

**ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

**FAKULTA
STROJNÍ**



**BAKALÁŘSKÁ
PRÁCE**

2019

**JIŘÍ
HALAMKA**

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Halamka** Jméno: **Jiří** Osobní číslo: **467313**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Kalibrace parametrů modelu cyklické plasticity

Název bakalářské práce anglicky:

Cyclic plasticity models calibration

Pokyny pro vypracování:

Cílem práce je seznámit se s fungováním základních modelů plastické odezvy kovů v podmínkách cyklického zatěžování. Práce je orientována na analytická řešení při jednoosé napjatosti a na kalibraci parametrů z cyklických tahových zkoušek.

Postup:

- 1) Seznamte se s Chabocheovým modelem cyklické plasticity. Pozornost věnujte řešení odezvy materiálu na cyklické zatěžování v podmínkách jednoosé napjatosti.
- 2) Seznamte se s typickými procedurami pro kalibraci parametrů Chabocheova modelu na základě dat získaných pomocí cyklických zkoušek s řízenou deformací.
- 3) Ve vhodném prostředí (Matlab, Python ...) vytvořte softwarový nástroj pro kalibraci Chabocheova modelu
- 4) Na zadaných datech ověřte funkčnost vytvořeného programu a diskutujte výsledky.

Seznam doporučené literatury:

Halama, R.: Experimentální poznatky a fenomenologické modelování cyklické plasticity kovů. Habilitační práce. VŠB TUO Ostrava, 2009

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

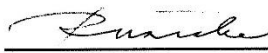
Datum zadání bakalářské práce: **25.04.2019**

Termín odevzdání bakalářské práce: **16.08.2019**

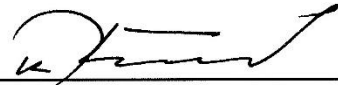
Platnost zadání bakalářské práce:



doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis vedoucí(ho) práce



prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

30.4.2019

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Jiří Halamka
Název bakalářské práce:	Kalibrace parametrů modelu cyklické plasticity
Anglický název:	Cyclic plasticity models calibration
Akademický rok:	2018/2019
Studijní program:	Teoretický základ strojího inženýrství
Obor studia:	Bez oboru
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, mechatroniky a biomechaniky Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí bakalářské práce:	Doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 35 Počet obrázků: 18 Počet příloh: 3

Klíčová slova:

Cyklická plasticita, kalibrace parametrů, Chabocheův model, nelineární metoda nejmenších čtverců, Matlab

Keywords:

Cyclic plasticity, calibration of parameters, Chaboche model, nonlinear least squares method, Matlab

Anotace:

Tato bakalářská práce se zabývá kalibrací parametrů Chabocheova modelu podle tvaru hysterezních smyček deformačně zatěžovaného materiálu. Teoretická část práce je věnovaná potřebným znalostem k odvození rovnice Chabocheova modelu. V praktické části jsou popsány kroky potřebné ke kalibraci, která je řešena nelineární metodou nejmenších čtverců v prostředí softwaru Matlab.

Abstract:

This bachelor thesis is about calibration of parameters of Chaboche model to match the shape of deformation loaded material's hysteresis loops. The theoretical part describes the necessary knowledge to deduce the equation of the Chaboche model. In the practical part steps needed for calibration are described. The calibration is done by nonlinear least squares method in Matlab software.

Poděkování

Děkuji mému vedoucímu doc. Ing. Miroslavu Španielovi, CSc. za odborné vedení, cenné rady a ochotu. Také děkuji Ing. Michalu Bartošákovi, Ph.D. za poskytnutá naměřená data. V neposlední řadě děkuji přátelům a rodině za všeobecnou podporu při studiu.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a za použití odborné literatury uvedené na konci práce.

V Praze dne

Podpis

Obsah

1. Úvod.....	9
2. Teoretická východiska práce.....	10
2.1. Experimentální poznatky chování materiálů	10
2.1.1. Tahový diagram.....	10
2.1.2. Bauschingerův efekt.....	11
2.1.3. Cyklické zpevnění(změkčení) materiálů	12
2.1.4. Cyklická deformační křivka	12
2.1.5. Ratcheting.....	13
2.2. Základy inkrementální teorie plasticity	14
2.2.1. Aditivní zákon	14
2.2.2. Podmínka plasticity	14
2.2.3. Pravidlo zpevnění	15
2.3. Základní modely zpevnění	15
2.3.1. Pragerův model	15
2.3.2. Armstrong-Frederickův model.....	16
2.3.3. Chabocheův model	17
3. Cíle práce	18
4. Tvorba programu pro kalibraci parametrů	18
4.1. Formát naměřených dat	18
4.2. Úprava dat	18
4.2.1. Napětí a deformace.....	18
4.2.2. Vytvoření křivky změkčení/zpevnění	19
4.2.3. Stanovení pracovního cyklu z křivky změkčení/zpevnění.....	19
4.2.4. Stanovení Youngova modulu pružnosti	20
4.2.5. Stanovení poloměru plochy plasticity	20
4.2.6. Segmentace pracovního cyklu.....	20
4.3. Identifikace parametrů.....	21
4.3.1. Použitá funkce	21
4.3.2. Účelová funkce.....	22
4.3.3. Použitý algoritmus.....	22

4.3.4.	Počáteční hodnoty parametrů	23
4.3.5.	Kalibrace parametrů v rámci jednoho poloměru plochy plasticity	24
4.3.6.	Hledání optimálního poloměru plochy plasticity	25
4.3.7.	Problémy v oblasti přechodu z elastické na plastickou částí	25
4.4.	Verifikace programu	26
Závěr	31
PŘÍLOHA 1	33
PŘÍLOHA 2	34

Seznam obrázků

Obr. 1 Smluvní tahový diagram [1]	10
Obr. 2 Graf zatížení zachycující Bauschingerův efekt [1]	11
Obr. 3 Cyklické změkčení (vlevo) a cyklické zpevnění (vpravo) [1]	12
Obr. 4 Hysterezní smyčka (vlevo) a cyklická deformační křivka (vpravo) [2]	13
Obr. 5 Jednoosý ratcheting [1]	13
Obr. 6 Ukázka zatížení do plastického stavu a odlehčení [3]	14
Obr. 7 Ukázka křivky změkčení a znázornění iterace výpočtu pracovního cyklu	19
Obr. 8 Ukázka segmentace pracovního cyklu	21
Obr. 9 Rozdíl teoretického a naměřeného napětí na přechodu z elastické do plastické oblasti	26
Obr. 10 Obsah neznámé „mereni“ načtené ze souboru „data.mat“ (vlevo) a obsah první položky z neznámé „mereni“ (vpravo)	27
Obr. 11 Výpis z konzole po vyzvání uživatele k zadání koeficientů <i>kužs</i>	27
Obr. 12 Výpis z konzole po vyzvání uživatele k zadání poloměrů plochy plasticity	27
Obr. 13 Výpis z konzole po vyzvání uživatele k zadání Youngova modulu pružnosti	27
Obr. 14 Tahový diagram, z které bude probíhat výpočet Youngova modulu pružnosti	28
Obr. 15 Výpis z konzole po vyzvání uživatele k zadání oblasti pro výpočet Youngova modulu pružnosti	28
Obr. 16 Kontrolní graf prvního pracovního cyklu	28
Obr. 17 Kontrolní graf druhého pracovního cyklu	29
Obr. 18 Kontrolní graf třetího pracovního cyklu	29

Seznam tabulek

Tabulka 1: Segmentace pracovního cyklu	21
Tabulka 2: Vektory potřebné k optimalizaci	24

Seznam souborů na přiloženém CD

identifikace.m

segmentace.m

grafy.m

1. Úvod

Před desítkami let se většina součástí konstruovala tak, aby zatížení nepřesáhlo mez kluzu. V dnešní době, kdy se nacházíme v pozdním kapitalismu, jsou v některých odvětví produkce nejdůležitější minimalizace nákladů a prodané množství. Snahou výrobců je vytvořit výrobky, které by se měly rozbít co nejdříve po záruční době. Tomuto se stále přibližují kvůli rozvíjející se metalurgii, přesnější technologii výroby a moderním výpočetním metodám. Mezi dnešními výpočetními metodami má dominantní postavení metoda konečných prvků. Tento příklad je jen jeden z důvodů rozvoje výpočetních metod, ale podle názoru autora je tento důvod nejdůležitější. Dalšími důvody jsou například minimalizace hmotnosti letadel a jiných dopravních prostředků, nutnost simulace složitého tváření plechů a výpočet veškerých tvarově složitých konstrukcí.

Tyto výpočetní metody k funkci potřebují modely chování materiálu. Pro zatížení do meze kluzu je model jednoduchý, materiál se chová elasticky, často lineárně. Pro zatížení nad mez kluzu jsou materiálové modely složitější. Existuje mnoho modelů, ale každý model je schopný popsat jen určité množství experimentálně zjištěných jevů, proto je nutné jednotlivé modely volit podle konečného použití.

Většina těchto modelů není založena na přímé aplikaci poznatků fyziky pevných látek, a proto o nich hovoříme jako o modelech fenomenologických. Bez ohledu na fyzikální správnost modelu je materiál popisován systémem funkcí nebo diferenciálních rovnic, které definují vztah mezi napjatostí a deformací v materiálovém bodě. Jsou tedy definovány rovnicemi s obecnými parametry, které je nutné kalibrovat podle naměřených dat daného materiálu.

Tato práce se konkrétněji zabývá jevy vyskytujícími se v cyklické plasticitě a modely vhodnými pro popis těchto jevů. Jedním z těchto modelů je Chabocheův model, pro který byl vytvořen program ke kalibraci jeho parametrů.

2. Teoretická východiska práce

2.1. Experimentální poznatky chování materiálů

2.1.1. Tahový diagram

Tahový diagram popisuje závislost mezi napětím a poměrným prodloužením při zkoušce jednoosým tahem. Může být vyjádřen jako smluvní tahový diagram nebo skutečný tahový diagram. Smluvním tahovým diagramem se rozumí závislost smluvního napětí σ_s na poměrném prodloužení $\bar{\varepsilon}$.

Smluvní napětí σ_s je dáno vztahem

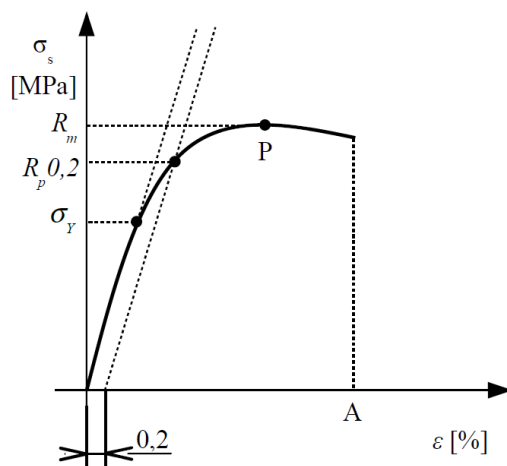
$$\sigma_s = \frac{F}{S_0}, \quad (2.1)$$

kde F je zatěžující síla a S_0 je původní průřez zatěžovaného vzorku. Další veličinou je poměrné podélné prodloužení $\bar{\varepsilon}$ definované vztahem

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (2.2)$$

kde L je délka vzorku po zatížení silou F a L_0 je původní délka vzorku.

Na Obr. 1 je zobrazen smluvní tahový diagram pro materiál s nevýraznou mezí kluzu s vyznačenými veličinami nejčastěji používanými k popisu mechanických vlastností polykrystalických látek.



Obr. 1 Smluvní tahový diagram [1]

Veličina σ_y označuje mez kluzu. Protože se těžko určuje přesná hodnota u materiálů s nevýraznou mezí kluzu, používá se tzv. smluvní mez kluzu. Smluvní mez kluzu lze určit třemi způsoby:

1. Z trvalé deformace po odlehčení - R_r
2. Z trvalé deformace pod zatížením - R_p
3. Z celkové deformace pod zatížením - R_t

Pro oceli a litiny se nejčastěji používá smluvní mez kluzu $R_p 0,2$, to je napětí, které způsobí trvalou deformaci 0,2 % původní délky.

