

Diplomová práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F2

Fakulta strojní
Ústav technické matematiky

Numerické řešení proudění stlačitelné tekutiny pomocí pokročilých metod

Bc. Radek David

Vedoucí: Ing. Jiří Holman, Ph.D.

Studijní program: Matematické modelování v technice
Srpen 2019

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **David** Jméno: **Radek** Osobní číslo: **420482**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Numerické řešení proudění stlačitelné tekutiny pomocí pokročilých metod

Název diplomové práce anglicky:

Numerical solution of compressible flow using advanced Riemann solvers

Pokyny pro vypracování:

1. Popis výchozích rovnic a okrajových, resp. počátečních podmínek.
2. Popis numerické metody založené na metodě konečných objemů.
3. Popis tzv. rotated-hybrid Riemann solver metody a její modifikace, která je založena na kombinaci schémat HLL a HLLC.
4. Odladit program pro výpočet rovinného stlačitelného proudění a otestování na případech nestacionární rázové vlny, nadzvukového proudění GAMM kanálem a hypersonického obtékání válce.

Seznam doporučené literatury:

- Kozel, K. a kol.: Numerické řešení problémů proudění I,II,III: skripta ČVUT.
Godlewski, E. & Raviart, P. A.: Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. Springer-Verlag New York Inc., 1996.
Nishikawa, H. & Kitamura, K.: Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers. Journal of Computational Physics, vol. 227, no. 4: (2008) pp. 2560-2581.
Toro, E. F. & Spruce, M. & Speares, W.: Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver. Shock Waves, vol. 4, no. 1 (1994) pp. 25-34.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:


Ing. Jiří Holman, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

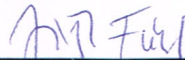
Datum zadání diplomové práce: **17.04.2019**

Termín odevzdání diplomové práce: **18.08.2019**

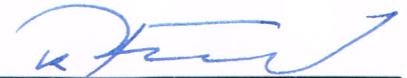
Platnost zadání diplomové práce: _____



Ing. Jiří Holman, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce



doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

30.4.2019

Datum převzetí zadání

R. David

Podpis studenta

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu diplomové práce Ing. Jiřímu Holmanovi, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce a v průběhu celého magisterského studia. Dále bych chtěl poděkovat rodině za jejich podporu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci "Numerické řešení proudění stlačitelné tekutiny pomocí pokročilých metod" vypracoval samostatně pod vedením Ing. Jiřího Holmana, Ph.D. s použitím literatury uvedené na konci diplomové práce v seznamu použité literatury.

V Humpolci 18. srpna 2019

Abstrakt

Práce se zabývá numerickým řešením proudění stlačitelné neviské tekutiny. V první části jsou odvozeny rovnice popisující dynamiku plynů. Následující dvě kapitoly jsou věnovány teorii hyperbolických systémů zákonů zachování a jejich numerickému řešení. Dále se práce zabývá rotovanými hybridními řešiči Riemannova problému, a je představeno nové HLL/HLLC schéma. Na závěr jsou ukázány výsledky výpočtů pomocí tohoto schématu a porovnání s ostatními metodami.

Klíčová slova: Eulerovy rovnice, neviské stlačitelné proudění, metoda konečných objemů, HLL, HLLC, rotovaný hybridní Riemannův řešič

Vedoucí: Ing. Jiří Holman, Ph.D.

Abstract

The thesis deals with numerical simulation of compressible inviscid flows. First of all, equations of gas dynamics are derived. The following two parts are dedicated to theory of hyperbolic systems of conservation laws and their numerical solution. The next chapter concerns itself with rotated hybrid Riemann solvers, and a new HLL/HLLC solver is presented. At the end, some results of numerical computations using this and other methods are shown.

Keywords: Euler equations, inviscid compressible flow, finite volume method, HLL, HLLC, rotated hybrid Riemann solver

Obsah

Úvod	1	3.11 Okrajové podmínky	39
1 Rovnice dynamiky tekutin	3	3.11.1 Okrajové podmínky pro Eulerovy rovnice	39
1.1 Kinematika kontinua	3	3.11.2 Numerická implementace okrajových podmínek	40
1.1.1 Gaussova věta	5	3.12 Časový krok	42
1.1.2 Reynoldsův transportní teorém	5	3.13 Reziduum	43
1.2 Bilanční rovnice	6	4 Rotované hybridní řešiče Riemannova problému	44
1.3 Bilance hmotnosti	6	4.1 Úvod	44
1.4 Bilance hybnosti	7	4.2 Rotované schéma	45
1.5 Bilance momentu hybnosti	8	4.3 Rotované hybridní schéma	45
1.6 Bilance energie	8	4.4 HLL/HLLC rotovaný hybridní řešič Riemannova problému	46
1.7 Bilance entropie	9	4.5 Určení vektorů $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$	47
1.8 Konstitutivní vztahy	10	5 Numerické výsledky	48
1.9 Ideální plyn	11	5.1 Kanál s pravidelnými poruchami sítě	48
1.10 Navierovy-Stokesovy rovnice	12	5.2 Hypersonické obtékání válce	49
1.11 Eulerovy rovnice	13	5.3 Supersonické proudění v GAMM kanálu	50
2 Matematická teorie systémů zákonů zachování	14	5.4 Kontaktní nespojitost - smyková vrstva	50
2.1 Základní pojmy	14	6 Závěr	53
2.2 Eulerovy rovnice v rovině	17	A Literatura	54
2.3 Řešení Riemannova problému	18	B Použité značení	56
2.3.1 Řešení obecného Riemannova problému	18		
2.3.2 Řešení Riemannova problému pro Eulerovy rovnice	20		
2.4 Exaktní řešení Riemannova problému	21		
3 Numerické řešení hyperbolických systémů zákonů zachování	22		
3.1 Způsoby numerického řešení	22		
3.2 Základní pojmy	22		
3.3 Godunovova metoda	24		
3.4 Přibližné řešení Riemannova problému	25		
3.5 Schéma HLL	26		
3.6 Schéma HLLC	28		
3.7 Výpočet signálních rychlostí	30		
3.8 Metoda konečných objemů	31		
3.8.1 Schéma HLL pro metodu konečných objemů ve 2D	35		
3.8.2 Schéma HLLC pro metodu konečných objemů ve 2D	35		
3.9 Metody vyššího řádu přesnosti	36		
3.10 Časová diskretizace	37		
3.10.1 Explicitní metody	37		
3.10.2 Implicitní metody	38		

Obrázky

Tabulky

1.1 Kinematika kontinua	4
2.1 Riemannův problém v 1D	15
2.2 Struktura řešení Riemannova problému pro systém (2.3.1)	19
2.3 Struktura řešení Riemannova problému pro systém (2.3.10)	20
3.1 Znázornění Godunovovy metody	25
3.2 Struktura řešení Riemannova problému pro HLL schéma	26
3.3 Struktura řešení Riemannova problému pro HLLC schéma	28
3.4 Strukturovaná síť pro metodu konečných objemů	31
3.5 Interpolace hodnot na stěny buněk	36
3.6 Koncept fiktivních buněk	40
3.7 Rychlost ve fiktivní buňce	41
3.8 Vektory ξ a η	43
4.1 Rozklad normály	45
5.1 Kanál s poruchami sítě - izočáry hustoty	49
5.2 Geometrie oblasti	50
5.3 Výpočetní síť	50
5.4 Proudění okolo válce s $M = 8$ - izočáry hustoty	51
5.5 Proudění okolo válce s $M = 8$ - konvergence	52
5.6 Supersonické proudění GAMM kanálem - izočáry hustoty	52
5.7 Kontaktní nespojitost - průběh hustoty v $y = 0.25$ po 100 časových krocích	52



Úvod

Tato práce je věnovaná numerickým metodám pro řešení stlačitelného neviskózního proudění, a to především numerickým schémátům, které se používají pro aproximaci konvektivních členů v Eulerově rovnicích.

V první kapitole je věnována základním vztahům popisujících dynamiku proudící tekutiny. Pomocí aparátu mechaniky kontinua jsou odvozeny v obecnosti bilance hmotnosti, hybnosti, energie a entropie pro obecný materiál. Systém je uzavřen konstitutivními rovnicemi, které určují chování materiálu. Nejprve se odvodí vztahy pro tzv. Newtonskou tekutinu, pomocí nichž se ze zákonů bilancí získají Navierovy-Stokesovy rovnice. Poté se zavede model ideálního plynu, tím se soustava doplní o jeho stavovou rovnici. Nakonec se naše zkoumání omezí na neviskózní a tepelně nevodivé plyny, čímž se systém rovnic zjednoduší na Eulerovy rovnice.

Druhá kapitola se zabývá teorií hyperbolických systémů zákonů zachování, mezi něž Eulerovy rovnice patří. Jsou zavedeny nejdůležitější pojmy a věty. Je definováno slabé řešení, které na rozdíl od klasického může obsahovat nespojitosti. Protože ale slabé řešení nemusí být jednoznačné, je představeno tzv. entropické řešení. Je nastíněna teorie řešení Riemannova problému, což je řešení počáteční úlohy s nespojitostí.

Ve třetí části se zabýváme základům numerického řešení systémů zákonů zachování. Nejprve jsou opět definovány základní vztahy. Je ukázána tzv. Godunovova metoda, a dále přibližné řešiče Riemannova problému - schémata HLL a HLLC. Dále je řešen dvoudimenzionální problém - je odvozena metoda konečných objemů. Poté jsou ukázány možnosti časové diskretizace, schémata vyššího řádu přesnosti a numerická realizace okrajových podmínek.

V další kapitole se zabýváme tzv. hybridními rotovanými řešiči Riemannova problému, které mají za cíl eliminovat nevýhody některých numerických metod, především omezit nestabilitu vznikající v oblasti rázových vln. Vzniknou zkombinováním přesné numerické metody, která ovšem může být náchylná na vznik nestabilit, a méně přesné, disipativnější metody, která má za cíl stabilizovat řešení v místech, kde je potřeba. Je představeno nové HLL/HLLC schéma, které patří do rodiny hybridních rotovaných metod.

V poslední části představujeme výsledky numerických simulací HLL/HLLC schématu. Na různých testovacích případech jsou ověřeny jeho vlastnosti a porovnány se standardními metodami. Testovací případy zahrnují řešení

rázové vlny v kanále s deformovanou sítí, hypersonické proudění okolo válce,
test na kontaktní nespojitost a nadzvukové proudění v GAMM kanálu.

Kapitola 1

Rovnice dynamiky tekutin

Výchozí rovnice dynamiky tekutin lze odvodit různými způsoby, v této kapitole budou odvozeny pomocí aparátu mechaniky kontinua. V této teorii se nepřihlíží k tomu, že látka je složena z atomů a molekul, ale předpokládá se, že prostor je spojitě vyplněn hmotou (kontinuem), přičemž kontinuum je nedělitelné (zůstává spojitě i po deformaci) ([19]). Používá se aparát tenzorového počtu, kde tenzor může být definován různě - jako vícerozměrné pole čísel, které se při transformaci souřadnic chová určitým způsobem ([19], [12]), jako jisté multilineární zobrazení ([8]), popřípadě (u tenzorů druhého řádu) jako lineární operátor.

Poznámka 1. V této kapitole nebudu rozlišovat mezi kovariantními a kontravariantními indexy, tenzory budu dle potřeby vyjadřovat v složkovém i symbolickém tvaru a platí Einsteinova sumační konvence.

1.1 Kinematika kontinua

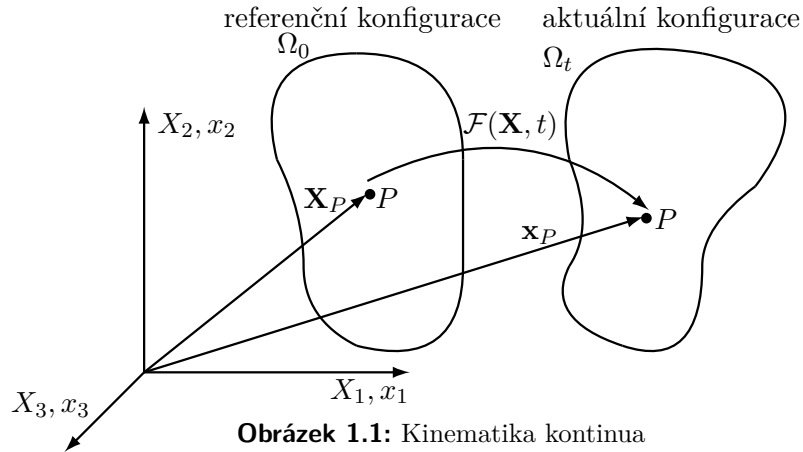
V mechanice kontinua se k popisu kinematiky používá následující představa. Těleso složené z materiálových částic (hypotetická částice kontinua, jíž můžeme přiřadit fyzikální veličiny jako teplota, hustota, apod.) zaujímající objem Ω_t se nachází v čase $t = 0$ v tzv. referenčním stavu (konfiguraci), tedy v nedeformovaném stavu. Po deformaci se v čase $t > 0$ dostane do tzv. aktuálního stavu. Body tělesa v referenčním stavu jsou dané materiálovými souřadnicemi \mathbf{X} , v aktuálním prostorovými \mathbf{x} . Zobrazení, které každému materiálovému bodu v závislosti na čase přiřazuje jeho prostorové souřadnice, se nazývá trajektorií materiálového bodu

$$\mathbf{x} = \mathcal{F}(\mathbf{X}, t). \quad (1.1.1)$$

Po tomto zobrazení se požaduje, aby bylo prosté, mělo spojitě první parciální derivace v okolí bodu \mathbf{X} a aby jacobíán byl v tomto okolí nenulový. Potom existuje jednoznačně inverzní zobrazení

$$\mathbf{X} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (1.1.2)$$

Detailně zde rozebírat kinematiku je zbytečné, omezíme se jen na potřebné vztahy.



Rychlost materiálové částice \mathbf{X} je určena vztahem

$$v_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (1.1.3)$$

Rychlost v prostorových souřadnicích se získá jednoduše tím, že se provede transformace souřadnic do prostorových.

$$v_i(\mathbf{X}, t) = v_i(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = v_i(\mathbf{x}, t). \quad (1.1.4)$$

Tensor rychlosti deformace d_{ij} je určen vztahem

$$d_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right). \quad (1.1.5)$$

To je symetrická část gradientu rychlostního pole $\partial v_i / \partial x_j$.

Mějme veličinu φ , která může být vyjádřena jak pomocí prostorových, tak materiálových souřadnic

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (1.1.6)$$

Zavádí se tzv. *materiálová derivace* $\dot{\varphi}$ jako časová derivace

$$\overline{\dot{\varphi}(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (1.1.7)$$

pro vyjádření v materiálových souřadnicích a

$$\overline{\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} v_j(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.8)$$

pro vyjádření v prostorových souřadnicích.

Popis pomocí referenční a aktuální konfiguraci je vhodnější a názornější pro mechaniku pevných těles. Tento popis se označuje jako Lagrangeovský, a hledají se při něm trajektorie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ materiálových bodů \mathbf{X} . U tekutin nás nezajímá referenční konfigurace, neboť každý okamžitý stav tekutiny se dá považovat za referenční. Stačí nám znát například rozložení rychlostního

pole $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ v prostoru. To je tzv. Eulerovský popis - hledáme rozložení rychlostního pole v aktuální konfiguraci $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jako funkci prostorových souřadnic \mathbf{x} a času. Proto nebudu používat referenční konfiguraci, ale ve všech odvozeních budu používat materiálový objem Ω_t , což je objem materiálu v aktuální konfiguraci. Tento objem obsahuje stále stejné materiálové částice. Alternativou je použít pevný kontrolní objem, který se nepohybuje vzhledem k souřadnému systému, a kterým procházejí různé materiálové částice.

Poznámka 2. Pro potřeby vět a definic v této kapitole jsou na Ω_t kladeny tyto požadavky:

- a) Ω_t je otevřená podmnožina \mathbb{R}^3
- b) $\partial\Omega_t$ je po částech \mathcal{C}^1

1.1.1 Gaussova věta

Důležitou větou, v mechanice kontinua, je Gaussova věta ([12], vč. důkazu):

Věta 1 (Gaussova věta). *Nechť V je třírozměrná varieta (těleso) v \mathbb{R}^3 , jejíž povrch ∂V má vnější normálu \mathbf{n} . Pak platí*

$$\int_V \frac{\partial \psi}{\partial x_k} dV = \int_{\partial V} \psi n_k dA, \quad (1.1.9)$$

$$\int_V \frac{\partial v_k}{\partial x_k} dV = \int_{\partial V} v_k n_k dA. \quad (1.1.10)$$

1.1.2 Reynoldsův transportní teorém

Při odvozování v mechanice kontinua se používá vztah, který umožňuje výpočet derivace integrálu, jehož meze závisí na proměnné, dle které se derivuje. Existuje v různých variantách, zde použiji tu uvedenou např. v ([8], včetně důkazu):

Věta 2 (Reynoldsův teorém). *Nechť $f(\mathbf{x}, t)$ je \mathcal{C}^1 funkce. Poté platí*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varphi dV = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi v_i}{\partial x_k} dV. \quad (1.1.11)$$

To se dá pomocí Gaussovy věty (1.1.10) přeformulovat na tvar s plošným integrálem

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varphi dV = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega(t)} \varphi v_k n_k dA. \quad (1.1.12)$$

Je nutno podotknout, že $\Omega(t)$ je zmíněný materiálový objem, který se pohybuje společně s tekutinou (plošný element dA hranice $\partial\Omega(t)$ má stejnou rychlost \mathbf{v} jako tekutina ve stejném místě) a závisí tedy na čase.

