

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY

Odbor mechaniky a mechatroniky



Diplomová práce

**Optimalizace a řízení mechatronické tensegrity pro
robotiku**

Praha, 2019

Bc. Aleš Balon

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Balon** Jméno: **Aleš** Osobní číslo: **420377**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Mechatronika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Optimalizace a řízení mechatronické tensegrity pro robotiku

Název diplomové práce anglicky:

Optimization and Control of Mechatronic Tensegrity for Robotics

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s variantami seriových a paralelních mechanismů v robotice.
- 2) Seznamte se s tensegrity s důrazem na použití v mechanismech a robotech.
- 3) Sestavte simulační model mechanismu robotu tvořeného tensegritními strukturami.
- 4) Proveďte optimalizaci tohoto mechanismu vzhledem k definovaným a zdůvodněným kritériím.
- 5) Posuďte možnosti plánování energeticky efektivního pohybu (Eigenmotion) pro tensegritní mechanismy.
- 6) Navrhněte a simulačně ověřte řízení tensegritního mechanismu robotu.

Seznam doporučené literatury:

- [1] R. E. Skelton and M. de Oliveira, Tensegrity Systems, Springer-Verlag US, 2009.
- [2] P. Chandana, F. J. Valero-Cuevas and H. Lipson, "Design and control of tensegrity robots for locomotion," IEEE Transactions on Robotics, vol. 22, no. 5, pp. 944-957, October 2006.
- [3] S. Lahouar, E. Ottaviano, S. Zeghou, L. Romdhanec and M. Ceccarelli, "Collision free path-planning for cable-driven parallel robots," Robotics and Autonomous Systems, vol. 57, pp. 1083-1093, 2009.
- [4] Z. Šika, P. Beneš, M. Valášek, J. Volech, K. Kraus, R. Bulín, M. Hajžman and P. Polach, "Cable driven spherical mechanism quadrosphere enhanced by 3 dof piezo-actuated platform," Proceedings of the 8th ECCOMAS Thematic Conference on MULTIBODY DYNAMICS 2017, MBD 2017, pp. 551-558, 2017.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D., odbor mechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **23.04.2019**

Termín odevzdání diplomové práce: **16.08.2019**

Platnost zadání diplomové práce: _____

prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Bc. Aleš Balon
Název bakalářské práce:	Optimalizace a řízení mechatronické tensegrity pro robotiku
Anglický název:	Optimization and Control of Mechatronic Tensegrity for Robotics
Akademický rok:	2018/2019
Obor studia:	Mechatronika
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor Mechaniky a mechatroniky
Vedoucí bakalářské práce:	prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 70 Počet obrázků: 45 Počet příloh: 1
Klíčová slova:	řízení tvaru tensegrit, form-finding, eigenmotion
Keywords:	tensegrity shape control, form-finding, eigenmotion optimization, energy efficient motion
Anotace:	Práce se zabývá sestavením dynamického modelu rovinné tensegrity. Dále je na tento model aplikováno „computed torque“ řízení. Dále se práce zabývá optimalizací tensegrit z hlediska stability a energeticky efektivního pohybu. Je ukázána vhodnost tensegrit pro generování energeticky efektivního vlastního pohybu.
Abstract:	Thesis presents derivation of dynamic model for planar tensegrities. Computed torque control is applied to this model. Thesis also presents optimization of tensegrities for their stability and energy efficient motion. The suitability of tensegrity for generating energy efficient eigenmotion is shown.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze, dne

.....
Podpis

Obsah

1. Úvod	8
2. Kinematické struktury robotů	9
2.1. Sériová kinematická struktura.....	9
2.2. Paralelní kinematická struktura	11
3. Tensegrity.....	14
3.1. Původ tensegrit	14
3.2. Vlastnosti tensegrit.....	14
3.3. Oblasti výzkumu tensegrit.....	15
3.4. Aplikace tensegrit v robotice.....	16
3.4.1. Rozvinutelné tensegrity.....	16
3.4.2. Tensegritní roboti v obecném prostředí.....	18
3.4.3. Další aplikace.....	19
4. Cíle práce.....	19
5. Dynamický model rovinné tensegrity	20
5.1. Lagrangeovy rovnice I. druhu	20
5.1.1. Odvození.....	21
5.1.2. Dynamický model	23
5.1.3. Silové působení předeprnutých lan	25
5.1.4. Aplikace dynamického modelu.....	26
5.2. Lagrangeovy rovnice II. druhu.....	28
5.2.1. Odvození.....	28
5.2.2. Aplikace.....	30
5.3. Porovnání metod	35
6. Form-finding.....	36
6.1. Form-finding algoritmus	37
6.2. Aplikace výsledků.....	42
6.3. Shrnutí.....	46
7. Řízení tvaru tensegrity	47
7.1. Generování trajektorie.....	47
7.2. Řízení vypočtenými momenty (computed torque control)	48
7.2.1. Sestavení matice Aq	49
7.2.2. Návrh řízení.....	51
7.2.3. Určení akčních sil τ	52
7.2.4. Aplikace řízení na tensegritu	53
7.3. Shrnutí.....	60
8. Vlastní pohyb (Eigenmotion).....	61
8.1. Optimalizace	61
8.2. Využití pro řízení.....	66
8.3. Shrnutí.....	66
9. Závěr.....	67
10. Literatura.....	68

Seznam obrázků

Obr. 1 Sériové roboty: a) kartézský, b) cylindrický, c) sférický, d) SCARA, e) angulární.....	10
Obr. 2 Delta robot ABB FlexPicker, zdroj: www.abb.com.....	12
Obr. 3 Goughova platforma [2].....	12
Obr. 4 Návrh z patentu Motion Simulator [7]	13
Obr. 5 Experimentální robo Quadrosphere [9], [10], [11].....	13
Obr. 6 Umělecké dílo Kennetha Snelsona <i>X-piece</i> [13].....	14
Obr. 7 Rozvinutelná tensegrita a) počáteční stav, b) přechodný stav, c) žádaný stav [24]	16
Obr. 8 Model reflektoru antény s tensegritním rámem [28]	17
Obr. 9 Tensegritní robot SUPERball [23].....	18
Obr. 10 Tensegrita třídy 1 (vlevo) a tensegrita třídy 2 (vpravo).....	20
Obr. 11 Geometrie i-té tyče a silové účinky	23
Obr. 12 Model lana m mezi uzly i a j.....	25
Obr. 13 Počáteční poloha.....	26
Obr. 14 Graf průběhů jednotlivých poloh	27
Obr. 15 Třípatrová tensegritní věž	30
Obr. 16 Tyč 1 – geometrie a silové účinky.....	31
Obr. 17 Tyč 2 – geometrie a silové účinky.....	32
Obr. 18 Tyč 3 – geometrie a silové účinky.....	34
Obr. 19 Průběh celkové odchylky uzlů mezi LR1 a LR2	35
Obr. 20 Snelsonova X tensegrita.....	36
Obr. 21 Nejlepší výsledky form-finding algoritmu	38
Obr. 22 Třípatrová tensegritní věž označená: 3stage-ort.....	39
Obr. 23 Třípatrová tensegritní věž označená: 3stage-diag.....	40
Obr. 24 Počáteční a rovnovážná poloha 3stage-ort.....	43
Obr. 25 Počáteční a rovnovážná poloha 3stage-diag	43
Obr. 26 Průběh zrychlení, rychlostí a poloh pro 3stage-ort	44
Obr. 27 Průběh zrychlení, rychlostí a poloh pro 3stage-diag	45
Obr. 28 Polohy q_0 , q_A , q_f pro tensegritu 3stage-diag	48
Obr. 30 Snelsonova X tensegrita se znázorněnými souřadnicemi	49
Obr. 31 Diagram znázorňující dolní a horní mez pro určení τ	52
Obr. 32 Vývoj regulačních odchylek bez rušení	54
Obr. 33 Vývoje souřadnic $q(t)$ bez rušení	54
Obr. 34 Délky lan (modře) a volné délky lan (červeně) v modelu bez rušení.....	55
Obr. 35 Akční síly v modelu bez rušení	56
Obr. 36 Rušivý signál přičtený k řídicím silám.....	57
Obr. 37 Průběh regulační odchylky s rušením.....	57
Obr. 38 Délky lan (modře) a volné délky lan (červeně) v modelu bez rušení.....	58
Obr. 39 Akční síly v modelu s rušením.....	59
Obr. 40 Žádané polohy tyče b_6 pro optimalizaci vlastního pohybu.....	61
Obr. 42 Vývojový diagram optimalizační smyčky	64
Obr. 43 Průběh polohy tyče b_6 a splnění požadovaného pohybu	65
Obr. 44 Porovnání průběhů celkové mechanické energie	65
Obr. 45 Celková mechanická energie při řízení a při ideálním stavu	66

1. Úvod

Tensegrity jsou stabilní struktury skládající se z předeprnutých lan a navzájem nedotýkajících se tyčí. Samotný název *tensegrity* vychází z anglického spojení slov *tensional integrity*, který vystihuje charakter těchto struktur.

Od druhé poloviny dvacátého století byly tensegrity využívány v umění, převážně v architektuře. Odtud se přirozeně dostaly do stavebního inženýrství. Teprve až koncem dvacátého století pronikl koncept tensegrit do robotiky. Tensegrity jsou vzhledem ke svým vlastnostem ideální strukturou pro aplikace, které vyžadují nízkou hmotnost, velký rozsah pohybu, skladnost, odolnost a další. Přestože se vědecká komunita tensegritami zabývá už více jak třicet let a během této doby vznikl například i tensegritní roboti, kteří mají sloužit jako extraterestriální sondy, překvapivě málo prací se zabývá využitím tensegrit jako robotického manipulátoru.

Jelikož tensegrity kombinují výhody tradičních sériových a paralelních robotů, je motivací pro tuto práci prozkoumání možnosti použití aktivní tensegritní struktury jako robotického manipulátoru.

2. Kinematické struktury robotů

Průmyslové roboty a manipulátory lze dělit podle několika kritérií, kterými jsou například funkce, úroveň řízení, typ pohonů a jejich uspořádání atd. Tato kapitola se zabývá roboty z hlediska kinematické struktury. Podle tohoto hlediska se roboty dělí na dvě hlavní skupiny, a to na roboty sériové a roboty paralelní [1], [2].

2.1. Sériová kinematická struktura

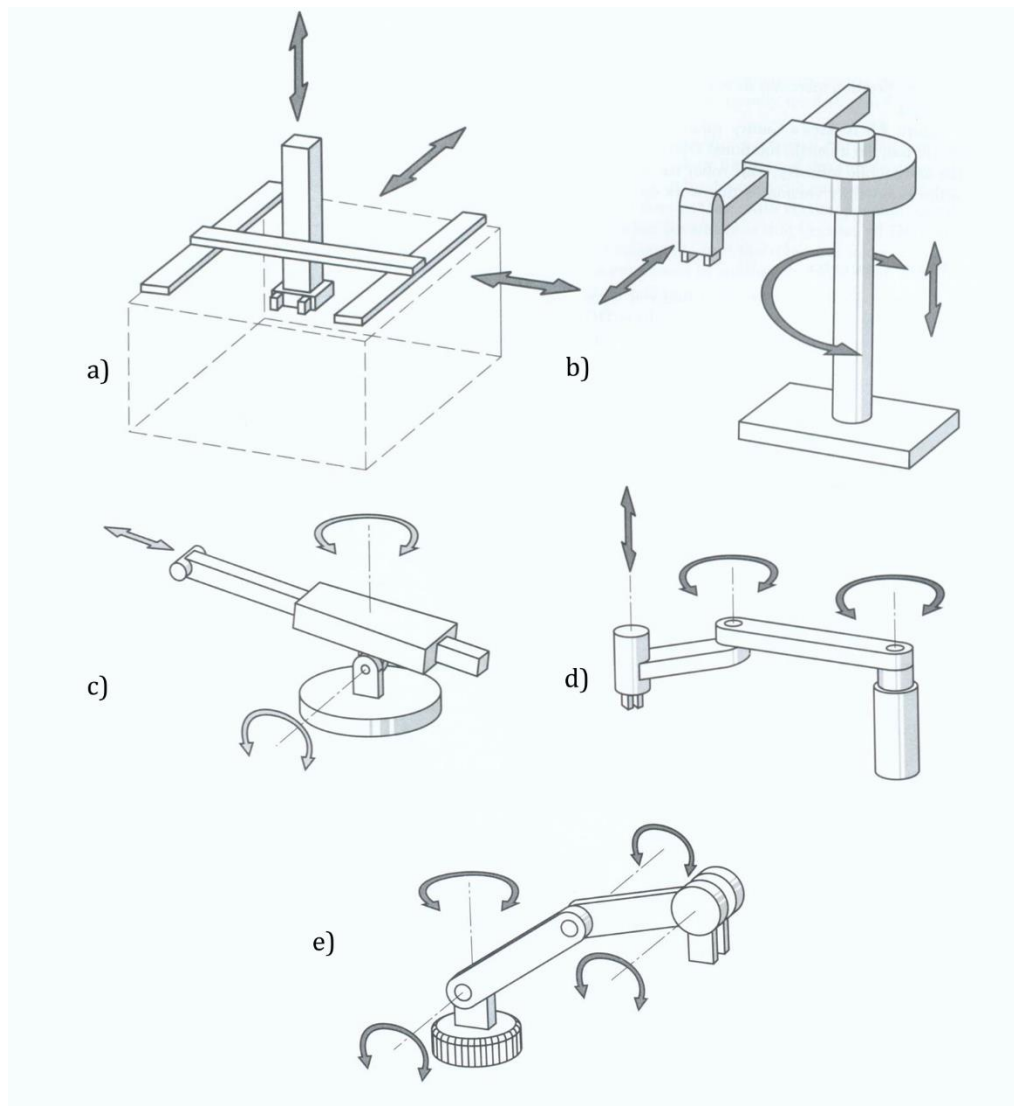
Jedná se o takovou strukturu, kde mezi rámem a koncovým členem existuje pouze jediný otevřený kinematický řetězec, robot s takovou strukturou se nazývá sériový. Kinematickým řetězcem se rozumí spojení několika těles pomocí kinematických dvojic, zpravidla nazývaných vazby, popisující relativní pohyb těles, která spojují. Typů těchto vazeb existuje několik, ovšem průmyslové sériové roboty nejčastěji využívají vazbu posuvnou a vazbu rotační. Další důležitou vlastností kinematického řetězce je počet stupňů volnosti, který vyjadřuje počet nezávislých souřadnic plně popisujících konfiguraci kinematického řetězce v prostoru [1], [3].

Podle normy ISO 8378 lze průmyslové sériové roboty dělit do pěti základních typů a těmi jsou kartézský robot, cylindrický robot, sférický robot, SCARA robot a angulární robot. Tyto základní typy robotů jsou zobrazeny na Obr. 1.

Názvy kartézský, cylindrický a sférický jsou odvozeny podle podobnosti robotů se stejnojmennými souřadnicovými systémy. SCARA robot se vyznačuje tím, že osy všech vazeb v kinematickém řetězci jsou rovnoběžné. Díky tomu je konstrukce robotu tužší ve směru os vazeb a poddajná v rovině kolmé na osy. Z tohoto faktu vychází název *Selective Compliance Articulated Robot Arm* a od něj odvozená zkratka SCARA. Nejčastěji jsou používány na úkony, které využívají poddajnosti robotu, těmi jsou např. osazení a utažení šroubu na dílu nebo manipulace s laboratorními vzorky.

Posledním typem je angulární robot, jehož kinematický řetězec obsahuje pouze rotační vazby. Nejčastěji se vyskytuje v průmyslu provedení s šesti stupni volnosti. Toto provedení umožňuje nastavit koncový člen robotu do libovolné pozice a orientace v prostoru [3]. Pokud takový robot navíc splňuje podmínku, že se tři po sobě jdoucí osy

rotačních vazeb protínají v jednom bodě, lze najít řešení inverzní kinematiky takového robota v analytické formě [4].



Obr. 1 Sériové roboty: a) kartézský, b) cylindrický, c) sférický, d) SCARA, e) angulární
zdroj: www.illinoisstate.edu - Introduction to Robotics

2.2. Paralelní kinematická struktura

Jedná se o strukturu, kde mezi základnou robotu a koncovým členem robotu existují dva a více nezávislých kinematických řetězců [3], [2]. Kinematické řetězce paralelních robotů využívají, kromě rotačních a posuvných vazeb, navíc i vazby sférické a univerzální klouby (např. Cardanův) [2].

Oproti sériovým robotům mají paralelní roboty řadu výhod pro určité aplikace. Mohou pracovat s hmotnějšími předměty vzhledem k jejich vlastní váze, protože účinky na koncový člen robota se rozdělí do všech ramen robota spojených s rámem. Aktuátory mohou být umístěny na rám, nebo nepohyblivou část robota, a dosáhnout tak lepšího rozložení hmotnosti, na rozdíl od sériových robotů, kde jsou aktuátory umístěny na ramenech robota. Kvůli celkové nižší hmotnosti a výhodnějšímu rozložení hmotnosti robotu na něj působí menší setrvačné účinky a koncový člen robotu tedy může dosahovat vyšších rychlostí. Díky paralelní struktuře je i celková tuhost robotu vyšší, a proto je polohování koncového členu přesnější. U sériových robotů se chyby jednotlivých aktuátorů, znepřesňující pohyb koncového členu, sčítají. Naopak u paralelních robotů je celková chyba aktuátorů, působících na koncový člen, průměrem chyb jednotlivých řetězců. Nevýhodami jsou potom menší pracovní prostor a horší manipulovatelnost robotu [2], [5].

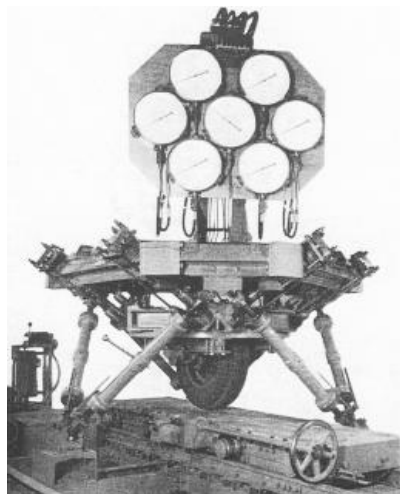
Kinematické rovnice popisující paralelní mechanismus jsou složitější, protože struktura obsahuje uzavřené kinematické řetězce, a navíc se v mechanismu mohou vyskytovat pasivní klouby. Z toho důvodu je výpočet přímé kinematiky složitější než u sériových robotů, naopak výpočet inverzní kinematiky pro paralelní roboty jednoduchý [2], [5].

Jedny z nejrozšířenějších paralelních robotů používaných v průmyslu jsou Delta roboty (Obr. 2). Tyto roboty, vzhledem k své nízké hmotnosti, jsou využívány pro „pick and place“ účely, takže se nejčastěji nacházejí na výrobních linkách, kde rychle manipulují s menšími objekty a skládají je na přesně definované pozice [2].



Obr. 2 Delta robot ABB FlexPicker, zdroj: www.abb.com

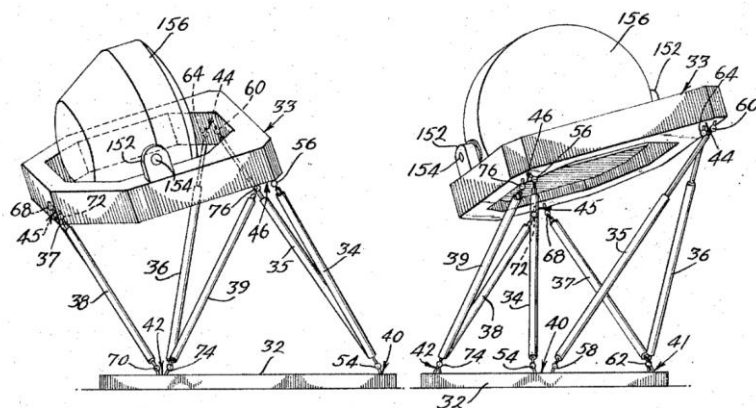
Dalším typickým paralelním robotem jsou Gough-Stewartovy platformy. Ta byla poprvé navržena E. Goughem a použita pro zkoušky životnosti automobilových pneumatik v roce 1955 (Obr. 3). V šedesátých letech, s rozvojem leteckého průmyslu, byly tyto platformy použity pro letecké simulátory [2]. Tento přístup navrhl v roce 1965 D. Stewart [6]. Jeho návrh platformy nikdy nebyl realizován, ale v poslední části své práce popsal modifikaci svého návrhu, kterou zreprodukoval platformu navrženou E. Goughem, proto označení Gough-Stewartova platforma [2], [6].