Velmi důležitou veličinou je tzv. Youngův modul pružnosti E , který odpovídá sklonu lineární části tahového diagramu. Bod, kde končí linearita tahového diagramu, se nazývá mez úměrnosti. Chování materiálu do mezi úměrnosti popisuje tzv. Hookův zákon rovnicí

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.3)$$

Bod P v obr.1 se nazývá bod nestability. Definuje nám mez pevnosti v tahu R_m , která je určena vztahem

$$R_m = \frac{F_m}{S_0} \quad (2.4)$$

kde F_m je maximální síla dosažená při tahové zkoušce.

Tažnost A je poměrné podélné prodloužení po přetržení a lze ji určit vztahem

$$A = \frac{L_f - L_0}{L_0} \quad (2.5)$$

kde L_f je délka vzorku po přetržení.

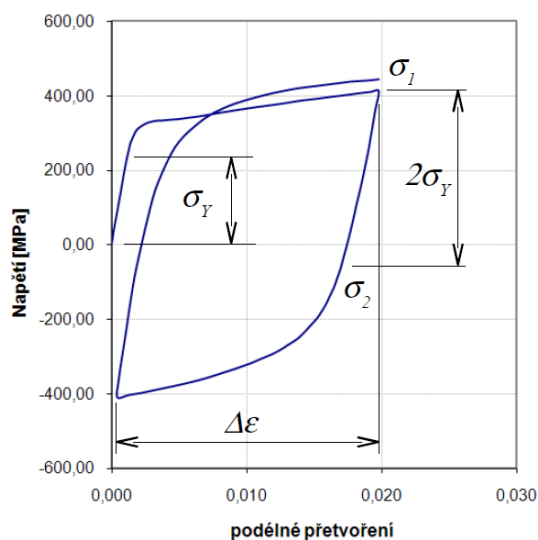
Je nutné si uvědomit, že se při zatěžování mění průřez, a proto se zavádějí veličiny skutečné napětí σ a logaritmická (někdy nazývaná přirozená) deformace ε .

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} \cdot \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) = \sigma_s \cdot (1 + \bar{\varepsilon}) \quad (2.6)$$

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln \frac{\Delta L + L_0}{L_0} = \ln(1 + \bar{\varepsilon}) \quad (2.7)$$

2.1.2. Bauschingerův efekt

Tento efekt zachycuje skutečnost, že se zatížením materiálu do stavu plasticity ovlivňuje napětí potřebné k dosažení stavu plasticity při reverzním zatížením.

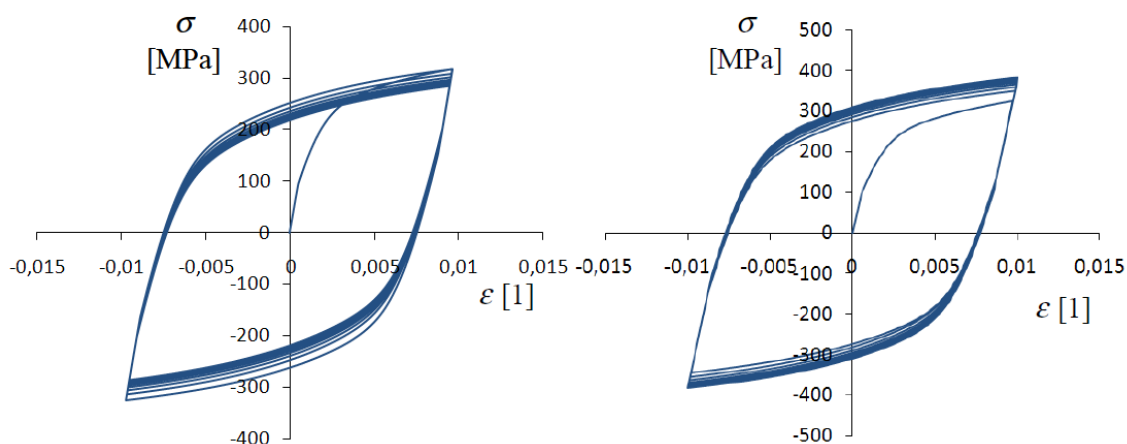


Obr. 2 Graf zatížení zachycující Bauschingerův efekt [1]

Pro jednoosý případ platí, že se materiál zatížený tahově na hodnotu napětí σ_{max} a poté zatěžovaný tlakem se bude chovat lineárně pro hodnoty napětí $\sigma_{max} > \sigma > \sigma_{max} - 2 \cdot \sigma_y$, kde σ_y mez kluzu.

2.1.3. Cyklické zpevnění(změkčení) materiálů

Většina cyklicky zatěžovaných materiálů mění odpor proti deformaci v závislosti na počtu zatěžovacích cyklů. Pokud se odpor zvětšuje s počtem cyklů, jedná se o cyklické zpevnění, v případě opačném o cyklické změkčení.



Obr. 3 Cyklické změkčení (vlevo) a cyklické zpevnění (vpravo) [1]

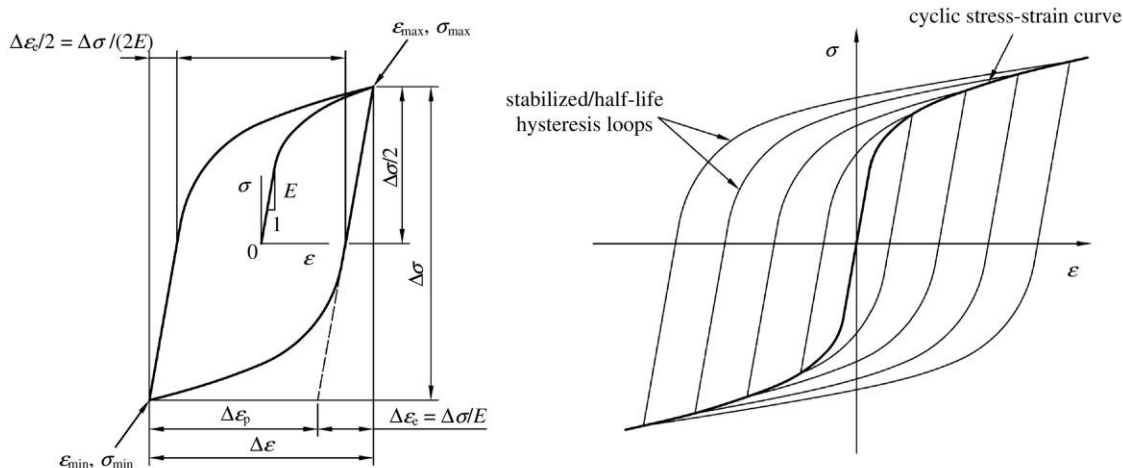
Při deformačně řízených zkouškách (tvrdé zatěžování) dochází k zvětšování amplitudy napětí u cyklicky zpevňujícího se materiálu a ke zmenšování u cyklicky změkčujícího.

Logicky se při napět'ově řízených zkouškách (měkké zatěžování) zmenšuje amplituda deformací u zpevňujícího se materiálu a zvětšuje se u změkčujícího.

Není pravidlem, že by materiál musel být výlučně cyklicky zpevňující nebo výlučně cyklicky změkčující. Existují materiály, které jsou nejdříve změkčující a po určitém počtu cyklů zpevňující. Příkladem tohoto chování je nerezová ocel 316L.

2.1.4. Cyklická deformační křivka

K sestavení cyklické deformační křivky je třeba naměřit napět'ovou odezvu tvrdě zatěžovaného materiálu pro různé amplitudy deformace. K cyklickému zpevnění/změkčení dochází v průběhu mnoha cyklů, proto lze smyčky přibližně v polovině životnosti uvažovat za uzavřené. Cyklická deformační křivka vznikne vložení těchto smyček do jednoho grafu a propojením vrcholů smyček.



Obr. 4 Hysterezní smyčka (vlevo) a cyklická deformační křivka (vpravo) [2]

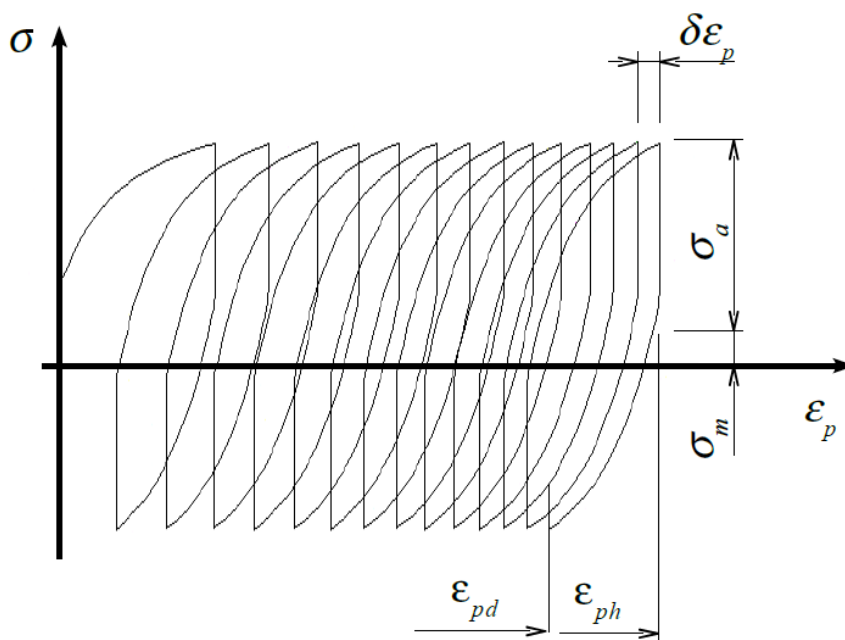
Pro popis tvaru cyklické deformační křivky se často používá Rambergova-Osgoodova aproximace, která je popsána rovnicí

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (2.8)$$

kde K' je modul cyklického zpevnění a n' je exponent cyklického zpevnění.

2.1.5. Ratcheting

K ratchetingu dochází při zatěžování materiálu cyklickým napětím o nenulovém středním napětím. Za těchto podmínek se hysterezní smyčky neuzavírají a akumuluje se plastická deformace v jednom směru.



Obr. 5 Jednoosý ratcheting [1]

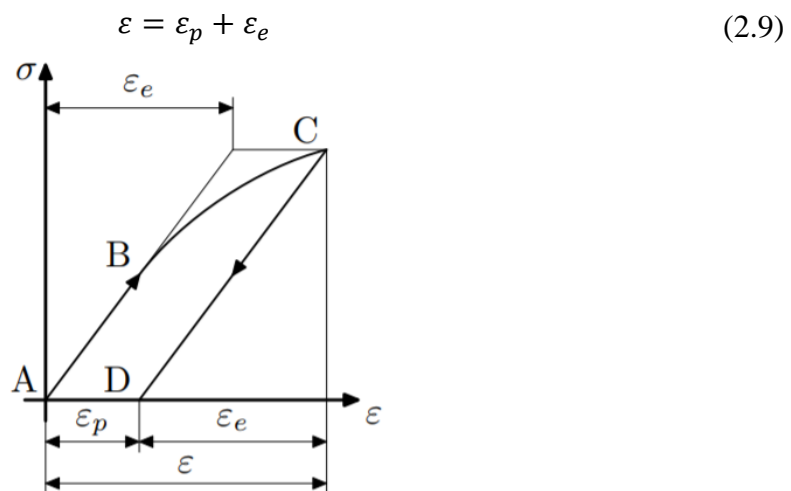
2.2. Základy inkrementální teorie plasticity

Závislost napětí na deformace nelze popsat jednoznačnou rovnicí, protože napětí závisí i na historii zatěžování, rychlosti deformace a dalších vlivech. V této práci se řeší jen úlohy, u kterých jsou zanedbané všechny vlivy kromě historie zatěžování. Co lze popsat jednoznačně je závislost přírůstku napětí na přírůstku deformace. Tyto závislosti popisuje inkrementální (přírůstková) teorie plasticity.