1.2 Bilanční rovnice

Výchozí rovnice mechaniky kontinua lze odvodit pomocí jednotné konstrukce - obecného bilančního zákona, který udává změnu bilancované veličiny v tělese. Z něj se po dosazení získají bilance hmotnosti, hybnosti, momentu hybnosti a energie. Nejprve uvažujme materiálový objem Ω_t , celková hodnota veličiny $\Phi(t)$ v něm je dána integrálem

$$\int_{\Omega_t} \varphi(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.2.1)$$

kde φ je hustota veličiny $\varphi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(t)}{\Delta V}$. Empiricky víme, že časová změna veličiny Φ v tělese/objemu může být způsobena dvěma způsoby:

- tokem veličiny přes hranici tělesa
- zdrojem veličiny uvnitř tělesa

Rovnice, která popisuje tento fakt, se nazývá bilanční a má tvar ([12])

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \mathcal{J}(\Phi) + \mathcal{P}(\Phi). \quad (1.2.2)$$

Celkový tok celkovou produkcí se vyjádří pomocí integrálů

$$\mathcal{J}(\Phi) = \oint_{\partial\Omega_t} j_k(\Phi) n_k dA, \quad (1.2.3)$$

a

$$\mathcal{P}(\Phi) = \int_{\Omega_t} \pi(\Phi) dV. \quad (1.2.4)$$

Zde $j_k(\Phi)$ a $\pi(\Phi)$ jsou hustota toku a hustota produkce veličiny Φ . Je nutné si uvědomit, že tok veličiny povrchem tělesa $\mathcal{J}(\Phi)$ v sobě obecně zahrnuje jak konvektivní, tak nekonvektivní přenos. V našem případě jsou ale konvektivní toky přes hranici $\partial\Omega_t$ nulové, neboť Ω_t je materiálový objem. Z tohoto důvodu se při odvozeních uvažují pouze nekonvektivní toky (je to defacto produkce veličiny na hranici objemu). Bilanční rovnice v integrálním tvaru je tedy

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi dV = \oint_{\partial\Omega_t} j_k(\Phi) n_k dA + \int_{\Omega_t} \pi(\Phi) dV. \quad (1.2.5)$$

1.3 Bilance hmotnosti

Bilancovanou veličinou je hmotnost, v (1.2.1) dosadíme $\Phi = m$, hustotou veličiny je hustota $\varphi = \rho$.

$$m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (1.3.1)$$

Tok hmotnosti povrchem tělesa $j_k(m)$ je nulový a produkce $\pi(m)$ uvnitř objemu je nulová (hmota nemůže vznikat ani zanikat).

Definice 1. Řekneme, že bilance hmotnosti je splněna, pokud pro libovolný materiálový objem Ω_t platí

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \, dV = 0. \quad (1.3.2)$$

To znamená, že hmotnost materiálového objemu zůstává v čase konstantní, což je ekvivalentní zákonu zachování hmoty - hmota nemůže vznikat ani zanikat. Na rovnici (1.3.2) se aplikuje Reynoldsův transportní teorém (1.1.12) a Gaussova věta (1.1.10).

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} \, dV = 0. \quad (1.3.3)$$

Objem Ω_t se volil libovolně, proto musí pro nulovost integrálu být nulový integrál (alternativně lze nechat objem Ω_t zmenšovat v limitě k nule $\Omega_t \rightarrow 0$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.3.4)$$

To je diferenciální tvar bilance hmoty - rovnice kontinuity.

1.4 Balance hybnosti

Další bilancovanou veličinou je hybnost $\Phi_i = m v_i$, její hustota je $\varphi_i = \rho v_i$. Hustota toku hybnosti na hranici $\partial\Omega_t$ je Cauchyho tenzor napětí $j_{ij}(m\mathbf{v}) = \sigma_{ij}$. Produkce hybnosti uvnitř objemu je způsobena vnějšími silami b_i , hustota produkce hybnosti je $\pi_i(m\mathbf{v}) = \rho b_i$. To vše se dosadí do bilanční rovnice (1.2.5) a zavede se definice:

Definice 2. Řekneme, že bilance hybnosti je splněna, pokud pro libovolný materiálový objem Ω_t platí

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho v_i \, dV = \oint_{\partial\Omega_t} \sigma_{ji} n_j \, dA + \int_{\Omega_t} \rho b_i \, dV. \quad (1.4.1)$$

Vzhledem k tomu, že platí Cauchyho vztah mezi tenzorem napětí a vektorem hustoty síly

$$t_i = \sigma_{ji} n_j, \quad (1.4.2)$$

lze vztah (1.4.1) upravit na

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho v_i \, dV = \oint_{\partial\Omega_t} t_i \, dA + \int_{\Omega_t} \rho b_i \, dV, \quad (1.4.3)$$

což není nic jiného než druhý Newtonův zákon - na levé straně časová derivace hybnosti se rovná součtu působících sil na těleso - plošné a objemové síly. Rovnice (1.4.1) se opět přepíše pomocí Reynoldsova teorému (1.1.12) a Gaussovy věty (1.1.10)

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\rho v_i v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \rho b_i \right) \, dV = 0. \quad (1.4.4)$$

Její diferenciální tvar je

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i. \quad (1.4.5)$$

1.5 Bilance momentu hybnosti

Pro moment hybnosti $\rho \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ je možno také provést bilanci:

Definice 3. Řekneme, že bilance momentu hybnosti je splněna, pokud pro libovolný materiálový objem Ω_t platí

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \oint_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{b}) dV. \quad (1.5.1)$$

Tu nebudu dále rozebírat, ale lze pomocí ní lze dokázat důležitou vlastnost Cauchyho tenzoru napětí.

Věta 3. Necht jsou splněny bilance hmotnosti a hybnosti. Poté bilance momentu hybnosti platí právě tehdy, pokud tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ je symetrický

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.5.2)$$

Důkaz. Viz [8]. □

1.6 Bilance energie

Následuje bilance celkové energie - součet vnitřní a kinetické energie, proto $\Phi = mE = m \left(u + \frac{1}{2} v_i^2 \right)$. Hustota celkové energie je hustota energie vztažená na jednotku objemu $\varphi = \rho E = e = \rho \left(u + \frac{1}{2} v_i^2 \right)$. Hustota toku veličiny přes hranici objemu je $j_i(mE) = \sigma_{ij} v_j - q_i$. Hustota produkce energie je $\pi(mE) = \rho b_i v_i + \tilde{q}$. Po dosazení do (1.2.5) opět zavádíme definici:

Definice 4. Řekneme, že bilance celkové energie je splněna, pokud pro libovolný materiálový objem Ω_t platí

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} e dV = \oint_{\partial\Omega_t} (\sigma_{ki} v_i - q_k) n_k dA + \int_{\Omega_t} \rho(b_i v_i + \tilde{q}) dV. \quad (1.6.1)$$

Analýza této rovnice ukazuje, že časová změna celkové energie je rovna součtu těchto vztahů

$$\int_{\Omega_t} b_i v_i dV - \text{produkce mechanické energie v objemu } \Omega_t \text{ vnějšími silami,} \quad (1.6.2a)$$

$$\int_{\Omega_t} \rho \tilde{q} dV - \text{produkce tepla v objemu } \Omega_t - \text{např. radiací,} \quad (1.6.2b)$$

$$\oint_{\partial\Omega_t} \sigma_{ki} v_i n_k dA - \text{přiváděná mechanická práce přes hranici } \partial\Omega_t, \quad (1.6.2c)$$

$$\oint_{\partial\Omega_t} -q_k n_k dA - \text{tepelný tok přes hranici } \partial\Omega_t. \quad (1.6.2d)$$

Vztah (1.6.1) říká, že časová změna celkové energie v tělese se rovná přivedenému teplu a práci. To není nic jiného, než první zákon termodynamiky, který odpovídá zákonu zachování energie. Jako v předchozích případech se

rovnice (1.6.1) modifikuje pomocí Reynoldsova teoremu (1.1.12) a Gaussovy věty (1.1.10) na následující formu

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e v_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_{ki} v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - \rho b_i v_i - \tilde{q} \right) dV = 0. \quad (1.6.3)$$

Diferenční tvar je

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ki} v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \rho b_i v_i + \tilde{q}. \quad (1.6.4)$$

1.7 Balance entropie

Je možno bilancovat i entropii, ta je pro reálný termodynamický proces definována Clausiovou nerovností

$$dS \geq \frac{dQ}{T}. \quad (1.7.1)$$

Pokud je systém v tzv. lokální termodynamické rovnováze, což znamená, že každý materiálový bod je v termodynamické rovnováze, definujeme specifickou entropii (tzv. Gibbsova definice)

$$T ds = du + dw, \quad \text{popř.} \quad T \dot{s} = \dot{u} + \dot{w}. \quad (1.7.2)$$

Pro entropii se musí bilanční rovnice (1.2.5) nahradit nerovnicí

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} \geq \mathcal{J}(\Phi) + \mathcal{P}(\Phi), \quad (1.7.3)$$

což dává

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi dV \geq \oint_{\partial\Omega_t} j_k(\Phi) n_k dA + \int_{\Omega_t} \pi(\Phi) dV. \quad (1.7.4)$$

Celková entropie systému je daná

$$S = \int_{\Omega_t} \rho s dV. \quad (1.7.5)$$

Dosadíme $\varphi = \rho s$, hustota toku hranicí tělesa je $j_k(S) = -q_k/T$ a produkce je $\pi(S) = \tilde{q}/T$.

Definice 5. Řekneme, že bilance entropie je splněna, pokud pro libovolný materiálový objem Ω_t platí

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho s dV \geq \int_{\Omega_t} \frac{q_k}{T} dA + \int_{\Omega_t} \frac{\tilde{q}}{T} dA. \quad (1.7.6)$$

Nerovnost (1.7.6) se nazývá Clausiovou-Duhemovou nerovností. Je to zobecnění Clausiovy nerovnosti (1.7.1).

Diferenciální tvar je vzhledem k (1.1.12) a (1.1.10)

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial \rho s v_j}{\partial x_j} \geq - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q_k}{T} \right) + \frac{\tilde{q}}{T}, \quad (1.7.7)$$

popřípadě užitím rovnice kontinuity (1.3.4)

$$\rho \dot{s} \geq - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q_k}{T} \right) + \frac{\tilde{q}}{T}. \quad (1.7.8)$$

Tato nerovnost se může pomocí bilance vnitřní energie ([12]) upravit na

$$\rho \left(\dot{s} - \frac{\dot{u}}{T} \right) \geq - q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{\sigma_{ji}}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (1.7.9)$$

1.8 Konstitutivní vztahy

Soustava rovnic (1.3.4), (1.4.5), (1.5.2), (1.6.4) spolu s nerovnicí (1.7.9) je zřejmě neuzavřená, neboť obsahuje více neznámých než samotných rovnic. Aby byla soustava řešitelná, je nutno ji doplnit dalšími, tzv. konstitutivními vztahy, a to např. těmi pro volnou energii $f = u - Ts = (\mathbf{X}, t)$, entropii $s = s(\mathbf{X}, t)$, tepelný tok $q = q(\mathbf{X}, t)$ a tenzor napětí $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{X}, t)$. Tyto zákony se nazývají konstitutivní a lze je odvodit z určitých předpokladů - axiomů konstitutivní teorie ([12]):

- (i) příčinnost
- (ii) determinismus
- (iii) ekvipresence
- (iv) objektivita
- (v) materiálová invariance
- (vi) okolí
- (vii) paměť
- (viii) časová nevratnost
- (ix) největší pravděpodobnost

Za těchto podmínek a pomocí 2. zákona termodynamiky se odvodí ([12]) konstitutivní vztahy pro stlačitelnou, tepelně vodivou a viskózní tekutinu ve formě

$$f = f(\rho, T), \quad (1.8.1)$$

$$s = s(\rho, T), \quad (1.8.2)$$

$$q_i = q_i \left(\rho, d_{ij}, T, \frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad (1.8.3)$$

$$\sigma_{ij} = -p(\rho, T) \delta_{ij} + \tau_{ij} \left(\rho, d_{ij}, T, \frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad (1.8.4)$$

kde tenzor napětí σ_{ij} je rozdělen na tenzor tlaku daný tlakem p a tenzor tečných napětí τ_{ij} . Pro určení konkrétních vyjádření funkcí q_i a σ_{ij} se musí doplnit další podmínky. Uvažujeme pouze izotropní tekutiny (vlastnosti jsou ve všech směrech stejné), a dále předpokládáme, že tyto funkce jsou lineární. Za těchto předpokladů se odvodí funkce

$$q_i = -\lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (1.8.5)$$

$$\sigma_{ij} = -p(\rho, T)\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = \mu_v(\rho, T)d_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(\rho, T)\hat{d}_{ij}, \quad (1.8.6)$$

kde $\hat{d}_{ij} = d_{ij} - 1/3d_{kk}\delta_{ij}$ je deviátor tenzoru d_{ij} , koeficient μ je dynamická viskozita, μ_v objemová viskozita a λ tepelná vodivost. Takováto tekutina se nazývá *newtonská*.

1.9 Ideální plyn

Ideální plyn je charakterizován těmito vlastnostmi ([24]):

- je složen z velkého počtu molekul, které mají zanedbatelné rozměry
- molekuly se neustále neuspořádaně pohybují ve všech směrech a narážejí do sebe
- při srážce se molekuly chovají jako dokonale pružné koule
- molekuly na sebe silově působí jen v okamžicích srážek
- platí Newtonův pohybový zákon, takže mezi srážkami se molekuly pohybují přímočaře a rovnoměrně

Pomocí kinetické teorie plynů lze za těchto předpokladů odvodit stavovou rovnici

$$p = \rho r T, \quad (1.9.1)$$

vztah pro volnou energii

$$f(\rho, T) = -rT \left[\ln \left(\frac{\bar{\lambda} T^{3/2}}{\rho} \right) + 1 \right], \quad (1.9.2)$$

a z něj (protože platí $s = -(\partial f / \partial T)$) rovnici pro entropii

$$s(\rho, T) = r \left[\ln \left(\frac{\bar{\lambda} T^{3/2}}{\rho} \right) + \frac{5}{2} \right], \quad (1.9.3)$$

kde $\bar{\lambda}$ je jistá konstanta (viz [12]). Pro ideální plyn dále platí, že měrné tepelné kapacity c_p a c_v jsou konstantní. Protože pro přírůstky vnitřní energie a entalpie obecněji platí

$$du = c_v dT, \quad dh = c_p dT, \quad (1.9.4)$$

vyplývá pro ideální plyn, že u a h jsou lineárními funkcemi teploty

$$u = c_v T, \quad h = c_p T. \quad (1.9.5)$$

Dále lze odvodit, že rozdíl měrných tepelných kapacit je roven plynové konstantě (Meyerův vztah)

$$c_p - c_v = r. \quad (1.9.6)$$

Naopak podíl měrných tepelných kapacit je Poissonova konstanta

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (1.9.7)$$

Její hodnota závisí na počtu uspořádání atomů v molekule plynu. Ze zmíněných vzorců se nakonec odvodí varianta stavové rovnice

$$p = (\kappa - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho (v_i v_i) \right). \quad (1.9.8)$$

1.10 Navierovy-Stokesovy rovnice

Dosazením konstitutivních vztahů získají Navierovy-Stokesovy rovnice, které popisují nestacionární proudění stlačitelné newtonské kapaliny (v tomto případě plynu). Neuvažujeme objemové síly, neboť ty jsou u plynů zanedbatelné. Vnější silové pole je proto nulové

$$\mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (1.10.1)$$

Protože se nepočítá s radiací nebo chemickými reakcemi, je teplo dodávané do objemu taktéž nulové

$$\tilde{q} = 0. \quad (1.10.2)$$

Navierovy-Stokesovy rovnice pro stlačitelné nestacionární proudění vazké tekutiny bez objemových sil jsou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.10.3a)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) = 0, \quad (1.10.3b)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((e + p) v_j - \tau_{jk} v_k - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (1.10.3c)$$

$$\tau_{ij} = \left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.10.3d)$$

1.11 Eulerovy rovnice

Speciální případ Navierových-Stokesových rovnic jsou Eulerovy rovnice. Ty popisují dynamiku nevazké tekutiny, neuvažují se tečné složky tenzoru napětí, tedy

$$\tau_{i,j} = 0 \quad \forall i, j.$$

Toho se dosáhne tak, že se v Navierových-Stokesových rovnicích položí viskozita nule $\mu = 0$, $\mu_v = 0$, a tím odpadnou vazké členy. Dále se zanedbávají tepelné toky, součinitel tepelné vodivosti je také roven nule $\lambda = 0$. Eulerovy rovnice jsou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.11.1a)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = 0, \quad (1.11.1b)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} ((e + p)v_j) = 0. \quad (1.11.1c)$$

Po doplnění stavovou rovnicí (1.9.8) tedy máme odvozenou soustavu rovnic, jejichž řešení musí být v souladu s 2. zákonem termodynamiky (1.7.9), který se zjednoduší na

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial \rho s v_j}{\partial x_j} \geq 0. \quad (1.11.2)$$

Kapitola 2

Matematická teorie systémů zákonů zachování

Jak bude ukázáno, Eulerovy rovnice jsou tzv. systém zákonů zachování. To je soustava diferenciálních rovnic jistého tvaru, která popisuje chování některých konkrétních systémů diferenciálních rovnic. Kromě zmíněných Eulerových rovnic dynamiky tekutin se jedná např. o rovnice dynamiky plynů v Lagrangeových (materiálových) souřadnicích, p-systém - jednorozměrné rovnice dynamiky izoentropického plynu, dále rovnice mělké vody, rovnice magnetohydrodynamiky a další. U těchto soustav můžeme použít tuto abstrakci - systém zákonů zachování - a vyšetřovat její vlastnosti a zabývat se numerickým řešením, aniž bychom se nutně museli zabírat konkrétními rovnicemi, které popisují náš fyzikální problém.

Poznámka 3. V této kapitole značí Ω otevřenou podmnožinu \mathbb{R}^p .

2.1 Základní pojmy

Definice 6. Nechť $\mathbf{f}_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbf{f}_j \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ ($j = 1, \dots, d$), poté nazveme vztah

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0 \quad (2.1.1)$$

systémem zákonů zachování v konzervativním tvaru.

Zde \mathbf{u} je vektorová funkce

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} : \mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \Omega, \quad (2.1.2)$$

a vektory

$$\mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} f_{j1} \\ \vdots \\ f_{jp} \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

se nazývají *toky (funkce toků)*. V případě dvoj- nebo třidimenzionálního problému $d = 2$ nebo $d = 3$, většinou se toky označují \mathbf{f} , \mathbf{g} , (\mathbf{h}) namísto

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, (\mathbf{f}_3)$. Velice důležitou vlastností, kterou zákon zachování může disponovat, je hyperbolicita.