Obr. 3 Goughova platforma [2]

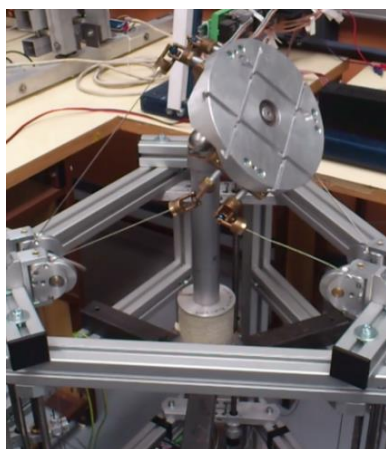
V roce 1964 podal K. L. Cappel patent s názvem Motion Simulator, který byl navržen na žádost společnosti Sikorski. Jeho patent byl uznán roku 1967 a využívá Goughovu platformu k pohybu kabiny simulátoru a na stejném principu fungují i dnešní simulátory (Obr. 4) [2], [7]. Princip Goughovy platformy byl dále použit i pro obráběcí stroje, jedním z prvních byl stroj Variax od společnosti Giddings & Lewis [8].

Nicméně z důvodu omezeného pracovního prostoru, špatné manipulovatelnosti a výskytu singularit v pracovním prostoru byl tento typ strojů nahrazen vhodnějšími paralelními roboty [2], [5].



Obr. 4 Návrh z patentu Motion Simulator [7]

Problém malého pracovního prostoru klasických paralelních robotů řeší lanové paralelní roboty. Ty jsou v posledních letech využívány pro aplikace, které vyžadují velký pracovní prostor a manipulaci s těžkými břemeny. Na školícím pracovišti Odboru mechaniky a mechatroniky vznikly mimo jiné vláknově ovládané experimentální paralelní mechanismy Quadosphere a Hexasphere [9], [10], [11].



a) Hexasphere



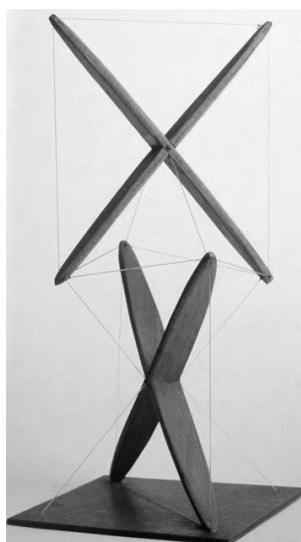
b) Quadosphere

Obr. 5 Experimentální mechanismy Hexasphere a Quadosphere [9], [10], [11]

3. Tensegrity

3.1. Původ tensegrit

Pojem *tensegrity* poprvé použil ve 20. století americký architekt Buckminster Fuller a jedná se o spojení slov *tension* a *integrity* [12], [13]. Obecně je tensegrita (angl. tensegrity) stabilní struktura tvořena navzájem nedotýkajícími se prvky, namáhanými pouze tlakovými silami, a sítí prvků namáhaných pouze tahovými silami (Obr. 6). V praxi se nejčastěji vyskytují jako několik tyčí, které jsou navzájem propojeny předepnutými lany, které zajišťují stabilitu celého systému. Zprvu našly uplatnění především v umění a architektuře, nicméně postupem času se rozšířily do dalších odvětví, především do stavebního inženýrství a robotiky [13].



Obr. 6 Umělecké dílo Kennetha Snelsona *X-piece* [13]

3.2. Vlastnosti tensegrit

Jednotlivé prvky tensegrity jsou namáhány pouze osově tlakem, nebo tahem [12]. Z toho důvodu není potřeba dimenzovat jednotlivé prvky na ohyb a smyk a snížit tak hmotnost oproti jiným strukturám se stejnou nosností. Zatížení je distribuováno do celé struktury tensegrity a nekumuluje se v kritických bodech, jako tomu je u sériových robotů. Zvýšením předepnutí stabilizující tensegritu dojde i k zvýšení celkové tuhosti, tedy k zvýšení celkové nosnosti. Jejich stabilita nezávisí na tíhové síle, a proto mohou být libovolně orientovány v prostoru, na rozdíl od tradičních struktur [12].

Velké a komplexní tensegritní konstrukce čelí problému velkého počtu tyčí, pak může dojít ke kontaktu jednotlivých tyčí. Tím vznikne ve struktuře i jiné namáhání než čistě osově a hrozí poškození struktury. Návrh a výroba tensegrit je složitější než u tradičních struktur. Dále neexistuje žádný obecný postup nebo software, který by usnadňoval jejich návrh [12].

3.3. Oblasti výzkumu tensegrit

Nejvíce prací se zabývá problematikou zvanou *form-finding* [13]. Jedná se o problém hledání konfigurace, při kterém je tensegritní konstrukce stabilní. Statické *form-finding* metody hledají stabilní konfiguraci pro danou topologii tensegritní struktury [14]. Na školícím pracovišti Odboru mechaniky a mechatroniky vznikly práce zabývající se tensegritními nosníky a jejich optimalizací [15], [16].

Práce zabývající se dynamickým chováním tensegrit se často soustředí na sestavení dynamického modelu a vyšetření modální analýzy. V literatuře bylo publikováno několik přístupů k získání dynamického modelu tensegrity. Těmi jsou například linearizovaný popis v okolí rovnovážné konfigurace, Eulerovo i Lagrangeovo popis [17], nelineární dynamický model [13], model odvozený metodou konečných prvků [18].

Řízení aktivních tensegrit je stále otevřený problém [19]. V literatuře byly prezentovány práce zabývající se řízením tvaru tensegrit pomocí Ljapunovské funkce [13], řízením vibrací tensegrit pomocí optimalizačních metod [18], plánování pohybu tensegrit pomocí RRT (*Rapidly-exploring Random Trees*) [20] a další. Značný problém pro dynamický popis a řízení tensegritních struktur je škálovatelnost [19]. Jelikož se ve struktuře nevyskytují vazby, tak s každou další tyčí narůstá počet pohybových rovnic o tři, nebo pět (rotace kolem podélné osy se neuvažuje) pro rovinné, respektive prostorové tensegrity [13].

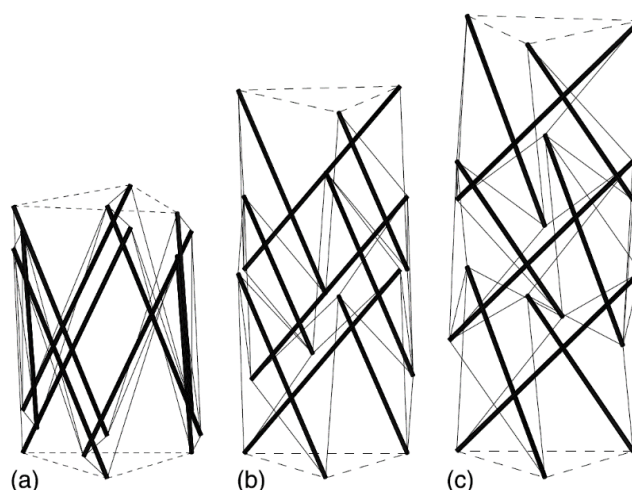
V molekulární biologii byly tensegrity použity pro modelování cytoskeletonu buněk [21], v biomechanice pro modelování muskuloskeletálního systému [22].

3.4. Aplikace tensegrit v robotice

Tensegrity kombinují výhody sériových a paralelních robotů, především velmi nízkou hmotnost a velký pracovní prostor vzhledem ke svým rozměrům. Nevýhodou tensegrit je velmi složitá dopředná kinematika. Řešení inverzní kinematiky bylo nalezeno u některých konkrétních tensegrit, ale obecný postup k vyřešení inverzní kinematiky zatím nebyl nalezen [23]. V literatuře lze potom najít práce zabývající se nejčastěji rozvinutelnými aktivními strukturami a pohybem tensegritních robotů v obecném prostředí.

3.4.1. Rozvinutelné tensegrity

Rozvinutelné mechanismy jsou často používány ve vesmírném průmyslu pro rozvinutí solárních panelů nebo antén. Dále bývají používány pro výsuvné střechy a přístřešky. Nevýhodou tradičních rozložitelných mechanismů jsou komplikované klouby a teleskopické vzpěry. C. Sultan a R. Skelton, pionýři řízení tensegrit, navrhli použití tensegrit pro realizaci rozvinutelných struktur [24]. Jejich práce se zabývá třípatrovou tensegritní věží a rozvinutí takové věže po rovnovážné varietě z počátečního stavu do žádaného stavu (Obr. 7), rozvinutí tensegrity je realizováno změnou volných délek jednotlivých lan.



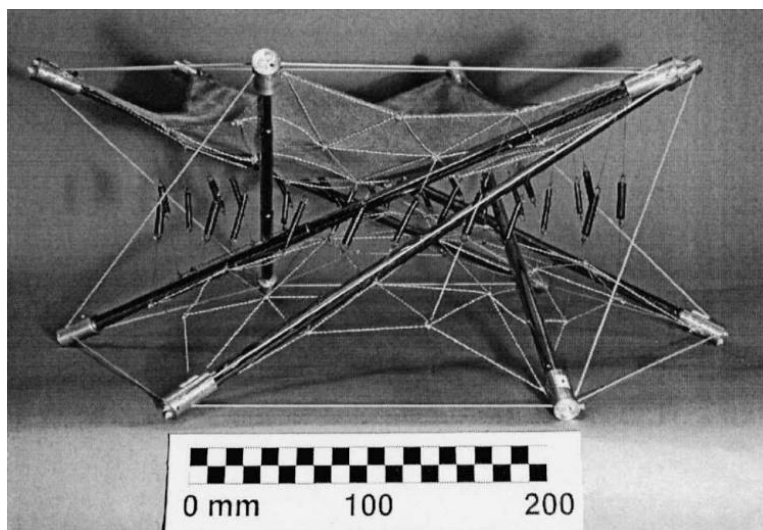
Obr. 7 Rozvinutelná tensegrita a) počáteční stav, b) přechodný stav, c) žádaný stav [24]

Později Sultan využil infinitesimálních (vnitřních) mechanismů k návrhu nelineárního zpětnovazebního řízení pro rozvinutelnou tensegritu [25]. Výhodou tohoto přístupu jsou nulové energetické ztráty způsobené tlumením lan. Podobnou problematikou se zabývá koncept *eigenmotion*, tzv. vlastní pohyb. Při tom je zachována

celková mechanická energie, řízení tak pouze kompenzuje energetické ztráty, které jsou způsobeny disipativními jevy [26].

Práce zabývající se experimenty s rozvinutelnými tensegritními věžemi a nosníky ukázaly, že struktury mají dobrou osovou tuhost [27]. Nicméně jejich ohybová tuhost výrazně nižší. Přidání dalších lan k odstranění vnitřních mechanismů téměř neovlivnilo ohybovou tuhost. Jedna z možností, jak zvýšit tuhost tensegritních konstrukcí, je spojit některé tyče dohromady, to ale zhorší rozložitelnost celé struktury. Návrh rozložitelných tensegritních věží a nosníků proto zahrnuje kompromis mezi snadností rozvinutí a kompaktního složení na jedné straně, a tuhostí na straně druhé.

Kromě aplikace tensegrit na rozvinutelné věže a nosníky lze aplikovat tensegrity i na rozvinutelné antény [28], [29]. Koncept je založený na využití aktivní tensegrity nesoucí síť předepnutých lan (Obr. 8). Dohromady taková struktura tvoří rám nesoucí odrážecí plochu antény. Výhodami konceptu je možnost měnit povrch odrážecí plochy, skladnost a nízká hmotnost. Proto je tento koncept vhodný pro využití ve vesmírném průmyslu.

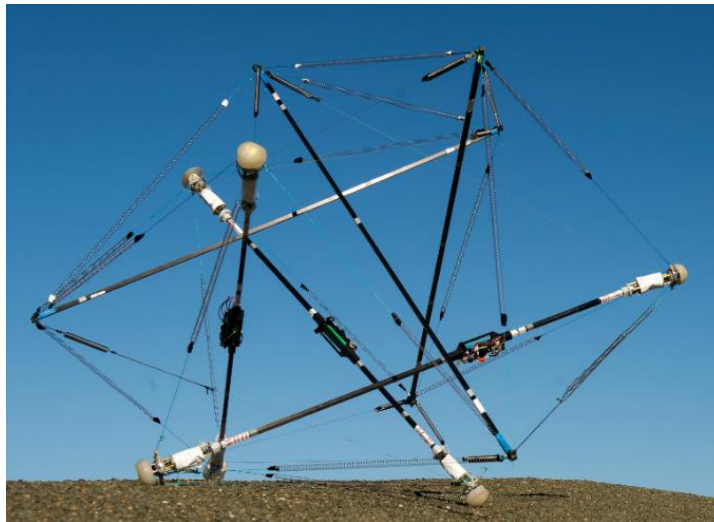


Obr. 8 Model reflektoru antény s tensegritním rámem [28]

3.4.2. Tensegritní roboti v obecném prostředí

Velkou výhodou tensegrit je jejich schopnost vnitřní distribuce sil, aniž by došlo ke zvětšování silových účinků vlivem přítomnosti ramen a kloubů, jako u tradičních robotů. Z tohoto důvodu jsou tensegritní roboti ideální pro nasazení v neznámém terénu, kde na roboty působí předem neznámé silové účinky. Další výhodou je robustnost takových robotů, protože jejich pohyb je realizován nadbytečným počtem aktuátorů, takže případné selhání individuálního lana (aktuátoru) omezí pohyb tensegritního robota pouze částečně [23].

Jedním z nejpokročilejších robotů tohoto typu je SUPERball agentury NASA (Obr. 9). Uvažované použití tohoto robota je průzkum Titanu. Robot je zatím v experimentální fázi a byl odzkoušen s dvěma řídicími strategiemi [23]. První je řízení založené na genetických algoritmech a druhá strategie je řízení založené na principu zvaném *central pattern generator* (CPG). To jsou nervové obvody nacházející se u bezobratlých i obratlovců, které generují rytmické výstupy, aniž by dostávali rytmické vstupy [23], [30]. Použitím tohoto principu lze dosáhnout pohybu tensegritního robota, který není řízen jedním regulátorem, ale sítí tvořenou několika CPG. Oba přístupy jsou inspirované přírodou a jejich výhodou je možnost naučit se složité nelineární řízení robota bez nutnosti znalosti přesné dynamiky robota. Pohyb robota je realizován změnami volných délek jednotlivých lan, které ovlivní polohu těžiště robota a tím generují valivý pohyb po terénu.



Obr. 9 Tensegritní robot SUPERball [23]

3.4.3. Další aplikace

Tensegrity je možné využít pro realizaci šestiosého měřícího zařízení. Toto zařízení měří síly a kroutící momenty v ortogonálních směrech [31]. Koncept je založený na odhadu silových účinků z deformace dané tensegrity pomocí stavového pozorovatele. Další možné využití aktivních tensegrit je, stejně jako u paralelních robotů, využití pro letecký simulátor [32]. Koncept simulátoru je založený na dvou patrové věži. V publikaci je potom koncept úspěšně vyzkoušen k simulaci několika stavů, které nastávají během letu. Motivace autorů pro takový simulátor je eliminace teleskopických aktuátorů.

4. Cíle práce

První cílem této práce je seznámení se s problematikou sériových a paralelních robotů a dále seznámení se s problematikou tensegrit. Rešerše těchto problematik je uvedena v předchozích kapitolách.

Jedním z cílů praktické části této práce je vytvoření dynamického modelu rovinné tensegrity, který bude sloužit k simulování tensegritních struktur, tímto se zabývá kapitola 5. Tento model by dále měl být rozšířen o řízení, aby mohl být aplikován i na tensegritní roboty, tento problém je řešen v kapitole 7.

Dalším cílem praktické části této práce je optimalizace tensegritních struktur. První optimalizační úlohou je hledání stabilního předpětí tensegritní struktury, jedná se tedy o zmíněný problém *form-finding* v kapitole 3.3. Touto optimalizací se zabývá kapitola 6. Druhou optimalizační úlohou je plánování energeticky efektivního pohybu pro tensegritní mechanismy, tzv. *eigenmotion* zmíněný v kapitole 3.4., kterou se zabývá kapitola 8.

5. Dynamický model rovinné tensegrity

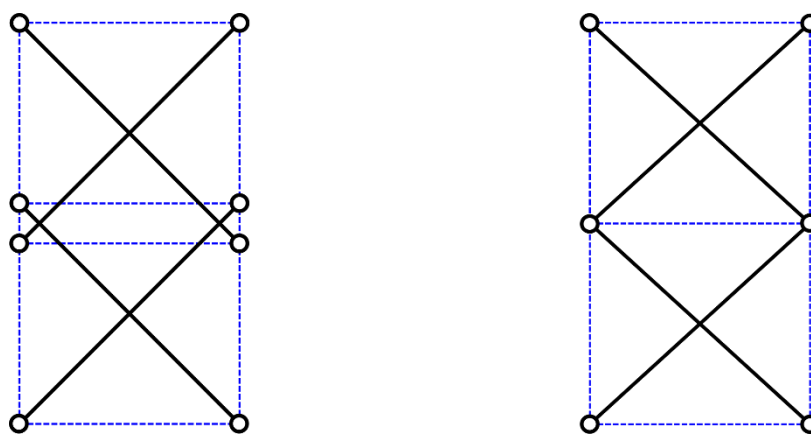
Pro vyšetření chování tensegrity je potřeba sestavit dynamický model. Takový model dává do souvislosti pohyb těles se silami, které na tělesa působí. Pro zjednodušení dynamického modelu je zavedeno několik předpokladů:

- 1) Tyče tensegrity jsou dokonale tuhá tělesa.
- 2) Pasivní účinky jsou zanedbány.
- 3) Hmotnost lan je zanedbána a lana jsou modelována jako kombinace lineární pružiny a lineárního viskózního tlumiče.
- 4) Lana vyvíjí silové účinky pouze v případě, že jsou předeputá.

V této kapitole jsou prezentovány dva přístupy k sestavení dynamického modelu tensegrity. Prvním přístupem jsou Lagrangeovy rovnice I. druhu, využívající d'Alebertův princip a nadbytečný počet souřadnic. Druhým přístupem jsou Lagrangeovy rovnice II. druhu, založené na principu minimální akce a využívající pouze nezávislé souřadnice. Pro každý postup je naznačeno odvození podle [33].

5.1. Lagrangeovy rovnice I. druhu

Přestože tradiční tensegrity nepřipouští propojení jednotlivých tyčí, tak se v člancích, zabývajících se praktickým využitím tensegrit, začal objevovat pojem *tensegrita vyšší třídy* [13]. Tímto pojmem jsou označovány tensegrity, ve kterých se vyskytují dvě a více spojených tyčí (Obr. 10). Číslo třídy udává počet tyčí spojených v jednom kloubu. Motivací k využití tohoto přístupu je snadné zakomponování vazbových rovnic, popisujících spojení tyčí, do dynamického modelu.



Obr. 10 Tensegrita třídy 1 (vlevo) a tensegrita třídy 2 (vpravo)

5.1.1. Odvození

Pro mechanický systém lze podle d'Alembertova principu psát:

$$m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\mathbf{F} - m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = -m \cdot \mathbf{a} \quad (3)$$

$$\mathbf{F} + \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (4)$$

kde \mathbf{a} je vektor zrychlení, \mathbf{F} je vektor silových účinků působících na systém a \mathbf{D} je vektor setrvačných silových účinků. Na první pohled se zdá d'Alembertův princip jen jako přepsání Newtonovy rovnice $m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}$. Nicméně rovnice (4) vyjadřuje více než pouhé přeformulování rovnice. Z newtonovské mechaniky, konkrétně ze statiky, je známo, že výraz $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ vyjadřuje rovnováhu systému. Rovnice (4) potom vyjadřuje rozšíření konceptu rovnováhy systému na systém, který je v pohybu.

