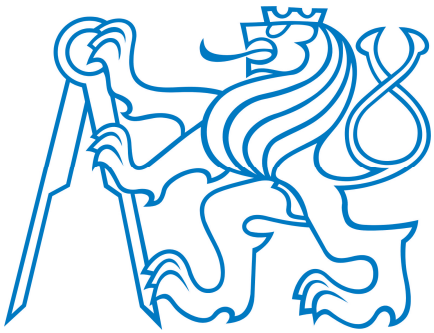
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní – Ústav přístrojové a řídicí techniky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

ALGORITMY PRO TLUMENÍ POHYBU KYVADLA PERIODICKOU ZMĚNOU DÉLKY ZÁVĚSU

ALGORITHMS FOR PENDULUM SWAY DAMPING BY ADJUSTING CABLE LENGTH

Ondřej Pokorný **2019**

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce, panu prof. Ing. Tomáši Vyhlídalovi, Ph.D., za jeho vstřícnost, ochotu, trpělivost a množství rad při tvorbě této závěrečné práce.

Dále bych rád poděkoval spoluhráčům z volejbalovému týmu TJ Sokol Žižkov I. za podporu a motivaci při psaní a v neposlední řadě i své rodině, od které se mi dostávalo podpory po celou dobu mého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně s použitím literárních zdrojů a informací, které cituji a uvádím v seznamu použité literatury a zdrojů.

Datum: ....

Podpis

Zadání práce

Tuto stránka bude nahrazena oficiálním zadaní práce

Anotace

Předmětem této bakalářské práce je seznámení s metodami tlumení pohybu kyvadla pomocí periodické změny délky závěsu. Práce obsahuje popis matematického kyvadla, včetně vlivu Coriolisovy síly. Dále rešerši řídících algoritmů pro tento problém a následné ověření jejich funkčnosti a porovnání vlastností.

Klíčová slova

kyvadlo, tlumení, kmitání, Coriolisova síla, algoritmus, řízení, Ljapunovova metoda, matlab, simulink, dopravní zpoždění, nelineární řízení

Abstract

The subject of the thesis is understanding the methods of damping pendulum sway by adjusting the cable length. This work contains a description of a mathematical pendulum under the influence of Coriolis force, as well as a brief search of control algorithms for this particular problem, which were simulated to prove their functionality. In the end a comparision of these algorithms is provided.

Keywords

pendulum, damping, oscillation, Coriolis force, algorithm, control, Lyapunov theorem, matlab, simulink, time delay, nonlinear control

Obsah

1 Úvod 7

2 Teoretická část 8

2.1 Matematické kyvadlo 8

2.1.1 Základní charakteristiky matematického kyvadla 8

Definice matematického kyvadla 8

Působící síly v matematickém kyvadle 8

Pohybová rovnice 9

2.1.2 Kyvadlo s proměnnou délkou závěsu 9

Vliv Coriolisovy síly 10

Pohybová rovnice 10

2.2 Řízení tlumení 11

Empirický přístup 11

Ljapunovova metoda 12

2.2.1 Otevřená soustava 12

Řízení periodickou změnou délky závěsu 12

Energetický přístup 12

Náhradní soustava s lineárním odporem (viskózním tlumičem) a tlumící poměr 13

Změna energie v soustavě kyvadla 14

Zjednodušená soustava 14

Zázněj 15

Numerické řešení 16

2.2.2 Zpětnovazebné řízení 16

Řízení s dopravním zpožděním 16

Řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem 17

Řízení bez dopravního zpoždění 17

2.2.3 Zpětnovazebné řízení s využitím Ljapunovovy metody 17

Nelineární řízení 17

Proporcionálně - Derivační řízení 17

Řízení na základě energetických výpočtů 18

Řízení na základě metody průměrování 18

3 Praktická část 19

3.1 Model kyvadla v prostředí MATLAB Simulink 19

3.1.1 Tlumená soustava 19

Kyvadlo jako tlumený harmonický oscilátor 19

Úprava soustavy pro algoritmy s řízením napínací síly 19

3.1.2 Řízení 19

Netlumená soustava 19
Řídící algoritmus 20
3.2 Simulace řídících algoritmů 21
3.2.1 Řízení v otevřené smyčce 21
3.2.2 Zpětnovazebné řízení s dopravním zpožděním 22
3.2.3 Zpětnovazebné řízení s dvojitým dopravním zpožděním 23
3.2.4 Zpětnovazebné řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem 24
3.2.5 Zpětnovazebné řízení s dvojitým dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem 25
3.2.6 Zpětnovazebné řízení bez dopravního zpoždění 26
3.2.7 Nelineární zpětnovazebné řízení 27
3.2.8 Zpětnovazebné řízení na základě metody průměrování 28
3.2.9 Proporcionálně - Derivační zpětnovazebné řízení 29
3.2.10 Zpětnovazebné řízení na základě energetických výpočtů 30
3.3 Porovnání řídících algoritmů 31
Výsledky pro větší výchylku a rozsah pohybu závěsu 31
Výsledky pro menší výchylku a rozsah pohybu závěsu 31
Aplikace v praxi 32
4 Závěr 33
Seznam použitých značek a symbolů 34
Seznam použité literatury a zdrojů 35
Seznam použitého softwaru 37
Seznam příloh 38

1 Úvod

Přenášením hmoty v rotující soustavě lze generovat silové účinky, které nám mohou pomoci kontrolovat kmitání dané soustavy. Příkladem může být dítě na houpačce [3], rituální rozhoupávání kadidelnice [4], břemeno zavěšené na jeřábu, či umělá kosmická tělesa spojená kabely. V této práci se zaměříme na jednoduchý příklad matematického kyvadla [2], jehož kmitání budeme tlumit pomocí Coriolisovy síly generované změnou délky závěsu [5]. Tomuto problému se věnovali Stilling & Szyszkowski v [7, 8] a navrhli řízení v podobě otevřené smyčky. Řešení v podobě otevřené smyčky však nemusí být pro praxi ideální, a tak bylo navrženo jiné řešení v článku [9], kde se autoři zaměřili na zpětnovazebné řízení s dopravním zpožděním. Toto řešení však také není dokonalé a v článku [10] je navržen řídící algoritmus pomocí Ljapunovovy metody [6], který je pak porovnáván s řídícím algoritmem s dopravním zpožděním z článku [9]. Jiná řešení, opět na bázi Ljapunovovy metody, se nabízí v článcích [11, 13] a pak v [12], kde autoři řeší problém nejen proměnnou délkou závěsu, ale i pohybem kloubu po horizontální a vertikální ose.

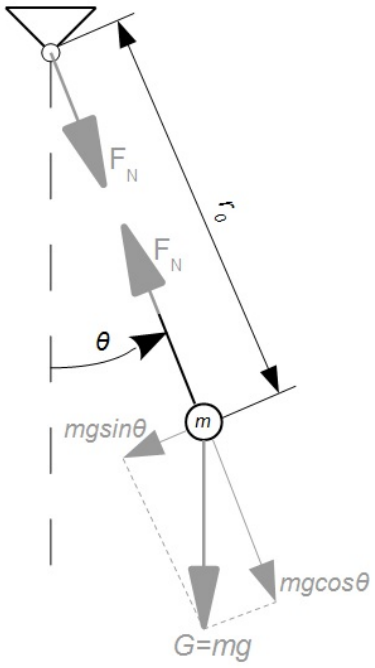
Tato práce má za cíl seznámit s metodikou tlumení kyvadla pomocí periodické změny délky závěsu, ověřit funkčnost dostupných řídících algoritmů a následně porovnat jejich vlastnosti. V první kapitole Teoretické části se seznámíme s tím, co je to matematické kyvadlo a jaké má vlastnosti. Dále jak v takové soustavě působí Coriolisova síla a jak lze pomocí této síly tlumit kmitání soustavy. V druhé kapitole Teoretické části se seznámíme s jednotlivými algoritmy pro tlumení pohybu kyvadla. V Praktické části pak předvedeme model soustavy v prostředí MATLAB Simulink a jednotlivé algoritmy zmíněné v Teoretické části nasimulujeme a porovnáme pro různé scenáře.

2 Teoretická část

2.1 Matematické kyvadlo

2.1.1 Základní charakteristiky matematického kyvadla

Definice matematického kyvadla Matematická a fyzikální kyvadla spadají do skupiny harmonických oscilátorů, jejichž vratný element je spojen s gravitační silou [1]. Uvažujme pevný bod, k němuž uchytíme vlákno, na jehož konci bude zavěšené závaží. Takovou soustavu můžeme nazývat fyzikálním kyvadlem. Zanedbáme-li tření, odpor prostředí, hmotnost vlákna a bereme-li závaží jako hmotný bod, pak můžeme takto zjednodušenou soustavu nazývat matematickým kyvadlem [1, 5]. Pro naše potřeby matematické kyvadlo postačí.



Obr. 1: Matematické kyvadlo.

Působící síly v matematickém kyvadle Uvažujme rovinný souřadný systém s počátkem v pevném bodě O. Úhlovou výchylku kyvadla od svislé osy označme θ a délku závěsu r_0 viz Obr.1. Na závaží budou působit dvě síly. Tíhová síla G a síla ve vlákně F_N. Rozložením tíhové síly $G = mg$ dostaneme radiální složku $mgcos\theta$ a tečnou složku $mgsin\theta$. Tečná složka představuje sílu, která vrací závaží do rovnovážné polohy. Označme tuto sílu F_T, má tvar

$$F = -mgsin\theta. \tag{1}$$

Protože síla působí proti výchylce, výraz obsahuje záporné znaménko [1].

Pohybová rovnice Vyjdeme-li z 2.Newtonova zákona, získáme zrychlení závaží

$$a = -gsin\theta. \tag{2}$$

Z kinematiky hmotného bodu víme [5], že tečné zrychlení můžeme vyjádřit též v podobě

$$a = r_0 \frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{3}$$

Dosazením (2) do (3) dostaneme pohybovou rovnici matematického kyvadla

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{r_0} sin\theta = 0. \tag{4}$$

Sérií úprav popsanou v práci J.Ballarda [2], můžeme z pohybové rovnice vyjádřit vztah pro periodu kmitu kyvadla

$$T = 4\sqrt{\frac{r_0}{g}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}} d\theta. \tag{5}$$

Zjednodušení Výraz (5) je však v našich aplikacích obtížné implementovat, proto se jej pokusíme upravit do formy, která pro nás bude snáze použitelná, opět podle [2]. Pro malé výchylky θ ($\theta < 5°$) je $sin\theta \approx \theta$. Pohybovou rovnici pak můžeme zjednodušit do podoby

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{r_0}\theta = 0, \tag{6}$$

čímž se podstatně zjednoduší i vztah pro periodu kmitu matematického kyvadla, se kterou se v [1, 5] setkáváme v podobě

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0}{g}}. \tag{7}$$

Z periody kmitu můžeme vyjádřit vlastní frekvenci kmitů

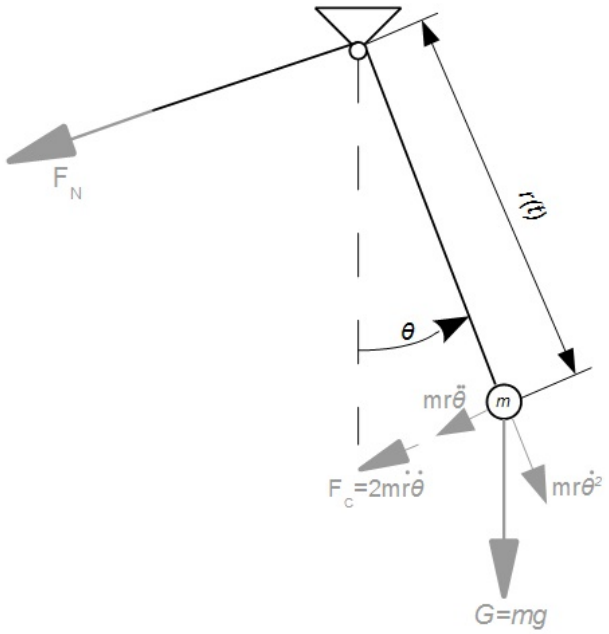
$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{r_0}}, \tag{8}$$

se kterou budeme v následujících aplikacích počítat:

2.1.2 Kyvadlo s proměnnou délkou závěsu

Řízení tlumení bude v našem případě realizováno proměnnou délkou závěsu. Jinými slovy přenášením hmoty vůči ose otáčení. Stejného principu využívají děti na houpačce, chtějí-li se "rozhoupat"[3]. Úmysl je sice opačný, jelikož cílem dítěte je kmity posílit, nikoliv utlumit, ale jak si ukážeme, výsledek je jen otázkou správné synchronizace pohybu hmoty a pohybu kyvadla. V případě dítěte koná tělo tento pohyb intuitivně a využívá k tomu dvou

metod, z nichž nás zajímá pouze ta, v níž se parametricky mění pozice hmoty vůči ose rotace. Názornějším příkladem může být rituální rozhoupávání kadidelnice O Botafumeiro v katedrále v Santiagu de Compostela, kde 8 mužů tahá za lano, na kterém je přes kladku kadidelnice zavěšena [4]. Skupina mužů musí být koordinovaná a na povel, vždy v jednom okamžiku, zatáhne za lano, čímž zkrátí délku závěsu kadidelnice. Tento postup byl pravděpodobně nabyt též intuicí, ale postupným předáváním zkušeností se z něj stalo pravidlo pro řízení délky závěsu.