Definice 7. Mějme Jacobiho matici

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{u}) = \frac{\partial f_{ij}}{\partial u_k}, \quad \forall j = 1, \dots, d \quad (2.1.4)$$

funkce $\mathbf{f}_j(\mathbf{u})$. Systém (2.1.1) se označuje jako *hyperbolický*, pokud $\forall \mathbf{u} \in \Omega$ a $\forall \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ má matice

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^d \omega_j \mathbf{A}_j(\mathbf{u}) \quad (2.1.5)$$

p reálných vlastních čísel $\lambda_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \leq \lambda_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \leq \dots \leq \lambda_p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ a k nim příslušných p lineárně nezávislých vlastních vektorů $\mathbf{r}_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}), \dots, \mathbf{r}_p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$. Pokud navíc jsou všechna vlastní čísla různá, systém (2.1.1) je *striktně hyperbolický*.

Definice 8. *Cauchyho úloha*, popř. *počáteční úloha*, je problém hledání funkce $\mathbf{u} : (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \Omega$, která řeší rovnice (2.1.1) a splňuje podmínku

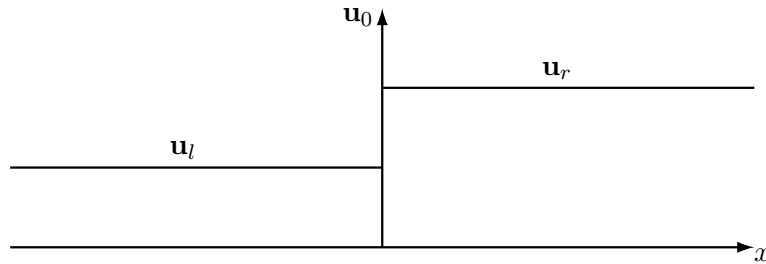
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (2.1.6)$$

Definice 9. Mějme 1D soustavu rovnic (2.1.1) ($d = 1$). Cauchyho úloha, která má tvar

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x < 0 \\ \mathbf{u}_r, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.1.7)$$

se nazývá (jednodimenzionální) *Riemannův problém* (2.1).

Riemannův problém je tedy počáteční podmínka s nespojitostí.



Obrázek 2.1: Riemannův problém v 1D

Definice 10. Mějme Cauchyho úlohu (2.1.6) pro systém zákonů zachování (2.1.1). Funkci $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \times \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \Omega$, \mathbf{u} je \mathcal{C}^1 nazveme *klasickým řešením* (2.1.1) a (2.1.6), pokud je splňuje ve všech bodech.

Definice 11. $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ je lineární prostor funkcí, pro které platí

$$\|f\|_\infty < +\infty, \quad (2.1.8)$$

kde norma $\|\cdot\|_\infty$ je definovaná jako

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |f(\mathbf{x})| < C \text{ s. v.}\}. \quad (2.1.9)$$

Lineární prostor funkcí označíme $\mathbf{L}_{loc}^\infty(\Omega)$, pokud $f|_M \in \mathbf{L}^\infty(M)$ pro každou kompaktní množinu $M \subset \Omega$ ($f|_M$ je zúžení funkce f na množinu M a kompaktní množina je množina, která je uzavřená a omezená).

Lze ukázat, že klasické řešení může existovat pouze pro omezený časový interval, a to i s hladkou počáteční podmínkou. Proto se definuje tzv. *slabé řešení*, které může být nespojité. To se zavádí stejně jako u běžných PDR přenásobením rovnice testovací funkcí a integrováním.

Definice 12. Nechť $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Funkce $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle)$ se nazývá *slabé řešení* Cauchyho problému (2.1.1), (2.1.6), pokud $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ s.v. pro libovolnou testovací funkci $\varphi \in \mathbf{C}_c^1(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty))$ splňuje

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \mathbf{f}_i(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x}, 0) dx = 0. \quad (2.1.10)$$

Pro $d = 1$ má rovnice (2.1.10) tvar

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}_0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (2.1.11)$$

Ekvivalentně k tomu lze psát $\oint(\mathbf{u} dx - \mathbf{f}(\mathbf{u}) dt) = 0$ pro jakoukoliv oblast $(a, b) \times (t_1, t_2)$. Tento vztah se v rozepsané verzi

$$\int_a^b \mathbf{u}(x, t_2) dx - \int_a^b \mathbf{u}(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(\mathbf{u}(b, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(\mathbf{u}(a, t)) dt = 0 \quad (2.1.12)$$

používá při konstrukci numerických schémat. Slabé řešení tedy může obsahovat nespojitosti - rázové vlny. Definujme takovéto řešení. O funkci \mathbf{u} řekneme, že je "po částech" \mathcal{C}^1 , pokud existuje konečný počet hladkých orientovaných ploch Σ v prostoru $\mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle$, mimo které $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1$ a na nichž se hodnoty \mathbf{u} skokově mění. Plocha Σ má normálový vektor $\mathbf{n} = (n_t, n_{x_1}, \dots, n_{x_d})^T$ a definujeme hodnoty na stranách nespojitosti

$$\mathbf{u}_\pm(\mathbf{x}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{u}((\mathbf{x}, t) \pm \epsilon \mathbf{n}). \quad (2.1.13)$$

Ne každá nespojitost je přípustná, následující věta určuje, jak se mohou lišit hodnoty \mathbf{u}_+ a \mathbf{u}_- .

Věta 4. Nechť $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \Omega$ je "po částech" \mathcal{C}^1 funkce. Potom \mathbf{u} je řešení (2.1.1) ve smyslu distribucí (viz [13]) na $\mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle$ právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:

1. \mathbf{u} je klasické řešení (2.1.1) tam, kde \mathbf{u} je \mathcal{C}^1
2. \mathbf{u} splňuje podél ploch nespojitosti podmínku

$$(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)n_t + \sum_{j=1}^d (\mathbf{f}_j(\mathbf{u}_+) - \mathbf{f}_j(\mathbf{u}_-))n_{x_j} = \mathbf{0}. \quad (2.1.14)$$

Vztah (2.1.14) se nazývá Rankinova-Hugoniotova podmínka.

Důkaz. Viz [16]. □

Slabé řešení ale nemusí být jednoznačné ([16]), proto se hledá způsob, který ze všech slabých řešení vybere to fyzikálně přípustné, které by mělo být jednoznačné. Proto se zavádí se tzv. *entropické řešení* (pro detailní teorii odkazují na [16]). Na řešení systému (2.1.1) klademe další požadavek - aby splňovalo následující entropickou podmínku

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\mathbf{u}) \leq 0, \quad (2.1.15)$$

kde funkce U a F_j jsou entropie a toky entropie ([16]) a entropické řešení je určeno následovně:

Definice 13. Slabé řešení \mathbf{u} počátečního problému (2.1.6) pro rovnici (2.1.1) se nazývá entropické řešení, pokud pro všechny funkce entropie U a všechny testovací funkce $\varphi \in \mathbf{C}_c^1(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$, $\varphi \geq 0$ platí nerovnost

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(U(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d F_j(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} U(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) \varphi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \geq 0. \quad (2.1.16)$$

V 1D je podmínka

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(U(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} U(\mathbf{u}_0(x)) \varphi(x, 0) dx \geq 0. \quad (2.1.17)$$

Jednoznačnost entropického řešení je však dokázána pouze pro skalární případ ($p = 1$). Pro systémy ($p \geq 1$) je jeho jednoznačnost otevřenou otázkou.

2.2 Eulerovy rovnice v rovině

Eulerovy rovnice (1.11.1) ve 2D v konzervativním tvaru jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((e + p)u) + \frac{\partial}{\partial y}((e + p)v) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Zde se změnilo značení rychlostí na $u = v_1, v = v_2$ (ve 3D pak $w = v_3$). Tyto rovnice je možno napsat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{0}, \quad (2.2.2)$$

přičemž

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

je tzv. *vektor konzervativních proměnných* a

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix}, \quad (2.2.4)$$

jsou *nevazké fyzikální toky* (popř. *konvektivní toky*). Z (2.2.2) je vidět, že tato soustava je systémem zachování (2.1.1), a tedy pro ní platí výsledky předcházejících sekcí. Dále se dá ukázat, že se jedná o hyperbolický systém, v 1D ($d = 1$) potom striktně hyperbolický. Řešení musí splňovat entropickou nerovnost (1.11.2), což je entropická nerovnost (2.1.15). Porovnáním těchto vztahů dostaneme relaci mezi fyzikální a matematickou entropií

$$U = \rho s, \quad F = -\rho s u. \quad (2.2.5)$$

2.3 Řešení Riemannova problému

Řešení Riemannova problému (2.1.7) je zásadní pro mnoho numerických metod.

2.3.1 Řešení obecného Riemannova problému

Mějme Riemannův problém pro 1D systém zákonů zachování

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} &= \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x < 0, \\ \mathbf{u}_r, & x \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

kde vektory \mathbf{u} a \mathbf{f} mají p složek. Předpokládejme, že systém (2.3.1) je striktně hyperbolický s vlastními čísly $\lambda_1(\mathbf{u}), \dots, \lambda_p(\mathbf{u})$. Vlastnímu číslu $\lambda_k(\mathbf{u})$ odpovídá pravý vlastní vektor $\mathbf{r}_k(\mathbf{u})$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = \lambda_k(\mathbf{u})\mathbf{r}_k(\mathbf{u}), \quad (2.3.2)$$

a levý vlastní vektor $\mathbf{l}_k(\mathbf{u})$

$$\mathbf{l}_k^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \lambda_k(\mathbf{u})\mathbf{l}_k^T. \quad (2.3.3)$$

Definice 14. Řekneme, že k -té charakteristické pole je ryze nelineární, pokud

$$\nabla \lambda_k(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega. \quad (2.3.4)$$

Řekneme, že k -té charakteristické pole je lineární degenerované, pokud

$$\nabla \lambda_k(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega. \quad (2.3.5)$$

Nejprve hledíme řešení (2.3.1) ve tvaru

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x/t \leq \lambda_k(\mathbf{u}_l), \\ \mathbf{v}(x/t), & \lambda_k(\mathbf{u}_l) \leq x/t \leq \lambda_k(\mathbf{u}_r), \\ \mathbf{u}_r, & x/t \geq \lambda_k(\mathbf{u}_r) \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Toto řešení, které se skládá ze spojitě funkce propojující dva počáteční stavy \mathbf{u}_l , \mathbf{u}_r . Pokud je k -té charakteristické pole ryze nelineární, potom existuje a nazývá se k -zřetřující vlna. Další řešení rovnice (2.3.1) hledíme jako

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x > \sigma t, \\ \mathbf{u}_r, & x < \sigma t, \end{cases} \quad (2.3.7)$$

kde σ je rychlost pohybu nespojitosti. Toto řešení nazveme *nespojitou vlnou*. Pokud je k -té charakteristické pole ryze nelineární, potom řešení ve tvaru (2.3.7) se nazývá k -rázová vlna. Pokud je k -té charakteristické pole lineárně degenerované, pak řešení ve tvaru (2.3.7), pro něž platí

$$\sigma = \lambda_k(\mathbf{u}_L) = \lambda_k(\mathbf{u})_R = \bar{\lambda}_k, \quad (2.3.8)$$

tedy

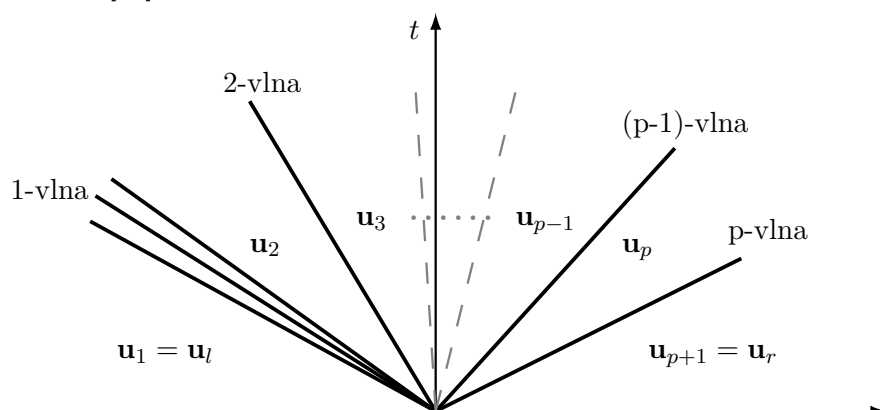
$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x > \bar{\lambda}_k t, \\ \mathbf{u}_r, & x < \bar{\lambda}_k t, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

se nazývá k -kontaktní nespojitost.

Lze odvodit, že pokud je k -té pole ryze nelineární, pak mu odpovídá k -zřetřující vlna nebo k -rázová vlna. Pokud je lineárně degenerované, tak mu odpovídá k -kontaktní nespojitost.

Věta 5. *Nechť pro všechny $k \in 1, \dots, p$ je k -té charakteristické pole buď ryze nelineární nebo lineárně degenerované. Poté pro všechny $\mathbf{u}_l \in \Omega$ existuje okolí ϵ bodu \mathbf{u}_l v Ω s následujícími vlastnosti: Pokud \mathbf{u}_r patří do ϵ , Riemannův problém (2.3.1) má slabé řešení, které se skládá z nejvíce $p+1$ konstantních stavů oddělených vlnami zřetřění, rázovými vlnami a kontaktními nespojitostmi. Dále, toto slabé řešení je jednoznačné.*

Důkaz. Viz [16] □



Obrázek 2.2: Struktura řešení Riemannova problému pro systém (2.3.1) x

2.3.2 Řešení Riemannova problému pro Eulerovy rovnice

Mějme Riemannův problém pro 1D soustavu Eulerových rovnic (2.2.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} &= \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{U}_l, & x < 0, \\ \mathbf{U}_r, & x \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

kde

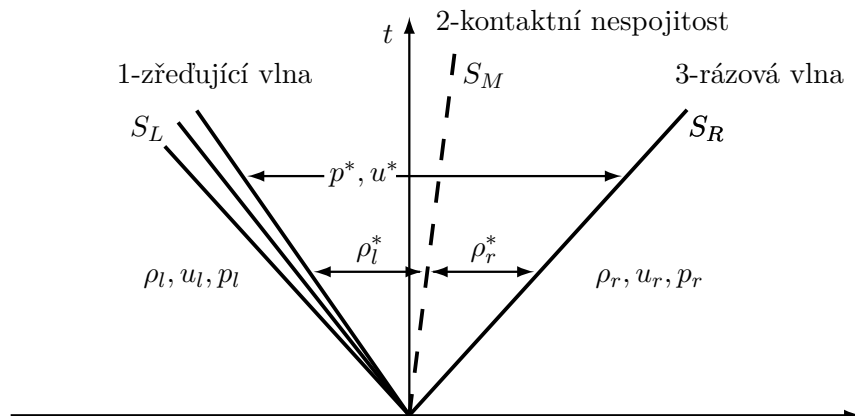
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p)u \end{pmatrix}. \quad (2.3.11)$$

Eulerovy rovnice v 1D mají vlastní čísla

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c. \quad (2.3.12)$$

Ukáže se, že první a třetí charakteristické pole jsou ryze nelineární, zatímco druhé je lineárně degenerované. Z toho vyplývá struktura řešení Riemannova problému. To je určeno čtyřmi konstantními stavy \mathbf{U}_l , \mathbf{U}_l^* , \mathbf{U}_r^* , \mathbf{U}_r . Levý stav (v primitivních proměnných ρ_l, u_l, p_l) je propojen s druhým (ρ_l^*, u^*, p^*) buď 1-rázovou vlnou nebo 1-zředující vlnou, mezi ním a třetím stavem (ρ_r^*, u^*, p^*) je 2-kontaktní nespojitost, a třetí (ρ_r^*, u^*, p^* a čtvrtý stav (ρ_r, u_r, p_r) jsou spojeny 3-rázovou vlnou nebo 3-zředující vlnou. Při přechodu přes kontaktní nespojitost se tedy mění pouze hustota, tlak a rychlost zůstávají konstantní.

$$\mathbf{U}_l = \begin{bmatrix} \rho_l \\ \rho_l u_l \\ e_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_l^* = \begin{bmatrix} \rho_l^* \\ \rho_l^* u^* \\ e_l^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_r^* = \begin{bmatrix} \rho_r^* \\ \rho_r^* u^* \\ e_r^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} \rho_r \\ \rho_r u_r \\ e_r \end{bmatrix}. \quad (2.3.13)$$



Obrázek 2.3: Struktura řešení Riemannova problému pro systém (2.3.10)^x

■ 2.4 Exaktní řešení Riemannova problému

Riemannův problém pro Eulerovy rovnice lze vyřešit přesně ([16]), ale toto řešení nelze nalézt v uzavřeném tvaru, proto se musí použít iterační metody.

Kapitola 3

Numerické řešení hyperbolických systémů zákonů zachování

V této kapitole se budu zabývat numerickými metodami řešení hyperbolických systémů zákonů zachování a Eulerových rovnic v 1D/2D.

3.1 Způsoby numerického řešení

Pro numerické řešení systémů zákonů zachování (a obecně pro parciální diferenciální rovnice) bylo vytvořeno mnoho postupů

- metoda konečných diferencí
- metoda konečných objemů
- metoda konečných prvků
- nespojitá Galerkinova metoda
- spektrální metody
- různé hybridní metody

Nejběžnější metodou pro řešení systémů zákonů zachování a rovnic dynamiky tekutin je metoda konečných objemů (*Finite Volume Method, FVM*). Tu používám ve své práci a bude odvozena v sekci 3.8.

3.2 Základní pojmy

Pro účely následujících sekcí mějme Cauchyho úlohu pro systém zákonů zachování v 1D

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} &= \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Předpokládejme, že tento systém je hyperbolický. Mějme rovnoměrnou výpočetní síť s prostorovým krokem Δx a časovým Δt . Definujeme aproximaci

$\mathbf{v}_i^n \in \mathbb{R}^p$ funkce \mathbf{u} v bodě $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$. Explicitní numerické schéma má tvar

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{H}(\mathbf{v}_{j-k}^n, \dots, \mathbf{v}_{j+k}^n), \quad (3.2.2)$$

kde $\mathbf{H} : \mathbb{R}^{p \times (k+1)} \rightarrow \mathbb{R}^p$ je diskretní operátor.