Kritériem pro rovnováhu libovolného systému je nulová celková virtuální práce:

$$\delta W = \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{R}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{R}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \delta \mathbf{R}_n = 0 \quad (5)$$

kde \mathbf{F}_i jsou reálné síly působící na systém a $\delta \mathbf{R}_i$ vyjadřuje virtuální, tedy myšlený možný, posuv. Jelikož tento princip pracuje s virtuálními posuvy, lze ho aplikovat na systém v klidu i na systém v pohybu. Přepsáním rovnice (5) pro souřadnice $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ vznikne rovnice:

$$\delta W = F_1 \cdot \delta s_1 + F_2 \cdot \delta s_2 + \dots + F_n \cdot \delta s_n = 0 \quad (6)$$

kde F_i nyní vyjadřují složky vektoru zobecněné síly a δs_i vyjadřuje virtuální přírůstek souřadnice, často označovaný jako variace souřadnice. Složka F_i zobecněné síly působí v tečném směru vůči souřadnici s_i . Rovnice (6) platí pouze v případě, že všechny souřadnice s_i jsou nezávislé. Pro tento model je předpokládáno použití nadbytečných souřadnic a využití vazbových rovnic pro popsání tensegrity. Tím pádem nejsou všechny souřadnice s_i nezávislé a tento fakt je potřeba zohlednit v rovnici (6). Pro předpoklad existence jedné vazbové rovnice obecně zapsané jako:

$$f(s_1, s_2, \dots, s_n) = 0 \quad (7)$$

a její variace:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial s_1} \cdot \delta s_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2} \cdot \delta s_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial s_n} \cdot \delta s_n = 0 \quad (8)$$

K rovnici (6) je přičten λ násobek rovnice (8):

$$F_1 \cdot \delta s_1 + F_2 \cdot \delta s_2 + \dots + F_n \cdot \delta s_n + \lambda \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial s_1} \cdot \delta s_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2} \cdot \delta s_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial s_n} \cdot \delta s_n \right) = 0 \quad (9)$$

Pro závislou souřadnici s_n :

$$\left(F_n + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial s_n} \right) \cdot \delta s_n = 0 \quad (10)$$

Nyní je potřeba zaručit vyrušení koeficientu δs_n . Toho je dosaženo vhodnou volbou multiplikátoru λ . Po tomto kroku se rovnice (9) zredukuje na:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(F_k + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial s_k} \right) \cdot \delta s_k = 0 \quad (11)$$

Protože nyní jsou všechny souřadnice nezávislé, δs_k mohou být zvoleny libovolně. Aby byly splněny rovnice (6) a (8), musí platit:

$$F_k = \frac{\partial f}{\partial s_k} = 0 \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (12)$$

Potom je splněna i rovnice (11). Modifikovaný princip virtuální práce, pro který je splněna vazbová podmínka f , lze pak zapsat jako:

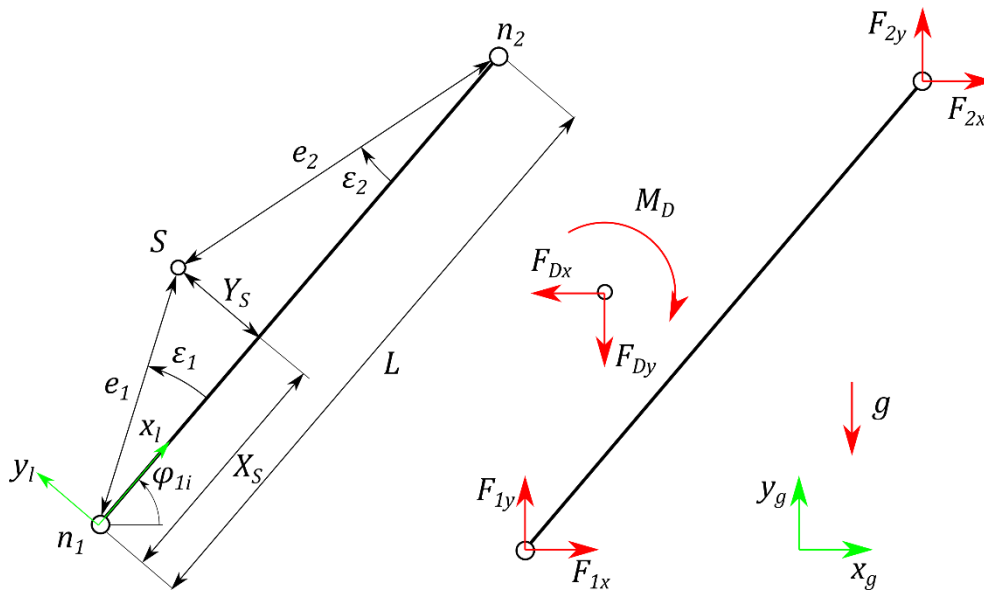
$$\delta \bar{W} = \delta W + \delta(\lambda \cdot f) = 0 \quad (13)$$

Obdobně lze pro soustavu s m vazbovými rovnicemi psát:

$$\delta \bar{W} = \delta W + \delta(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \dots + \lambda_m \cdot f_m) = 0 \quad (14)$$

Postup uvedený v rovnicích (6) až (14) se nazývá metoda Lagrangeových multiplikátorů. Namísto řešení soustavy n rovnic s $n - m$ stupňů volnosti, je soustava rovnic doplněna o m vazbových rovnic a m neznámých multiplikátorů λ . Tento postup je výhodný, protože nevyžaduje explicitní eliminaci závislých proměnných. Dosazením rovnice (4) do (14) lze sestavit soustavu rovnic, popisující dynamiku systému při dodržení vazbových rovnic. To je ukázáno v následující sekci.

5.1.2. Dynamický model



Obr. 11 Geometrie i -té tyče a silové účinky

V dynamickém modelu se předpokládá obecná poloha těžiště tyče. Ta je určena lokálními souřadnicemi X_S a Y_S . Na základě těchto souřadnic a délky tyče L jsou odvozeny geometrické parametry (Obr. 11):

$$e_1 = \sqrt{X_S^2 + Y_S^2} \quad (15)$$

$$e_2 = \sqrt{(L - X_S)^2 + Y_S^2} \quad (16)$$

$$\epsilon_1 = \tan \frac{Y_S}{X_S} \quad (17)$$

$$\epsilon_2 = \tan \frac{Y_S}{L - X_S} \quad (18)$$

Pro souřadnice $\mathbf{s}_i = (x_{si}, y_{si}, \varphi_{1i})^T$, popisující polohu a natočení tyče, lze podle rovnic (4) a (14) psát:

$$\begin{aligned} & ({}^iF_x - m_i \cdot \ddot{x}_{si} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_{si}}) \cdot \delta x_{si} \\ & + ({}^iF_y - m_i \cdot \ddot{y}_{si} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_{si}}) \cdot \delta y_{si} \\ & + ({}^iM - I_{isi} \cdot \ddot{\varphi}_{1i} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \varphi_{1i}}) \cdot \delta \varphi_{1i} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

kde iF_x , iF_y a iM jsou složky zobecněné síly působící na tyč, f_k je k -tá vazbová rovnice, r je celkový počet vazbových rovnic a λ_k je k -tý Lagrangeův multiplikátor.

Podle silových účinků zobrazených na Obr. 11 lze sestavit vektor zobecněné síly. Pro jednotlivé složky lze psát:

$${}^iF_x = {}^iF_{1x} + {}^iF_{2x} \quad (20)$$

$${}^iF_y = {}^iF_{1y} + {}^iF_{2y} - m_i \cdot g \quad (21)$$

$${}^iM = {}^iF_{1x} \cdot {}^ie_1 \cdot \sin(\varphi_i + {}^i\epsilon_1) - {}^iF_{1y} \cdot {}^ie_1 \cdot \cos(\varphi_i + {}^i\epsilon_1) - {}^iF_{2x} \cdot {}^ie_2 \cdot \sin(\varphi_i - {}^i\epsilon_2) + {}^iF_{2y} \cdot {}^ie_2 \cdot \cos(\varphi_i - {}^i\epsilon_2) \quad (22)$$

Z rovnic (15) a (18) jsou vyjádřeny souřadnice uzlů tyče:

$${}^in_{1x} = x_{si} - {}^ie_1 \cdot \cos(\varphi_{1i} + {}^i\epsilon_1) \quad (23)$$

$${}^in_{1y} = y_{si} - {}^ie_1 \cdot \sin(\varphi_{1i} + {}^i\epsilon_1) \quad (24)$$

$${}^in_{2x} = x_{si} + {}^ie_2 \cdot \cos(\varphi_{1i} - {}^i\epsilon_2) \quad (25)$$

$${}^in_{2y} = y_{si} + {}^ie_2 \cdot \sin(\varphi_{1i} - {}^i\epsilon_2) \quad (26)$$

Potom lze vyjádřit rotační vazbu mezi koncem tyče i a počátkem tyče j :

$${}^in_2 - {}^jn_1 = \mathbf{0} \quad (27)$$

a obdobně pro ostatní vazby. Aby byla rovnice (19) splněna, musí být jednotlivé členy v závorkách rovné nule:

$$\begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & I_{isi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_{si} \\ \ddot{y}_{si} \\ \ddot{\varphi}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^iF_x \\ {}^iF_y \\ {}^iM \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_{si}} \\ \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_{si}} \\ \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \varphi_{1i}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Nyní je potřeba spojit rovnici (28) s vazbovými rovnicemi ve tvaru $\mathbf{f}(\mathbf{s}(t)) = \mathbf{0}$. Toho se dosáhne zderivováním vazbových rovnic podle času:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{s}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{s}) \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\ddot{\mathbf{f}}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{s}) \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (30)$$

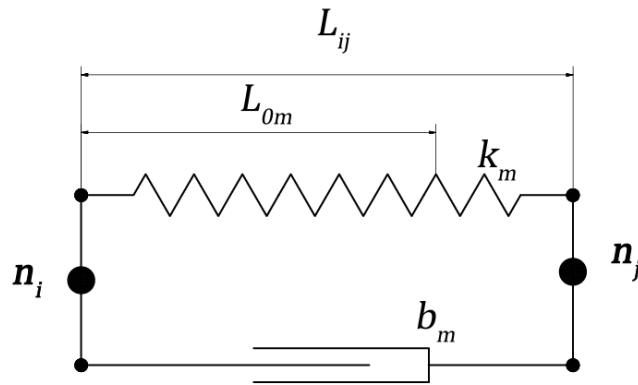
a po spojení rovnice (30) s rovnicí (28):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{s}) \\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \\ -\dot{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \cdot \dot{\mathbf{s}} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Tím je získána soustava alegbro-diferenciálních rovnic popisující dynamiku samotné tyče. Aplikováním tohoto postupu na všechny tyče tensegritní struktury je získán model popisující dynamiku celé tensegrity.

5.1.3. Silové působení předepnutých lan

V předchozí sekci nejsou přímo uvedeny síly, které jsou vyvolány předepnutými lany, ale pouze obecné síly ${}^i\mathbf{F}_1$ a ${}^i\mathbf{F}_2$, které působí v uzlech tyčí. Pro určení těchto uzlových sil jsou první definovány silové účinky vyvinuté jedním předepnutým lanem.



Obr. 12 Model lana m mezi uzly i a j

Podle Obr. 12 je silový účinek předepnutého lana rozdělen na silový účinek pružiny a na silový účinek tlumiče. Sílu pružiny lze vyjádřit jako:

$$\mathbf{F}_{ijk} = \begin{cases} \mathbf{q}_{ij} \cdot k_m \cdot (L_{ij} - L_{0m}) & \text{pro } (L_{ij} - L_{0m}) > 0 \\ 0 & \text{pro } (L_{ij} - L_{0m}) \leq 0 \end{cases} \quad (32)$$

kde k_m je tuhost lana m , L_{0m} je volná délka lana m , L_{ij} je vzdálenost mezi uzlem i a uzlem j a \mathbf{q}_{ij} je jednotkový vektor popisující směr z uzlu i do uzlu j . K vyjádření vzdálenosti L_{ij} a jednotkového vektoru \mathbf{q}_{ij} se použijí uzlové souřadnice z rovnic (23) a (26):

$$L_{ij} = \sqrt{(n_{jx} - n_{ix})^2 + (n_{jy} - n_{iy})^2} \quad (33)$$

$$\mathbf{q}_{ij} = \frac{\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_i}{L_{ij}} \quad (34)$$

Sílu tlumiče lze vyjádřit jako:

$$\mathbf{F}_{ijb} = \begin{cases} \mathbf{q}_{ij} \cdot b_m \cdot \dot{L}_{ij} & \text{pro } (L_{ij} - L_{0m}) > 0 \\ 0 & \text{pro } (L_{ij} - L_{0m}) \leq 0 \end{cases} \quad (35)$$

kde b_m je koeficient tlumení lana m a \dot{L}_{ij} je relativní rychlost pohybu uzlů i a j . Rychlost \dot{L}_{ij} lze vyjádřit zderivováním rovnice (33) podle času:

$$\dot{L}_{ij} = \frac{(n_{jx} - n_{ix})(\dot{n}_{jx} - \dot{n}_{ix}) + (n_{jy} - n_{iy})(\dot{n}_{jy} - \dot{n}_{iy})}{\sqrt{(n_{jx} - n_{ix})^2 + (n_{jy} - n_{iy})^2}} \quad (36)$$

a uzlové rychlosti lze získat zderivováním rovnic (23) až (26):

$${}^i\dot{n}_{1x} = \dot{x}_{s1} + {}^i e_1 \cdot \sin(\varphi_{1i} + {}^i \epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_{1i} \quad (37)$$

$${}^i\dot{n}_{1y} = \dot{y}_{s1} - {}^i e_1 \cdot \cos(\varphi_{1i} + {}^i \epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_{1i} \quad (38)$$

$${}^i\dot{n}_{2x} = \dot{x}_{s2} - {}^i e_2 \cdot \sin(\varphi_{1i} - {}^i \epsilon_2) \cdot \dot{\varphi}_{1i} \quad (39)$$

$${}^i\dot{n}_{2y} = \dot{y}_{s2} + {}^i e_2 \cdot \cos(\varphi_{1i} - {}^i \epsilon_2) \cdot \dot{\varphi}_{1i} \quad (40)$$

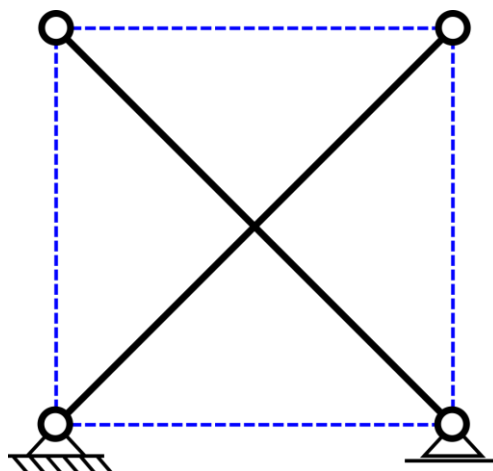
Pro určené silové účinky předepnutých lan lze definovat uzlovou sílu působící v obecném uzlu i , který je spojen lany s uzly j :

$$\mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ijk} + \mathbf{F}_{ijb} \quad (41)$$

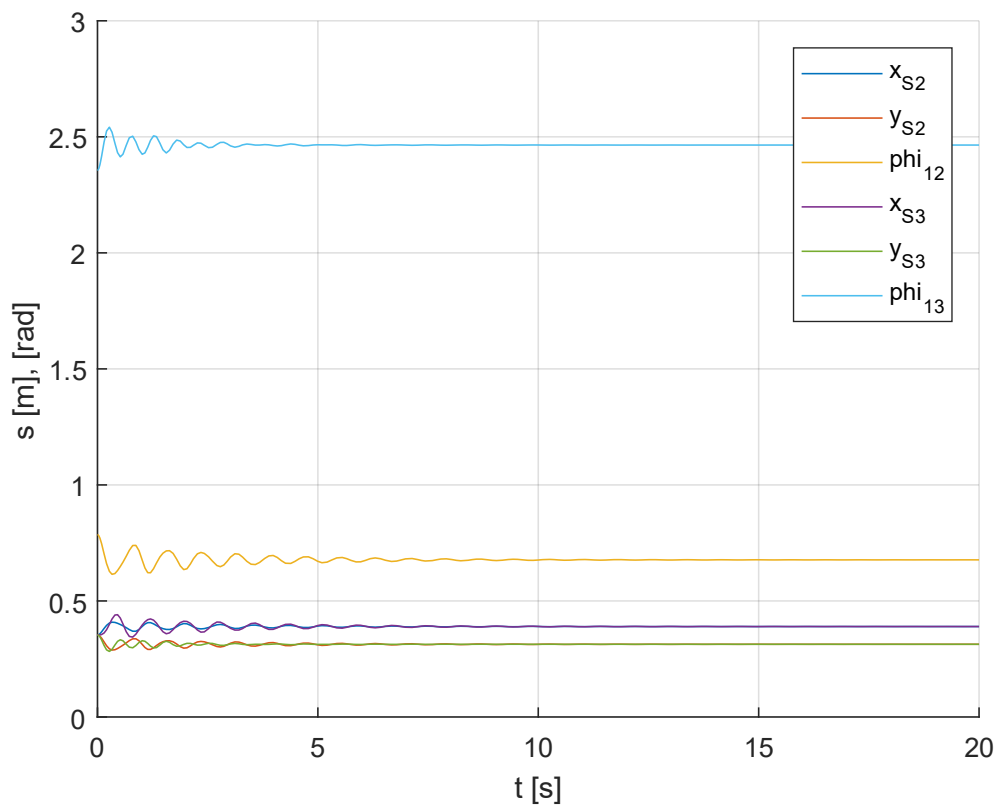
Pro zohlednění externích sil stačí přičíst vektory externích sil k příslušným uzlovým silám.

5.1.4. Aplikace dynamického modelu

Pro ověření postupu ze sekcí 5.1.2 a 5.1.3 byl model aplikován na jednoduchou tensegritu se dvěma tyčemi zobrazenou na Obr. 13. Souřadnice popisující polohu tyčí jsou $\mathbf{s} = (x_{s2}, y_{s2}, \varphi_{12}, x_{s3}, y_{s3}, \varphi_{13})^T$. Parametry tyčí tensegrity jsou $m = 1 \text{ kg}$ a $L = 1 \text{ m}$. Parametry lan jsou $L_0 = 0.5 \text{ m}$, $k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ a $b = 0.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Vlivem tíhy dojde k vychýlení tensegrity z počáteční polohy. Průběh jednotlivých poloh je na zobrazen na Obr. 14.



Obr. 13 Počáteční poloha



Obr. 14 Graf průběhů jednotlivých poloh

5.2. Lagrangeovy rovnice II. druhu

Pro řízení mechanických systémů je vhodná soustava obyčejných diferenciálních rovnic. Ta je získána aplikací Lagrangeových rovnic II. druhu. Výhodou tohoto přístupu je použití pouze jediné skalární funkce k odvození dynamiky celého systému. Jistou nevýhodou tohoto postupu je případné složité vyjádření této skalární funkce, pokud systém obsahuje složité vazby nebo velký počet vazeb.

5.2.1. Odvození

Výchozím bodem je rovnice (4) dosazená do rovnice (5). Integrací tohoto výrazu podle času:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{F}_i - \frac{d}{dt} (m_i \cdot \mathbf{v}_i) \right] \cdot \delta \mathbf{R}_i \cdot dt \quad (42)$$

kde N je počet hmotných bodů. Pro jednoduchost je uvažována pouze soustava hmotných bodů, protože není potřeba řešit jejich natočení v prostoru. Přepsáním pravé strany rovnice (42):

$$- \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \cdot \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{R}_i \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{R}_i \cdot dt \quad (43)$$

je získán součet integrálů, kde první integrál je asociován se setrvačnými účinky a druhý integrál je asociován s akčními silami, které působí na mechanický systém. Matematickými úpravami lze dojít ke tvaru:

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot v_i^2 \cdot dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} U \cdot dt \\ & - \left[\sum_{i=1}^N (m_i \cdot \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{R}_i \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (44)$$

kde U je *pracovní funkce*. V prvním integrálu vystupuje vztah pro celkovou kinetickou energii systému. Zavedením skalární funkce L zvané Lagrangián:

$$L = E_k + U \quad (45)$$

lze přepsat rovnici (42) do tvaru:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W \cdot dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \cdot dt - \left[\sum_{i=1}^N (m_i \cdot \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{R}_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (46)$$

Specifikací okrajových podmínek je dosaženo vynulování variace δR_i v časech t_1 a t_2 , protože pozice systému je přesně dána a nepřipouští se variace polohy systému. Tím pádem je rovnice (46) zjednodušena na tvar:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W \cdot dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \cdot dt = \delta A \quad (47)$$

kde A je funkcionál zvaný *akce*. Z d'Alembertova principu plyne, že δW nabývá nulové hodnoty, takže musí platit:

$$\delta A = 0 \quad (48)$$

Toto je Hamiltonův princip, který říká že, pro známý počáteční a konečný stav, pohyb libovolného mechanického systému probíhá tak, že akce systému nabývá stacionární hodnoty pro libovolné možné konfigurace systému.

