

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta strojní  
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



Bakalářská práce

**Konstitutivní modelování nelineárně pružného chování pryže**

*Lucie Roubalová*

Vedoucí práce: doc. Ing. Lukáš Horný Ph.D

Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství, Bakalářský

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Roubalová** Jméno: **Lucie** Osobní číslo: **465503**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Konstitutivní modelování nelineárně pružného chování pryže**

Název bakalářské práce anglicky:

**Constitutive modeling of the nonlinear elastic behavior of rubber**

Pokyny pro vypracování:

Vyložte základy makromolekulární chemie s důrazem na elastomery  
Popište základní mechanické vlastnosti pryží  
Vysvětlete základy popisu nelineárně pružného chování materiálů  
Proveďte jednoosé tahové zkoušky s elastomerními vzorky  
Z provedených zkoušek odhadněte materiálové parametry Van der Waalsova a extended-tube modelu hustoty deformační energie  
Porovnejte oba modely

Seznam doporučené literatury:

Ducháček V. (2006) Polymery: Výroba, vlastnosti, zpracování, použití. VŠCHT v Praze  
Holzapfel G. (2000) Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. Wiley and Sons, Chichester  
Horný L. (2014) Patobiomechanika srdečněcévního systému I. díl. Studijní text ČVUT FS. dostupné online  
<http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Patobiomechanika-srdecnecevnioho-systemu-I.pdf>

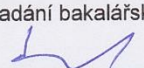
Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D., odbor biomechaniky FS**


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **15.04.2019** Termín odevzdání bakalářské práce: **16.08.2019**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

  
doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

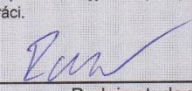
  
prof. Ing. Milan Růžička, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Studentka bere na vědomí, že je povinna vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.  
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

30.4.2019  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studentky

# Anotační list

**Jméno autora:** Lucie Roubalová

**Název BP:** Konstitutivní modelování nelineárně pružného chování pryže

**English title:** Constitutive modeling of the nonlinear elastic behavior of rubber

**Rok:** 2019

**Studijní program:** Teoretický základ strojího inženýrství

**Ústav / odbor:** Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

**Vedoucí práce:** doc. Ing. Lukáš Horný Ph.D

## **Bibliografické údaje:**

Počet stran: 52

Počet obrázků: 42

Počet tabulek: 7

Počet příloh: 0

Apendix: 1

**Klíčová slova:** konstitutivní model, nelineární mechanika, pryž

**Keywords:** constitutive model, nonlinear mechanics, rubber

**Anotace:** Tato bakalářská práce se zabývá konstitutivním modelováním vybraných vzorků pryže. Tyto vzorky jsou vytvořeny z membrány kruhového průřezu z EPDM a SBR materiálu, které mají odlišné materiálové parametry. V první části jsou vyloženy základy makromolekulární chemie s důrazem na elastomery. V další části je vysvětlen experiment jednoosé tahové zkoušky, ze které jsou následná data pro vyhodnocování. Pomocí těchto dat a modelů hustoty deformační energie byly odhadnuty materiálové parametry obou materiálů. Na základě koeficientu determinace jsou dále tyto modely porovnány.

**Abstrakt:** This bachelor thesis deals with constitutive modeling of selected samples of rubber. These samples are made from a circular cross-section membrane from EPDM and SBR material. In the first part, fundamentals of macromolecular chemistry are explained with emphasis on elastomers. In the next part, uniaxial tensile test experiment is explained and how the data was recorded. Material parameters of the deformation energy density models were estimated. Comparison of these models is based on determination coefficient.

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala panu doc. Ing. Lukáši Hornému Ph.D. za odborné vedení, ochotu, cenné rady, připomínky a především čas, který mi věnoval při psaní této bakalářské práce. Dále děkuji své rodině za morální a materiálovou podporu nejen během psaní této práce, ale během celého studia.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem práci vypracovala samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou konzultací poskytnutých vedoucím práce. Pro psaní práce jsem použila pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne 7.6.2019

.....  
Lucie Roubalová

# Obsah

Seznam použitého značení .....	1
<b>1. Úvod.....</b>	<b>3</b>
1.1. Cíle .....	3
1.2. Nomenklaturní konvence.....	4
<b>2. Obecná charakteristika polymerů .....</b>	<b>5</b>
2.1. Struktura polymerů.....	5
2.2. Síťované polymery .....	6
2.3. Fázový stav polymerů .....	6
2.4. Základní dělení polymerů.....	7
2.4.1. Přírodní polymery.....	7
2.4.2. Syntetické polymery .....	8
<b>3. Elastomery .....</b>	<b>10</b>
3.1. Vulkanizace (síťování, cross-linking) .....	10
3.2. Základní dělení kaučuků.....	11
3.2.1. Kaučuky pro všeobecné použití.....	11
3.2.2. Olejovzdorný kaučuk.....	12
3.2.3. Teplovzdorný kaučuk .....	13
<b>4. Způsoby zpracování polymerů .....</b>	<b>14</b>
4.1. Tvářecí technologie .....	14
4.1.1. Lisování .....	14
4.1.2. Vstřikování .....	15
4.2. Tvarovací technologie .....	16
4.2.1. Za zvýšené teploty.....	16
4.2.2. Za běžné teploty .....	16
<b>5. Matematický popis nelineární mechaniky kontinua .....</b>	<b>17</b>
5.1. Kinematika konečných deformací.....	17
5.2. Tenzory napětí.....	19
5.3. Materiálová nelinearita.....	21
5.3.1. Konstitutivní rovnice.....	21
5.3.2. Elastický materiál .....	21

5.4.	Modely pro hustotu deformační energie $W$ .....	24
5.4.1.	Fenomenologické modely .....	25
5.4.2.	Mikrostrukturně motivované modely .....	26
<b>6.</b>	<b>Experimentální část</b> .....	<b>30</b>
6.1.	Jednoosá tahová zkouška.....	30
6.2.	Experimentální zařízení - trhací stroj .....	31
6.3.	Měřicí metoda – detekce hran .....	32
6.4.	Příprava zkušebních těles .....	33
6.5.	Tahová zkouška .....	35
6.5.1.	Postup tahové zkoušky .....	35
6.5.2.	Výsledky měření tahové zkoušky.....	36
<b>7.</b>	<b>Odhad materiálových parametrů modelů</b> .....	<b>37</b>
7.1.	Odhad materiálových parametrů pomocí programu MAPLE .....	37
7.1.1.	Regrese Neo Hookeovským modelem .....	37
7.1.2.	Regrese Mooneyovým - Rivlinovým modelem.....	38
7.1.3.	Regrese Extended Tube modelem.....	39
7.1.4.	Regrese Van der Waalsovým modelem.....	40
7.1.5.	Porovnání úspěšnosti modelů založené na $R^2$ .....	41
<b>8.</b>	<b>Porovnání Extended Tube a Van der Waalsového modelu</b> .....	<b>43</b>
8.1.	Porovnání pomocí krabicového grafu .....	44
8.2.	Porovnání pomocí Mann – Whitneyho testu.....	45
<b>9.</b>	<b>Závěr</b> .....	<b>47</b>
<b>10.</b>	<b>Literatura</b> .....	<b>49</b>
<b>11.</b>	<b>Apendix</b> .....	<b>51</b>

## Seznam obrázků

Obr. 1 Struktura makromolekul lineárního (a), rozvětveného (b) a zesíťovaného (c) polymeru. [1] .....	5
Obr. 2 Základní rozdělení polymerů .....	6
Obr. 3 Schematické rozdělení jednotlivých fází polymeru [6].....	7
Obr. 4 Termomechanická křivka amorfního a vysoce krystalického polymeru [6] .....	7
Obr. 5 Zesíťování polymeru [10] .....	11
Obr. 6 Butadienstyrenový kaučuk (SBR) [1] .....	11
Obr. 7 Ethylenpropylenové kaučuky (EPDM) [1].....	12
Obr. 8 Princip vysokotlakého přímého lisování [1] .....	14
Obr. 9 Schéma pístového vstřikovacího stroje s pístovou předplastikací [1].....	15
Obr. 10 Vstřikovací cyklus [11].....	15
Obr. 11 Počáteční a přetvořená konfigurace tělesa .....	17
Obr. 12 Polární rozklad deformačního gradientu $\mathbf{F}$ [27] .....	18
Obr. 13 Těleso v původní a ve zdeformované konfiguraci [27].....	20
Obr. 14 Metoda řezu na tělese ve statické rovnováze pro Cauchyovo napětí (A) a pro první napětí Piola-Kirchhoffovo (B) [27].....	20
Obr. 15 Tabulka vzájemné transformace tenzorů napětí [25] .....	21
Obr. 16 Značení složek tenzoru napětí [27] .....	22
Obr. 17 Uspořádání molekul pryže v nezatíženém a zatíženém stavu [30].....	23
Obr. 18 Jednoosá tahová zkouška [27].....	24
Obr. 19 Přehled konstitutivních modelů pryže [29] .....	24
Obr. 20 Predikce modelu (vlevo) a překročení meze $\lambda m$ (vpravo) pro Van der Waalsův model .....	27
Obr. 21 Ukázka variability aproximace pomocí Van der Waalsova modelu .....	28
Obr. 22 Predikce modelu (vlevo) a překročení meze $\delta$ (vpravo) pro Extended Tube model .....	29
Obr. 23 Jednoosá napjatost.....	31
Obr. 24 Trhací stroj od firmy Zwick/Roell .....	32
Obr. 25 Číslování čelistí trhacího stroje .....	32
Obr. 26 Umístění kontrastních značek na vzorku (nezatížený a zatížený stav) .....	33



Obr. 27 Směr vzorků pryže pro tahovou zkoušku .....	34
Obr. 28 Rozměry zkušebního tělesa .....	34
Obr. 29 Ukázka vzorků pryže pro daný experiment.....	34
Obr. 30 Jednoosá tahová zkouška pryže - relaxace .....	36
Obr. 31 Jednoosá tahová zkouška pryže – natahování .....	36
Obr. 32 Regresní analýza jednoosé tahové zkoušky na všech datech, nezávisle na EPDM (vlevo) a SBR (vpravo) proložené Neo Hookeovským modelem .....	37
Obr. 33 Regresní analýza jednoosé tahové zkoušky na všech datech, nezávisle na EPDM (vlevo) a SBR (vpravo) proložené Mooneyovým Rivlinovým modelem .....	38
Obr. 34 Regresní analýza jednoosé tahové zkoušky na všech datech, nezávisle na EPDM (vlevo) a SBR (vpravo) proložené Extended Tube modelem .....	39
Obr. 35 Regresní analýza jednoosé tahové zkoušky na všech datech, nezávisle na EPDM (vlevo) a SBR (vpravo) proložené Van der Waalsovým modelem.....	40
Obr. 36 Porovnání úspěšnosti modelů pro EPDM .....	42
Obr. 37 Porovnání úspěšnosti modelů pro SBR.....	42
Obr. 38 Porovnání modelů pro EPDM vzorek .....	43
Obr. 39 Porovnání modelů pro SBR vzorek.....	43
Obr. 40 Porovnání koeficientů determinace EPDM materiálu .....	44
Obr. 41 Porovnání koeficientů determinace EPDM materiálu .....	44
Obr. 42 Mann Whitneyho test pomocí programu Minitab. Porovnání alternativní hypotézy, kdy platí nerovnost mediánů (vlevo) a kdy platí, že rozdíl mediánů je větší než 0 (vpravo).....	46

## Seznam tabulek

Tab. 1 Předepsané vlastnosti směsí .....	33
Tab. 2 Zprůměrované rozměry zkušebních vzorků .....	35
Tab. 3 Odhad materiálového parametru a koeficientu determinace pro Neo Hookeovský model .....	38
Tab. 4 Odhad materiálových parametrů a koeficientu determinace pro Mooneyův Rivlinův model ...	39
Tab. 5 Odhad materiálových parametrů a koeficientu determinace pro Extended Tube .....	40
Tab. 6 Odhad materiálových parametrů a koeficientu determinace pro Van der Waalsův model .....	41
Tab. 7 Hodnoty pro porovnání pomocí Mann – Whitneyho testu .....	45

## Seznam použitého značení

<b>b</b>	$b_{ij}$	Levý Cauchy – Greenův tenzor deformace
<b>C</b>	$C_{IK}$	Pravý Cauchy – Greenův tenzor deformace
<b>ds</b>	$ds_i$	diferenciální vektor plochy průřezu prostorově
<b>dS</b>	$dS_K$	diferenciální vektor plochy průřezu materiálově
	$\mathcal{D}$	konečná roztažitelnost materiálu
<b>E</b>	$E_{IK}$	Green – Lagrangeův (Lagrangeův) tenzor deformace
	$E$	Yongův modul pružnosti
<b>F</b>	$F_i$	vektor síly
<b>F</b>	$F_{iK}$	deformační gradient
<b>I</b>		jednotková/ý matice/tenzor
	$J$	objemový poměr
	$\lambda$	streč (protažení)
	$\lambda$	první Lamého konstanta
	$\lambda_m$	locking stretch (konečná protažitelnost)
	$M$	průměrná molární hmotnost řetězce
	$M_p$	molekulová hmotnost polymeru
	$M_n$	molekulová hmotnost monomeru
<b>n</b>	$n_i$	vektor vnější normály (prostorový)
	$n$	polymerační stupeň
	$n$	objemová hustota řetězců
<b>N</b>	$N_I$	vektor vnější normály (referenční)
	$P$	Lagrangeův multiplikátor
<b>P</b>	$P_{iK}$	smluvní napětí (první Piolovo-Kirchhoffovo)
	$\rho$	hustota hmotnosti
<b>R</b>	$R_{iK}$	tenzor rotace (vlastní ortogonální transformace)
	$R$	univerzální plynová konstanta
	$R^2$	koeficient determinace
<b><math>\sigma</math></b>	$\sigma_{ik}$	Cauchyovo napětí (skutečné)
<b>T</b>	$T_{iK}$	vektor smluvního napětí
<b>t</b>	$t_i$	Cauchyův napěťový vektor <b>t</b>
	$T_g$	teplota zesklnění
	$T_m$	teplota tání (melting temperature)
<b>U</b>	$U_{KL}$	pravý tenzor strečů
	$V$	objem vzorku

<b>v</b>	$v_{ij}$	levý tenzor strečů
	$W$	hustota deformační energie
	$W_c$	část hustoty zesíťované deformační energie
	$W_e$	část deformační energie obsahující neinteragující řetězce, které zauímají libovolné konformace a neovlivňují se navzájem
<b>X</b>	$X_J$	Lagrangeovy souřadnice (materiálové)
<b>x</b>	$x_j$	Eulerovy souřadnice (prostorové)

# 1. Úvod

S rozvojem moderní doby jde ruku v ruce také rozvoj materiálů. Polymerní materiály dosahují mnohem lepších vlastností, než tomu bývalo. Polymerní materiály představují prvek, bez kterého se člověk v moderní době neobejde, ať už se jedná o každodenní domácnost, anebo jakékoliv průmyslové odvětví (chemickém, automobilovém, potravinářském a elektronickém průmyslu).

S různými vlastnostmi polymerů se také vážou různé mechanické vlastnosti materiálu. S tím souvisí znalost rozložení napětí v materiálu. Bez těchto znalostí bychom nebyli schopni správně dimenzovat jednotlivé součásti, nejen z pryže. Pro materiály, jako ocel atd., se využívají rovnice lineární pružnosti. To ovšem nelze u komponentů, které vykazují nelineární chování materiálů. Pro popis jejich chování z hlediska pružnosti a pevnosti je za potřeby sofistikovanější matematický zápis.

Předložená bakalářská práce se zabývá pryžovými membránami kruhového průřezu z EPDM a SBR materiálu, které mají odlišné materiálové parametry. Z tahové zkoušky jsem získala experimentální data pro následující výpočtové modelování chování pryže, které mi poskytlo porovnání obou pryžových membrán. Porovnání jejich vlastností jsem učinila pomocí rovnic pro hustotu deformační energie, které jsem vytvořila pomocí výpočetního softwaru Maple. Pro výpočet hustoty deformační energie jsem použila Van der Waalsův, Extended Tube, Neo Hookeovský a Mooneyův-Rivlinův model. Cílem je porovnat regresní analýzu experimentálních dat a všech těchto modelů.

## 1.1. Cíle

- Vyložení základů makromolekulární chemie
- Základní mechanické vlastnosti pryže
- Základy popisu nelineárně pružného chování materiálů
- Popis jednoosé tahové zkoušky s elastomerními vzorky
- Odhad materiálových parametrů Van der Waalsového a Extended Tube modelu
- Porovnání obou modelů

## 1.2. Nomenklaturní konvence

V tomto textu se objevují různé druhy fyzikálních veličin – skaláry, vektory a tenzory 2.řádu. Pro symbolický zápis těchto veličin zavádím následující konvenci:

skalární veličiny označuji kurzívou, např. *t, s*...

vektory označuji tučnou kurzívou, např. ***x, y, M***..

tenzory druhého řádu označuji tučně bez kurzívy, např. **F, C, b**

Kdekoliv, kde se objeví indexy *i, j, k* atd.. samostatně stojící, bez dalšího komentáře, má se za to, že se za ně má postupně dosadit čísla 1,2,3..

## 2. Obecná charakteristika polymerů

Polymery tvoří materiál, který lze najít v přírodní podobě jako základní molekulární strukturu.

Polymery jsou látky, které obsahují obrovské molekuly. Z tohoto důvodu je lze nazývat jako látky makromolekulární. Jejich relativní molekulová hmotnost se pohybuje od stovek do milionů. Makromolekuly vznikají pospojováním molekul nízkomolekulárních látek – monomerů, pomocí chemických vazeb. Z molekuly monomeru se stane základní stavební částice makromolekuly, která se nazývá mer. Tento proces se nazývá polymerace. Charakteristikou polymerace je polymerační stupeň směsi  $n$ . Polymerační stupeň určuje, kolik stavebních jednotek (merů) je zabudováno v makromolekule. Je dán poměrem molekulové hmotnosti polymeru ( $M_p$ ) a monomeru ( $M_m$ ). Pomocí polymeračního stupně lze látku rozdělit na oligomery (pro  $n < 10$ ) a nebo dimery, trimery a tetramery [1][2][3].

### 2.1. Struktura polymerů

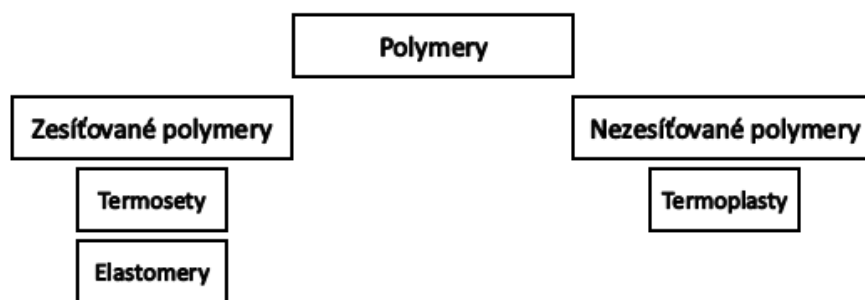
Struktura makromolekulárních řetězců může být lineární, rozvětvená nebo uspořádaná do prostorové sítě dle Obr. 1.