Definice 15. Schéma (3.2.2), které lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{v}_j^n - \lambda(\mathbf{g}_{j+1/2}^n - \mathbf{g}_{j-1/2}^n), \quad j \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \quad (3.2.3)$$

nazýváme *konzervativním* a (3.2.3) je *konzervativní tvar*. Hodnoty \mathbf{v}_j^0 jsou zadané a $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Definice 16. Spojitou funkci $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{p \times 2k} \rightarrow \mathbb{R}^p$ ve vzorci (3.2.3) nazveme *numerickým tokem* a platí pro ní

$$\mathbf{g}_{j+1/2}^n = \mathbf{g}(\mathbf{v}_{j-k+1}^n, \dots, \mathbf{v}_{j+k}^n), \quad (3.2.4)$$

Definice 17. Schéma v konzervativním tvaru je *konzistentním* se systémem (3.2.1), pokud

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p. \quad (3.2.5)$$

Definice 18. Schéma v konzervativním tvaru je *konzistentní* s entropickou podmínkou (2.1.17), pokud platí

$$U_i^{n+1} \leq U_i^n - \lambda(G_{j+1/2}^n - G_{j-1/2}^n), \quad (3.2.6)$$

kde

$$U_i^{n+1} = U(\mathbf{v}_i^{n+1}), \quad U_i^n = U(\mathbf{v}_i^n), \quad F_{i+1/2}^n = F(\mathbf{v}_{j-k+1}^n, \dots, \mathbf{v}_{j+k}^n), \quad (3.2.7)$$

a G je *numerický tok entropie*, konzistentní s tokem entropie

$$G(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = F(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p. \quad (3.2.8)$$

Důležitou větou, která dává význam důležitosti konzervativních numerických metod, je věta Laxova-Wendroffova věta.

Věta 6 (Lax-Wendroff). *Mějme diferenční schéma v konzervativním tvaru (3.2.3), které je konzistentní se zákonem zachování (3.2.1) a s entropickou podmínkou (2.1.17). Necht*

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_i^n, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2} \quad (3.2.9)$$

je řešení (3.2.3). Předpokládejme, že pro jistou posloupnost Δ_k limita

$$\lim_{\Delta_k \rightarrow 0} \mathbf{v}(x, t) = \mathbf{u}(x, t) \quad (3.2.10)$$

existuje ve smyslu L_{loc}^1 konvergence. Poté limita \mathbf{u} splňuje slabou integrální formu (2.1.11) zákonů zachování a slabou integrální formu (2.1.17) entropické podmínky.

Důkaz. Viz [21]. □

Dle této věty tedy platí, že pokud konzervativní schéma konverguje, tak konverguje ke slabému řešení.

3.3 Godunovova metoda

Godunovova metoda je metoda konečných diferencí pro počáteční problém (3.2.1) pro 1D systém zákonů zachování, přičemž využívá přesné řešení Riemannova problému (viz [5], [16], [21]). Víme, že Riemannův problém

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x < 0, \\ \mathbf{u}_r, & x \geq 0, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

má entropické řešení

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_e(x/t; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r). \quad (3.3.2)$$

Algoritmus Godunovovy metody se skládá z těchto kroků:

1. Definuje se aproximace $\mathbf{v}(x, t^n)$ na časových vrstvách t^n , $n = 0, 1, \dots$ a na intervalech $\langle x_{j-1/2}, x_{j+1/2} \rangle$, $j \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{v}(x, t^n) = \mathbf{v}_j^n, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}. \quad (3.3.3)$$

2. Na rozhraních mezi intervaly $\langle x_{j-1/2}, x_{j+1/2} \rangle$ vzniknou nespojitosti, řešíme tedy počáteční úlohu ve tvaru řady Riemannových problémů (obr. 3.1)

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, t^n) = \mathbf{v}(x, t^n). \quad (3.3.4)$$

Řešení této počáteční úlohy je

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_e \left(\frac{x - x_{j+1/2}}{t - t^n}; \mathbf{v}_j^n; \mathbf{v}_{j+1}^n \right), \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}. \quad (3.3.5)$$

3. Řešení se na intervalech $\langle x_{j-1/2}, x_{j+1/2} \rangle$ průměruje, a výsledkem je opět po částech konstantní funkce

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, t^n + \Delta t) dx. \quad (3.3.6)$$

4. \mathbf{v}^{n+1} je řešení na nové časové vrstvě, které poslouží jako počáteční podmínka pro řešení v čase t^{n+1} a algoritmus se opakuje.

Schéma lze napsat i přímočařeji. Zintegruje se (3.3.4) na $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (t_n, t_n + \Delta t)$

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (\mathbf{u}(x, t + \Delta t) - \mathbf{u}(x, t)) dx + \\ & + \int_t^{t+\Delta t} (\mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j+1/2} - 0, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j-1/2} + 0, t))) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Pomocí (3.3.6) se přepíše první integrál

$$\Delta x (\mathbf{v}_j^{n+1} - \mathbf{v}_j^n) + \int_t^{t+\Delta t} (\mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j+1/2} - 0, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j-1/2} + 0, t))) dt = 0, \quad (3.3.8)$$

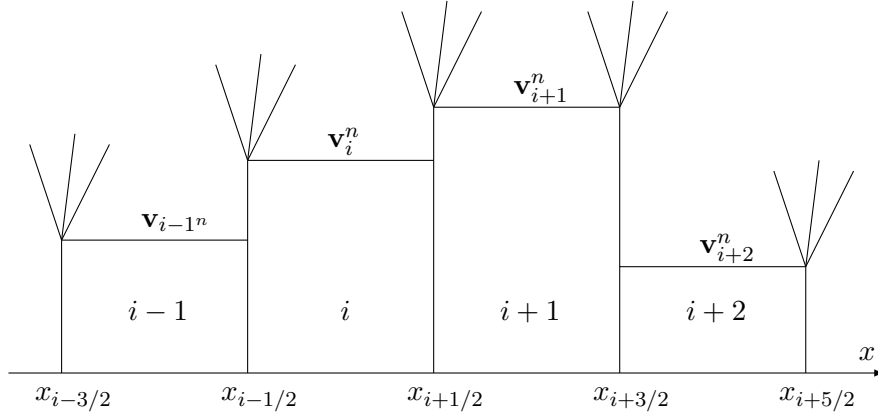
a pomocí (3.3.5) se upraví do konzervativního tvaru (3.2.3)

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \lambda[\mathbf{f}(\mathbf{u}(0; \mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_{j+1}^n)) - \mathbf{f}(0; \mathbf{v}_{j-1}^n, \mathbf{v}_j^n)], \quad (3.3.9)$$

ve kterém je numerický tok

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_e(0; \mathbf{v}, \mathbf{w})) \quad (3.3.10)$$

určen entropickým řešením (3.3.2).



Obrázek 3.1: Znázornění Godunovovy metody

3.4 Přibližné řešení Riemannova problému

Riemannův problém se nemusí řešit exaktně, protože u Godunovovy metody dochází k průměrování řešení, a je tedy výhodné přesné řešení nahradit přibližným, které bude jednodušší. To se hledá pomocí tzv. *přibližných řešičů Riemannova problému*.

Definice 19. Necht $\mathbf{w}(x/t; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$ je přibližné řešení Riemannova problému, schéma *Godunovova typu* je

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^i \mathbf{w}(x/t; \mathbf{v}_{i-1}^n; \mathbf{v}_i^n) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_i^{x_{i+1/2}} \mathbf{w}(x/t; \mathbf{v}_i^n; \mathbf{v}_{i+1}^n) dx. \quad (3.4.1)$$

V konzervativním tvaru (3.2.3) je toto schéma

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \lambda[\mathbf{f}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i)]. \quad (3.4.2)$$

Věta 7 (Harten-Lax). Necht S jsou signální rychlosti jednotlivých vln a $\mathbf{w}(x/t; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$ je přibližné řešení Riemannova problému splňující podmínky:

1. konzistence s integrální formou zákona zachování

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathbf{w}(x/T; \mathbf{u}_l; \mathbf{u}_r) dx = \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r) - T\mathbf{f}_r + T\mathbf{f}_l, \quad (3.4.3)$$

kde $\Delta x/2 > T \max|S|$ a $\mathbf{f}_l = \mathbf{f}(\mathbf{u}_l)$ a $\mathbf{f}_r = \mathbf{f}(\mathbf{u}_r)$.

2. konzistence s integrálním tvarem entropické podmínky

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} U(\mathbf{w}(x/T; \mathbf{u}_l; \mathbf{u}_r)) dx = \frac{\Delta x}{2}(U_l + U_r) - TF_r + TF_l, \quad (3.4.4)$$

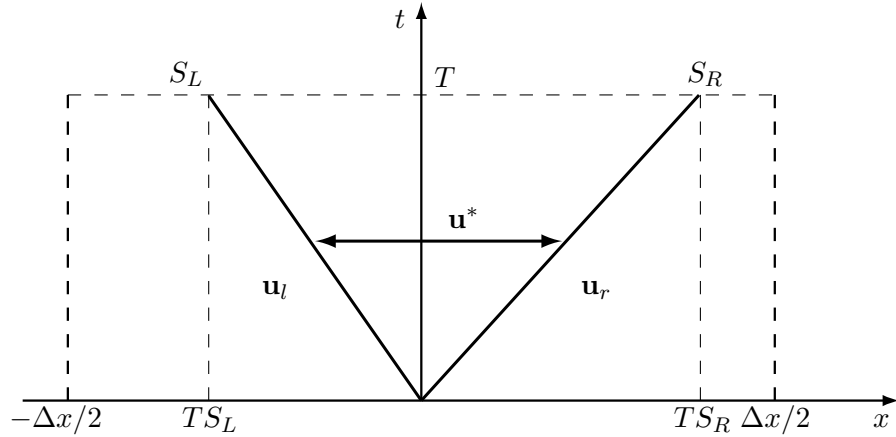
kde $\Delta x/2 > T \max|S|$ a $F_r = F(\mathbf{u}_r)$ $F_l = F(\mathbf{u}_l)$.

Potom schéma Godunovova typu (3.4.2) je konzistentní s (2.1.7) a splňuje entropickou nerovnost (3.2.6).

Důkaz. Viz [10]. □

3.5 Schéma HLL

Schéma HLL (dle autorů Harten, Lax, van Leer) je jedním z přibližných Riemannových řešičů. Vychází ze struktury řešení Riemannova problému 2.3. To se zjednoduší tak, že se uvažují pouze dvě krajní vlny s rychlostmi S_L a S_R . Kontaktní vlna se vynechává (obr. 3.2). Díky této simplifikaci jsme schopni odvodit vztahy určující numerický tok \mathbf{f}^{HLL} .



Obrázek 3.2: Struktura řešení Riemannova problému pro HLL schéma

Přibližné řešení Riemannova problému je tedy rozděleno na tři oblasti a je definováno jako:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{u}_l & \text{pro } S_L > x/t, \\ \mathbf{u}^* & \text{pro } S_L \leq x/t \leq S_R, \\ \mathbf{u}_r & \text{pro } S_R < x/t. \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Abychom získali vztah pro numerický tok, nejprve integrujeme rovnici po okraji oblasti $(-\Delta x/2, 0) \times (0, T)$ (2.1.12)

$$\int_{-\Delta x/2}^0 \mathbf{w}(x/T; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) dx - \frac{\Delta x}{2} \mathbf{u}_l + T(\mathbf{f}^* - \mathbf{f}_l) = 0. \quad (3.5.2)$$

Po přeuspořádání máme vztah pro \mathbf{f}^*

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_l - \frac{1}{T} \int_{-\Delta x/2}^0 \mathbf{w}(x/T, \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) dx + \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_l. \quad (3.5.3)$$

Další integrací, nyní po okraji oblastí $(0, \Delta x/2) \times (0, T)$, analogicky získáme

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_r + \frac{1}{T} \int_0^{\Delta x/2} \mathbf{w}(x/T, \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) dx - \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_r. \quad (3.5.4)$$

Do levé strany podmínky konzistence (3.4.3) se za \mathbf{w} dosadí aproximace \mathbf{u}_l , \mathbf{u}_r a \mathbf{u}^* a integrál se rozdělí

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathbf{w}(x/T; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) dx = \int_{-\Delta x/2}^{TS_L} \mathbf{u}_l dx + \int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{u}^* dx + \int_{TS_R}^{\Delta x/2} \mathbf{u}_r dx. \quad (3.5.5)$$

Integrandy jsou konstanty, proto je vytkneme, zintegrujeme a výsledky dosadíme do rovnice (3.4.3)

$$\begin{aligned} (TS_L + \Delta x/2)\mathbf{u}_l + T(S_R - S_L)\mathbf{u}^* + (\Delta x/2 - TS_R)\mathbf{u}_r &= \\ &= \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r) - T(\mathbf{f}_r - \mathbf{f}_l). \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Z toho se dostane vztah pro \mathbf{u}^*

$$\mathbf{u}^* = \frac{S_R \mathbf{u}_r - S_L \mathbf{u}_l + (\mathbf{f}_r - \mathbf{f}_l)}{S_R - S_L}. \quad (3.5.7)$$

Numerický tok závisí na signálních rychlostech, můžou nastat tři varianty

1. $S_L > 0$

(3.5.7) se dosadí do (3.5.1) a následně do (3.5.3) (popř. (3.5.4))

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_l - \frac{1}{T} \int_{-\Delta x/2}^{TS_L} \mathbf{u}_l dx - \frac{1}{T} \int_{-TS_L}^0 \frac{S_R \mathbf{u}_r - S_L \mathbf{u}_l - \mathbf{f}_r + \mathbf{f}_l}{S_R - S_L} dx + \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_l \quad (3.5.8)$$

Výsledkem je

$$\mathbf{f}^* = \frac{S_R \mathbf{f}_l - S_L \mathbf{f}_r + S_L S_R (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l)}{S_R - S_L}. \quad (3.5.9)$$

2. $S_L \leq 0$ a $S_R \geq 0$

Stejným postupem

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_l - \frac{1}{T} \int_{-\Delta x/2}^0 \mathbf{u}_l dx + \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l. \quad (3.5.10)$$

3. $S_R < 0$

Opět totožně

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_r + \frac{1}{T} \int_0^{\Delta x/2} \mathbf{u}_r dx - \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_r = \mathbf{f}_r. \quad (3.5.11)$$

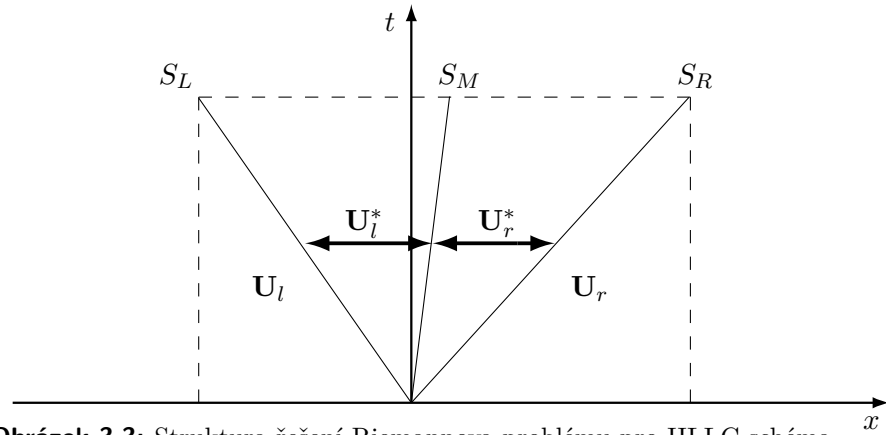
Numerický tok \mathbf{f}^{HLL} tedy nabývá tvaru

$$\mathbf{f}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{f}_l & \text{pro } S_L > 0, \\ \mathbf{f}^* & \text{pro } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{f}_r & \text{pro } S_R < 0. \end{cases} \quad (3.5.12)$$

Schéma HLL je odvozeno pro obecný systém hyperbolických zákonů zachování. Pro Eulerovy rovnice stačí ve vztazích (3.5.9) a (3.5.12) nahradit obecný vektor proměnných \mathbf{u} a obecný tok \mathbf{f} vektory \mathbf{U} a \mathbf{F} (2.3.11). Tento řešič je schopen správně zachytit izolované rázové vlny ([21]), splňuje nerovnost entropie ([2]), zachovává pozitivitu, ale kvůli své konstrukci neřeší přesně izolované kontaktní vlny. HLL je poměrně disipativní schéma, což je většinou případů nevýhoda, ale této vlastnosti se dá výhodně využít při konstrukci numerických schémat, jak bude dále ukázáno.

3.6 Schéma HLLC

Rozšíření HLL schématu je schéma HLLC, které se liší v tom, že uvažuje existenci prostřední, kontaktní vlny. HLLC (C - contact, [20]) metoda má tedy stejně jako exaktně vyřešený Riemannův problém tři vlny. Postup odvození je podobný jako u HLL schématu, nicméně musí se doplnit jistá podmínka, která zaručí řešitelnost systému. HLLC schéma nelze, na rozdíl od předchozího, zkonstruovat pro obecný systém zákonů zachování, ale musí se odvodit pro konkrétní rovnice, v tomto případě pro Eulerovy rovnice v 1D.