Inkrementální teorie plasticity je dnes často využívanou teorií popisující elastoplastické chování materiálu. Její největší využití je v numerickém modelování, např. v masově využívané metodě konečných prvků. V následujících kapitolách budou popsány její základní poznatky.

2.2.1. Aditivní zákon

Aditivní zákon uvádí fakt, že materiál chovající se podle Hookova zákona zatížený do plastického stavu se při následném odlehčování chová lineárně a se stejným sklonem jako elastická část zatěžované větve. Po úplném odlehčení lze z Obr. 6 odvodit, že se celková deformace ε skládá z plastické (trvalé) deformace ε_p a z elastické (pružné) deformace ε_e .



Obr. 6 Ukázka zatížení do plastického stavu a odlehčení [3]

2.2.2. Podmínka plasticity

U tahového diagramu byla definovaná mez, kde se materiál začne chovat plasticky jako mez kluzu σ_y . Pro obecný stav napjatosti je nutné definovat podmínku, při jejímž splnění se při dalším zatěžování rozvíjí plastická deformace. Tato podmínka je zvaná podmínkou plasticity

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y = 0 \quad , \quad (2.10)$$

kde $f(\boldsymbol{\sigma})$ je tzv. funkce plasticity a $f(\boldsymbol{\sigma})$ je funkce tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$. Nejznámějšími funkcemi $f(\boldsymbol{\sigma})$ jsou Trescova podmínka plasticity

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (2.11)$$

a von Misesova podmínka plasticity

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad , \quad (2.12)$$

kde σ_1 , σ_2 a σ_3 jsou hlavní napětí.

Pokud z podmínky plasticity vytvoříme graf v souřadném systému hlavních napětí, vznikne tzv. plocha plasticity. Pro von Misesovu podmínku je plochou plasticity válec, jehož poloměrem je σ_y a jeho osu popisuje rovnice $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

2.2.3. Pravidlo zpevnění

Pravidlo zpevnění popisuje, jak se mění plocha plasticity materiálu se zpevněním při zatěžování, které splňuje podmínku plasticity. Mezi nejjednodušší transformace patří rovnoměrné zvětšení plochy plasticity ve všech směrech (izotropické zpevnění), posun plochy plasticity (kinematické zpevnění) a jejich kombinace.

U izotropního zpevnění se mění velikost, a proto již nelze obecně použít konstantu meze kluzu σ_y a je zavedena neznámá Y . Po této úpravě má podmínka plasticity tvar

$$f(\boldsymbol{\sigma}, Y) = f(\boldsymbol{\sigma}) - Y = 0 \quad . \quad (2.13)$$

Pro jednoosé tahové zatěžování to znamená, že po větším zatížení σ_{max} než σ_y se Y rovná σ_{max} . K dosažení plasticity v opačném směru musí být zatížení rovno $-Y$. Tento model zpevnění neodpovídá chování Bauschingerovu efektu, a proto není pro cyklické zatěžování samostatně používán.

U kinematického zpevnění dochází ke posunu plochy plasticity a tento posun označen jako kinematický tenzor napětí $\boldsymbol{\alpha}$. Tento tenzor je pro podmínku plasticity odečten od tenzoru zatížení $\boldsymbol{\sigma}$ a tím vzniká rovnice

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - \sigma_y = 0 \quad . \quad (2.14)$$

Tento model zpevnění přibližně odpovídá Bauschingerovu efektu, protože po jednoosém tahovém zatížení σ_{max} větším než σ_y se změní pouze $\boldsymbol{\alpha}$ a k dosažení plasticity v opačném směru se musí dosáhnout napětí $\sigma = \sigma_{max} - 2 \cdot \sigma_y$.

Některým materiálům se při cyklickém zatěžování mění mez kluzu σ_y , proto se používá kombinovaný model zpevnění, který je popsán rovnicí

$$f(\boldsymbol{\sigma}, Y, \boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - Y = 0 \quad . \quad (2.15)$$

Základní modely zpevnění vycházejí z této rovnice, mění se pouze jak jsou předeepsány kinematický tenzor napětí $\boldsymbol{\alpha}$ a proměnná Y .

2.3. Základní modely zpevnění

2.3.1. Pragerův model

Považován za nejjednodušší z modelů je Pragerův model odpovídající bilineárnímu plastickému zpevnění. Vychází z čistě kinematického zpevnění a přírůstek kinematického zpevnění $\boldsymbol{\alpha}$ je lineárně závislý na přírůstku plastické deformace $\boldsymbol{\varepsilon}_p$.

$$d\boldsymbol{\alpha} = \frac{2}{3} \cdot C \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad , \quad (2.16)$$

kde C je konstanta určující sklon přímky v plastické oblasti.

Pro jednoosé namáhání byl v [1] odvozen vztah mezi přírůstkem napětí a plastické deformace

$$d\sigma = C \cdot d\varepsilon_p \quad (2.17)$$

Jednoduchou integrací zjistíme, že se materiál v oblasti plasticity chová lineárně. To je také jeho největší nevýhodou, protože neodpovídá tvaru hysterezních smyček kvůli jejich nelineárnímu průběhu. Nelinearitu zavedli až další modely jako např. vícevrstvý model, který je schopný popsat hysterezní křivku vícero lineárními částmi.

2.3.2. Armstrong-Frederickův model

Prvním modelem, který zavedl nelinearitu do kinematického pravidla zpevnění, byl Armstrong-Frederickův model, známý také jako nelineární kinematický model zpevnění. K Pragerovu modelu byla přidána tzv. paměťová složka závislá na přírůstku akumulované plastické deformace a vznikla rovnice

$$d\alpha = \frac{2}{3} \cdot C \cdot d\varepsilon_p + \gamma \cdot \alpha \cdot dp \quad (2.18)$$

kde C a γ jsou konstanty a dp je přírůstek akumulované plastické deformace, který je popsán rovnicí

$$dp = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot d\varepsilon_p : d\varepsilon_p} \quad (2.19)$$

kde symbol $:$ znamená úžení tenzorů a užívá se Einsteinova sumační konvence

$$d\varepsilon_p : d\varepsilon_p = d\varepsilon_{p_{ij}} \cdot d\varepsilon_{p_{ij}} \quad (2.20)$$

V příloze 1 je ze vzorce (2.18) odvozena závislost napětí na plastické deformaci

$$\sigma = \psi \cdot \sigma_y + \frac{C \cdot \psi}{\gamma} + \left(\alpha_0 - \frac{C \cdot \psi}{\gamma} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot \psi \cdot (\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})} \quad (2.21)$$

kde ψ je proměnná, která nabývá hodnoty $\psi = 1$ pro kladné přírůstky plastické deformace a $\psi = -1$ pro záporné přírůstky plastické deformace, α_0 je počáteční hodnota kinematického napětí a ε_{p0} je počáteční hodnota plastické deformace.

Jedna z možností kalibrace parametrů C a γ je podle tvaru cyklické deformační křivky, jejíž výraz byl odvozen v příloze 2

$$\sigma_a = \sigma_y + \frac{C}{\gamma} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}{2}\right) \quad (2.22)$$

kde ε_{pa} je amplituda plastické deformace a funkce $\tanh(\dots)$ je hyperbolický tangens.

Oproti Pragerovu modelu Armstrong-Frederickův model lépe vystihuje tvar hysterezních smyček. Pro malé amplitudy deformace je tento model dostačující, pro velké amplitudy už jediná exponenciála neodpovídá tvaru hysterezní smyčky. Tuto nevýhodu odstraňuje Chabocheův model.

2.3.3. Chabocheův model

Chabocheův model je velmi podobný předchozímu modelu, celkový kinematický tenzor napětí α je tvořen součtem $M \geq 2$ tenzorů

$$\alpha = \sum_{i=1}^M \alpha_i , \quad (2.23)$$

kde M je počet kinematických tenzorů napětí a každý tenzor α_i je popsán rovnicí obdobné (2.18)

$$d\alpha_i = \frac{2}{3} \cdot C_i \cdot d\varepsilon_p + \gamma_i \cdot \alpha_i \cdot dp . \quad (2.24)$$

Závislost napětí na plastické deformaci se odvodí jako v příloze 1 a jednotlivé vzorce se sečtou. Posledním parametrem γ_M je doporučeno korigovat míru ratchetingu nebo se zvolí $\gamma_M = 0$. V druhém případě je v rovnici (2.24) paměťová složka nulová a α_M se chová jako v Pragerově modelu lineárně.

$$\sigma = \psi \cdot \sigma_y + C_M \cdot \varepsilon_p + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{C_i \cdot \psi}{\gamma_i} + \left(\alpha_{0i} - \frac{C_i \cdot \psi}{\gamma_i} \right) \cdot e^{-\gamma_i \cdot \psi \cdot (\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})} \quad (2.25)$$

Podobně se dá odvodit tvar cyklické deformační křivky

$$\sigma_a = \sigma_y + C_M \cdot \varepsilon_{pa} + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{C_i}{\gamma_i} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma_i \cdot \varepsilon_{pa}}{2}\right) . \quad (2.26)$$

Nejčastěji se používá Chabocheův s $M = 2$ nebo $M = 3$. Větším počtem M se většinou nezlepší tvar hysterezní smyčky, jenom se zvýší počet parametrů a tím i matematická složitost kalibrace.

Chabocheův model dobře vystihuje tvar hysterezních smyček, ale existuje mnoho efektů, které neumí vymodelovat. Příkladem je např. cyklické změkčení/zpevnění, neproporciální zpevnění a také nijak zajištěno, že bude odpovídat prostorovému zatížení.

3. Cíle práce

Cílem této práce je vytvořit v softwaru Matlab program, který s co nejmenším zásahem uživatele identifikuje optimální parametry Chabocheova modelu tak, aby chování odpovídalo naměřené odezvě při cyklickém zatěžování s řízenou deformací. Tento program identifikuje parametry podle tvaru jednoho i více pracovních cyklů v polovině životnosti. Optimální počet kinematických tenzorů napětí je zjišťován iteračně.

Program nejdříve načte naměřená data tvrdě zatěžovaného vzorku při různých amplitudách protažení vzorku. Síly a extenze přepočítá na napětí a deformace. Poté pro všechny amplitudy deformace iteračně vypočítá pořadí cyklu v polovině životnosti, který je nazván pracovním cyklem a bude použit k optimalizaci. Dále za pomoci uživatele zvolí Youngův modul pružnosti a rozsah poloměrů plochy plasticity. Poté se všechny pracovní cykly rozdělí na horní a dolní větve a na elastické části a plastické části. Samotná optimalizace se provádí metodou nelineárních nejmenších čtverců. Nakonec se výsledky uloží do textového souboru.

4. Tvorba programu pro kalibraci parametrů

4.1. Formát naměřených dat

Naměřená data jsou načtena ze souboru „data.mat“ pomocí funkce load('data.mat'). Tento soubor v sobě obsahuje jednu neznámou „mereni“ datového typu „cell“. Ta v sobě obsahuje takové množství neznámých datového typu „struct“, pro kolik amplitud bylo měření provedeno. Každý „struct“ má v sobě následující:

- řada „síla“, obsahující naměřené síly v N
- řada „extenze“, obsahující naměřené výchylky od počáteční délky v mm
- řada „cykly“, obsahující pořadí cyklu (za 1 cyklus se považuje tah-tlak)
- neznámá „D“, která obsahuje průměr měřeného vzorku v mm
- neznámá „L0“, která obsahuje délku nezatíženého vzorku v mm

, kde řady „síla“, „extenze“ a „cykly“ mají stejnou délku a jednotlivé pozice odpovídají bodům měření.

4.2. Úprava dat

4.2.1. Napětí a deformace

Data jsou naměřena ve formě závislosti extenzi na síle. Tyto hodnoty je třeba přepočítat na smluvní napětí (2.1) a poměrnou deformaci (2.2), poté na skutečné napětí σ (2.6) a přirozenou deformaci ε (2.7). Často se měří vzorky válcové, proto je výchozím vzorcem pro výpočet počáteční plochy S_0

$$S_0 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} . \quad (4.1)$$

Pokud vzorek není válcový, lze jednoduše upravit kód u výpočtu smluvního napětí.

