frac{|L_j m_i|^2}{\eta_j^2} \right) \quad (5.19)$$

$$\eta_j = \sqrt{|L_j m_i| + \beta}. \quad (5.20)$$

Kapitola 6

Volba hyperparametru

Míru zásahu regularizace do výsledku inverzní úlohy určuje hyperparametr. Pokud je hodnota hyperparametru příliš nízká, pak je výsledek příliš ovlivněn šumem. Jestliže je naopak jeho hodnota příliš vysoká, pak se zmenšuje přesnost výsledku.

Pro určení hyperparametru byly vyvinuty techniky, které se snaží optimalizovat jeho hodnotu. Cílem je vybrat hodnotu hyperparametru, která by byla co nejnižší tak, aby se co nejméně snižovala přesnost výsledku. S volbou hyperparametru je také spojena hodnotící funkce, která vyhodnocuje obraz při zvolené hodnotě hyperparametru.

Algoritmy, zmíněné v této diplomové práci, byly vytvořeny pro lineární inverzi. Míru zásahu regularizace je potřeba určit také u nelineární inverze, u které je situace s jeho volbou složitější. Některé algoritmy, jako určení parametru NF , lze použít částečně i pro jiné typy inverze. Nicméně, použití tohoto algoritmu pro jiné typy inverze je složitější. Výsledek inverzní úlohy, vodivost m , je závislý na volbě hyperparametru α , což budeme značit jako m_α

6.0.1 L-Křivka

Metoda L-křivky neboli L-curve (LCC) je založena na najití nejlepšího poměru mezi euklidovskou normou rozdílu $\|v - Hm_\alpha\|_2$ a velikostí regularizačního zásahu $\|L(m_\alpha - m^*)\|_2$. L-křivka se definuje tak, že na jednu osu je vynesena rozdíl mezi naměřenou hodnotou napětí a hodnotou napětí dopočtenou z vodivosti m_α $P(m) = \log\|v - Hm_\alpha\|_2$ a na druhou osu je vynesena velikost zásahu regularizace $D(m) = \log\|L(m_\alpha - m^*)\|_2$.

Hyperparamter se nachází v místě maximálního zakřivení křivky neboli hrany křivky. Míra zakřivení se počítá jako [30]

$$\kappa = 2 \frac{P'D'' - P''D'}{((P')^2 + (D')^2)(3/2)}. \quad (6.1)$$

Tato metoda má několik úskalí. Prvním je, že L-křivka negarantuje konkávnost. Křivka

je ovšem konkávní pro všechna λ , kde $\lambda \leq \sigma_n$, nebo $\lambda \geq \sigma_n$ [30]. Hledání hyperparametru také selhává v případě příliš hladkých řešení. Výpočet hyperparametru se také zpěšňuje s narůstajícím počtem singulárních čísel [30]. Dalším úskalím může být nejasně zratelná hrana křivky. Podle Grahama 2006 [31] tento problém nastává v případech, když nepoužijeme Tikhonovu regularizaci. Nevýhodou této metody je také nutnost generovat křivku pro každé měření zvlášť. Ukázka L-křivek je uvedena v příloze B.

6.0.2 Zobecněná křížová validace

Křížová validace je založena na predikaci měření, které bylo vynecháno při řešení úlohy. Zobecněná křížová validace neboli Generalized cross-validation (GCV) hledá minimum funkce [32]

$$G(\alpha) = \frac{\|v - Hm_\alpha\|_2}{\text{trace}(I - HH^\dagger)}. \quad (6.2)$$

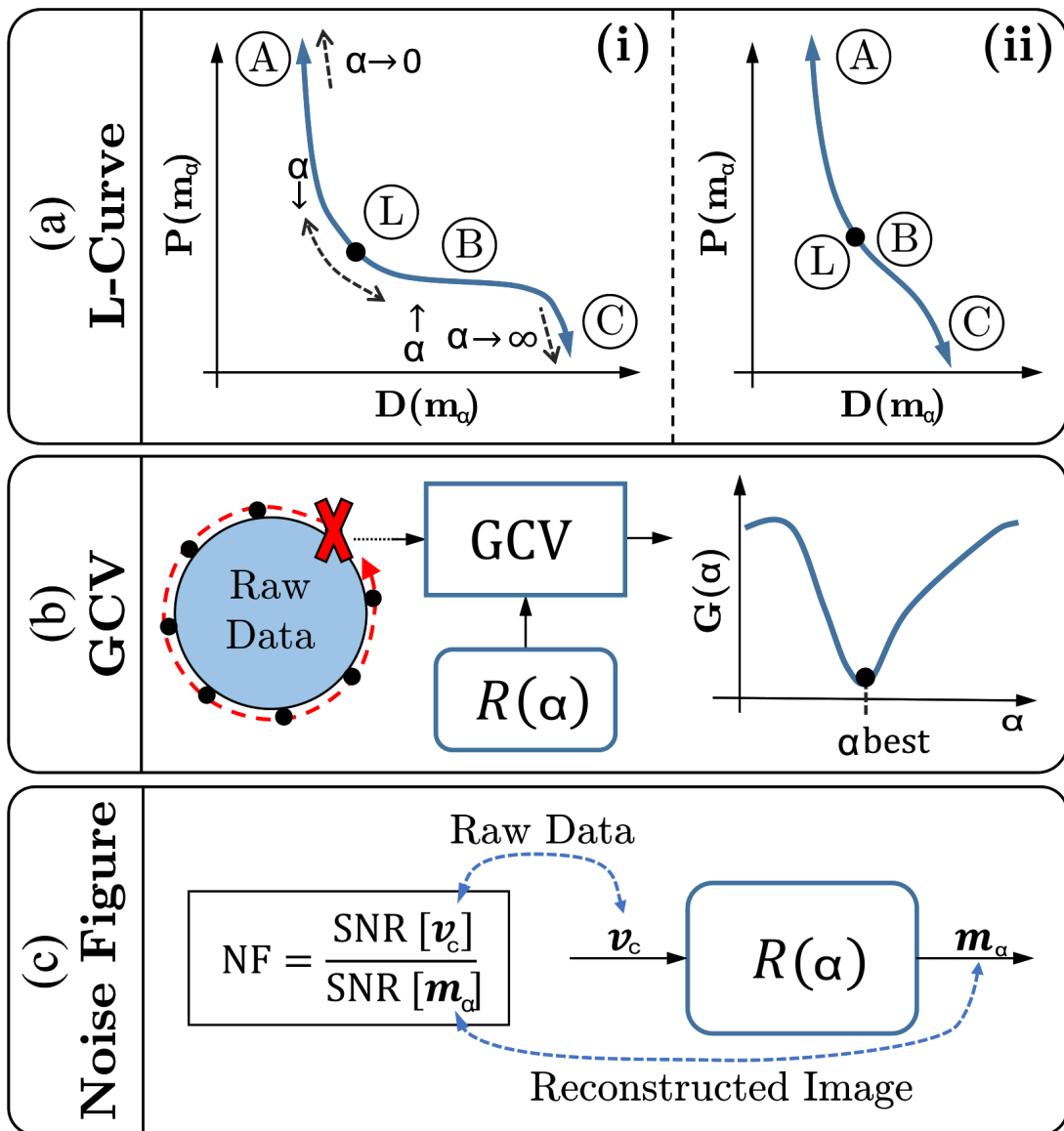
Hledání minima této funkce může být problematické, protože v některých případech funkce $G(\alpha)$ může být rostoucí. Dalším problémem může být, že funkce je v okolí minima plochá, a proto je velmi těžké pro tuto funkci najít optimální hodnotu hyperparametru. [32]. Podle Grahama 2006 [31] optimalizace hyperparametru zobecněnou křížovou validací se v tomografii ukázala jako nespolehlivá, protože regularizace je příliš nízká a šum není dostatečně potlačen. Ukázka funkcí $G(\alpha)$ je uvedena v příloze B.

6.0.3 Volba šumového čísla

Tato metoda byla popsána v Adlerovi 1996 [27]. Metoda převede úlohu manuálního výběru hyperparametru na manuální výběr parametru šumového čísla Noise Figure (NF). Parametr NF je definován jako poměr mezi odstupem signálu od šumu měření a odstupem signálu od šumu výsledného obrazu

$$NF = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = \frac{\frac{\text{mean}[v_c]}{\sqrt{\text{var}[n]}}}{\frac{\text{mean}[Bv_c]}{\sqrt{\text{var}[Bn]}}}, \quad (6.3)$$

kde signál $v_c = Hm_c$ vznikne z uměle vygenerovaných dat, kdy je doprostřed tělesa vložena malá skoková změna vodivosti. Hodnota NF je vybrána na základě znalostí daného signálu. Jako přijatelná hodnota parametru NF se pro tomografii podle Grahama 2006 [31] ukazuje hodnota z rozsahu od 0.5 do 2.0. Rovnice 6.3 řešíme metodou půlení intervalů.



Obrázek 6.1: Grafické zobrazení metody pro hledání hyperparametru [33]

6.0.4 Parametr Noise Performance

Tato metoda byla popsána v publikaci Braun 2017 [33]. Metoda zavádí novou metriku, která spočívá v určení průměrného odstupu signálu od šumu v obrazu.

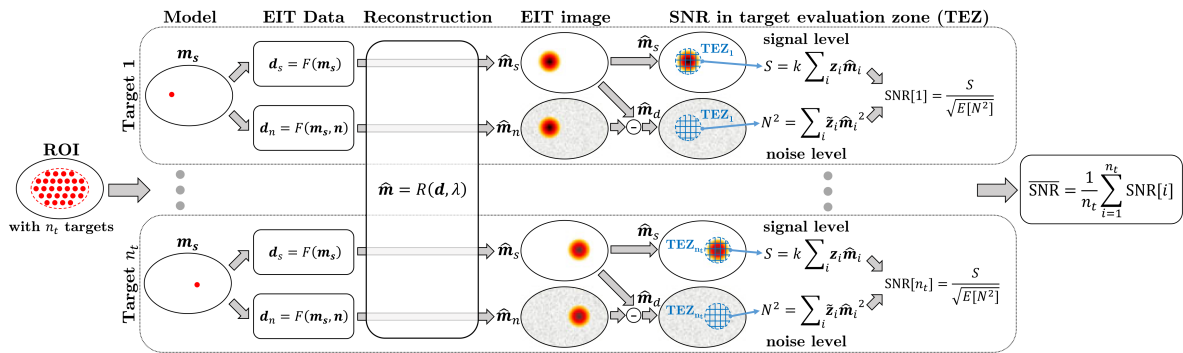
Určení průměrného odstupu signálu od šumu \overline{SNR} spočívá ve výpočtu odstupu signálu od šumu pro několik cílů. Cílem se označuje oblast, ve které vytvoříme skokovou změnu vodivosti. Tyto cíle jsou umísťovány v tělese uvnitř oblasti, ve které chceme vyhodnocovat obraz. Odstup signálu od šumu se vyhodnocuje v cílové oblasti (TEZ), která je dána jednou čtvrtinou maxima amplitudy. Vzorec pro výpočet průměrného odstupu signálu od

šumu lze vyjádřit jako

$$\overline{SNR} = E_t \left[\frac{k \sum_{i=1}^{n_p} [z]_i [m_s]_i}{\sqrt{E_n [\sum_{i=1}^{n_p} [z]_i [m_d]_i^2]}} \right], \quad (6.4)$$

kde m_s je velikost obrazu signálu s nehomogenitou, m_d je velikost signálu bez nehomogenity a z_i je normovaná plocha $\sum_{i=1}^{n_p} z_i = 1$, pro kterou platí $z_i \propto a_i c_i$, kde a_i je plocha prvku a parametr c_i je roven jedné, jestliže plocha prvku leží uvnitř cílové oblasti vyhodnocení a nule, jestli leží mimo tuto oblast.

Pro algoritmus je nutné stanovit několik parametrů jako oblast, do které jsou umístěny cíle. Dalším parametrem je počet cílů k vyhodnocení. S narůstajícím počtem cílů se zvyšují nároky na vyhodnocení parametru. Dle Brauna 2017 [33] je vhodným počet cílů nastaven na $n_t = 200$. Průměrná hodnota odstupů signálu od šumu \overline{SNR} se může odvodit od hodnoty NF .