Obr. 1 Struktura makromolekul lineárního (a), rozvětveného (b) a zesíťovaného (c) polymeru. [1]

Lineární makromolekuly se vytváří spojením monomerů. Rozvětvené makromolekuly mají na základním řetězci vázány krátké boční substituenty, které zmenšují jejich pohyblivost, zmenšují velikost sil mezi makromolekulami a tím mění mechanické vlastnosti materiálu (pevnost, tvrdost a modulu pružnosti). Zesíťované makromolekuly vznikají z lineárních makromolekul spojením sousedních řetězců chemickými vazbami. Zesíťováním se omezí pohyblivost makromolekul a ztrácí tím rozpustnost, tavitelnost, a zmenšuje houževnatost materiálu. Zvýší se tvrdost, modul pružnosti a teplotní odolnost. Zesíťovaná struktura může vzniknout během polyreakce, jak je to u reaktoplastů, nebo dodatečným síťováním, které vznikne při vulkanizaci kaučuku [1] [4].

Polymery dělíme podle vnitřní struktury. Lze je dělit na elastomery, termosety a termoplasty, jak lze vidět na Obr. 2. Hlavní rozdíl mezi termoplastem a termosetem jsou vazby mezi molekulovými řetězci. Vlastnosti termoplastů, termosetů a elastomerů jsou popsány v následujících kapitolách.



Obr. 2 Základní rozdělení polymerů

## 2.2. Síťované polymery

Síťované polymery představují makromolekulární látky, jejichž řetězce jsou spojeny chemickými vazbami a tím vytváří trojrozměrnou prostorovou síť. Síťování je charakteristické pro kaučuky, kde se zesíťování nazývá vulkanizace. Zesíťování vzniká pomocí lineárního polymeru obsahující reaktivní místa, která jsou schopna reagovat se síťovacím činidlem. Molekuly síťovacího činidla se mohou stát součástí příčné vazby, jako je to u vulkanizace kaučuku. Někdy nastane vzájemnému spojení reaktivních míst, které nastává u síťování pomocí peroxidů.

Síťovací proces se skládá z několika stádií. V prvním stádiu vzrůstá molekulová hmotnost polymeru, aniž by se vytvořila trojrozměrná polymerní síť. Při jisté koncentraci příčných vazeb se začnou objevovat první stopy trojrozměrné struktury – gelu. Nastává fáze gelovatění. Při vyšší koncentraci příčných vazeb se polymer skládá ze dvou složek, gelu a solu. Směs se po nějaké době dostane do bodu gelovatění a přestane být plastická [1].

## 2.3. Fázový stav polymerů

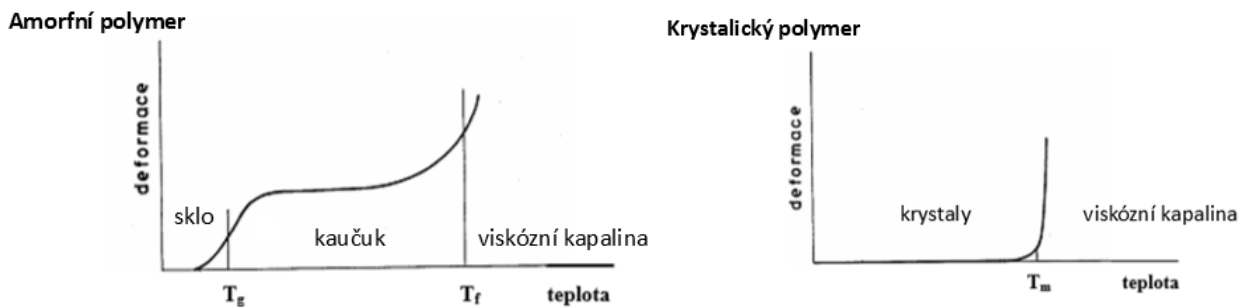
Pokud se bude polymer zahřívat na dostatečně vysokou teplotu, nastane změna vnitřní energie, překoná se vazebná energie a nastane rozpad makromolekul. Teprve poté začne odpařování. Z toho důvodu neexistuje plynná fáze polymeru, ale existuje pouze stav kapalný a tuhý. Podle pravidelnosti geometrického uspořádání makromolekulárních řetězců v tuhém stavu lze rozlišit vysoce uspořádaný stav polymeru-krytalický a prakticky neuspořádaný stav – sklovitý. Pro polymery existuje přechodový stav mezi sklovitým a kapalným, tzv. stav kaučukovitý. Polymer v tomto stavu lze deformovat až o stovky procenta téměř do původního stavu. Je tedy patrné, že polymer lze definovat ve čtyřech fázových stavech, a to v krytalickém a třech amorfních dle obr. Rozhodující parametry určující, kde se daný polymer nachází jsou molekulová hmotnost, chemické složení, struktura a teplota [1][5].





Obr. 3 Schematické rozdělení jednotlivých fází polymeru [6]

Z hlediska chování za různých teplot lze amorfní polymer charakterizovat pomocí teploty zesklennění  $T_g$  (glass-transition temperature) a krystalický polymer pomocí teploty tání  $T_m$  (melt temperature). Jak lze vidět na obr.  $T_g$  ohraničuje oblast stavu sklovitého (amorfního) a  $T_m$  ohraničuje oblast krystalického stavu. Mezi  $T_g$  a  $T_f$  (teplota toku – flow temperature) se vyskytuje oblast kaučukovitá. Teprve v této oblasti vede zahřívání k náhlému růstu deformace. Pro každý polymer je charakteristická termomechanická křivka, která udává teplotní závislost deformace (resp. napětí), která vzniká působením vnější síly [1][6][7].



Obr. 4 Termomechanická křivka amorfního a vysoce krystalického polymeru [6]

## 2.4. Základní dělení polymerů

### 2.4.1. Přírodní polymery

Přírodní polymery patří mezi první makromolekulární látky, které se začaly využívat v technickém průmyslu. Patří mezi ně přírodní kaučuk, polysacharidy a bílkoviny [1].

#### 2.4.1.1. Přírodní kaučuk – NR (natural rubber)

Z chemického hlediska se jedná o cis-1,4- polyisopren. Přírodní kaučuk se získává z tropického stromu Hevea brasiliensis pomocí nařezávání kůry (čepováním). Tímto procesem se z něj získává surový kaučuk – latex. Po čepování nastane u latexu samovolné koagulování, které je způsobeno působením bakterií. K zamezení samovolné koagulaci slouží stabilizátor, kterým bývá kyselina mravenčí [1].

#### 2.4.1.2. Polysacharidy

Jedná se o přírodní polymery, které tvoří mnoho navzájem spojených molekul monosacharidů. Mezi nejdůležitější patří glukóza, celulóza a škrob.

- **Celulóza**

Celulóza je hlavní stavební látkou rostlinných primárních buněčných stěn. Je proto obsažena především v bavlně a dřevu. Bavlna obsahuje v suchém stavu 90 % celulózy a dřevo přibližně 50 %. Jedná se o látku netavitelnou a nerozpustnou. Její nerozpustnost je z důvodu dlouhých nerozvětvených řetězců, spojené  $\beta$  vazbou.

- **Škrob**

Škrob je zásobní látka, vyskytující se v některých rostlinách (brambory, obilí, rýže), ve formě škrobových zrn. Skládá se ze dvou polysacharidů – lineární amyloza rozpustná v horké vodě a rozvětveného amylopektinu ve vodě nerozpustného. Škrob snadno podléhá hydrolyze, oxidaci, tepelnému a mechanickému odbourávání.

#### 2.4.1.3. Bílkoviny

Bílkoviny patří mezi nejdůležitější přírodní látky, které jsou součástí všech živých buněk. Bílkoviny lze rozdělit podle tvaru molekul na vláknité a globulární [1].

- **Vláknité bílkoviny**

Jedná se o konstrukční materiál těl živočichů, podobně jako celulóza u těl rostlin, který je nerozpustný ve vodě. Mezi zástupce vláknitých bílkovin lze zařadit keratin (ve vlasech, nehtech), fibroin (v přírodním hedvábí), kolagen (ve vazivových a pojivých tkáních) a myosin (ve svalovině).

- **Globulární bílkoviny**

Globulární bílkoviny jsou naopak ve vodě rozpustné. Jedná se především o arachin, albumin, kasein a zein.

## 2.4.2. Syntetické polymery

Syntetické polymery vznikají chemickou syntézou, tudíž se v přírodě nevyskytují. Patří sem termoplasty, termosety, syntetické kaučuky [1].

#### 2.4.2.1. Termoplasty

Termoplasty jsou polymery obsahující sekundární vazby mezi molekulovými řetězci, které lze tepelným účinkem uvést do plastického stavu ze stavu tuhého a tato změna je vratná. Mezi zástupce termoplastů lze zařadit polyethylen (PE), polypropylen (PP), polyvinylchlorid (PVC) a polystyren (PS) [1].

#### 2.4.2.2. Termosety

Reaktoplasty, neboli termosety, jsou látky obsahující primární a sekundární vazby mezi molekulovými řetězci. Jedná se o polymery, které nevratnou chemickou reakcí přecházejí z lineárního do síťovaného stavu. Tyto látky po přidání vytvrzovacího prostředku, nebo po zahřátí, přecházejí do nerozpustného a netavitelného stavu a tím ztrácí svůj termoplastický charakter. Patří sem například fenoplasty, aminoplasty, epoxidové pryskyřice a silikonové pryskyřice [1].

#### 2.4.2.3. *Elastomery*

Jedná se o polymery, které jsou chemicky zesíťované vulkanizačním procesem. Tato bakalářská práce se zabývá vzorky membrán, jejichž materiál patří právě mezi elastomery. Z tohoto důvodu je pro elastomery věnována celá další kapitola [1].

## 3. Elastomery

Elastomery obsahují dlouhé molekulové řetězce. Vyznačují se takovou vlastností, že ve velkém rozsahu deformací se nevyskytuje významná plastická deformace, zatímco u termoplastů ano. U pryskyřic naopak nedosáhneme takových deformací, lehce prasknou. Elastomery umožňují vulkanizaci, která probíhá při teplotách 150 až 200 °C. [19] Řídké zesíťování probíhá za přítomnosti vulkanizačního činidla, z tohoto důvodu se proces nazývá vulkanizace.

Nejběžněji se jako vulkanizační činidlo využívá síra.

Nejdůležitější vlastnosti, které vykazují materiály z elastomeru jsou:

- Teplota skelného přechodu  $T_g$  (glass transition temperature). Jedná se o teplotu, při které se mění materiál z kaučuku na materiál ve sklovitém stavu.
- Viskozita, která charakterizuje schopnost dalšího zpracování materiálu.
- Vulkanizace umožňuje vytvoření vazeb mezi sousedními molekulami a tím způsobí vznik pryže, která je schopna odolat vysokým deformacím při zatěžování v tahu [1][9].

Nejvýznamnější skupinu elastomerů tvoří kaučuky, což jsou nesíťované polymery, vyznačující se velkou pružností. Jsou to obvykle amorfní polymery s dostatečně nízkou teplotou skelného přechodu. Kaučuky jsou základní surovinou pro výrobu pryží. Pryž se z kaučuků získává pomocí procesu vulkanizace, která vede ke vzniku disulfidických můstků mezi makromolekulami kaučuku a tím vytvoří trojrozměrné polymerní síť [1][9].

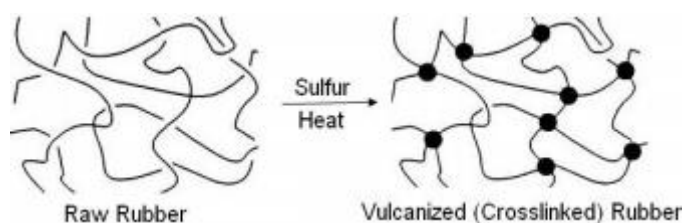
### 3.1. Vulkanizace (síťování, cross-linking)

Během vulkanizace dochází ke vzniku příčných vazeb mezi řetězci kaučukových molekul a tím k přechodu částečně plastické nevulkanizované kaučukové směsi v rozměrově stálý elastický materiál (vulkanizát) [1].

Vulkanizace, probíhá při ohřevu kaučukové směsi na vhodnou teplotu za určitou dobu (30 minut) a také při určitém tlaku. Tlak zabraňuje vzniku nežádoucích pórů ve výsledném produktu a také zabraňuje vypařování vody. Při vulkanizaci probíhají chemické reakce mezi kaučukem a dalšími složkami kaučukové směsi a koncentrace vulkanizačního činidla postupně klesá až na téměř nulovou hodnotu [1].

Vulkanizace je jedním z klíčových procesů, při kterém vznikne výsledný produkt vulkanizát neboli pryž. Při tomto procesu se vytvoří síťovaná struktura pryže, která vznikne pomocí reakce vulkanizačního činidla s kaučukem. Vznikne tak prostorová síť, ve které jsou makromolekulární řetězce kaučuku pospojovány chemickými příčnými vazbami. Vytvořením prostorové sítě se zamezí volné pohyblivosti původních kaučukových molekul a tím způsobí nerozpustnost kaučuku v rozpouštědlech, vzroste pevnost kaučuku a také se zlepší odolnost proti trvalé deformaci [1].

Vulkanizací nenasycených kaučuků s velkými koncentracemi síry lze změnit povahu polymeru, např. zvýšení teploty skelného přechodu a částečné zachování termoplasticity [1][9].



Obr. 5 Zesíťování polymeru [10]

## 3.2. Základní dělení kaučuků

Základní dělení kaučuků spočívá v jejich vlastnostech, které po následném zpracování vykazují. V této bakalářské práci vyjmenuji základní z nich a blíže popíšu materiály tvořící pryžové membrány, které byly použity pro experiment, což jsou o materiály SBR a EPDM.

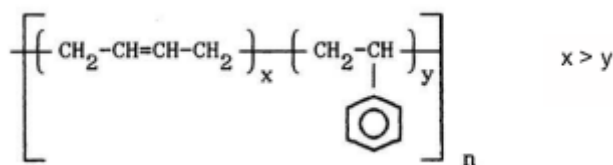
### 3.2.1. Kaučuky pro všeobecné použití

Kaučuky z této skupiny lze použít na většinu běžných pryžových výrobků. Nevýhodou těchto kaučuků je jejich nepolárnost, která způsobuje bobtnání materiálu při styku s olejem a rozpouštědlem [1].

- **BR (Butadien rubber) – Butadienový kaučuk**

Jedná se o kaučuk, který je vyráběn pomocí roztokové polymerace s obsahem od 95 do 98 % monomerních jednotek o konfiguraci cis-1,4. Roztoková polymerace probíhá za přítomnosti Zieglerových-Nattových katalyzátorů. Jejich vulkanizáty vynikají vysokou odolností vůči oděru, proto se přidává do směsí, kde je tato vlastnost důležitá např. v automobilovém průmyslu [1].

- **SBR (Styren-butadien rubber) – Butadienstyrenové kaučuky**



Obr. 6 Butadienstyrenový kaučuk (SBR) [1]

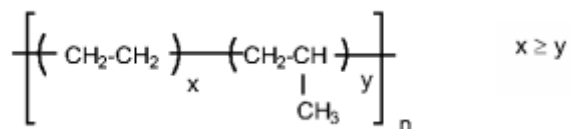
Jedná se o statistické kopolymery, jejichž řetězce jsou tvořeny nepravidelně, nahodile se střídajícími monomery. Obsahující většinou 23 až 25 % styrenu a zároveň se také jedná o nejpoužívanější druh syntetického kaučuku [1].

Výrobu lze zajistit pomocí studené polymerace, což je radikálová emulzní kopolymerace při teplotě 5 °C, anebo roztokovou kopolymerací. Pomocí roztokové kopolymerace dosáhneme horší zpracovatelnosti z důvodu absence organických kyselin. Touto metodou se vyrábí vysokostyrenové SBR, které se dále dělí na samoztužené elastomery a butadienstyrenové pryskyřice. Samoztužené

elastomery se nejčastěji používají jako základní elastomer v kaučukové směsi. Butadienstyrenové pryskyřice se nejčastěji využívají jako ztužující organická plniva o malé hustotě [1].

Z důvodu nepraktických fyzikálně-mechanických vlastností, je zapotřebí použít ztužující plniva.

- **EPDM (ethylen-propylen-dy-en-monomer) – Ethylenpropylenové kaučuky**



Obr. 7 Ethylenpropylenové kaučuky (EPDM) [1]

Jedná se o kaučuk, který je charakteristický svou nízkou teplotou zesklnění, což nám zaručí výborné dynamické vlastnosti materiálu. EPDM kaučuky lze vyrobit pomocí Zieglerových – Nattových katalyzátorů při roztokové kopolymeraci.

Nasycenost řetězců makromolekul způsobí odolnost vůči degradaci materiálu. Obsah dienu, díky němuž roste rychlost vulkanizace, se pohybuje v rozmezí od 5 až 10 %. EPDM lze vulkanizovat nejen sírou, ale také pryskyřicí a peroxidy. Pryskyřice a peroxidy se používají v případě, kdy mají vulkanizáty vykazovat vysokou tepelnou odolnost a malou trvalou deformaci. Ethylenpropylenové kaučuky vykazují vysokou odolnost vůči stárnutí, proto se většinou využívají k opláštění kabelu a střešní krytiny [1].

Maximální teplota se pro dlouhodobé použití EPDM materiálu uvádí 126 až 150°C. Stejně jako NR a SBR, tak i EPDM vykazuje nízkou odolnost proti nepolárním kapalným uhlovodíkům. Vykazuje také o něco vyšší odolnost proti kyselinám a zásadám, než je tomu u NR a SBR [1].

### 3.2.2. Olejovzdorný kaučuk

Polarita těchto kaučuků je hlavní prvek, kterým se zásadně liší od kaučuků pro všeobecné použití. Čím více je olej polárnější, tím polárnější musí být kaučuk, jež má snést daný olej [1].

- **CR-Chloroprenový kaučuk**

Tento kaučuk se vyrábí převážně pomocí emulzní polymerace a podle způsobu regulace molekulové hmotnosti rozlišujeme dva základní typy: G a W [1].

- Typ G je kaučuk modifikovaný sírou a tetramethylthiuramdisulfidem. Je ideální pro podmínky dynamického namáhání.
- Typ W je modifikovaný thioley, což představuje stejný způsob regulace molekulové hmotnosti jako u butadienstyrenového kaučuku. Směsi jsou méně lepkavé, jejich vulkanizáty mají vysokou odolnost proti stárnutí za tepla a vykazují také dobrou trvalou deformaci.

Vyznačuje se vysokou elasticitou, malou hořlavostí, vysokou odolností proti stárnutí a povětrnostním vlivům [1].