Další úpravou je vytvoření řady plastické deformace, aby se mohla vyjádřit závislost napětí na plastické deformaci. Hodnoty plastických deformací jsou odvozeny z (2.9) a (2.3)

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} . \quad (4.2)$$

4.2.2. Vytvoření křivky změkčení/zpevnění

Aby se mohly stanovit pracovní cykly je nejdříve potřeba pro každou měřenou amplitudu deformace vytvořit křivku změkčení/zpevnění. K tomu se pro každý cyklus nalezne maximum napětí a vytvoří se graf závislosti amplitudy napětí na číslu pořadí cyklu.

4.2.3. Stanovení pracovního cyklu z křivky změkčení/zpevnění

Pracovní cyklus je definován jako n-tý cyklus, pro který platí rovnice

$$0,9 \cdot \sigma_a^{(n)} = \sigma_a^{(2 \cdot n)} , \quad (4.3)$$

kde $\sigma_a^{(n)}$ je amplituda napětí n-tého cyklu. Tento cyklus je nalezen iteračně, a to následujícím způsobem. Nejdříve je zvolen počáteční bod na úplném konci měření a je označen $\sigma_a^{(2 \cdot n_0)}$. K němu je přiřazen bod $\sigma_a^{(n_0)}$. V první iteraci se hledá první možný bod v oblasti $n > n_0$, pro který platí

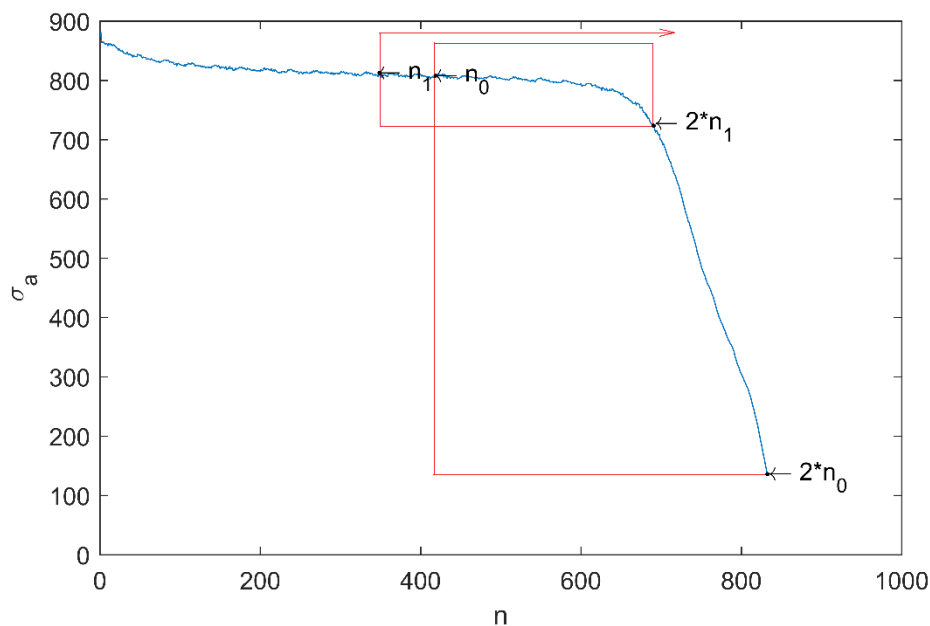
$$0,9 \cdot \sigma_a^{(n_0)} \geq \sigma_a^{(2 \cdot n_1)} , \quad (4.4)$$

jako předtím je k tomuto bodu přiřazen bod $\sigma_a^{(n_1)}$ a iterace pokračuje. Pro jednotlivé body iterace platí rovnice

$$0,9 \cdot \sigma_a^{(n_m)} \geq \sigma_a^{(2 \cdot n_{m+1})} . \quad (4.5)$$

Iterace je ukončena, pokud se n_m a n_{m+1} liší o méně než 1 %. To je zapsáno nerovnicí

$$\frac{|n_m - n_{m+1}|}{n_m} < 0,01 . \quad (4.6)$$



Obr. 7 Ukázka křivky změkčení a znázornění iterace výpočtu pracovního cyklu

4.2.4. Stanovení Youngova modulu pružnosti

Je doporučeno Youngův modul pružnosti měřit samostatně, při speciálním uspořádání zkoušky s dostatečně přesným extenzometrem, pokud není možnost tak učinit, lze jej zjistit lineární metodou nejmenších čtverců. Pro druhou možnost je nutné, aby byl naměřen první cyklus zatížení. Uživateli je zobrazen graf prvního zatížení a je vyzván, aby stanovil oblast, pro kterou se bude řešit lineární regrese. Matematicky se lineární metoda nejmenších čtverců řeší podle rovnice

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \varepsilon & \sum \varepsilon^2 \\ \sum \varepsilon^0 & \sum \varepsilon \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum \varepsilon \cdot \sigma \\ \sum \sigma \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

kde E je hledaný Youngův modul pružnosti a ε_0 je souřadnice průsečíku regresní přímky a osy ε .

4.2.5. Stanovení poloměru plochy plasticity

Z důvodu komplikací při optimalizaci, kde byl poloměr plochy plasticity jeden z kalibrovaných parametrů, je uživatelem zvolen dolní a horní limit poloměru plochy plasticity a dále je zvolen počet bodů. Pro jednotlivé poloměry jsou kalibrovány parametry a poté jsou mezi sebou porovnány výsledky všech poloměrů a je vybrán optimální.

Protože jsou limity poloměru voleny uživatelem, je třeba zakázat hodnoty, u kterých by program selhal. Nejdříve oba limity nesmí být záporné, ale hlavně horní limit nesmí být větší než amplituda napětí nejmenšího pracovního cyklu, protože v opačném případě by teoretická amplituda napětí byla vždy větší než naměřená kvůli Bauschingerovu efektu.

Toto řešení má výhodu možnosti alternativních parametrů, pokud by uživateli z jakéhokoliv důvodu nevyhovovaly optimální parametry.

4.2.6. Segmentace pracovního cyklu

Pracovní cyklus je nejdříve rozdělen na horní a dolní větev. K tomu je třeba zjistit souřadnice vrcholů pracovních cyklů, tedy maximum a minimum deformace. Souřadnice jsou rohů jsou označeny $[\varepsilon_{min}; \sigma_{min}][\varepsilon_{max}; \sigma_{max}]$. Dále jsou spočítány parametry přímky procházející těmito dvěma body

$$\sigma = a \cdot \varepsilon + b$$
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{min} & 1 \\ \varepsilon_{max} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{min} \\ \sigma_{max} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

kde a a b jsou koeficienty přímky.

Nyní lze jednotlivé body z měření rozdělit na horní, pokud jsou nad přímkou, a naopak. Dále je třeba rozdělit obě větve na část elastickou a plastickou. Dle Bauschingerova efektu je pro dosažení plasticity v horní větvi potřeba napětí $\sigma \geq \sigma_{min} + 2 \cdot \sigma_y$. Kvůli počítání odchylky naměřených dat od teoretické křivky je použito rozdělení podle deformace, toto rozhodnutí bude více vysvětleno v kapitole 4.3.7. Pro plastickou část horní větve platí

$$\varepsilon \geq \varepsilon_{min} + \frac{2 \cdot \sigma_y}{E} \quad (4.9)$$

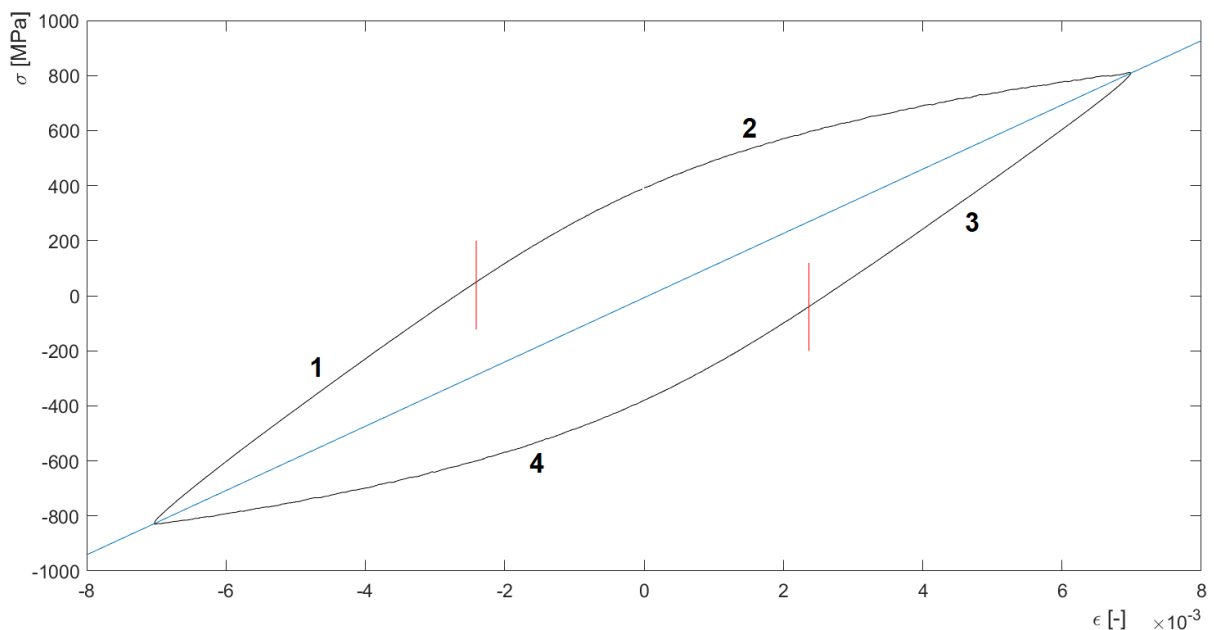
A pro plastickou část dolní větve platí

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{max} - \frac{2 \cdot \sigma_y}{E} \quad (4.10)$$

Podmínky pro segmentaci jednotlivých částí pracovního cyklu jsou shrnuty v následující tabulce.

Tabulka 1: Segmentace pracovního cyklu

1	$\sigma \geq a \cdot \varepsilon + b \wedge \varepsilon < \varepsilon_{min} + \frac{2 \cdot \sigma_y}{E}$
2	$\sigma \geq a \cdot \varepsilon + b \wedge \varepsilon \geq \varepsilon_{min} + \frac{2 \cdot \sigma_y}{E}$
3	$\sigma < a \cdot \varepsilon + b \wedge \varepsilon > \varepsilon_{max} - \frac{2 \cdot \sigma_y}{E}$
4	$\sigma < a \cdot \varepsilon + b \wedge \varepsilon \leq \varepsilon_{max} - \frac{2 \cdot \sigma_y}{E}$



Obr. 8 Ukázka segmentace pracovního cyklu

4.3. Identifikace parametrů

4.3.1. Použitá funkce

Jak bylo napsáno v úvodu, jsou kalibrovány parametry Chabocheova modelu, popsaného rovnicí (2.25). Kalibrovanými parametry při konstantním poloměru plochy plasticity σ_y jsou konstanty C , γ . Tyto parametry jsou identifikovány metodou nelineárních nejmenších čtverců (funkce „lsqnonlin“ v Matlabu). Pro tuto funkci je nutné definovat účelovou funkci, jejíž čtverce bude minimalizovat, počáteční hodnoty parametrů a použitý algoritmus. Výstupem

funkce „lsqnonlin“ jsou samozřejmě optimální parametry, ale také minimalizovaná suma čtverců účelové funkce.