Obrázek 6.2: Znázornění výpočtu hodnoty průměrného odstupů od šumu [33]

6.0.5 Metoda nejlepšího rozlišení

Tato metoda spočívá v optimalizaci plochy obrazu vodivostního kontrastu, který je umístěn doprostřed tělesa. Metoda zavádí parametr poloměru rozlišení neboli Blur radius

$$BR(\alpha) = \sqrt{A_z(\alpha)/A_0(\alpha)}, \quad (6.5)$$

kde A_0 je plocha tělesa a A_z je plocha obsahující polovinu velikosti amplitudy rekonstruovaného obrazu. Toto určení plochy A_z je výhodné, protože je více odolné vůči šumu oproti tradiční definici, kdy se plocha A_z se určuje z maximální amplitudy [27]. (V literatuře jsou nejčastěji uvedeny hodnoty $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ maxima signálu obrazu.) Najití hyperparametru spočívá

ve výpočtu funkce

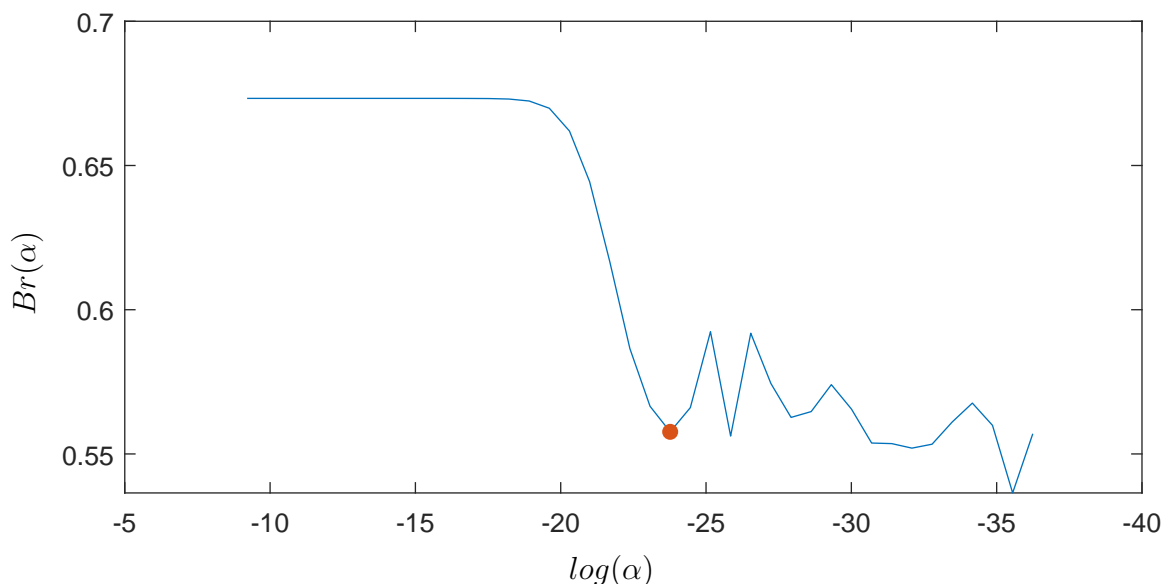
$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \sqrt{\frac{A_z(\alpha)}{A_0(\alpha)}}, \quad (6.6)$$

tedy probíhá minimalizace plochy nehomogenity v obraze.

6.0.6 Implementace metody nejlepšího rozlišení

Metoda hledání hyperparametru metodou nejlepšího rozlišení je popsána v mnoha pracích, v nástroji EIDORS tato metoda implementována není. Je zde pouze funkce, která spočítá hodnotu poloměru rozlišení, pro konkrétní hodnotu hyperparametru. Proto byla tato metoda hledání hyperparametru implementována v rámci této diplomové práce.

K rekonstrukci inverzní úlohy byla vygenerována rozdílová data. Rozdílová data jsou vygenerována dopřednou úlohou pro homogenní těleso a pro těleso do jehož středu byla vložena malá nehomogenita. Vygenerovaná data jsou zatížena aditivním šumem dle vzorce 7.1 a 7.2. Na rekonstruovaném obrazu je proveden řez v polovině tloušťky geometrie modelu. U řezu je spočítána hodnota $Br(\alpha)$ pro různé hodnoty hyperparametru α . Na vygenerované křivce funkce $Br(\alpha)$ je potřeba určit optimální hodnotu $Br(\alpha^*)$, která by měla být definovaná jako minimum funkce.



Obrázek 6.3: Křivka nejlepšího rozlišení s vyznačenou optimální hodnotou $Br(\alpha^*)$

Při implementaci se ukázalo, že funkce $Br(\alpha)$ má více minim. Navíc globální minimum nemuselo dobře optimalizovat hodnotu hyperperparametru. Jako správná hodnota křivky $Br(\alpha^*)$, která dobře optimalizuje hyperparametr, se ukázala hodnota prvního lokálního minima, na obrázku 6.3 vyznačena červeně. Optimum bylo nalezeno gradientním algo-

ritmem. U gradientního algoritmu je hodnota hyperparametru α_0 je stanovena tak, aby platilo $\alpha^* < \alpha_0$, kde α^* je optimální hodnota hyperparametru.

Při implementaci algoritmu se ukázal problém určit inicializační hodnotu α_0 . Pro tuto hodnotu muselo platit, že $\alpha^* < \alpha_0$ a zároveň nesměla být tato hodnota příliš velká, protože funkce je pro hodnoty, které platí $\alpha \gg \alpha^*$, plochá.

Křivka funkce $Br(\alpha)$ není generována jednoznačně, protože tato funkce je závislá na aditivním šumu $Br(\alpha, n)$. Proto je hyperparametr vybrán jako průměr několika optimalizací hyperparametru $Br(\alpha^*, n_i)$. V implementovaném algoritmu byl zvolen parametr $i = 20$ a z průměru jsou vždy vynechány nejvyšší a nejnižší hodnotu určeného hyperparametru.

Kapitola 7

Rekonstrukce obrazu bodové nehomogenity

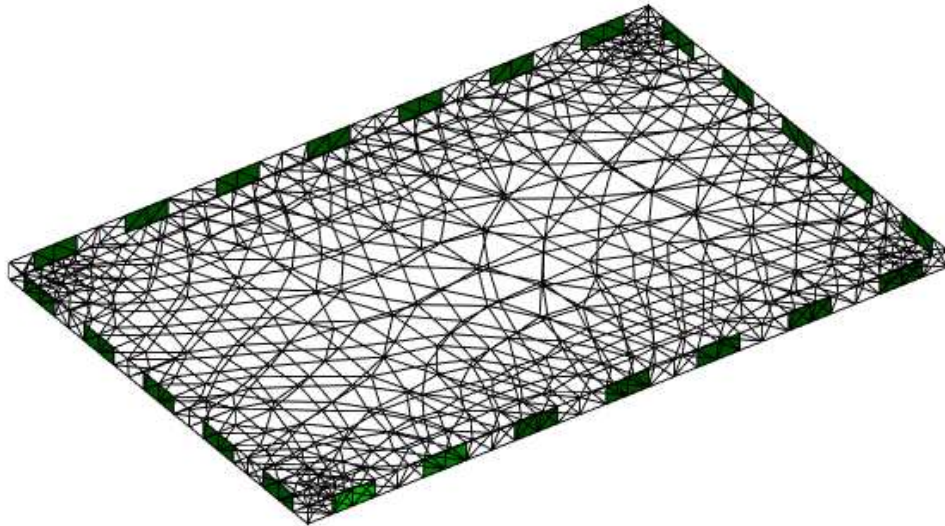
V této kapitole se budeme zabývat vlivem zvolené inverzní metody na rekonstrukci bodové nehomogenity. Inverzní metodou je myšlena kombinace algoritmů inverzní metody s regularizací a metody volby hyperparametru. V úvodu kapitoly je popsána simulace a generování modelu sítě kompozitního vzorku. Poté je rozebrána špatná podmíněnost inverzní úlohy. Následně jsou popsány regularizace. U jednotlivých regularizací je ukázán jejich vliv na rekonstruovaný obraz a jsou uvedeny detaily k jejich praktickému využití. Zejména jsou rozebrány metody využití k určení hyperparametru. Jako poslední téma kapitoly je porovnání vlivu vybraných regularizací a algoritmů pro výběr hyperparametru na kvalitu rekonstrukce polohy bodové nehomogenity. Kvalita rekonstrukce bodové nehomogenity je určena na základě přesnosti určení její polohy. Poloha bodové nehomogenity byla určena algoritmem implementovaným v rámci této diplomové práce.

7.1 Simulace

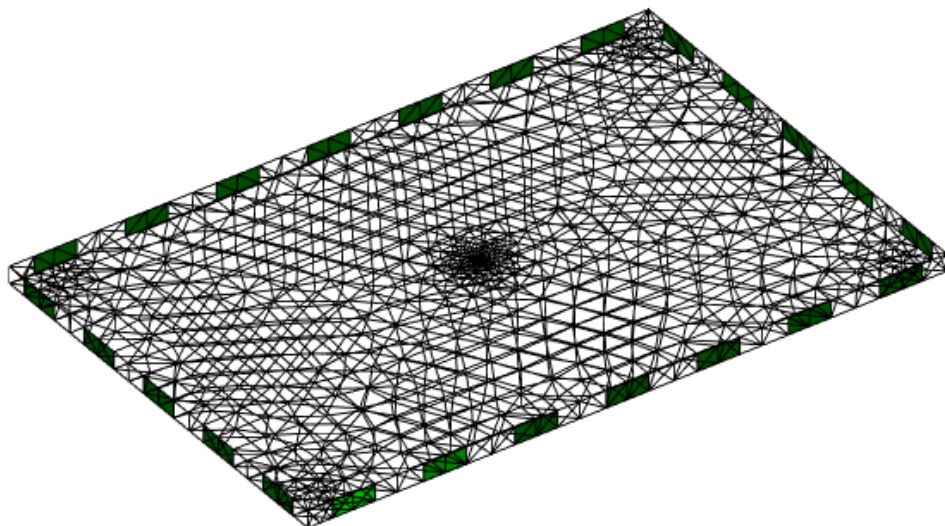
Výpočty se budou provádět na simulaci karbonové kompozitní vzorek. Tento vzorek má tvar destičky o délce hrany 0.15 m, šířce 0.1 m a tloušťce 0.04 m s homogenní vodivostí 8000 Sm^{-1} . Nehomogenitu budu simulovat malým válcem s průměrem 0.001 m a vodivostí 6000 Sm^{-1} zanořeným do poloviny hloubky vzorku.

Nastrojem Netgen vygenerujeme pro dopřednou a inverzní úlohu odlišnou síť, tím se vyhneme tzv. 'inverse crime', ke kterému dochází v případě, že bychom použili stejnou síť pro obě dvě úlohy. Jemnější síť vygenerujeme pro dopřednou úlohu a pro inverzní úlohu vygenerujeme hrubší síť. Jemnější síť má 4198 elementů a 1369 uzlů. Hrubší síť má 2106 elementů a 788 uzlů.

Abychom určili rozdíl mezi jednotlivými regularizacemi a metodami volby hyperpara-



Obrázek 7.1: Síť vygenerovaná pro inverzní úlohu



Obrázek 7.2: Síť vygenerovaná pro dopřednou úlohu s malou nehomogenitou uprostřed

metru zatížíme simulovaný signál šumem

$$\bar{v}_h = v_h + n \cdot \frac{\chi}{SNR} \quad (7.1)$$

$$\bar{v}_i = v_i + n \cdot \frac{\chi}{SNR}, \quad (7.2)$$

kde n je šum s normálním rozdělením, jednotkovým rozptylem a nulovou střední hodnotou. Parametr χ definujeme jako

$$\chi = \frac{\|v_h - v_i\|_2}{\|n\|_2} \quad (7.3)$$

a parametr SNR udává poměr mezi rozdílovou hodnotou signálu a šumem.

7.2 Rekonstrukce obrazu bez regularizace

Špatnou podmíněnost inverzní úlohy ukážeme na výpočtu čísla podmíněnosti citlivostní matice J . Číslo podmíněnosti citlivostní matice, které je určeno podle vzorce 4.61, vyjde jako

$$\kappa(J) \approx 1 \cdot 10^{15} \gg 1, \quad (7.4)$$

což je vysoká hodnota. Proto musíme hledat cesty, jak rovnici upravit. Jednou z možností je stanovit numerickou hodnotu matice a provést inverzi s maticí J_r .

Dle definice nabývá citlivostní matice J numerické hodnoty $r = 186$. Pro tuto hodnotu je výrazný rozestup mezi singulárními čísly, protože numerická hodnota nabývá vysoké hodnoty $\omega_{186} \approx 10^4$ a velikost singulárního čísla je

$$s_{r=186} \approx 10^{-11} \gg \epsilon \cdot \|J\|_F \approx 10^{-17}. \quad (7.5)$$

Určíme číslo podmíněnosti u nové matice $J_{r=186}$, které je definována 4.52 jako

$$\kappa(J_{r=186}) \approx 8 \cdot 10^9 \gg 1, \quad (7.6)$$

což je rovněž vysoká hodnota, a proto výsledek inverzní úlohy s maticí $J_{r=186}$ nevede k dobrému výsledku. Abychom mohli provést rekonstrukci obrazu, je nutné zavést do úlohy regularizaci.

7.3 Rekonstrukce obrazu s regularizací

V této sekci jsou popsány jednotlivé typy vybraných regularizací, které jsou implementovány v nástroji EIDORS a regularizace, které byly implementovány v rámci této diplomové práce. U jednotlivých regularizací je také uveden postup pro výběr hyperparametru. Z regularizací implementovaných v nástroji EIDORS je uvedena regularizace TSVD, která patří mezi metody spektrálního filtrování. Dále jsou vybrány lineární regularizace, mezi které je zařazena i Tikhonova regularizace. (Tikhonova regularizace může být interpretována i jako regularizace filtrující singulární čísla.) Jako nelineární inverze je v této kapitole uvedena TV regularizace. Regularizace implementované v rámci této diplomové práce jsou založeny na kombinaci jednotlivých typů regularizací.