- **NBR-Butadienakrylonitrilové kaučuky**

Charakterizujícím prvkem tohoto kaučuku je odolnost proti bobtnání v minerálních olejích a nepolárních rozpouštědlech a také odolnost proti vysokým teplotám. Jejich olejovzdornost je závislá na obsahu akrylonitrilu, který také snižuje velikost mrazuvzdornosti a zvyšuje odolnost nepropustnosti plynů [1].

### 3.2.3. Teplovzdorný kaučuk

Teplovzdorný kaučuk se vyznačuje svojí odolností vůči teplotním změnám, které mohou být v rozmezí -90 °C až 200 °C, přičemž se vlastnosti pryže nijak zásadně nemění.

- **Silikonové kaučuky**

Ačkoliv je silikonový kaučuk odolný vůči teplotním změnám, problém u něj nastává ve vlhkém prostředí, v němž za zvýšených teplot podléhá hydrolyze. Základním polymerem je polydimethylsiloxan (MQ), který se používá do licích, nátěrových a tmelových směsí. Nejpoužívanější silikonový kaučuk je vynilmethylpolysiloxan (VMQ), který se vyznačuje lepší tepelnou stabilitou, než má typ MQ [1].

## 4. Způsoby zpracování polymerů

Pro následné využití polymerů je potřeba materiál zpracovat. Ke zpracování se využívá řada technologií, které jsou závislé na technologických vlastnostech polymeru a také na vlastnostech výsledného produktu, které má splňovat. Zpracovatelské technologie můžeme rozdělit na tvářecí, tvarovací a doplňkové technologie. Z důvodu výroby membrán pro bakalářskou práci, se budu zabývat detailněji pouze technologiemi lisování a vstřikování.

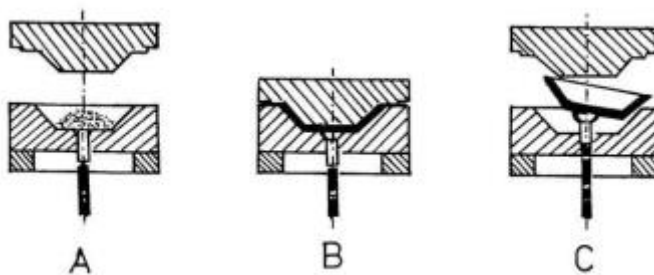
### 4.1. Tvářecí technologie

Tvářecí technologie spočívá ve zpracování polymeru v plastickém stavu, kdy dochází k přemísťování částic materiálu. Výhodou termoplastů je, že při tvářeni nevznikají žádné chemické reakce, které by měly vliv na strukturu materiálu. Avšak musí být po tvářeni ochlazen, aby nedošlo po vyjmutí z formy k následné nežádoucí deformaci. Reaktoplasty a kaučukové směsi ztrácí kvůli zesíťovací reakci schopnost termoplasticity. Polymery se tváří nad jejich teplotami toku a při přechodu z plastického stavu do tuhého změní svůj objem [1].

#### 4.1.1. Lisování

Jedná se o nejstarší zpracování polymerů, které vzniká při zvýšených teplotách a tlacích. Jedná se o diskontinuální proces, při kterém se vulkanizace kaučukové směsi provádí teple ve formě. Délka výrobního cyklu při lisování závisí především na kinetice vulkanizace a na průběhu ohřevu kaučukové směsi. Rozlišujeme lisování vysokotlaké, které se uskutečňuje při tlacích nad 3 MPa a nízkotlaké [1].

Vysokotlaké lisování může být přímé, rázem anebo nepřímé, tzv. přetlačování. Pro vysokotlaké přímé lisování se používá nejčastěji hydraulický lis, ve kterém je umístěna lisovací forma. Zpracování termoplastů probíhá s výchozím materiálem ve formě prášku, aglomerátu nebo granulátu, při přímém lisování.



Obr. 8 Princip vysokotlakého přímého lisování [1]

A – plnění formy, B – vlastní lisování, C – vyjímání vylisku z formy

Při přetlačování, které se ve většině případů používá pro reaktoplasty a kaučukové směsi, je forma na začátku celého procesu uzavřena a materiál, který byl před celým procesem zahřát na určitou teplotu, do ní vtéká určitou rychlostí [1].



Výhodou přetlačování je menší opotřebení tvárnice formy, díky plastickému stavu materiálu, který se přivede do formy. Kromě této výhody jsou tu dále přesnější rozměry. Nevýhodou tohoto zpracování je složitější forma a větší spotřeba lisovací hmoty.

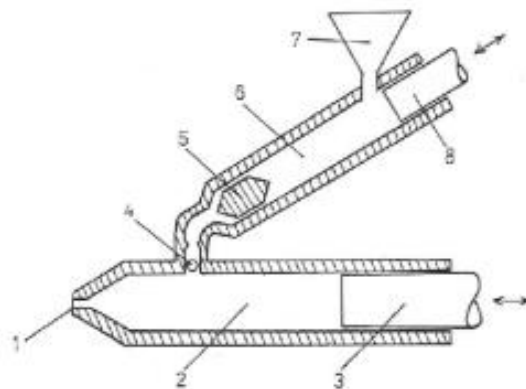
Nízkotlaké lisování se využívá hlavně ke zpracování reaktoplastů a vyztužených polyesterů. Využívá se lisování s pevnými formami, anebo pomocí pružných dílců [1].

#### 4.1.2. Vstřikování

Tento způsob zpracování se velice podobá přetlačování s tím rozdílem, že před procesem se materiál nachází v tavné komoře a ta je oddělena od tvárnice formy. Jedná se o hlavní způsob zpracování termoplastů, která umožňuje produkovat kvalitní a rozměrově dostatečně přesné výrobky.

Proces vstřikování je zahájen uzavřením dutiny formy a následným přisunutím vstřikovací jednotky do výchozí polohy, kde nastane rychlé přemístění materiálu do dutiny formy. Materiál pod vysokým tlakem začne tuhnout a cyklus pokračuje dalším postupným doplňováním vstřikovací komory [1].

Kaučuková směs může být vstřikována do formy pomocí dopředného pohybu šneku nebo pomocí pístu. Vysoká vstřikovací rychlost působí velký disipační ohřev směsi ve vstřikovacích kanálcích.



Obr. 9 Schéma pístového vstřikovacího stroje s pístovou předplastikací

1-tryska, 2-vstřikovací válec, 3-vstřikovací píst, 4-zpětný ventil, 5-torpédo plastikačního válce, 6-plastikační válec, 7-násepka, 8-plastikační píst [1]



Obr. 10 Vstřikovací cyklus [11]

## 4.2. Tvarovací technologie

Materiály jsou při tomto způsobu zpracování v kaučukovitém nebo tuhém stavu.

### 4.2.1. Za zvýšené teploty

Polymerní materiál se nejprve zahřeje na určitou teplotu a poté se zpracovává. Možností, jak tento materiál zpracovat je několik. Jedna z možností je mechanickým tvarováním raznicí, pozitivním vakuovým tvarováním, negativním vakuovým tvarováním.

### 4.2.2. Za běžné teploty

Lze také označit jako tvarování za studena.

## 5. Matematický popis nelineární mechaniky kontinua

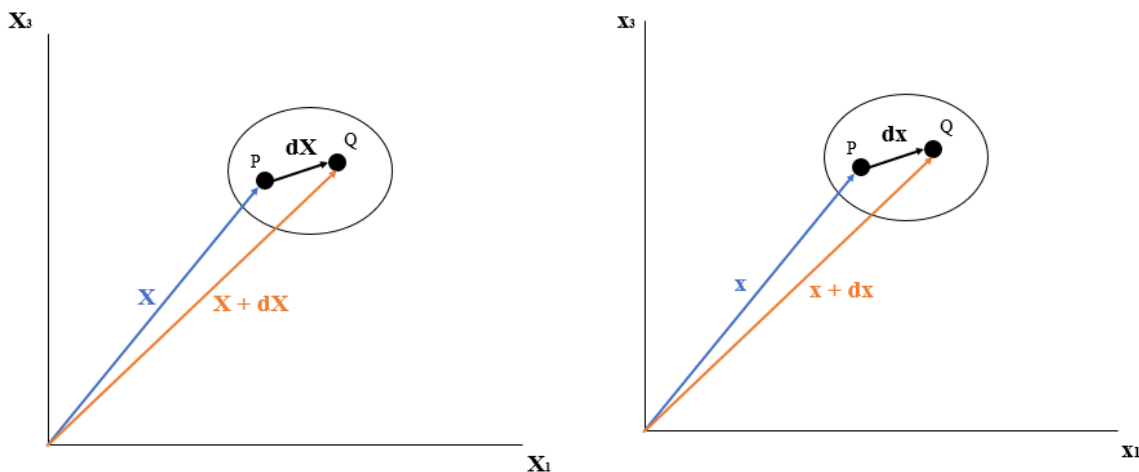
Nelineárního popisu materiálu využíváme pro tělesa a látky, které vykazují velké deformace nebo u nich nepozorujeme přímou úměru mezi stavem napjatosti a stavem deformace. Nelinearitu lze rozdělit na dva typy [25]:

- Geometrická nelinearita, jejímž zdrojem jsou velké posuvy, deformace a rotace.
- Materiálová nelinearita, jejímž zdrojem je nelineární závislost mezi napětím a deformací

### 5.1. Kinematika konečných deformací

V geometricky nelineární analýze se využívají dva typy souřadnic, které lze vidět na obr. 11. Materiálové  $X$  (Lagrangeovy) a prostorové  $x$  (Eulerovy). Všechny souřadnice jsou definovány pomocí kartézské vektorové báze. Posuv bodu v prostoru lze pak definovat pomocí vztahu:

$$u(X) = x - X \quad (5.1)$$



Obr. 11 Počáteční a přetvořená konfigurace tělesa

#### • Deformační gradient $\mathbf{F}$

Deformační gradient  $\mathbf{F}$  je lineární zobrazení, které převádí  $d\mathbf{X}$  na  $d\mathbf{x}$ , kde  $d\mathbf{X}$  značí diferenciální vektor před deformací a  $d\mathbf{x}$  diferenciální vektor po deformaci. Při jeho výpočtu lze postupovat dle (5.2).

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \quad (5.2)$$

Jakožto zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory  $\{d\mathbf{X}\}$ ,  $\{d\mathbf{x}\}$  představuje deformační gradient  $\mathbf{F}$  tenzor druhého řádu a platí rovnice (5.3).

$$dx_i = F_{iK} dX_K \quad (5.3)$$

Deformační gradient  $\mathbf{F}$  pro  $i, K = 1, 2, 3$ . má devět nezávislých složek.

Z důvodu podmínky, že objem zdeformovaného tělesa musí být kladný, je nutné, aby

$$J = \det|\mathbf{F}| > 0 \quad (5.4)$$

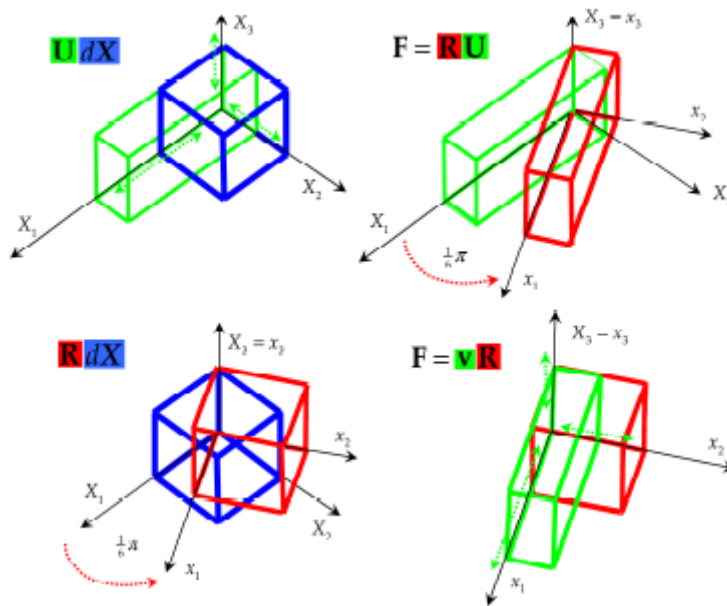
Kde  $J$  lze interpretovat jako:

$$J = \frac{dv}{dV} \quad (5.5)$$

Kde  $dV$  vyjadřuje objem nekonečně malého elementu před deformací a  $dv$  po deformaci. Pro nestlačitelné materiály předpokládáme izochorickou deformaci, pro kterou platí  $J = 1$ .

Deformační gradient v sobě nese informaci nejen o změně délek elementu, ale také o jeho natočení. Deformační gradient lze rozdělit na rotaci vyjádřenou tenzorem rotace  $\mathbf{R}$  a deformaci popsanou pravým streč tenzorem  $\mathbf{U}$  nebo levým streč tenzorem  $\mathbf{v}$ . Vztahy mezi  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{v}$  popisuje věta o polárním rozkladu (5.6). Platí, že  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{v}$  jsou symetrické, pozitivně definitní a rozklad existuje jednoznačně. [26][25]

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R} \quad (5.6)$$



Obr. 12 Polární rozklad deformačního gradientu  $\mathbf{F}$  [27]

Prostřednictvím polárního rozkladu lze vyjádřit další tenzory přetvoření. Jako další míry deformace, které se nazývají tenzory deformace, si lze uvést Cauchy-Greenův, Greenův-Lagrangeův, Eulerův-Almansiho a logaritmický. V této bakalářské práci popíšu pouze Cauchy-Greenovy tenzory deformace.

- **Cauchy – Greenovy tenzory deformace**

Lze ho rozdělit na dva základní tvary, které jsou definovány:

- Pravý Cauchy – Greenův:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (5.7)$$

- Levý Cauchy – Greenův:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{v}^2 \quad (5.8)$$

- **Hlavní invarianty  $\mathbf{A}$**

Páry tenzorů  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{b}$  platí, že mají stejná vlastní čísla  $\lambda$ , která nazýváme hlavní streče. Vlastní čísla pro  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{v}$  lze vyjádřit ve tvaru  $\lambda_i$  a pro  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{b}$  je lze zapsat ve tvaru  $\lambda_i^2$ , kde  $i = 1, 2, 3$ . Pomocí rovnice  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ , kterou lze zapsat ve tvaru  $\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$ , kde  $I_1, I_2, I_3$  jsou hlavní invarianty  $\mathbf{A}$ , je možné získat vlastní čísla, která tvoří kořeny kubické rovnice. Z těchto vlastních čísel je možné získat následující vztahy pro hlavní invarianty  $\mathbf{A}$ :

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (5.9)$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \quad (5.10)$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (5.11)$$

Invarianty Cauchy-Greenových tenzorů lze vyjádřit:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (5.12)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (5.13)$$

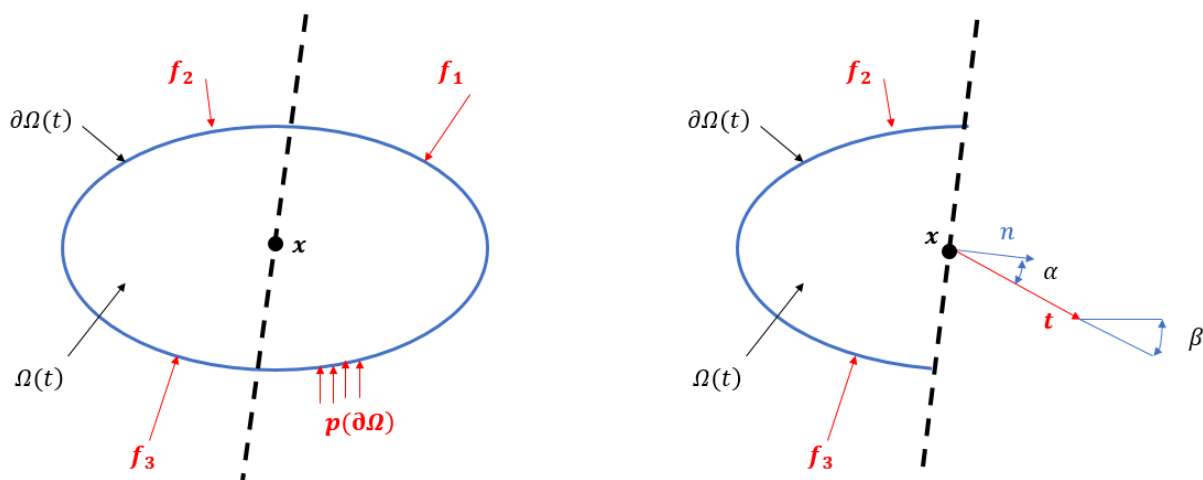
$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \quad (5.14)$$

## 5.2. Tenzory napětí

Necht' je těleso ve statické rovnováze, ve kterém mám bod  $\mathbf{x}$ . Pomyslně těleso říznu rovinou v tomto bodě, která má za svůj normálový vektor  $\mathbf{n}$ . Tak abych zajistila rovnováhu tělesa, musím zavést napěťový vektor  $\mathbf{t}$ . Vektor  $\mathbf{t}$  definuji jako:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds \quad (5.15)$$

Kde  $df$  je diferenciál silové výslednice a  $ds$  je elementární ploška v okolí bodu  $x$ . Při definici lze vycházet z obr. 13 vpravo:



Obr. 13 Těleso v původní a ve zdeformované konfiguraci [27]

- **Cauchyovo napětí  $\sigma$**

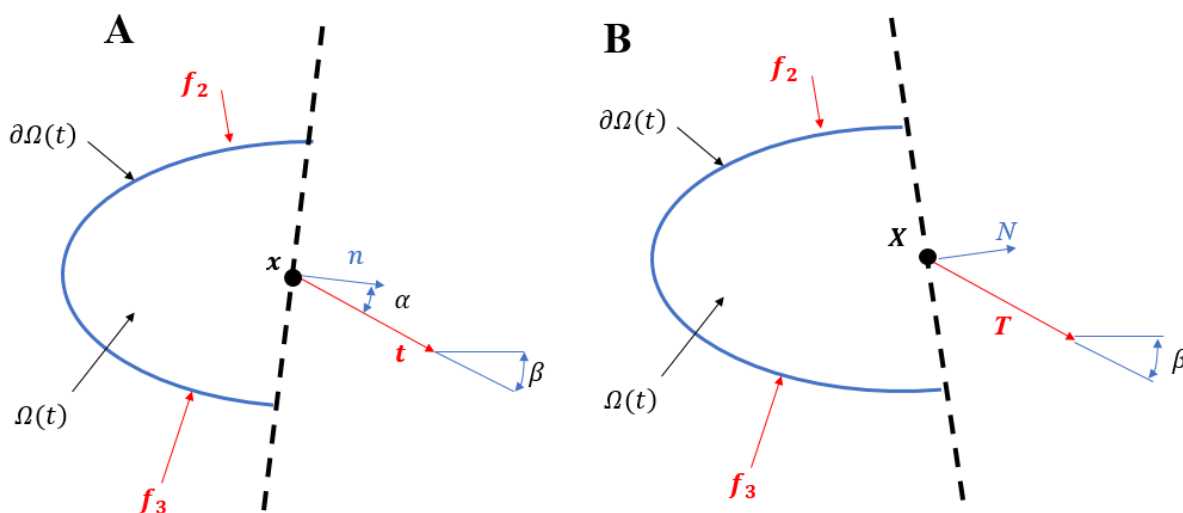
Cauchyovo napětí  $\sigma$  je transformace, která vyjadřuje vztah mezi napět'ovým vektorem  $t$  a normálou řezu  $n$ , dle obr. 13.

$$\sigma n = t \quad (5.16)$$

- **První napětí Piolovo-Kirchhoffovo  $P$  (inženýrské, nominální)**

První napětí Piolovo-Kirchhoffovo, někdy též tenzor smluvního napětí  $P$ , je na rozdíl od Cauchyova napětí vztaženo k původní nedeformované ploše  $dS$  ze vztahu (5.15)

$$df = t ds = T dS \quad (5.17)$$



Obr. 14 Metoda řezu na tělese ve statické rovnováze pro Cauchyovo napětí (A) a pro první napětí Piola-Kirchhoffovo (B) [27]

Vztah pro první napětí Piola-Kirchhoffovo  $\mathbf{P}$  bude mít tvar:

$$\mathbf{PN} = \mathbf{T} \quad (5.18)$$

Transformace mezi napětími lze nalézt v tabulce:

	$\boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{P}$
$\boldsymbol{\sigma}$		$\mathcal{J}^{-1}\mathbf{FP}$
$\mathbf{P}$	$\mathcal{J}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$	

Obr. 15 Tabulka vzájemné transformace tenzorů napětí [25]

Nechť napětí působí ve směru 11, pak lze získat vztahy (5.19) a (5.20) pro napětí při jednoosém tahu nestlačitelného materiálu.

$$P_{11} = \frac{F}{S} \quad (5.19)$$

$$\sigma_{11} = \frac{F}{s} = \frac{F}{S\lambda^{-1}} \quad (5.20)$$

Kde  $F$  je působící síla,  $S$  a  $s$  jsou plochy kolmé na směr 11 a  $\lambda = \lambda_{11}$ .