Pokud je L vyjádřeno pomocí nezávislých souřadnic q_1, q_2, \dots, q_n a nezávislých rychlostí $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ lze zapsat funkcionál A ve tvaru:

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \cdot dt \quad (49)$$

Stacionární hodnotu tohoto funkcionálu lze najít vyřešením soustavy rovnic:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (50)$$

kde n je počet stupňů volnosti systému. To je jeden ze zásadních rozdílů oproti Lagrangeovo rovnicím I. druhu, které používají nadbytečné souřadnice a vazbové rovnice.

Poslední úpravou je dosazení rovnice (45) do rovnice (50):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k + U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k + U}{\partial q_i} = 0 \quad (51)$$

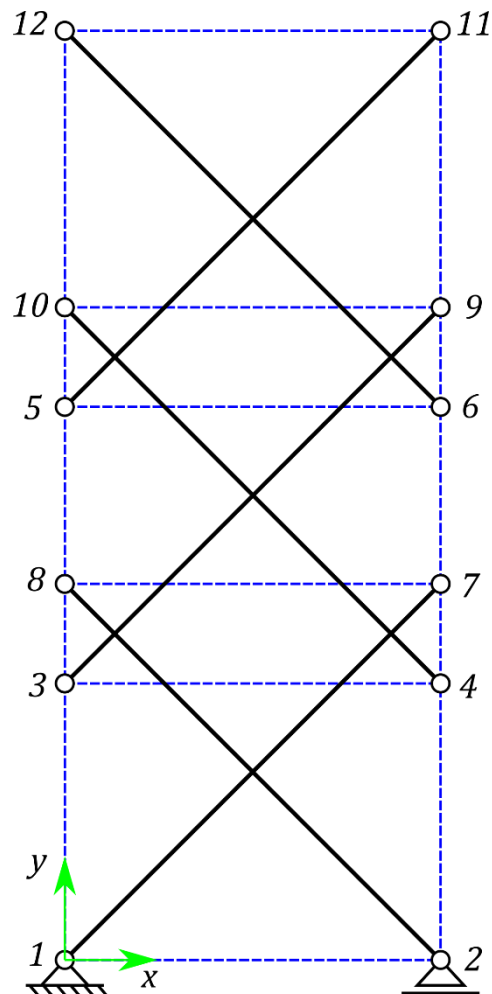
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (52)$$

Pro předpoklad, že akční síly se nemění s rychlostí souřadnic a zavedením zobecněné síly Q , jsou získány výsledné rovnice pro popis dynamiky systému:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (53)$$

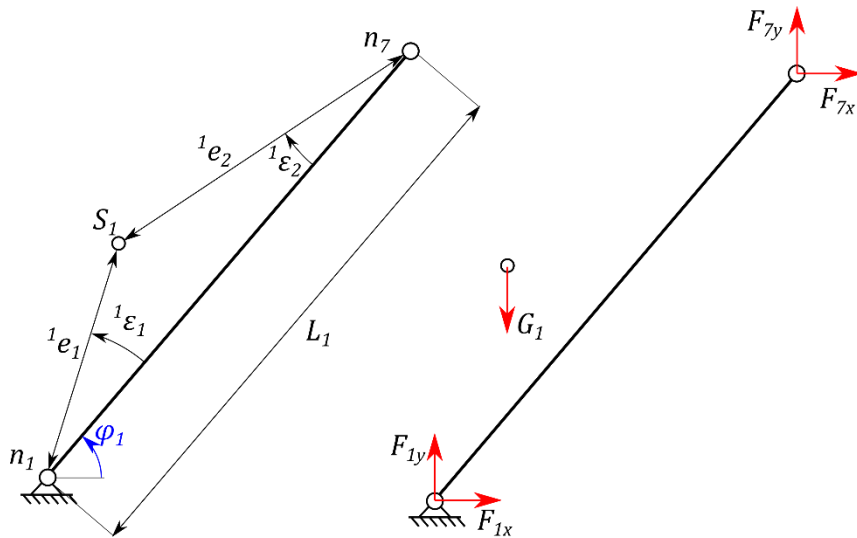
5.2.2. Aplikace

Postup z předchozí sekce je aplikován na struktur na Obr. 15. I když se zpravidla v mechanice označuje rám číslem 1 a číslování těles začíná číslem 2, tak je zde zavedeno číslování od 1. To je z důvodu sjednocení číslování uzlů a tyčí. Potom tyč i má počáteční uzel i a koncový uzel $i + b$, kde b je celkový počet tyčí struktury.



Obr. 15 Třípatrová tensegritní věž

Obecně se v rovinných tensegritních strukturách třídy 1 vyskytují tři typy tyčí. Tyč s jedním stupněm volnosti, uchycená rotační vazbou. Tyč se dvěma stupni volnosti, uchycená posuvnou vazbou. A tyč se třemi stupni volnosti. Proto sestavení konkrétních rovnic v této sekci lze jednoduše zobecnit na libovolnou rovinnou tensegritu. Jelikož tyče tensegrity spolu přímo neinteragují, je možné odvodit pohybové rovnice pro jednotlivé tyče pouze z jejich kinetické energie ${}^i E_k$, namísto kinetické energie celé tensegrity.



Obr. 16 Tyč 1 – geometrie a silové účinky

Tyč 1 je popsána jednou nezávislou (zobecněnou) souřadnicí φ_1 . Nejprve je potřeba definovat kinetickou energii tyče. Jelikož tyč koná pouze rotační pohyb lze psát:

$${}^1E_k = \frac{1}{2} \cdot I_{1n1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 \quad (54)$$

kde I_{1n1} je moment setrvačnosti tyče vzhledem k uzlu n_1 . Dále pro jednotlivé členy levé strany rovnice (53):

$$\frac{\partial {}^1E_k}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (55)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial {}^1E_k}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = I_{1n1} \cdot \ddot{\varphi}_1 \quad (56)$$

Zobecněná síla působící na tyč je získána ze vztahu:

$$Q_1 \cdot \delta \varphi_1 = -G_1 \cdot \delta y_{s1} + F_{7x} \cdot \delta x_{n7} + F_{7y} \cdot \delta y_{n7} \quad (57)$$

kde jednotlivé souřadnice jsou definovány jako:

$$y_{s1} = {}^1e_1 \cdot \sin(\varphi_1 + {}^1\epsilon_1) \quad (58)$$

$$x_{n7} = {}^1L \cdot \cos(\varphi_1 + {}^1\epsilon_1) \quad (59)$$

$$y_{n7} = {}^1L \cdot \sin(\varphi_1 + {}^1\epsilon_1) \quad (60)$$

a jejich variace:

$$\delta y_{s1} = {}^1e_1 \cdot \cos(\varphi_1 + {}^1\epsilon_1) \cdot \delta \varphi_1 \quad (61)$$

$$\delta x_{n7} = -{}^1L \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \delta \varphi_1 \quad (62)$$

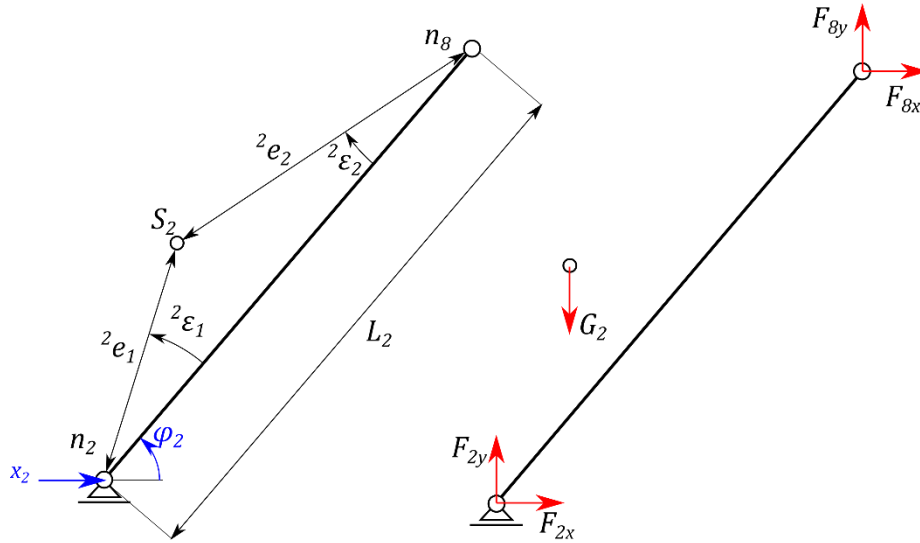
$$\delta y_{n7} = {}^1L \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \delta \varphi_1 \quad (63)$$

Po dosazení rovnic (61) až (63) do rovnice (57) a úpravě je získán výsledný vztah pro zobecněnou sílu:

$$Q_1 = -G_1 \cdot {}^1e_1 \cdot \cos(\varphi_1 + {}^1\epsilon_1) - F_{7x} \cdot {}^1L \cdot \sin(\varphi_1) + F_{7y} \cdot {}^1L \cdot \cos(\varphi_1) \quad (64)$$

Výsledná pohybová rovnice, popisující dynamiku tyče 1, je potom:

$$I_{1n1} \cdot \ddot{\varphi}_1 = -G_1 \cdot {}^1e_1 \cdot \cos(\varphi_1 + {}^1\epsilon_1) - F_{7x} \cdot {}^1L \cdot \sin(\varphi_1) + F_{7y} \cdot {}^1L \cdot \cos(\varphi_1) \quad (65)$$



Obr. 17 Tyč 2 – geometrie a silové účinky

Tyč 2 je popsána dvěma nezávislými souřadnicemi x_2 a φ_2 . Tyč koná obecný rovinný pohyb. Pro vyjádření kinetické energie tělesa, které koná takový pohyb, slouží Königova věta:

$${}^2E_k = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{S2}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{2S2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 \quad (66)$$

Nyní je potřeba vyjádřit energii tělesa v závislosti na nezávislých souřadnicích. K tomu stačí upravit pouze rychlost pohybu těžiště v_{S2} :

$$v_{S2}^2 = \dot{x}_{S2}^2 + \dot{y}_{S2}^2 \quad (67)$$

$$x_{S2} = x_2 + {}^2e_1 \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \quad (68)$$

$$y_{S2} = {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \quad (69)$$

$$\dot{x}_{S2} = \dot{x}_2 - {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (70)$$

$$\dot{y}_{S2} = {}^2e_1 \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (71)$$

$$\dot{x}_{S2}^2 = \dot{x}_2^2 - 2 \cdot {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{x}_2 + {}^2e_1^2 \cdot \sin^2(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2^2 \quad (72)$$

$$\dot{y}_{S2}^2 = {}^2e_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2^2 \quad (73)$$

Dosazením rovnic (7272) a (73) do rovnice (67) a využitím vlastnosti goniometrických funkcí sinus a cosinus:

$$v_{S2}^2 = \dot{x}_2^2 + {}^2e_1^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 - 2 \cdot {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{x}_2 \quad (74)$$

Potom lze kinetickou energii tyče 2 zapsat jako:

$${}^2E_k = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}_2^2 - m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot {}^2e_1^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{2S2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 \quad (75)$$

Pro takto vyjádřenou energii lze sestavit levé strany Lagrangeovo rovnic. Pro souřadnici x_2 :

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial x_2} = 0 \quad (76)$$

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \cdot \dot{x}_2 - m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (77)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \cdot \ddot{x}_2 - m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \ddot{\varphi}_2 - m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2^2 \quad (78)$$

a pro souřadnici φ_2 :

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial \varphi_2} = -m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{x}_2 \quad (79)$$

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} = -m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{x}_2 + m_2 \cdot {}^2e_1^2 \cdot \dot{\varphi}_2 + I_{2S2} \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (80)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = I_{2S2} \cdot \ddot{\varphi}_2 + m_2 \cdot {}^2e_1^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \ddot{x}_2 - m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{x}_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \quad (81)$$

Obdobně, jako u tyče 1, jsou určeny zobecněné síly:

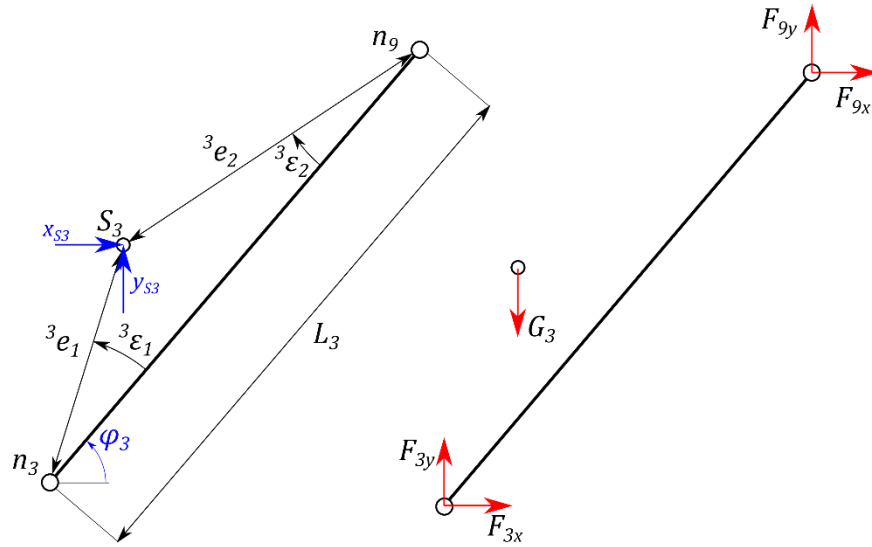
$$Q_2 = F_{2x} + F_{8x} \quad (82)$$

$$Q_3 = -G_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) - F_{8x} \cdot {}^2L \cdot \sin(\varphi_2) + F_{8y} \cdot {}^2L \cdot \cos(\varphi_2) \quad (83)$$

Výsledné pohybové rovnice jsou zapsány jako:

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \ddot{\varphi}_2 = m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_2^2 + F_{2x} + F_{8x} \quad (84)$$

$$(I_{2S2} + m_2 \cdot {}^2e_1^2) \cdot \ddot{\varphi}_2 - m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \ddot{x}_2 = m_2 \cdot {}^2e_1 \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \cdot \dot{x}_2 \cdot \dot{\varphi}_2 - m_2 \cdot g \cdot {}^2e_1 \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) - F_{8x} \cdot {}^2L \cdot \sin(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) + F_{8y} \cdot {}^2L \cdot \cos(\varphi_2 + {}^2\epsilon_1) \quad (85)$$



Obr. 18 Tyč 3 – geometrie a silové účinky

Tyč 3 je popsána třemi nezávislými souřadnicemi x_{S3} , y_{S3} a φ_3 . Stejně jako u tyče 2 je kinetická energie určena pomocí Königovy věty. Ale oproti tyči 2, je možné vyjádřit kinetickou energii rovnou jako funkci nezávislých souřadnic:

$${}^3E_k = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (\dot{x}_{S3}^2 + \dot{y}_{S3}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{3S3} \cdot \dot{\varphi}_3^2 \quad (86)$$

Levé strany Lagrangeových rovnic lze pak zapsat jako:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial {}^3E_k}{\partial \dot{x}_{S3}} \right) - \frac{\partial {}^3E_k}{\partial x_{S3}} = m_3 \cdot \ddot{x}_{S3} - 0 \quad (87)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial {}^3E_k}{\partial \dot{y}_{S3}} \right) - \frac{\partial {}^3E_k}{\partial y_{S3}} = m_3 \cdot \ddot{y}_{S3} - 0 \quad (88)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial {}^3E_k}{\partial \dot{\varphi}_{S3}} \right) - \frac{\partial {}^3E_k}{\partial \varphi_{S3}} = I_{3S3} \cdot \ddot{\varphi}_{S3} - 0 \quad (89)$$

Zobecněné síly se určí obdobným způsobem, jako v předchozích případech. Výsledné pohybové rovnice jsou pak zapsány jako:

$$m_3 \cdot \ddot{x}_{S3} = F_{3x} + F_{9x} \quad (90)$$

$$m_3 \cdot \ddot{y}_{S3} = F_{3y} + F_{9y} - G_3 \quad (91)$$

$$\begin{aligned} I_{3S3} \cdot \ddot{\varphi}_{S3} &= F_{3x} \cdot {}^3e_1 \cdot \sin(\varphi_3 + {}^3\epsilon_1) - F_{3y} \cdot {}^3e_1 \cdot \cos(\varphi_3 + {}^3\epsilon_1) \\ &\quad - F_{9x} \cdot {}^3e_2 \cdot \sin(\varphi_3 - {}^3\epsilon_2) + F_{9y} \cdot {}^3e_2 \cdot \cos(\varphi_3 - {}^3\epsilon_2) \end{aligned} \quad (92)$$

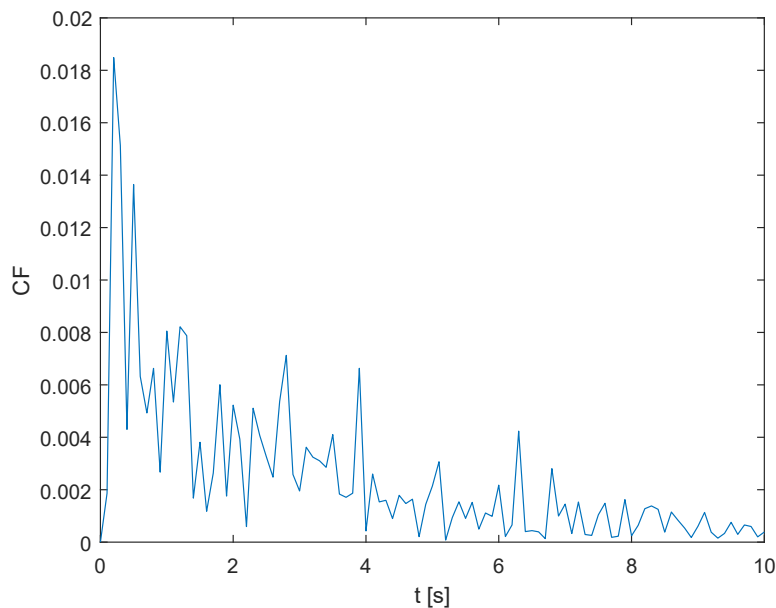
Pro tyče 4 až 6 je sestavení pohybových rovnic téměř stejné, až na změnu indexů specifikující číslo tyče a čísla uzlů. Ve výsledku je tensegrita je popsána soustavou patnácti pohybových rovnic. Silové působení je určeno stejně jako v sekci 5.1.3. Tento konkrétní model je vyzkoušen až v kapitole 6, protože je první potřeba najít stabilizující předpětí.

5.3. Porovnání metod

Stejně jako Lagrangeovy rovnice I. druhu (LR1), jsou i Lagrangeovy rovnice II. druhu (LR2) vyzkoušeny na tensegritě se dvěma tyčemi (Obr. 13). Prvním rozdílem je počet výpočetních kroků, které jsou potřeba k simulaci děje. Ta je provedena v programech MATLAB R2017a a Simulink. Při výchozím nastavení řešiče v Simulinku je pro simulaci děje, dlouhého 10 s, potřeba 113 kroků pro LR1 a 87 kroků pro LR2. Pro porovnání byly oba výstupy převzorkovány na 101 vzorků (kroků). Pro porovnání obou metod pak slouží funkce:

$$CF(t) = \sum_{i=1}^4 \|^{LR1}\mathbf{n}_i(t) - ^{LR2}\mathbf{n}_i(t)\| \quad (93)$$

kteřá určuje celkovou odchylku poloh uzlů tensegrity v průběhu děje. Na Obr. 19 je graf znázorňující průběh této odchylky. Při přechodovém ději dosahuje celková odchylka téměř 2 % délky tyče. Nicméně k této odchylce může přispívat i převzorkování dat. Po odeznění přechodového děje konvergují obě metody ke stejnému řešení.



Obr. 19 Průběh celkové odchylky uzlů mezi LR1 a LR2

Vzhledem k tomu, že se zbytek práce zabývá problematikou řízení tvaru aktivní tensegrity, je dále použit pouze dynamický model získaný metodou Lagrangeových rovnic II. druhu. A to z toho důvodu, že je pro návrh řízení vhodnější soustava obyčejných diferenciálních rovnic, než soustava algebro-diferenciálních rovnic.