7.3.1 TSVD

Abychom mohli použít TSVD regularizaci, je potřeba stanovit filtrační faktor 5.1. Musíme tedy určit nejnižší singulární číslo, které se bude účastnit rekonstrukce inverzní úlohy. Funkce filtračního faktoru je v nástroji EIDORS určena jako

$$f_i = 0 \quad \text{pro} \quad 100 \frac{\sigma_r}{\sigma_1} \geq \alpha \quad (7.7)$$

$$f_i = 1 \quad \text{pro} \quad 100 \frac{\sigma_r}{\sigma_1} < \alpha, \quad (7.8)$$

kde α je hyperparametr. Určení hyperparametru lze v nástroji EIDORS pouze prostřednictvím metody volby parametru NF . Nástroj nalezení hyperparametru podle volby parametru NF neumožňuje vybrat nižší hodnoty parametru než $NF = 1.3$. Vliv regularizace na výslednou rekonstrukci bodové nehomogenity je uveden v příloze B. Příloha A se zabývá vlivem zvolené filtrační funkce na rekonstrukci bodové nehomogenity

7.3.2 Lineární inverze s regularizací

K regularizaci lineární inverze je v nástroji EIDORS implementována Tikhonova regularizace a zobecněná Tikhonova regularizace s priorem Laplace a priorem NOSER. Vliv jednotlivých regularizací na výslednou rekonstrukci bodové nehomogenity je ukázán v příloze B.

U lineární regularizace je potřeba vybrat jednu z metod volby hyperparametru. V nástroji EIDORS je implementována metoda L-křivky, metoda zobecněné křížové validace a metoda výběru parametru NF . V rámci diplomové práce je přidána metoda nejlepšího rozlišení.

V následujících bodech jsou shrnuty poznatky o vlastnostech metod volby hyperpare-

metru při rekonstrukci bodové nehomogenity.

- U metody výběru parametru NF platí, že se zvyšujícím se číslem NF , klesá hodnota hyperparametru a tím roste zastoupení šumu v obraze. Tedy při nízkém odstupu signálu od šumu je potřeba zvolit nižší hodnoty parametru NF , při vyšším odstupu signálu od šumu je naopak dobré volbu parametru NF zvýšit.
- Metoda nejlepšího rozlišení je vhodná pro data s vyšším odstupem signálu od šumu.
- Metoda zobecněné křížové validace si při simulacích lépe poradí se signálem, který má menší odstup signálu od šumu. Nicméně si poradila se všemi typy signálů. U regularizace s Laplaceovým priorem algoritmus špatně určoval hyperparametr při nízkém odstupu signálu od šumu.
- Metoda L-křivky naopak vykazuje dobrý výsledek při vysokém odstupu signálu od šumu, avšak při nízkém odstupu signálu od šumu tato metoda selhává, protože křivka nemá jasně definovanou hranu. Aby algoritmus našel hyperparametr u regularizace s Laplaceovým priorem, musela se manuálně omezit maximální velikost hyperparametru.

Srovnání grafu L-Křivek a křivky zobecněné křížové validace pro různé typy regularizací a pro různé odstupy signálu od šumu, jsou uvedeny v příloze C.

V rámci regularizace NOSER je také nutné volit parametr. Prior NOSER je v nástroji EIDORS definován jako

$$L = \text{diag}(J^T J)^p, \quad (7.9)$$

kde parametr p ovlivňuje míru potlačení šumu. S rostoucí hodnotou parametru p klesá zastoupení šumu v obraze, ale zároveň je potlačena užitečná složka signálu. V programu EIDORS je zvolena jako výchozí hodnota parametru $p = \frac{1}{4}$, což se ukázalo jako dobrá volba pro výsledek inverzní úlohy.

7.3.3 Nelineární inverze s regularizací

V nástroji EIDORS je implementována TV regularizace. Tato regularizace se skládá z lineární a nelineární části. V lineární části algoritmu se vypočítá vodivost, která je zvolena jako inicializační hodnota v nelineární části Gauss-Newtonova optimalizačního algoritmu. Prior v lineární části inverzní úlohy 4.31 je zvolen podle 5.14. Regularizační funkce v nelineární části je definován jako $W(m) = \sqrt{\nabla m + \beta}$. Parametr β je v každém kroku snižován $\beta_{i+1} = 0.8\beta_i$. Délka kroku Gauss-Newtonova algoritmu je volená proměnlivě.

V implementovaném algoritmu je potřeba zvlášť zvolit hyperparametr v lineární i nelineární části algoritmu. Metody výběru hyperparametru jsou vytvořeny pro lineární inverzi s regularizací, proto volba hyperparametru nebyla triviální záležitost. U lineární části algoritmu bylo možné zvolit hyperparametr prostřednictvím výběru parameteru NF . Nicméně se nepodařilo najít takovou kombinaci hyperparametrů, která by dokázala dobře rekonstruovat obraz. Výsledný rekonstruovaný obraz byl horší v porovnání s lineární regularizací s Laplaceovým priorem. Nehomogenita byla detekována na daleko větší ploše, než byla simulována. Navíc se ukázalo, že druhá část algoritmu, Gauss-Newtonova optimalizace, již nezpřesňuje počáteční hodnoty vodivosti, kterou dostala z výsledku lineární inverze.

7.3.4 Kombinace regularizací

V rámci této diplomové práce byly implementovány inverzní metody, které vzniknou kombinací regularizací. Regularizace Tikhonov a NOSER regularizují výslednou vodivost v každém uzlu bez ohledu na sousední uzly. Naopak TV regularizace a Laplaceova regularizace regularizují vodivosti s ohledem na sousední uzly.

U kombinace TV regularizace a Tikhonovi regularizace nastal problém s výběrem hyperparametru. U této kombinace je potřeba zvolit celkem čtyři hyperparametry. Empirické odhadnutí parametrů se ukázalo jako problematické. Obraz bodové nehomogenity nevedl k dobrému výsledku, a proto další analýza kombinace lineární a nelineární regularizací není uvedena.

Další možností je zkombinovat lineárních regularizace. Byla implementována kombinace Laplaceova a Tikhonova regularizace a kombinace Laplaceova a NOSER regularizace. U lineární regularizace, ve které se využívají dvě apriorní informace řešíme rovnici

$$\tilde{m} = \arg \min_m (\|Hm - v\|_2 + \alpha_1 \|L_1(m - m^*)\|_2 + \alpha_2 \|L_2(m - m^*)\|_2), \quad (7.10)$$

ve které matice L_1 a L_2 jsou priory s hyperparametry α_1 a α_2 , které je nutno zvolit. Ukázalo se, že je možné optimalizovat oba hyperparametry zvlášť, například pomocí metody výběru parameteru NF .

U kombinace Laplaceova a NOSER prioru je potřeba zvolit také parametr p , který je definován ve výrazu 7.9. Ukázalo se, že je možné při kombinaci NOSER prioru s Laplaceovým priorem nastavit parametr p na vyšší hodnotu a tím lépe redukovat šum než v případě, kdy je NOSER regularizace použita samostatně. Hodnota parameteru byla tedy zvolena jako $p = \frac{1}{2}$.

7.4 Určení polohy bodové nehomogenity

Aby bylo možné jednotlivé inverzní metody porovnat, je potřeba vytvořit hodnotící funkci, která jednotlivé rekonstrukce bodové nehomogenity porovná. V rámci této práce byl implementován algoritmus, který u rekonstruovaného obrazu určí polohu bodové nehomogenity. Hodnotící funkce je pak rozdíl mezi skutečnou polohou a polohou určenou algoritmem.

Určení polohy bodové nehomogenity se bude provádět na dvojrozměrném objektu, který je získán řezem rekonstruovaného obrazu v polovině tloušťky tělesa. V nástroj EIDORS je již připravena funkce, která generuje polohu nehomogenity na základě určení těžiště v řezu. Tento výsledek se ukázal jako relativně dobrý prvotní odhad, který je ovšem zkreslen šumem v obraze. Proto byl tento algoritmus upraven tak, aby se zpřesnilo určení polohy bodové nehomogenity.

Nově implementovaný algoritmus nejdříve určí polohu těžiště. Poté se oblast okolo těžiště proloží polynomem. Oblast, která je proložena polynomem, je určena jako desetina celkové velikosti tělesa v okolí nalezeného těžiště. Poté se najde na polynomu maximum, jestliže je maximum nalezeno na hranici vytyčené oblasti, ve které bylo maximum nalezeno, je prohledávaná oblast dále rozšířena a rozšířená oblast se znovu proloží polynomem.

7.5 Porovnání inverzních metod na vyhodnocení bodové nehomogenity

Cílem této sekce je vybrat inverzní metodu, která nejlépe rekonstruuje bodovou nehomogenitu v obraze. Inverzní metody byly porovnány na simulovaných datech i na datech získaným měřením.

Z předchozích kapitol vyplývá, že nejlepší možností rekonstrukce je použití lineární inverze s regularizací. Pro porovnání byly proto vybrána lineární inverze s regularizacemi: Laplace, NOSER, Tikhonov, kombinace regularizací NOSER a Laplace a kombinace regularizací Tikhonov a Laplace. Každá regularizace byla vyzkoušena s různými metodami výběru hyperparametru. Hyperparametr byl vybírán metodami: L-Křivky, zobecněné křížové validace, výběru parametru NF a nejlepšího rozlišení.

Pro určení kvality rekonstrukce na simulovaných datech byla nejprve vygenerována data dopřednou úlohou. Data byla vygenerována pro sto různých modelů s odlišnou polohou bodové nehomogenity. Následně byla data zatížena šumem $SNR = 10$, $SNR = 5$, $SNR = 2$ a $SNR = 1$. Poté byly vybranými inverzními metodami určeny obrazy a na obrazech byla zjištěna poloha bodové nehomogenity. Jednotlivé metody rekonstrukce byly porovnány v průměrné odchylce detekované bodové nehomogenity od místa jejího

skutečného umístění a velikostí amplitudy v místě detekce bodové nehomogenity. Inverzní metody byly porovnány pro různé odstupy signálu od šumu zvláště. Kompletní výsledky porovnání jednotlivých inverzních metod jsou umístěny v příloze D. Z výsledku plyne, že při vyšších hodnotách odstupu signálu od šumu se nejlépe osvědčila Laplaceova regularizace. Naopak při nízkém odstupu signálu od šumu je potřeba zvolit jiné typy regularizace. Nejlépe se osvědčil regularizace NOSER a kombinace regularizací. Při vysokém odstupu signálu od šumu se osvědčila metoda volby parametru NF , metoda L-Křivky a metoda nejlepšího rozlišení. Naopak při nižších odstupech signálu od šumu se ukázala jako nejlepší metoda výběru parametru NF a metoda obecné křížové validace.

Měření dat na reálném vzorku probíhalo pro nehomogenitu, která byla vytvořena v polovině šířky a v jedné čtvrtině délky vzorku provrtáním otvoru s průměrem 0.6 mm. Tento otvor byl postupně rozšiřována až na průměr 3.5 mm. Celkově byla data naměřena pro osm různých průměrů děr s poloměrem 0.6 mm, 1.0 mm, 1.4 mm, 1.8 mm, 2.2 mm, 2.5 mm, 3.0 mm a 3.5 mm. Pro každé měření bylo provedena rekonstrukce obrazu a zjištění polohy bodové nehomogenity jednotlivými typy regularizačních metod. Kompletní výsledky porovnání inverzních metod jsou umístěny v příloze E. Z výsledku vyplývá, že se nejlépe osvědčila regularizace s kombinací priorů NOSER a Laplace. Druhá nejlepší regularizace byla s priorem Laplace. Pro výběr hyperparametru se pak nejlépe hodila metoda výběru parametru NF .

Kapitola 8

Závěr

V teoretické části práce byl proveden rozbor dopředné a inverzní úlohy, na jehož základě mohly být algoritmy efektivně použity a implementovány algoritmy nové.

V praktické části byla nejprve popsána inverzní úloha bez regularizace a na čísle podmíněnosti citlivostní matice byla ukázána její špatná podmíněnost. Proto byly použity a popsány regularizační metody inverzní úlohy, které umožňují najít její vyřešení. TSVD regularizace je zástupce metod spektrálního filtrování. Výsledný obraz této regularizace se neukázal jako dobrý a navíc nastal problém se stanovením hyperparametru 7.8, protože u metody stanovení parametru NF nešla vybrat nižší hodnota než $NF = 1.3$. Jiné metody volby hyperparametru nebyly pro tuto regularizaci implementovány. Dále byly analyzovány lineární inverze s regularizací a nelineární inverze s regularizací. Byla popsána TV regularizace, která je v nástroji EIDORS implementována jako kombinace lineární a nelineární inverze. Tato regularizace nedokázala dobře rekonstruovat výsledný obraz a také u této inverze se objevil problém s výběrem hyperparametru, který je potřeba určit zvlášť pro lineární i nelineární část algoritmu.