### 5.3. Materiálová nelinearita

#### 5.3.1. Konstitutivní rovnice

Jedná se o matematický předpis vyjadřující vzájemnou závislost stavových proměnných. V případě pružných těles se jedná o závislost mezi tenzorem napětí a deformace. Ve své podstatě stavové veličiny v konstitutivní rovnici zajišťují řešitelnost úloh mechaniky kontinua [27].

#### 5.3.2. Elastický materiál

Jedná se o materiál, ve kterém nedochází k disipaci energie a všechny procesy budou vratné.

- **Cauchyovská elasticita**

Materiál popisujeme Cauchyovským přístupem v případě, jestliže chování materiálu popíšeme explicitní stavovou rovnicí:

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{F}) \quad (5.21)$$

Cauchyovský přístup znamená, že se snažíme zkonstruovat přímou funkční závislost mezi složkami tenzoru deformace a napětí tak, jak je tomu např. v zobecněném Hookově zákoně při jednoosém stavu napjatosti izotropního materiálu. Symbolický zápis je uveden (5.22) a složkový zápis je uveden (5.23):

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.22)$$

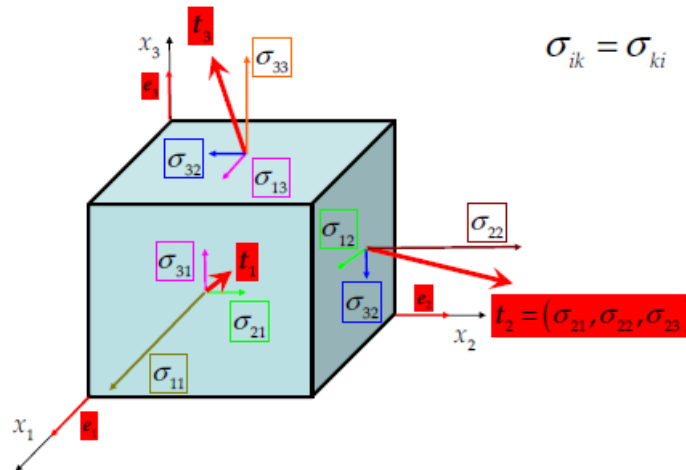
$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5.23)$$

Kde  $\mu$  je smykový modul pružnosti, který lze značit  $G$ , a  $\lambda$  je tzv. první Lamého konstanta.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.24)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.25)$$

Rozložení složek tenzoru napětí a vektorů skutečné intenzity vnitřních sil o infinitesimálním elementu je na obr. 16 značení složek tenzoru napětí [27]. Diagonální složky  $\sigma_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) nazýváme normálová napětí a mimodiagonální složky ( $\sigma_{ik}$  pro  $i \neq k$ ) smyková napětí. Kde  $i$  je směr průmětu a  $k$  je směr normály stěny krychle.



Obr. 16 Značení složek tenzoru napětí [27]

- **Hyperelasticita – Greenova elasticita**

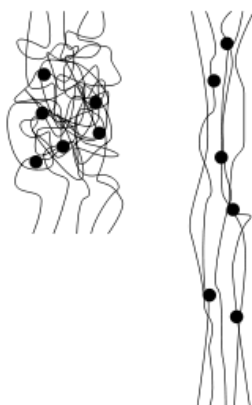
Cauchyova metoda je známá z lineární pružnosti. V nelineární pružnosti, která se snaží vyrovnat s vlastnostmi elastomerů, které vykazují veliké deformace, se tato metoda neuplatnila. Z tohoto důvodu je většina nelineárně pružných materiálů při konečných deformacích charakterizována pomocí tzv. Greenova přístupu, který nese název hyperelasticita. Greenovský přístup značí snahu zkonstruovat funkci hustoty deformační energie  $W(\varepsilon)$ , neboli hustotu vzhledem k referenčnímu objemu. Složky tenzoru napětí  $\sigma$  lze získat pomocí derivací  $W(\varepsilon)$  [27].

$$\sigma = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (5.26)$$



Nejběžnějším materiálem, který lze modelovat jako hyperelastický, je pryž. Jejich strukturu tvoří dlouhé vláknité molekuly, které jsou navzájem propojené a které jim umožňují velká, elastická přetvoření. Důsledkem těchto velkých deformací je nelinearita deformačně napět'ového chování.

Je důležité zmínit, že postulátem hyperelastivity se automaticky předpokládá ryze elastické chování materiálu, tedy zanedbávají se veškeré neelastické efekty, jako je například viskoelastické chování nebo vnitřní poškození (Mullinsův) efektu. V této bakalářské práci se budu zabývat pouze hyperelasticitou.



Obr. 17 Uspořádání molekul pryže v nezátíženém a zatíženém stavu [30]

U elastomerů v určitém rozsahu zatěžování předpokládáme nestlačitelné chování – tj. mechanické děje probíhají isochoricky. Nemění-li materiál objem, jsou jeho posuvy, na kterých by složky hydrostatické napjatosti vykonaly práci, nulové. Materiál se chová nestlačitelně, a tak pomocí operace  $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$  nelze složky hydrostatické napjatosti z  $W$  získat. A proto se při výpočtu předpokládá existence Lagrangeova multiplikátoru  $p$  a rovnice se rozšíří na rovnici (5.26) [28][27].

$$W = W(\mathbf{F}) - p(J - 1) \quad (5.27)$$

Kde  $J = 1$ .

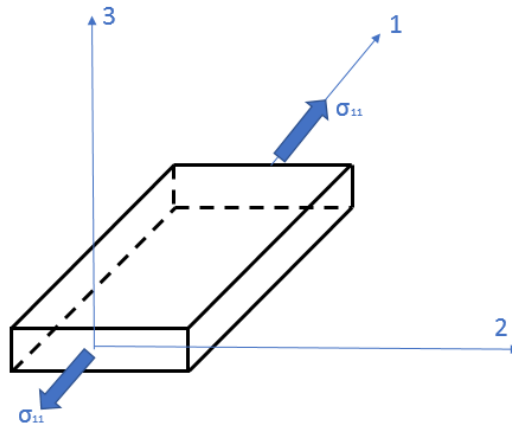
Konstitutivní rovnice jsou pak definovány vztahy:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-T} \quad (5.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p\mathbf{I} \quad (5.29)$$

Kde  $p$  je Lagrangeův multiplikátor, jehož hodnotu lze určit pomocí silové okrajové podmínky úlohy.

Pro jednoosou tahovou zkoušku, kde  $\sigma_{11} = \sigma$  je okrajová podmínka dána  $\sigma_{33} = 0$  dle obr. 18.



Obr. 18 Jednoosá tahová zkouška [27]

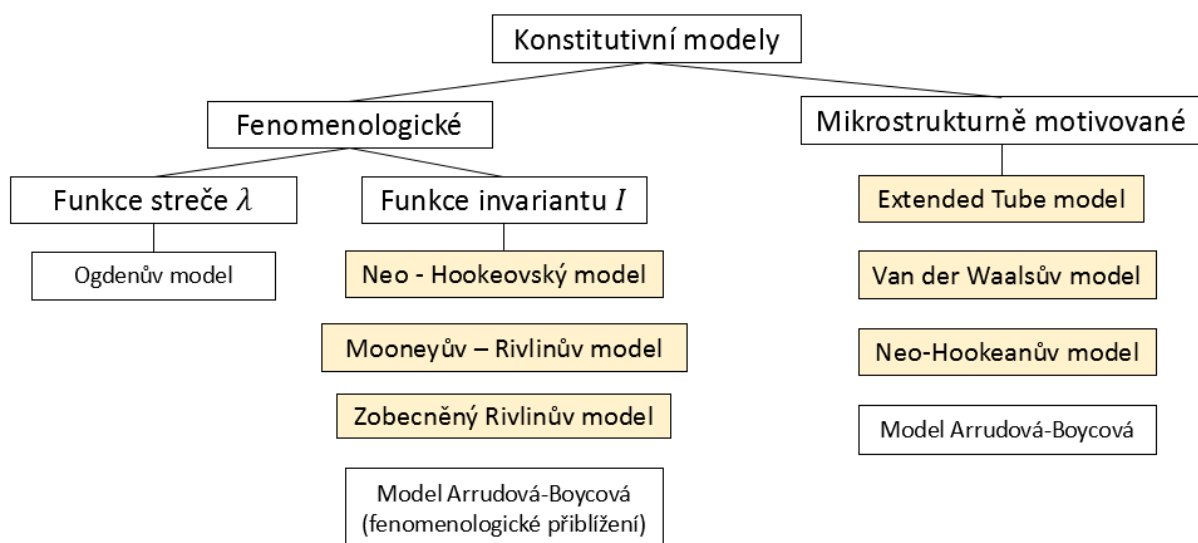
Transformací deformačních tenzorů a aplikací deformačního gradientu lze dojít ke vztahům:

$$\sigma_{33} = 0 \Rightarrow \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p = 0 \quad (5.30)$$

#### 5.4. Modely pro hustotu deformační energie $W$

Každý z modelů je založen na funkci hustoty deformační energie  $W$ , která obsahuje buď deformační invarianty anebo hlavní protažení. Hlavním cílem těchto konstitutivních vztahů je definice matematických modelů, pomocí kterých lze popsat reálné chování materiálu.

Některé hyperelastické modely jsou založeny čistě na výsledcích z mechanického testování (deformačně – napěťová odezva materiálu) a neberou ohled na vnitřní strukturu materiálu. Tyto modely lze nazvat fenomenologické. Některé hyperelastické modely berou v úvahu také vnitřní strukturu materiálu a ty lze mikrostrukturně orientované. Mohou také nést název buď molekulárně motivované anebo mikrostrukturně motivované modely [13].



Obr. 19 Přehled konstitutivních modelů pryže [29]

V této bakalářské práci se budu zabývat fenomenologickými modely, mezi které patří Mooney-Rivlinův model a Neo-Hookeovský model (bývá někdy označován i za strukturální model, dle odvození v monografii od Treloara, kde předpokládáme, že řetězce mezi sebou neinteragují). Dále se budu zabývat mikrostrukturálně motivovanými modely, mezi které patří Van der Waalsův a Extended tube model (viz. obr. 19).

Pro všechny konstitutivní modely budu dále používat pouze první Piolovo-Kirchoffovo napětí  $\mathbf{P}$ , které je vždy uvedeno ve tvaru pro jednoosý tah.

#### 5.4.1. Fenomenologické modely

Fenomenologické modely úplně abstrahují od představy o mikrostruktuře a vidí pouze fenomenologické veličiny  $\sigma$  a  $\varepsilon$  a navrhují matematické závislosti mezi  $\sigma$  a  $\varepsilon$ . Tyto modely obsahují část  $I_1$ .

- **Neo-Hookeovský model**

Jedná se o elementární model ze 40.let založený na invariantech. Lze ho interpretovat pomocí statické fyziky polymerních řetězců pro  $C_{10} = \frac{\mu}{2}$ :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad (5.31)$$

kde  $\mu$  je počáteční smykový modul pružnosti, který je definován vztahem:

$$\mu = \frac{NkT}{V} = nkT = \frac{\rho RT}{M} \quad (5.32)$$

Kde  $N$  je počet řetězců v objemu,  $V$  je objem vzorku,  $n$  je objemová hustota řetězců,  $k$  je Boltzmanova konstanta a nabývá hodnoty  $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ,  $T$  je termodynamická teplota,  $\rho$  je hustota hmotnosti,  $R$  je univerzální plynová konstanta a nabývá hodnoty  $R = 8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$ . Poslední veličina  $M$  je průměrná molární hmotnost řetězce.

V jednoosém tahu pro smluvní napětí  $P_1$ , pro nestlačitelný materiál, platí vztah (5.33). Detailní odvození se nachází v příloženém Apendixu.

$$P_1 = \mu \lambda_1 - \frac{\mu}{\lambda_1} \quad (5.33)$$

Systém odvození je pro všechny ostatní uvedené modely obdobný.

- **Mooneyův-Rivlinův model**

Jedná se o model, který je založen na lineární funkci prvního invariantu  $I_1$  a na lineární funkci druhého invariantu  $I_2$ . Model lze vyjádřit pomocí dvou materiálových konstant  $C_{10}$  a  $C_{01}$ , tento model používají konečno-prvkové softwary.

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_2 - 3) \quad (5.34)$$

V této bakalářské práci jsem však pracovala v programu Maple s upraveným vztahem ve tvaru:

$$W = \frac{\mu}{2} [\alpha(I_1 - 3) + (1 - \alpha)(I_2 - 3)] \quad (5.35)$$

$\mu$  a  $\alpha$  v tomto vztahu značí materiálové konstanty.

Je patrné z rovnic (5.34) a (5.35), že materiálové parametry v konečno-prvkových softwarech po kombinaci s upraveným vztahem, který jsem použila ve výpočtech v programu Maple, budou mít tvar:

$$C_{10} = \frac{1}{2} \mu \alpha \quad (5.36)$$

$$C_{01} = \frac{1}{2} \mu (1 - \alpha) \quad (5.37)$$

Ze vztahu (5.28) lze získat pro jednoosý tah nestlačitelného materiálu vztah:

$$P_1 = \alpha \mu \lambda_1 + (1 - \alpha) \mu - \alpha \mu \lambda_1^{-2} + (1 - \alpha) \mu \lambda_1^{-3} \quad (5.38)$$

#### 5.4.2. Mikrostrukturně motivované modely

Mikrostrukturně motivované modely při návrhu výrazu pro hustotu deformační energie  $W$ , nějakým způsobem zohledňují představy o struktuře materiálu a o způsobu, jakým se deformuje. Např. dochází k interakci mezi řetězci a řetězce se mezi sebou navzájem nemohou deformovat.

- **Van der Waalsův model**

Tento model navržen v 80. letech je též známý jako Kilianův [31]. Lze ho vyjádřit pomocí rovnice:

$$W = -(\lambda_m^2 - 3) \mu \ln(1 - \eta) - (\lambda_m^2 - 3) \mu \eta - \mu \frac{\sqrt{2}}{6} a ((1 - \beta) I_1 + \beta I_2 - 3)^{3/2} \quad (5.39)$$

$$\text{Kde } \eta = \sqrt{\frac{(1 - \beta) I_1 + \beta I_2 - 3}{(\lambda_m^2 - 3)}}$$

Kde  $\beta$ ,  $a$ ,  $\mu$  a  $\lambda_m$  jsou materiálové parametry. Parametry  $a$ ,  $\mu$  mají fyzikální rozměr hustoty energie  $\text{J} \cdot \text{mm}^{-3}$ , neboli MPa. Parametry  $\beta$  a  $\lambda_m$  jsou bezrozměrné.

Po úpravách dostaneme konečný vztah pro  $W$  :

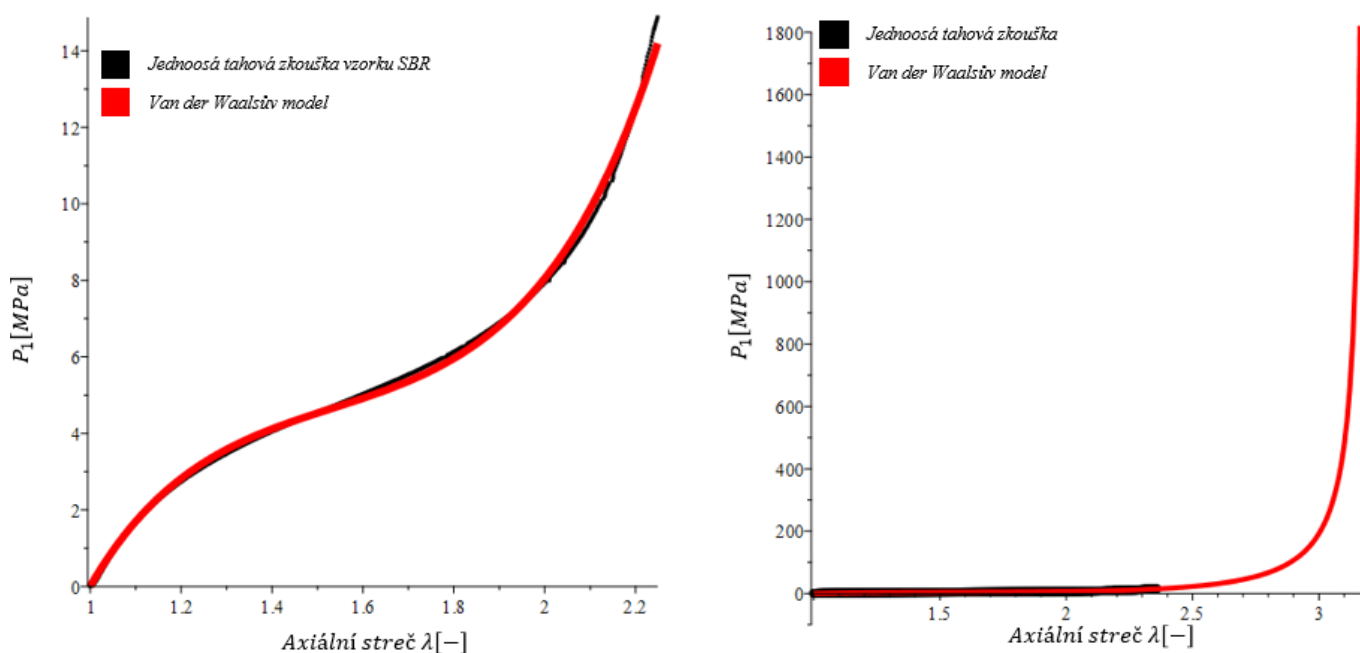
$$W = -Jm\mu \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{(\lambda_m^2 - 3)}} \right) - \sqrt{\frac{(1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{(\lambda_m^2 - 3)}} Jm\mu - \mu \frac{\sqrt{2}}{6} a((1-\beta)I_1 + \beta I_2 - 3)^{\frac{3}{2}} \quad (5.40)$$

Kde  $Jm = (\lambda_m^2 - 3)$ .