Obr. 2: Síly působící na soustavu kyvadla.

Vliv Coriolisovy síly Jak je popsáno ve skriptech z Fyziky I. [5], přenášením hmoty vůči ose otáčení v rotující soustavě se projeví Coriolisova síla viz Obr.2, která je kolmá ke směru rychlosti $\dot{r}$ a její velikost je dána vztahem

$$F_C = 2m\dot{r}\dot{\theta}. \tag{9}$$

Podotkněme, že směr Coriolisovy síly F_C jde proti směru rotace kyvadla, prodlužujeme-li délku závěsu $(\dot{r} > 0)$. Budeme-li délku závěsu zkracovat, Coriolisova síla bude rotaci kyvadla popohánět. Jedná se o princip zachování momentu setrvačnosti, kterého využívají např. krasobruslaři.

Pohybová rovnice Pohybová rovnice kyvadla včetně vlivu Coriolisovy síly, je dobře popsána v článku [7]. Soustava má nyní 2 stupně volnosti, uvažujme tedy jednu rovnici pro radiální směr a jednu pro tečný směr. Tíhovou sílu mg rozložíme na dvě složky, v radiálním

směru $mgcos\theta$ a v tečném směru $mgsin\theta$. V radiálním směru dostaneme vztah

$$mgcos\theta - m\ddot{r} + m\dot{\theta}^2 r = F \tag{10}$$

a v tečném směru pak

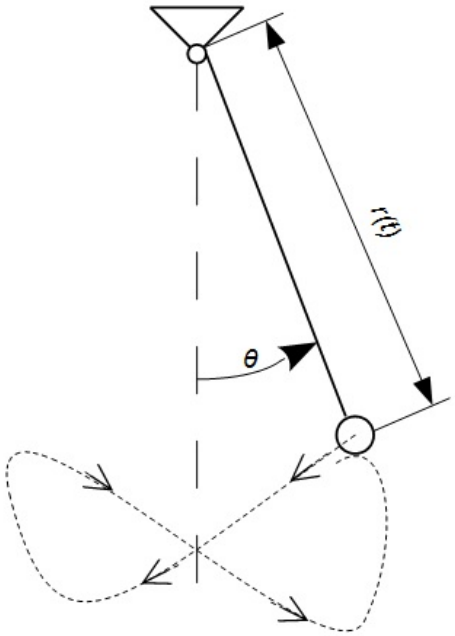
$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgrsin\theta = 0. \tag{11}$$

Po úpravě vztahu (11) získáme rovnici pro pohyb kyvadla

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{g}{r}sin\theta = 0, \tag{12}$$

který budeme dále používat v simulacích.

2.2 Řízení tlumení



Obr. 3: Jedna z možných trajektorií pohybu kyvadla.

Empirický přístup Soustřeďme se na efektivní zužitkování tlumícího účinku Coriolisovy síly. Ta nabývá maximálních hodnot, blíží-li se k maximálním hodnotám členy $\dot{r}$ a $\dot{\theta}$. Člen $\dot{r}$ jsme schopni řídit, zabývejme se tedy členem $\dot{\theta}$. Ten nabývá maximálních hodnot, když se kyvadlo blíží vertikální poloze ($\theta \approx 0$). Pro maximální tlumící účinek tedy chceme, aby se v této poloze i $\dot{r}$ blížilo maximální hodnotě. Bohužel jsme omezeni rozměry závěsu kyvadla ($r_{min} \leq r \leq r_{max}$), to znamená, že nemůžeme soustavně prodlužovat délku závěsu a tím nepřetržitě generovat tlumící účinek. V některých momentech je třeba délku závěsu zkrátit, čímž se generuje účinek opačný žádoucímu. Aby tento byl co nejmenší, musí pak při zkracování závěsu $|\dot{r}|$ nabývat maximálních hodnot v místě, kde $\dot{\theta} \approx 0$, což je v místech

překmitu. Na základě těchto poznatků pak můžeme sestavovat různé algoritmy pro řízení délky závěsu, jak bude ukázáno v následujících sekcích.

Ljapunovova metoda Ljapunovova přímá metoda (někdy nazývána též 2. Ljapunovova metoda) [6] nám dovolí určit, zda-li je systém stabilní aniž bychom museli explicitně vyřešit rovnice systému. Metoda je založená na myšlence, pokud je v systému nějaká "měrná energie", pak můžeme popsat míru změny této energie v systému a tím zjistit jeho stabilitu. Snažíme se najít tzv. Ljapunovovu funkci, popisující energii v daném systému, ověřit, zda-li splňuje daná kritéria, a na základě těchto pak můžeme rozhodnout, je-li stacionární bod daného systému - ekvilibrium (resp. rovnovážná poloha) stabilní a jakého charakteru daná stabilita je. V případě tlumeného kyvadla se zpravidla bude jednat o asymptotickou stabilitu a systémy budou asymptoticky konvergovat k ekvilibriu. Z nalezené Ljapunovovy funkce pak lze určit řídící algoritmus pro délku závěsu.

2.2.1 Otevřená soustava

Řízení periodickou změnou délky závěsu Tomuto řešení problému se věnují v práci [7] Stilling & Szyszkowski. Pro sestavení řídícího výrazu pro délku závěsu se předpokládá, že délka závěsu se bude pohybovat okolo střední hodnoty r_0 s amplitudou Δr a s dvojnásobnou frekvencí než je frekvence kyvadla. Řídící rovnici pak lze podle [7] vyjádřit jednoduše jako

$$r(t) = r_0 - \Delta r sin(2\Omega t). \tag{13}$$

Energetický přístup Tlumící efekt, způsobený Coriolisovou silou, můžeme vyvodit ze zákona zachování energie a určit tak tlumící poměr, se kterým budeme pracovat v simulacích. Stilling & Szyszkowski [7] zkoumají, jaká bude změna energie soustavy po jednom cyklu. Rozdělením cyklu na dvě části, v první se délka závěsu prodlužuje a ve druhé zkracuje, pak pro každou z částí můžeme sestavit rovnici energetické bilance

$$(E_K + E_P)_1 + W_{1-2} = (E_K + E_P)_2, \tag{14}$$

kde E_K a E_P jsou kinetická a potenciální energie kyvadla a W_{1-2} je práce, kterou jsme v daném časovém intervalu vykonali. Práce je vykonávána pouze zkracováním (resp. prodlužováním) závěsu a můžeme ji vyjádřit v podobě

$$W_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F ds = F_{st}(s_2 - s_1), \tag{15}$$

kde F_{st} je střední hodnota napínací síly v daném časovém intervalu. Jelikož tato musí být vždy kladná, smysl vykonané práce bude určovat rozdíl $s_2 - s_1$. Při zkracování závěsu je $s_2 > s_1$ a tedy vykonaná práce je kladná a soustavě se dodává energie. Naopak při prodlužování

závěsu je $s_2 < s_1$ a vykonaná práce je záporného charakteru, tedy soustavě se energie ubírá a je tlumena. Označme napínací síly podle směru pohybu kyvadla, F_{st}^h zkracujeme-li délku závěsu a kyvadlo se pohybuje směrem nahoru, F_{st}^d je-li délka závěsu prodlužována a kyvadlo se pohybuje směrem dolů. Dále víme, že rozsah pohybu délky závěsu je omezen horní a dolní hranicí r_{max} a r_{min}. Za předpokladu, že se využije plného pohybového rozsahu, práce vykonaná v průběhu celého cyklu je vyjádřena v [7] jako

$$W = F_{st}^h(r_{max} - r_{min}) + F_{st}^d(r_{min} - r_{max}) = (F_{st}^h - F_{st}^d)(r_{max} - r_{min}). \tag{16}$$

Daný rozsah $r_{max} - r_{min}$ je konstantní, práce dodaná (popř. odebraná) soustavě tedy závisí pouze na rozdílu $F_{st}^h - F_{st}^d$. Pokud si velikosti těchto sil budou rovné, jejich účinky se pokrátí, soustavě nebude dodávána ani odebírána žádná práce a v kyvadle tak nebude docházet k tlumení či zesílení kmitů. Bude-li převažovat síla F_{st}^h, vykonaná práce bude kladná, soustava během cyklu nabude energie a kmitání zesílí. V našem případě se nejvíce hodí poslední možnost, kdy převažuje síla F_{st}^d, vykonaná práce je záporná, soustavě je odebírána energie a kmitání bude tlumeno. Jelikož na napínací sílu závěsu má největší podíl odstředivá síla v kyvadle, opět docházíme k závěru, že se vyplatí délku závěsu prodlužovat, je-li kyvadlo poblíž vertikální polohy a zkracovat, je-li kyvadlo poblíž maximální výchylky.

Náhradní soustava s lineárním odporem (viskózním tlumičem) a tlumící poměr

Stilling & Szyszkowski [7] se k tlumícímu poměru dobírají skrze náhradní soustavu a zkoumají, kolik energie se ztratí v jednom cyklu tlumeného lineárního oscilátoru. Obecný lineární harmonický oscilátor je popsán v [5] a můžeme jej charakterizovat rovnicí

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad \text{nebo} \quad \ddot{y} + 2\xi\Omega\dot{y} + \Omega^2 y = 0, \tag{17}$$

kde $\xi = c/2m\Omega$ je tlumící poměr a $\Omega = \sqrt{k/m}$ vlastní frekvence. Z této rovnice pak přenásobením dy a integrací na intervalu od $y(0)$ do $y(\tau)$ obdržíme energetickou rovnici

$$\frac{1}{2}(m\dot{y}^2 + ky^2) + \int_0^\tau c\dot{y}^2 dt = E_0, \tag{18}$$

kde E_0 je energie soustavy v čase $t = 0$. První dva členy výrazu vyjadřují kinetickou a potenciální energii v čase $t = \tau$. Poslední člen vyjadřuje změnu energie za daný časový interval. Stilling & Szyszkowski [7] uvádějí na příkladu pohyb bodu během cyklu, který je dán rovnicí

$$y(t) = Ae^{-\xi\Omega t}(cos(\Omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} sin(\Omega_d t)), \tag{19}$$

kde A je amplituda na začátku cyklu a $\Omega_d = \Omega\sqrt{1-\xi^2}$. Perioda cyklu je $\tau = 2\pi/\Omega_d$. V tlumené soustavě lineárního harmonického oscilátoru se během cyklu energie ztrácí, jelikož

tlumící poměr je vždy kladný. Množství ztracené energie během cyklu je dáno vztahem

$$\Delta E = -\int_0^\tau c\dot{y}^2 dt = -A^2 c\pi\Omega \frac{1 - e^{-4\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}}{4\xi} \cong -A^2 c\pi\Omega. \tag{20}$$

Aproximaci vztahu je možné provézt za předpokladu, že tlumící poměr $\xi \ll 1$. Uvolněnou energii v poměru k energii, kterou soustava měla na začátku cyklu (pouze energie uložená v pružině o velikosti $E_0 = \frac{1}{2}kA^2$), pak lze obecně zapsat jako

$$\Delta e = \frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{A^2 c\Omega\pi}{\frac{1}{2}kA^2} = -4\pi\xi. \tag{21}$$

Změna energie v soustavě kyvadla Obdobně, jako v náhradní soustavě, lze postupovat i v soustavě s kyvadlem. Stilling & Szyszkowski [7] vycházejí z rovnice (12). Přenásobením rovnice $d\theta$ a náseldnou integrací obdrží energetická rovnici

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{r}(1 - cos\theta) + 2\int_0^\tau \frac{\dot{r}}{r}(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2r}(1 - cos\theta))dt = E_0, \tag{22}$$

kde první a druhý člen opět vyjadřují kinetickou a potenciální energii v čase $t = \tau$ a třetí člen vyjadřuje změnu energie během cyklu. Tu lze zapsat jako

$$\Delta E = E_\tau - E_0 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{r}(1 - cos\theta) - E_0 = -2\int_0^\tau \frac{\dot{r}}{r}(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2r}(1 - cos\theta))dt. \tag{23}$$

Pro získání tlumícího poměru ξ, Stilling & Szyszkowski [7] vycházejí z rovnice (21) a dosazením obdrží výraz

$$\xi = \frac{1}{2\pi}\frac{\int_0^\tau \frac{\dot{r}}{r}(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2r}(1 - cos\theta))dt}{[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{r}(1 - cos\theta)]_{t=0}}. \tag{24}$$

Je-li tlumící poměr $\xi > 0$, dochází k tlumení kmitů, v opačném případě, kdy $\xi < 0$, dochází k jejich posílení. Tento tlumící poměr záleží na smyslu rychlosti, kterou se pohybuje závaží v radiálním směru. Pohybuje-li se závaží směrem k ose otáčení (délka závěsu se zkracuje), $\dot{r} < 0$, tlumící poměr bude též záporného smyslu a bude docházet k zesílení kmitů. Pohybuje-li se závaží směrem od osy otáčení (délka závěsu se prodlužuje), $\dot{r} > 0$, tlumící poměr bude kladného smyslu a bude docházet k tlumení kmitů.