Lineární inverzní úloha s regularizací se ukázala nejlepší pro rekonstrukci bodové nehomogenity. Proto byla podrobněji analyzována. Lineární regularizace byla vyzkoušena s Tikhonovým, Laplaceovým a NOSER priorem. Navíc byly implementovány kombinace Laplaceova prioru s NOSER priorem a Laplaceova prioru s Tikhonovým priorem. U lineární inverze je potřeba zvolit jednu z metod výběru hyperparametru. Z implementovaných metod byly vyzkoušeny tyto metody: metoda L-křivky, metoda zobecněné křížové validace a metoda výběru parametru NF . V rámci této diplomové práce byla implementována a vyzkoušena metoda nejlepšího rozlišení. U regularizací, které kombinovaly více priorů, byly hyperparametry vybrány pro každý prior odděleně.

Na základě znalosti nástroje EIDORS byly také navrženy opravy, které byly následně do nástroje včleněny¹.

¹<https://sourceforge.net/p/eidors3d/code/5931/>

Tabulka 8.1: Porovnání nového a starého algoritmu při hledání bodové nehomogenity na reálných datech

Prior	Hp	Chyba určení polohy novým algoritmem	Chyba určení polohy starým algoritmem	Zlepšení
Laplace + NOSER	NF = 0.4	1.31 mm	2.45 mm	46.5 %
Laplace + NOSER	NF = 0.5	1.35 mm	2.34 mm	42.3%
Laplace	NF = 0.5	1.47 mm	1.89 mm	22.2 %

8.1 Kvalita rekonstrukce bodové nehomogenity

Kvalita rekonstrukce bodové nehomogenity byla určena na základě přesnosti určení její polohy. V rámci diplomové práce byl implementován nový algoritmus na detekci polohy bodové nehomogenity. Tento algoritmus byl porovnán s algoritmem určení polohy bodové nehomogenity implementovaným v rámci programu EIDORS.

Algoritmy inverzních metod byly nejprve posuzovány podle přesnosti určení bodové nehomogenity na uměle vytvořených datech. Přesnost určení polohy bodové nehomogenity je závislá na míře odstupů signálu od šumu a použitými algoritmy inverzních metod. Z výsledků na simulovaných datech nelze jednoznačně určit výhodný prior, který by dobře rekonstruoval polohu bodové nehomogenity. Významnější se ukázalo použití metody určení hyperparametru. Jako nejlepší a široce použitelná se ukázala metoda výběru parametru NF , která dokázala, při správném nastavení, velmi dobře rekonstruovat polohu bodové nehomogenity pro všechny odstupů signálu od šumu. Kompletní výsledky porovnání kvality rekonstrukce bodové nehomogenity na simulovaných datech jsou umístěny v příloze D.

Naopak u rekonstrukcí vzniklých z naměřených dat se jasně ukázala nejvýhodnější rekonstrukce s kombinací priorů Laplace a NOSER a také se ukázal velmi dobrý samostatný prior Laplace. Jako nejvýhodnější metoda určení hyperparametru se ukázala metoda výběru parametru NF . Nový algoritmus dokázal zlepšit určení polohy otvoru ve vzorku. Porovnání nového a starého algoritmu určení polohy je shrnuto v tabulce 8.1. Kompletní výsledky jsou pak umístěny v příloze E.

8.2 Srovnání metod výběru hyperparametru

V této práci byly zjištěny odlišné vlastnosti metod výběru hyperparametru, než ke kterým dospěl Graham (2006) [31]. Metoda L-Křivky dávala dobré výsledky za podmínky, kdy odstup signálu od šumu byl velký. Metoda L-Křivky vyšla dobře pro všechny typy priorů, jediná výjimka nastala u Laplaceova prioru. U Laplaceova prioru se objevil problém ve tvaru L-křivky, funkce měla na jejím konci hranu, která ovšem neurčovala dobře hod-

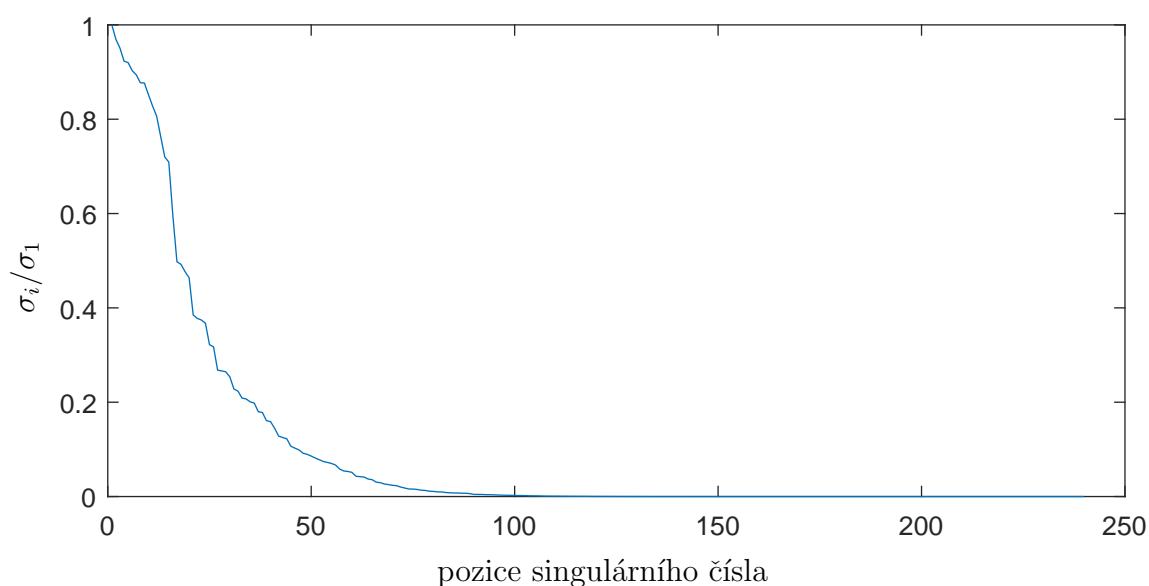
notu hyperparametru. Proto bylo nutné velikost hyperparametru omezit. Po omezení velikosti hyperparametru se průměrná odchylka nehomogenity 128 mm zmenšila na 2 mm viz tabulka D.1. Metoda obecné křížové validace se ukázala jako poměrně účinná metoda k určení hyperparametru. Metoda nejlepšího rozlišení se ukázala funkční pouze při vysokém odstupu signálu od šumu. Její implementace vlivem několika minim funkce se ukázala jako problematická nicméně funkční. Naopak metoda volby parametru NF se jeví jako velmi výhodná jak pro signál s vysokým, tak nízkým odstupem signálu od šumu. Metoda umožňuje optimalizovat její výsledek na základě vlastností signálu prostřednictvím volby parametru NF .

Příloha A

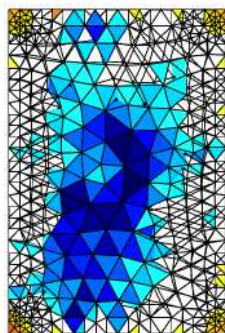
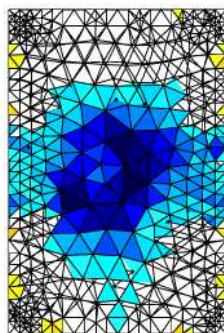
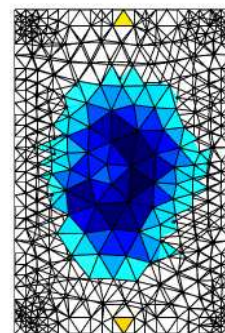
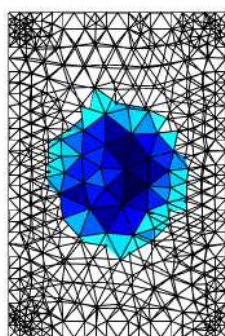
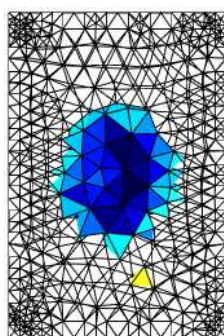
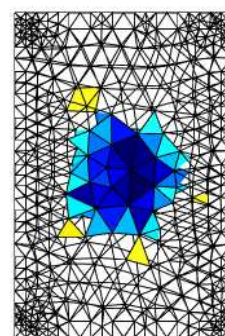
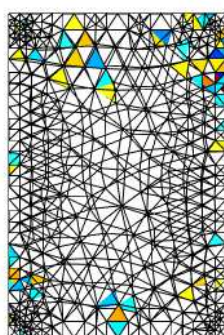
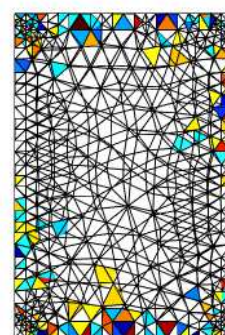
Rekonstrukce matice TSVD

V této příloze je uvedeno porovnání obrazu výsledku TSVD regularizace 5.1 pro různé hodnoty parametru k při dvou různých odstupech signálu od šumu. Na obrázku A.2 jsou zobrazeny rekonstrukce, u kterých nebyl signál zatížen šumem, a na obrázku A.3 jsou zobrazeny rekonstrukce, u kterých byl do signálu přidán šumu o velikosti $SNR = 5$.

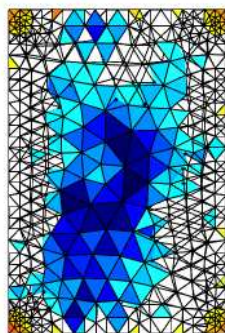
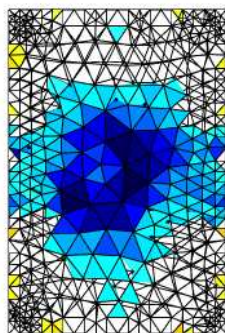
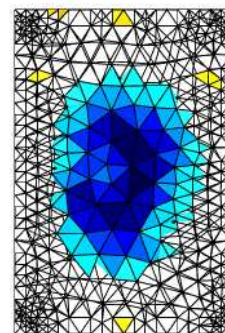
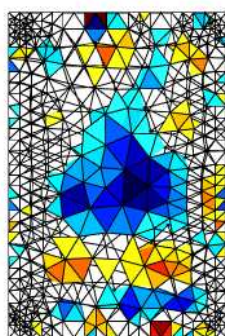
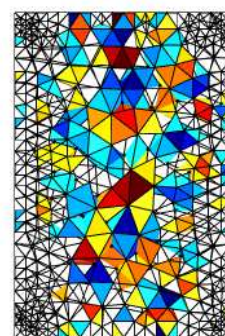
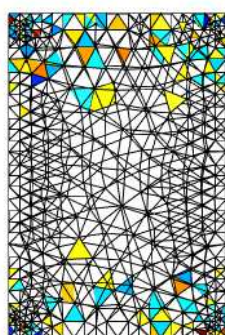
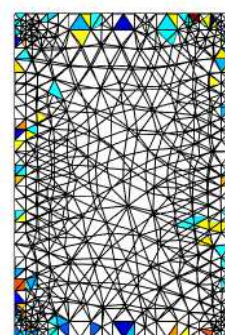
Na rekonstruovaném obraze je vidět, že jestliže zahrneme nižší singulární čísla do inverze, pak selepší zaměření nehomogenity v obraze, ovšem také se zvýší citlivost rekonstrukce na šum. Jestliže obraz byl rekonstruován ze signálu bez šumu, pak obraz byl velmi dobře rekonstruovaný s parametrem $k = 130$. Naopak, když byl do signálu přidán šum, pak se nehomogenita v obraze začala ztrácet již při hodnotě parametru $k = 70$ a zcela zmizela v šumu při hodnotě parametru $k = 100$



Obrázek A.1: Relativní velikosti singulárního čísla citlivostní matice

(a) $k = 5$ (b) $k = 10$ (c) $k = 40$ (d) $k = 70$ (e) $k = 100$ (f) $k = 130$ (g) $k = 160$ (h) $k = 200$ (i) $k = 240$

Obrázek A.2: Rekonstrukce obrazu pro odlišné počty singulárních čísel se signálem bez šumu

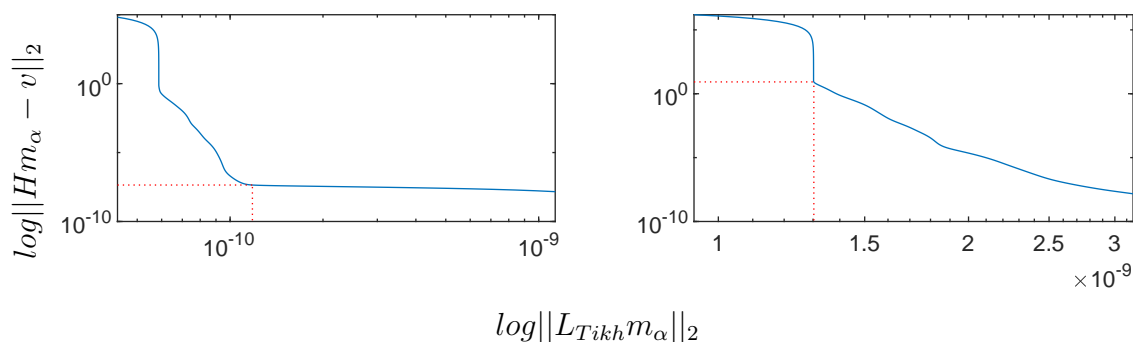
(a) $k = 5$ (b) $k = 10$ (c) $k = 40$ (d) $k = 70$ (e) $r = 100$ (f) $k = 130$ (g) $k = 160$ (h) $r = 200$ (i) $k = 240$