Ze vztahu (5.28) lze získat pro jednoosý tah nestlačitelného materiálu vztah:

$$P_1 = \frac{(2\beta\sqrt{\lambda_1} + (-1+\beta)\lambda_1^3 - 2\beta\lambda_1^2 - \beta + 1) \left( 4 + \left( -1 + \sqrt{-\frac{(\lambda_1 - 1)^2((-1+\beta)\lambda_1^2 - 2\lambda_1 - \beta)}}{\lambda_1^2(\lambda_m^2 - 3)}} \right) a\sqrt{2} \sqrt{-\frac{(\lambda_1 - 1)^2((-1+\beta)\lambda_1^2 - 2\lambda_1 - \beta)}}{\lambda_1^2}} \right) \mu}{2\lambda_1^2 \left( -1 + \sqrt{-\frac{(\lambda_1 - 1)^2((-1+\beta)\lambda_1^2 - 2\lambda_1 - \beta)}}{\lambda_1^2(\lambda_m^2 - 3)}} \right)} \quad (5.41)$$

Vlastnost tohoto modelu ovlivňuje hodnota, kterou ovlivňuje materiálový parametr  $\lambda_m$  (locking stretch – konečná protažitelnost) nacházející se v logaritmu v rovnici. Tato hodnota je maximální hodnota streče, do které je tento model funkční. Pokud překročí tuto mez, nastává případ, jako na obr. 20 vpravo.

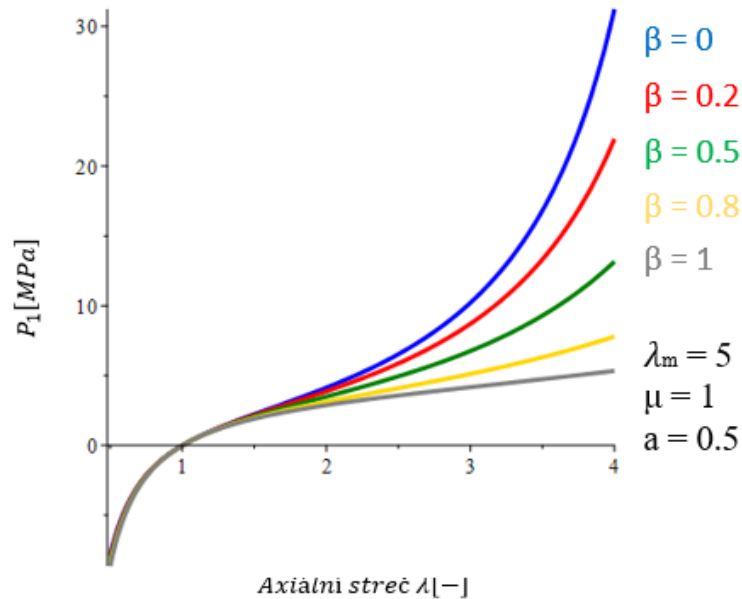


Obr. 20 Predikce modelu (vlevo) a překročení meze  $\lambda_m$  (vpravo) pro Van der Waalsův model

Materiálové parametry pro případ na obr. 20 vpravo odpovídají hodnotám  $a = 2.85$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\lambda_m = 3.28$  a  $\mu = 3.1$  MPa.

Další vlastností tohoto modelu je variabilita materiálových parametrů, která také může ovlivnit proces regresní analýzy. Jako příklad lze uvést variabilitu parametru  $\beta$ , u kterého jsem pro tento případ

volila hodnoty 0 až 1. Materiálové parametry  $\lambda_m = 5$ ,  $\mu = 1$  a  $a = 0.5$  jsem ponechala konstantní a vyšel graf jako na obr. 21.



Obr. 21 Ukázka variability aproximace pomocí Van der Waalsova modelu

- **Extended Tube model**

Extended Tube model je jeden z nejmladších modelů, který byl zformulován v roce 1999. Model obsahuje části (5.43). Tyto části lze interpretovat jako část, obsahující neinteragující řetězce, které zaujímají libovolné konformace a neovlivňují se navzájem ( $W_e$ ), a část cross-linkovací, která zohledňuje zesíťování materiálu ( $W_c$ ). Tuto teorii představili autoři jako Flory, Ermann, Mark a Edwards teorii o omezení vazby ze vztahu (5.43).

$$W = W_c + W_e \quad (5.43)$$

Pro  $W_c$  je vztah:

$$W_c = \frac{G_c}{2} \left[ \frac{(1-\delta^2)(I-3)}{1-\delta^2(I-3)} + \ln(1-\delta^2(I-3)) \right] \quad (5.44)$$

Kde  $I = I_1$ .

Spojením vztahů vyplývá rovnice pro deformační energii:

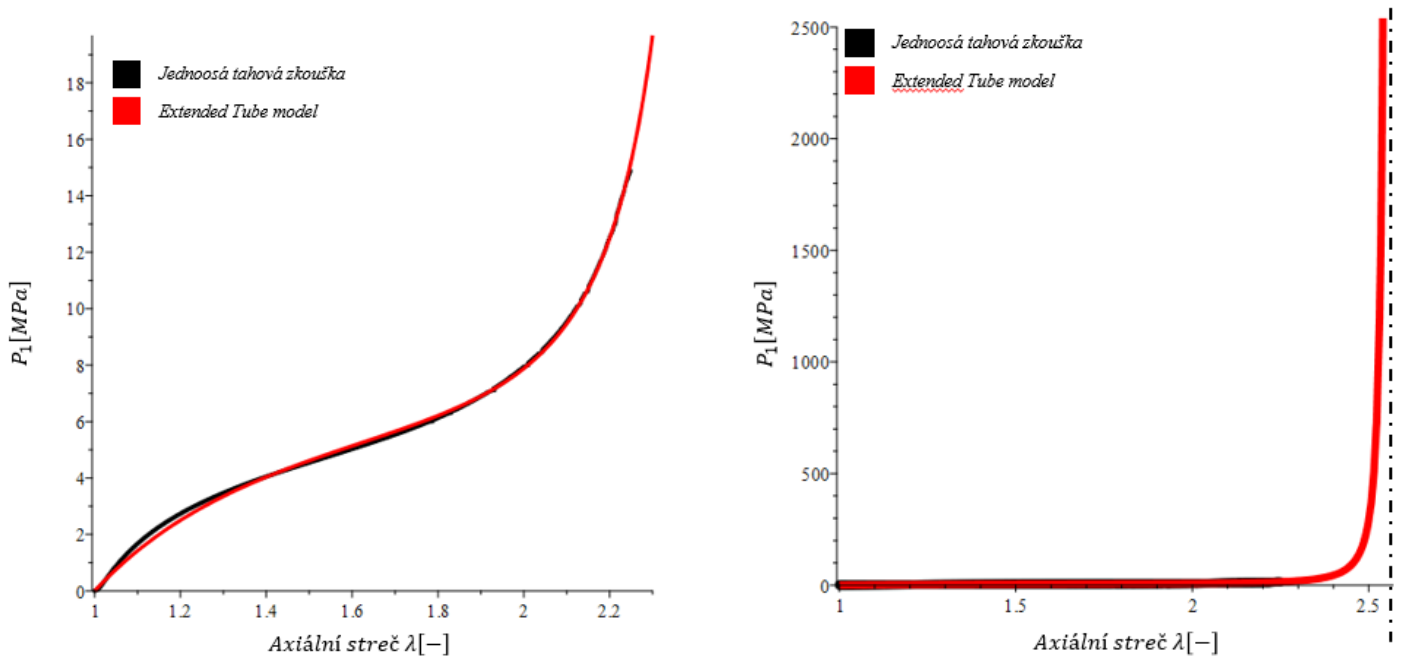
$$W = \frac{G_c}{2} \left[ \frac{(1-\delta^2)(I-3)}{1-\delta^2(I-3)} + \ln(1-\delta^2(I-3)) \right] + \frac{2G_e}{\beta^2} \sum_{A=1}^3 (\lambda_A^{-\beta} - 1) \quad (5.45)$$

Kde  $G_c, G_e, \beta$  a  $\delta$  jsou materiálové parametry. Parametry  $G_c, G_e$  mají fyzikální rozměr hustoty energie  $W J \cdot mm^{-3}$ , neboli MPa. Parametry  $\beta$  a  $\delta$  jsou bezrozměrné. [22]

Ze vztahu (5.28) lze získat pro jednoosý tah nestlačitelného materiálu vztah:

$$P_1 = \frac{2(\delta^2\lambda^3 + (-3\delta^2 - 1)\lambda + 2\delta^2)^2 G_e \lambda^{\frac{\beta}{\lambda}} - 2(\delta^2\lambda^3 + (-3\delta^2 - 1)\lambda + 2\delta^2)^2 G_e \lambda^{-\beta} + (\lambda - 1)\beta(\lambda^3\delta^4 + (-3\delta^4 - 2\delta^2 + 1)\lambda + 2\delta^4)G_c(\lambda^2 + \lambda + 1)}{\beta(\delta^2\lambda^3 + (-3\delta^2 - 1)\lambda + 2\delta^2)^2 \lambda} \quad (5.46)$$

Vlastnost Extended Tube modelu ovlivňuje stejně jako u Van der Waalsova modelu hodnota, která je ovlivněna přítomností  $\delta$  v logaritmu. Pokud tato hodnota překročí určitou mez, nastává případ, jako vpravo na obr. 22:



Obr. 22 Predikce modelu (vlevo) a překročení meze  $\delta$  (vpravo) pro Extended Tube model

Materiálové parametry pro případ na obr. 22 vpravo odpovídají hodnotám  $\delta = 0.48$ ,  $\beta = 0.2$   $G_c = 0.71$  MPa,  $G_e = 5.09$  MPa.

## 6. Experimentální část

Experimentální měření lze realizovat na zkušebních strojích určených pro jednoosou (uniaxiální), dvouosou (biaxiální) tahovou zkoušku nebo pro čistý smyk. Výsledky z těchto měření lze poté použít pro přesnou aproximaci charakteristiky chování daného materiálu při zatěžování.

V této bakalářské práci jsem se zaměřila na jednoosou tahovou zkoušku, která probíhá pomocí univerzálních zkušebních strojů (trhací stroje). Podstatou zkoušky je protahování zkušební vzorku pryže konstantní rychlostí (1 mm/s) v jednom směru, přičemž se odečítají hodnoty síly a prodloužení pomocí dvou značek umístěných na vzorku.

### 6.1. Jednoosá tahová zkouška

Během jednoosé tahové zkoušky působí na vzorek materiálu pouze tahová síla ve směru jediné osy. Předpokládám, že během jednoosé tahové zkoušky, je jednoosá napjatost. To znamená, že tenzor  $P$  má tvar: [11]

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To je doprovázeno deformací, kterou lze vyjádřit pomocí vztahů (6.1) a (6.2) a je zobrazena na obr. 23:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (6.1)$$

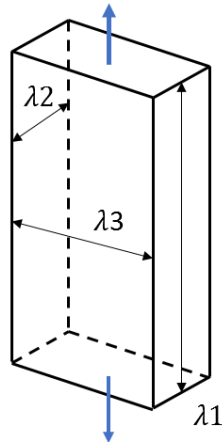
$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Kde:

$$\lambda_1 = \lambda = \varepsilon + 1 \quad (6.3)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (6.4)$$





Obr. 23 Jednoosá napjatost

Z těchto podmínek vyplývá vztah pro smluvní napětí  $P$  [31]:

$$P = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{1}{\lambda} \right) \quad (6.5)$$

Pro jednoosou napjatost tedy získáme první a druhý deformační invariant:

$$I_1 = \lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1} \quad (6.6)$$

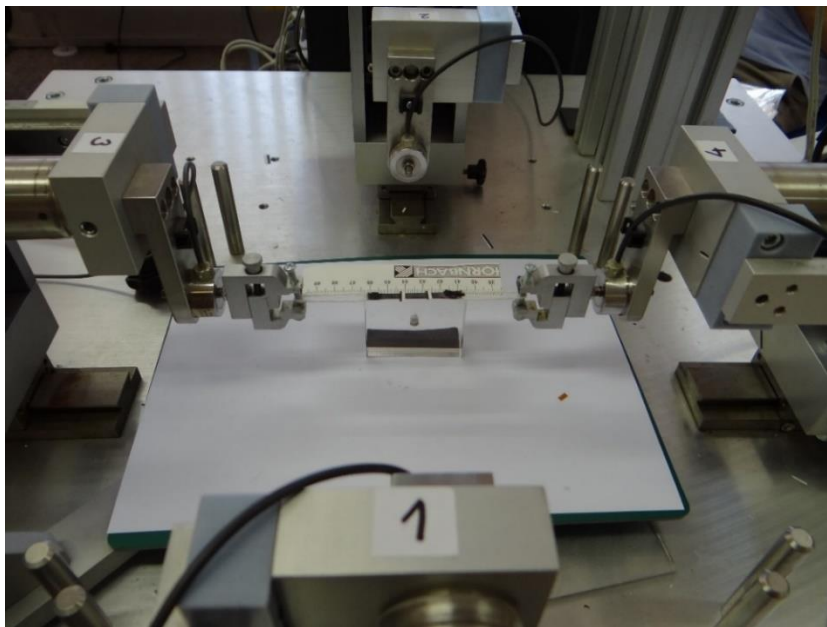
$$I_2 = \lambda_1^{-2} + 2\lambda_1 \quad (6.7)$$

## 6.2. Experimentální zařízení - trhací stroj

Trhací stroj (obr. 24) obsahuje silové snímače U9B HBM (měřiče síly) a optický videoextenzometr (měřič deformace). Rozsah silového snímače je  $\pm 25N$ . Trhací stroj se skládá ze čtyř pohyblivých čelistí (obr. 25), mezi kterými je uchycen vzorek. Tyto čelisti jsou očíslovány čísly 1 až 4, přičemž při experimentu používám pouze čelisti 3 a 4 (z důvodu provedení jednoosé tahové zkoušky). Při konstantní rychlosti čelisti (1 mm/min) je síla zaznamenána pomocí siloměru a deformace na vzorcích pomocí extenzometru.



Obr. 24 Trhací stroj od firmy Zwick /Roell



Obr. 25 Číslování čelistí trhacího stroje

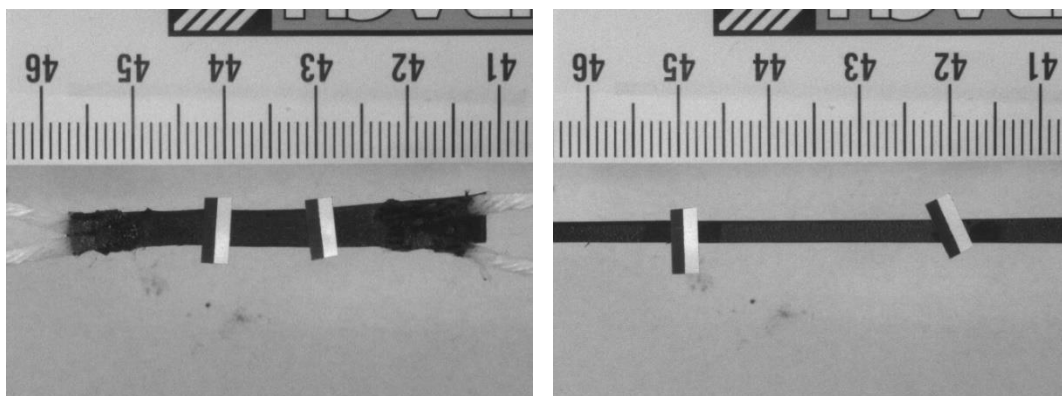
### 6.3. Měřící metoda – detekce hran

Princip metody funguje na základě detekce hran v obrázcích. Vyhodnocuje stupně šedi v bitové mapě (v osmibitové hloubce), což znamená, že je zde  $2^8$  pixelů. V každém pixelu bitmapy, je číslo v rozsahu od 0 do 255 s tím, že 0 znamená nulový jas (černá barva) a hodnota 255 znamená maximální jas (bílá barva).

Videoextenzometr snímá obraz, který je zkalibrovaný, a odčítá na základě jasu dané hodnoty. Přístroj určí první skok černé a bílé barvy pomocí nalepených značek, které musí být opačně orientované (viz obr. 26). Najde posléze i poslední takovýto skok. Přístroj ví, kde se nachází určitý k-tý pixel a n-tý

pixel, a na základě této znalosti určí vzdálenost n-k pixelů. Na i+1 snímku udělá proces znovu, vyjde určitá hodnota pixelu a z této hodnoty přepočítá délku.

Trhací stroj pomocí snímače U9B zaznamenává sílu. S frekvencí 20 Hz digitalizuje analogová data, vyhodnocuje vzdálenost mezi značkami a to vše uloží do paměti (v našem případě v Excelu).



Obr. 26 Umístění kontrastních značek na vzorku (nezatížený a zatížený stav)

## 6.4. Příprava zkušebních těles

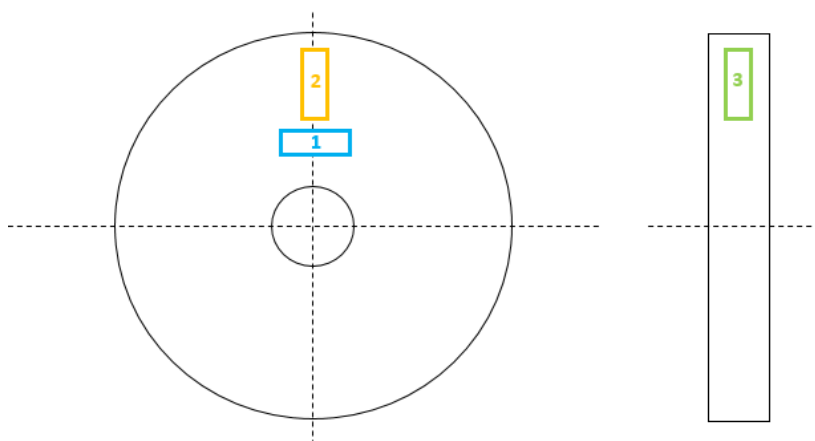
Zkušební tělesa byla připravena ze vzorků EPDM a SBR membrány. Materiálové vlastnosti obou materiálů jsou zobrazeny v tab. 1.