Zjednodušená soustava V článku [7] se trajektorie závaží řídí podle vztahu (13). Je použito vlastní frekvence, která je známá ze vztahu (8). Tento krok s sebou však nese úskalí, kterému se budeme věnovat v dalším odstavci. Za předpokladu, že na začátku cyklu bude délka závěsu nabývat střední hodnoty $r(0) = r_0$ a výchylka bude maximální $\theta(0) = \theta_0$, pak

energii na začátku cyklu lze podle [7] vyjádřit jako

$$E_0 = \frac{g}{r_0}(1 - cos\theta_0) \cong \frac{g}{2r_0}\theta_0^2 = \frac{1}{2}(\Omega\theta_0)^2. \tag{25}$$

Pohyb kyvadla, resp. jeho úhlové výchylky, lze zjednodušeně zapsat jako

$$\theta(t) \cong \theta_0 cos\Omega t. \tag{26}$$

Dokážeme-li předpovědět pohyb kyvadla (jak v radiálním směru, tak jeho úhlovou výchylku), lze podle [7] vyjádřit, jak se změní jeho energie podle vztahu (23)

$$\Delta E = -2\int_0^\tau \frac{\dot{r}}{r}(\dot{\theta^2} + \frac{g}{4r}\theta^2)dt = -\frac{3\pi}{2}\frac{\Delta r}{r_0}\theta_0^2\omega^2, \tag{27}$$

z čehož podle [7] lze získat poměrnou změnu energie Δe, ze které je vyjádřen tlumící poměr

$$\xi = \frac{3}{4}\frac{\Delta r}{r_0}. \tag{28}$$

Z (28) mážeme pak Δr vyjádřit jako funkci tlumícího poměru ξ

$$\Delta r = \frac{4}{3}r_0\xi. \tag{29}$$

Zázněj S tímto jevem se nejčastěji setkáme v akustice, jde o interferenci dvou tónů s různou frekvencí. Jak spolu vlny interferují, můžeme pozorovat jako periodickou změnu hlasitosti (resp. amplitudy). I v našem případě se s tímto jevem setkáváme, jelikož perioda naší zjednodušené soustavy se mírně liší od té skutečné (viz podsekce Matematické kyvadlo). Pokud je perioda řízení delší, vlivem interference začne v jednu chvíli náš řízený pohyb posilovat pohyb kyvadla a místo tlumení kmitů se dosáhne opačného účinku. Tento jev Stilling & Szyszkowski [7] popisují přidáním fázového posuvu ψ do pohybové rovnice

$$r(t) = r_0 - \Delta r sin(2\Omega t + \psi_i). \tag{30}$$

Fázový posuv se akumuluje s počtem uběhnutých cyklů a nabývá hodnot od 0 do 2π. Pomocí fázového posuvu můžeme také vyjádřit tlumící poměr pro i-tý cyklus

$$\xi_i = \frac{3}{4}\frac{\Delta r}{r_0}cos\psi_i. \tag{31}$$

Na začátku cyklu kdy je fázový posuv $\psi_i = 0$ bude tlumící poměr maximální a bude se postupně snižovat až fázový posuv dosáhne hodnoty $\psi_i = \pi/2$, kde bude výsledný tlumící poměr nulový. Za touto hranicí začne tlumící poměr nabývat záporných hodnot a kmity se začnou zesilovat až do $\psi_i = \pi$, kdy bude zesílení maximální. Zesílení pak začne znovu klesat

až $\psi_i = 3/2\pi$ a tlumící poměr bude opět nulový. Začne nabývat kladných hodnot a poroste až do $\psi_i = 2\pi$, kdy se vrátí do původního stavu, kdy byl tlumící poměr maximální.

Numerické řešení Řešení tohoto problému nabízí Stilling & Szyszkowski v práci [8]. Pro nejlepší tlumící efekt podle rovnice (30) je cílem, aby $\psi = 0$ v každém cyklu. Abychom byl fázový posuv co nejmenší, je třeba synchronizovat periodu změny délky závěsu s periodou kyvadla. přepočítat, ideálně po každém cyklu. Tuto přepočítanou periodu pak můžeme použít v řídící rovnici, získat tím lepší synchronizaci s pohybem kyvadla a dosáhnout tak lepších tlumících poměrů.

2.2.2 Zpětnovazebné řízení

Řízení s dopravním zpožděním Abychom se vyhnuli složitému přepočítávání doby periody po každém cyklu, v článku [9] bylo navrženo alternativní řešení. Pro malé tlumící poměry $\xi < 0.1$ lze úhlovou výchylku vyjádřit ve formě

$$\theta(t) \approx \theta_0 e^{-\xi\Omega t} cos(\Omega t), \tag{32}$$

ze které je vyjádřen kosinus

$$cos(\Omega t) \approx \frac{e^{\xi\Omega t}}{\theta_0}\theta(t). \tag{33}$$

Následnou úpravou vztahu (13) pomocí geometrických vzorců a dosazením do rovnice (32) dostaneme

$$sin(2\Omega t) = 2\frac{e^{\xi\Omega t}}{\theta_0}\theta(t)\frac{e^{\xi\Omega(t-\frac{\pi}{2\Omega})}}{\theta_0}\theta(t-\frac{\pi}{2\Omega}), \tag{34}$$

který pak dosazením do řídící rovnice pro otevřenou smyčku (13) dá řídící rovnici se zpětnou vazbou a s dopravním zpožděním

$$r(t) = r_0 - \Delta r 2 e^{-\xi\frac{\pi}{2}}\alpha(t)\theta(t)\theta(t-\tau_1), \tag{35}$$

kde dopravní zpoždění $\tau_1 = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{T}{4}$ a

$$\alpha(t) = \frac{1}{\theta_0^2}e^{2\xi\Omega t}. \tag{36}$$

Alternativně za použití jiných goniometrických vzorců lze dojít k řídícímu algoritmu s dvojitým dopravním zpožděním

$$r(t) = r_0 - \Delta r\alpha(t)e^{-\xi\frac{\pi}{2}}(\theta^2(t-\tau_2) - e^{-\xi\pi}\theta^2(t-\tau_2-\tau_1)), \tag{37}$$

kde $\tau_1 = \frac{\pi}{2\Omega}$ a $\tau_2 = \frac{\pi}{4\Omega}$.

Řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem V řídících rovnicích (35) a (37) představuje časově závislý člen α určité riziko vzhledem ke svému exponenciálním charakteru [9]. Proto se autoři článku věnují jeho eliminaci z řídícího vztahu. Rozšířením rovnice (33) a následnou úpravou se doberou k výrazu

$$r(t) = r_0 - \Delta r \frac{2e^{-\xi\frac{\pi}{2}}\theta(t)\theta(t-\tau_1)}{\theta^2(t) + e^{-\xi\pi}\theta^2(t-\tau_1)}, \tag{38}$$

kde se časově závislé členy vykrátí. Obdobně tomu lze učinit i pro verzi s dvojitým zpožděním

$$r(t) = r_0 - \Delta r \frac{\theta^2(t-\tau_2) - e^{-\xi\pi}\theta^2(t-\tau_2-\tau_1)}{\theta^2(t-\tau_2) + e^{-\xi\pi}\theta^2(t-\tau_2-\tau_1)}. \tag{39}$$

Řízení bez dopravního zpoždění Autoři se v článku [9] dobírají i k řešení bez dopravního zpoždění v podobě

$$r(t) = r_0 + \Delta r \frac{2\theta(t)(\xi\theta(t) + \frac{1}{\Omega}\dot{\theta}(t))}{\theta^2(t) + (\xi\theta(t) + \frac{1}{\Omega}\dot{\theta}(t))^2}. \tag{40}$$

Takový algoritmus je svou složitostí velmi podobný těm s dopravním zpožděním, avšak eliminace dopravního zpoždění je zde vykoupena přítomností úhlové rychlosti $\dot{\theta}(t)$.

2.2.3 Zpětnovazebné řízení s využitím Ljapunovovy metody

Nelineární řízení V článku [10] se autoři zabývají návrhem nelineárního řízení, kterým by bylo možné nahradit výše zmíněné algoritmy s dopravním zpožděním. Na základě Ljapunovovy metody pak navrhují řídící algoritmus, který řídí rychlost, se kterou se mění délka závěsu

$$u(t) = -K(g(1 - cosx_1) - x_3x_2^2 + c_1(x_3 - r_0)), \tag{41}$$

kde $u(t) = \dot{r}(t)$, $x_1 = \theta(t)$, $x_2 = \dot{\theta}(t)$ a $x_3 = r(t)$. Parametry řídící rovnice je třeba volit $K > 0$ a $c_1 > 0$.

Proporcionálně - Derivační řízení V článku [11] se autoři zabývají tlumením fyzikálního kyvadla s pohyblivou masou v radiálním směru. Pro tento problém využívají výše zmíněné Ljapunovovy metody a definují kandidáta na Ljapunovovu funkci (pozorný čtenář ji najde pod číslem 3.2 v článku [11]) Na základě Ljapunovovy metody lze pak určit, že pro zvolenou funkci je systém asymptoticky stabilní. Pro řízení délky závěsu je pak navržen algoritmus určující napínací sílu v závěsu

$$F_N = -k_p(r - r_0) - k_d\dot{r} - mg, \tag{42}$$

kde k_p a k_d jsou proporcionální a derivační koeficienty.

Řízení na základě energetických výpočtů V článku [12] se autoři zabývají tlumením kmitů fyzikálního kyvadla za pomoci tří proměnných rozměrů - horizontální a vertikální polohy kloubu a délky závěsu. V našem případě se budeme soustředit pouze na třetí proměnnou - délku závěsu. Autoři určí Ljapunovovu funkci (v článku [12] se nachází pod číslem 6), ze které je vyvozeno, že systém je asymptoticky stabilní. Pro řízení délky závěsu je pak použito funkce

$$l \simeq -a_l |G_l(j2\Omega_n)| sin2\phi, \tag{43}$$

kde úhel ϕ je definován jako: $\phi := -tan^{-1}\frac{\dot{\theta}}{\Omega_n \theta}$, a_l je amplituda změny délky závěsu. Přenos $G_l(s)$ je definován jako

$$G_l(s) = \frac{1}{(T_l s + 1)^2}, \tag{44}$$

kde

$$T_l = \frac{1}{n(2\Omega_n)},\ n = 1 \sim 5. \tag{45}$$

Pro řízení ostatních proměnných tj. horizontální a vertikální polohy kloubu jsou algoritmy sestaveny analogicky, s ohledem na periodu - pro vertikální polohu bude stejná jako pro délku závěsu a pro horizontální polohu bude poloviční.