Obrázek A.3: Rekonstrukce obrazu pro odlišné počty singulárních čísel, při odstupě signálu od šumu $SNR = 5$

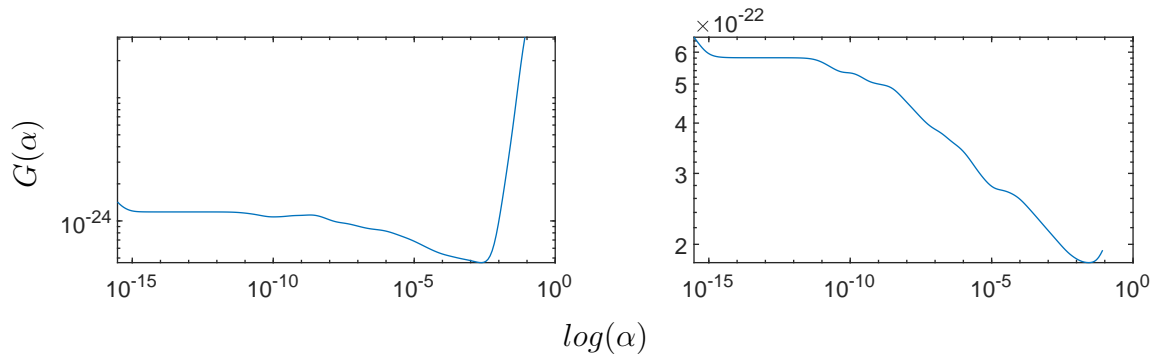
Příloha B

Porovnání L-Křivky a GCV křivky

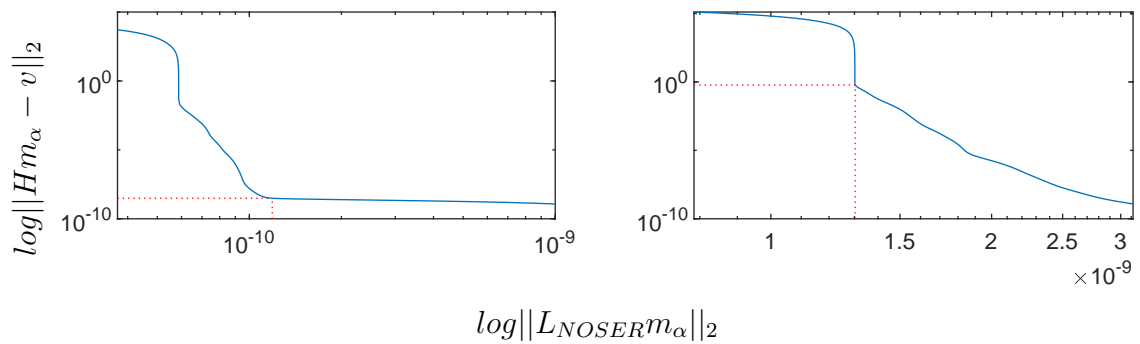
V této příloze jsou porovnány metody určení hyperparametru L-křivky a GCV křivky. Tyto křivky byly vygenerovány při dvou hladinách odstupů signálu od šumu $SNR = 20$ a $SNR = 1$. Je vidět, že u L-křivky při nižším odstupě signálu od šumu je špatně znatelná její hrana. U Laplaceova prioru jsou navíc dvě hrany L-křivky, přičemž hyperparametr je správně určen první hranou. Proto se musela v algoritmu hledání hyperparametru pomocí L-Křivky omezit maximální velikost hyperparametru. U GCV křivky je minimum vždy zřejmé, a proto je hodnota hyperparametru vždy dobře určena. Při nižším odstupě signálu od šumu je metoda GCV účinnější.



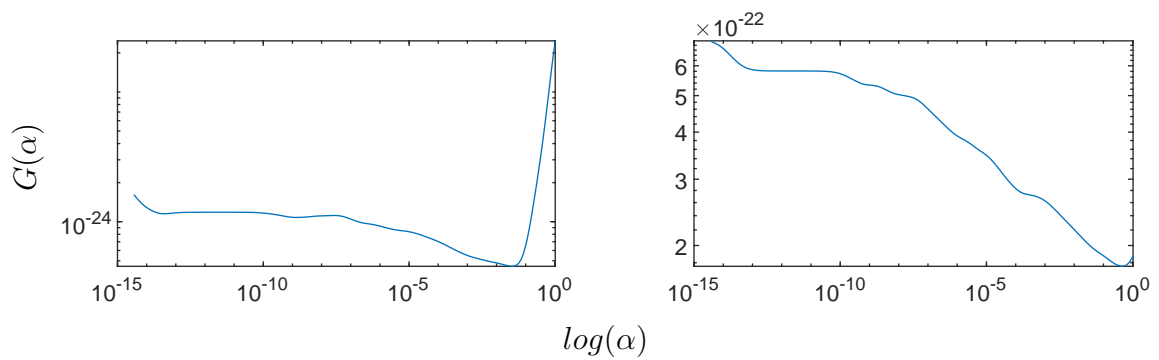
Obrázek B.1: L-Křivka pro Tikhonův prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$



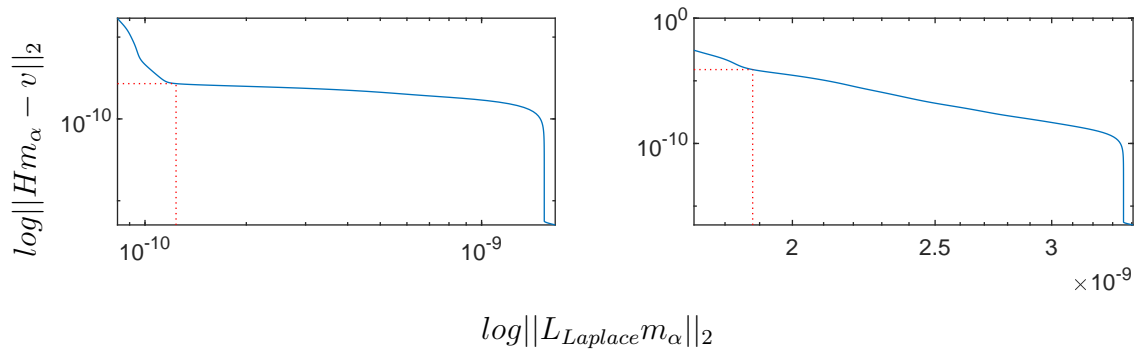
Obrázek B.2: Tvar křivky funkce $G(\alpha)$ pro Tikhonův prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$



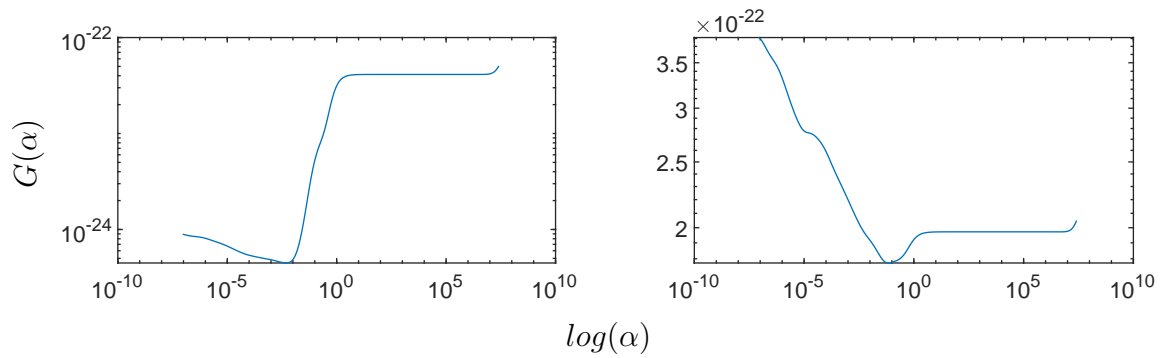
Obrázek B.3: L-Křivka pro NOSER prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$



Obrázek B.4: Tvar křivky funkce $G(\alpha)$ pro NOSER prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$



Obrázek B.5: L-Křivka pro Laplaceův prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$

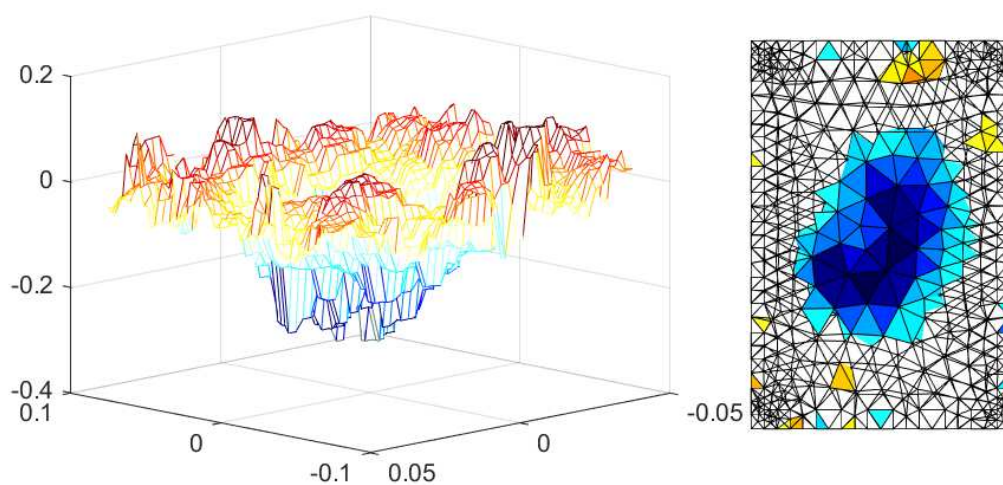


Obrázek B.6: Tvar křivky funkce $G(\alpha)$ pro Laplaceův prior pro $SNR = 20$ a $SNR = 1$

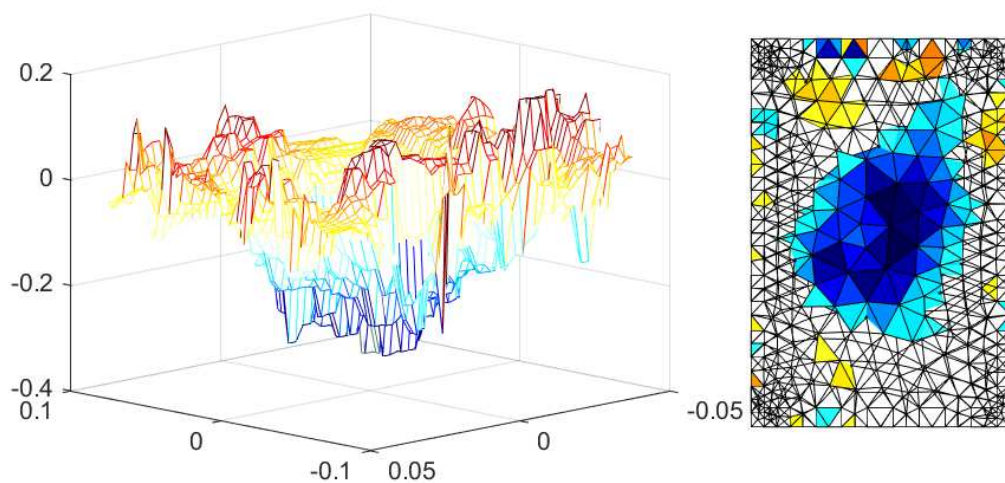
Příloha C

Porovnání regularizací

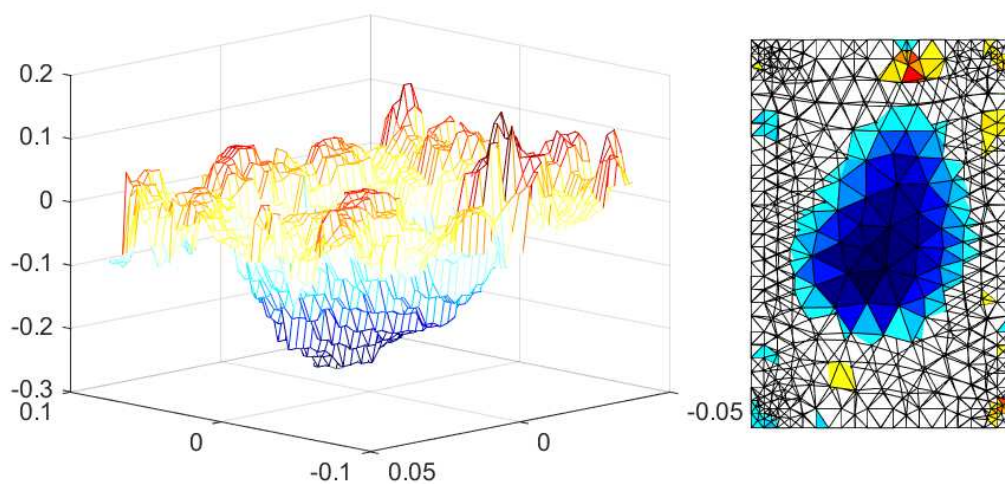
V následující příloze je porovnán vliv regularizací na rekonstrukci obrazu. Byly porovnány TSVD regularizace a lineárními regularizace. Rekonstrukce byla provedena ze signálu, jehož odstup od šumu byl $SNR = 5$. U všech regularizací byl hyperparametr vybrán podle čísla $NF = 1.5$.