6. Form-finding

Jelikož libovolné předpětí nezaručuje stabilitu tensegritní struktury, je potřeba najít takové předpětí, které bude mít stabilizující účinek. U jednoduchých, geometricky symetrických, tensegrit toto není problém, protože předpětí jednotlivých lan je stejné. Nicméně pro složitější tensegrity už nelze jednoduše odhadnout předpětí jednotlivých lan. Pro nalezení stabilizujícího předpětí konstrukcí slouží metody zvané *form-finding*. V této kapitole je použita metoda silové hustoty (*force density method*) [34], [35].

Metoda vychází z analýzy *matice napětí* \mathbf{D} . Pro tensegritu s m prvky a n uzly je matice napětí definována jako $\mathbf{D} = [D_{ab}]_{n \times n}$. Ta je sestavena následujícím způsobem:

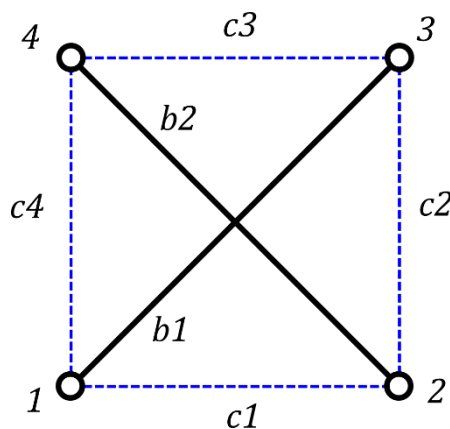
- 1) Silové hustoty q_i jsou kladné pro lana, záporné pro vzpěry.
- 2) Diagonální prvek D_{aa} je součet všech připojených silových hustot q_i na uzel a . Mimodiagonální prvek D_{ab} je $-q_i$, pro q_i spoující uzel a s uzlem b .

Definováním *konfigurační matice* $\mathbf{C} = [C_{ij}]_{m \times n}$ se dá toto sestavení popsat rovnicí. Pro prvek tensegrity i spojený s uzly a a b , kde $a < b$, je prvek konfigurační matice C_{ij} definován jako:

$$C_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{pro } j = a \\ -1 & \text{pro } j = b \\ 0 & \text{pro ostatní} \end{cases} \quad (94)$$

Potom lze matici \mathbf{D} zapsat jako:

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^T \cdot \text{diag}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{C} \quad (95)$$



Obr. 20 Snelsonova X tensegrita

Pro Snelsonovu X tensegritu matice \mathbf{C} vypadá následovně:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (96)$$

a vektor \mathbf{q} s jednotkovými vstupy:

$$\mathbf{q} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1] \quad (97)$$

Potom matice \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Pro super stabilitu rovinné tensegrity je nutné, aby jádro matice \mathbf{D} mělo dimenzi 3 a aby \mathbf{D} byla pozitivně semidefinitní [34]. Tedy aby tři nejmenší vlastní čísla matice \mathbf{D} byla nulová. Pro Snelsonovu X tensegritu jsou tyto podmínky splněny pro volbu \mathbf{q} z rovnice (97). Pro komplexnější tensegrity je v následující sekci prezentován postup hledání \mathbf{q} s využitím genetického algoritmu.

6.1. Form-finding algoritmus

Pro známé kritéria stability rovinné tensegrity jsou definovány funkce α a β , které jsou použity pro definici cílové funkce, která je využita v genetickém algoritmu. Funkce α je definována jako:

$$\alpha = \sum_{i=1}^3 |\lambda_i| \quad (99)$$

pro vlastní čísla matice \mathbf{D} seřazená jako $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Funkce β je definována jako:

$$\beta = \sum_{i=1}^M \frac{1}{|q_i|} \quad (100)$$

kde M značí počet symetricky zatížených skupin a q_i značí silovou hustotu společnou pro celou skupinu i . Tento přístup redukuje hledání m hodnot silových hustot \mathbf{q} , na hledání pouze M hodnot. Pro příklad Snelsonovy X tensegrity se redukuje počet parametrů z šesti na dva.

Optimalizační úloha je pak zapsána jako:

$$\text{minimalizuj: } \alpha \cdot \beta$$

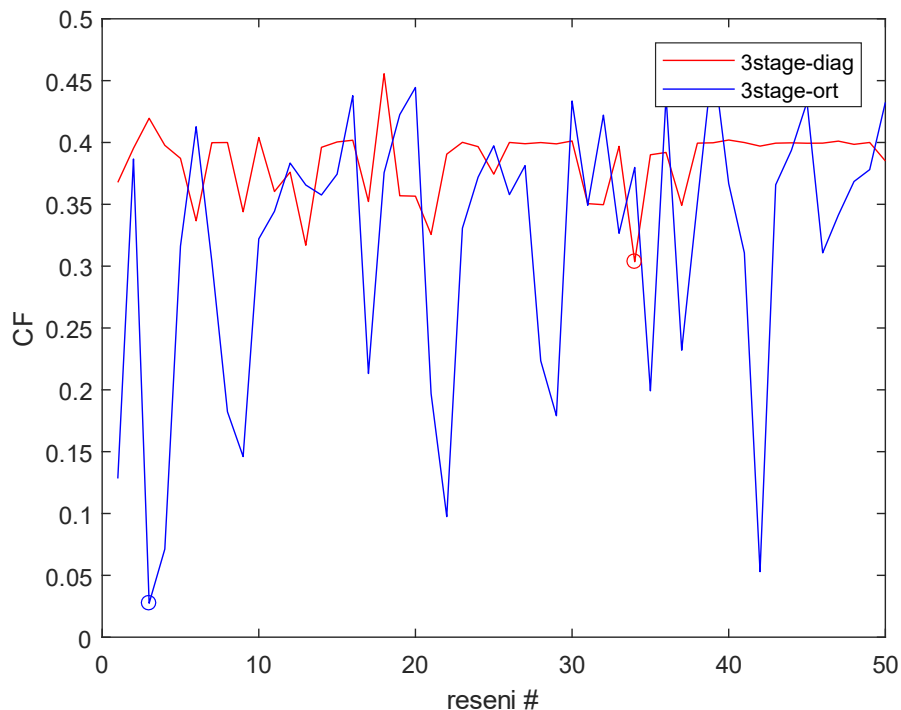
$$\text{pro } q: \quad 1 \geq q_i > 0 \quad \text{pro lana}$$

$$0 > q_i \geq -1 \quad \text{pro vzpěry}$$

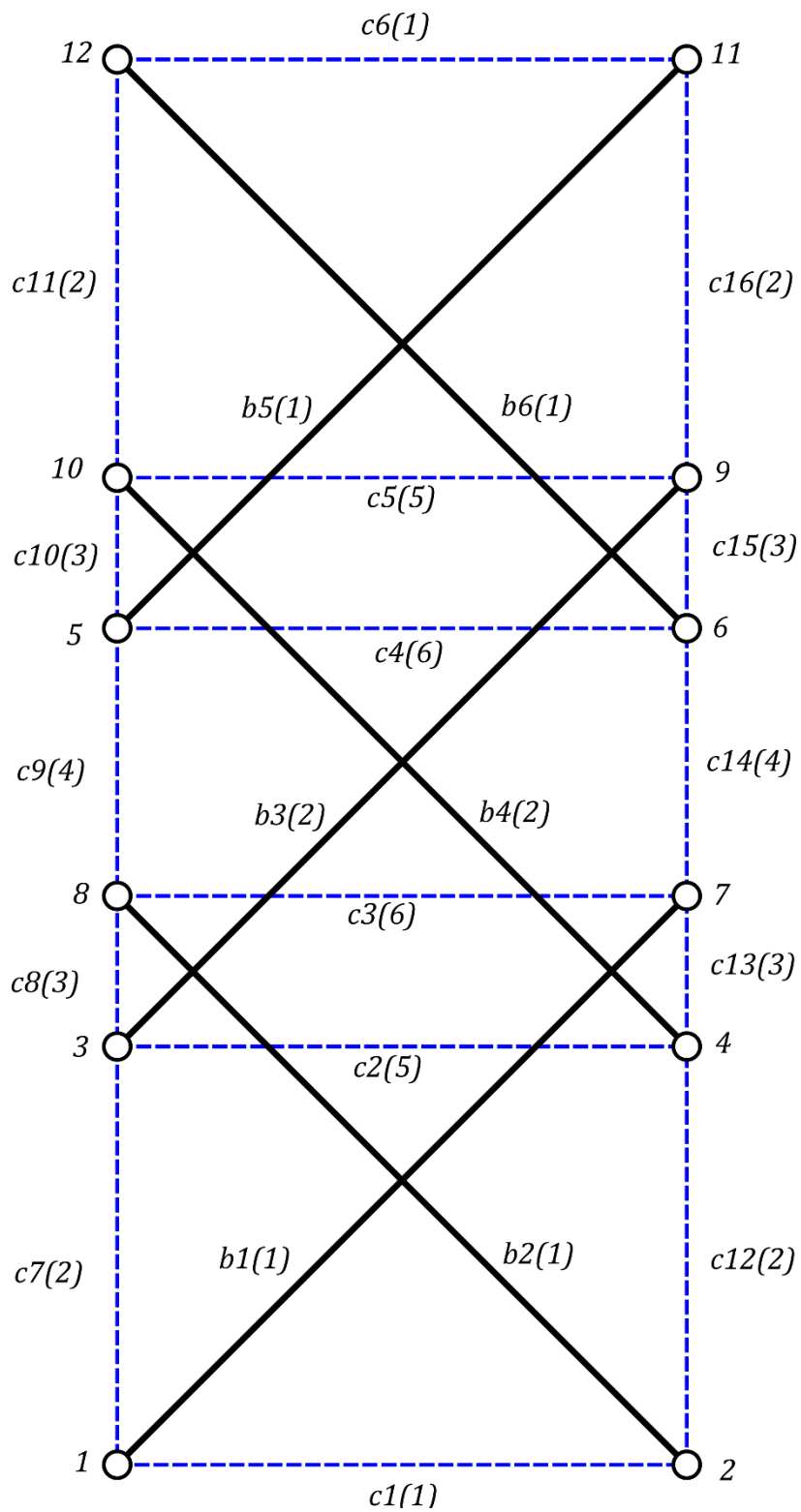
Optimalizace je řešena v MATLABu pomocí funkce `ga` s nastavením:

```
options = optimoptions('ga',...
    'PopulationType', 'doubleVector',...
    'PopulationSize', 200,...
    'SelectionFcn', @selectionstochunif,...
    'EliteCount', 2,...
    'CrossoverFcn', {@crossoverheuristic, 0.9},...
    'MutationFcn', {@mutationadaptfeasible, 0.09},...
    'MaxGenerations', 1000,...
    'FitnessLimit', 1e-10,...
    'FunctionTolerance', 1e-11,...
    'PlotFcn', @gaplotbestf);
```

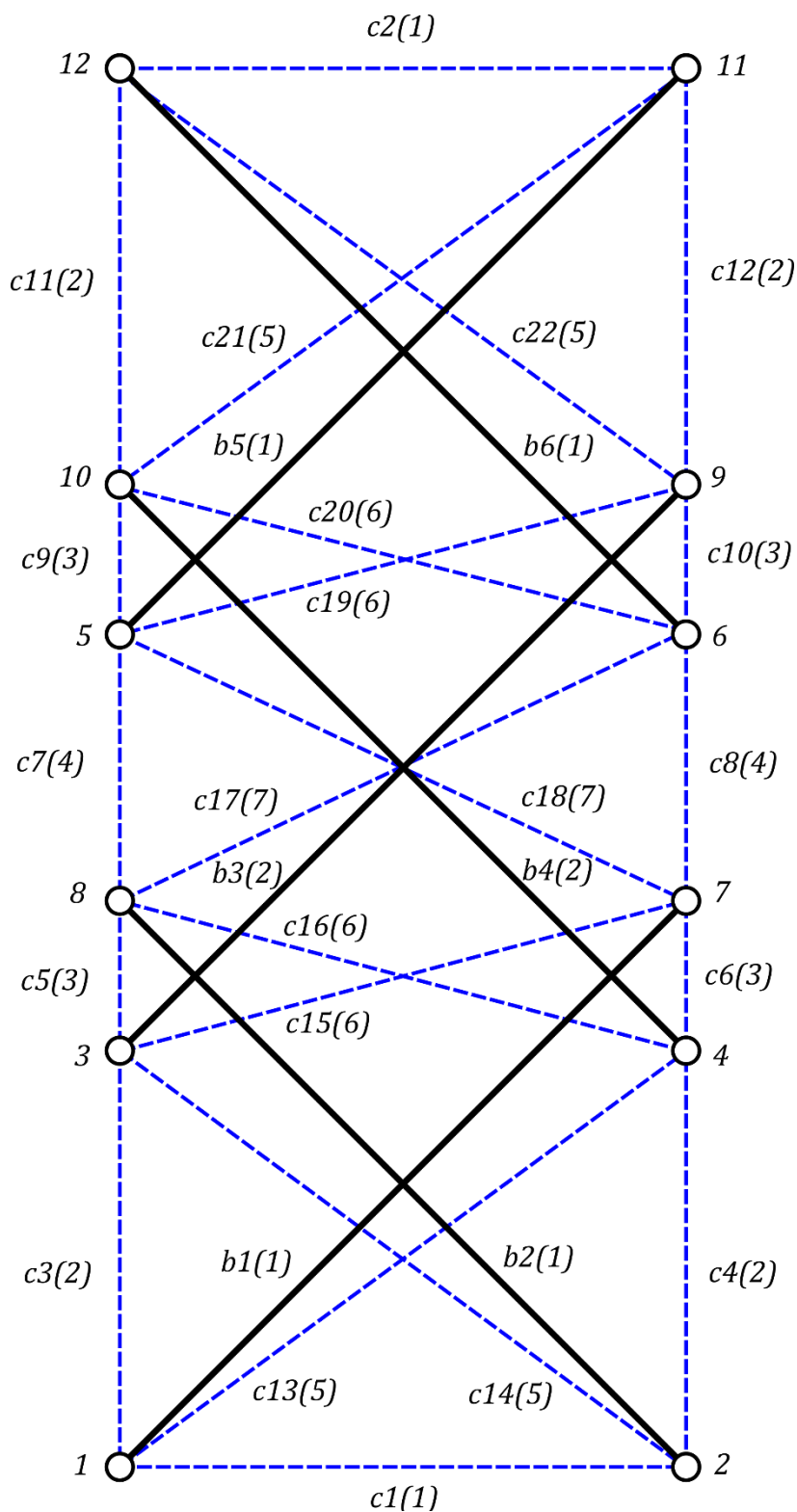
Hledání předpětí je vyzkoušeno na dvou strukturách uvedených na Obr. 22 a na Obr. 23. Kvůli náhodnému charakteru genetických algoritmů je pokaždé získán jiný výsledek. Proto je optimalizační úloha vyřešena padesátkrát pro oba případy a je vybrán nejlepší výsledek (Obr. 21).



Obr. 21 Nejlepší výsledky form-finding algoritmu



Obr. 22 Třípatrová tensegritní věž označená: 3stage-ort



Obr. 23 Třípatrová tensegritní věž označená: 3stage-diag

Čísla v závorkách na Obr. 22 a Obr. 23 značí skupinu symetrie pro daný typ prvku. Například $c1(1)$ lano nepatří do stejné skupiny jako vzpěra $b1(1)$.

<i>Tensegrita</i>	$\alpha\beta$	$q_i - \text{lano}$	$q_i - \text{vzpěra}$
<i>Snelsonova X tensegrita</i>	$7.3e - 16$	$q_1 = 1.0000$	$q_1 = -1.0000$
<i>3stage - ort</i>	0.02745	$q_1 = 0.9941$ $q_2 = 0.0960$ $q_3 = 0.7179$ $q_4 = 0.9977$ $q_5 = 0.9740$ $q_6 = 0.9793$	$q_1 = -0.0847$ $q_2 = 1.34e - 8$
<i>3stage - diag</i>	0.30359	$q_1 = 1.0000$ $q_2 = 0.5688$ $q_3 = 0.8563$ $q_4 = 1.0000$ $q_5 = 0.7463$ $q_6 = 0.9373$ $q_7 = 1.0000$	$q_1 = -0.7588$ $q_2 = -0.53e - 6$

Tabulka 1: Výsledky form-finding algoritmu

Tabulka 1 uvádí výsledky form-finding algoritmu. Pro Snelsonovu X tensegritu jsou výsledky v souladu s očekáváním. Pro 3stage-ort je jedna ze skupin vzpěr namáhána tahem, protože z neznámého důvodu nebyly dodrženy meze během výpočtu. Nicméně oproti ostatním hodnotám q_i je hodnota $q_2 = 1.34e - 8$ zanedbatelná a nebrání použití získaným výsledkům v dalším použití.

Je potřeba dodat, že X tensegrita splňuje podmínky super stability. 3stage tensegrity tuto podmínku nesplňují, protože jedno z vlastních čísel matice \mathbf{D} je záporné pro oba případy. Nicméně výsledky form-finding algoritmu lze využít k návrhu stabilní tensegrity. To bude ukázáno v další sekci. Možným vysvětlením je to, že nalezené \mathbf{q} splňuje podmínku *prestress stability* [34]. Pro splnění této podmínky musí potenciální energie tensegrity $E(\mathbf{p})$ nabývat lokálního minima v bodě \mathbf{q} . To není explicitně odvozeno, ale v další sekci je na modelu ukázáno, že se chová v souladu s touto podmínkou.

6.2. Aplikace výsledků

Nalezené silové hustoty q jsou převedeny na volné délky předepnutých lan. Pro silovou hustotu lana m :

$$q_m = \frac{F_m}{L_{ij}} = \frac{k_n \cdot (L_{ij} - L_{0m})}{L_{ij}} \quad (101)$$

kde L_{ij} je délka mezi uzly i a j vycházející z požadované konfigurace tensegrity, k_n je návrhová tuhost ovlivňující poměr volné délky L_{0m} a délky L_{ij} . Je nutné dodat, že hodnota k_n je stejná pro všechna lana. Volná délka je získána úpravou rovnice (101):

$$L_{0m} = L_{ij} - \frac{q_m \cdot L_{ij}}{k_n} \quad (102)$$

Parametr k_n byl určen metodou pokus-omyl tak, aby lana zůstávala v předpětí i při deformaci tvaru tensegrit. Pro obě tensegrity byla zvolena hodnota $k_n = 5$.

Požadovaná konfigurace je založena na opakování čtvercové tensegrity. Ta se ve výsledné struktuře opakuje a každá další „buňka“ je vertikálně posunuta o 4/5 délky hrany „buňky“. Pro takto sestavené tensegrity s délkou tyče $L = 1 \text{ m}$ jsou volné délky uvedené v tabulce Tabulka 2. Tabulka udává výsledky pro symetrické skupiny, které byly popsány v předchozí sekci.