Řízení na základě metody průměrování V článku [13] se autor snaží dokázat asymptotickou stabilitu systému pomocí metody průměrování. Principem této metody je nalézt zjednodušený model popisující soustavu, u kterého jsme schopni rozhodnout, zda-li je stabilní. Hlavním krokem v tomto postupu je získání diferenciální rovnice prvního řádu, popisující amplitudu kmitání kyvadla. Ljapunovovou funkcí je rovnice č.8 v článku [13]. Podmínky pro asymptotickou stabilitu systému této rovnici vyhovují a řídící algoritmus pro délku závěsu je navržen v podobě

$$r(t) = r_0 + a\dot{\theta}(t) sin(\theta(t)), \tag{46}$$

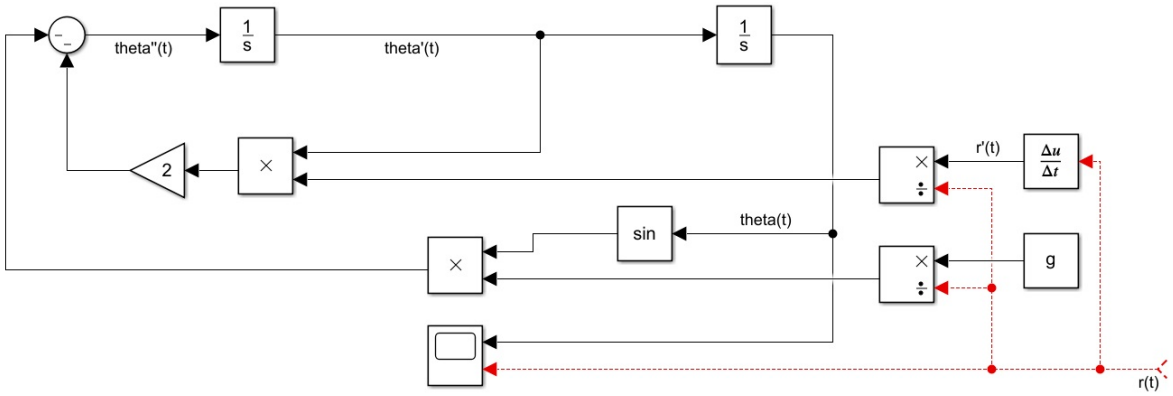
kde a je námi zvolený konstantní parametr.

3 Praktická část

3.1 Model kyvadla v prostředí MATLAB Simulink

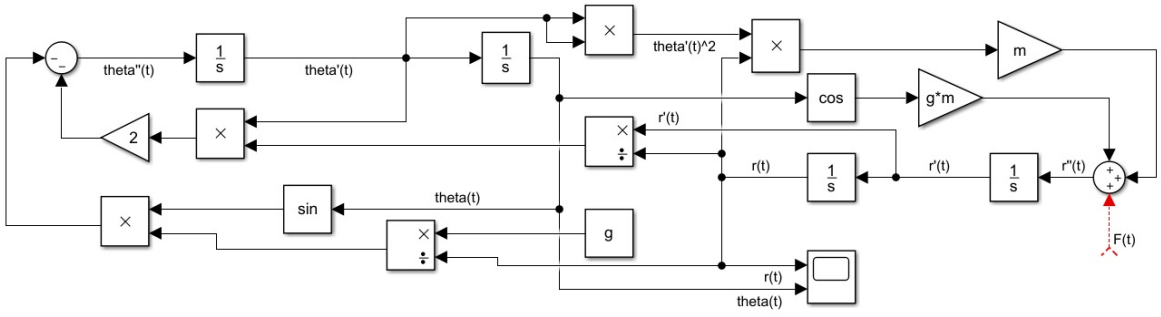
3.1.1 Tlumená soustava

Kyvadlo jako tlumený harmonický oscilátor Pro popis kyvadla bude v simulacích použito rovnice (12). Sestavený model v prostředí MATLAB Simulink pak může mít podobu viz Obr.4. Ve skutečnosti se jedná o tlumený harmonický oscilátor, avšak náš model je již upravený pro řízení proměnnou délkou závěsu (vstupy $\dot{r}(t) ar(t)$). Ve všech simulacích počítáme s konstatním gravitačním zrychlením $g = 9.81ms^{-2}$ a parametry systému pro simulaci budeme volit $r_0 = 1m$ a $\theta_0 = 0.4$.



Obr. 4: Model soustavy řízený délkou závěsu $r(t)$.

Úprava soustavy pro algoritmy s řízením napínací síly V některých příkladech je řízení prováděno změnou napínací síly závěsu. Pro tyto případy byl model upraven s ohledem na rovnici (10) viz Obr.5.

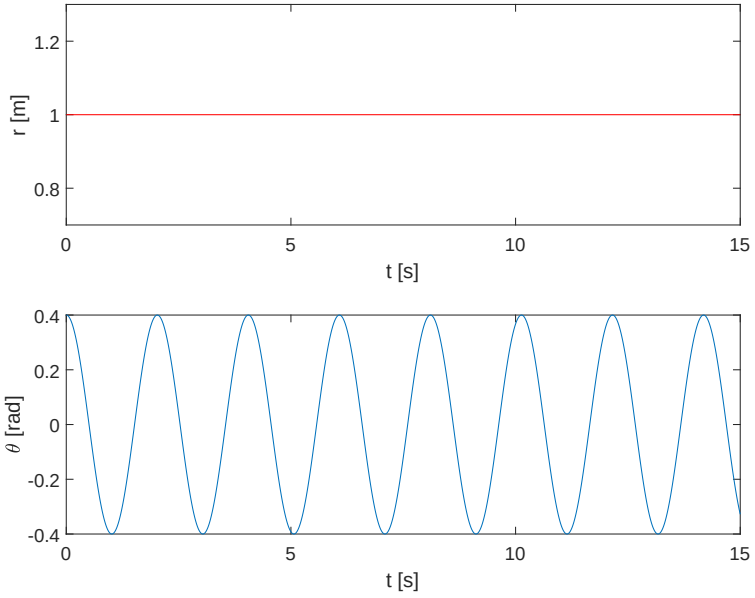


Obr. 5: Model soustavy řízený velikostí napínací síly $F_N(t)$.

3.1.2 Řízení

Netlumená soustava Model soustavy, jak je znázorněný na Obr.5, je možné spustit bez jakéhokoliv řídícího algoritmu, za předpokladu, že délka závěsu $r(t)$ bude konstantní. Od

takové soustavy očekáváme, že se bude chovat jako jednoduchý harmonický oscilátor viz Obr.6.



Obr. 6: Netlumená soustava s počáteční výchylkou $\theta_0 = 0.4$ a $r_0 = 1m$.

Řídící algoritmus Pro dosažení tlumícího efektu je nutné vstupní signál $r(t)$ (popř. $F(t)$) řídit. V teoretické části je zmíněno několik řídících algoritmů, které tento signál upravují a snaží se tak vybudit tlumící účinky na soustavu kyvadla. Prakticky všechny mají společný znak - signál $r(t)$ se pohybuje okolo střední hodnoty r_0, a to periodicky. Simulací jednotlivých algoritmů se budeme věnovat v následující kapitole. Demonstrované efekty tlumení budou pro stejnou výchylku $\theta_0 = 0.4$ a střední délku závěsu $r_0 = 1m$, jelikož řídící parametry jsou u jednotlivých algoritmů různé, budou vždy u daného příkladu uvedeny. Soustředit se budeme hlavně na rychlost, se kterou jsou dané algoritmy schopné tlumit, amplitudu řídícího signálu $r(t)$. Pro simulaci řídících algoritmů v následující sekci je v Simulinku použit ode15s (stiff/NDE) Solver s hodnotou maximálního kroku 0.01 a relativní tolerancí 1e-6.

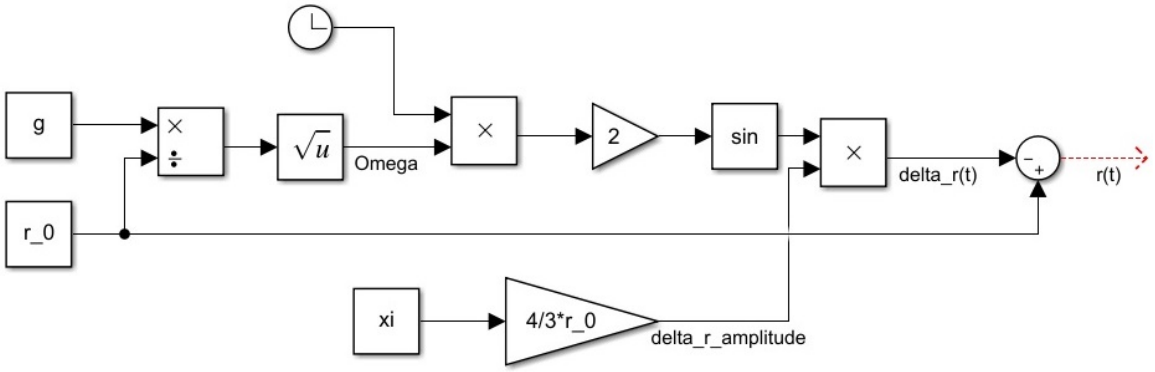
3.2 Simulace řídících algoritmů

3.2.1 Řízení v otevřené smyčce

Algoritmus řízení, který navrhli v článku [7] Stilling & Szyszkowski má podobu rovnice (13)

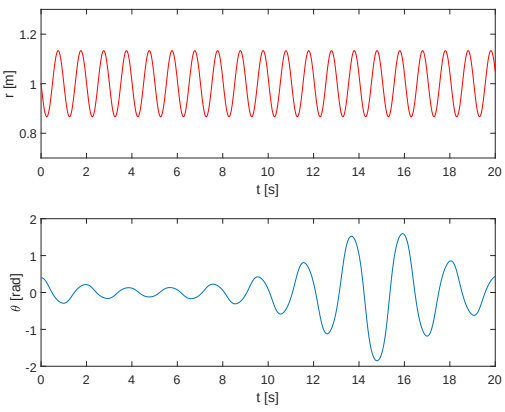
$$r(t) = r_0 - \Delta r sin(2\Omega t)$$

a v matlabu je modelován viz Obr.7.

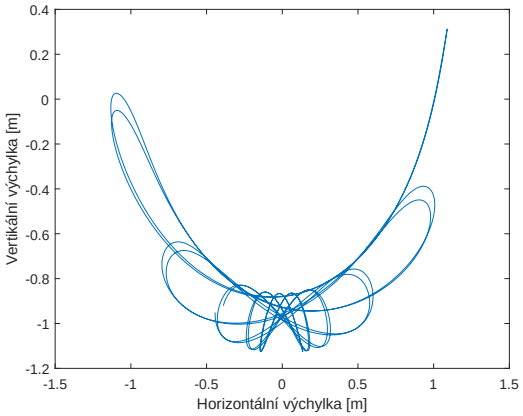


Obr. 7: Model řízení open-loop charakteru.

Pro simulaci byly zvoleny následující hodnoty proměnných: $r_0 = 1$ a $\xi = 0.1$. Výraz Δr je funkcí tlumícího poměru ξ podle rovnice (29). Na Obr.8a můžeme pozorovat zázněj, která byla předpovězena v teoretické části. Vidíme, že při daných hodnotách proměnných, je algoritmus schopen tlumit kmity během prvních asi pěti vteřin po vychýlení kyvadla. Na Obr.8b si můžeme všimnout, jak moc se kyvadlo rozkmitá vlivem vlnových rázů. Nutné podotknout, že pro větší výchylky $(\theta_0 \to \pi/2)$ nejsou pozorovatelné žádné tlumící účinky a pro tlumící poměry $\xi > 0.1$ je systém nestabilní. Takový algoritmus je pak možné použít za předpokladu, že se řízení zastaví, dříve než začne mít nežádoucí účinky.



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.



(b) Trajektorie kyvadla.