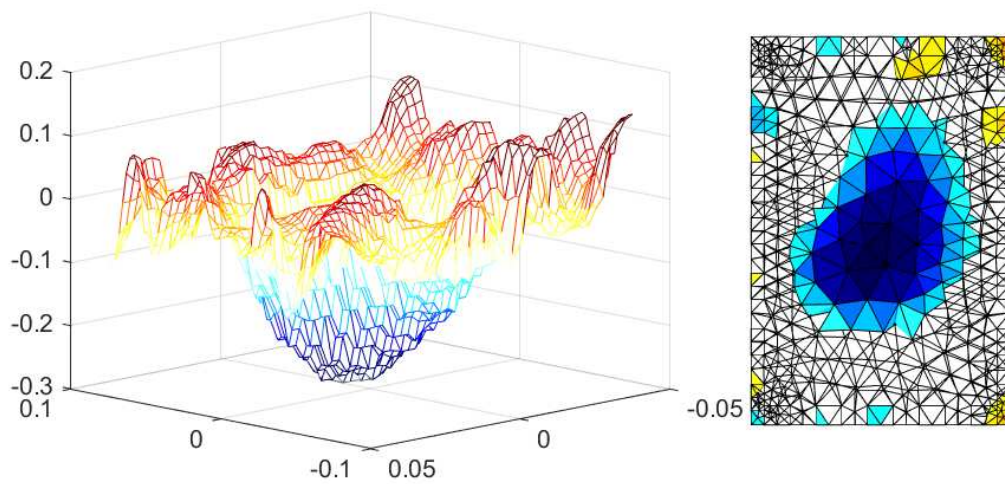
Obrázek C.1: Rekonstrukce s Tikhonovým priorem



Obrázek C.2: TSVD regularizace



Obrázek C.3: Regularizace s NOSER priorem



Obrázek C.4: Regularizace s Laplacelovou priorem

Příloha D

Detekce nehomogenity na simulovaných datech

V této příloze je umístěno několik tabulek, které srovnávají vliv různých typů regularizací a různé metody výběru hyperparametru na přesnost určení polohy bodové nehomogenity. Celkově jsou zde čtyři tabulky D.1, D.2, D.3, D.4 pro odstup signálu od šumu $SNR = 10$, $SNR = 5$, $SNR = 2$, $SNR = 1$. Algoritmy byly vyhodnoceny celkově na sto různých polohách nehomogenity. Poloha nehomogenity byla určena prostřednictvím nově implementovaného algoritmu a původní metodou implementovanou v nástroji EIDORS. Určená poloha nehomogenity, u které byla také zjištěna amplituda, byla porovnána s jejím skutečným umístěním. V tabulkách, které srovnávají algoritmy, jsou tyto sloupce

- Prior - funkce regularize použitá v lineární inverzi
- Hp - metoda výběru hyperparametru
- $E[\delta_p]$ - průměrná velikost chyby v určení polohy bodové nehomogenity stanovená algoritmem implementovaným v rámci této diplomové práce
- $E[\delta_t]$ - průměrná velikost chyby v určení polohy bodové nehomogenity stanovená algoritmem implementovaným v nástroji EIDORS
- $E^5[\delta_p]$ - průměrná velikost pěti nejhorších chyb v určení polohy bodové nehomogenity stanovená algoritmem implementovaným v rámci této diplomové práce
- $E^5[\delta_t]$ - průměrná velikost pěti nejhorších chyb v určení polohy bodové nehomogenity stanovená algoritmem implementovaným v nástroji EIDORS
- $E[a_p]$ - průměrná relativní velikost amplitudy v místě bodové nehomogenity, které bylo určeno algoritmem implementovaným v rámci této diplomové práce

- $E[a_t]$ - průměrná relativní velikost amplitudy v místě bodové nehomogenity, které bylo určeno algoritmem implementovaným v nástroji EIDORS

Metoda určení hyperparametru prostřednictvím L-křivky označená hvězdičkou značí omezení maximální velikosti hyperparametru. Toto omezení bylo nutné provést z důvodu tvaru L-Křivky u Laplaceova prioru. Velikost hyperparametru byla omezena na $\alpha < 10^{-4}$.

Tabulka D.1: Určení polohy nehomogenity pro $SNR = 10$

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^5[\delta_p]$ [m]	$E^5[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace	NF = 0.5	0.001 38	0.001 20	0.002 48	0.002 53	-0.25	-0.25
Laplace	NF = 1.0	0.001 43	0.001 36	0.003 22	0.003 01	-0.41	-0.41
Laplace	NF = 1.5	0.001 64	0.001 60	0.004 23	0.003 70	-0.50	-0.50
Laplace+Tikhonov	NF = 1.0	0.001 66	0.001 41	0.003 67	0.002 52	-0.31	-0.31
Laplace+Tikhonov	NF = 1.5	0.001 68	0.001 53	0.003 87	0.003 07	-0.41	-0.41
Laplace	NF = 0.4	0.001 69	0.001 39	0.004 02	0.004 03	-0.21	-0.21
NOSER	NF = 0.4	0.001 69	0.000 96	0.003 45	0.002 09	-0.20	-0.20
Laplace+Tikhonov	NF = 0.5	0.001 70	0.001 12	0.003 53	0.002 26	-0.18	-0.18
Laplace+Tikhonov	NF = 2.0	0.001 71	0.001 68	0.004 22	0.003 49	-0.47	-0.47
Laplace	LCC*	0.001 75	0.001 62	0.004 98	0.003 98	-0.54	-0.54
Laplace	NF = 2.0	0.001 83	0.001 72	0.004 78	0.004 03	-0.57	-0.57
NOSER	NF = 0.5	0.001 91	0.001 22	0.003 95	0.002 48	-0.24	-0.24
Laplace+Tikhonov	NF = 0.4	0.001 91	0.001 21	0.003 96	0.002 66	-0.14	-0.14
Laplace+Tikhonov	BR	0.001 96	0.001 85	0.005 27	0.004 53	-0.60	-0.61
NOSER	NF = 1.0	0.002 06	0.001 82	0.004 79	0.003 56	-0.38	-0.38
NOSER	NF = 1.5	0.002 06	0.001 98	0.005 67	0.004 48	-0.48	-0.48
NOSER	NF = 2.0	0.002 08	0.002 07	0.006 30	0.005 10	-0.54	-0.54
Tikhonov	NF = 2.0	0.002 11	0.001 90	0.005 65	0.004 20	-0.54	-0.54
Tikhonov	LCC	0.002 14	0.002 07	0.005 51	0.004 48	-0.63	-0.63
Laplace	BR	0.002 14	0.002 06	0.005 67	0.004 64	-0.67	-0.67

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^5[\delta_p]$ [m]	$E^5[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace+NOSER	BR	0.002 14	0.002 06	0.005 67	0.004 64	-0.67	-0.67
Laplace+Tikhonov	GCV	0.002 15	0.002 08	0.005 34	0.005 94	-0.71	-0.71
Tikhonov	NF = 1.5	0.002 15	0.001 79	0.005 95	0.003 60	-0.47	-0.47
NOSER	LCC	0.002 18	0.002 05	0.006 30	0.005 08	-0.61	-0.61
Tikhonov	BR	0.002 25	0.002 29	0.006 11	0.005 40	-0.68	-0.69
Laplace+NOSER	NF = 1.5	0.002 34	0.002 07	0.005 79	0.004 27	-0.51	-0.51
Laplace+NOSER	NF = 2.0	0.002 38	0.002 14	0.006 18	0.004 75	-0.58	-0.58
Tikhonov	NF = 1.0	0.002 38	0.001 79	0.005 84	0.003 19	-0.37	-0.36
Laplace+NOSER	NF = 1.0	0.002 38	0.002 13	0.005 46	0.004 83	-0.41	-0.41
Tikhonov	GCV	0.002 49	0.002 72	0.006 31	0.009 87	-0.81	-0.79
NOSER	BR	0.002 52	0.002 34	0.007 95	0.005 83	-0.74	-0.74
NOSER	GCV	0.002 60	0.002 76	0.007 37	0.009 94	-0.78	-0.78
Laplace	GCV	0.002 88	0.002 69	0.014 40	0.011 88	-0.69	-0.70
Laplace+NOSER	NF = 0.5	0.002 98	0.001 93	0.005 88	0.004 12	-0.26	-0.26
Tikhonov	NF = 0.5	0.003 05	0.001 78	0.006 74	0.003 66	-0.22	-0.21
Tikhonov	NF = 0.4	0.003 18	0.001 78	0.006 45	0.003 77	-0.18	-0.17
Laplace+NOSER	NF = 0.4	0.003 32	0.001 86	0.006 87	0.004 21	-0.22	-0.22
Laplace+Tikhonov	LCC	0.012 68	0.004 30	0.049 02	0.016 71	-0.41	-0.41
Laplace	LCC	0.012 80	0.004 43	0.049 10	0.016 72	-0.45	-0.45

Tabulka D.2: Určení polohy nehomogenity pro $SNR = 5$

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^5[\delta_p]$ [m]	$E^5[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace	NF = 0.5	0.001 59	0.001 34	0.003 04	0.002 85	-0.25	-0.25
Laplace	NF = 1.0	0.001 72	0.001 67	0.003 70	0.003 20	-0.41	-0.40
NOSER	NF = 0.4	0.001 83	0.001 12	0.003 80	0.002 25	-0.20	-0.20
Laplace+Tikhonov	NF = 0.5	0.001 84	0.001 18	0.003 76	0.002 52	-0.18	-0.18
Laplace+Tikhonov	NF = 1.0	0.001 86	0.001 57	0.004 08	0.003 13	-0.31	-0.31
Laplace+Tikhonov	GCV	0.001 87	0.001 82	0.004 70	0.004 02	-0.49	-0.49
Laplace	NF = 0.4	0.001 91	0.001 58	0.004 75	0.004 81	-0.21	-0.21
Laplace+Tikhonov	NF = 1.5	0.001 92	0.001 78	0.004 39	0.003 49	-0.40	-0.40
Laplace	NF = 1.5	0.001 95	0.001 90	0.004 89	0.004 26	-0.50	-0.50
Laplace	GCV	0.001 96	0.001 94	0.004 79	0.004 61	-0.55	-0.55
Laplace+Tikhonov	NF = 0.4	0.002 02	0.001 35	0.003 99	0.002 81	-0.14	-0.14
Laplace+Tikhonov	NF = 2.0	0.002 05	0.001 89	0.004 96	0.004 10	-0.47	-0.47
NOSER	NF = 0.5	0.002 11	0.001 39	0.004 48	0.002 96	-0.24	-0.24
Laplace	NF = 2.0	0.002 11	0.002 03	0.005 80	0.004 97	-0.57	-0.57
NOSER	LCC	0.002 25	0.001 88	0.005 66	0.004 12	-0.43	-0.43
Laplace+Tikhonov	BR	0.002 30	0.002 16	0.006 45	0.005 68	-0.61	-0.60
Tikhonov	LCC	0.002 36	0.001 97	0.005 64	0.003 45	-0.45	-0.44
NOSER	GCV	0.002 38	0.002 18	0.006 44	0.005 38	-0.57	-0.56
NOSER	NF = 1.0	0.002 39	0.001 97	0.005 81	0.004 20	-0.38	-0.38
NOSER	NF = 1.5	0.002 41	0.002 17	0.006 69	0.005 16	-0.48	-0.48

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^5[\delta_p]$ [m]	$E^5[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace	BR	0.002 41	0.002 29	0.006 93	0.006 05	-0.68	-0.67
Laplace+NOSER	BR	0.002 41	0.002 29	0.006 93	0.006 05	-0.68	-0.67
Tikhonov	GCV	0.002 44	0.002 17	0.006 96	0.005 43	-0.59	-0.57
NOSER	NF = 2.0	0.002 48	0.002 25	0.007 46	0.005 62	-0.55	-0.54
Laplace+NOSER	NF = 1.5	0.002 49	0.002 27	0.006 66	0.004 87	-0.51	-0.50
Tikhonov	NF = 1.5	0.002 51	0.002 03	0.006 33	0.004 16	-0.47	-0.45
Tikhonov	NF = 1.0	0.002 51	0.001 99	0.005 82	0.003 55	-0.37	-0.35
Tikhonov	NF = 2.0	0.002 53	0.002 18	0.007 15	0.004 86	-0.54	-0.53
Laplace+NOSER	NF = 2.0	0.002 55	0.002 35	0.007 28	0.005 64	-0.57	-0.57
Laplace+NOSER	NF = 1.0	0.002 58	0.002 25	0.006 07	0.004 84	-0.41	-0.41
Tikhonov	BR	0.002 59	0.002 43	0.007 93	0.006 33	-0.69	-0.66
NOSER	BR	0.002 81	0.002 66	0.008 99	0.007 50	-0.75	-0.74
Tikhonov	NF = 0.5	0.002 95	0.001 85	0.006 83	0.003 83	-0.22	-0.21
Laplace+NOSER	NF = 0.5	0.003 09	0.002 00	0.006 67	0.004 31	-0.26	-0.26
Tikhonov	NF = 0.4	0.003 30	0.001 83	0.006 66	0.004 18	-0.18	-0.17
Laplace+NOSER	NF = 0.4	0.003 35	0.001 97	0.006 84	0.004 59	-0.22	-0.22
Laplace	LCC*	0.004 50	0.002 65	0.018 66	0.007 88	-0.36	-0.36
Laplace+Tikhonov	LCC	0.026 16	0.008 97	0.049 94	0.018 92	-0.18	-0.17
Laplace	LCC	0.026 47	0.009 04	0.049 93	0.018 95	-0.19	-0.19