Tab. 1 Předepsané vlastnosti směsí

	SBR		EPDM	
	Jednotka	Hodnota	Jednotka	Hodnota
Tvrдость	IRH	68	IRHD - M	63 ± 5
Pevnost v tahu	MPa	20,5	MPa	18
M100	MPa	3,6	MPa	2,5

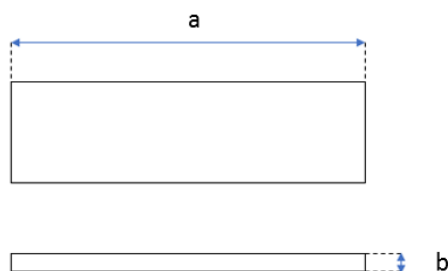
Označení M100 je známo pod pojmem „gumárenský modul“ a představuje „nominální napětí“ potřebné k deformaci vzorků o 100 %. Vedle hodnot M100 mohou existovat i moduly M200 či M300. Méně častěji lze tyto moduly definovat například zákazníkem (M125, M150, aj.).

Příprava vzorků a následné měření bylo provedeno v laboratořích na Ústavu mechaniky, biomechaniky a mechatroniky na ČVUT FS v Praze. Příprava vzorků obsahovala rozstříhání zkušebních těles na obdélníkový tvar. Směry jsem volila tři (dle obr. 27). Vzorky byly do přístroje připevněny pomocí provázek z přírodního materiálu. Přírodní materiál jsem volila z důvodu nejmenšího vlivu svými vlastnostmi během průběhu zkoušky. Provázek byl připevněn na pryžový vzorek pomocí sekundového lepidla, které nesmělo zasahovat do pozorované části vzorku a které nesmělo být na více jak 2/3 vzorku opět z důvodu ovlivnění experimentu. Spojení bylo ještě vyztuženo pomocí černého laku na nehty.



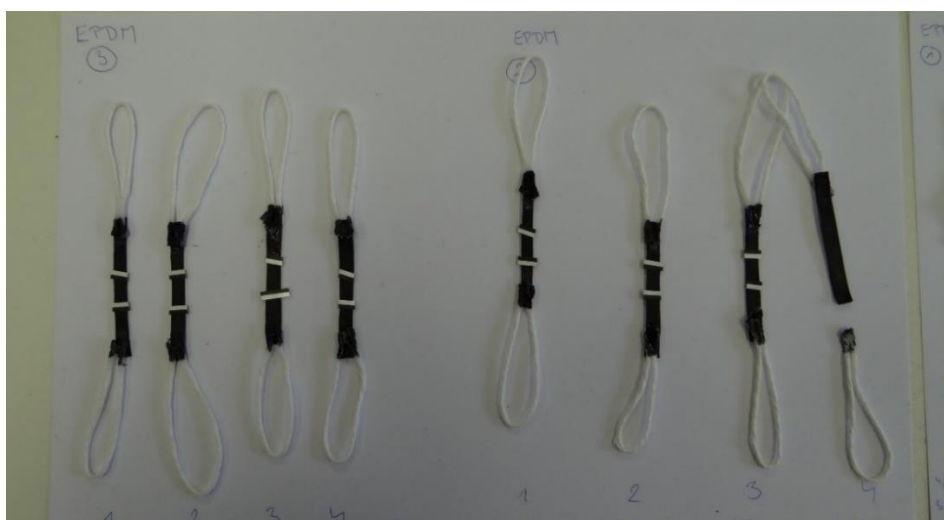
Obr. 27 Směr vzorků pryže pro tahovou zkoušku

Nejdříve jsem provedla testy na zkušebních vzorcích, abych zjistila, zda proběhne zkouška bez komplikací. Zjistilo se, že bude potřeba zmenšit rozměr a (viz. obr. 28) a také zmenšit rozměry provázků, kterými byli vzorky uchyceny.



Obr. 28 Rozměry zkušebního tělesa

Při vysekávání vzorků skalpelem dochází k deformacím a vznikají tak nerovné plochy vzorku, proto vzorky mohou mít mírně nepravidelný. Z tohoto důvodu jsem musela dané rozměry měřit ze tří různých míst (v blízkosti značek) a z nich udělat aritmetický průměr. Průměrné hodnoty naměřených hodnot jsou zaznamenány v tab. 2.



Obr. 29 Ukázka vzorků pryže pro daný experiment

Tab. 2 Zprůměrované rozměry zkušebních vzorků

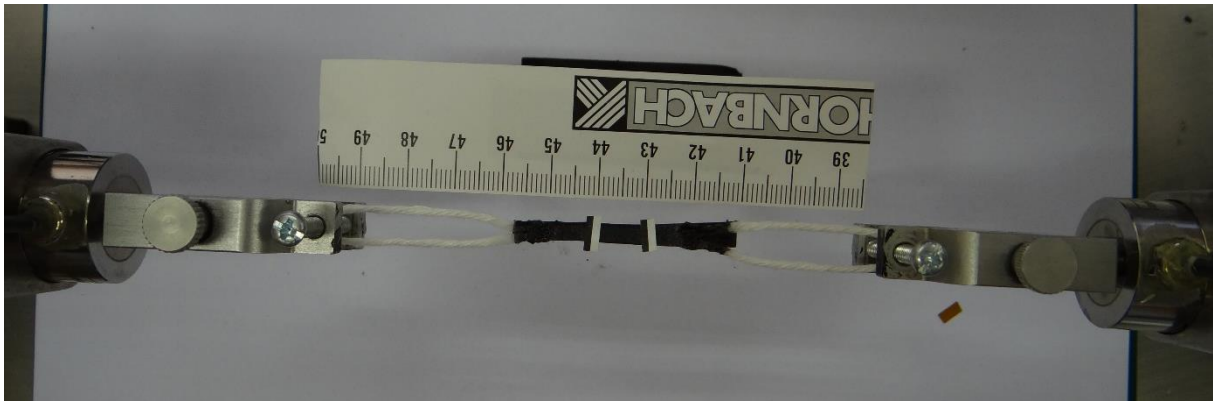
Vzorek	a	b	Vzorek	a	b
<b>EPDM1</b>			<b>SBR1</b>		
1	4.06	0.59	1	3.52	0.84
2	3.69	0.61	2	3.32	0.84
3	3.32	0.62	3	3.30	0.84
4	4.11	0.59	4	3.34	0.84
<b>EPDM2</b>			5	4.25	0.94
1	3.45	0.62	6	4.28	0.86
2	3.98	0.60	<b>SBR2</b>		
3	3.88	0.61	1	3.27	0.82
4	4.27	0.61	2	3.73	0.82
<b>EPDM3</b>			3	3.24	0.82
1	4.04	0.46	4	3.90	0.84
2	4.15	0.48	<b>SBR3</b>		
3	4.48	0.45	1	3.01	0.80
4	4.34	0.81	2	3.80	0.78
			3	3.87	0.78
			4	3.02	0.76
			5	4.29	0.87

## 6.5. Tahová zkouška

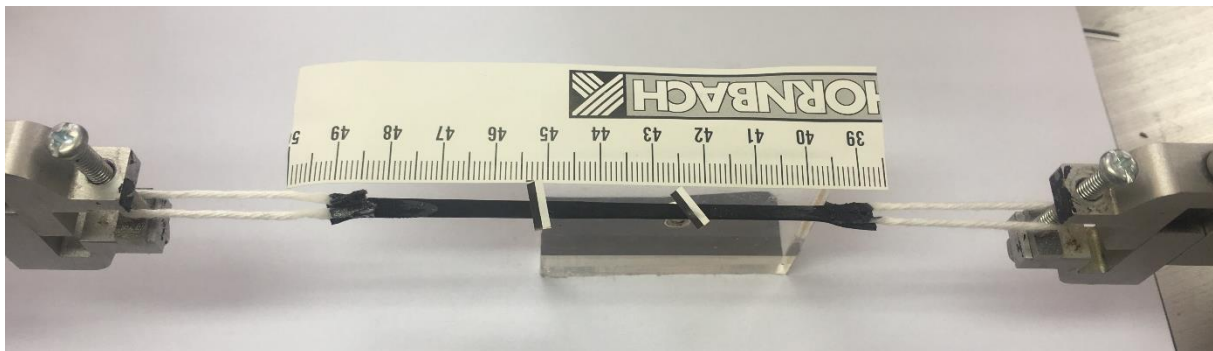
### 6.5.1. Postup tahové zkoušky

Pro každou ze směsi bylo celkově nechystáno 12 vzorků (dohromady tedy 24). Čtyři vzorky pro každý ze tří směrů. Po změření všech potřebných rozměrů se na vzorek nalepily dvě značky, které nesou bílou a černou barvu. Poté se vzorek upnul pomocí provázku do stroje pomocí čelistí. Na trhacím zařízení se nastavila rychlost posuvu čelistí č.3 a č.4 na hodnotu 1 mm/min. Trhací stroj byl propojen s PC, na kterém byl nainstalován software, ve kterém se nastavovaly potřebné parametry a který zaznamenával celý průběh tahové zkoušky.

Jednoosá tahová zkouška probíhala ve dvou krocích. První krok, tzv. proces předcyklování, obsahoval pět cyklů, kdy byl vzorek nejprve zatížen (viz. obr. 31) a následně odlehčen (viz. obr. 30). Druhý krok spočíval v natažení vzorku na hodnotu přetvoření a relaxaci po dobu 30 s. V některých případech vzorek nevydržel předdefinovanou sílu (viz. obr. 29), což mohlo zapříčinit špatné přilepení provázku ke vzorku, nebo špatně zvolenou předdefinovanou sílu. Z důvodu porušení některých vzorků, závěrečná hodnota všech zkušebních těles je 20.



*Obr. 30 Jednoosá tahová zkouška pryže - relaxace*



*Obr. 31 Jednoosá tahová zkouška pryže – natahování*

### 6.5.2. Výsledky měření tahové zkoušky

Pomocí počítače, který zaznamenával celý průběh jednoosé tahové zkoušky, jsem získala data z dvaceti zkoušek, které byly ve formátu excelu. Tento excel obsahoval dobu trvání celé zkoušky, vzdálenosti hlav trhacího stroje, síly na rameni 3,4 a axiální zatížení.

V těchto datech jsem našla poslední cyklus natahování, určila hodnoty streče  $\lambda$  a skutečného napětí  $\sigma$ . Následně jsem výsledky vyhodnocovala pomocí softwaru Maple 2019.

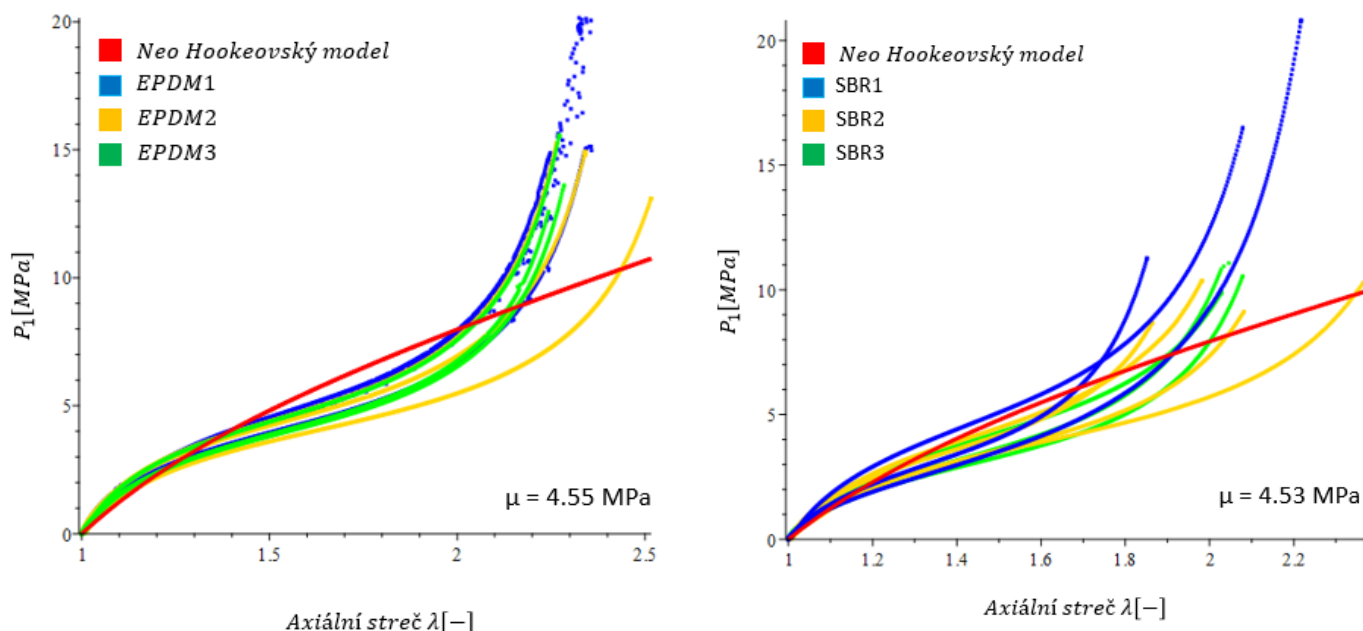
## 7. Odhad materiálových parametrů modelů

Z tahové zkoušky byly naměřeny datové záznamy tahových křivek a tyto záznamy byly poté převedeny do Microsoft Excel. Následně se provedla regresní analýza, ze které jsem získala hodnoty materiálových parametrů pro modely hustoty deformační energie  $W$ .

### 7.1. Odhad materiálových parametrů pomocí programu MAPLE

#### 7.1.1. Regrese Neo Hookeovským modelem

Jelikož se jedná o základní model, založený na invariantech, není tento model příliš užitečný. Je příliš primitivní a tím pádem se jeho předpovědi v oblasti mimo infinitezimálních deformací často liší od praktických pozorování, jak lze vidět na grafu na obr. 32.



Obr. 32 Regresní analýza jednoosé tahové zkoušky na všech datech, nezávisle na EPDM (vlevo) a SBR (vpravo) proložené Neo Hookeovským modelem

Grafy (obr.32) ukazují tahové zkoušky EPDM a SBR materiálů, které jsou barevně odlišeny podle místa vyseknutí, jak je to na obr. 27 směr vzorků pryže pro tahovou zkoušku. Červená barva vyznačuje daný model. Regresní analýzou dat jsem získala materiálový parametr počátečního smykového modulu pružnosti  $\mu$ , pro oba materiály, který je uveden na obr. 32. a v tab. 3. Hodnota, která určuje míru kvality regresního modelu, se nazývá koeficient determinace neboli  $R^2$ , a získá se pomocí poměru [32]:

$$R^2 \equiv 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (7.1)$$

Kde  $SS_{res}$  je suma čtverců chyb (residuí) a  $SS_{tot}$  je suma kvadratických odchylek závisle proměnné  $y$  od její středí hodnoty  $\bar{y}$  a  $\hat{y}_i$  je regresní odhad  $i$ -tého pozorování.

Z grafů lze vidět, že koeficient determinace je nízký. Z toho důvodu uvádím v tab. 3 pouze zprůměrované hodnoty materiálového parametru a koeficientu determinace, protože dále nebudou potřeba.

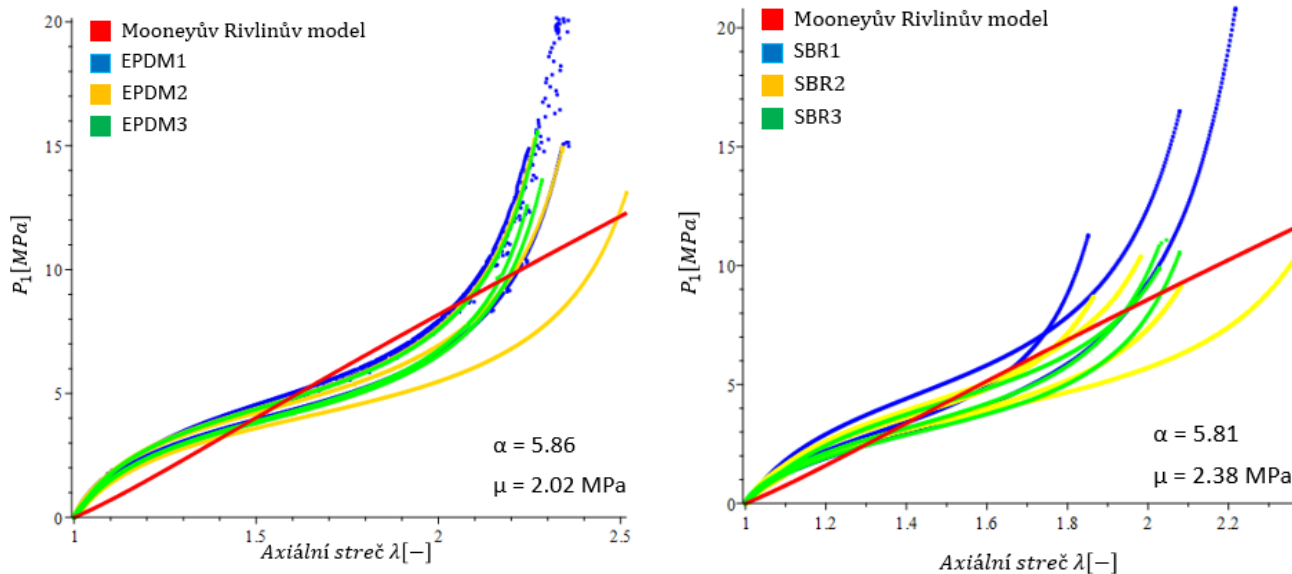
Tab. 3 Odhad materiálového parametru a koeficientu determinace pro Neo Hookeovský model

Materiál vzorku	Materiálový parametr	$R^2$	Střední hodnota $R^2$	Směrodatná odchylka $R^2$
	$\mu$ [MPa]			
EPDM	4.55	0.844	0.849	0.043
SBR	4.53	0.888	0.905	0.08

Průměrný koeficient determinace pro EPDM je  $R^2 = 0.8435$  a pro SBR je  $R^2 = 0.8876$ , což značí ne příliš vysokou míru kvality regresního modelu, která by se v ideálním případě měla blížit k hodnotě 1.

### 7.1.2. Regrese Mooneyovým - Rivlinovým modelem

Stejně jako Neo Hookeovský model, tento model také nabývá nízkého koeficientu determinace, jak lze vidět na obr. 33.



Obr. 33 Regresní analýza jednoosé tahové zkoušky na všech datech, nezávisle na EPDM (vlevo) a SBR (vpravo) proložené Mooneyovým Rivlinovým modelem

Grafy (obr.33) opět ukazují tahové zkoušky EPDM a SBR materiálů, proložené Mooneyovým Rivlinovým modelem. Regresní analýzou dat jsem získala dvě materiálové konstanty  $\mu$ ,  $\alpha$  a hodnotu koeficientu determinace  $R^2$ , jejichž hodnoty jsou v tab. 4.