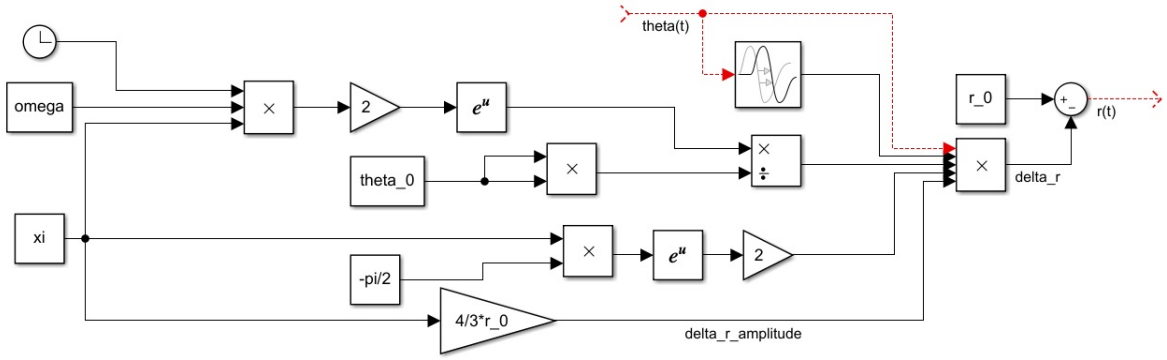
Obr. 8: Řízení open-loop charakteru pro $\xi = 0.1$.

3.2.2 Zpětnovazebné řízení s dopravním zpožděním

Algoritmus řízení s jednoduchým dopravním zpožděním navržený v článku [9] má podobu rovnice (35):

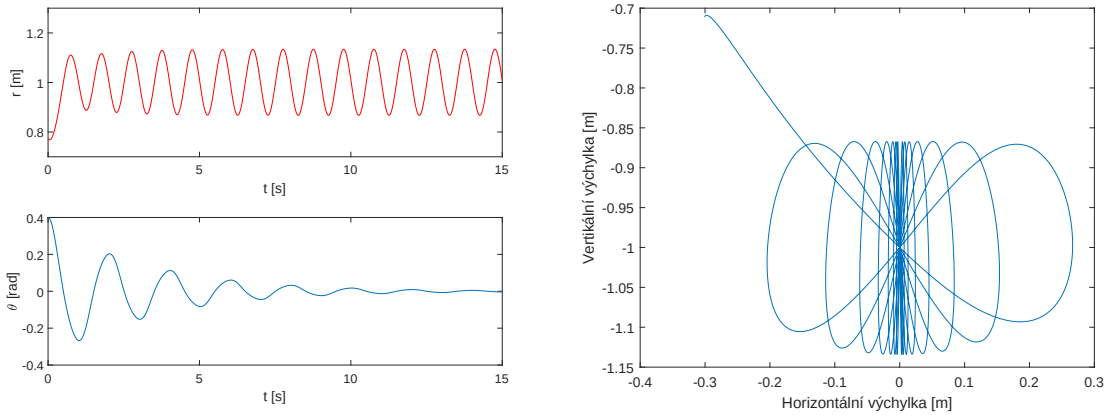
$$r(t) = r_0 - \Delta r 2 e^{-\xi \frac{\pi}{2}} \alpha(t)\theta(t)\theta(t - \tau_1)$$

a v matlabu je modelován viz Obr.9. Pro simulaci algoritmů s dopravním zpožděním bude



Obr. 9: Model uspořádání zpětnovazebného řízení s dopravním zpožděním.

použito stejných hodnot jako v případě řízení v otevřené smyčce, tedy $\xi = 0.1$. Jak je vidět z průběhů úhlové výchylky (viz Obr.10a), tento algoritmus pro dané hodnoty funguje celkem dobře, trajektorii kyvadla můžeme sledovat na Obr.10b. Při dalším zkoumání můžeme zjistit, že se chová dobře i pro výchylky $\theta_0 \to \pi/2$ a s rostoucím tlumícím poměrem roste i tlumící efekt, avšak jak autoři článku [9] poznamenali, pro větší amplitudy Δr se může projevit elasticita závěsu (kterou v našich případech zanedbáváme), a proto se v praxi snažíme o tlumící poměry $\xi < 0.1$.



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.

(b) Trajektorie kyvadla.

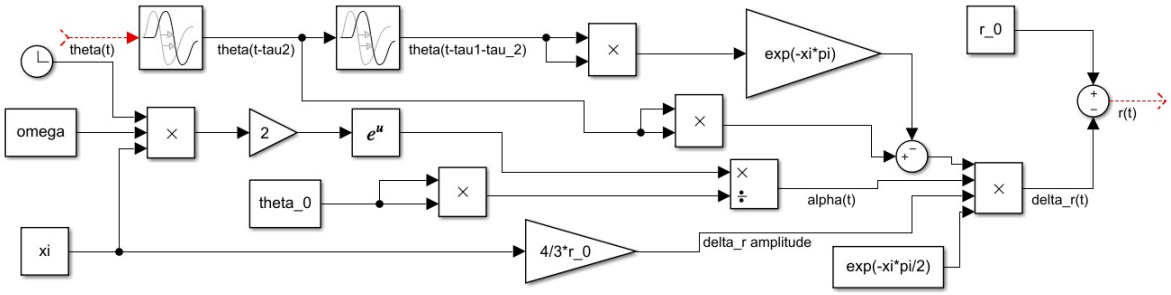
Obr. 10: Zpětnovazebné řízení s dopravním zpožděním pro $\xi = 0.1$.

3.2.3 Zpětnovazebné řízení s dvojitým dopravním zpožděním

Zde se jedná o mírnou úpravu předešlého řídícího algoritmu, opět z článku [9]. Řídí se rovnicí (36)

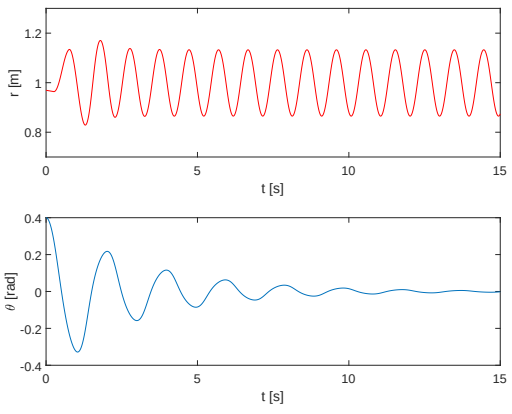
$$r(t) = r_0 - \Delta r \alpha(t) e^{-\xi \frac{\pi}{2}} (\theta^2(t - \tau_2) - e^{-\xi\pi}\theta^2(t - \tau_2 - \tau_1))$$

a v matlabu je modelován viz Obr.11.

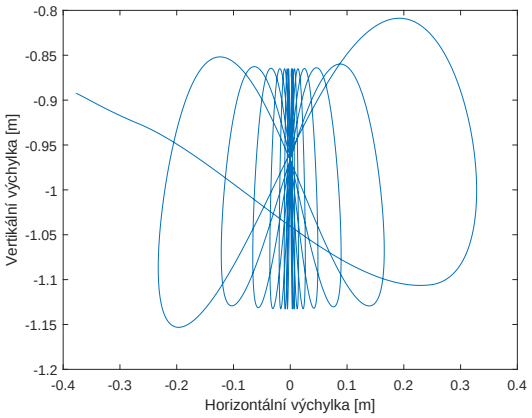


Obr. 11: Model uspořádání zpětnovazebného řízení s dvojitým dopravním zpožděním.

Simulací tohoto algoritmu obdržíme podobné výsledky (viz Obr.12a a b), jako v předchozím případě, s mírným rozdílem nástupu tlumícího signálu, který je způsoben dvojitým dopravním zpožděním.



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.



(b) Trajektorie kyvadla.

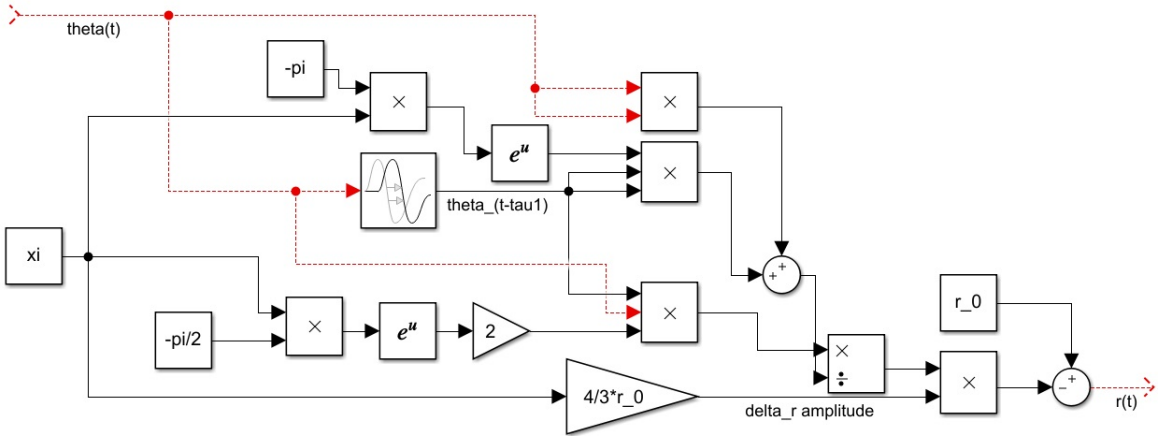
Obr. 12: Zpětnovazebné řízení s dvojitým dopravním zpožděním pro $\xi = 0.1$.

3.2.4 Zpětnovazebné řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem

Tento algoritmus je odvozený z předchozího algoritmu s jedním dopravním zpožděním (35), ze stejného článku [9] a očekáváme u něj podobné výsledky. Řídí se rovnicí (38)

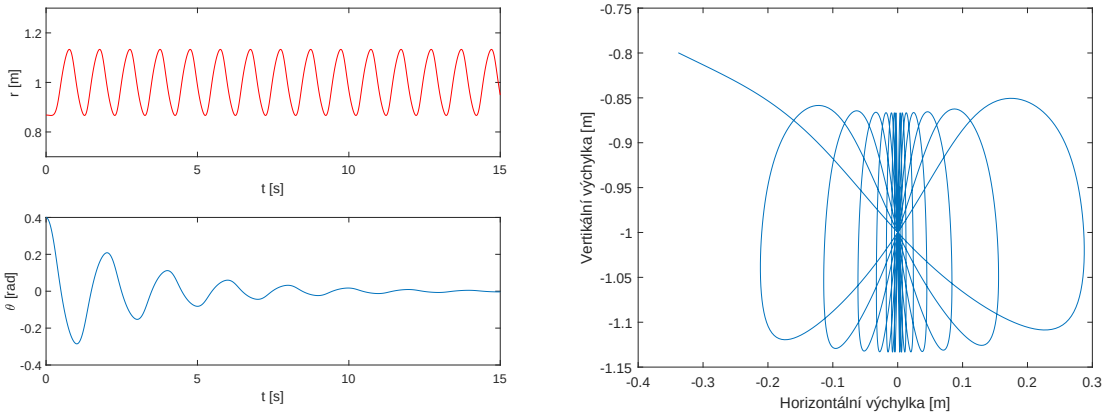
$$r(t) = r_0 - \Delta r \frac{2e^{-\xi\frac{\pi}{2}}\theta(t)\theta(t-\tau_1)}{\theta^2(t) + e^{-\xi\pi}\theta^2(t-\tau_1)}$$

a v matlabu je modelován viz Obr.13.



Obr. 13: Model uspořádání zpětnovazebného řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem.

Oproti předchozímu algoritmu můžeme pozorovat rozdíl charakteru amplitudy řídícího signálu, jak na průběhu signálu (viz Obr.14a), tak na trajektorii kyvadla (viz Obr.14b). U předchozího algoritmu amplituda klesala spolu s úhlem $\theta(t)$, mezitím co v tomto případě je konstantní, což má na svědomí právě konstantní přírůstek v řídící rovnici. Pro zadané hodnoty je tlumící efekt téměř totožný s předchozím algoritmem.



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.

(b) Trajektorie kyvadla.