Tabulka D.3: Určení polohy nehomogenity pro $SNR = 2$

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^5[\delta_p]$ [m]	$E^5[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace+Tikhonov	NF = 0.5	0.002 42	0.002 18	0.006 35	0.004 86	-0.18	-0.18
Laplace+Tikhonov	NF = 0.4	0.002 50	0.002 16	0.006 00	0.004 69	-0.14	-0.14
NOSER	NF = 0.4	0.002 50	0.002 10	0.006 29	0.004 85	-0.20	-0.20
Laplace+Tikhonov	GCV	0.002 61	0.002 58	0.006 16	0.005 83	-0.29	-0.29
Laplace	NF = 0.5	0.002 70	0.002 61	0.006 21	0.005 76	-0.25	-0.25
Laplace+Tikhonov	NF = 1.0	0.002 78	0.002 71	0.006 66	0.005 87	-0.32	-0.31
NOSER	NF = 0.5	0.002 79	0.002 31	0.006 97	0.005 54	-0.24	-0.24
Laplace	NF = 0.4	0.002 80	0.002 68	0.006 69	0.005 60	-0.21	-0.21
NOSER	LCC	0.002 90	0.002 46	0.006 97	0.005 58	-0.28	-0.28
Laplace	GCV	0.002 93	0.002 95	0.006 53	0.006 61	-0.35	-0.35
NOSER	GCV	0.003 13	0.002 80	0.007 67	0.006 50	-0.36	-0.36
Laplace+Tikhonov	NF = 1.5	0.003 19	0.003 01	0.008 09	0.006 40	-0.41	-0.41
Laplace	NF = 1.0	0.003 20	0.003 16	0.007 56	0.007 51	-0.41	-0.41
NOSER	NF = 1.0	0.003 36	0.002 96	0.009 04	0.006 71	-0.39	-0.38
Tikhonov	GCV	0.003 43	0.003 04	0.007 67	0.007 08	-0.38	-0.35
Tikhonov	LCC	0.003 49	0.002 68	0.007 81	0.005 95	-0.30	-0.28
Tikhonov	NF = 1.0	0.003 51	0.003 07	0.007 84	0.006 48	-0.37	-0.35
Tikhonov	NF = 0.5	0.003 58	0.002 43	0.007 24	0.005 55	-0.22	-0.21
Laplace+NOSER	NF = 1.0	0.003 60	0.003 14	0.009 14	0.007 55	-0.41	-0.41
Tikhonov	NF = 0.4	0.003 64	0.002 42	0.007 22	0.005 44	-0.18	-0.17

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^5[\delta_p]$ [m]	$E^5[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace+NOSER	NF = 0.5	0.003 65	0.002 77	0.008 14	0.006 12	-0.26	-0.26
Laplace	NF = 1.5	0.003 80	0.003 85	0.009 25	0.008 69	-0.51	-0.50
Laplace+NOSER	NF = 0.4	0.003 82	0.002 70	0.008 21	0.005 56	-0.23	-0.22
Laplace+NOSER	NF = 1.5	0.003 88	0.003 48	0.010 07	0.008 43	-0.51	-0.51
NOSER	NF = 1.5	0.003 94	0.003 46	0.010 31	0.007 57	-0.49	-0.48
Laplace+NOSER	NF = 2.0	0.004 25	0.004 15	0.010 62	0.009 66	-0.59	-0.58
NOSER	NF = 2.0	0.004 39	0.004 75	0.011 51	0.011 91	-0.56	-0.53
Laplace+Tikhonov	NF = 2.0	0.004 57	0.003 42	0.024 63	0.007 31	-0.48	-0.47
Tikhonov	NF = 1.5	0.004 84	0.003 54	0.022 55	0.008 14	-0.47	-0.44
Laplace	NF = 2.0	0.006 11	0.005 19	0.037 41	0.013 86	-0.58	-0.56
Tikhonov	NF = 2.0	0.007 53	0.005 47	0.062 18	0.021 69	-0.53	-0.49
Laplace+Tikhonov	BR	0.008 22	0.006 99	0.066 18	0.024 75	-0.60	-0.55
Laplace	LCC*	0.008 94	0.004 64	0.026 38	0.010 81	-0.29	-0.27
Laplace	BR	0.011 54	0.011 17	0.088 84	0.039 11	-0.64	-0.53
Laplace+NOSER	BR	0.011 54	0.011 17	0.088 84	0.039 11	-0.64	-0.53
Tikhonov	BR	0.012 80	0.012 20	0.093 83	0.037 38	-0.62	-0.48
NOSER	BR	0.013 67	0.015 20	0.084 97	0.039 34	-0.66	-0.41
Laplace+Tikhonov	LCC	0.039 04	0.012 67	0.053 07	0.020 72	-0.03	-0.03
Laplace	LCC	0.040 09	0.012 92	0.053 16	0.021 49	-0.03	-0.03

Tabulka D.4: Určení polohy nehomogenity pro $SNR = 1$

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^5[\delta_p]$ [m]	$E^5[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace+Tikhonov	NF = 0.4	0.004 85	0.003 99	0.010 26	0.010 08	-0.15	-0.14
Laplace+Tikhonov	NF = 0.5	0.005 07	0.004 24	0.011 22	0.010 55	-0.19	-0.18
Laplace+NOSER	NF = 0.4	0.005 28	0.004 29	0.011 25	0.009 41	-0.23	-0.23
Tikhonov	NF = 0.4	0.005 38	0.004 19	0.011 56	0.009 52	-0.18	-0.17
Tikhonov	GCV	0.005 55	0.004 77	0.011 80	0.010 17	-0.24	-0.22
Tikhonov	NF = 0.5	0.005 56	0.004 61	0.012 27	0.009 79	-0.23	-0.21
Laplace	NF = 0.4	0.005 69	0.004 90	0.012 65	0.012 20	-0.22	-0.22
NOSER	NF = 0.4	0.005 99	0.004 49	0.026 67	0.014 35	-0.20	-0.20
Laplace+NOSER	NF = 0.5	0.006 37	0.004 92	0.027 18	0.014 67	-0.27	-0.27
Laplace+Tikhonov	NF = 1.0	0.006 74	0.005 67	0.026 54	0.011 97	-0.33	-0.32
NOSER	GCV	0.006 88	0.005 17	0.039 23	0.019 76	-0.23	-0.23
Laplace+Tikhonov	GCV	0.007 09	0.004 81	0.023 12	0.010 85	-0.17	-0.17
NOSER	NF = 0.5	0.007 44	0.005 38	0.043 35	0.019 84	-0.24	-0.24
Laplace	NF = 0.5	0.008 74	0.006 74	0.058 68	0.031 91	-0.25	-0.26
Laplace	GCV	0.012 48	0.006 11	0.053 94	0.016 17	-0.22	-0.21
Laplace+NOSER	NF = 1.0	0.012 65	0.008 84	0.082 52	0.038 11	-0.39	-0.39
Laplace+Tikhonov	NF = 1.5	0.013 23	0.008 71	0.090 52	0.030 78	-0.40	-0.38
NOSER	NF = 1.0	0.015 32	0.008 80	0.092 14	0.033 26	-0.37	-0.35
Tikhonov	NF = 1.0	0.015 44	0.008 35	0.101 94	0.029 40	-0.34	-0.33
Laplace	NF = 1.0	0.015 66	0.009 46	0.096 87	0.035 69	-0.39	-0.38

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^5[\delta_p]$ [m]	$E^5[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace+NOSER	NF = 1.5	0.016 50	0.011 07	0.096 56	0.040 82	-0.45	-0.44
Laplace+NOSER	NF = 2.0	0.019 72	0.014 09	0.097 43	0.043 59	-0.48	-0.41
NOSER	LCC	0.019 82	0.011 52	0.108 76	0.042 21	-11 698 148.23	7 498 190.01
Tikhonov	LCC	0.019 99	0.011 40	0.113 35	0.040 01	-27 108 879.82	3 346 332.12
Laplace+Tikhonov	NF = 2.0	0.020 51	0.012 18	0.100 76	0.043 29	-0.41	-0.38
Laplace	LCC*	0.023 45	0.014 09	0.089 16	0.046 96	124.35	-267.27
NOSER	NF = 1.5	0.024 06	0.014 06	0.106 47	0.040 22	-0.40	-0.35
Tikhonov	NF = 1.5	0.024 21	0.013 78	0.102 35	0.044 68	-0.35	-0.33
NOSER	NF = 2.0	0.024 50	0.017 03	0.106 48	0.045 76	-0.43	-0.33
Laplace+Tikhonov	BR	0.027 26	0.019 72	0.103 32	0.053 23	-0.41	-0.33
Laplace	NF = 1.5	0.028 53	0.014 40	0.107 70	0.045 07	-0.37	-0.37
Laplace	NF = 2.0	0.028 81	0.018 78	0.105 26	0.053 65	-0.34	-0.32
Tikhonov	BR	0.030 47	0.022 56	0.099 26	0.051 89	-0.32	-0.23
Laplace	BR	0.033 08	0.023 22	0.108 11	0.052 78	-0.25	-0.28
Laplace+NOSER	BR	0.033 08	0.023 22	0.108 11	0.052 78	-0.25	-0.28
Tikhonov	NF = 2.0	0.033 37	0.019 64	0.111 87	0.053 31	-0.29	-0.30
NOSER	BR	0.036 02	0.024 57	0.108 89	0.054 11	-0.21	-0.26
Laplace+Tikhonov	LCC	0.040 64	0.013 89	0.060 11	0.026 80	-0.03	-0.03
Laplace	LCC	0.041 43	0.014 10	0.061 26	0.027 44	-0.03	-0.03

Příloha E

Detekce nehomogenity na reálných datech

V této příloze jsou kompletní výsledky přesnosti určení polohy bodové nehomogenity algoritmy inverzních metod aplikovaných na reálných datech. Data byla naměřena z 8 měření různých velikostí děr na vzorku. Naměřená data byla zanesena do tabulky E.1 pro jednotlivé metody inverze. Popis jednotlivých sloupců je shodný s popisem sloupců v příloze D. Metoda výběru parametru prostřednictvím L-Křivky nedokázala dobře rekonstruovat obraz pro otvor s nejmenším průměrem avšak, velmi dobře dokázala rekonstruovat obraz s větším poloměrem otvoru, proto tyto výsledky algoritmu nejsou vypovídající. Nový algoritmus hledající polohu nehomogenity je nastaven tak, že prokládá třicet procent plochy kolem těžiště polynomem druhého řádu.