4.3.2. Účelová funkce

Suma čtverců v elastické části je závislá pouze na Youngově modulu pružnosti E a na poloměru plochy plasticity σ_y , oba parametry v tomto případě považujeme za konstantní. Kalibrované parametry ovlivňují pouze sumu čtverců v plastické oblasti. Účelovou funkcí je rozdíl mezi naměřeným napětím a teoretickým napětím při naměřené deformaci. K jejímu vyjádření je nejdříve potřeba odvodit amplitudu plastické deformace ε_{pa} .

$$\varepsilon_{pa} = \varepsilon_a - \frac{2 \cdot \sigma_y}{E} \quad (4.11)$$

Poté je vypočtena počáteční hodnota kinematického napětí z (P2.8) a rozdíl napětí $\Delta\sigma_{pl}$ je odvozen z (2.25).

$$\alpha_{0i} = -\psi \cdot \frac{C_i}{\gamma_i} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma_i \cdot \varepsilon_{pa}}{2}\right)$$

$$\Delta\sigma_{pl} = \psi \cdot \sigma_y - \sigma + C_M \cdot \varepsilon_p + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{C_i \cdot \psi}{\gamma_i} + \left(\alpha_{0i} - \frac{C_i \cdot \psi}{\gamma_i}\right) \cdot e^{-\gamma_i \cdot \psi \cdot \left(\varepsilon_p - \psi \cdot \frac{\varepsilon_{pa}}{2}\right)} \quad (4.12)$$

Pokud jsou parametry kalibrovány podle více než jednoho pracovního cyklu, je nutné rozdíl napětí vydělit počtem naměřených bodů v daném pracovním cyklu. Toto zajišťuje, aby model neupřednostňoval chování pracovního cyklu s větším počtem naměřených bodů. Pokud by uživatel chtěl upřednostnit chování některého z pracovních cyklů, je zaveden koeficient, který je zadán uživatelem a rozdíl napětí se jím vynásobí. Výslednou účelovou funkcí f_{pl} je

$$f_{pl} = \frac{\Delta\sigma_{pl} \cdot k_{už_s}}{n_{pl_s}}, \quad (4.13)$$

kde $k_{už_s}$ je koeficient s-tého pracovního cyklu zadaný uživatelem a n_{pl_s} je počet naměřených bodů v oblasti plasticity s-tého pracovního cyklu.

4.3.3. Použitý algoritmus

Použitá funkce „lsqnonlin“ podrobněji popsána v [4] má možnost použít 2 druhy algoritmu. Výchozím nastavením je „trust-region-reflective algorithm“. Omezením tohoto algoritmu je, že neumí řešit systém, kde je více kalibrovaných parametrů než naměřených bodů. Počet kinematických tenzorů napětí je maximálně 5, to znamená maximálně 9 parametrů. Lze s jistotou říct, že počet naměřených bodů bude mnohonásobně větší než 9, proto lze tento algoritmus pro tuto práci použít.

Druhou možností je „Levenberg-Marquardt algorithm“. Tento algoritmus je podle [1] vhodnější pro větší množství kalibrovaných parametrů. Nevýhodou je, že nelze zadat omezení parametrů. Horní limit parametrů žádný neexistuje, ale parametry nesmí být záporné (dolní limit je 0). Pro záporné parametry exponenciála nevystihuje předpokládaný tvar pracovní smyčky, proto lze tento algoritmus také použít.

Obě možnosti je možno použít, proto jsou provedeny dvě optimalizace s odlišnými algoritmy a poté je vybrán algoritmus, pro který má funkce „lsqnonlin“ nejmenší výstup sumy čtverců.

4.3.4. Počáteční hodnoty parametrů

U většiny optimalizačních metod je zapotřebí zvolit dostatečně dobrý počáteční odhad, aby metoda našla absolutní minimum. Zaručit správnost počátečního odhadu nelze, ale lze zvýšit pravděpodobnost úspěchu pomocí úprav známých vzorců. Pro $M = 1$ lze parametr C_1 odhadnout z derivace napětí v tahovém směru ($\psi = 1$)

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = (-\gamma_1 \cdot \alpha_0 + C_1) \cdot e^{\gamma \cdot (\varepsilon_{p0} - \varepsilon_p)} , \quad (4.14)$$

dále uvažujeme dříve nezplastizovaný materiál, teda $\alpha_0 = 0$ a $\varepsilon_{p0} = 0$. Tuto derivaci vypočteme pro $\varepsilon_p = 0$.

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} \right|_{\varepsilon_p=0} = C_1 \cdot e^{\gamma \cdot 0} = C_1 \quad (4.15)$$

Z tohoto lze odvodit, že parametr C_1 odpovídá sklonu tahového diagramu, jehož ε souřadnice byla převedena na ε_p „na mezi kluzu σ_y “. Jak je vidět z Obr. 1, u materiálů s nevýraznou mezí kluzu téměř nedochází ke zlomu na hodnotě σ_y a toto chování odpovídá velké hodnotě parametru C_1 , proto jako počáteční hodnota parametru C_1 byl zvolen Youngův modul pružnosti E .

Pro počáteční hodnotu parametru γ_1 je použita rovnice (P2.9). Pro možnost použití této rovnice je zavedeno zjednodušení

$$\tanh\left(\frac{\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}{2}\right) = 1 , \quad (4.16)$$

toto zjednodušení vychází z limity pro ε_{pa} jdoucí k nekonečnu, a proto je pro další výpočet použita amplituda napětí z největší pracovní smyčky.

Po zjednodušení rovnice (P2.9) a jejím upravení je odvozen vztah pro počáteční hodnotu parametru γ_1 .

$$\gamma_1 = \frac{C_1}{\sigma_a - \sigma_y} \quad (4.17)$$

Pro $M = 2$ je přidána lineární složka a jako počáteční hodnoty parametrů C_1 a γ_1 jsou zvoleny výsledky z optimalizace pro $M = 1$ a počáteční hodnota lineární složky je zvoleno $C_2 = 0$.

Pro více kinematických tenzorů napětí ($M = 2$ a více) jsou jako v předchozím případě přeneseny hodnoty z minulé iterace, a navíc jsou zvoleny počáteční parametry $C_{M-1} = 0$ a $\gamma_{M-1} = 1$.

4.3.5. Kalibrace parametrů v rámci jednoho poloměru plochy plasticity

Nyní by bylo možné provést kalibraci parametrů podle horní nebo dolní větve, ale ke kalibraci podle obou větví a vícero pracovních smyček zároveň je třeba udělat několik úprav. První úpravou je všechna naměřená napětí v plastické oblasti uspořádat za sebou do jednoho vektoru, a to samé provést s naměřenými deformacemi. O stejné délce se vytvoří vektory všech neznámých z rovnic (4.12) a (4.13), které mění hodnoty s různými pracovními cykly nebo jsou jiné pro dolní a horní větve. Následující tabulka obsahuje všechny takto vytvořené vektory.

Tabulka 2: Vektory potřebné k optimalizaci

$\sigma =$	$\sigma_{pl_{1h}}$	$\sigma_{pl_{1d}}$	$\sigma_{pl_{2h}}$...	$\sigma_{pl_{sh}}$	$\sigma_{pl_{sd}}$
$\varepsilon =$	$\varepsilon_{pl_{1h}}$	$\varepsilon_{pl_{1d}}$	$\varepsilon_{pl_{2h}}$...	$\varepsilon_{pl_{sh}}$	$\varepsilon_{pl_{sd}}$
$\psi =$	l_{1h}	$-l_{1d}$	l_{2h}	...	l_{sh}	$-l_{sd}$
$\varepsilon_{pa} =$	$\varepsilon_{pa_1} \cdot l_{1h}$	$\varepsilon_{pa_1} \cdot l_{1d}$	$\varepsilon_{pa_2} \cdot l_{2h}$...	$\varepsilon_{pa_s} \cdot l_{sh}$	$\varepsilon_{pa_s} \cdot l_{sd}$
$k_{už} =$	$k_{už_1} \cdot l_{1h}$	$k_{už_1} \cdot l_{1d}$	$k_{už_2} \cdot l_{2h}$...	$k_{už_s} \cdot l_{sh}$	$k_{už_s} \cdot l_{sd}$
$n_{pl} =$	$n_{pl_1} \cdot l_{1h}$	$n_{pl_1} \cdot l_{1d}$	$n_{pl_2} \cdot l_{2h}$...	$n_{pl_s} \cdot l_{sh}$	$n_{pl_s} \cdot l_{sd}$

V této tabulce je s celkový počet pracovních cyklů, $\sigma_{pl_{s_h}}$ je vektor napětí s-tého pracovního cyklu v plastické oblasti horní větve, $\varepsilon_{pl_{s_h}}$ je vektor plastické deformace s-tého pracovního cyklu horní větve, l_{sh} je vektor o délce vektoru $\sigma_{pl_{s_h}}$ a na každé pozici obsahuje 1, ε_{pa_s} je amplituda plastické deformace s-tého pracovního cyklu, $k_{už_s}$ je uživatelem definovaný koeficient s-tého pracovního cyklu a n_{pl_s} je počet naměřených bodů v s-tém pracovním cyklu.

Vytvořením těchto vektorů je sice použito větší množství operační paměti, ale autor práce nenašel jiný způsob, jak ke každému naměřenému bodu přiřadit měnící se neznámé.

Nyní je vše připravené k samotné optimalizaci. Je vytvořen „function handle“, který závisí na kalibrovaných parametrech, odkazuje na účelovou funkci z 4.3.2 a vstupem do funkce jsou výše uvedené vektory, daný poloměr plochy plasticity a počet kinematických napětí. Pojem „function handle“ znamená ukazatel na funkci, bez kterého by nebylo možné do funkce „lsqnonlin“ zadat naměřená data a jiné neznámé. Nakonec je vyvolána funkce „lsqnonlin“ a jejím vstupem jsou výše definovaný „function handle“, počáteční hodnoty parametrů z 4.3.4 a použitý algoritmus z 4.3.3.

Optimalizace je nejdříve provedena pro $M = 1$ a jsou uloženy parametry a suma čtverců účelové funkce. To samé je provedeno pro $M = 2$ a je zkontrolována podmínka pokračování iterace. Podmínkou je, že suma čtverců pro dané M musí být menší o 1 % než suma čtverců pro M-1. Matematický zápis je

$$\frac{\sum(f_{pl})^2_M - \sum(f_{pl})^2_{M-1}}{\sum(f_{pl})^2_{M-1}} < 0,01 \quad . \quad (4.18)$$

Pokud podmínka vyhoví, je přidán další kinematický tenzor napětí ($M = M + 1$) a iterace pokračuje. Pokud podmínka nevyhoví, je iterace ukončena. Naposledy přidáný kinematický

tenzor napětí je nadbytečný, a proto je odebrán ($M = M - 1$). Poté se uloží optimální parametry a minimální suma čtverců pro daný poloměr plochy plasticity a celá optimalizace proběhne znovu pro další poloměr.

4.3.6. Hledání optimálního poloměru plochy plasticity

K nalezení optimálního poloměru plochy plasticity je třeba vypočítat sumu čtverců nejen v plastické oblasti, ale i elastické. Suma čtverců v plastické oblasti byla vypočtena v kapitole 4.3.5, zbývá spočítat sumu čtverců v oblasti elastické.

V elastických částí je teoretickou křivkou přímka a rozdíl hodnot teoretických a naměřených je jednoduché vyjádřit rovnicí pro horní větev

$$\Delta\sigma_{el,h} = \sigma - (\sigma_{min} + E \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{min})) \quad (4.19)$$

a pro dolní větev

$$\Delta\sigma_{el,d} = \sigma - (\sigma_{max} - E \cdot (\varepsilon_{max} - \varepsilon)) \quad (4.20)$$

Stejně jako u plastické oblasti je třeba rozdíl napětí vydělit počtem bodů a vynásobit koeficientem zadaný uživatelem. Pro horní větev je konečnou funkcí

$$f_{el,h} = \frac{\Delta\sigma_{el,h} \cdot k_{už_s}}{n_{el,h_s}} \quad (4.21)$$

kde n_{el,h_s} je počet bodů elastické části horní větve s-tého pracovního cyklu a pro dolní větev je konečnou funkcí

$$f_{el,d} = \frac{\Delta\sigma_{el,d} \cdot k_{už_s}}{n_{el,d_s}} \quad (4.22)$$

kde n_{el,d_s} je počet bodů elastické části dolní větve s-tého pracovního cyklu a $k_{už_s}$ je koeficient s-tého pracovního cyklu zadaný uživatelem.