Obrázek 3.3: Struktura řešení Riemannova problému pro HLLC schéma

Řešení Riemannova problému se tedy skládá ze čtyř stavů, oddělených vlnami.

$$\mathbf{U}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{U}_l & \text{pokud } S_L > x/t, \\ \mathbf{U}_l^* & \text{pokud } S_L \leq x/t < S_M, \\ \mathbf{U}_r^* & \text{pokud } S_M \leq x/t \leq S_R, \\ \mathbf{U}_r & \text{pokud } S_R < x/t. \end{cases} \quad (3.6.1)$$

Těm odpovídají toky

$$\mathbf{F}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{F}_l & \text{pokud } S_L > 0, \\ \mathbf{F}_l^* & \text{pokud } S_L \leq 0 < S_M, \\ \mathbf{F}_r^* & \text{pokud } S_M \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{F}_r & \text{pokud } S_R < 0. \end{cases} \quad (3.6.2)$$

kde \mathbf{F}^{HLLC} je tok pro $x = 0$, tedy na ose t . Pro $S_M > 0$ se rovnice integruje po okraji oblasti $(S_L T, 0) \times (0, T)$ (2.1.12)

$$\mathbf{F}_l^* = \mathbf{F}_l + S_L(\mathbf{U}_l^* - \mathbf{U}_l). \quad (3.6.3)$$

Pro $S_M < 0$ integrujeme po okraji oblasti $(0, S_R T,) \times (0, T)$

$$\mathbf{F}_r^* = \mathbf{F}_r + S_R(\mathbf{U}_r^* - \mathbf{U}_r). \quad (3.6.4)$$

Rovnici (3.6.3) přeuspořádáme

$$S_L \mathbf{U}_l^* - \mathbf{F}_l^* = S_L \mathbf{U}_l - \mathbf{F}_l, \quad (3.6.5)$$

a napíšeme ve složkovém tvaru

$$S_L \begin{pmatrix} \rho_l^* \\ \rho_l^* u_l^* \\ e_l^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_l^* u_l^* \\ \rho_l^* u_l^{*2} + p_l^* \\ (e_l^* + p_l^*) u_l^* \end{pmatrix} = S_L \begin{pmatrix} \rho_l \\ \rho_l u_l \\ e_l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_l u_l \\ \rho_l u_l^2 + p_l \\ (e_l + p_l) u_l \end{pmatrix}. \quad (3.6.6)$$

Nyní se doplní zmíněná podmínka ([20])

$$S_M = u^*, \quad (3.6.7)$$

kde u^* je jistý odhad kontaktní rychlosti. Dle ([1]) je u^* rychlost mezi krajními akustickými vlnami (viz. obr. 3.2). Ta se získá ze rovnice (3.5.7)

$$u^* = S_M = \frac{\rho_r u_r (S_R - u_r) - \rho_l u_l (S_L - u_l) + p_l - p_r}{\rho_r (S_R - u_r) - \rho_l (S_L - u_l)}. \quad (3.6.8)$$

Z první rovnice (3.6.6) se vyjádří

$$\rho_l^* = \rho_l \frac{S_L - u_l}{S_L - S_M}. \quad (3.6.9)$$

Z druhé se využitím vztahu (3.6.9) získá

$$p_l^* = (S_L - u_l)(S_M - u_l)\rho_l. \quad (3.6.10)$$

Analogicky se odvodí rovnice pro p_r^*

$$p_r^* = p_r + (S_R - u_r)(S_M - u_l)\rho_r. \quad (3.6.11)$$

Vztahy (3.6.10) a (3.6.11) se dosadí do (3.6.8) a ukáže se, že

$$p_l^* = p_r^* = p^*. \quad (3.6.12)$$

Tlak v obou prostředních stavech je stejný, stejně jako v exaktním řešení Riemannova problému (2.3.2). Z druhé a třetí rovnice (3.6.6) se pomocí vztahů pro ρ_l^* a p^* vyjádří hybnost a energie v prostředních "hvězdičkových" stavech

$$(\rho u_l)^* = \frac{(S_L - u_l)\rho_l u_l + p^* - p_l}{S_L - S_M}, \quad (3.6.13)$$

$$e_l^* = \frac{(S_L - u_l)e_l - p_l u_l + p^* S_M}{S_L - S_M}. \quad (3.6.14)$$

Vektory \mathbf{U}_l^* (\mathbf{U}_r^* obdobně) se sestaví ze vztahů (3.6.9), (3.6.13) a (3.6.14)

$$\mathbf{U}_l^* = \begin{bmatrix} \frac{\rho_l (S_L - u_l)}{S_L - S_M} \\ \frac{(S_L - u_l)\rho_l u_l + p^* - p_l}{S_L - S_M} \\ \frac{(S_L - u_l)e_l - p_l u_l + p^* S_M}{S_L - S_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_r^* = \begin{bmatrix} \frac{\rho_r (S_R - u_r)}{S_R - S_M} \\ \frac{(S_R - u_r)\rho_r u_r + p^* - p_r}{S_R - S_M} \\ \frac{(S_R - u_r)e_r - p_r u_r + p^* S_M}{S_R - S_M} \end{bmatrix}. \quad (3.6.15)$$

Toky \mathbf{F}_l^* a \mathbf{F}_r^* se určí ze vztahů (3.6.3) a (3.6.4). HLLC metoda, jak lze ukázat ([20]), přesně řeší izolované kontaktní i kontaktní vlny, a zachovává pozitivitu.

3.7 Výpočet signálních rychlostí

K tomu, aby byly schémata HLL a HLLC kompletní a řešitelná, se musí specifikovat signální rychlosti vln S_L a S_R . Zde ukážeme metodu, která spočívá v určení rychlostí pomocí vlastních čísel Roeho matice \mathbf{A} (matice linearizované soustavy, které se používá v Roeho metodě řešení Riemannova problému [16], [18]). Pro odvození viz [2],[3].

$$\begin{aligned} S_L &= \min[\lambda_1(\mathbf{U}_l), \lambda_1(\mathbf{U}^{Roe})], \\ S_R &= \max[\lambda_m(\mathbf{U}^{Roe}), \lambda_m(\mathbf{U}_r)]. \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

To se upraví na

$$\begin{aligned} S_L &= \min(u_l - c_l, \tilde{u} - \tilde{c}), \\ S_R &= \max(\tilde{u} + \tilde{c}, u_r + c_r), \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

kde c_l , c_r jsou rychlosti zvuku. Veličiny \tilde{u} a \tilde{c} se vypočítají následovně ([1])

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u_l + u_r R_\rho}{1 + R_\rho}, \\ \tilde{c}^2 &= (\kappa - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right), \\ \tilde{H} &= \frac{H_l + H_r R_\rho}{1 + R_\rho}, \\ R_\rho &= \sqrt{\rho_l / \rho_r}, \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

kde $H = \frac{e+p}{\rho}$ je entalpie (vztažená na jednotku hmotnosti).

3.8 Metoda konečných objemů

V odvození MKO bude třeba následující věta.

Věta 8 (Greenova věta). [13] *Nechť $\mathbf{f} : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je vektorová funkce v oblasti a $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^1(\mathcal{O})$. Předpokládejme, že \mathcal{G} je kladně orientovaná uzavřená křivka v \mathcal{O} taková, že $\text{Int } \mathcal{G} \in \mathcal{O}$. Potom platí*

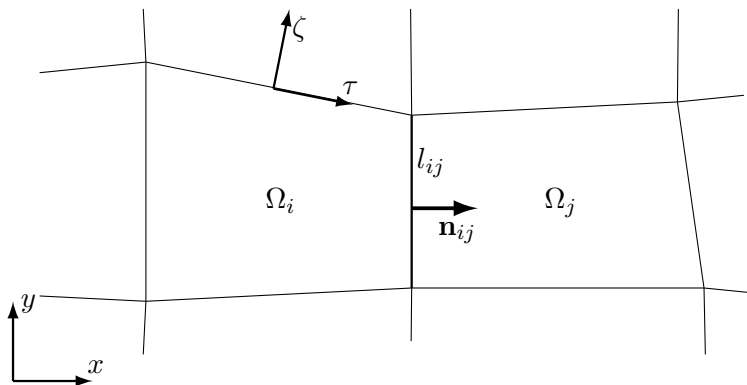
$$\oint_{\mathcal{G}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_{\text{Int } \mathcal{G}} \text{div } \mathbf{f} \, dA. \quad (3.8.1)$$

Dosud jsme se zabývali 1D problémem. Metodu konečných objemů odvodíme pro rovinný problém, tedy pro hyperbolický systém zákonů zachování (2.1.1) ve 2D

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial y} = \mathbf{0}. \quad (3.8.2)$$

Výpočetní oblast se diskretizuje na buňky (konečné objemy), jejichž systém tvoří výpočetní síť. Ta může být:

- strukturovaná - síť je tvořena čtyřúhelníky (šestistěny) s regulární konektivitou - síť lze popsat pomocí dvoj(troj)dimenzionálního pole čísel, ve kterém je každá buňka určena indexy $i, j, (k)$, a její sousedé jsou jednoznačně určeni jako buňky s indexy $i \pm 1, j \pm 1, (k \pm 1)$
- nestrukturovaná - síť je tvořena libovolnými elementy, pro popis sítě je nutné mít explicitně uložené informace o tom, jaké sousedy daná buňka má



Obrázek 3.4: Strukturovaná síť pro metodu konečných objemů

Metoda konečných objemů má dvě podvarianty lišící se v tom, na jakém místě jsou uloženy informace o hodnotách řešení v buňce

- Cell center - hodnoty jsou uloženy v těžištích buněk
- Cell vertex - hodnoty jsou uloženy ve vrcholech buněk

V této práci uvažuji cell-center variantu. Postup pro odvození MKO ve 2D je následující. Máme výpočetní oblast $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^2$, ta se rozdělí na jednotlivé buňky Ω_i . $l_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$ je hranice mezi buňkami Ω_i a Ω_j a platí $\cup_j l_{ij} = \partial\Omega_i$. Vnější normála rozhraní l_{ij} je \mathbf{n}_{ij} (obr. 3.4). V každé buňce se zavede střední hodnota řešení $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ jako

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dA. \quad (3.8.3)$$

Rovnici (3.8.2) prepíšeme pomocí operátoru divergence

$$\mathbf{u}_t + \operatorname{div} \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f} = (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \quad (3.8.4)$$

integrujeme jí po objemu i -té buňky Ω_i

$$\int_{\Omega_i} [\mathbf{u}_t + \operatorname{div} \mathbf{f}] d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.8.5)$$

Integrál se rozdělí, v prvním se zamění pořadí derivace a integrování (Ω_i nezávisí na čase). Na druhý člen se aplikuje Greenova věta (3.8.1)

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u} d\mathbf{x} \right) + \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{0}. \quad (3.8.6)$$

Zavede se normálový tok $\mathbf{f} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u} d\mathbf{x} \right) + \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{f}(\mathbf{u}) ds = \mathbf{0}. \quad (3.8.7)$$

První integrál se upraví dle (3.8.3)

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) = |\Omega_i| \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i(t)}{dt}. \quad (3.8.8)$$

Druhý integrál se rozdělí na jednotlivé integrály přes stěny buňky

$$\oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{f}(\mathbf{u}) ds = \sum_j \int_{l_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) ds. \quad (3.8.9)$$

Tok \mathbf{f} aproximujeme numerickým tokem ϕ

$$\int_{l_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) ds \cong |l_{ij}| \phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{n}_{ij}). \quad (3.8.10)$$

Výsledkem je semidiskrétní schéma

$$|\Omega_i| \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt} = - \sum_j |l_{ij}| \phi(\bar{\mathbf{u}}_i^n, \bar{\mathbf{u}}_j^n, \mathbf{n}_{ij}). \quad (3.8.11)$$

Označení střední hodnoty $\bar{\mathbf{u}}$ nadále vypustíme. Předpokládejme, že numerický tok ϕ je Lipschitzovsky spojitý. Numerický tok má tyto vlastnosti ([16]):

- konzervativita

$$\phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{n}) = -\phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, -\mathbf{n}) \quad (3.8.12)$$

To vyplývá z (3.8.10), neboť

$$\begin{aligned} \int_{l_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{ij} \, ds &= - \int_{l_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot (-\mathbf{n}_{ij}) \, ds = - \int_{l_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n}_{ji}) \, ds = \\ &= -|l_{ij}| \phi(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i, \mathbf{n}_{ji}) = -|l_{ij}| \phi(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i, -\mathbf{n}_{ij}). \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

neboť pro normálové vektory platí $\mathbf{n}_{ij} = -\mathbf{n}_{ji}$. Tato vlastnost říká, že numerický tok mezi buňkami Σ_i a Σ_j je stejný jako mezi buňkami Σ_i a Σ_j , pouze s opačným znaménkem.

- konzistence

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}} \implies \phi(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{n}) = f(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (3.8.14)$$

To znamená, že pro případ konstantního proudění se numerický tok redukuje na spojitý tok f . Důkaz je opět zřejmý z (3.8.10), protože

$$\begin{aligned} \int_{l_{ij}} f(\tilde{\mathbf{u}}) \, ds &= f(\tilde{\mathbf{u}}) \int_{l_{ij}} ds = f(\tilde{\mathbf{u}}) |l_{ij}| = |l_{ij}| \phi(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{n}) \implies \\ &\implies \phi(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{n}) = f(\tilde{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (3.8.15)$$

- rotační invariance (pro Eulerovy rovnice)

$$\Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{n}) = \mathbf{R} \Phi(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_i, \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_j, \mathbf{R}^{-1} \mathbf{n}) \quad (3.8.16)$$

kde \mathbf{R} je transformační matice rotace o úhel θ

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8.17)$$

Nyní se vytvoří nový ortogonální souřadnicový systém (ζ, τ) , viz obr. 3.4. Souřadnice ζ má směr normály a τ tečny k rozhraní. Označí se polohové vektory v obou souřadnicových systémech

$$\mathbf{X} = (x, y)^T \quad \tilde{\mathbf{X}} = (\zeta, \tau)^T. \quad (3.8.18)$$

Zavede se transformační matice rotace v rovině o úhel θ

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.8.19)$$

Pro vektory $\mathbf{n}, \mathbf{n}^\perp$ platí vztahy

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)^T \quad \mathbf{n}^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)^T, \quad (3.8.20)$$

a pro přechod mezi souřadnicovými soustavami

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad \mathbf{X} = \mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}. \quad (3.8.21)$$

Protože matici \mathbf{R} můžeme psát pomocí vektorů \mathbf{n} a \mathbf{n}^\perp jako

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}^T \\ \mathbf{n}^{\perp T} \end{pmatrix} \quad (3.8.22)$$

je možno určit souřadnice v systému (ζ, τ) takto

$$\tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}^\perp)^T. \quad (3.8.23)$$

Transformace (3.8.2) do systému (ζ, τ) vede na rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{f}^\perp(\mathbf{u})}{\partial \tau} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}^\perp = (\mathbf{f}(\mathbf{u}), \mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}^\perp \quad (3.8.24)$$

Na obou stranách rozhraní jsme uvažovali konstantní stavy \mathbf{u} , tato rovnice se redukuje na

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \zeta} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(\zeta, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_i, & \zeta < 0, \\ \mathbf{u}_j, & \zeta \geq 0. \end{cases} \quad (3.8.25)$$

Získali jsme jednorozměrný systém (3.2.1). Tento systém je hyperbolický právě tehdy pokud je hyperbolický systém (3.8.2), ze kterého vychází. Tím se propojují výsledky řešení Riemannova problému s metodou konečných objemů ve více dimenzích. Je třeba dodat, že cesta přes Riemannovy řešiče není jediná, existují i mnohá "Riemann-solver-free" schémata, např. rodina AUSM. Pro Eulerovy rovnice píšeme (3.8.24)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{U})}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathcal{F}^\perp(\mathbf{U})}{\partial \tau} = \mathbf{0}, \quad (3.8.26)$$

kde

$$\mathcal{F} = (\mathbf{F}(\mathbf{U}), \mathbf{G}(\mathbf{U})) \cdot \mathbf{n} = \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathcal{F}^\perp = (\mathbf{F}(\mathbf{U}), \mathbf{G}(\mathbf{U})) \cdot \mathbf{n}^\perp = \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}^\perp. \quad (3.8.27)$$

Jednorozměrný Riemannův problém ve směru ζ je

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{U})}{\partial \zeta} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}(\zeta, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_i, & \zeta < 0, \\ \mathbf{U}_j, & \zeta \geq 0. \end{cases} \quad (3.8.28)$$

Rozepsaný normálový tok je

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \rho q \\ \rho u q + p n_x \\ \rho v q + p n_y \\ (e + p)q \end{pmatrix}, \quad (3.8.29)$$

kde $q = (u, v) \cdot \mathbf{n}$ je normálová složka rychlosti.

3.8.1 Schéma HLL pro metodu konečných objemů ve 2D

Schéma HLL pro rovnici (3.8.25) je možné použít ve tvaru (3.5.12), dosadíme $\mathbf{f} = f$

$$\phi_{HLL} = \begin{cases} f_L & \text{pro } S_L > 0, \\ f^* = \frac{S_R f_L - S_L f_R + S_R S_L (u_R - u_L)}{S_R - S_L} & \text{pro } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ f_R & \text{pro } S_R < 0. \end{cases} \quad (3.8.30)$$

Pro Eulerovy rovnice se dosadí $\mathbf{u} = \mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, e)^T$ a $\mathbf{f} = \mathcal{F}$

$$\Phi_{HLL} = \begin{cases} \mathcal{F}_L & \text{pro } S_L > 0, \\ \mathcal{F}^* = \frac{S_R \mathcal{F}_L - S_L \mathcal{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} & \text{pro } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ \mathcal{F}_R & \text{pro } S_R < 0. \end{cases} \quad (3.8.31)$$

Musí se ještě modifikovat signální rychlosti S_L , S_R , viz dále.