Tabulka E.1: Určení polohy bodové nehomogenity

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^2[\delta_p]$ [m]	$E^2[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace+NOSER	NF = 0.4	0.001 31	0.002 45	0.002 39	0.005 51	-140.68	-140.15
Laplace+NOSER	NF = 0.5	0.001 35	0.002 34	0.002 48	0.004 61	-173.18	-173.20
Laplace	NF = 0.5	0.001 47	0.001 89	0.002 72	0.003 54	-163.28	-162.76
Laplace	NF = 1.0	0.001 64	0.002 31	0.003 24	0.003 86	-251.68	-251.41
Laplace+Tikhonov	BR	0.001 71	0.004 21	0.003 96	0.010 46	-345.96	-329.68
Laplace	GCV	0.001 74	0.002 62	0.003 00	0.005 00	-308.78	-308.46
Tikhonov	NF = 1.5	0.001 79	0.003 46	0.002 99	0.007 32	-205.64	-203.98
Laplace	NF = 0.4	0.001 80	0.002 07	0.003 06	0.004 34	-133.92	-133.42
NOSER	LCC	0.001 86	0.003 08	0.003 48	0.005 37	-276.87	-276.21
Laplace+Tikhonov	NF = 1.0	0.001 93	0.002 56	0.003 54	0.004 25	-180.35	-180.18
NOSER	GCV	0.001 96	0.003 38	0.003 71	0.005 90	-339.39	-339.65
NOSER	NF = 1.0	0.001 98	0.003 20	0.003 63	0.004 99	-253.70	-249.81
Laplace+Tikhonov	NF = 1.5	0.002 01	0.002 65	0.003 89	0.004 94	-229.71	-227.40
Tikhonov	NF = 1.0	0.002 24	0.003 33	0.003 57	0.006 10	-165.28	-161.83
NOSER	NF = 1.5	0.002 25	0.002 88	0.004 18	0.005 23	-313.73	-305.77
Laplace+Tikhonov	GCV	0.002 32	0.003 25	0.004 55	0.005 93	-247.44	-247.33
Tikhonov	LCC	0.002 37	0.003 56	0.004 53	0.006 53	-198.27	-202.29
NOSER	NF = 0.5	0.002 37	0.003 78	0.004 18	0.006 12	-152.27	-151.22
Tikhonov	GCV	0.002 43	0.003 41	0.004 18	0.006 43	-229.11	-231.94
NOSER	NF = 0.4	0.002 76	0.004 03	0.004 69	0.007 03	-120.61	-121.18

Prior	Hp	$E[\delta_p]$ [m]	$E[\delta_t]$ [m]	$E^2[\delta_p]$ [m]	$E^2[\delta_t]$ [m]	$E[a_p]$ [Sm^{-1}]	$E[a_t]$ [Sm^{-1}]
Laplace	LCC*	0.002 83	0.003 47	0.008 02	0.009 73	-233.56	-211.58
Tikhonov	NF = 0.5	0.003 65	0.005 04	0.005 93	0.007 29	-98.44	-99.55
Laplace+Tikhonov	NF = 0.5	0.003 66	0.004 20	0.005 42	0.006 33	-97.42	-97.44
Laplace+Tikhonov	NF = 0.4	0.004 79	0.005 07	0.006 86	0.007 54	-73.44	-73.15
Tikhonov	NF = 0.4	0.005 01	0.005 36	0.009 11	0.006 43	-76.88	-82.98
Tikhonov	BR	0.005 73	0.007 92	0.018 11	0.022 98	-294.93	-289.97
Laplace+NOSER	NF = 2.0	0.006 00	0.006 76	0.020 59	0.021 22	-363.22	-369.83
Laplace	LCC	0.008 93	0.001 42	0.032 44	0.002 46	-223.14	-222.93
Laplace	BR	0.009 22	0.009 47	0.033 08	0.026 80	-377.08	-355.47
Laplace+NOSER	BR	0.009 22	0.009 47	0.033 08	0.026 80	-377.08	-355.47
Laplace+Tikhonov	LCC	0.009 33	0.001 81	0.033 22	0.003 44	-194.54	-194.00
Laplace+NOSER	NF = 1.5	0.010 84	0.007 97	0.040 39	0.027 06	-322.77	-332.19
Laplace+NOSER	NF = 1.0	0.010 87	0.010 28	0.041 08	0.036 41	-269.96	-275.10
Laplace	NF = 2.0	0.011 13	0.007 41	0.039 98	0.023 60	-326.48	-322.80
NOSER	NF = 2.0	0.011 69	0.007 42	0.041 96	0.023 12	-337.90	-335.70
Laplace	NF = 1.5	0.011 91	0.007 85	0.042 75	0.024 15	-288.67	-288.28
Laplace+Tikhonov	NF = 2.0	0.012 14	0.007 77	0.043 60	0.024 49	-251.37	-252.17
Tikhonov	NF = 2.0	0.013 18	0.006 93	0.047 85	0.022 12	-223.53	-228.70
NOSER	BR	0.015 65	0.012 93	0.055 38	0.033 33	-395.62	-371.44

Bibliografie

- [1] R. L. Parker, “The Inverse Problem of Resistivity Sounding”, *GEOPHYSICS*, roč. 49, č. 12, s. 2143–2158, pros. 1984, ISSN: 0016-8033. DOI: 10.1190/1.1441630.
- [2] G. Lympelopoulos, P. Lympelopoulos, V. Alikari, C. Dafogianni, S. Zyga a N. Margari, “Applications for Electrical Impedance Tomography (EIT) and Electrical Properties of the Human Body”, en, in *GeNeDis 2016*, P. Vlamos, ed., ř. Advances in Experimental Medicine and Biology, Cham: Springer International Publishing, 2017, s. 109–117, ISBN: 978-3-319-57348-9. DOI: 10.1007/978-3-319-57348-9_9.
- [3] P. G. Kaup, F. Santosa a M. Vogelius, “Method for Imaging Corrosion Damage in Thin Plates from Electrostatic Data”, en, *Inverse Problems*, roč. 12, č. 3, s. 279–293, červ. 1996, ISSN: 0266-5611. DOI: 10.1088/0266-5611/12/3/008.
- [4] N. P. Athanasios Baltopoulos, “Sensing Capabilities of Multifunctional Composite Materials Using Carbon Nanotubes”, *61st International Astronautical Congress 2010, IAC 2010*, roč. 13, 2010.
- [5] N. Athanasopoulos, D. Sikoutris, N. J. Siakavellas a V. Kostopoulos, “Electrical Resistivity Prediction of Dry Carbon Fiber Media as a Function of Thickness and Fiber Volume Fraction Combining Empirical and Analytical Formulas”, *Composites Part B: Engineering*, roč. 81, s. 26–34, lis. 2015, ISSN: 1359-8368. DOI: 10.1016/j.compositesb.2015.06.022.
- [6] P. C. Hansen, “Regularization Tools Version 4.0 for Matlab 7.3”, en, *Numerical Algorithms*, roč. 46, č. 2, s. 189–194, říj. 2007, ISSN: 1572-9265. DOI: 10.1007/s11075-007-9136-9.
- [7] J. Cagáň, “Hardware Implementation of Electrical Resistance Tomography for Damage Detection of Carbon Fibre–Reinforced Polymer Composites”, en, *Structural Health Monitoring*, s. 1475921716666004, zář. 2016, ISSN: 1475-9217, 1741-3168. DOI: 10.1177/1475921716666004.
- [8] J. Cagáň a J. Rosler, “Design of Multiplexer for Electrical Impedance Tomography”, en, *Materials Today: Proceedings*, 33rd Danubia Adria Symposium on Advances in Experimental Mechanics, 20-23 September 2016, roč. 4, č. 5, Part 1, s. 5755–5760, led. 2017, ISSN: 2214-7853. DOI: 10.1016/j.matpr.2017.06.041.
- [9] A. Todoroki, “Skin Effect of Alternating Electric Current on Laminated CFRP”, *Advanced Composite Materials*, roč. 21, č. 5-6, s. 477–489, pros. 2012, ISSN: 0924-3046. DOI: 10.1080/09243046.2012.743716.

- [10] J. Cagáň, J. Pelant, M. Kyncl, M. Kadlec a L. Michalcová, “Damage Detection in Carbon Fiber–Reinforced Polymer Composite via Electrical Resistance Tomography with Gaussian Anisotropic Regularization”, en, *Structural Health Monitoring*, roč. 18, č. 5-6, s. 1698–1710, lis. 2019, ISSN: 1475-9217. DOI: 10.1177/1475921718820013.
- [11] A. P. Calderón, “On an Inverse Boundary Value Problem”, *Computational & Applied Mathematics*, roč. 25, č. 2-3, s. 133–138, 0, ISSN: 1807-0302.
- [12] J. Dědková a T. Kříž, *Modelování Elektromagnetických Polí (MEM) Přednášky, Počítačová Cvičení Studijní Texty - Modelování Elektromagnetických Polí*, ř. První. Kolejní 2906/4, 612 00 Brno: Vysoké učení technické v Brně Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií Ústav teoretické a experimentální elektrotechniky, 2012, ISBN: 978-80-214-4401-0.
- [13] D. Holder, *Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications*, English. Bristol ; Philadelphia: CRC Press, pros. 2004, ISBN: 978-0-7503-0952-3.
- [14] M. Pšenka, J. Velímský, O. Souček a K. Univerzita, “Elektrická Impedanční Tomografie Měkkých Tkání: Řešení Přímé a Obrácené Úlohy”, dis, 2017.
- [15] M. Pšenka, V. Průša, J. Velímský a K. Univerzita, “Electrical Impedance Tomography of Soft Tissue”, dis, 2015.
- [16] E. Somersalo, M. Cheney a D. Isaacson, “Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography”, English, *SIAM Journal on Applied Mathematics; Philadelphia*, roč. 52, č. 4, s. 18, srp. 1992, ISSN: 00361399.
- [17] N. Polydorides a W. R. B. Lionheart, “A Matlab Toolkit for Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography: A Contribution to the Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software Project”, en, *Measurement Science and Technology*, roč. 13, č. 12, s. 1871, 2002, ISSN: 0957-0233. DOI: 10.1088/0957-0233/13/12/310.
- [18] J. P. Kaipio, V. Kolehmainen, E. Somersalo a M. Vauhkonen, “Statistical Inversion and Monte Carlo Sampling Methods in Electrical Impedance Tomography”, en, *Inverse Problems*, roč. 16, č. 5, s. 1487, 2000, ISSN: 0266-5611. DOI: 10.1088/0266-5611/16/5/321.
- [19] A. Adler, T. Dai a W. R. B. Lionheart, “Temporal Image Reconstruction in Electrical Impedance Tomography”, en, *Physiological Measurement*, roč. 28, č. 7, S1–S11, červ. 2007, ISSN: 0967-3334. DOI: 10.1088/0967-3334/28/7/S01.
- [20] Zhaojun Bai, James Demmel, Jack Dongarra, Axel Ruhe a Henk van der Vorst, ed., *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems*, ř. Software, Environments and Tools. Society for Industrial and Applied Mathematics, led. 2000, ISBN: 978-0-89871-471-5. DOI: 10.1137/1.9780898719581.
- [21] S. Noschese a L. Reichel, “Some Matrix Nearness Problems Suggested by Tikhonov Regularization”, *Linear Algebra and its Applications*, roč. 502, s. 366–386, srp. 2016, ISSN: 00243795. DOI: 10.1016/j.laa.2015.04.008. arXiv: 1602.03307.
- [22] M. Cheney, D. Isaacson, J. C. Newell, S. Simske a J. Goble, “NOSER: An Algorithm for Solving the Inverse Conductivity Problem”, *International Journal of Imaging Systems & Technology*, roč. 2, č. 2, s. 66–75, ISSN: 08999457.

- [23] T.-J. Kao, D Isaacson, J. C. Newell a G. J. Saulnier, “A 3D Reconstruction Algorithm for EIT Using a Handheld Probe for Breast Cancer Detection”, *Physiological measurement*, roč. 27, č. 5, S1–11, květ. 2006, ISSN: 0967-3334. DOI: 10.1088/0967-3334/27/5/S01.
- [24] J. Liu, L. Lin, W. Zhang a G. Li, “A Novel Combined Regularization Algorithm of Total Variation and Tikhonov Regularization for Open Electrical Impedance Tomography”, en, *Physiological Measurement*, roč. 34, č. 7, s. 823–838, čvc 2013, ISSN: 0967-3334, 1361-6579. DOI: 10.1088/0967-3334/34/7/823.
- [25] A. Borsic, “Regularisation Methods for Imaging from Electrical Measurements”, English, Ph.D. Oxford Brookes University (United Kingdom), England, 2002.
- [26] P. Hua, E. J. Woo, J. G. Webster a W. J. Tompkins, “Iterative Reconstruction Methods Using Regularization and Optimal Current Patterns in Electrical Impedance Tomography”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, roč. 10, č. 4, s. 621–628, pros. 1991. DOI: 10.1109/42.108598.
- [27] A. Adler a R. Guardo, “Electrical Impedance Tomography: Regularized Imaging and Contrast Detection”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, roč. 15, č. 2, s. 170–179, dub. 1996, ISSN: 0278-0062. DOI: 10.1109/42.491418.
- [28] A. Borsic, B. M. Graham, A. Adler a W. R. B. Lionheart, *Total Variation Regularization in Electrical Impedance Tomography*, en, MIMS Preprint, červ. 2007.
- [29] A. Borsic, B. M. Graham, A. Adler a W. R. B. Lionheart, “In Vivo Impedance Imaging With Total Variation Regularization”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, roč. 29, č. 1, s. 44–54, led. 2010, ISSN: 0278-0062. DOI: 10.1109/TMI.2009.2022540.
- [30] P. C. Hansen, “The L-Curve and Its Use in the Numerical Treatment of Inverse Problems”, in *In Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, Ed. P. Johnston, *Advances in Computational Bioengineering*, WIT Press, 2000, s. 119–142.
- [31] B. M. Graham a A. Adler, “Objective Selection of Hyperparameter for EIT”, en, *Physiological Measurement*, roč. 27, č. 5, S65, 2006, ISSN: 0967-3334. DOI: 10.1088/0967-3334/27/5/S06.
- [32] P. C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*, ř. Mathematical Modeling and Computation. Society for Industrial and Applied Mathematics, led. 1998, ISBN: 978-0-89871-403-6. DOI: 10.1137/1.9780898719697.
- [33] F. Braun, M. Proença, J. Solà, J.-P. Thiran a A. Adler, “A Versatile Noise Performance Metric for Electrical Impedance Tomography Algorithms”, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, roč. 64, č. 10, s. 2321–2330, říj. 2017, ISSN: 0018-9294, 1558-2531. DOI: 10.1109/TBME.2017.2659540.