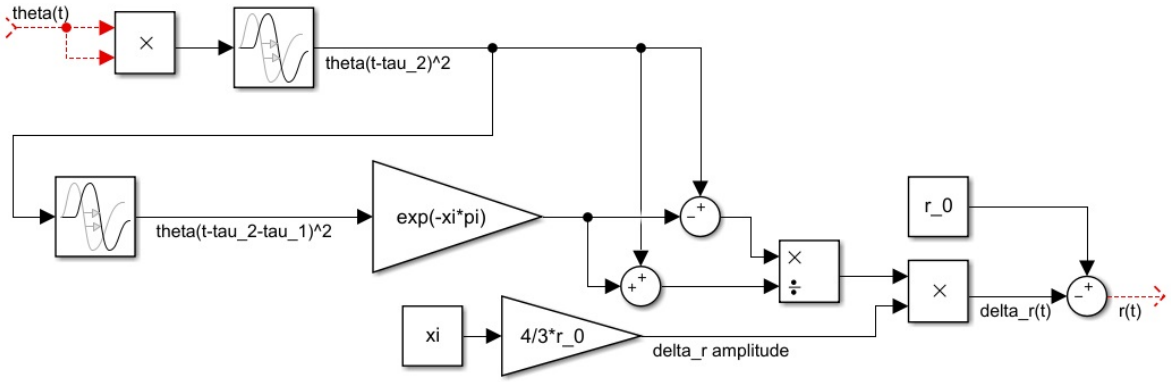
Obr. 14: Zpětnovazebné řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem pro $\xi = 0.1$.

3.2.5 Zpětnovazebné řízení s dvojitým dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem

Tento algoritmus je odvozený z předchozího algoritmu s dvojitým dopravním zpožděním (37), ze stejného článku [9] a očekáváme u něj podobné výsledky. Řídí se rovnicí (39)

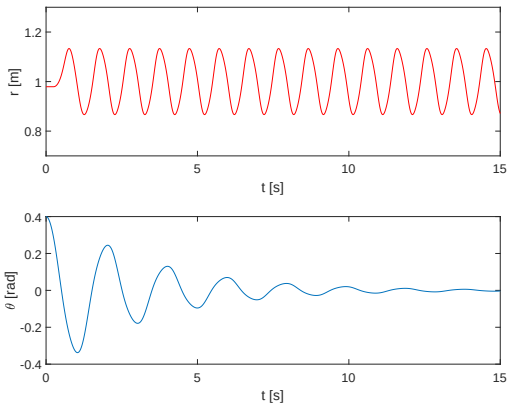
$$r(t) = r_0 - \Delta r \frac{\theta^2(t-\tau_2) - e^{-\xi\pi}\theta^2(t-\tau_2-\tau_1)}{\theta^2(t-\tau_2) + e^{-\xi\pi}\theta^2(t-\tau_2-\tau_1)}$$

a v matlabu je modelován viz Obr.15. Oproti předchozímu algoritmu s jedním dopravním

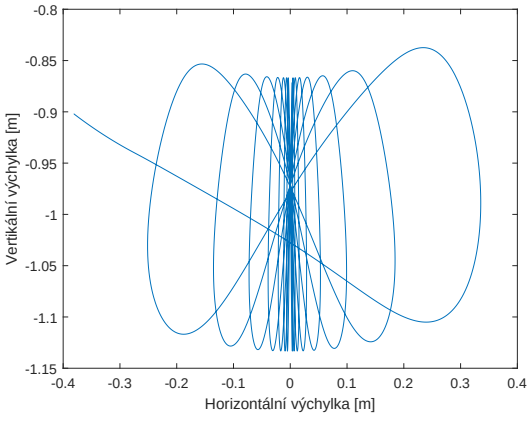


Obr. 15: Model uspořádání zpětnovazebného řízení s dvojitým dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem.

zpožděním můžeme opět pozorovat rozdílný nástup tlumení způsobený dvojitým dopravním zpožděním (viz Obr.16a). Výstupní signály jsou jinak velmi podobné s ostatními algoritmy s dopravdním zpožděním, totéž platí i pro trajektorii kyvadla (viz Obr.16b).



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.



(b) Trajektorie kyvadla.

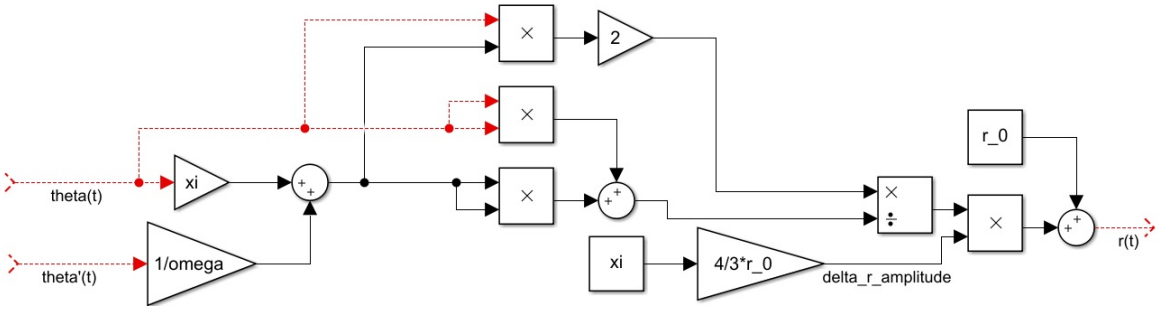
Obr. 16: Zpětnovazebné řízení s dvojitým dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem pro $\xi = 0.1$.

3.2.6 Zpětnovazebné řízení bez dopravního zpoždění

Poslední z algoritmů zmíněný v článku [9] by měl být oproti jeho předchůdcům teoreticky dokonalý. Řídí se rovnicí (39)

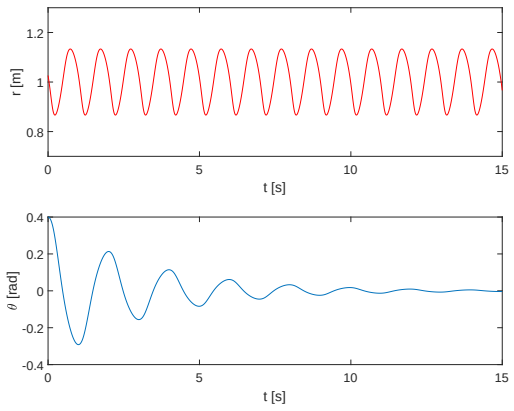
$$r(t) = r_0 + \Delta r \frac{2\theta(t)(\xi\theta(t) + \frac{1}{\Omega}\dot{\theta}(t))}{\theta^2(t) + (\xi\theta(t) + \frac{1}{\Omega}\dot{\theta}(t))^2}$$

a v matlabu je modelován viz Obr.17.

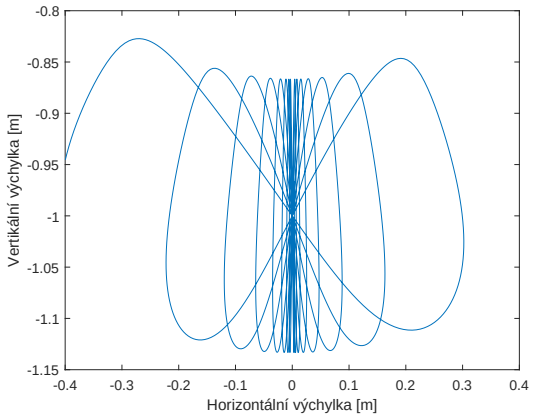


Obr. 17: Model uspořádání zpětnovazebného řízení bez dopravního zpoždění.

Už jen to, že s sebou nese dvojitou zpětnou vazbu nám napovídá, že bude o něco lepší než předchozí algoritmy. Amplituda řídícího signálu je konstantní, jako u předchozího algoritmu (viz Obr.18a). Oproti tomu je však trajektorie kyvadla poněkud ostřejší (viz Obr.18b) a k tlumení dochází okamžitě. Proto je o něco rychlejší než algoritmy s dopravním zpožděním. V simulaci funguje velmi dobře i pro velké hodnoty výchylky úhlu θ a pro vyšší hodnoty tlumícího poměru ξ. Tyto klady jsou však vykoupeny závislostí řídící rovnice na první časové derivaci úhlu θ.



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.



(b) Trajektorie kyvadla.

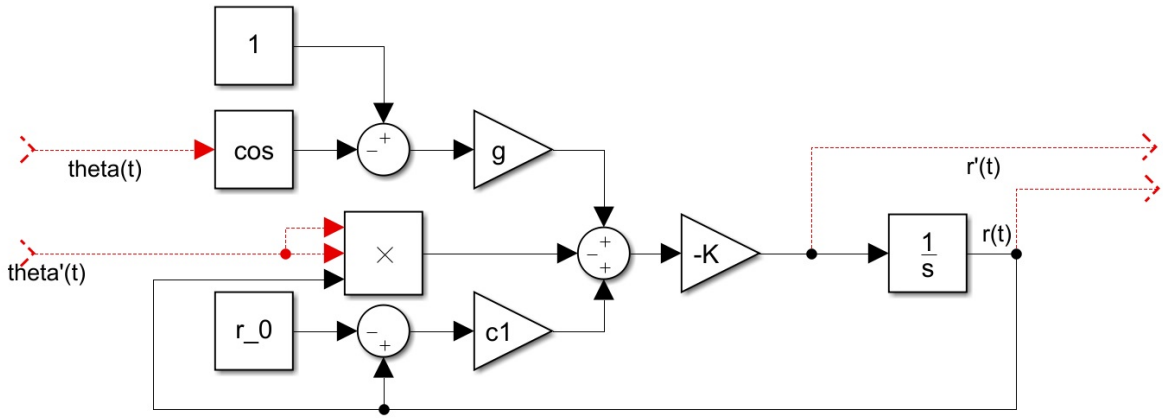
Obr. 18: Zpětnovazebné řízení bez dopravního zpoždění pro $\xi = 0.1$.

3.2.7 Nelineární zpětnovazebné řízení

Následující algoritmy vznikly za pomoci použití Ljapunovovy metody [6], od takových algoritmů očekáváme, že budou asymptoticky konvergovat k ekvilibriu systému, tj. ke stavu kdy výchylka kyvadla $\theta = 0$. Na první z těchto algoritmů jsme narazili v článku [10], řídí se rovnicí (41)

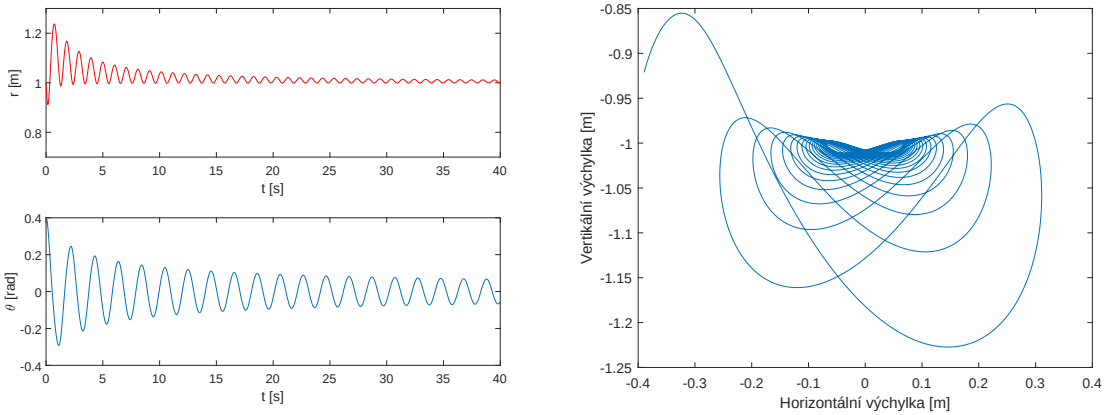
$$u(t) = -K(g(1 - cosx_1) - x_3x_2^2 + c_1(x_3 - r_0))$$

a v matlabu je modelován viz Obr.19.



Obr. 19: Model uspořádání nelineárního zpětnovazebného řízení.

Vzhledem k tomu, že výstupem tohoto řídícího algoritmu je rychlost, se kterou se délka závěsu mění, je třeba do řídícího modelu přidat ještě integrační blok (viz Obr.19), abychom ho mohli připojit do soustavy kyvadla. Průběh tlumení má předpovídaný asymptotický



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.

(b) Trajektorie kyvadla.

Obr. 20: Nelineární zpětnovazebné řízení pro $K = 1.2$ a $c_1 = 2$.