3.8.2 Schéma HLLC pro metodu konečných objemů ve 2D

Schéma HLLC se musí použít v rozšířené variantě, která je odvozena pro problém (3.8.25) (pro kompletní odvození viz [1]). Numerický tok je

$$\Phi_{HLLC} = \begin{cases} \mathcal{F}_L & \text{pro } S_L > 0, \\ \mathcal{F}_L^* & \text{pro } S_L \leq 0 < S_M, \\ \mathcal{F}_R^* & \text{pro } S_M \leq 0 \leq S_R, \\ \mathcal{F}_R & \text{pro } S_R < 0. \end{cases} \quad (3.8.32)$$

Rychlost kontaktní vlny je, podobně jako v (3.6.8)

$$S_M = \frac{\rho_r q_r (S_R - q_r) - \rho_l q_l (S_L - q_l) + p_l - p_r}{\rho_r (S_R - q_r) - \rho_l (S_L - q_l)}. \quad (3.8.33)$$

Prostřední stavy jsou určeny rozšířenou verzí vztahů (3.6.15)

$$\mathbf{U}_l^* = \begin{bmatrix} \frac{\rho_l (S_L - q_l)}{S_L - S_M} \\ \frac{(S_L - q_l) \rho_l u_l + (p^* - p_l) n_x}{S_L - S_M} \\ \frac{(S_L - q_l) \rho_l v_l + (p^* - p_l) n_y}{S_L - S_M} \\ \frac{(S_L - q_l) e_l - p_l q_l + p^* S_M}{S_L - S_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_r^* = \begin{bmatrix} \frac{\rho_r (S_R - q_r)}{S_R - S_M} \\ \frac{(S_R - q_r) \rho_r u_r + (p^* - p_r) n_x}{S_R - S_M} \\ \frac{(S_R - q_r) \rho_r v_r + (p^* - p_r) n_y}{S_R - S_M} \\ \frac{(S_R - q_r) e_r - p_r q_r + p^* S_M}{S_R - S_M} \end{bmatrix}. \quad (3.8.34)$$

Toky \mathcal{F}_L^* a \mathcal{F}_R^* se poté určí ze vztahů

$$\mathcal{F}_l^* = \mathcal{F}_l + S_L (\mathbf{U}_l^* - \mathbf{U}_l), \quad (3.8.35)$$

$$\mathcal{F}_r^* = \mathcal{F}_r + S_R (\mathbf{U}_r^* - \mathbf{U}_r), \quad (3.8.36)$$

analogicky s (3.6.3), (3.6.4). Signální rychlosti jsou dané následovně. Vztah (3.7.2) se upraví na

$$\begin{aligned} S_L &= \min(q_l - c_l, \tilde{q} - \tilde{c}), \\ S_R &= \max(\tilde{q} + \tilde{c}, q_r + c_r). \end{aligned} \quad (3.8.37)$$

Ve vzorcích (3.7.3) se analogicky u zamění za q .

3.9 Metody vyššího řádu přesnosti

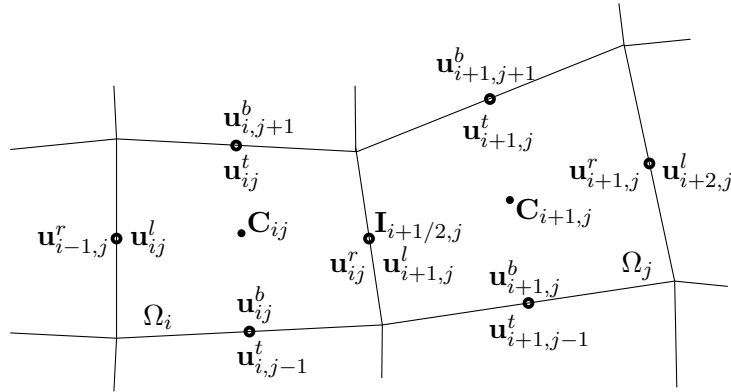
Metoda konečných objemů, tak jak je popsána v předcházejícím oddílu, se značí jako metoda prvního řádu. Hodnoty veličin ve středu buňky se jednoduše předepíší i na příslušných hranicích buňky, a z těch se poté sestaví Riemannovy problémy. Přesnost je možno zvýšit tak, že se uvažuje nekonzstantní rozložení hodnot v buňce, tím pádem hodnoty na hranicích mohou být obecně jiné než ve středu. Zde se omezíme na lineární rekonstrukci. Proveďte se Taylorův rozvoj funkce $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ v prostoru okolo bodu \mathbf{x}_0

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2). \quad (3.9.1)$$

V buňce metody konečných objemů pro \mathbf{u}_{ij} platí (chybu zanedbáme)

$$\mathbf{u}_{ij}^{l,r,t,b} = \mathbf{u}_{ij} + \text{grad}(\mathbf{u}_{ij}^{l,r,t,b}) \|\mathbf{C}_{ij} \mathbf{I}_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}\|, \quad (3.9.2)$$

kde horní index nabývající hodnot l, r, t, b značí, na kterém rozhraní určujeme hodnotu funkce \mathbf{u} a gradientu. \mathbf{C}_{ij} a $\mathbf{I}_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}$ jsou souřadnice středu buňky a středu rozhraní (obr. 3.5). Obecně neplatí $\mathbf{u}_{ij}^r = \mathbf{u}_{i+1, j}^l$, protože by nevznikl Riemannův problém na stěně.



Obrázek 3.5: Interpolace hodnot na stěny buněk

Gradient se určí např. metodou MUSCL ([22], [9]), kterou jsem použil v mém programu. Napíšeme vztahy pro složky gradientu řešení v i -té buňce

$$\begin{aligned} \text{grad}(u_{ij}^l) &= \frac{s}{2\|\mathbf{C}_{ij} \mathbf{C}_{ij}\|} [(1 - \kappa s)(u_{i,j} - u_{i+1,j}) + (1 + \kappa s)(u_{i-1,j} - u_{i,j})], \\ \text{grad}(u_{ij}^r) &= \frac{s}{2\|\mathbf{C}_{ij} \mathbf{C}_{ij}\|} [(1 - \kappa s)(u_{i,j} - u_{i-1,j}) + (1 + \kappa s)(u_{i+1,j} - u_{i,j})], \\ \text{grad}(u_{ij}^t) &= \frac{s}{2\|\mathbf{C}_{ij} \mathbf{C}_{ij}\|} [(1 - \kappa s)(u_{i,j} - u_{i,j-1}) + (1 + \kappa s)(u_{i,j+1} - u_{i,j})], \\ \text{grad}(u_{ij}^b) &= \frac{s}{2\|\mathbf{C}_{ij} \mathbf{C}_{ij}\|} [(1 - \kappa s)(u_{i,j} - u_{i,j+1}) + (1 + \kappa s)(u_{i,j-1} - u_{i,j})], \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

kde κ je konstanta, jejíž volbou můžeme dostat různě přesná schémata (uvažoval jsem $\kappa = 1/3$, tato volba vede na kartézské rovnoměrné síti ke schématu

třetího řádu). Funkce s je tzv. limiter, který zabraňuje oscilacím v blízkosti nespojitostí či velkých gradientů. Já jsem užil van Albadův ([9])

$$s = \text{ave}(\Delta^- u, \Delta^+ u), \quad \text{ave}(a, b) = \frac{2(ab + \epsilon_a)}{a^2 + b^2 + 2\epsilon_a}, \quad \epsilon_a = 10^{-6}. \quad (3.9.4)$$

Postup lze zjednodušit, pokud zanedbáme nepravidelnosti sítě

$$\|\mathbf{C}_{ij}\mathbf{I}_{i+1/2,j}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{C}_{ij}\mathbf{C}_{i+1,j}\|. \quad (3.9.5)$$

Výsledné schéma s tímto zjednodušením se získá dosazením (3.9.3) do (3.9.2)

$$\begin{aligned} u_{ij}^l &= \frac{s}{4} [(1 - \kappa s)(u_{i,j} - u_{i+1,j}) + (1 + \kappa s)(u_{i-1,j} - u_{i,j})], \\ u_{ij}^r &= \frac{s}{4} [(1 - \kappa s)(u_{i,j} - u_{i-1,j}) + (1 + \kappa s)(u_{i+1,j} - u_{i,j})], \\ u_{ij}^t &= \frac{s}{4} [(1 - \kappa s)(u_{i,j} - u_{i,j-1}) + (1 + \kappa s)(u_{i,j+1} - u_{i,j})], \\ u_{ij}^b &= \frac{s}{4} [(1 - \kappa s)(u_{i,j} - u_{i,j+1}) + (1 + \kappa s)(u_{i,j-1} - u_{i,j})]. \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

Tím, že hodnoty mají nekonstantní průběh v buňce, se na rozhraní vytvoří tzv. *zobecněný Riemannův problém* (zde v 1D)

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_l(x), & x < 0 \\ \mathbf{u}_r(x), & x \geq 0. \end{cases} \quad (3.9.7)$$

Ten se liší od (klasického) Riemannova problému (2.1.7) tím, že na obou stranách nespojitosti jsou nekonstantní stavy. To ovšem zanedbáme, a uvažujeme klasický Riemannův problém, jako by se v obou buňkách hodnoty neměnily.

■ 3.10 Časová diskretizace

Po provedení prostorové diskretizace metodou konečných objemů se získá semi-diskrétní rovnice pro každou buňku (3.8.11), což napíšeme ve zjednodušeném tvaru

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{u})_i, \quad (3.10.1)$$

kde $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ je prostorový operátor pravé strany. Index i vypustíme. Časovou derivaci je potřeba diskretizovat, a to některou z mnoha explicitních nebo implicitních metod.

■ 3.10.1 Explicitní metody

Explicitní metody umožňují vyjádřit nové hodnoty \mathbf{u}^{n+1} z hodnot v časových vrstvách $n, n-1, \dots$. Jsou proto jednoduché na implementaci a nenáročné na výpočetní čas, ale časový krok musí být omezen tak, aby vyhovoval podmínce stability.

■ Eulerova dopředná diference

Nejjednodušší diskretizací časové derivace je Eulerova dopředná metoda

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}. \quad (3.10.2)$$

Pravá strana se vyjádří v n -té časové vrstvě, tzn.

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{L}(\mathbf{u}^n) \quad (3.10.3)$$

Tato metoda je prvního řádu přesnosti, a proto může být vhodnější užít některou metodu vyššího řádu přesnosti.

■ Metody Runge-Kutta

Metody typu Runge-Kutta ([14]) jsou explicitní vícekrokové metody. Nabízejí vyšší přesnost v případě nestacionárního výpočtu, a pokud hledáme stacionární řešení metodou ustalování, tak mohou zrychlit konvergenci. Metoda Runge-Kutta 2. řádu vypadá následovně

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{u}^n) \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^n + \frac{1}{2} \mathbf{u}^* + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{u}^*), \end{aligned} \quad (3.10.4)$$

a metoda 3. řádu

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{u}^n) \\ \mathbf{u}^{**} &= \frac{3}{4} \mathbf{u}^n + \frac{1}{4} \mathbf{u}^* + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{u}^*) \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \frac{1}{3} \mathbf{u}^n + \frac{2}{3} \mathbf{u}^* + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{u}^{**}). \end{aligned} \quad (3.10.5)$$

Tyto metody mají TVD vlastnost.¹

■ 3.10.2 Implicitní metody

Implicitní metody neumožňují vyjádřit \mathbf{u}^{n+1} jako funkci hodnot ve vrstvách $n, n-1, \dots$. Většinou se musí řešit velká soustava lineárních rovnic a jsou díky tomu náročnější na implementaci i na výpočet. Výhodou je, že jsou nepodmíněně stabilní a umožňují tedy volit větší časové krok, než explicitní. Ten ale i tak musíme volit dostatečně malý, aby byly zachyceny požadované fyzikální děje v proudění.

¹ *Total Variation Diminishing* - metody nezvyšující totální variaci, viz [6].

■ Eulerova zpětná diference

Nejjednodušší implicitní metoda je zpětná Eulerova. Derivace se diskretizuje jako u explicitní Eulerovy, ale pravá strana se vyjádří v časové vrstvě $n + 1$

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} = \mathbf{L}(\mathbf{u}^{n+1})_i \quad (3.10.6)$$

Operátor $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ je ovšem nelineární, proto je nutné jej linearizovat v bodě \mathbf{u}^n

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}^{n+1})_i \approx \mathbf{L}(\mathbf{u}^n)_i + \sum_{j \in N_i \cup i} \left(\frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{u})_i}{\partial \mathbf{u}_j} \right)^n \Delta \mathbf{u}_j, \quad (3.10.7)$$

kde N_i jsou sousední buňky buňky i . Protože $\Delta \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = \Delta \mathbf{u}$, platí

$$\sum_{j \in N_i \cup i} \left(\frac{\mathbb{I}}{\Delta t} - \frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{u}^n)_i}{\partial \mathbf{u}_j} \right) \Delta \mathbf{u}_j = \mathbf{L}(\mathbf{u}^n)_i \quad (3.10.8)$$

To je soustava lineárních rovnic, která se následně numericky řeší, ale je možné použít i "matrix-free" metody ([4]).

■ 3.11 Okrajové podmínky

Aby bylo možné počítat úlohy na omezených oblastech, je nutno přidat k rovnicím okrajové podmínky. V teorii okrajových podmínek se analyzuje linearizovaný systém v 1D

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \end{cases} \quad (3.11.1)$$

z jehož analýzy vyplývá, že počet okrajových podmínek, které je nutné zadat, odpovídá počtu charakteristik, které danou částí hranice vstupují do výpočetní oblasti (viz [16]).

■ 3.11.1 Okrajové podmínky pro Eulerovy rovnice

■ Okrajová podmínka pro tekutinu

Vychází se z linearizovaných Eulerových rovnic. Na těch částech hranice oblasti, kde tekutina vstupuje a vystupuje do výpočetní oblasti (v 1D), existují čtyři možnosti, podle nichž se určí počet okrajových podmínek, tedy počet předepsaných fyzikálních veličin.

1. nadzvukový vstup - musí být předepsány všechny primitivní veličiny (ρ, u, p)
2. podzvukový vstup - zadají se dvě veličiny, dvojice (ρ, u) nebo (ρ, p)
3. podzvukový výstup - zadá se jedna veličina, např. tlak
4. nadzvukový výstup - žádné veličiny se nezadávají

■ Okrajová podmínka pro pevnou stěnu

Tato je známá též jako *slip* okrajová podmínka (tekutina "klouže" po stěně). Rychlost tekutiny má směr rovnoběžný se stěnou, což se vyjádří

$$(u, v) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.11.2)$$

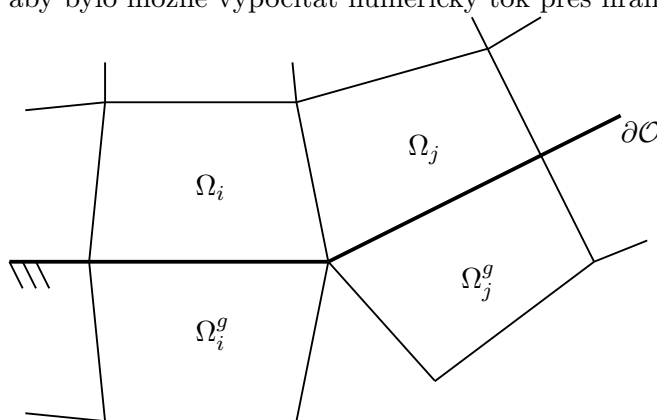
■ Neumannova okrajová podmínka

Tato podmínka, dobře známá z teorie PDR, spočívá v zadání normálové derivace na hranici oblasti. V této práci je v některých případech výpočtů užita její homogenní varianta.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0. \quad (3.11.3)$$

■ 3.11.2 Numerická implementace okrajových podmínek

Hranice výpočetní oblasti \mathcal{O} se skládá ze stěn hraničních buněk. Na těchto stěnách musíme určit numerický tok. Jedna z možností, jak toho docílit, spočívá v přidání tzv. *ghost cells* (fiktivní buňky). To jsou buňky, které se zavedou za hranicí výpočetní oblasti, přičemž každá se vytvoří ozrcadlením hraniční buňky přes hranici (obr. 3.6). V této buňce se poté předepíší veličiny tak, aby bylo možné vypočítat numerický tok přes hranici.



Obrázek 3.6: Koncept fiktivních buněk

Z obrázku 3.6 vyplývá, že fiktivní buňky na sebe svými stěnami nemusí navazovat, to ale není překážka, neboť nás zajímá pouze numerický tok přes hranici.

■ Okrajová podmínka pro stěnu

Uvažujeme řešení Eulerových rovnic. Platí podmínka (3.11.2), proto tok na stěně je

$$\mathcal{F} = (0, p_w \mathbf{n}, 0)^T. \quad (3.11.4)$$

Do fiktivní buňky odpovídající buňce i se předepíší veličiny následovně

$$\rho_i^g = \rho_i, \quad (3.11.5)$$

$$p_i^g = p_i, \quad (3.11.6)$$

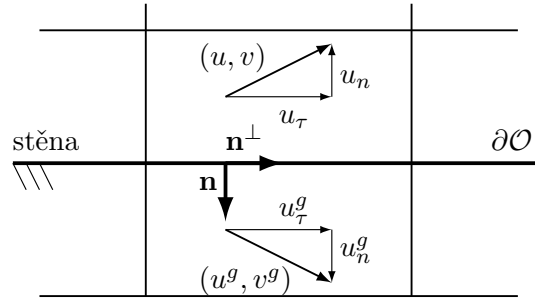
$$u_{\tau i}^g = u_{\tau i}, \quad (3.11.7)$$

$$u_{ni}^g = -u_{ni}. \quad (3.11.8)$$

Hustota, tlak a tečná složka rychlosti $u_{\tau} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^{\perp}$ jsou stejné jako v i -té buňce, zatímco normálová složka rychlosti $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ je opačná (obr. 3.7). Nyní máme specifikované oba stavy, a můžeme použít řešič Riemannova problému. Výsledkem bude numerický tok

$$\Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_i^g) = (0, p^* \mathbf{n}, 0)^T, \quad (3.11.9)$$

ve kterém vystupuje tlak "na stěně" p^* ($= p_w$) což je tlak prostředního, "hvězdičkováného" stavu ve struktuře řešení Riemannova problému.



Obrázek 3.7: Rychlost ve fiktivní buňce

■ Okrajová podmínka pro tekutinu

Používá se pro vstupy a výstupy tekutiny do/z oblasti. Ve fiktivní buňce se dle typu proudění předepíše stav \mathbf{U}_i^g . Veličiny, které se nepředepisují, se použijí z odpovídající i -té buňky se stavem \mathbf{U}_i^g . Numerický tok $\Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_i^g)$ se určí standardně pomocí řešení Riemannova problému.