Suma čtverců v elastické oblasti se získá jednoduchým sečtením kvadrátů funkcí $f_{el,h}$ a $f_{el,d}$ všech naměřených bodů v elastické oblasti.

Nyní se vypočítá celková suma čtverců daného poloměru plochy plasticity sečtením jednotlivých sum čtverců.

$$\sum (f_{cel})^2 = \sum (f_{pl})^2 + \sum (f_{el,h})^2 + \sum (f_{el,d})^2 \quad (4.23)$$

Optimální poloměr plochy plasticity, je takový poloměr, kterému odpovídá nejmenší celková suma čtverců $\sum (f_{cel})^2$.

Nakonec jsou do textového souboru uloženy optimální poloměr plasticity, k němu příslušející parametry, celková suma čtverců a použitý algoritmus. Dále jsou do souboru uloženy parametry pro všechny poloměry plochy plasticity pro možnost alternativy.

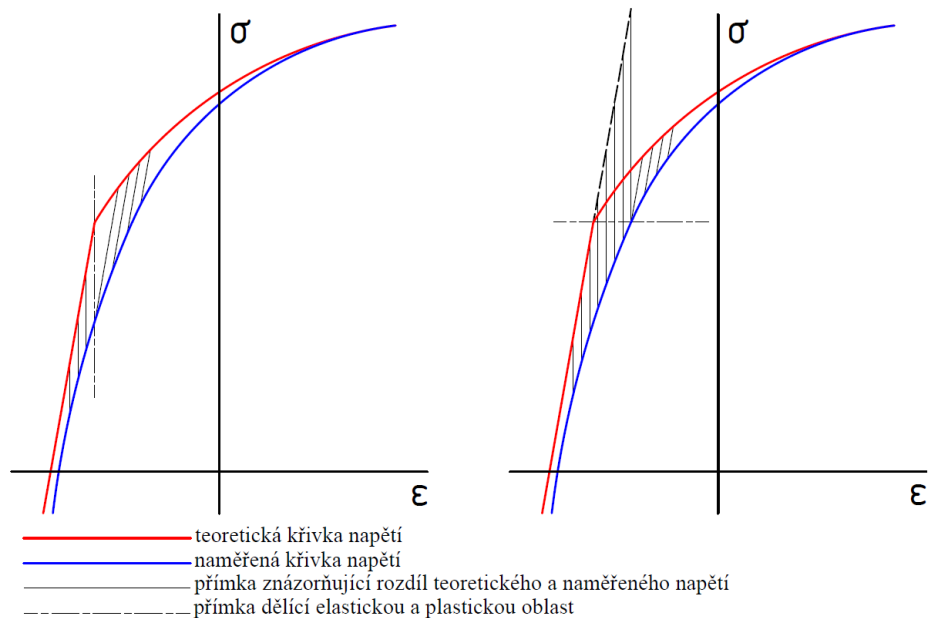
4.3.7. Problémy v oblasti přechodu z elastické na plastickou částí

Jak bylo možné si všimnout, účelová funkce v elastické části je závislá deformaci a v plastické oblasti je závislá na plastické deformaci. V plastické oblasti je rozdíl teoretických a

naměřených napětí hledán ve zkosených souřadnicích. Tento problém lze vyřešit dosazením rovnice (4.2) do rovnice (2.25), to by však vytvořilo implicitně zadanou funkci. Implicitní rovnici není v Matlabu těžké vyřešit například funkcí „fzero“. Tato funkce by však musela být řešená pro všechny naměřené body a pro každý iterační krok funkce „lsqnonlin“, což by nejspíš velmi zpomalilo program. Proto tato funkce není použita, ale toto rozhodnutí přináší jiné problémy.

Prvním problémem je, že derivace napětí na začátku plastické oblasti je blíže Youngovu modulu pružnosti než derivace kdekoli jinde v oblasti plasticity. To znamená, že je rozdíl teoretických a naměřených napětí zvětšený na začátku a kvůli tomu program upřednostňuje, aby tvar křivek odpovídal na přechodu z elastické do plastické oblasti. Tento efekt se nejvíce projevuje pro malé poloměry plochy plasticity.

Druhým problémem je, že se na přechodu mezi elastickou a plastickou oblastí mění souřadnicový systém. Na následujícím obrázku jsou ukázány následky tohoto přechodu a je porovnáno rozdělení větve podle deformace (vlevo) a podle napětí (vpravo).



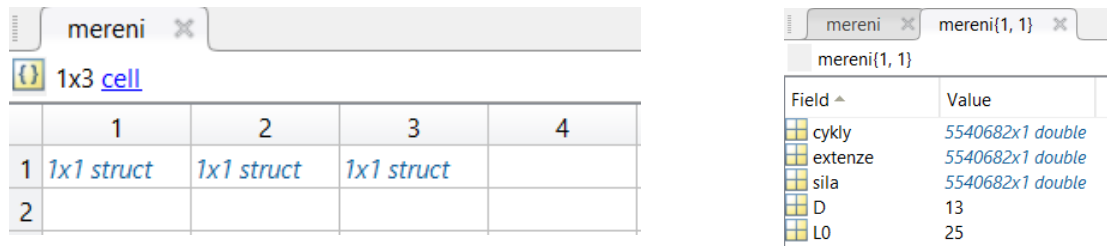
Obr. 9 Rozdíl teoretického a naměřeného napětí na přechodu z elastické do plastické oblasti

Z obrázku dělení podle napětí lze vypožorovat, že je nutné extrapolovat teoretickou elastickou část, aby se mohli všechny rozdíly napětí vypočítat. Pro dělení podle deformace nejsou žádné úpravy nutné, a proto bylo v kapitole 4.2.6 použito dělení podle deformace. Ostatně dává větší smysl, aby byla dělící přímka ve směru, v kterém se počítá rozdíl napětí.

4.4. Verifikace programu

K verifikaci programu jsou použity data naměřená Ing. Michalem Bartošákem, Ph.D. Měřená byla tvrdě zatěžovaná ocel s nevýraznou mezí kluzu za mírně zvýšené teploty. Byla mi poskytnuta data ze tří amplitud deformací.

Nejdříve je nutné připravit data, aby byla ve formátu, jak je popsáno v kapitole 4.1. Následující obrázek ukazuje, jak by měla data vypadat v prostředí Matlabu.



Obr. 10 Obsah neznámé „mereni“ načtené ze souboru „data.mat“ (vlevo) a obsah první položky z neznámé „mereni“ (vpravo)

Program „identifikace“ je spuštěn a automaticky provádí úkony z kapitoly 4.2, až je zastaven, aby uživatel zadal koeficienty $k_{už_s}$. Uživateli jsou ukázány grafy jednotlivých pracovních smyček a je vyzván k zadání koeficientů. Koeficienty jsou zadávány ve formátu vektoru, kde s-tá pozice tohoto vektoru obsahuje koeficient $k_{už_s}$.

```
Zadejte koeficienty pracovnich smycek ve forme [koef_1 koef_2 ... koef_n]
Delka vektoru koeficientu musi byt 3
fx [1 2 3]
```

Obr. 11 Výpis z konzole po vyzvání uživatele k zadání koeficientů $k_{už_s}$

Na obrázku výše je znázorněno, jak zadat koeficienty $k_{už_1} = 1$, $k_{už_2} = 2$ a $k_{už_3} = 3$. Po odeslání příkazu je uživatel vyzván k zadání rozsahu poloměry plochy plasticity. Uživatel buď zadá jediný poloměr nebo ve formě vektoru zadá minimální a maximální poloměr a počet bodů vektoru poloměrů.

```
Zadejte sigma_y ve formě skalaru nebo vektoru [sigma_y_min sigma_y_max počet_bodů].
Minimální počet bodů je 2. Maximální sigma_y je kvůli minimální amplitudě napětí 745.2
fx [100 300 6]
```

Obr. 12 Výpis z konzole po vyzvání uživatele k zadání poloměrů plochy plasticity

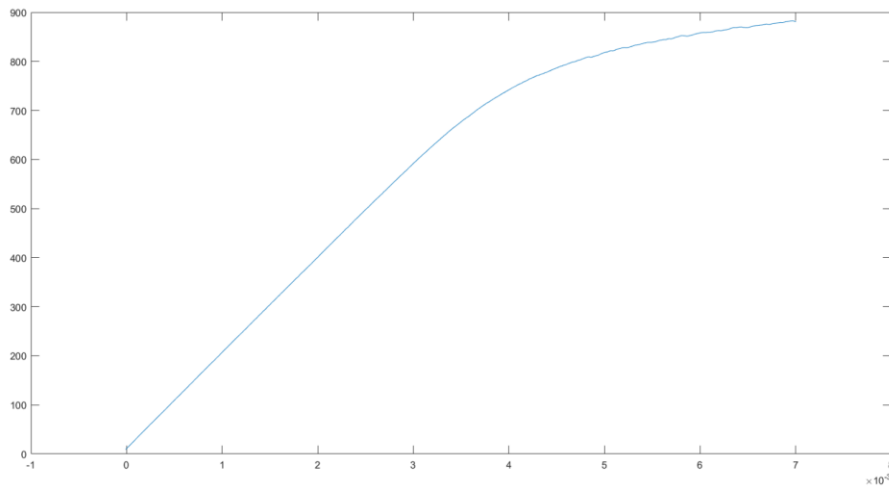
Na tomto obrázku je znázorněno, jak zadat rozsah poloměrů od 100 MPa do 300 MPa a 6 řešených bodů v tomto rozsahu. Také je uveden maximální poloměr plochy plasticity, který se podle 4.2.5 rovná amplitudě napětí nejmenšího pracovního cyklu.

Uživatel je dále vyzván, aby buď zadal Youngův modul pružnosti nebo souhlasil s tím, že ho vyhodnotí program.

```
Zadejte Younguv modul pružnosti v MPa.
Pokud ho ma vyhodnotit program nic nepiste a stisknete enter
fx 210000
```

Obr. 13 Výpis z konzole po vyzvání uživatele k zadání Youngova modulu pružnosti

Na obrázku je ukázáno, jak zadat $E = 210\,000$ MPa. Pokud uživatel nemá k dispozici externě naměřený Youngův modul pružnosti, je uživateli ukázán tahový diagram (horní větve prvního cyklu) a je vyzván, aby zadal oblast deformace, pro kterou se bude hledat regresní přímka.