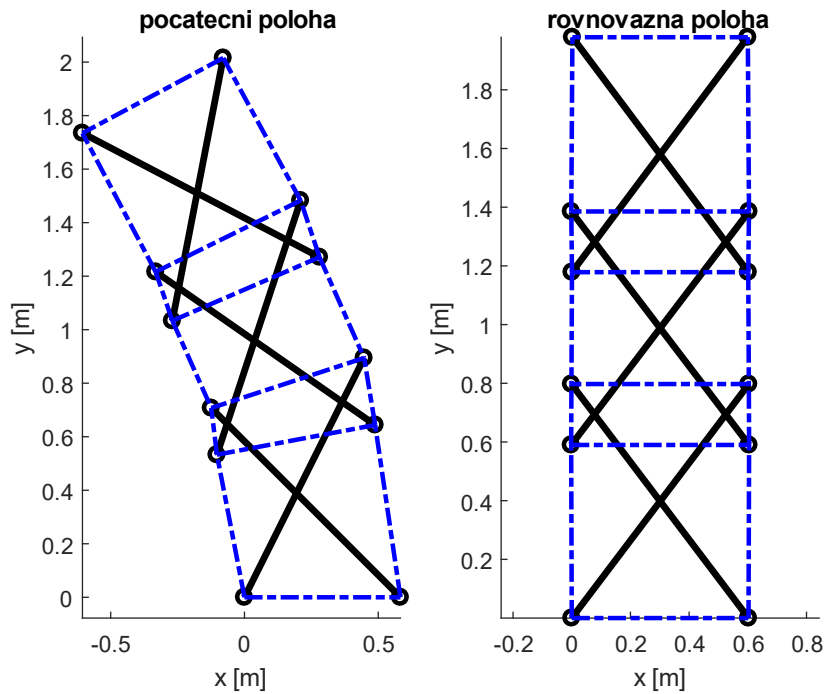
<i>Tensegrita: 3stage – ort</i>		<i>Tensegrita: 3stage – diag</i>	
$L \text{ [m]}$	$L_0 \text{ [m]}$	$L \text{ [m]}$	$L_0 \text{ [m]}$
$L_1 = 0.7071$	$L_{01} = 0.5665$	$L_1 = 0.7071$	$L_{01} = 0.5657$
$L_2 = 0.5657$	$L_{02} = 0.5548$	$L_2 = 0.5657$	$L_{02} = 0.5013$
$L_3 = 0.1414$	$L_{03} = 0.1211$	$L_3 = 0.1414$	$L_{03} = 0.1172$
$L_4 = 0.4243$	$L_{04} = 0.3396$	$L_4 = 0.4243$	$L_{04} = 0.3394$
$L_5 = 0.7071$	$L_{05} = 0.5694$	$L_5 = 0.9055$	$L_{05} = 0.7704$
$L_6 = 0.7071$	$L_{01} = 0.5686$	$L_6 = 0.7211$	$L_{06} = 0.5859$
		$L_7 = 0.8246$	$L_{07} = 0.6597$

Tabulka 2 Vypočtené volné délky L_0 ve vztahu k požadované konfiguraci

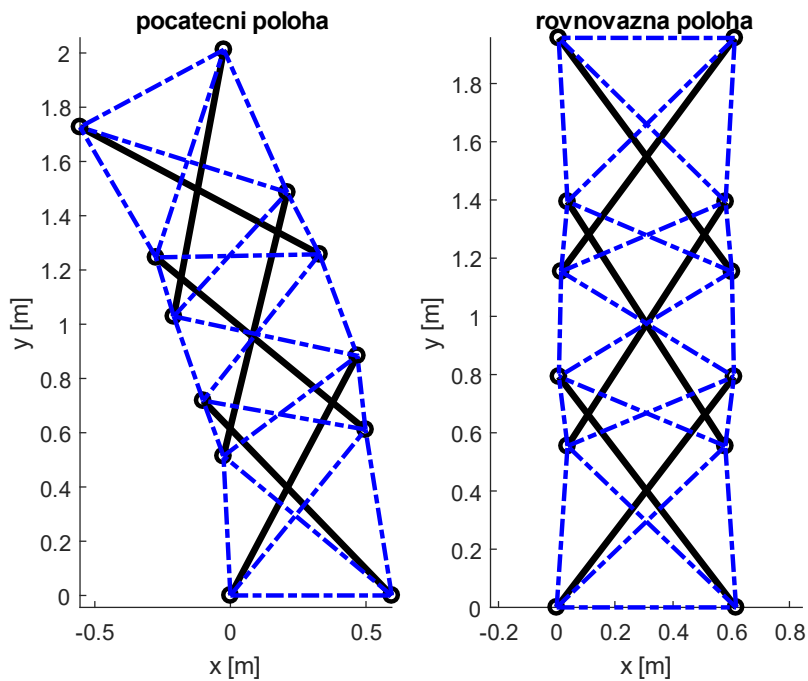
Pro určené volné délky, je určené i předpětí, které stabilizuje tensegritu v rovnovážné poloze. Účinek tohoto předpětí se zvětšuje s narůstající tuhostí lan. Parametry zvolené pro model jsou uvedené v tabulce 3. Obr. 24 a Obr. 25 ukazují počáteční polohu, ze které jsou tensegrity spuštěny, a rovnovážné polohy.

L [m]	m [kg]	k [$N \cdot m^{-1}$]	b [$N \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$]
1	1	2000	10

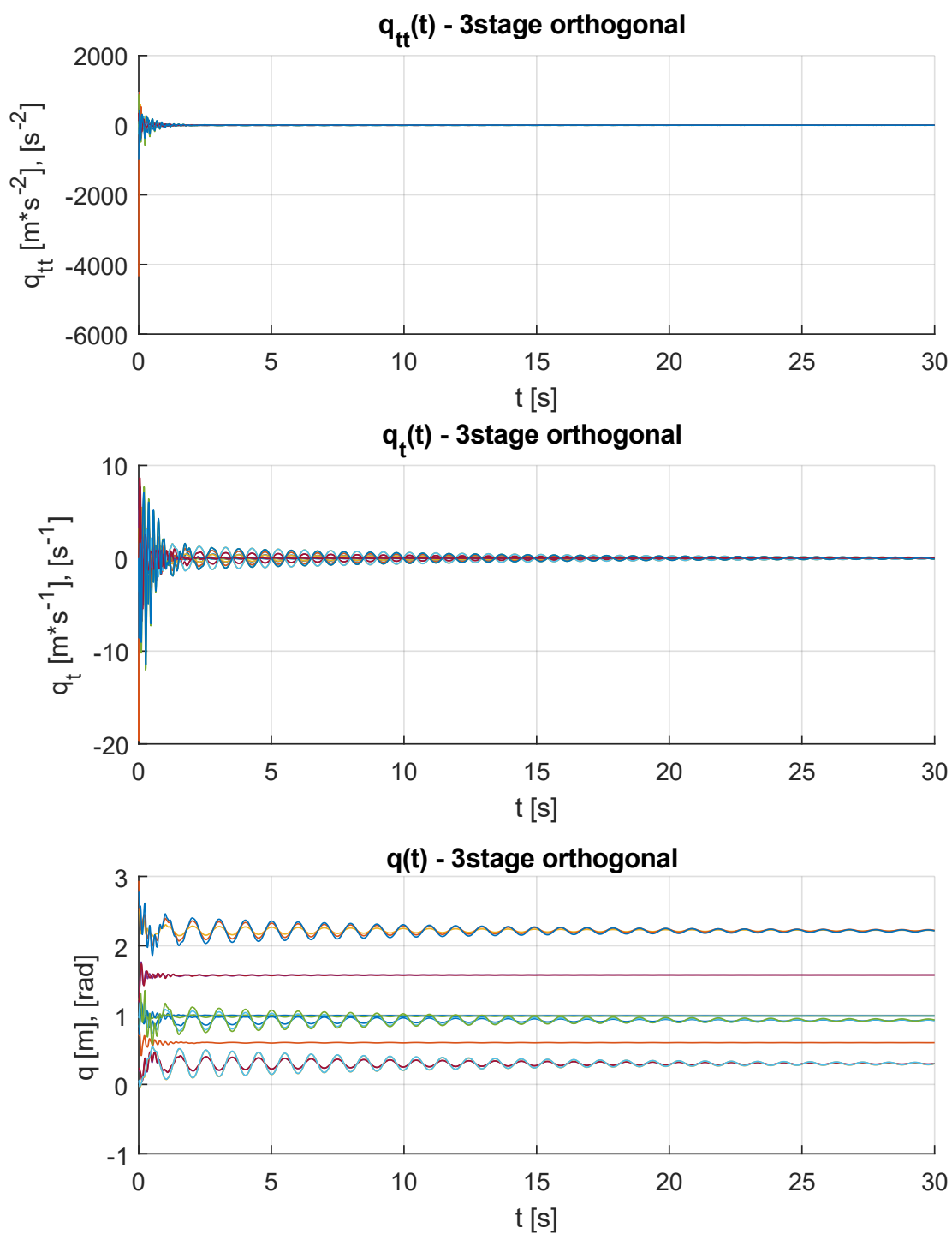
Tabulka 3 Parametry dynamického modelu



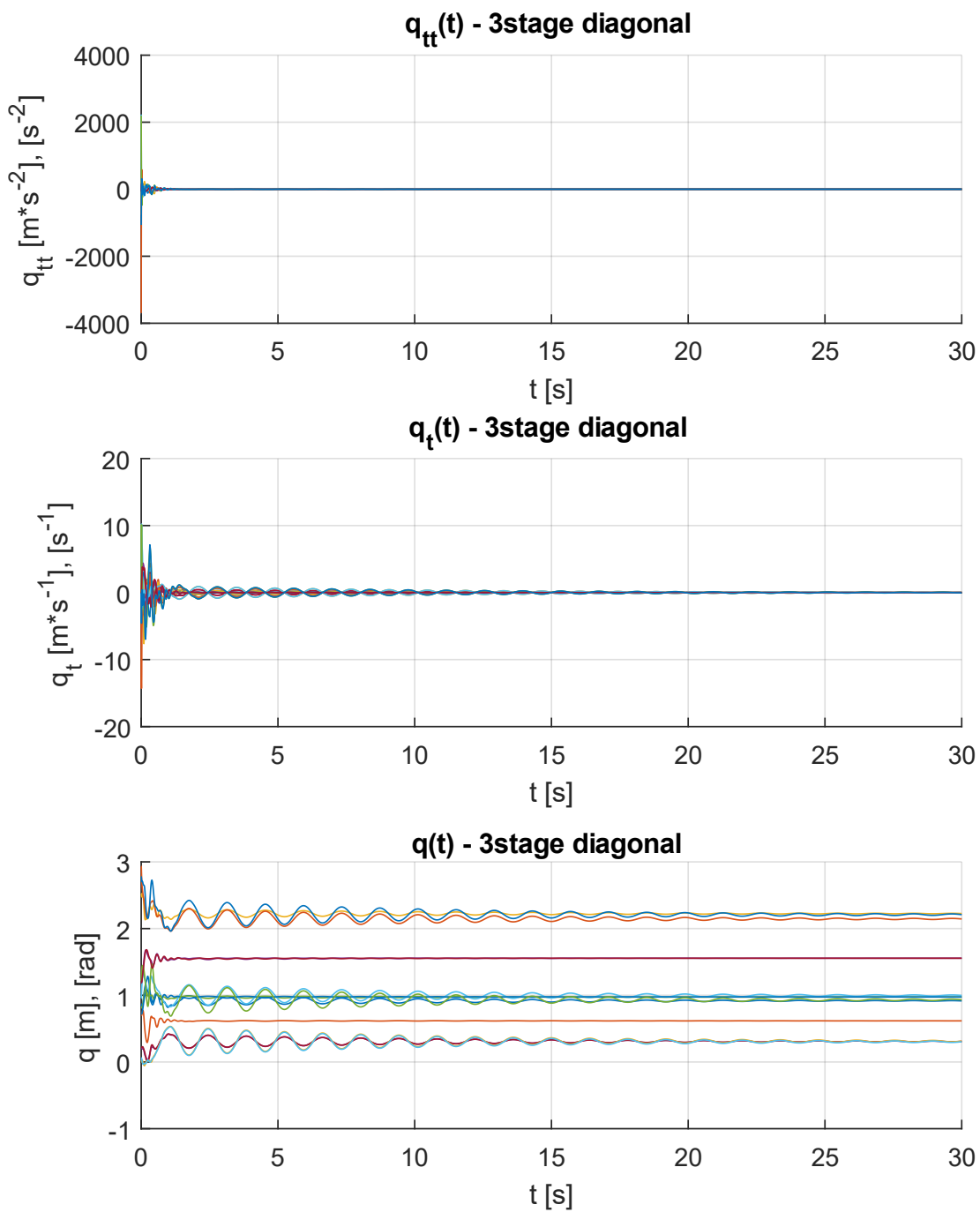
Obr. 24 Počáteční a rovnovážná poloha 3stage-ort



Obr. 25 Počáteční a rovnovážná poloha 3stage-diag



Obr. 26 Průběh zrychlení, rychlostí a poloh pro 3stage-ort



Obr. 27 Průběh zrychlení, rychlostí a poloh pro 3stage-diag

Na Obr. 26 a Obr. 27 je ukázáno, jak se chovají obě tensegrity při vypuštění z počáteční polohy. Dále je na grafech vidět, že oba modely se ustálí okolo rovnovážné polohy. Vychýlení tensegrity do počáteční polohy p lze považovat za zvýšení potenciální energie. Bez vnějšího působení se tensegrita ustálí v rovnovážné poloze q , pro kterou potenciální energie nabývá lokálního minima. Energie, dodaná do systému vychýlením z rovnovážné polohy, se disipuje tlumením.

Je nutné dodat, že určení volných délek z rovnice (102) nutně nezaručuje požadovaný tvar tensegrity. To je vidět na srovnání Obr. 23 s rovnovážnou polohou na Obr. 25.

6.3. Shrnutí

V této kapitole byl prezentován teoretický základ určující kritéria pro form-finding algoritmus. Podle zdroje [35] byl použit přístup hledání řešení pomocí genetického algoritmu. Výsledné silové hustoty byly převedeny na volné délky lan pro konkrétní geometrii tensegrit. Dále bylo na modelech ukázáno, že nalezené předpětí má stabilizující účinek.

7. Řízení tvaru tensegrity

Tato kapitola se zabývá řízením tvaru aktivní tensegrity. První část kapitoli řeší generování trajektorie tensegrity. Tato trajektorie je dále použita v druhé části, která se zabývá samotnou metodou řízení tvaru tensegrity.

7.1. Generování trajektorie

Nejprve je uvažován případ pro systém s jedním stupněm volnosti, který je popsán souřadnicí q . Stav systému je popsán dvojicí (q, \dot{q}) . Pro předepsání pohybu z počátečního stavu (q_0, \dot{q}_0) do konečného stavu (q_f, \dot{q}_f) je nutné, aby zrychlení \ddot{q} bylo alespoň lineární funkcí času. To z důvodu aby systém mohl zrychlit z počátečního stavu do stavu konečného. To znamená, že poloha q musí být předepsána alespoň polynomem třetího řádu:

$$q(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 \quad (103)$$

Koeficienty a_i se určí ze soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot t_0 & 3 \cdot t_0^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot t_f & 3 \cdot t_f^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (104)$$

kde t_0 je počáteční čas a t_f je konečný čas pohybu. Pak lze rychlost a zrychlení vyjádřit jako:

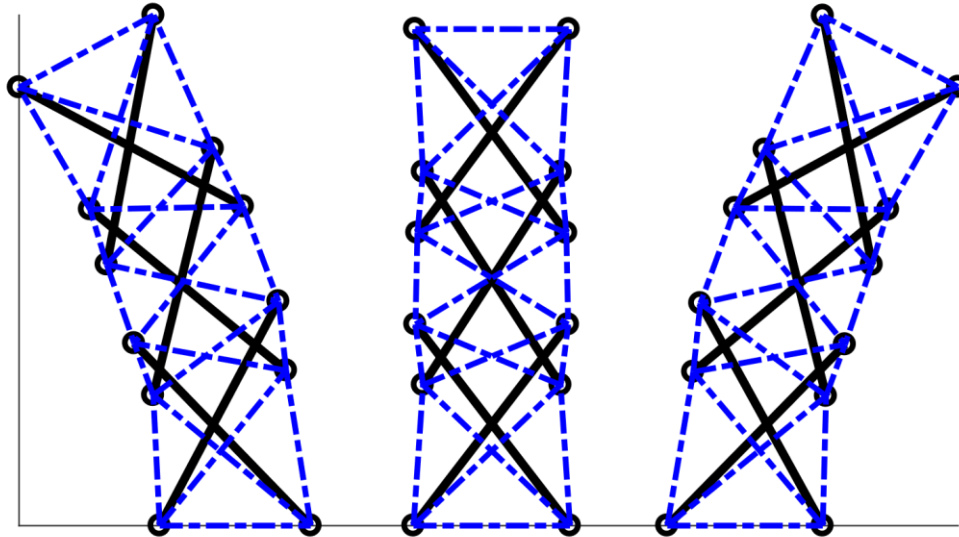
$$\dot{q}(t) = a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot t + a_3 \cdot 6 \cdot t^2 \quad (105)$$

$$\ddot{q}(t) = a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 6 \cdot t \quad (106)$$

Pro specifikování dodatečných poloh mezi počátečním a konečným stavem stačí zvýšit řád polynomu. Například pro pohyb přes polohu q_A v čase t_A :

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 \\ 0 & 1 & 2 \cdot t_0 & 3 \cdot t_0^2 & 4 \cdot t_0^3 \\ 1 & t_A & t_A^2 & t_A^3 & t_A^4 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 \\ 0 & 1 & 2 \cdot t_f & 3 \cdot t_f^2 & 4 \cdot t_f^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_A \\ q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (107)$$

Pro systém s více stupni volnosti lze rovnice (104) a (107) použít na každou dílčí souřadnici pro získání trajektorií, které popisují pohyb systému. Pro tensegritu 3stage-diag jsou uvažovány polohy na Obr. 28, podle kterých jsou vygenerovány trajektorie.



Obr. 28 Polohy q_0 , q_A , q_f pro tensegritu 3stage-diag

7.2. Řízení vypočtenými momenty (computed torque control)

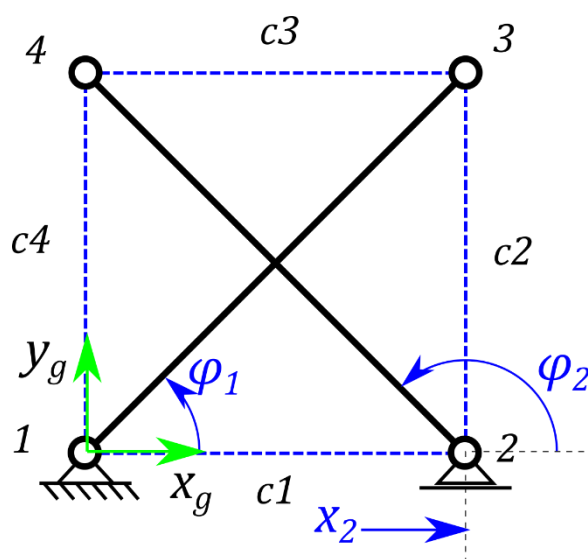
Pro řízení tvaru tensegrity je zvolena metoda *computed torque control*, která je vhodná pro řízení nelineárních systémů [36]. Dynamika systému je popsána rovnicí:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (108)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{N} je vektor nelineárních a setrvačných členů, \mathbf{A} je matice koeficientů, která popisuje rozmístění sil předepnutých lan, $\boldsymbol{\tau}$ je představuje vektor akčních sil a $\boldsymbol{\tau}_d$ je rušení.

7.2.1. Sestavení matice $A(q)$

Sestavení matice $A(q)$ je ukázáno na Snelsonově X tensegritě (Obr. 29). Snelsonova X tensegrita se znázorněnými souřadnicemi (Obr. 29).



Obr. 29 Snelsonova X tensegrita se znázorněnými souřadnicemi

Pro dynamiku tensegrity vyjádřenou ve tvaru:

$$\mathbf{M}(q) \cdot \ddot{q} = \mathbf{P}(q, \dot{q}) \quad (109)$$

je pravá strana $\mathbf{P}(q, \dot{q})$ vektor obsahující silové účinky lan a navíc i účinky tíhové a nelineární členy. Tíhové a silové účinky jsou zahrnuty do výše zmíněného vektoru $\mathbf{N}(q, \dot{q})$. Potom ve vektoru $\mathbf{P}(q, \dot{q})$ zbydou pouze silové účinky lan vyjádřené v uzlových silách:

$$\mathbf{P}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -F_{3x} \cdot {}^1L \cdot \sin(\varphi_1) + F_{3y} \cdot {}^1L \cdot \cos(\varphi_1) \\ F_{2x} + F_{4x} \\ -F_{4x} \cdot {}^2L \cdot \sin(\varphi_2) + F_{4y} \cdot {}^2L \cdot \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (110)$$

Jednotlivé úzlové síly jsou vyjádřeny jako součet sil připojených na daný uzel. Pro konkrétní tensegritu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{21k} + \mathbf{F}_{21b} + \mathbf{F}_{23k} + \mathbf{F}_{23b} \\ \mathbf{F}_{32k} + \mathbf{F}_{32b} + \mathbf{F}_{34k} + \mathbf{F}_{34b} \\ \mathbf{F}_{41k} + \mathbf{F}_{41b} + \mathbf{F}_{43k} + \mathbf{F}_{43b} \end{bmatrix} \quad (111)$$

Síly dané tlumením lan jsou zahrnuty do vektoru $\mathbf{N}(q, \dot{q})$. Tím pádem vektor \mathbf{P} obsahuje pouze síly vzniklé pružením lan a je závislý pouze na souřadnicích q , tedy $\mathbf{P}(q)$.