■ Neumannova okrajová podmínka

Neumannova okrajová podmínka se pomocí fiktivních buněk implementuje jednoduše. Vztah (3.11.3) se aproximuje schématem

$$\frac{\mathbf{u}_i^g - \mathbf{u}_i^g}{\Delta n} = 0. \quad (3.11.10)$$

Z toho vyplývají stejné hodnoty stavů v i -té buňce a fiktivní buňce jí příslušející.

$$\mathbf{u}_i^g = \mathbf{u}_i^g \quad (3.11.11)$$

3.12 Časový krok

Ve schématech pro časovou diskretizaci se vyskytuje časový krok Δt . Ten nelze volit libovolně, ale musí omezen (v případě explicitních schémat), aby bylo schéma stabilní, popř. (v explicitních i implicitních schématech) musí být tak malý, aby naše numerická metoda dokázala zachytit sledované fyzikální procesy, které mají své charakteristické časové měřítko. Volnou definici stability přebírám z [11]: Schéma je stabilní, pokud chyby, které se vytvářejí v každém časovém kroku nerostou příliš rychle. Nutná podmínka pro stabilitu numerické metody je tzv. *CFL podmínka*:

Věta 9. *Numerická metoda může být stabilní právě tehdy, když numerická oblast závislosti obsahuje doménu závislosti diferenciální rovnice, alespoň v limitě pro Δt a Δx jdoucí k nule.*

Definice 20. Numerickou oblastí závislosti bodu (X, T) nazveme množinu bodů, kde počáteční data mohou ovlivnit numerické řešení v bodě (X, T) .

Definice 21. Oblastí závislosti bodu (X, T) nazveme množinu bodů, kde počáteční data mohou ovlivnit řešení v bodě (x, T) , tzn.

$$\{x \in \mathbb{R} : X - S_{max}T \leq x \leq X - S_{min}T\}. \quad (3.12.1)$$

Pro schéma Godunovova typu je podmínka stability

$$S_{max_i} \frac{\Delta t_i}{\Delta x_i} \leq 1, \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq N \quad (3.12.2)$$

Časový krok je tedy omezen

$$\Delta t_i \leq \frac{\Delta x_i}{S_{max_i}}. \quad (3.12.3)$$

Časový krok uvažujeme ve všech buňkách stejný (obecně tomu tak být nemusí, je možno zavést tzv. lokální časový krok pro zrychlení konvergence)

$$\Delta t \leq \min_i \left(\frac{\Delta x_i}{S_{max_i}} \right). \quad (3.12.4)$$

Dále se doplní konstanta $CFL \in (0, 1)$, která se volí v závislosti na případě, tak aby výpočet konvergoval

$$\Delta t \leq CFL \min_i \left(\frac{\Delta x_i}{S_{max_i}} \right). \quad (3.12.5)$$

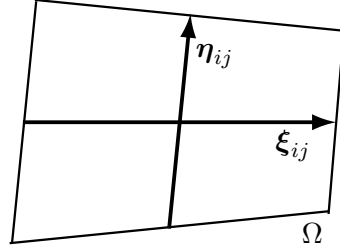
Zjednodušení tohoto vztahu je

$$\Delta t \leq CFL \min_i \left(\frac{\Delta x_i}{|u|_i + c_i} \right), \quad (3.12.6)$$

a ve 2D

$$\Delta t \leq CFL \min_{ij} \left(\frac{1}{\frac{|u|_{ij} + c_{ij}}{\Delta x_{ij}} + \frac{|v|_{ij} + c_{ij}}{\Delta y_{ij}}} \right). \quad (3.12.7)$$

Tato podmínka je platná pouze pro kartézské sítě, pro obecnější sítě lze podmínku stability určit složitěji ([7]). Jsou zavedeny vektory ξ a η , což jsou vektory mezi středy protilehlých stran buňky.



Obrázek 3.8: Vektory ξ a η

Časový krok se vypočítá dle

$$\Delta t \leq \text{CFL} \min_{ij} \left(\frac{1}{\frac{|u_\xi|_{ij} + c_{ij}}{\Delta \xi_{ij}} + \frac{|v_\eta|_{ij} + c_{ij}}{\Delta \eta_{ij}}} \right), \quad (3.12.8)$$

kde $u_\xi = (u, v) \cdot \frac{\xi}{\|\xi\|}$, $u_\eta = (u, v) \cdot \frac{\eta}{\|\eta\|}$, $\Delta \xi = \|\xi\|$, $\Delta \eta = \|\eta\|$.

3.13 Reziduum

Eulerovy rovnice a jejich numerické řešení popsané v této práci jsou sice nestacionární, tedy závislé na čase, ale lze pomocí nich hledat i stacionární řešení. To se děje tzv. metodou ustalování, kde se hledá stacionární řešení jako ustálený stav nestacionárního řešení. "Ustálenost" se sleduje pomocí tzv. rezidua, tedy rozdílu v řešení dvou následujících časových vrstev. Zde je použito reziduum hustoty, které je definováno vzorcem

$$\text{rez} = \log \left(\sqrt{\sum_{i=0}^N \left(\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \right)^2} \right), \quad (3.13.1)$$

kde N je počet buněk. Je to vlastně logaritmus ℓ_2 normy vektoru, jehož i -tá složka je rozdíl hustot ve dvou časových vrstvách podělené hustotou v i -té buňce. Výpočet ukončíme tehdy, pokud se reziduum ustálí a přestane klesat.

Kapitola 4

Rotované hybridní řešiče Riemannova problému

4.1 Úvod

Numerické metody jsou povětšinou konstruovány pro 1D problémy, a poté se z nich konstruují vícerozměrná schémata. To s sebou může nést potíže, pokud se v řešení objeví rázová vlna, která není zarovnána s rozhraním buněk, ale svírá s nimi nějaký úhel. V tomto případě metoda konečných objemů ve formě odvozené v sekci 3.8 společně s 1D numerickými toky nemusí dávat správné výsledky ([23]). To může mít za následek buď zhoršenou přesnost výsledků, nebo vznik nestabilit, které mohou "zničit" řešení. Tyto nestability se anglicky označují jako "carbuncle" ([15]). Aby se snížila závislost na orientaci sítě, se vyvíjejí metody, které jsou schopny zachytit lépe multidimenzionalitu řešení. V [23] jsou numerické vícerozměrné metody rozděleny dle složitosti do čtyř skupin:

- metody zarovnané se sítí ("grid-aligned"), tzn. standartní MKO (3.8)
- rotované metody, u nichž se numerické toky počítají v jiném (rotovaném) souřadnicovém systému, než v tom zarovnaném se sítí, ale tyto toky se počítají z hodnot ve středu buněk, jako v předchozím případě (těmi se budu dále zabývat)
- rotované metody s interpolací - toky se opět počítají v otočené soustavě, ale potřebné hodnoty se interpolují ze středu buněk na osy rotovaného systému
- vícedimenzionální schémata, která jsou kompletně odvozena pro 2D/3D problém

Kromě toho, že od naší numerické metody požadujeme, aby správně zachycovala rázové vlny, od ní také chceme správně řešení smykových vrstev (pokud je součástí řešiče Navierových-Stokesových rovnic). Jedna z metod, která se snaží o to potlačit vznik nestabilit a přitom být dostatečně přesná, se nazývá rotovaný hybridní řešič Riemannova problému.

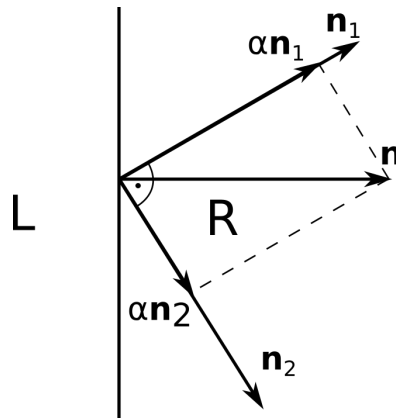
4.2 Rotované schéma

V obecné variantě ([17]) je princip tohoto numerického schématu založen na rozkladu normálového vektoru každého rozhraní \mathbf{n} na několik jednotkových vektorů

$$\mathbf{n} = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathbf{n}_i, \quad M \geq 2. \quad (4.2.1)$$

Rozklad se většinou omezuje na dva ortonormální vektory \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , viz obr. 4.1

$$\mathbf{n} = \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \alpha_2 \mathbf{n}_2, \quad \alpha_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1, \quad \alpha_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (4.2.2)$$



Obrázek 4.1: Rozklad normály

Ve směru každého vektoru se poté spočítá numerický tok. Výsledný numerický tok je poté lineární kombinace toků v obou směrech

$$\Phi_{rot} = \alpha_1 \Phi(\mathbf{n}_1) + \alpha_2 \Phi(\mathbf{n}_2). \quad (4.2.3)$$

4.3 Rotované hybridní schéma

Z předcházející metody bylo v [9] vyvinuto rotované *hybridní* schéma. Tento koncept je založen na myšlence, že potřebujeme metodu schopnou správně zachytit rázové vlny a přesně vyřešit proudění v mezní vrstvě. Mnohé numerické toky zvládají pouze jeden z těchto požadavků. Např. Roeho schéma s tzv. entropickou korekcí ([18], [16]), popř. HLLC, sice přesně řeší smykové vrstvy, ale je náchylné ke vzniku nestabilit v oblasti rázových vln. Schémata jako Rusanov nebo HLL jsou naopak velmi disipativní, takže nestability potlačují, ale nejsou vhodná pro řešení vazkého proudění. Rotované hybridní schéma využívají dva toky - jeden z obou skupin.

Vychází se z rotovaného řešiče (4.2.3), ale v každém směru se použije jiný numerický tok

$$\Phi_{rot-hybrid} = \alpha_1 \Phi_{tok1}(\mathbf{n}_1) + \alpha_2 \Phi_{tok2}(\mathbf{n}_2) \quad (4.3.1)$$

V ([9]) byly prezentovány rotované hybridní Rusanov/Roe a HLL/Roe schémata. V obou případech má Roeho schéma roli přesnějšího toku, dávajícího méně stabilní výsledky, a Rusanovovo schéma nebo HLL jsou zodpovědné za stabilitu rázových vln.

4.4 HLL/HLLC rotovaný hybridní řešič Riemannova problému

Hlavním cílem této práce je implementace HLL/HLLC rotovaného schématu. To vznikne tak, že do obecného rotovaného řešiče (4.2.3) se dosadí HLL a HLLC přibližné řešiče Riemannova problému. Volba těchto dvou je analogická, jako v případě Roe/Rusanov a Roe/HLL schémat, tedy ve směru \mathbf{n}_1 se uvažuje tok HLL, který není náchylný ke vzniku nestabilit, ale je disipativní a více "rozmazává" rázové vlny, a HLLC ve druhém směru \mathbf{n}_2 . HLLC dokáže přesněji zachytit rázové vlny, za cenu větší nestability.

$$\Phi_{HLL/HLLC} = \alpha_1 \Phi_{HLL}(\mathbf{n}_1) + \alpha_2 \Phi_{HLLC}(\mathbf{n}_2) \quad (4.4.1)$$

HLL je třístavové schéma (3.8.31), zatímco HLLC čtyřstavové (3.8.32). Výsledné schéma je tedy dvanáctstavové. Ty se rozdělí do tří skupin:

1. proudění v obou směrech \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 je supersonické ve směru normály

$$S_L^{n_1} > 0 \text{ a } S_L^{n_2} > 0. \quad (4.4.2)$$

Zde je situace jednoduchá, neboť jak HLL tak HLLC mají stejný tvar pro supersonické proudění, a numerický tok je tedy tok nalevo od rozhraní

$$\Phi_{HLL/HLLC} = \mathcal{F}_L^n \quad (4.4.3)$$

2. proudění v obou směrech je supersonické proti směru normály

$$S_R^{n_1} < 0 \text{ a } S_R^{n_2} < 0. \quad (4.4.4)$$

Numerický tok se obdobně redukuje na tok napravo od rozhraní

$$\Phi_{HLL/HLLC} = \mathcal{F}_R^n \quad (4.4.5)$$

3. ve všech ostatních případech, vztah pro výpočet toku nelze zjednodušit. Musí se tedy vypočítat oba toky, a dosadit je do rovnice (4.4.1), kde $\Phi_{HLL}(\mathbf{n}_1)$ se určí pomocí (3.8.31), a $\Phi_{HLLC}(\mathbf{n}_2)$ pomocí (3.8.32) a na ně navazujících vztahů. Zkoušel jsem nadále tyto vztahy zjednodušit za účelem zrychlení algoritmu, ale bez úspěchu.

4.5 Určení vektorů $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$

Nastává otázka, jak určit oba směry, ve kterých se počítá numerický tok. V [17] je směr vektoru \mathbf{n}_1 určen směrem rozdílu rychlosti mezi pravým a levým stavem

$$\mathbf{n}_1 = \begin{cases} \frac{\delta \vec{q}}{\|\Delta \vec{q}\|}, & \text{pokud } \|\Delta \vec{q}\| > \epsilon \\ \mathbf{n}, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (4.5.1)$$

kde $\Delta \vec{q} = (\Delta u, \Delta v) = (u_R - u_L, v_R - v_L)$ a ϵ je "malé" číslo (v [9] $\epsilon = 10^{-12} U_{ref}$, U_{ref} je referenční rychlost) Mírně vylepšená varianta ([9]) se liší pouze pro případ $\|\Delta \vec{q}\| \leq \epsilon$

$$\mathbf{n}_1 = \begin{cases} \frac{\delta \vec{q}}{\|\Delta \vec{q}\|}, & \text{pokud } \|\Delta \vec{q}\| > \epsilon \\ \mathbf{n}_\perp, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Vektor \mathbf{n}_\perp leží v rovině rozhraní - je kolmý na normálu $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$. Druhý vektor \mathbf{n}_2 je zvolen jako kolmý k \mathbf{n}_1 , přičemž ale nesmí "mířit" dovnitř buňky, tzn.

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n} \geq 0. \quad (4.5.3)$$

Druhá varianta výpočtu se tedy liší, jen pokud je velikost rozdílu rychlosti zanedbatelná. Pak platí

$$\alpha_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \quad \alpha_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_2 = 1, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}. \quad (4.5.4)$$

Rotovaný tok se zjednoduší

$$\Phi_{rot} = \Phi_{tok2}(\mathbf{n}_2), \quad (4.5.5)$$

a zredukuje se tak na ten přesnější numerický tok, v našem případě HLLC, což je v oblastech bez rázových vln žádoucí. Ve 3D je situace složitější, neboť existuje nekonečně mnoho vektorů kolmých na \mathbf{n}_1 . V [17] je vztah pro \mathbf{n}_2 navrhnut takto

$$\mathbf{n}_2 = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}_1. \quad (4.5.6)$$

Vektor \mathbf{n}_2 je zvolen tak, že rovina tvořená vektory \mathbf{n}_1 a \mathbf{n}_2 je kolmá na rovinu rozhraní.

Kapitola 5

Numerické výsledky

V této kapitole ukáží několik výsledků výpočtu pomocí rotovaného schématu HLL/HLLC a porovnání se samotnými HLL a HLLC schématy. Výpočty jsem provedl pomocí vlastního programu, který jsem napsal v jazyce C++ a který je schopen řešit 2D nevazké proudění na strukturovaných sítích s přesností 1./2. řádu v prostoru a 1./2./3. v čase (explicitní). Proudící médium je vzduch s hodnotami $\kappa = 1,4$ a $r = 287,1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

5.1 Kanál s pravidelnými poruchami sítě

Tento testovací případ pochází z [15]. Je to kanál, ve kterém proudí tekutina zleva doprava. V počáteční podmínce je do kanálu umístěna rázová vlna, která se pohybuje. Sít je strukturovaná, složená z 800×20 čtvercových buněk o rozměru $h = 1$. Aby se testovala odolnost vůči vzniku nestabilit, má sít následující poruchy:

$$y_{i,10} = \begin{cases} y_{str} + 10^{-3}h & \text{pokud } i \text{ je sudé,} \\ y_{str} - 10^{-3}h & \text{pokud } i \text{ je liché,} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

kde y_{str} je ypsilonová souřadnice osy kanálu. Počáteční podmínka jsou tedy dva stavy, mezi nimiž je v místě $x = 25$ rázová vlna.

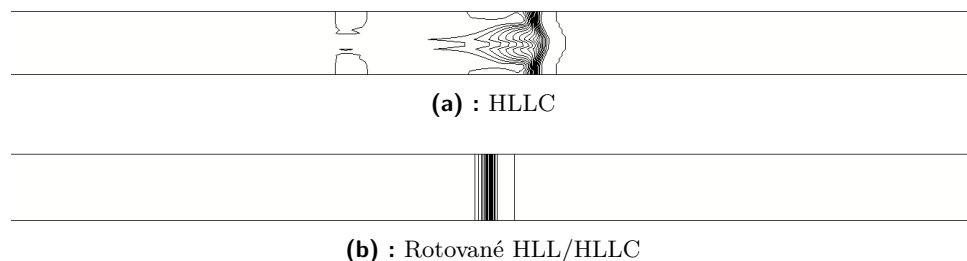
$$\mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0 \\ \mathbf{U}_R, & x \geq 0 \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Ta se pohybuje rychlostí $M_s = 6$. Hodnoty stavů \mathbf{U}_L a \mathbf{U}_R jsou vypočítány pomocí Rankine-Hugoniotových vztahů (2.1.14)

$$\mathbf{U}_L = \begin{pmatrix} 7,376 \\ 35,854 \\ 0 \\ 191,728 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_R = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}. \quad (5.1.3)$$

Okrajové podmínky jsou nastaveny takto: Horní a spodní okraje jsou pevné stěny, na vstupu (nadzvukovém) je předepsán celý stav \mathbf{U}_L , na výstupu (podzvukovém) by sice měla být předepsaná jedna veličina, nicméně je použita homogenní Neumannova okrajová podmínka. Schéma je prvního řádu

v prostoru. Výsledky jsou na obr. 5.1. Je zřetelné, že HLLC schéma nedokáže utlumit vznikající nestability tvořené odchylkami sítě a dojde ke "zničení" rázové vlny. Rotované schéma HLL/HLLC naproti tomu rázovou vlnu zachovává.