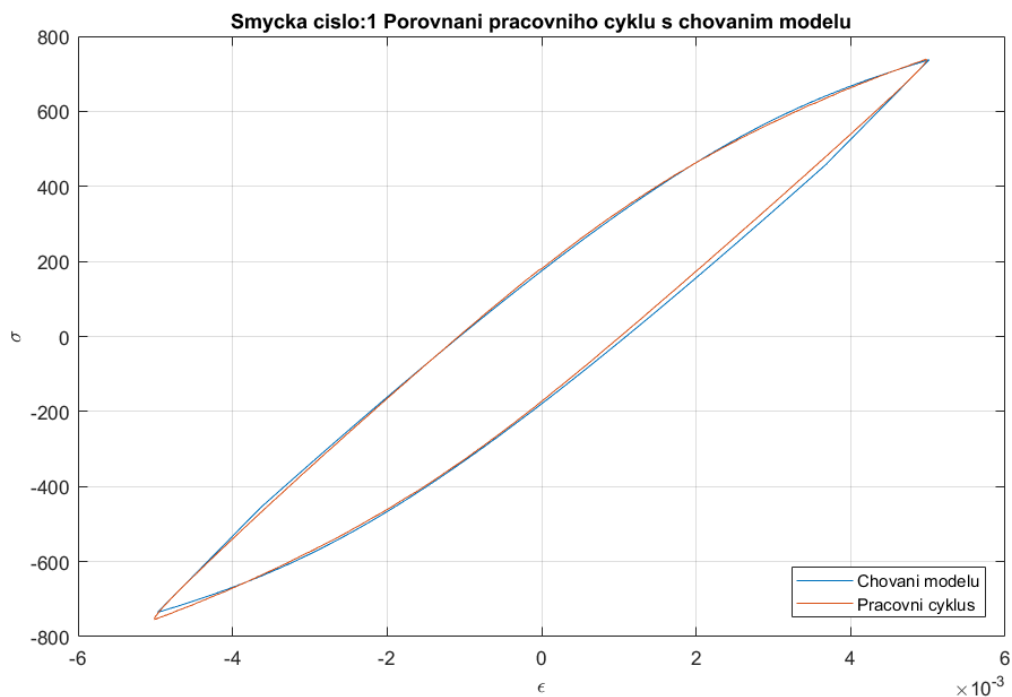
Obr. 14 Tahový diagram, z které bude probíhat výpočet Youngova modulu pružnosti

Zadejte oblast, ve které se bude resit lineární regrese ve formě [eps_min,eps_max]
 ϵ [0.0005 0.001]

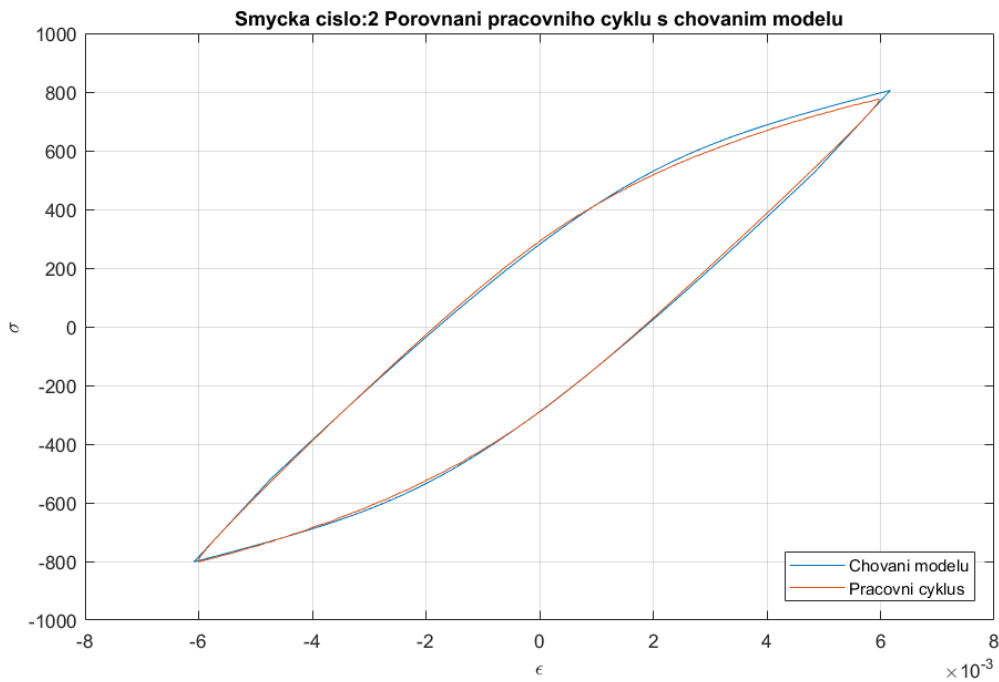
Obr. 15 Výpis z konzole po vyzvání uživatele k zadání oblasti pro výpočet Youngova modulu pružnosti

Na Obr. 14 je vidět tahový diagram, který nezašel až do bodu nestability, pro výpočet Youngova modulu pružnosti bohatě stačí, že se dostal do plastické oblasti. Na Obr. 15 je ukázáno jak zadat oblast regrese od hodnoty deformace 0,0005 do 0,001.

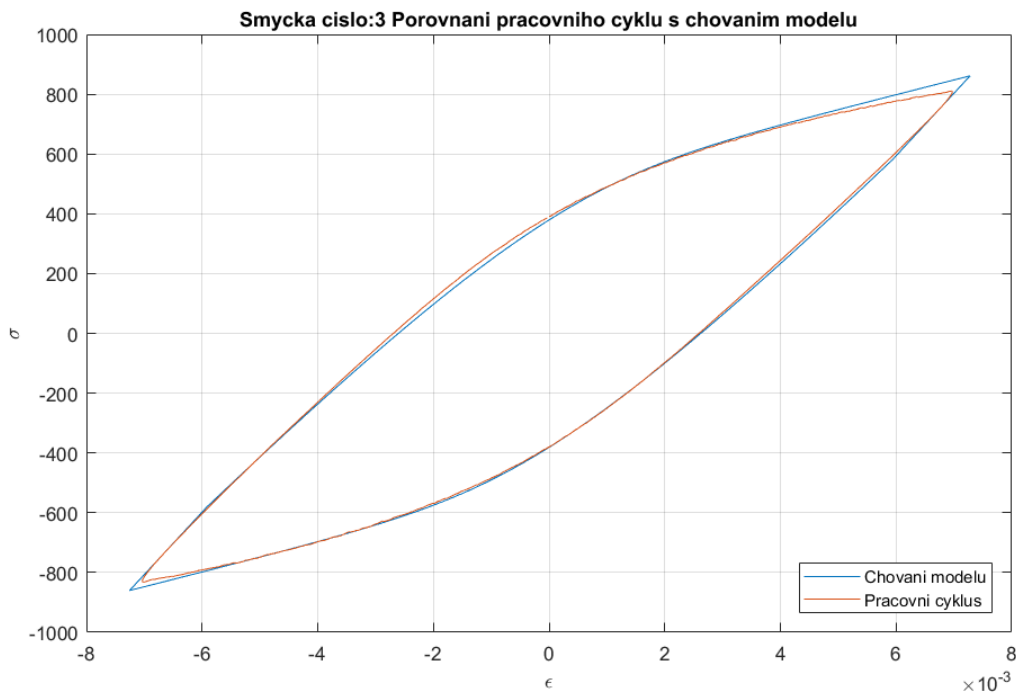
Poté už program může kalibrovat parametry a po dokončení optimalizace je uživatel naposledy dotázán, jestli chce zobrazit kontrolní grafy, kde jsou porovnány tvary pracovních cyklů a chování modelu při optimálních parametrech.



Obr. 16 Kontrolní graf prvního pracovního cyklu



Obr. 17 Kontrolní graf druhého pracovního cyklu



Obr. 18 Kontrolní graf třetího pracovního cyklu

Jak je vidět z kontrolních grafů, chování modelu dobře odpovídá naměřeným datům. Jedinou výjimkou jsou v druhém a třetím pracovním cyklu konce plastických oblastí, což odpovídá problému popsanému v kapitole 4.3.7. Amplitudy deformace úplně neodpovídají, důvodem je vytvoření grafů chování modelu ze zadané amplitudy plastické deformace.

Nyní už program pouze uloží kalibrované parametry do souboru „výsledky.txt“. Zde je obsah tohoto souboru po kalibraci podle verifikačních dat:

Výsledky pro $E=209051.12$

Optimalni vysledky:

Pouzity algoritmus:trust-region-reflective

$\sigma_y=140.00$ suma ctvercu=22.45 $C_1=724688.86$ $\gamma_1=1396.91$ $C_2=0.00$
 $\gamma_2=1.00$ $C_3=0.00$ $\gamma_3=1.00$ $C_4=0.00$ $\gamma_4=1.00$ $C_{lin}=64183.92$

Vsechny vysledky:

Pouzity algoritmus:trust-region-reflective

$\sigma_y=100.00$ suma ctvercu=28.20 $C_1=842287.29$ $\gamma_1=1540.95$ $C_2=0.00$
 $\gamma_2=1.00$ $C_3=0.00$ $\gamma_3=1.00$ $C_4=0.00$ $\gamma_4=1.00$ $C_{lin}=62460.32$

Pouzity algoritmus:trust-region-reflective

$\sigma_y=140.00$ suma ctvercu=22.45 $C_1=724688.86$ $\gamma_1=1396.91$ $C_2=0.00$
 $\gamma_2=1.00$ $C_3=0.00$ $\gamma_3=1.00$ $C_4=0.00$ $\gamma_4=1.00$ $C_{lin}=64183.92$

Pouzity algoritmus:trust-region-reflective

$\sigma_y=180.00$ suma ctvercu=25.55 $C_1=611935.76$ $\gamma_1=1243.99$ $C_2=0.00$
 $\gamma_2=1.00$ $C_3=0.00$ $\gamma_3=1.00$ $C_4=0.00$ $\gamma_4=1.00$ $C_{lin}=63341.30$

Pouzity algoritmus:trust-region-reflective

$\sigma_y=220.00$ suma ctvercu=34.70 $C_1=511249.89$ $\gamma_1=1098.05$ $C_2=0.00$
 $\gamma_2=1.00$ $C_3=0.00$ $\gamma_3=1.00$ $C_4=0.00$ $\gamma_4=1.00$ $C_{lin}=61250.77$

Pouzity algoritmus:trust-region-reflective

$\sigma_y=260.00$ suma ctvercu=47.70 $C_1=424778.96$ $\gamma_1=966.58$ $C_2=0.00$ $\gamma_2=1.00$
 $C_3=0.00$ $\gamma_3=1.00$ $C_4=0.00$ $\gamma_4=1.00$ $C_{lin}=59073.04$

Pouzity algoritmus:trust-region-reflective

$\sigma_y=300.00$ suma ctvercu=64.57 $C_1=348268.71$ $\gamma_1=837.30$ $C_2=0.00$ $\gamma_2=1.00$
 $C_3=0.00$ $\gamma_3=1.00$ $C_4=0.00$ $\gamma_4=1.00$ $C_{lin}=55602.62$

V souboru je posledním parametrem každého řešení $C_{lin}=64183.92$, to je poslední parametr Chabocheova modelu, kterému odpovídá $\gamma = 0$. Pokud je v souboru parametr C roven 0, znamená to, že tento parametr a jemu příslušící γ nebyly použity.

Optimálními parametry odpovídající naměřeným datům pro $E = 209051$ MPa jsou

$$\sigma_y = 140 \text{ MPa}, C_1 = 724689, \gamma_1 = 1397, C_2 = 64184$$

Velmi zajímavé je, že pro všechny poloměry plochy plasticity byla použita 2 kinematická napětí. Za předpokladu, že nebyla udělána chyba v programování, je to nejspíše z důvodu, že jsou na tolik velké amplitudy plastické deformace, aby nestačil nelineární kinematický model zpevnění, ale pracovní smyčky nejsou tak tvarově složité, aby vyžadovaly 3 kinematická napětí.

Závěr

Na začátku teoretické části práce v kapitole 2.1 byly popsány základní experimentální poznatky chování materiálu jako jsou tahový diagram, Bauschingerův efekt, cyklické změkčení a cyklická deformační křivka. Kapitola 2.2 se zabývala základy inkrementální teorie plasticity nutné k odvození základních modelů zpevnění, kterými se zabývala kapitola 2.3. Mezi tyto modely patří Pragerův model, Armstrong-Frederickův model a Chabocheův model. Pro Armstrong-Frederickův byla v příloze 1 odvozena rovnice vztahu napětí na plastické deformaci a v příloze 2 byla odvozena rovnice tvaru cyklické deformační křivky. Tyto rovnice bylo možné s drobnou úpravou použít i u Chabocheova modelu. Tato část práce by měla splňovat bod 1) v zadání.

V praktické části byly popsány všechny kroky potřebné k vytvoření programu, který je schopný kalibrovat parametry Chabocheova modelu. Tento program kalibruje parametry podle tvaru hysterezních smyček. Největší překážkou bylo naprogramovat, aby bylo možné kalibrovat parametry podle horní i dolní větve hysterezní smyčky a také podle více než jedné hysterezní smyčky najednou. Tento odstavec odpovídá bodu zadání 2) a na přiloženém CD je kód kalibračního programu, který odpovídá bodu 3).