Vektorový charakter silových účinků je dán jednotkovými směrovými vektory, viz. rovnice (32). Pak lze rovnici (111) přepsat:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{21k} \cdot \mathbf{s}_{21} + F_{23k} \cdot \mathbf{s}_{23} \\ F_{32k} \cdot \mathbf{s}_{32} + F_{34k} \cdot \mathbf{s}_{34} \\ F_{41k} \cdot \mathbf{s}_{41} + F_{43k} \cdot \mathbf{s}_{43} \end{bmatrix} \quad (112)$$

kde \mathbf{s}_{21} je jednotkový vektor mířící z uzlu 2 do uzlu 1 a F_{21k} je skalár vyjadřující hodnotu tahu v předepnutém laně mezi uzly 1 a 2, pro ostatní členy podobně. Dosazením do rovnice (110) je získán vektor, který vyjadřuje zatížení přímo pomocí sil působících v předepnutých lanech:

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -(F_{32k} \cdot s_{32x} + F_{34k} \cdot s_{34x}) \cdot {}^1L \cdot \sin(\varphi_1) \\ +(F_{32k} \cdot s_{32y} + F_{34k} \cdot s_{34y}) \cdot {}^1L \cdot \cos(\varphi_1) \\ F_{21k} \cdot s_{21x} + F_{23k} \cdot s_{23x} \\ +F_{41k} \cdot s_{41x} + F_{43k} \cdot s_{43x} \\ -(F_{41k} \cdot s_{41x} + F_{43k} \cdot s_{43x}) \cdot {}^2L \cdot \sin(\varphi_2) \\ +(F_{41k} \cdot s_{41y} + F_{43k} \cdot s_{43y}) \cdot {}^2L \cdot \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (113)$$

Dále je využito symetrie mezi skaláry vyjadřující tahové síly:

$$F_{21k} = k_1 \cdot (L_{21} - L_{01}) = k_1 \cdot (L_{12} - L_{01}) = F_{12k} = \tau_1 \quad (114)$$

kde τ_1 vyjadřuje tah v laně c_1 . Podobně jsou určeny další skaláry τ_i . Využitím skalárů $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ lze vektor $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ zapsat jako:

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ s_{21x} & s_{23x} & s_{43x} & s_{41x} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (115)$$

Rozepsán je pouze druhý řádek, který je kompaktní. Ostatní řádky jsou zapsány pouze obecně, kvůli délce jednotlivých členů. Pro rozsáhlejší struktury byl v MATLABu vytvořen skript ke generování této matice pouze na základě topologie struktury.

7.2.2. Návrh řízení

Pro návrh řízení je zavedena regulační odchylka:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \quad (116)$$

kde index \mathbf{q}_d značí žádanou polohu. Dvojitou derivací regulační odchylky vzhledem k času je a dosazením z rovnice (108) popisující dynamiku systému je získán vztah:

$$\ddot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{M}^{-1} \cdot (-\mathbf{N} - \boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (117)$$

Dále je definováno řízení:

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{N} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (118)$$

a rušení:

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_d \quad (119)$$

Jestliže je nalezeno takové řízení \mathbf{u} , které zajistí $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$, tak lze vyjádřit:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \cdot (\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{u}) + \mathbf{N} \quad (120)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ jsou hledané akční síly. Vzhledem k tomu, že matice \mathbf{A} není obecně čtvercová, nelze získat samotné $\boldsymbol{\tau}$ pouhou inverzí. V další sekci bude popsán postup získání $\boldsymbol{\tau}$.

Z rovnic (117) až (119) lze pro stav $(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$ zapsat dynamiku regulační odchylky:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{w} \quad (121)$$

Jedním ze způsobů jak stabilizovat tento systém je použití propocionálně derivační zpětnovazební regulátor (PD regulátor). Pro ten je řízení zapsáno ve tvaru:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_d \cdot \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{e} \quad (122)$$

kde \mathbf{K}_d je diagonální matice derivačních zesílení a \mathbf{K}_p je diagonální matice proporcionálních zesílení. Dosazením do rovnice (121) je získán upravený popis dynamiky regulační odchylky:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_p & -\mathbf{K}_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{w} \quad (123)$$

pokud jsou všechny zesílení K_{di} a K_{pi} kladná a pokud je rušení \mathbf{w} omezené, pak je systém asymptoticky stabilní [36]. Takže akční síly jsou určeny z rovnice:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \cdot (\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K}_d \cdot \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{N} \quad (124)$$

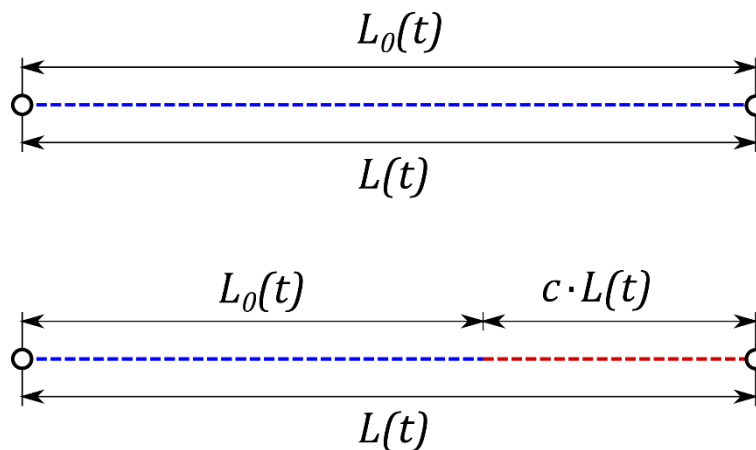
7.2.3. Určení akčních sil τ

Rovnice (124) popisuje soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{b}$. V případě zkoumané tensegrity se jedná o neurčitou soustavu rovnic, protože na 15 rovnic připadá 22 neznámých τ_i . Pokud jsou všechna předepnutá lana považována za aktivní, je tato neurčitost soustavy výhodou, protože lze na řešení soustavy klást různá omezení.

Neznámé τ_i jsou určeny pomocí funkce *lsqlin* z optimalizačního toolboxu MATLABu, která řeší úlohu lineárních nejmenších čtverců s okrajovými podmínkami. Ty jsou pro akční síly definovány tak, aby žádná lana nebyla prověšená, tedy:

$$\begin{aligned} lb &= \mathbf{0} \\ ub &= c \cdot k \cdot \mathbf{L}(t) \end{aligned} \quad (125)$$

Kde lb jsou dolní meze, ub jsou horní meze, c je koeficient z intervalu $(0; 1)$, k je tuhost lan a $\mathbf{L}(t)$ je vektor okamžitých délek jednotlivých lan, respektive vzdálenost uzlů propojených lany.



Obr. 30 Diagram znázorňující dolní a horní mez pro určení τ

Obr. 30 zobrazuje v horní části diagramu dolní mez, kdy volná délka lana je shodná se vzdáleností propojených uzlů. Potom lano negeneruje žádnou sílu. Spodní část diagramu zobrazuje horní mez, kdy je dosaženo okamžité maximální deformace lana $c \cdot L(t)$. Potom lano generuje okamžitou maximální sílu $c \cdot k \cdot L(t)$. Pro zaručení splnění okrajových podmínek je dále ještě definována nerovnicová vazbová podmínka:

$$-\mathbf{I}_{[22 \times 22]} \cdot \boldsymbol{\tau}_{[22 \times 1]} \leq \mathbf{0}_{[22 \times 1]} \rightarrow \mathbf{A}_{cons} \cdot \boldsymbol{\tau} \leq \mathbf{b}_{cons} \quad (126)$$

která zaručuje pouze nezáporné výsledky, tedy pouze tahem namáhané lana. Výsledný příkaz je v MATLABu potom:

`Tau = lsqlin(A, b, A_cons, b_cons, [], [], lb, ub).`

Z řídicích akčních sil τ jsou určeny řídicí vstupy L_0 , tedy volné délky lan, respektive pružin. Ty jsou určeny vztahem:

$$L_0(t) = L(t) - \frac{\tau(t)}{k} \quad (127)$$

Pro známé řídicí vstupy L_0 jsou uvažovány aktuátory v podobě navijáků, které jsou umístěné na koncích tyčí. Tyto navijáky upravují volné délky napínaných lan tak, aby lana generovaly požadované akční síly τ .

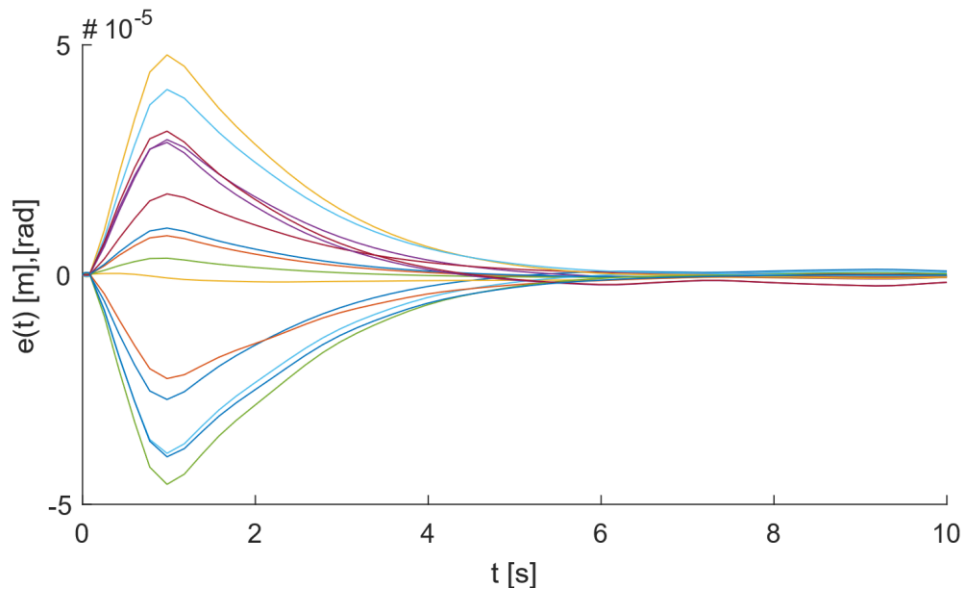
7.2.4. Aplikace řízení na tensegritu

Postup uvedený v předchozích sekcích byl aplikován na tensegritu 3stage-diag. Ta má vykonat pohyb daný polahami $q_0(0)$, $q_A(5)$ a $q_f(10)$, které jsou uvedené v sekci 7.1 na Obr. 28, a nulovými počátečními a koncovými rychlostmi \dot{q}_0 a \dot{q}_f . Model řízení byl sestaven v Simulinku a to ve dvou variantách, kde první varianta neuvažuje rušení a druhá ano. Rušení je do modelu zavedeno pomocí bloku *Band-Limited White Noise*, který generuje náhodný rušivý signál. Ten je přičten k akčním silám τ . Toto rušení může v modelu způsobit, že se v $\tau + \tau_d$ vyskytne záporná hodnota. Proto jsou v modelu s rušením upraveny meze pro výpočet akčních sil τ . Parametry tensegrity jsou stejné jako v Tabulka 3.

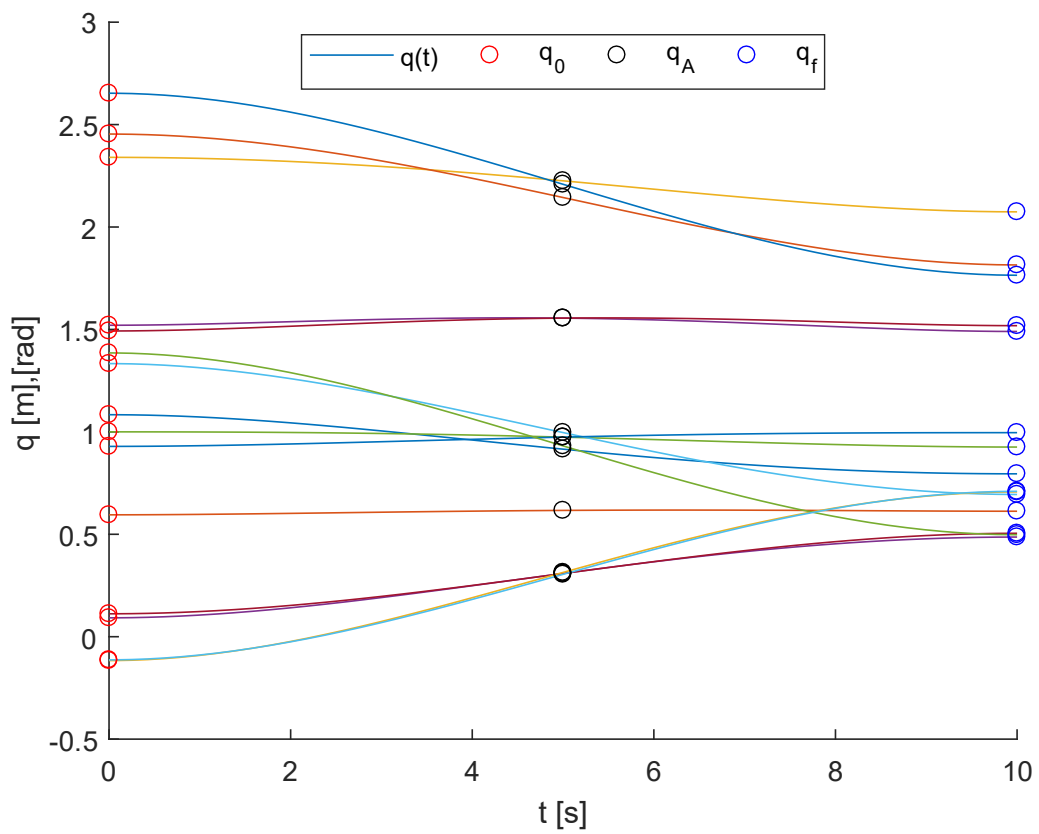
<i>model bez rušení</i>	K_p	K_d	lb	ub
	1	2	$\mathbf{0}_{[22 \times 1]}$	$0.4 \cdot k \cdot L(t)$
<i>model s rušením</i>	100	200	$\mathbf{20} \cdot \mathbf{I}_{[22 \times 1]}$	$0.4 \cdot k \cdot L(t)$

Tabulka 4 Parametry modelů řízení

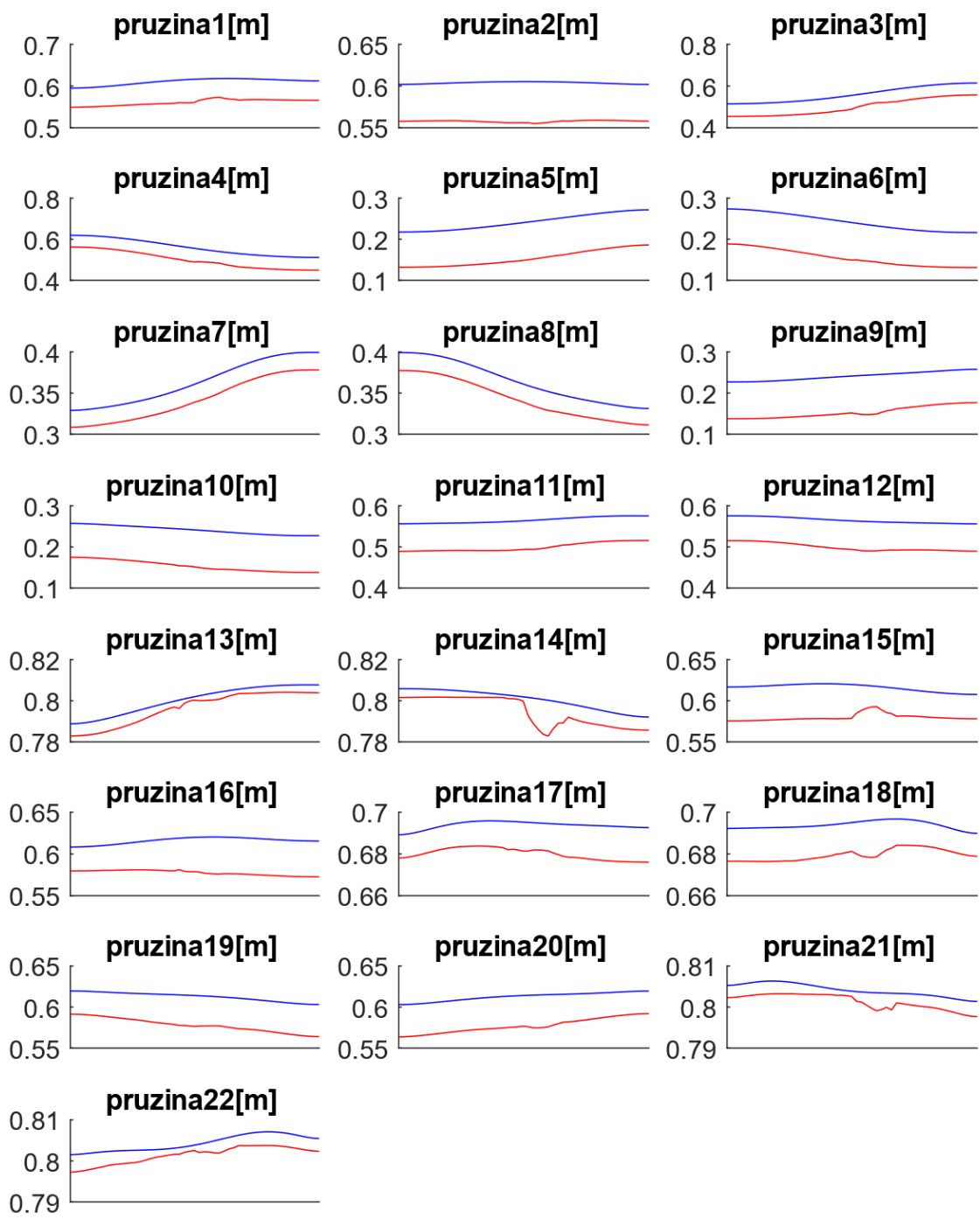
K následujícím obrázkům, které obsahují více grafů najednou, je nutno dodat, že je pro zvýšenou čitelnost grafů vynecháno pojmenování os a dále je vynecháno i číslování vodorovné osy. Všechny tyto grafy mají shodnou vodorovnou osu, která specifikuje čas $t[s]$ v intervalu $\langle 0, 10 \rangle$. Jednotky veličin jsou uvedeny v jednotlivých názvech grafů v hranatých závorkách.