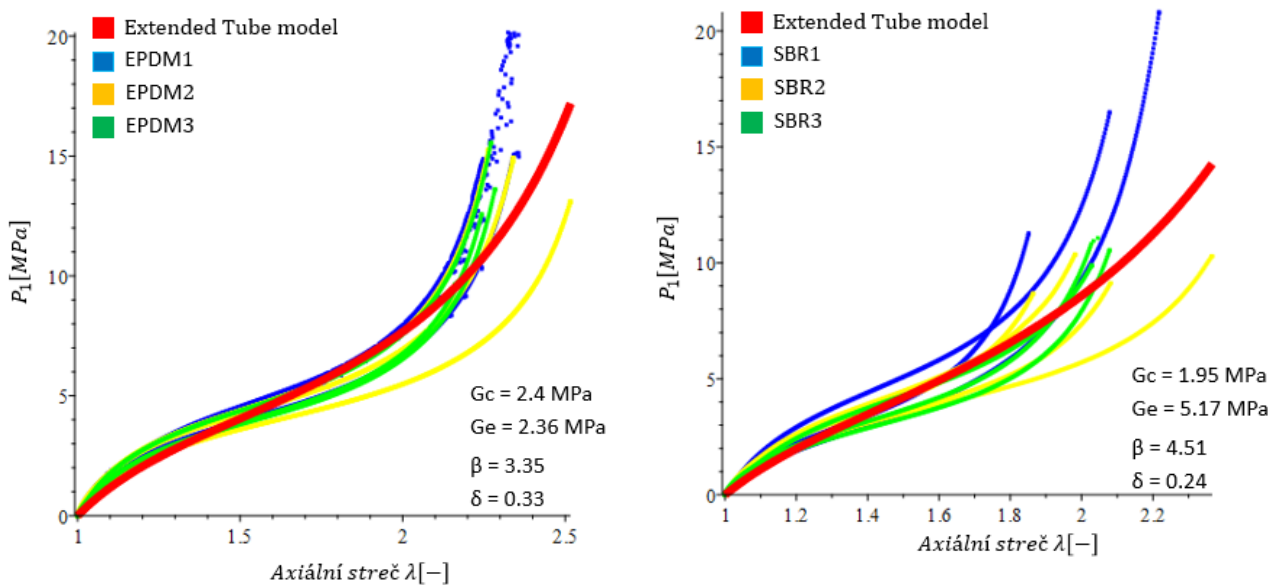
Tab. 4 Odhad materiálových parametrů a koeficientu determinace pro Mooneyův Rivlinův model

Materiál vzorku	Materiálový parametr		$R^2$	Střední hodnota $R^2$	Směrodatná odchylka $R^2$
	$\mu$ [MPa]	$\alpha$ [-]			
EPDM	2.021	5.861	0.883	0.884	0.022
SBR	2.378	5.815	0.928	0.934	0.037

Průměrný koeficient determinace pro EPDM je  $R^2 = 0.8828$  a pro SBR je  $R^2 = 0.9277$ . Tyto hodnoty jsou vyšší než u předchozího modelu, ale stále nejsou dostatečně blízko k hodnotě 1.

### 7.1.3. Regrese Extended Tube modelem

Jelikož se jedná o mikrostrukturně motivovaný model obsahující čtyři materiálové konstanty, patří tento model k jedněm z nejpřesnějších.



Obr. 34 Regresní analýza jednoosé tahové zkoušky na všech datech, nezávisle na EPDM (vlevo) a SBR (vpravo) proložené Extended Tube modelem

Grafy (obr. 34) ukazují tahové zkoušky EPDM a SBR materiálů, proložené Extended Tube modelem. Regresní analýzou dat jsem získala čtyři materiálové konstanty  $G_e, G_c, \beta, \delta$ , které pro všechna data vyšly viz. obr. 34. Pro jednotlivé vzorky jsou materiálové parametry a koeficienty determinace znázorněny v tab.5.

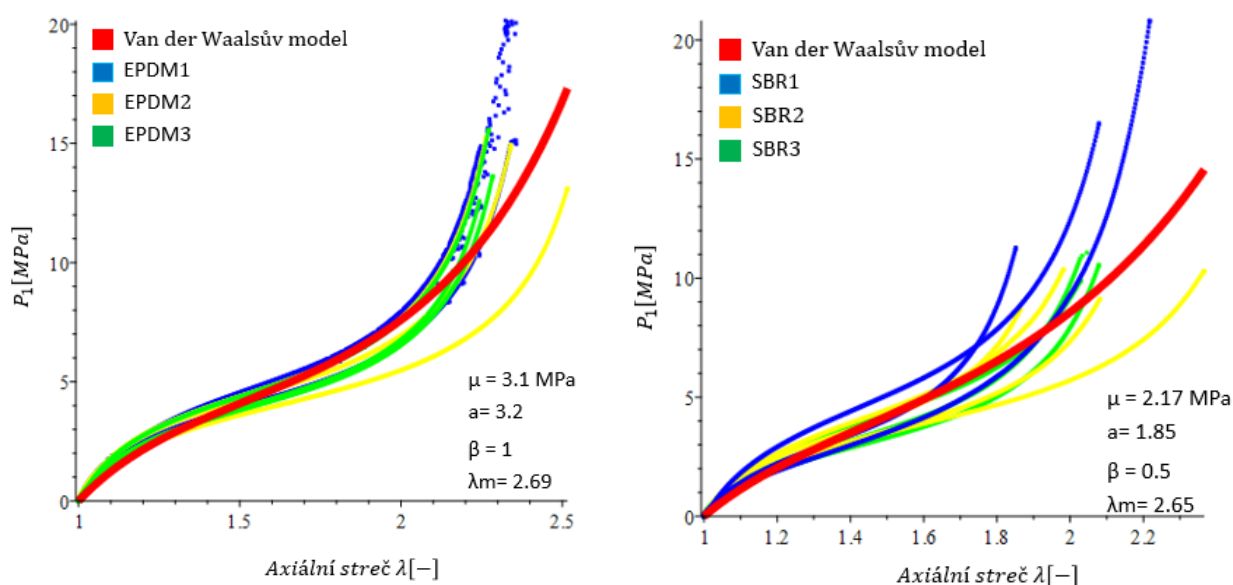
Tab. 5 Odhad materiálových parametrů a koeficientu determinace pro Extended Tube

Materiál vzorku	Materiálový parametr				R <sup>2</sup>	Střední hodnota R <sup>2</sup>	Směrodatná odchylka R <sup>2</sup>
	Gc [MPa]	Ge [MPa]	β [-]	δ [-]			
EPDM1_1	0.934	5.200	2.295	0.455	0.993	0.998	0.002
EPDM1_4	0.702	5.845	2.681	0.479	0.999		
EPDM1_5	0.689	4.940	2.462	0.449	0.998		
EPDM2_1	0.516	4.594	2.621	0.402	0.999		
EPDM2_2	0.673	5.685	2.642	0.478	0.998		
EPDM2_3	0.613	5.482	2.618	0.453	0.998		
EPDM3_1	0.550	5.079	2.800	0.483	0.999		
EPDM3_2	0.558	4.963	2.720	0.474	0.998		
EPDM3_3	0.664	5.657	2.630	0.477	0.998		
EPDM3_4	0.577	5.190	2.739	0.476	0.998		
SBR1_1b	1.578	3.370	3.518	0.478	1.000	0.999	0.001
SBR1_5b	1.320	6.098	3.231	0.523	0.999		
SBR1_6	1.434	4.990	3.766	0.645	0.999		
SBR2_1	0.724	5.692	3.663	0.640	0.998		
SBR2_2	0.646	4.584	3.329	0.513	0.999		
SBR2_3	0.632	4.324	2.965	0.411	1.000		
SBR2_4	0.817	5.838	3.466	0.558	0.999		
SBR3_2	0.929	4.478	3.341	0.542	0.998		
SBR3_4	0.770	4.071	3.171	0.530	0.999		
SBR3_5	0.860	5.350	3.203	0.519	1.000		

Průměrný koeficient determinace pro EPDM je  $R^2 = 0.9977$  a pro SBR je  $R^2 = 0.9987$ .

#### 7.1.4. Regrese Van der Waalsovým modelem

Stejně jako u Extended Tube modelu se opět jedná o mikrostrukturně motivovaný model obsahující čtyři materiálové konstanty. Stejně jako je to u Extended Tube modelu, patří tento model k jedním z nejpřesnějších, ale opět jsou zde stejné nevýhody, které se vyskytly v předchozím případě.



Obr. 35 Regresní analýza jednoosé tahové zkoušky na všech datech, nezávisle na EPDM (vlevo) a SBR (vpravo) proložené Van der Waalsovým modelem

Grafy (obr. 35) znázorňují tahové zkoušky EPDM a SBR materiálů pro Van der Waalsův model. Regresní analýzou dat jsem získala čtyři materiálové konstanty  $\mu, a, \lambda_m, \beta$ , která pro všechna data vyšla viz. obr. 35. Pro jednotlivé vzorky jsou materiálové parametry a koeficienty determinace znázorněny v tab. 6.

Tab. 6 Odhad materiálových parametrů a koeficientu determinace pro Van der Waalsův model

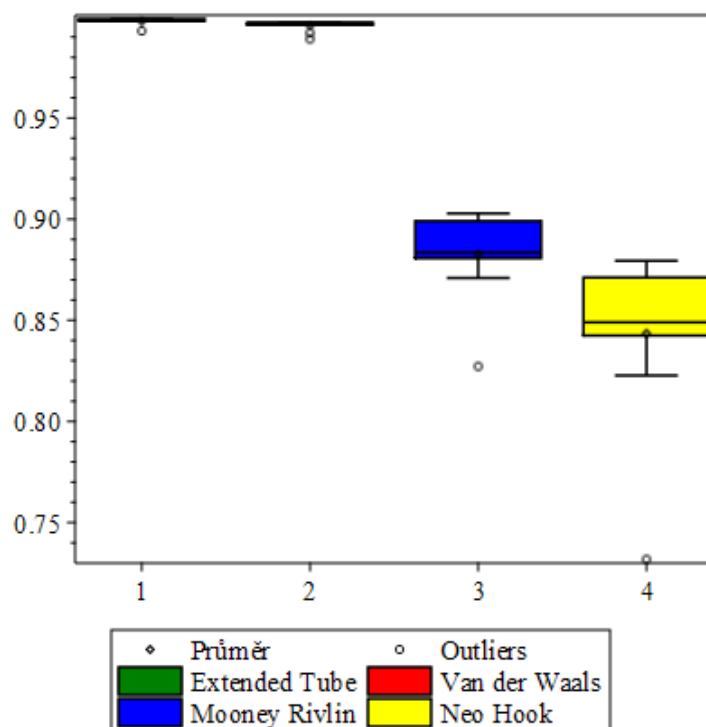
Materiál vzorku	Materiálový parametr				$R^2$	Střední hodnota $R^2$	Směrodatná odchylka $R^2$
	a [-]	$\beta$ [-]	$\lambda_m$ [-]	$\mu$ [MPa]			
EPDM1_1	3.064	0.001	3.169	3.600	3.064	0.997	0.003
EPDM1_4	2.863	0.001	3.330	3.457	2.863		
EPDM1_5	2.846	0.001	3.286	3.117	2.846		
EPDM2_1	2.425	0.001	3.638	2.635	2.425		
EPDM2_2	2.938	0.001	3.205	3.483	2.938		
EPDM2_3	2.805	0.001	3.328	3.338	2.805		
EPDM3_1	2.863	0.001	3.218	2.970	2.863		
EPDM3_2	2.979	0,014	3.215	3.110	2.979		
EPDM3_3	2.968	0.001	3.202	3.502	2.968		
EPDM3_4	2.835	0.130	3.123	2.729	2.835		
SBR1_1b	3.125	0.001	2.852	2.471	3.125	0.999	0.001
SBR1_5b	3.101	0.001	2.907	3.663	3.101		
SBR1_6	3.871	0.001	2.562	2.958	3.871		
SBR2_1	3.800	0.502	2.580	3.289	3.800		
SBR2_2	2.802	0.001	3.086	2.525	2.802		
SBR2_3	2.309	0.001	3.554	2.376	2.309		
SBR2_4	3.003	0.001	2.948	3.203	3.003		
SBR3_2	3.258	0.039	2.843	2.716	3.258		
SBR3_4	3.167	0.001	2.916	2.461	3.167		
SBR3_5	2.737	0.001	3.067	2.905	2.737		

Průměrný koeficient determinace pro EPDM je  $R^2 = 0.995$  a pro SBR je  $R^2 = 0.999$ .

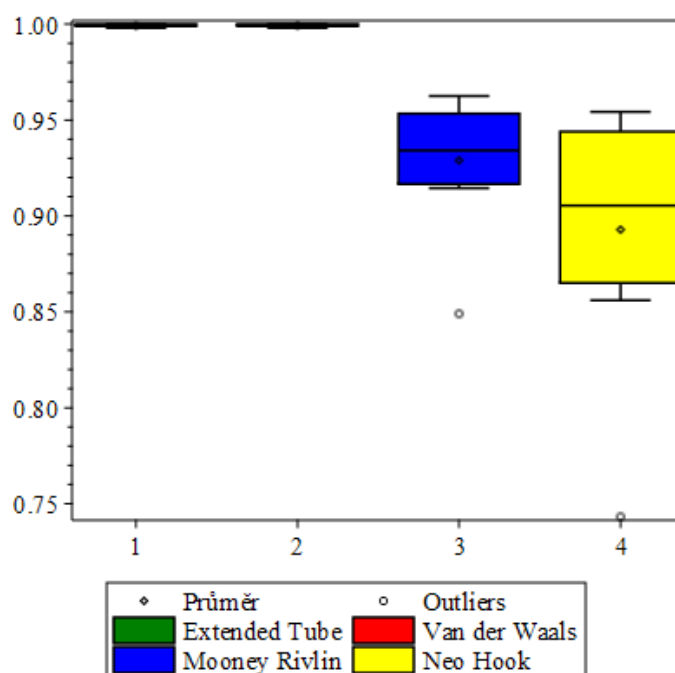
### 7.1.5. Porovnání úspěšnosti modelů založené na $R^2$

Porovnání úspěšnosti všech výše zmíněných konstitutivních modelů jsem založila na hodnotách  $R^2$ , které jsem porovnávala pomocí krabicového grafu (boxplotu) v programu Maple. Porovnání je uvedeno na obr. 36, který zobrazuje hodnoty pro EPDM materiál a na obr. 37, který zobrazuje hodnoty pro SBR. Jedná se o standardní způsob porovnávání veličin, který je založen na hodnotách mediánu (střední hodnotě), dolního kvartilu a horního kvartilu.

Prostřední „krabicová“ část je ohraničena ve vrchní části 3. kvantilem a ve spodní části 1. kvantilem. Prostřední část je 2. kvartil, je střední hodnota (medián). Hodnoty, které ukazuje černě zbarvená čára, jsou variabilita dat. Tečky v krabicových grafech na obr. 36 a na obr. 37 vyznačují outliers a identifikují odlehlé hodnoty, které při zpracování dat zkreslují výsledné statistické charakteristiky.



Obr. 36 Porovnání úspěšnosti modelů pro EPDM

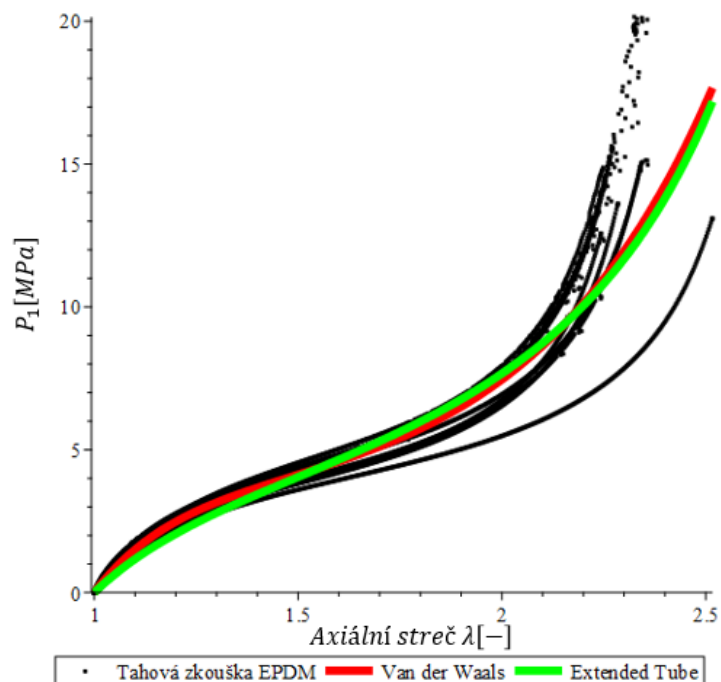


Obr. 37 Porovnání úspěšnosti modelů pro SBR

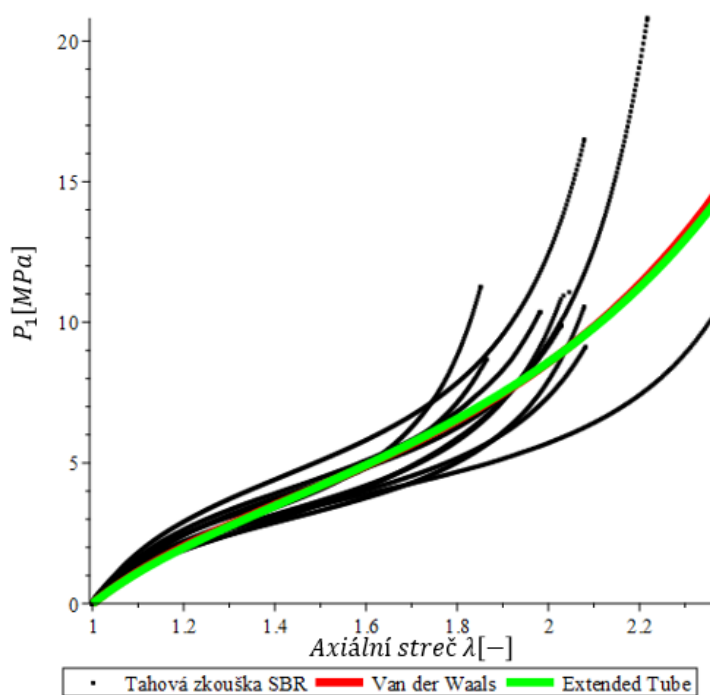
Z grafů je patrné, že nejvyšší míru kvality regresního modelu má Extended Tube model a hned za ním Van der Waalsův model. Z důvodu nepřesnosti Neo Hookeovského modelu a Mooneyového Rivlinového modelu v oblasti mimo infinitezimálních deformací, se budu dále zabývat pouze Extended Tube modelem a Van der Waalsovým modelem.

## 8. Porovnání Extended Tube a Van der Waalsového modelu

V následujících grafech (obr. 38 a obr. 39) je porovnání obou modelů. Je patrné, že se křivky příliš neliší. Rozdíl je patrný pouze pro EPDM materiál pro hodnoty  $\lambda$  v rozmezí od 1 do 1.5, od 1.6 do 2.1 a poté od 2.2 do 2.5.