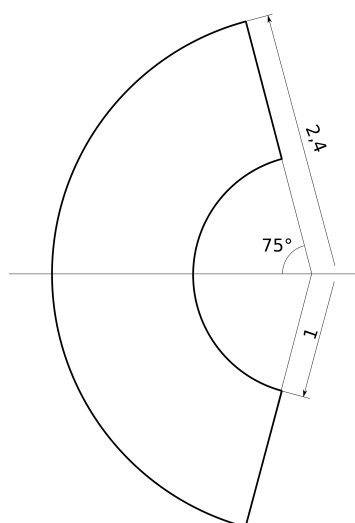
Obrázek 5.1: Kanál s poruchami sítě - izočáry hustoty

5.2 Hypersonické obtékání válce

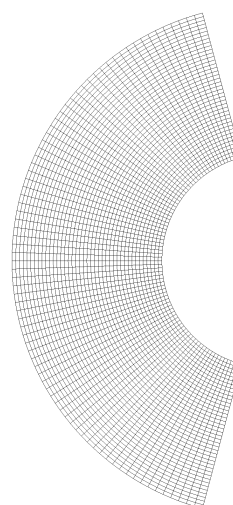
Tento případ je převzatý z [9]. Jedná se o válec obtékaný vzduchem při hypersonické rychlosti. Síť je strukturovaná, rovnoměrná, složená z 80×160 buněk (obr. 5.3). Geometrie oblasti je na obrázku 5.2. Levý okraj je supersonický vstup, a předepisuje se tedy celý stav tak, aby Machovo číslo bylo $M = 8$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2116 \\ 0 \\ 2363728 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2116 \\ 0 \\ 10000 \end{pmatrix}. \quad (5.2.1)$$

Pravý okraj je pevná stěna, a horní a spodní okraje jsou supersonické výstupy, pro něž se předepíšou veličiny z vnitřku oblasti. Je použita metoda 1. řádu v prostoru a 2. řádu v čase.



Obrázek 5.2: Geometrie oblasti



Obrázek 5.3: Výpočetní síť

Na tomto případě selhalo Roeho schéma ([9]). U rotovaného schématu vyvstala potíž, že po určitém snížení rezidua přestal výpočet konvergovat. Tento problém je (dle [9]) řešen tak, že vektory $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ se nepřepočítávají každou iterací, ale jen jednou za určitý čas, a od jistého snížení rezidua se nastaví napevno. Tím je zaručeno, že řešení dosáhne zkonvergovaného stavu (obr. 5.5). V našem případě HLLC schéma nesehalo a zachovalo rázovou vlnu. Rotované HLL/HLLC schéma má poněkud "hladší" výsledky (obr. 5.4).

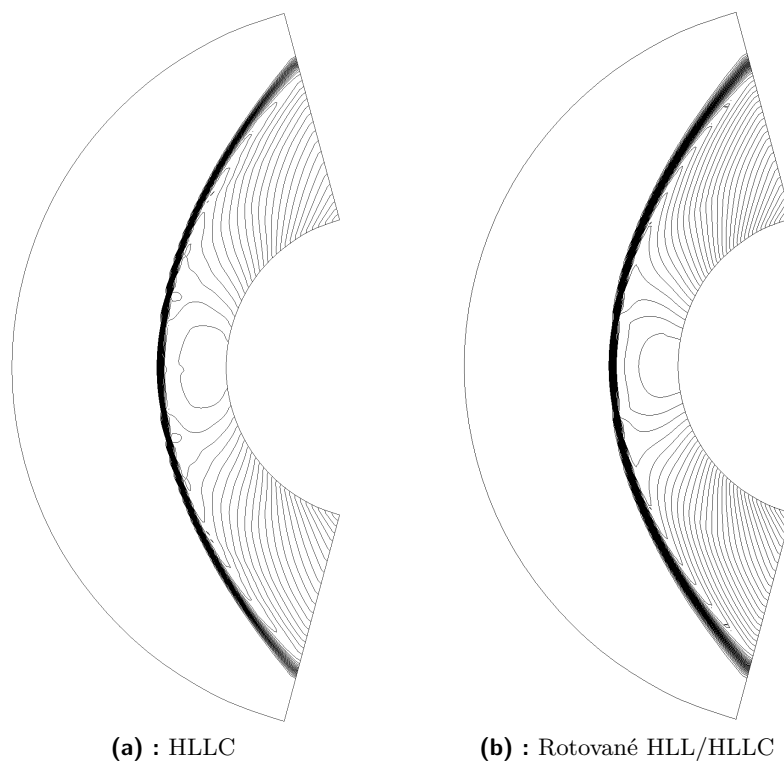
5.3 Supersonické proudění v GAMM kanálu

Toto je supersonická varianta známého transsonického testovacího případu. Síť je strukturovaná 300×100 buněk. Na levé straně je vstup s hodnotou Machova čísla $M = 3$, výstup je napravo a horní a spodní hranice jsou stěny. Jak lze vidět z obr. 5.6, řešení obsahuje několik odražených rázových vln, přičemž byly korektně zachyceny jak rotovaným HLL/HLLC schématem, tak HLLC, které v tomto případě nesehalo.

5.4 Kontaktní nespojitost - smyková vrstva

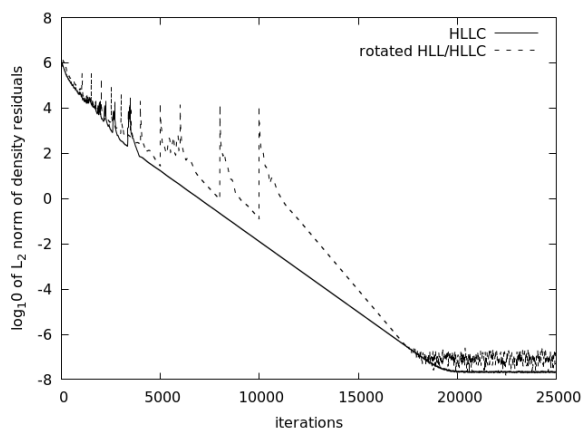
Tento jednoduchý testovací případ slouží k zkoušení schopnosti zachytit smykové vrstvy. Doména je čtverec pokrytý rovnoměrnou strukturovanou sítí o 50×50 buňkách. Počáteční podmínka je stanovena tak, že všechny veličiny jsou konstantní na celé oblasti, pouze hustota je nespojitá - 10 nalevo, 1 napravo. Jsou tedy specifikovány dva stavy

$$\mathbf{U}_L = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}. \quad (5.4.1)$$

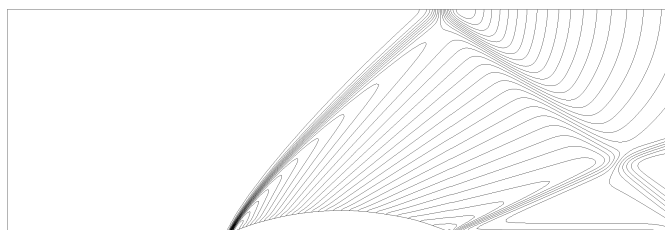


Obrázek 5.4: Proudění okolo válce s $M = 8$ - izočáry hustoty

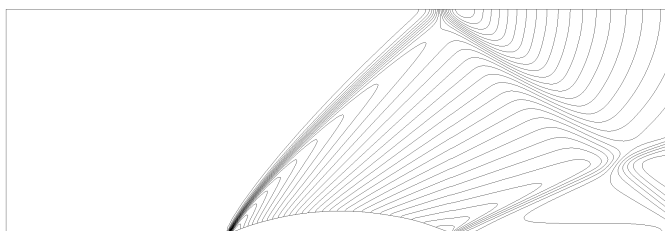
Všechny okrajové podmínky jsou řešeny jako homogenní Neumannovy. Cílem je to, aby kontaktní nespojitost zůstala zachována během výpočtu. Schéma HLL, protože zanedbává kontaktní nespojitost ve struktuře řešení Riemannova problému, selže. Skok v hustotě se postupně vyhlazuje, až je její hodnota všude konstantní. HLLC naopak zachová řešení, které stejné jako je počáteční podmínka, a pro jakýkoliv čas $t > 0$ se nemění. Rotované HLL/HLLC schéma se, díky volbě směru podle rozdílu rychlosti (4.5.2), který je nulový, v tomto případě redukuje na samotné HLLC, a proto dokáže správně vyřešit tento problém.



Obrázek 5.5: Proudění okolo válce s $M = 8$ - konvergence

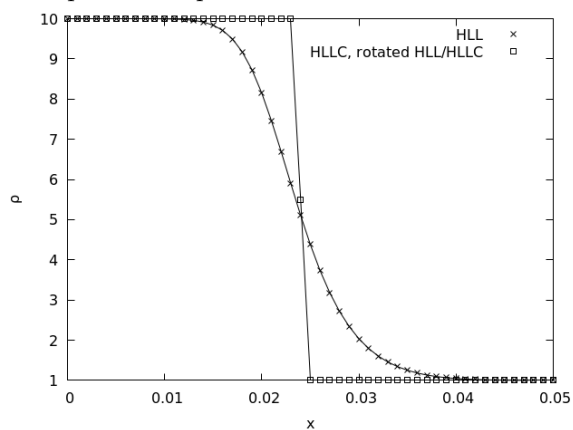


(a) : HLLC



(b) : Rotated HLL/HLLC

Obrázek 5.6: Supersonické proudění GAMM kanálem - izočáry hustoty



Obrázek 5.7: Kontaktní nespojitost - průběh hustoty v $y = 0.25$ po 100 časových krocích

Kapitola 6

Závěr

Hlavní úkol práce - vyvinout a odladit program pro výpočet rovinného stlačitelného proudění - byl splněn. Bylo vyvinuto nové HLL/HLLC schéma, které patří mezi rotované hybridní řešiče Riemannova problému. Bylo ukázáno, že toto schéma je na rozdíl od HLLC schématu necitlivé k nepravidelnostem sítě, a dokáže utlumovat numerické nestability v řešení. V porovnání s HLL schématem naopak dokáže správně vyřešit případ s izolovanou kontaktní vlnou.

Další úkoly práce byly taktéž splněny. V první kapitole byly odvozeny pomocí aparátu mechaniky kontinua základní rovnice dynamiky plynů, ve druhé kapitole je popsána teorie hyperbolických zákonů zachování, jejich numerickému řešení je věnována následující část. Dále jsou ukázány rotované a rotované hybridní metody.

Bohužel se mi už nepodařila včasná implementace řešiče Navierových-Stokesových rovnic, z tohoto důvodu jsou veškeré výpočty prováděny pouze pro neviskózní proudění. Předpoklad je takový, že v mezní vrstvě by rotované HLL/HLLC schéma mělo být přesné jako samotné HLLC. Jako zásadní nevýhoda nového schématu se ukazuje jeho výpočetní náročnost - výpočty trvaly asi 1,6 násobek času v porovnání s HLLC/HLL schématy. Toto číslo není tak vysoké, pokud uvážíme, že se musí počítat dva toky najednou, ale bez výraznějšího zrychlení algoritmu je použitelnost rotovaného HLL/HLLC řešiče omezená. Pro další rozvoj této metody by tedy bylo důležité pokusit se jí optimalizovat s ohledem na rychlost, a dále jí testovat na dalších případech, včetně laminárního a turbulentního viskózního proudění.



Příloha A

Literatura

- [1] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, D. M. Causon. On the choice of wavespeeds for the hllc riemann solver. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(6), 1997.
- [2] S. F. Davis. Simplified second-order godunov-type methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 9(3), 1988.
- [3] B. Einfeldt. On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(2), 1988.
- [4] J. Fürst. Development of a coupled matrix-free lu-sgs solver for turbulent compressible flows. *Computers & Fluids*, 172, 2018.
- [5] S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sb.*, 47(3), 1959.
- [6] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49(3):357–393, 3 1997.
- [7] J. Holman. Numerické řešení stlačitelného turbulentního proudění ve vnější a vnitřní aerodynamice. Master's thesis, Fakulta strojní ČVUT, 6 2007.
- [8] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, Inc., 1994.
- [9] H. Nishikawa, K. Kitamura. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid riemann solvers. *Journal of Computational Physics*, 227(4):2560–2581, 2 2008.
- [10] A. Harten, P. D. Lax. A random choice finite difference scheme for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18(2), 1981.
- [11] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 1 edition, 2004.
- [12] F. Maršík. *Termodynamika kontinua*. Academia, 1999.

- [13] J. Fořt, J. Neustupa. *Parciální diferenciální rovnice*. Vydavatelství ČVUT, 1 edition, 2000.
- [14] C.-W. Shu, S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77(2), 1988.
- [15] J. J. Quirk. A contribution to the great riemann solver debate. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18(6):555–574, 3 1994.
- [16] E. Godlewski, P.-A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer-Verlag New York Inc., 1996.
- [17] Y.-X. Ren. A robust shock-capturing scheme based on rotated riemann solver. *Computers & Fluids*, 32(10):1379–1406, 12 2003.
- [18] P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43(2), 1981.
- [19] M. Brdička, L. Samek, B. Sopko. *Mechanika kontinua*. Academia, 4 edition, 2011.
- [20] E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares. Restoration of the contact surface in the hll-riemann solver. *Shock Waves*, 4(1), 1994.
- [21] A. Harten, P. D. Lax, B. van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1), 1983.
- [22] Bram van Leer. Upwind-difference methods for aerodynamic problems governed by the euler equations. In *Lectures in Applied Mathematics*, volume 22, pages 327–336, 01 1985.
- [23] D. W. Levy, K. G. Powell, B. van Leer. Use of a rotated riemann solver for the two-dimensional euler equations. *Journal of Computational Physics*, 106(2):201–214, 6 1993.
- [24] F. Černý, L. Samek, B. Sopko. *Fyzika I. Česká technika - nakladatelství ČVUT*, 4 edition, 2012.

Příloha B

Použité značení

Seznam symbolů

Symbol	Význam
\mathbf{A}	matice
b_i	vektor vnější objemové síly
c	rychlost zvuku
c_p	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku
c_v	měrná tepelná kapacita při konstantním objemu
\mathcal{C}^k	funkce, která má spojitě derivace až do řádu k
$\mathbf{C}^k(M)$	prostor \mathcal{C}^k funkcí v M
$\mathbf{C}_c^k(M)$	prostor \mathcal{C}^k funkcí s kompaktním nosičem v M
\mathbf{C}_{ij}	polohový vektor středu buňky
dA	element plochy
dV	element objemu
dx	element objemu
\mathcal{D}	oblast
div	divergence
e	hustota celkové energie (energie na jednotku objemu)
E	měrná celková energie (energie na jednotku hmotnosti)
f	volná energie
\mathbb{f}	vektor toků $\mathbb{f} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$
\mathbf{f}	normálový tok $\mathbf{f} = \mathbb{f} \cdot \mathbf{n}$
\mathbf{f}_j	tok
F_j	tok entropie
\mathbf{F}_j	tok fyzikálních veličin
\mathbb{F}	vektor toků pro Eulerovy rovnice $\mathbb{F} = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$
\mathcal{F}	normálový tok pro Eulerovy rovnice $\mathcal{F} = \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}$
\mathbf{g}	numerický tok
G	numerický tok entropie
h, H	měrná entalpie (na jednotku hmotnosti)
$\mathbf{l}_{i,j+1/2}$	polohový vektor středu rozhraní mezi buňkami i, j a $i + 1, j$
j	tok veličiny přes hranici
k	koeficient tlaku
l_{ij}	segmenty hranice buňky
$\mathbf{l}_k(\mathbf{u})$	levý vlastní vektor

m	hmotnost
M	Machovo číslo
n_i, \mathbf{n}	vektor vnější normály plochy
\mathcal{O}	oblast
p	tlak
q_i	vektor hustoty tepelného toku
\tilde{q}	hustota pohlcené (vyzářené) energie
r	plynová konstanta
$\mathbf{r}_k(\mathbf{u})$	pravý vlastní vektor
\mathbb{R}^p	p-rozměrný prostor reálných čísel
s	limiter
s	měrná entropie (na jednotku hmotnosti)
S	entropie
S	plocha
S_L	signální rychlost levé vlny
S_R	signální rychlost pravé vlny
S_M	signální rychlost prostřední vlny
T	termodynamická teplota
T	čas
u	rychlost ve směru x
u	měrná vnitřní energie
\mathbf{u}	vektor konzervativních proměnných
U	entropie
\mathbf{U}	vektor konzervativních proměnných v Eulerových rovnicích
v	rychlost ve směru y
v_i	vektor rychlosti
V	objem
\mathbf{v}	numerická aproximace
\mathbf{w}	aproximace Riemannova problému
\mathbf{x}	vektor proměnných x_1, x_2, \dots
\mathbf{x}	polohový vektor v prostorovém popisu
\mathbf{X}	polohový vektor v materiálovém popisu
\mathbb{Z}	množina celých čísel
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
Δt	velikost buňky v čase
Δx	velikost buňky v prostoru
ϵ	umělá viskozita
ζ	normálová souřadnice
κ	Poissonova konstanta
κ	parametr MUSCL metody
λ	zlomek $\frac{\Delta t}{\Delta x}$
λ	koeficient tepelné vodivosti
λ_i	vlastní čísla
μ	dynamická viskozita
μ_v	objemová viskozita
π	hustota produkce veličiny

ρ	hustota
σ	rychlost pohybu nespojitosti
σ_{ij}	tenzor napětí
τ	tečná souřadnice
τ_{ij}	tenzor tečných napětí
φ	hustota veličiny
φ	obecný skalár
φ	testovací skalární funkce
φ	testovací vektorová funkce
Φ	bilancovaná veličina
ϕ	numerický tok (obecný systém zákonů zachování)
Φ	numerický tok (Eulerovy rovnice)
ψ	obecný skalár
ω	vektor
Ω	podmnožina \mathbb{R}^p
Ω_i	buňka
$\partial\Omega_i$	hranice buňky
∂V	hranice objemu

Seznam zkratk

Zkratka	Význam
s. v.	skoro všude
FVM	Finite Volume Method
HLL	Harten Lax van Leer
HLLC	Harten Lax van Leer Contact
MKO	Metoda konečných objemů
OP	Okrajové podmínky
1D	Jednodimenzionální
2D	Dvoudimenzionální
3D	Trojdimenzionální

Dolní indexy

Zkratka	Význam
e	entropické řešení
i	index buňky
$i \pm 1/2$	rozhraní buňky
l, L	stav nalevo od rozhraní
n	nový stav
r, R	stav napravo od rozhraní
0	počáteční stav

Horní indexy

Zkratka	Význam
---------	--------

b	spodní rozhraní buňky (mezi buňkami i, j a $i, j - 1$)
g	stav ve fiktivní buňce
l	levé rozhraní buňky (mezi buňkami i, j a $i - 1, j$)
n	časová vrstva
r	pravé rozhraní buňky (mezi buňkami i, j a $i + 1, j$)
t	horní rozhraní buňky (mezi buňkami i, j a $i, j + 1$)