Na konci praktické části byl program vyzkoušen na verifikačních datech a zároveň byl vytvořen stručný návod na použití programu. Na Obr. 16, Obr. 17 a Obr. 18 jsou zobrazeny porovnání naměřených dat oproti teoretickému chování Chabocheova modelu s vypočtenými parametry. Kromě vrcholů hysterezních smyček se teoretické chování velmi blíží naměřeným datům.

Největší nevýhodou programu je, že je použit základní Chabocheův model, a proto neumí vystihnout například cyklické zpevnění/změkčení. Toto se řeší buď proměnnými parametry v průběhu cyklů nebo přidáním izotropního zpevnění. Těmito úpravami nebo dalšími modely se možná autor bude zabývat v dalším studiu. Zde by měl být splněn poslední bod zadání, proto je dle mínění autora splněno zadání bakalářské práce.

Použitá literatura

- [1] R. Halama, Experimentální poznatky a fenomenologické modelování cyklické plasticity kovů, Ostrava: Technická univerzita Ostrava, 2009.
- [2] R. Basan, M. Franulović, I. Prebil a R. Kunc, Study on Ramberg-Osgood and Chaboche models for 42CrMo4 steel and some approximations, Journal of Constructional Steel Research, 2017.
- [3] T. Mareš, „Tom Mares's webpage: Základy teorie plasticity,“ [Online]. Available: <http://drone.fsid.cvut.cz/pp2/Plasticita.pdf>. [Přístup získán 30. 7. 2019].
- [4] The MathWorks, Inc., „Matlab documentation,“ [Online]. Available: <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/lsgnnonlin.html>. [Přístup získán 25. 7. 2019].

PŘÍLOHA 1

Odvození závislosti napětí na deformaci Armstrong-Frederickova modelu

Armstrong-Frederickův model je předepsaný závislostí přírůstku deviátoru kinematického tenzoru napětí $d\alpha$ na přírůstku plastické deformace $d\varepsilon_p$

$$d\alpha = \frac{2}{3}C d\varepsilon_p - \gamma \alpha dp, \quad (\text{P1.1})$$

kde C a γ jsou materiálové konstanty a dp je přírůstek akumulované plastické deformace definovaný vztahem

$$dp = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_p : d\varepsilon_p}. \quad (\text{P1.2})$$

Po dosazení (P1.2) do (P1.1) a převedení problému na jednoosé zatížení je získána rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot d\alpha &= \frac{2}{3} \cdot C \cdot d\varepsilon_p - \gamma \cdot \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot \sqrt{\frac{2}{3} (d\varepsilon_p^2 + 2 \cdot \mu^2 \cdot d\varepsilon_p^2)} \\ d\alpha &= C \cdot d\varepsilon_p - \gamma \cdot \alpha \cdot |d\varepsilon_p| \end{aligned} \quad (\text{P1.3})$$

K možnosti integrovat výraz je zavedena proměnná ψ , která nabývá hodnot pro tah $\psi = 1$, pro tlak $\psi = -1$.

$$\begin{aligned} d\alpha &= C \cdot d\varepsilon_p - \gamma \cdot \alpha \cdot \psi \cdot d\varepsilon_p \\ \int \frac{-\gamma \cdot \psi \cdot d\alpha}{C - \gamma \cdot \alpha \cdot \psi} &= \int -\gamma \cdot \psi \cdot d\varepsilon_p \\ \ln|C - \gamma \cdot \alpha \cdot \psi| - \ln|C - \gamma \cdot \alpha_0 \cdot \psi| &= -\gamma \cdot \psi \cdot \varepsilon_p + \gamma \cdot \psi \cdot \varepsilon_{p0} \end{aligned} \quad (\text{P1.4})$$

V příloze 2 bude odvozeno, že α má při nekonečné amplitudě řídicí deformace limitu $\pm \frac{C}{\gamma}$, proto je výraz $(C - \gamma \cdot \alpha \cdot \psi)$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ kladný. Ze vzorce (P1.4) již lze odvodit explicitní rovnici deviátoru kinematického tenzoru.

$$\begin{aligned} \frac{C - \gamma \cdot \alpha \cdot \psi}{C - \gamma \cdot \alpha_0 \cdot \psi} &= e^{-\gamma \cdot \psi \cdot (\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})} \\ \alpha &= \frac{C \cdot \psi}{\gamma} + \left(\alpha_0 - \frac{C \cdot \psi}{\gamma} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot \psi \cdot (\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})} \end{aligned} \quad (\text{P1.5})$$

Pro dokončení odvození tvaru deformační křivky se dosadí (P1.5) do vzorce $\sigma = \alpha + \psi \cdot \sigma_y$, kde σ_y je aktuální poloměr plochy plasticity a pro Armstrong-Frederickův model je konstantní.

$$\sigma = \psi \cdot \sigma_y + \frac{C \cdot \psi}{\gamma} + \left(\alpha_0 - \frac{C \cdot \psi}{\gamma} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot \psi \cdot (\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})} \quad (\text{P1.6})$$

PŘÍLOHA 2

Odvození konvergence napětí Armstrong-Frederickova modelu při zatěžování řízenou deformací

V příloze 1 byla odvozena obecná závislost napětí na plastické deformaci. V této příloze bude odvozena konvergence napětí při deformačně řízeném cyklickém zatěžování materiálu, který se chová podle Armstrong-Frederickova modelu. Vychází se z rovnice (P1.5) a pro odvození je nutné přijmout předpoklad, že pokud napětí konverguje při řízené plastické deformaci, bude konvergovat i při řízené deformaci.

K odvození je třeba vyjádřit kinematická napětí $\alpha^{(n+2.m)}$ konečných bodů zátěžných větví ($\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_{pa}}{2}$ nebo $\varepsilon_p = -\frac{\varepsilon_{pa}}{2}$), kde m je pořadí cyklu a n je pro tahovou větev číslo sudé a pro tlakovou větev je liché. Výraz $(\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})$ lze pro výpočet těchto napětí nahradit výrazem $\varepsilon_{pa} \cdot \psi$.

$$\alpha^{(n+1)} = \frac{C \cdot \psi}{\gamma} + \left(\alpha^{(n)} - \frac{C \cdot \psi}{\gamma} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}} \quad , \quad (P2.1)$$

Dále se proměnná ψ nahradí ekvivalentním výrazem $(-1)^n$.

$$\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} \cdot e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^n \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}) \quad (P2.2)$$

K důkazu konvergence napětí je nutné vyjádřit závislost $\alpha^{(n+2.m)} = f(\alpha^{(n)}, n, m)$. Nejdříve se vyjádří závislost $\alpha^{(n+2)} = f(\alpha^{(n)}, n)$ dosazením rovnice (P2.2), ve které se za index n dosadí $n + 1$, do neupravené (P2.2).

$$\begin{aligned} \alpha^{(n+2)} &= \alpha^{(n+1)} \cdot e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}) \\ \alpha^{(n+2)} &= \left(\alpha^{(n)} \cdot e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^n \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}) \right) \cdot e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}) \\ \alpha^{(n+2)} &= \alpha^{(n)} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}})^2 \end{aligned} \quad (P2.3)$$

Stejně jako se získala rovnice (P2.3), se dosadí rovnice (P2.3), ve které se za index n dosadí $n + 2$, do neupravené (P2.3) a extrapolací vznikne rovnice $\alpha^{(n+2.m)} = f(\alpha^{(n)}, n, m)$.

$$\begin{aligned} \alpha^{(n+2)} &= \alpha^{(n)} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}})^2 \\ \alpha^{(n+4)} &= \alpha^{(n)} \cdot e^{-4 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}})^2 \cdot (e^{-2 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + 1) \\ \alpha^{(n+6)} &= \alpha^{(n)} \cdot e^{-6 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}})^2 \cdot (e^{-4 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + e^{-2 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + 1) \\ \alpha^{(n+2.m)} &= \alpha^{(n)} \cdot e^{-2 \cdot m \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{pa}} + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{pa}})^2 \cdot \sum_{i=1}^m (e^{-2 \cdot (m-i) \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{pa}}) \end{aligned} \quad (P2.4)$$

Dále bude vyšetřována limita $\alpha^{(n+2.m)}$ pro m jdoucí k nekonečnu. Limitu výrazu $e^{-2.m.\gamma.\varepsilon_{pa}}$ lze vyčíst z grafu e^{-x} .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-2.m.\gamma.\varepsilon_{pa}} = e^{-\infty} = 0 \quad (\text{P2.5})$$

Limita sumy $\sum_{i=1}^m (e^{-2.(m-1).\gamma.\varepsilon_{pa}})$ se řeší jako součet nekonečné geometrické řady.

$$\begin{aligned} q &= \frac{e^{-2.(m).\gamma.\varepsilon_{pa}}}{e^{-2.(m-1).\gamma.\varepsilon_{pa}}} = e^{-2.\gamma.\varepsilon_{pa}} \\ a_1 &= e^{-2.(1-1).\gamma.\varepsilon_{pa}} = 1 \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (e^{-2.(m-1).\gamma.\varepsilon_{pa}}) &= s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-2.\gamma.\varepsilon_{pa}}} \end{aligned} \quad (\text{P2.6})$$

Nyní je vše připravené k vyjádření limity $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha^{(n+2.m)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha^{(n+2.m)} &= \alpha^{(n)} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-2.m.\gamma.\varepsilon_{pa}} \\ &+ \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 - e^{-\gamma.\varepsilon_{pa}})^2 \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (e^{-2.(m-1).\gamma.\varepsilon_{pa}}) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha^{(n+2.m)} &= \alpha^{(n)} \cdot 0 + \frac{C}{\gamma} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 - e^{-\gamma.\varepsilon_{pa}})^2 \cdot \frac{1}{1 - e^{-2.\gamma.\varepsilon_{pa}}} \end{aligned} \quad (\text{P2.7})$$

Z rovnice (P2.7) lze vyčíst, že limita má kladné znaménko pro n liché a záporné pro n sudé. Dále se definuje α_{max} jako $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha^{(n+2.m)}$, pro n je liché číslo.

$$\begin{aligned} \alpha_{max} &= \frac{C}{\gamma} \cdot \frac{(1 - e^{-\gamma.\varepsilon_{pa}})^2}{1 - e^{-2.\gamma.\varepsilon_{pa}}} \\ \alpha_{max} &= \frac{C}{\gamma} \cdot \frac{(1 - e^{-\gamma.\varepsilon_{pa}})^2}{(1 - e^{-\gamma.\varepsilon_{pa}}) \cdot (1 + e^{-\gamma.\varepsilon_{pa}})} = \frac{C}{\gamma} \cdot \frac{1 - e^{-\gamma.\varepsilon_{pa}}}{1 + e^{-\gamma.\varepsilon_{pa}}} \\ \alpha_{max} &= \frac{C}{\gamma} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{P2.8})$$

Funkce $\tanh(x)$ je hyperbolický tangens, definovaný vztahem $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Po dosazení rovnice (P2.8) do rovnice $\sigma_a = \alpha_{max} + \sigma_y$ se vyjádří konečný vztah závislosti $\sigma_a = f(C, \gamma, \varepsilon_{pa})$.

$$\sigma_a = \sigma_y + \frac{C}{\gamma} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}{2}\right) \quad (\text{P2.9})$$

Pro správnost odvození je třeba zkontrolovat předpoklad z přílohy 1, že α má limitu pro amplitudu deformace jdoucí k nekonečnu $\pm \frac{C}{\gamma}$.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_p \rightarrow \infty} \alpha &= \lim_{\varepsilon_p \rightarrow \infty} \frac{C}{\gamma} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}{2}\right) = \frac{C}{\gamma} \cdot 1 = \frac{C}{\gamma} \\ \lim_{\varepsilon_p \rightarrow -\infty} \alpha &= \lim_{\varepsilon_p \rightarrow -\infty} \frac{C}{\gamma} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma \cdot \varepsilon_{pa}}{2}\right) = \frac{C}{\gamma} \cdot (-1) = -\frac{C}{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{P2.10})$$