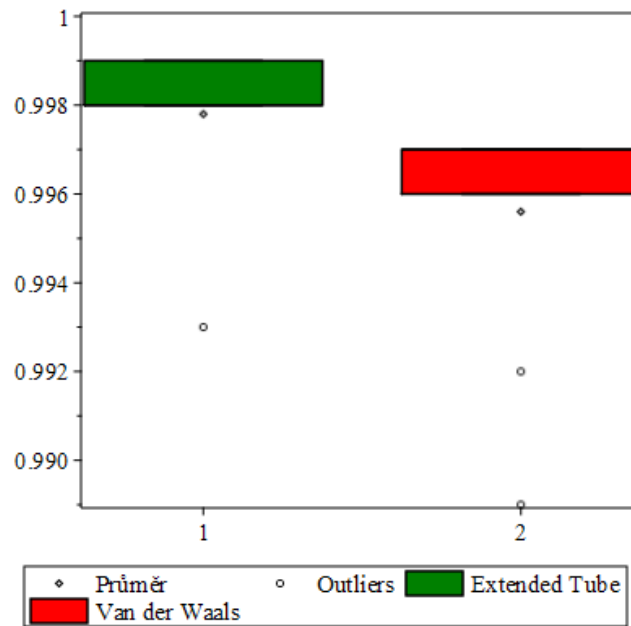
Obr. 38 Porovnání modelů pro EPDM vzorek



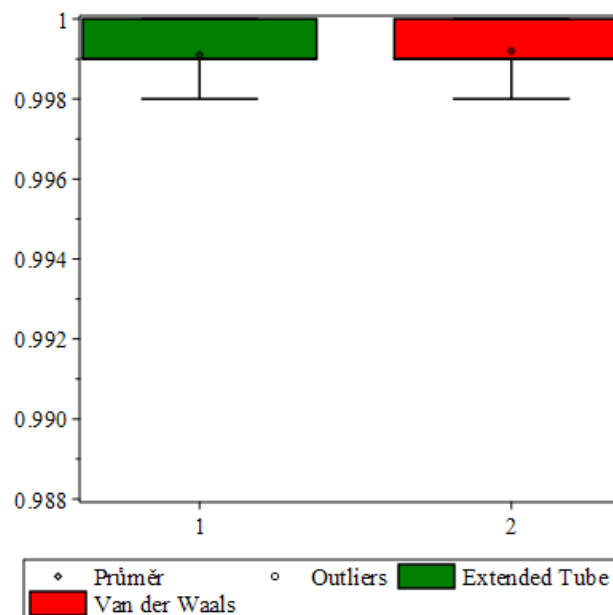
Obr. 39 Porovnání modelů pro SBR vzorek

## 8.1. Porovnání pomocí krabicového grafu

Porovnání úspěšnosti konstitutivních modelů, jak jsem zmínila, jsem založila na hodnotách  $R^2$ . Toto porovnání je znázorněné na obr. 40 a obr. 41, kde jsou blíže zobrazeny krabicové grafy pro Extended Tube model a pro Van der Waalsův model. Je patrné, že z důvodu umístění blíže k hodnotě  $R^2 = 1$ , vyšel z porovnání dat, pro EPDM z jednoosé tahové zkoušky, lépe Extended Tube model. Pro SBR materiál vyšly oba tyto modely v jednoosé tahové zkoušce nastejno.



Obr. 40 Porovnání koeficientů determinace EPDM materiálu



Obr. 41 Porovnání koeficientů determinace EPDM materiálu

## 8.2. Porovnání pomocí Mann – Whitneyho testu

Pro srovnání dat jsem použila statistický Mannův Whitneyův test, který mi určil, zda se data signifikantně statisticky liší. Jedná se o neparametrický test, který se používá pro vyhodnocení dat, která pocházejí ze dvou souborů. V tomto případě se jedná o data koeficientů determinace  $R^2$  pro SBR materiál a EPDM materiál pro dva různé konstitutivní modely. Pro všechny tyto operace jsem využívala program Minitab 18.

Mann – Whitneyův test spočívá v porovnávání mediánů z experimentálních dat. Hypotéza  $H_0$  je tzv. nulová a předpokládá, že se mediány rovnají. Neboli:

$$\text{Medián 1} - \text{Medián 2} = 0$$

Volím si hladinu významnosti  $1 - \alpha$ , ze které vyplývá hladina spolehlivosti. V mém případě hladina spolehlivosti nabývá hodnoty  $\alpha = 0.05$ . Alternativní hypotéza  $H_1$  předpokládá:

$$\text{Medián 1} - \text{Medián 2} \neq 0$$

Hodnoty z Mann – Whitneyho testu jsou zobrazeny v tab. 7 hodnoty pro porovnání pomocí mann – whitneyho testu.

Tab. 7 Hodnoty pro porovnání pomocí Mann – Whitneyho testu

Materiál	Extended Tube medián	Van der Waalsův medián	Hladina spolehlivosti [%]	p-hodnota
EPDM	0.998	0.997	95.48	0.002
SBR	0.999	0.999	95.55	0.410

Porovnání obou modelů z programu Minitab je zobrazeno na obr. 42.

Statistický test potvrdil, že v případě EPDM materiálu, Extended Tube model prokládá pozorování signifikantně lépe, než je tomu pro Van der Waalsův model. Pro SBR materiál jsem postup opakovala a vyplynulo, že se data signifikantně neliší, protože p-hodnota vyšla 0.4, což je větší než hodnota 0.05.

Na základě statistické analýzy nemůžeme dále tvrdit, že by jeden z materiálůvých modelů byl lepší než druhý.

### Descriptive Statistics

Sample	N	Median
EPDM_et	10	0.998
EPDM_vdw	10	0.997

### Estimation for Difference

Difference	CI for Difference	Achieved Confidence
0.0020000	(0.0010000; 0.0020000)	95.48%

### Test

Null hypothesis	$H_0: \eta_1 - \eta_2 = 0$	
Alternative hypothesis	$H_1: \eta_1 - \eta_2 \neq 0$	
Method	W-Value	P-Value
Not adjusted for ties	147.00	0.002
Adjusted for ties	147.00	0.001

### Descriptive Statistics

Sample	N	Median
EPDM_et	10	0.998
EPDM_vdw	10	0.997

### Estimation for Difference

Difference	Lower Bound for Difference	Achieved Confidence
0.0020000	0.001	95.55%

### Test

Null hypothesis	$H_0: \eta_1 - \eta_2 = 0$	
Alternative hypothesis	$H_1: \eta_1 - \eta_2 > 0$	
Method	W-Value	P-Value
Not adjusted for ties	147.00	0.001
Adjusted for ties	147.00	0.001

Obr. 42 Mann Whitneyho test pomocí programu Minitab. Porovnání alternativní hypotézy, kdy platí nerovnost mediánů (vlevo) a kdy platí, že rozdíl mediánů je větší než 0 (vpravo).



## 9. Závěr

Cílem této bakalářské práce byl odhad materiálových parametrů modelů pro hustotu deformační energie membrán z EPDM a SBR materiálu. Motivací bylo posouzení predikčních schopností modelů pro vybrané vzorky pryže, regresní analýza a porovnání modelů na základě koeficientu determinace.

V teoretické části práce jsem vyložila základy makromolekulární chemie a základní mechanické vlastnosti pryže. Ve druhé, experimentální části, jsem popisovala jednoosou tahovou zkoušku s elastomerními vzorky. Tyto hodnoty z experimentu jsem následně porovnávala s numerickou simulací pomocí rovnic pro hustotu deformační energii. Všechny tyto modely pro hustoty deformační energie jsem v práci popsala.

Na základě hodnot koeficientů determinace, které nabývaly pro Neo Hookeovský model a Mooneyův Rivlinův model malých hodnot, jsem vyhodnotila, že dále budu porovnávat pouze Extended Tube model a Van der Waalsův model. Porovnání jsem učinila pomocí krabicových grafů, které ukázaly, že nejvyšší míru kvality regresního modelu pro EPDM materiál disponuje Extended Tube model. Pro SBR materiál vyšly oba modely obdobně.

Oba modely mají čtyři materiálové parametry. Abych každý z nich určila nezávisle na tom druhém, tak by bylo potřeba provést čtyři materiálové zkoušky. Zmíněné zkoušky mohou být uniaxiální a biaxiální zkouška tahem, tlakem, zkouška čistého smyku a objemová zkouška, která by měla smysl pouze u stlačitelných materiálů. Z těchto zkoušek bych získala věrohodnější materiálové parametry. Pro tyto zkoušky ovšem v bakalářské práci nebyl prostor, ale jsem si vědoma validity materiálových parametrů mimo obor pozorování, ze kterého byly zjištěny.

Modely Extended Tube a Van der Waals mají parametry v logaritmu. U Van der Waalsova modelu se jedná o hodnotu, která je závislá na parametru  $\lambda_m$  (konečná protažitelnost) a která zajistí po překročení nefunkčnost modelu. U Extended Tube modelu se jedná o hodnotu závislou na parametru  $\delta$ .

U Extended Tube modelu jsem se také setkala s vlastnostmi materiálového parametrem  $\beta$ , který Kaliske a Heinrich v jejich literatuře [22] definovali v rozmezí  $0 < \beta \leq 1$ . Rozmezí vychází z dat Treolara [33], dle kterých by  $\beta$  mělo nabývat ideálně hodnoty 0.2. Tato hodnota vyšla dle experimentu Treolara nejlépe pro predikci dat ze zkoušek, které definovaly hodnoty uniaxiální tahové zkoušky a převáděly je na zkoušku biaxiální. Pro má experimentální data však hodnoty  $\beta$ , pro nejlepší fit jednoosé tahové zkoušky, vyšly v rozmezí 2 až 3.8. Pokud bych měla ověřit tuto teorii, kterou popisovali Kaliske a Heinrich v jejich literatuře, musela bych opět provést jakoukoliv z výše uvedených materiálových zkoušek.

Z provedené regrese dat pro EPDM materiál a z podmínek, které jsem stanovila, vyplývá Extended Tube model jako lepší model pro regresní analýzu jednoosé tahové zkoušky. Ovšem z důvodů vysokých hodnot koeficientů determinace u obou modelů, mohu dále tvrdit, že pro jednoosou tahovou zkoušku pro EPDM materiál jsou oba modely s kvalitou regrese obdobný. Na základě

statistické analýzy pro SBR materiál nemohu dále tvrdit, že by jeden z materiálových modelů byl lepší než druhý.

## 10. Literatura

- [1] DUCHÁČEK, Vratislav. Polymery: výroba, vlastnosti, zpracování, použití. Vyd. 2., přeprac. Praha: Vydavatelství VŠCHT, 2006. ISBN 80-708-0617-6.
- [2] Rozdělení a charakteristika polymerů. Publi.cz [online]. [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: <https://publi.cz/books/180/04.html>
- [3] E-ChemBook: Multimediální učebnice chemie [online]. [cit. 2019-02-11]. Dostupné z: <http://e-chembook.eu/syntetické-makromolekulární-látky>
- [4] Struktura polymerů a její vliv na vlastnosti. Publi.cz [online]. [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: <https://publi.cz/books/180/03.html>
- [5] KŘENEK, Tomáš. Polymerní materiály [online]. [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: [https://www.opi.zcu.cz/download/Polymery\\_2010.pdf](https://www.opi.zcu.cz/download/Polymery_2010.pdf)
- [6] ŠVORČÍK, V. Struktura a vlastnosti polymerů [online]. [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: [http://users.fs.cvut.cz/libor.benes/vyuka/polymvsauto/Struktura%20a%20vlastnosti%20polymeru%20-%20strucne\\_Svorcik.pdf](http://users.fs.cvut.cz/libor.benes/vyuka/polymvsauto/Struktura%20a%20vlastnosti%20polymeru%20-%20strucne_Svorcik.pdf)
- [7] MERNA, Jan. Polymery: Úvod [online]. [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: <http://merna.eu/wp-content/uploads/2017/03/Polymery-uvod.pdf>
- [8] TOMIS, F. Gumárenská a plastická technologie : zpracovatelské procesy.2.vyd. Brno : VUT Brno, 1987. 289 s. ISBN 55-552-87.
- [9] Harper, Ch., A. Handbook of plastics and elastomers. New York, USA: McGraw- Hill, 1975. 1000s. ISBN 0-07-026681-6
- [10] Vulcanization & Accelerators [online]. , 35 [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: <http://www.nocil.com/Downloadfile/DTechnicalNote-Vulcanization-Dec10.pdf>
- [11] Technologie vstřikování plastů. Publi.cz [online]. [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: <https://publi.cz/books/184/03.html>
- [12] HORNÝ, Lukáš. Úvod do nelineární pružnosti [online]. 25.10.2018 [cit. 2019-02-11]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Nelineární-pružnost-projekt-I.pdf>
- [13] Dvořák, Z., Javořík, J. Elastomerní konstrukční materiály, Zlín: Česká společnost průmyslové chemie, 2009
- [14] JANÁČEK, Josef. Základy fyziky polymerů: Úvod do lineárního viskoelastického chování. Praha: Ústav makromolekulární chemie Československá akademie věd, 1988
- [15] HOLZMULLER, Werner a Kurt ALTENBURG. Fyzika polymerů. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966.
- [16] GRELLMANN. Polymer Testing [online]. Hanser Publishers, 2007
- [17] BOYER, Howard E. Atlas of creep and stress-rupture curves [online]. Metals Park, Ohio: ASM International, 1988, 1 v. (various pagings). ISBN 08-717-0322-X.

- [18] MEISSNER, B., ZILVAR, V. Fyzika polymerů: Struktura a vlastnosti polymerních materiálů. 1.vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1987.
- [19] MACEK, K. a kol. Strojírenské materiály. Praha: Vydavatelství ČVUT v Praze, 2003
- [20] KREJSA, Martin, Lenka LAUSOVÁ a Vladimíra MICHALCOVÁ. Pružnost a plasticita [online]. 2011 [cit. 2019-03-12]. Dostupné z: [http://fast10.vsb.cz/lausova/pruznost\\_tisk.pdf](http://fast10.vsb.cz/lausova/pruznost_tisk.pdf)
- [21] GENT, Alan N. a R. P. CAMPION. Engineering with rubber: how to design rubber components. New York: Distributed in the United States of America and in Canada by Oxford University Press, c1992. ISBN 0195209508.
- [22] KALISKE, M. An Extended Tube Model for rubber elasticity: Statistical-mechanical theory and finite element implementation [online]. 1998, , 31 [cit. 2019-03-13].
- [23] A Review of Constitutive Models for Rubber-Like materials, American J. of Engineering and Applied Sciences. 2010, 3,1,s 232-239. ISSN 1941-7020.
- [24] Molliková, E.:Konstrukční plasty, studijní opora předmětu. Brno 2004
- [25] Němec,I.: Nelineární mechanika, Základy nelineární mechaniky. VUT Brno, 2006.
- [26] Plešek,J.: Nelineární mechanika kontinua s příklady. České vysoké učení v Praze, 2015.
- [27] Horný, L.: Patobiomechanika srdečněcévního systému I.díl. ČVUT, 2015, ISBN 978-80-01-05473-4,
- [28] Burša, J.: Neohookeovské materiály v inženýrské mechanice. Brno: VUTIUM, 2011, ISBN 978-80-214-4250-4.
- [29] HOSSAIN, Mokarram a Paul STEINMANN. More hyperelastic models for rubber-like materials: consistent tangent operators and comparative study [online]. June 2013 [cit. 2019-04-01]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/260721586\\_More\\_hyperelastic\\_models\\_for\\_rubber-like\\_materials\\_consistent\\_tangent\\_operators\\_and\\_comparative\\_study](https://www.researchgate.net/publication/260721586_More_hyperelastic_models_for_rubber-like_materials_consistent_tangent_operators_and_comparative_study)
- [30] Polymer picture. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 4 August 2009 [cit. 2019-04-01]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Elastomer#/media/File:Polymer\\_picture.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Elastomer#/media/File:Polymer_picture.svg)
- [31] Gilles Marckmann, Erwan Verron. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. Rubber Chemistry and Technology, American Chemical Society, 2006, 79 (5), pp.835-858.
- [32] Koeficient determinace. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2019-05-04]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Koeficient\\_determinace](https://cs.wikipedia.org/wiki/Koeficient_determinace)
- [33] Treloar LRG (1944) Stress–strain data for vulcanized rubber under various types of deformation. Trans. Faraday Soc. 40: 59–70

## 11. Apendix

Odvození 1. Piolova-Kirchhoffovo napětí  $\mathbf{P}$  pro jednoosou tahovou zkoušku

Nejdříve si zavedu tvar hustoty deformační energie pro Neo Hookean model. Hustota deformační energie má tvar:

$$W = \frac{\mu(I_1 - 3)}{2} \quad (9.1)$$

Neo Hook model je závislý na prvním invariantu, proto je potřeba si pro následující výpočty definovat tvar prvního invariantu, který je již znám ze vztahu (5.12):

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (9.2)$$

Pomocí rovnice (5.27), dostaneme vztahy pro všechny tři skutečná napětí.

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad (9.3)$$

Vztahy pro skutečná napětí mají tedy tvar:

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[ \frac{\mu}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \right] - p = \lambda_1^2 \mu - p \quad (9.4)$$

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[ \frac{\mu}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \right] - p = \lambda_1^2 \mu - p \quad (9.5)$$

$$\sigma_3 = \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \lambda_3} \left[ \frac{\mu}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \right] - p = \lambda_3^2 \mu - p \quad (9.6)$$

Lagrangeův multiplikátor  $p$  je třeba určit z okrajové podmínky, která pro jednoosý tah vyplývá z podmínky:

$$\sigma_3 = 0 \quad (9.7)$$

Z okrajové podmínky (9.7) vyplývá  $p$ :

$$p = \lambda_3^2 \mu \quad (9.8)$$

Pro nestlačitelné materiály předpokládáme podmínku:  $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ , ze které vyjde:

$$\lambda_2 = \lambda_3 \quad (9.9)$$

Z podmínky (9.9) poté vyjde závislost pro streč:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \lambda_2 = \lambda_3 \quad (9.10)$$

Dosazením vztahu (9.10) a (9.8) do rovnic (9.4), (9.5) a (9.6) vyplynou vztahy:

$$\sigma_1 = \lambda_1^2 \mu - \frac{\mu}{\lambda_1} \quad (9.11)$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (9.12)$$

Pro získání hodnot 1.Piola-Kirchhoffovo napětí (smluvní napětí)  $P_I$  pro jednoosý tah, je potřeba výsledný vztah upravit pomocí vztahu:

$$P_I = \frac{\sigma_1}{\lambda_1} \quad (9.13)$$

Pomocí vztahu (9.13), kam dosadíme vztah (9.11) nám vyjde konečný tvar rovnice:

$$P_I = \lambda_1 \mu - \frac{\mu}{\lambda_1^2} \quad (9.14)$$

Systém odvození je pro všechny ostatní uvedené modely obdobný.