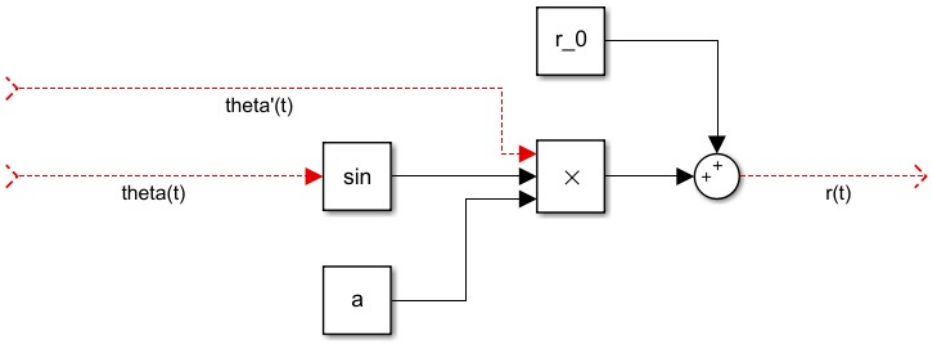
charakter (viz Obr.20a), amplitudu kmitů můžeme jednoduše regulovat koeficientem K. Trajektorii kyvadla můžeme sledovat na Obr.20b. Algoritmus funguje velmi dobře pro vysoké výchylky, u kterých je nástup tlumení velmi rychlý.

3.2.8 Zpětnovazebné řízení na základě metody průměrování

Druhý z nich vznikl na základě metody průměrování [13] s řídící rovnicí (46)

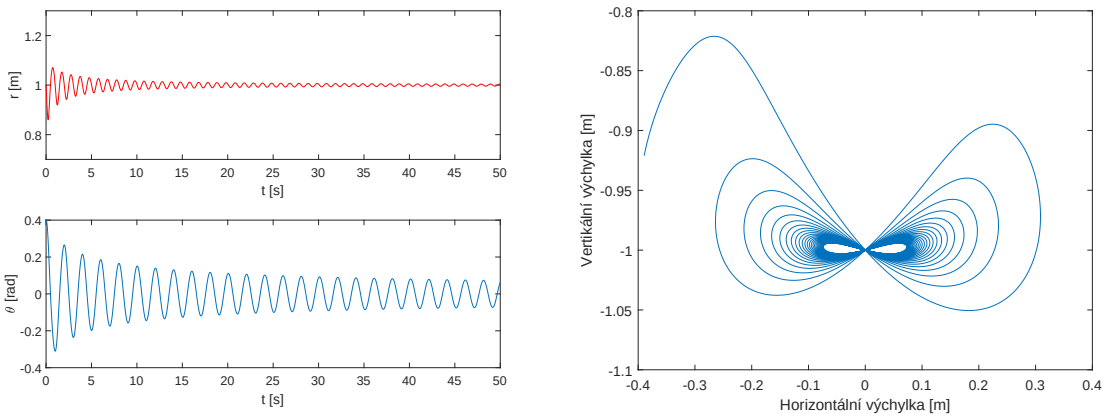
$$r(t) = r_0 + a\dot{\theta}(t)sin(\theta(t))$$

a v matlabu je modelován viz Obr.21.



Obr. 21: Model uspořádání zpětnovazebného řízení na základě metody průměrování.

Tento algoritmus je krásný svou jednoduchostí, avšak zpětné vazby se opět kromě výchylky účastní i její časová derivace, což by znesnadnilo aplikaci v praxi. Namísto tlumícího poměru ξ je zde řídícím parametrem proměnná a. Pro dosažení tlumícího efektu je nutné, aby $a > 0$.



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.

(b) Trajektorie kyvadla.

Obr. 22: Zpětnovazebné řízení na základě metody průměrování pro $a = 0.5$.

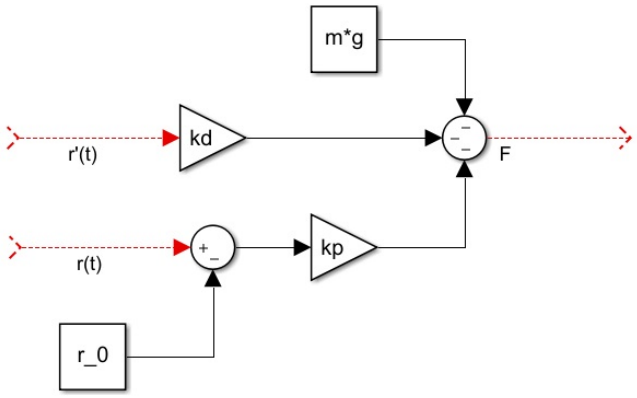
Z průběhu řídícího signálu na Obr.22a vidíme, že tlumení má opravdu asymptotický charakter. Trajektorii kyvadla můžeme sledovat na Obr.22b. Pomocí koeficientu a lze regulovat "nástup"tlumení - čím větší a, tím větší počáteční amplituda řídícího signálu. S volbou parametru a je třeba brát ohled i na počáteční výchylku θ_0. Pro větší výchylky je třeba volit nižší hodnoty parametru a, jinak může dojít k překročení hranice r_0. Tento problém lze opět vyřešit přidáním saturačního bloku.

3.2.9 Proporcionálně - Derivační zpětnovazebné řízení

Proporčně - Derivační řídící algoritmus [11] je jediným ze zmíněných algoritmů, který jako řízenou veličinu definuje napínací sílu závěsu F. Řídí se rovnicí (42)

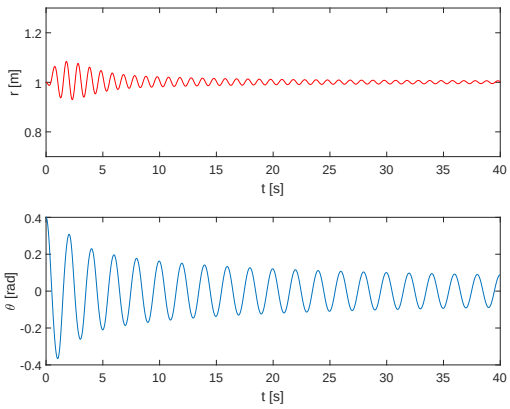
$$F_N = -k_p(r - r_0) - k_d\dot{r} - mg$$

a v matlabu je modelován viz Obr.23.

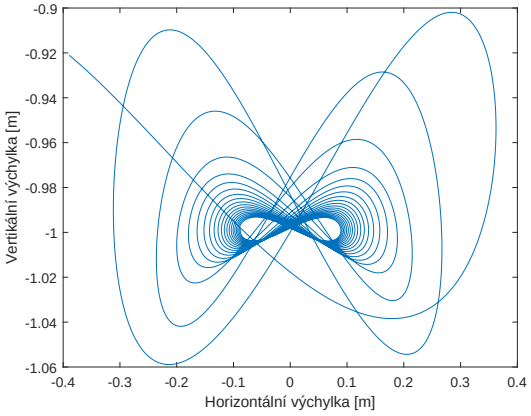


Obr. 23: Model uspořádání PD zpětnovazebného řízení.

Na rozdíl od ostatních algoritmů, u tohoto nezáleží na výchylce kyvadla. K řízení stačí pouze pozice a rychlost s jakou se pohybuje hmota v radiálním směru [11]. K nastavení algoritmu zde slouží dva parametry - proporcionální k_p a derivační k_d.



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.



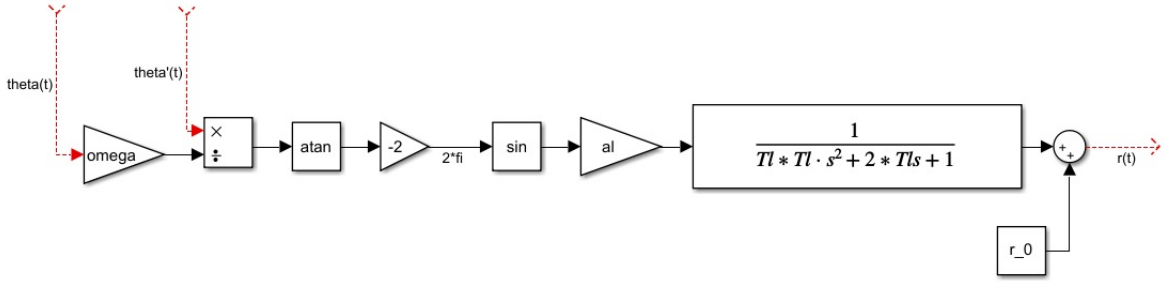
(b) Trajektorie kyvadla.

Obr. 24: PD zpětnovazebné řízení pro hodnoty $k_p = 35$ a $k_d = 1.5$.

Na rozdíl od předchozího algoritmu, tento konverguje rychleji (viz Obr.24a) a nabízí lepší možnosti řízení díky dvěma řídícím parametrům. Trajektorii kyvadla můžeme sledovat na Obr.24b. Funguje lépe pro větší výchylky kyvadla.

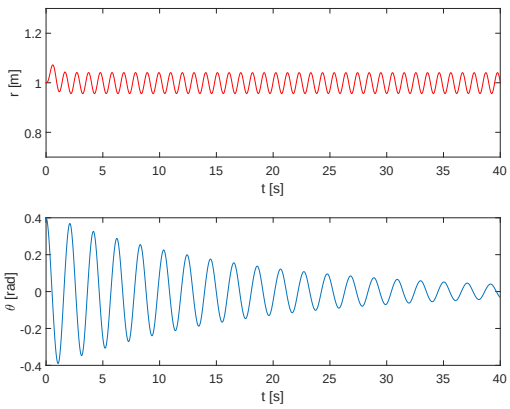
3.2.10 Zpětnovazebné řízení na základě energetických výpočtů

Poslední z porovnávaných algoritmů [12] nebyl určený pro tlumení pouze periodickou změnou délky závěsu, ale je toho schopný. Algoritmus se řídí rovnicí (43) a v matlabu je modelován viz Obr.25.

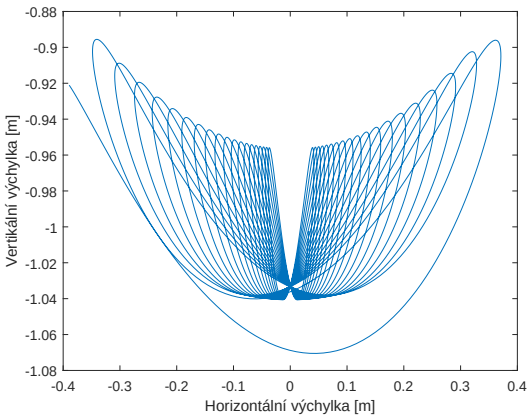


Obr. 25: Model uspořádání zpětnovazebného řízení na základě energetických výpočtů.

Řídícími parametry jsou přírůstek a_l a koeficient n schovaný v přenosové funkci. Zpětné vazby se opět účastní výchylka $\theta(t)$ a její rychlost $\dot{\theta}(t)$, pomocí kterých dopočteme úhel $\phi(t)$.



(a) Průběh signálů $r(t)$ a $\theta(t)$.



(b) Trajektorie kyvadla.

Obr. 26: Zpětnovazebné řízení na základě energetických výpočtů pro hodnoty $a_l = 0.2$ a $n = 1$.

V porovnání s ostatními algoritmy, které využívají Ljapunovovy metody, tato má sice pomalejší nástup, dále ale konverguje nejrychleji, s konstantní amplitudou řídícího signálu (viz Obr.26a). Trajektorii kyvadla můžeme sledovat na Obr.26b. Prvotní impuls lehce zesílí kmitání kyvadla, ale ihned pak se systém začne plynule tlumit, na původní hodnotu výchylky θ_0 se vrátí po cca 2 cyklech. Jako jediný algoritmus bychom ho však nemohli použít v aplikacích, kde se nesmí překročit hodnota původní výchylky.

3.3 Porovnání řídících algoritmů

Porovnání jednotlivých algoritmů mezi sebou je obtížný úkol. Většina z nich má své pro a proti. V této kapitole se tedy pokusíme dát jednotné kritérium, na základě kterého dané algoritmy porovnáme. Vzhledem k různým charakterům řídících algoritmů, může toto kritérium některým svědčit více, některým méně. Tímto kritériem budiž doba t, za kterou algoritmus utlumí kmity kyvadla z původní výchylky θ_0 na hodnotu $\theta_k = 0.1\theta_0$, při hmotnosti závaží $m = 1kg$, střední délce závěsu $r_0 = 2m$ a maximální změně délky závěsu Δr. Pokud to bude možné, bude použito nesaturovaného signálu $r(t)$. Celkem provedeme dvě simulace, jednu pro větší výchylku a větší maximální rozsah pohybu závěsu, druhou naopak pro menší výchylku a menší rozsah pohybu závěsu.

Algoritmus	Parametr A	Parametr B	t [s]
Otevřená smyčka	$\xi = 0.1$	n/a	n/a
Jedno zpoždění	$\xi = 0.07$	n/a	12
Dvojité zpoždění	$\xi = 0.07$	n/a	13
Jedno zpoždění s konstantním přírůstkem	$\xi = 0.05$	n/a	19
Dvojité zpoždění s konstantním přírůstkem	$xi = 0.18$	n/a	16
Bez dopravního zpoždění	$\xi = 0.19$	n/a	7
Nelineární	$K = 0.35$	$c_1 = 6$	130
Metoda průměrování	$a = 0.35$	n/a	n/a
PD	$k_p = 27$	$k_d = 1.5$	135
Energetická báze	$n = 0.5$	$a_l = 0.9$	31

Tab. 1: Porovnání algoritmů pro $\theta_0 = 1$ a $\Delta r = 0.5m$

Výsledky pro větší výchylku a rozsah pohybu závěsu V této simulaci jsme zvolili výchylku $\theta_0 = 1$ a maximální rozsah pohybu závěsu $\Delta r = 0.5m$. Jak je vidět v Tab.1, některé algoritmy se na cílovou hodnotu ani nedostaly. Než se algoritmus *Otevřená smyčka* dostal na žádanou hodnotu, projevila se interference vln a kmity se začaly opět zesilovat. Algoritmus *Metoda průměrování* sice chvíli tlumil, ale hodnota, ke které konvergoval, byla vyšší než kritériem žádaná. Algoritmy s dopravním zpožděním dosahují podobných výsledků. O něco déle to pak trvá algoritmům, které využívají Ljapunovovy metody, z těchto algoritmus *Energetická báze* konverguje nejrychleji. Nejlepším v tomto porovnání je algoritmus *Bez dopravního zpoždění* s časem $t = 7s$.

Výsledky pro menší výchylku a rozsah pohybu závěsu V tomto měření byla zvolená výchylka $\theta_0 = 0.3$ a maximální rozsah pohybu délky závěsu $\Delta r = 0.2m$. Z Tab.2 je patrné, že při menších výchylkách a rozsahu pohybu závěsu, je dosažení výsledku obtížnější a většině algoritmů trvá cca dvakrát déle než v předchozím porovnání. Nejhorším i v tomto měření vychází algoritmus *Otevřená smyčka*, který nebyl schopný dosáhnout jakéhokoliv tlumícího efektu. Pak algoritmus *Metoda průměrování*, který se blížil k požadované hodnotě,

Algoritmus	Parametr A	Parametr B	t [s]
Otevřená smyčka	$\xi = 0.07$	n/a	n/a
Jedno zpoždění	$\xi = 0.03$	n/a	28
Dvojité zpoždění	$\xi = 0.015$	n/a	34
Jedno zpoždění s konstantním přírůstkem	$\xi = 0.07$	n/a	65
Dvojité zpoždění s konstantním přírůstkem	$\xi = 0.075$	n/a	28
Bez dopravního zpoždění	$\xi = 0.07$	n/a	16
Nelineární	$K = 0.85$	$c_1 = 1.4$	510
Metoda průměrování	$a = 4$	n/a	n/a
PD	$k_p = 18$	$k_d = 0.5$	325
Energetická báze	$n = 0.5$	$a_l = 0.4$	53

Tab. 2: Porovnání algoritmů pro $\theta_0 = 0.3$ a $\Delta r = 0.2m$

nicméně jí opět nedosáhl. Za povšimnutí stojí algoritmus *Energetická báze*, který v obou případech, jako jediný z algoritmů využívajících Ljapunovovy metody, tlumí překvapivě rychle. Nejlepší výsledek opět obdržíme u algoritmu *Bez dopravního zpoždění*, který i v tomto případě je schopný utlumit kmity na požadovanou hodnotu v polovičním čase než další druhý nejrychlejší.

Aplikace v praxi V této práci jsou všechny simulace provedeny na matematickém modelu. Experimentální měření v praxi může přinést odlišné výsledky. Tato úskalí jsou zmíněna u jednotlivých algoritmů v simulační sekci.

4 Závěr

Tlumení pohybu kyvadla skutečně může být realizováno periodickou změnou délky závěsu. V této práci bylo předvedeno několik algoritmů, které tento problém řeší. První algoritmus řízení ve formě otevřené smyčky [7] není ideální vzhledem k možné vlnové interferenci a v porovnání se jeví jako nejhorší. Dále byly předvedeny zpětnovazebné algoritmy s dopravním zpožděním [9], které v simulacích dosahují obstojných výsledků a pro použití v praxi jsou dobrými kandidáty. To samé platí o algoritmu bez dopravního zpoždění [9], který se v porovnání jevil jako nejlepší, avšak pro použití v praxi je z hlediska dvojité zpětné vazby jeho aplikace složitější. Algoritmy na bázi Ljapunovovy metody [11, 12, 13] dosahují v porovnání podobných výsledků, z nichž PD konverguje nejrychleji, oproti algoritmům s dopravním zpožděním jsou však pomalé, navíc opět z hlediska dvojité zpětné vazby bude jejich aplikace v praxi obtížnější. Algoritmus podle [13] se jeví jako nejhorší ze skupiny algoritmů založené na Ljapunovově metodě, avšak jeho lazení se řídí pouze jedním parametrem, což v praxi může usnadnit aplikaci. Pro lepší posouzení vlastností jednotlivých algoritmů a následné rozhodnutí o tom, zda-li jsou pro aplikaci v praxi vhodné, by bylo třeba experimentálního měření, kterého se účastní i vnější síly (tření, elasticita vlákna, vítr, apod.).

Seznam použitých značek a symbolů

- r_0Střední délka závěsu
- θ Výchylka kyvadla od svislé osy
- m Hmotnost závaží
- F_N Napínací síla závěsu
- T Perioda kmitu
- Ω Vlastní frekvence
- F_C Coriolisova síla
- Δr Rozsah pohybu závěsu
- ξ Tlumící poměr
- ψ Fázový posuv

Seznam použité literatury a zdrojů

[1] Halliday D., Resnick R., Walker J. *Fundamentals of Physics* Fifth Editon Extended, 1997, John Wiley & Sons, Inc.

[2] Ballard J. *The Simple Harmonic Pendulum* 2012, Dostupné z: https://docplayer.net/25215487-The-simple-harmonic-pendulum-joel-ballard.html

[3] Post A.A., Groot G., Daffertshofer A., Beek P.J. *Pumping a playground swing* Motor Control, 2007, 11, 136-150

[4] Sanmartin J.R. *O Botafumeiro: Parametric pumping in the Middle Ages*. Am, J. Phys. 52 (10) (1984) 937-945

[5] Černý F., Samek L., Sopko B., Vacková S. *Fyzika I*. Vydavatelství ČVUT 2004.

[6] Murray R.M., Li Z., Sastry S.S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation* CRC Press, 1994, pages 179-189.

[7] Stilling D.S.D., Szyszkowski W. *Controlling angular oscillations through mass recon"guration: a variable length pendulum case* Int.J. Non-linear Mech., vol.37, no.1, pp. 89-99, 2002.

[8] Szyszkowski W., Stilling D.S.D. *On damping properties of a frictionless physical pendulum with a moving mass* Int. J. Non-Linear Mechanics, vol.40 (2005), 669 – 681

[9] Vyhlídal T., Anderle M., Bušek J., Niculescu S.I. *Time-delay algorithms for damping oscillations of suspended payload by adjusting the cable length* IEEE/ASME Transactions on mechatronics, vol.22, no.5, pp. 2319-2329, October 2017

[10] Anderle M., Michiels W., Čelikovský S., Vyhlídal T. *Damping a pendulum's swing by string length adjustment - design and comparison of various control methods* American Control Conference (ACC) Philadelphia, PA, USA, July 10-12, 2019.

[11] Gutiérrez-Frias O.O., Martínez-García J.C., Moctezuma R.A.G. *PD Control for Vibration Attenuation in a Physical Pendulum with Moving Mass* Hindawi Publishing Corp., Mathematical problems in engineering, vol.2009, art. ID 179724.

[12] Okanouchi S., Yoshida K., Matsumoto I., Kawabe H. *Damping Angular Oscillations of a Pendulum under State Constraints* IFAC Proceedings Volumes, vol. 41, no. 2, pp. 7735–7742, 2008.

[13] Aslanov V.S. *Stability of a pendulum with a moving mass: The averaging method* Journal of Sound and Vibration 445 (2019) 261-269.

Seznam obrázků, grafů a tabulek

Seznam obrázků

Obrázek 1 Matematické kyvadlo. 8
Obrázek 2 Síly působící na soustavu kyvadla. 10
Obrázek 3 Jedna z možných trajektorií pohybu kyvadla. 11
Obrázek 4 Model soustavy řízený délkou závěsu $r(t)$. 19
Obrázek 5 Model soustavy řízený velikostí napínací síly $F_N(t)$. 19
Obrázek 6 Netlumená soustava s počáteční výchylkou $\theta_0 = 0.4$ a $r_0 = 1m$. 20
Obrázek 7 Model řízení open-loop charakteru. 21
Obrázek 8 Řízení open-loop charakteru pro $\xi = 0.1$. 21
Obrázek 9 Model uspořádání zpětnovazebného řízení s dopravním zpožděním. . . 22
Obrázek 10 Zpětnovazebné řízení s dopravním zpožděním pro $\xi = 0.1$. 22
Obrázek 11 Model uspořádání zpětnovazebného řízení s dvojitým dopravním zpožděním. 23
Obrázek 12 Zpětnovazebné řízení s dvojitým dopravním zpožděním pro $\xi = 0.1$. . 23
Obrázek 13 Model uspořádání zpětnovazebného řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem. 24
Obrázek 14 Zpětnovazebné řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem pro $\xi = 0.1$. 24
Obrázek 15 Model uspořádání zpětnovazebného řízení s dvojitým dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem. 25
Obrázek 16 Zpětnovazebné řízení s dvojitým dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem pro $\xi = 0.1$. 25
Obrázek 17 Model uspořádání zpětnovazebného řízení bez dopravního zpoždění. . 26
Obrázek 18 Zpětnovazebné řízení bez dopravního zpoždění pro $\xi = 0.1$. 26
Obrázek 19 Model uspořádání nelineárního zpětnovazebného řízení. 27
Obrázek 20 Nelineární zpětnovazebné řízení pro $K = 1.2$ a $c_1 = 2$. 27
Obrázek 21 Model uspořádání zpětnovazebného řízení na základě metody průměrování. 28
Obrázek 22 Zpětnovazebné řízení na základě metody průměrování pro $a = 0.5$. . . 28
Obrázek 23 Model uspořádání PD zpětnovazebného řízení. 29
Obrázek 24 PD zpětnovazebné řízení pro hodnoty $k_p = 35$ a $k_d = 1.5$. 29
Obrázek 25 Model uspořádání zpětnovazebného řízení na základě energetických výpočtů. 30
Obrázek 26 Zpětnovazebné řízení na základě energetických výpočtů pro hodnoty $a_l = 0.2$ a $n = 1$. 30

Seznam tabulek

Tabulka 1 Porovnání algoritmů pro $\theta_0 = 1$ a $\Delta r = 0.5m$ 31
Tabulka 2 Porovnání algoritmů pro $\theta_0 = 0.3$ a $\Delta r = 0.2m$ 32

Seznam použitého SW

- Texmaker
- MiKTeX (LaTeX)
- MATLAB R2019a a MATLAB Simulink
- OpenOffice Draw

Seznam příloh

Příloha 1: Data proměnných pro MATLAB

Příloha 2: Model soustavy pro řízení délkou závěsu

Příloha 3: Model soustavy pro řízení velikostí napínací síly

Příloha 4: Model řízení pro otevřenou smyčku

Příloha 5: Model řízení pro řízení s dopravním zpožděním

Příloha 6: Model řízení v Simulinku pro řízení s dvojitým dopravním zpožděním

Příloha 7: Model řízení v Simulinku pro řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem

Příloha 8: Model řízení v Simulinku pro řízení s dvojitým dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem

Příloha 9: Model řízení v Simulinku pro řízení bez dopravního zpoždění

Příloha 10: Model řízení v Simulinku pro nelineární řízení

Příloha 11: Model řízení v Simulinku pro řízení založené na metodě průměrování

Příloha 12: Model řízení v Simulinku pro PD řízení

Příloha 13: Model řízení v Simulinku pro řízení na energetické bázi