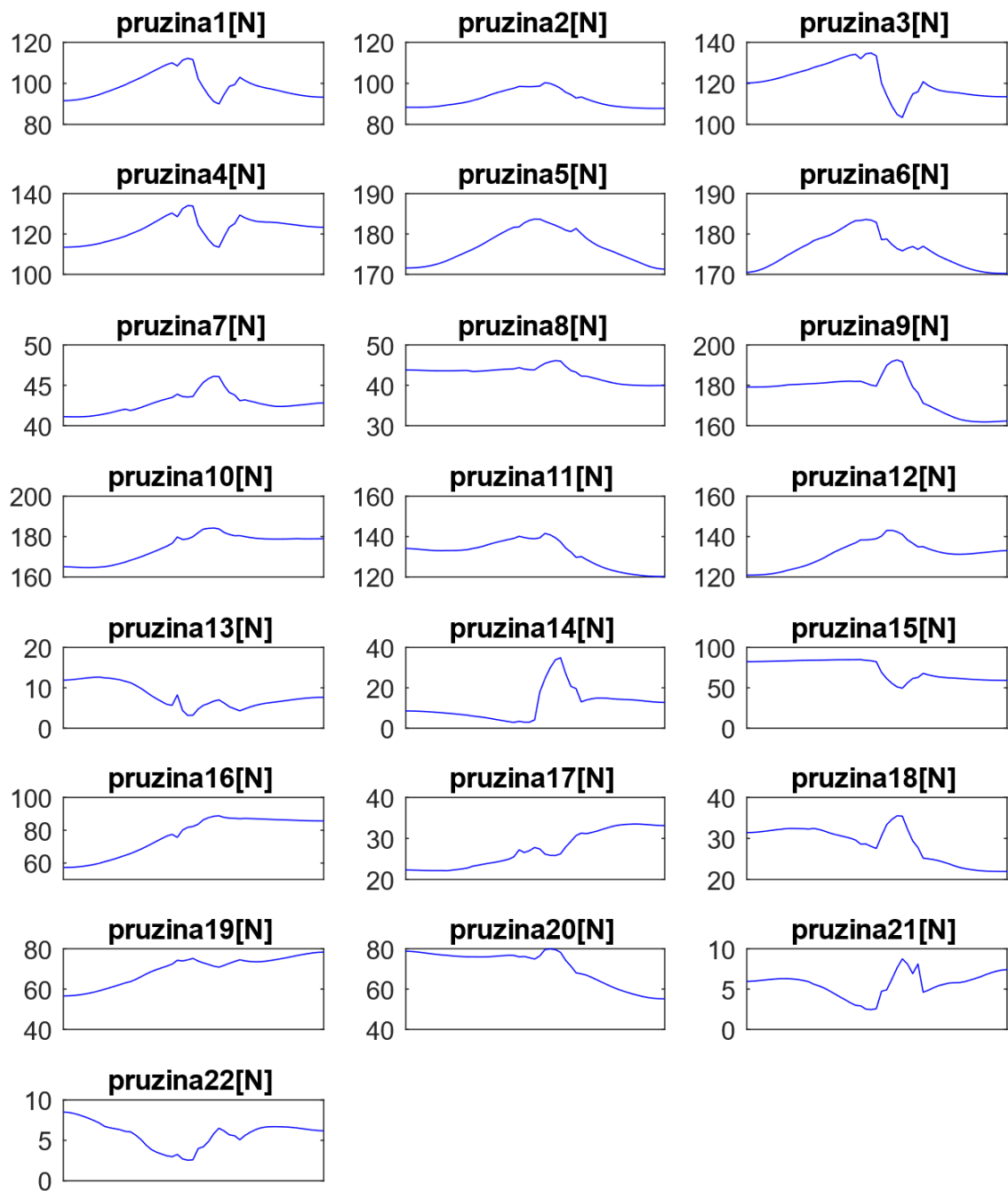
Obr. 31 Vývoj regulačních odchylek bez rušení



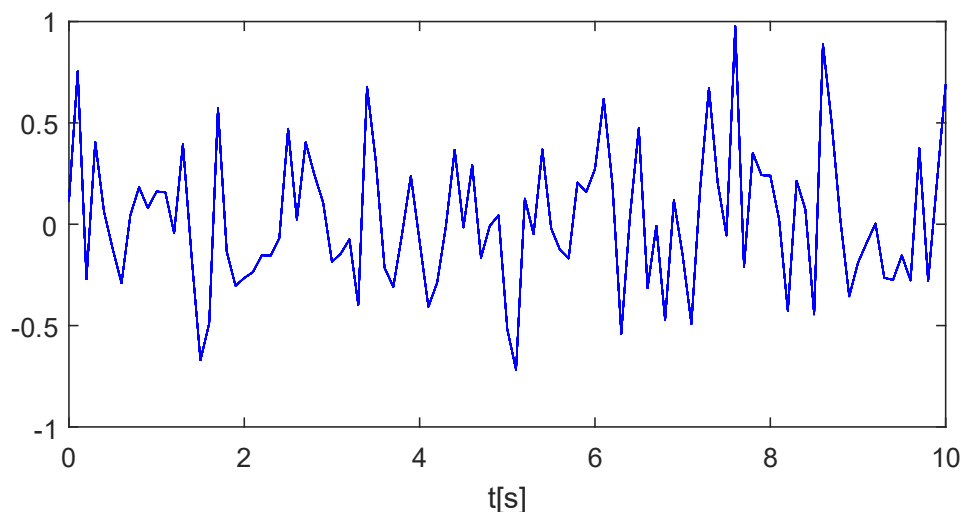
Obr. 32 Vývoje souřadnic $q(t)$ bez rušení



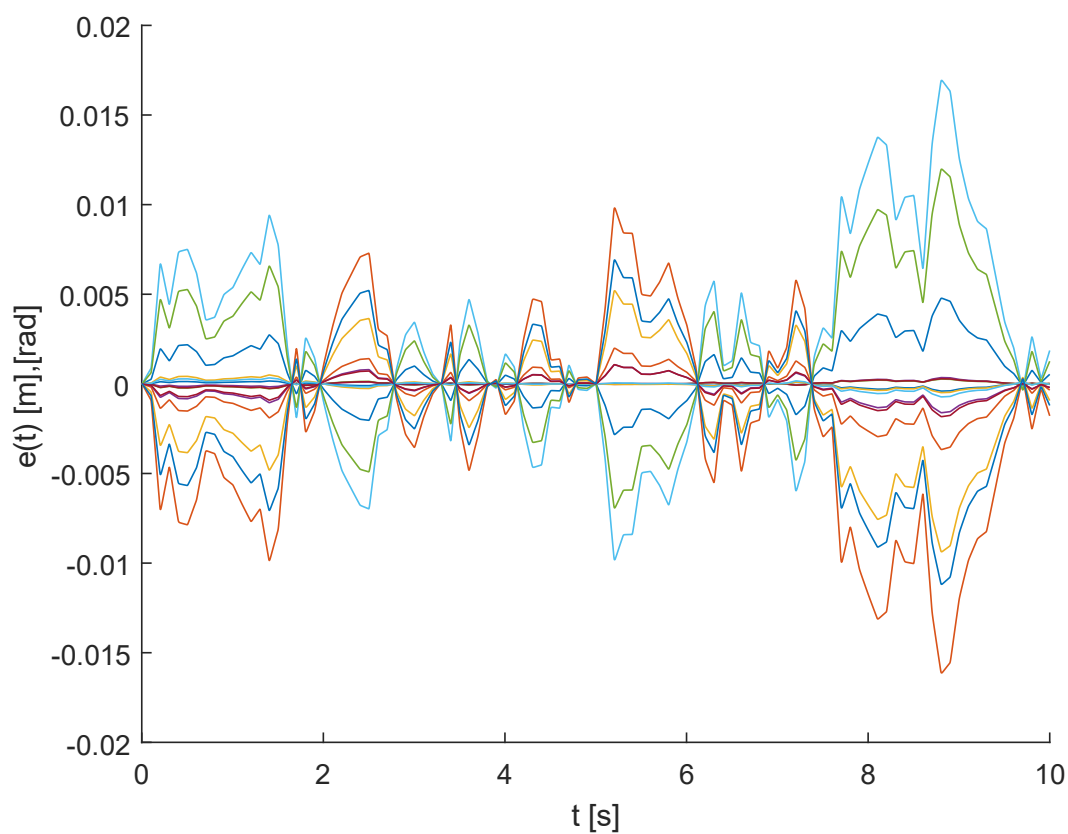
Obr. 33 Délky lan (modře) a volné délky pružin (červeně) v modelu bez rušení



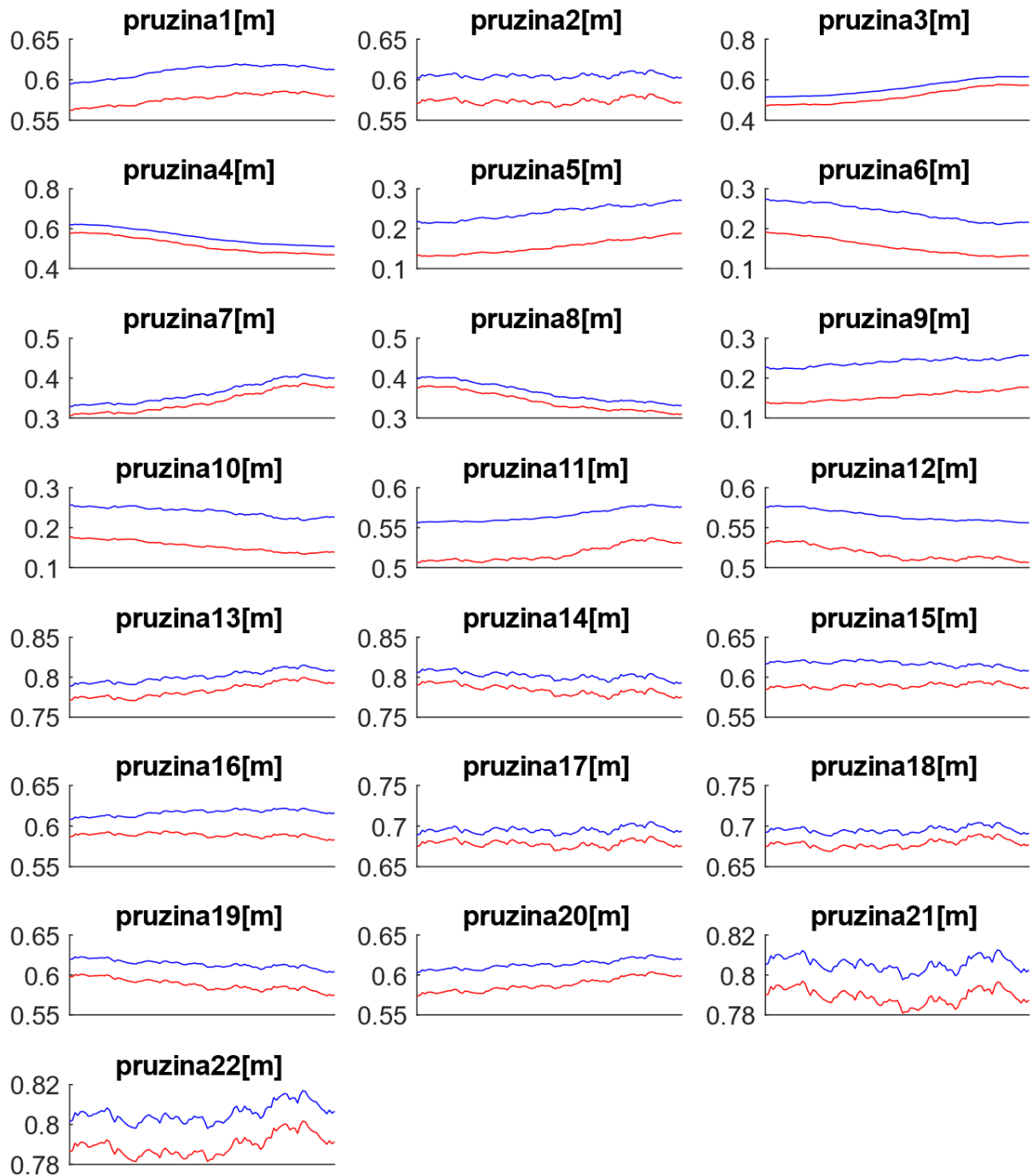
Obr. 34 Akční síly v modelu bez rušení



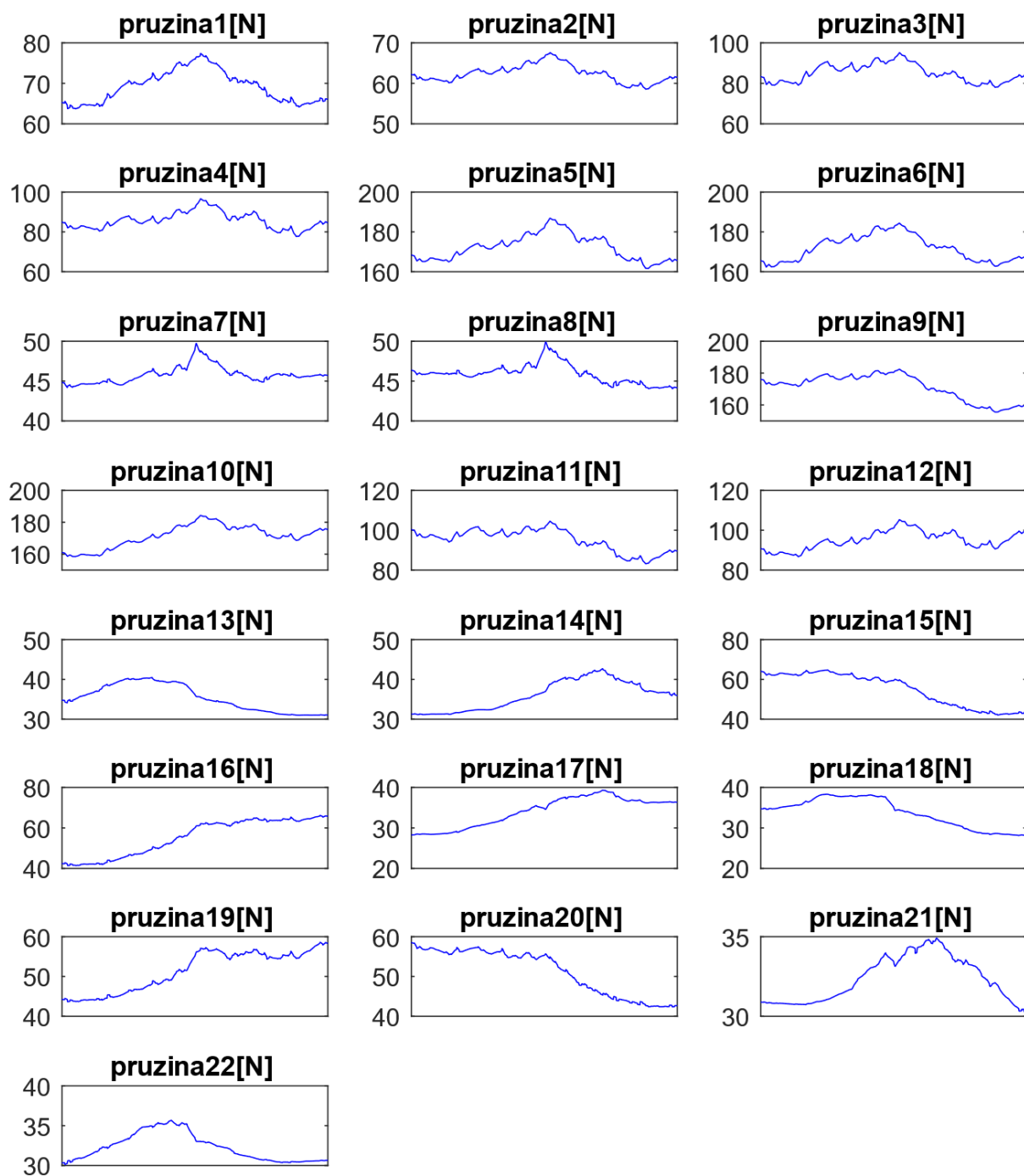
Obr. 35 Rušivý signál přičtený k řídicím silám



Obr. 36 Průběh regulační odchylky s rušením



Obr. 37 Délky lan (modře) a volné délky pružin (červeně) v modelu bez rušení



Obr. 38 Akční síly v modelu s rušením

Na Obr. 31 Vývoj regulačních odchylek bez rušení Obr. 31 jsou ukázány průběhy regulačních odchylek. Ty v modelu bez rušení konvergují k nulové hodnotě, to je ve shodě s tvrzením, že dynamický systém regulační odchylky, uvedený v rovnici (123), je asymptoticky stabilní pro kladné K_{di} a K_{pi} . Průběh souřadnic $\mathbf{q}(t)$ je zobrazen na Obr. 32. Dále jsou na tomto grafu vykreslené polohy a průchod polohami $\mathbf{q}_0(0)$, $\mathbf{q}_A(5)$ a $\mathbf{q}_f(10)$, které definují trajektorii pohybu. Na Obr. 33 jsou zobrazeny jednotlivé délky lan a volné délky pružin, tedy řídicí vstupy $\mathbf{L}_0(t)$. Je vidět, že volné délky během pohybu nenabývají vyšších hodnot než délky lan, takže všechna lana jsou předepnutá a pružiny generují pouze tahové síly. To je dále ukázáno na Obr. 34.

Pro model s rušením (Obr. 35) jsou podle očekávání větší regulační odchylky, které jsou na Obr. 36. Jejich hodnoty jsou řádově 10^{-2} [m], resp. [rad], na rozdíl od hodnot regulačních odchylek pro model bez rušení, které jsou řádově 10^{-5} [m], respektive [rad]. Na Obr. 37 a Obr. 38 je opět vidět, že i přes přítomné rušení, jsou akční síly kladné, takže všechna lana jsou předepnutá. Navíc konkrétně na Obr. 38 je vidět efekt upravení mezí lb , jelikož žádná síla neklesne pod hraniční hodnotu 20 [N].

7.3. Shrnutí

V této kapitole bylo odvozeno plánování pohybu a řízení tensegrity. Sekce 7.1 se zabývá generováním trajektorie na základě známých stavů na počátku, v průběhu a na konci děje. V sekci 7.2 je aplikována metoda *computed torque control* na tensegritu. Je zde ukázáno, že tato metoda umožňuje zadávat různá omezení na akční zásahy tak, aby bylo například splněno předepnutí lan.

Nutnost specifikovat pohyb každé tyče tensegrity může být považováno za nevýhodu, nicméně tento přístup umožňuje řešit případné kolize. Navíc v další kapitole bude tato skutečnost využita k energeticky efektivnímu řízení.

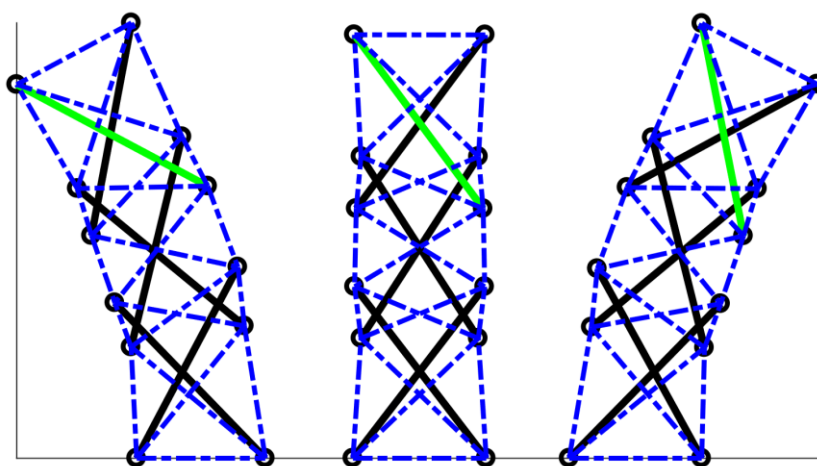
8. Vlastní pohyb (Eigenmotion)

V předchozí kapitole byl pohyb, který má tensegrita vykonat, generován bez ohledu na vlastnosti tensegrity. Tím pádem může být vykonávaný pohyb nepřirozený tensegritní struktuře a řízení v tom případě „zápasí“ se strukturou, aby přemohlo její pasivní chování. Konceptem, jehož aplikace a zobecnění na tensegrity může být velmi zajímavá, je v kapitole 3.4.1 zmíněný vlastní pohyb (eigenmotion). Charakteristikou vlastního pohybu je to, že celková mechanická energie (potenciální+kinetická) bez uvažování pasivních odporů a vnějších sil je během pohybu konstantní. Řízení při sledování vlastního pohybu tak pouze kompenzuje energetické ztráty způsobené disipativními jevy a vnější zátěží. Specifická zajímavost tensegrity pro tento koncept je dána tím, že je zde k dispozici potenciálně velký počet akčních zásahů a tuhostních a hmotnostních parametrů.

Optimalizací parametrů struktury lze upravit vlastní pohyb tak, aby vyhovoval zadaným požadavkům, které ovšem musí zohledňovat vlastnosti struktury. Aplikace této optimalizace na tensegritu 3stage-diag je dále detailně rozvedena v této kapitole.

8.1. Optimalizace

Výchozím bodem optimalizace je pohyb tyče b_6 , který prochází zadanými polohami (Obr. 39) v daných časech. Tyto polohy vymezují kývavý pohyb tensegrity. Poloha tyče je popsána vektorem $\mathbf{q}_{b_6d}(t) = (x_{s_6}, y_{s_6}, \varphi_6)^T$.



Obr. 39 Žádané polohy tyče b_6 pro optimalizaci vlastního pohybu

Pro optimalizaci vlastního pohybu jsou uvažovány čtyři parametry ovlivňující pohyb tensegrity. Těmi jsou tuhost lan k , hmotnost tyčí v prvním patře $m1$ a obdobně hmotnosti tyčí v dalších patrech, tedy $m2$ a $m3$. Výchozí cílová funkce je zavedena ve formě:

$$CF = \sum_{i=1}^2 \| \mathbf{q}_{b6d}(t_i) - \mathbf{q}_{b6}(t_i) \| \quad (128)$$

kde $\mathbf{q}_{b6}(t)$ je výstup z dynamického modelu, který je spouštěn při každém vyhodnocení CF . Důležité je zmínit, že v modelu při optimalizaci vlastního pohybu nejsou uvažovány disipativní jevy. V CF není specifikována poloha $\mathbf{q}_{b6d}(t_0)$, protože z této polohy je spouštěn dynamický model a proto je vždy zaručena požadovaná poloha v čase t_0 . Tato cílová funkce je minimalizována pomocí funkce $fmincon$. Postupně je CF v této kapitole rozšiřována o další členy.

Pro zaručení stability výsledku optimalizace, je potřeba do CF zahrnout penalizační člen pro vyloučení nestabilních konfigurací. Stabilita tensegrity je posouzena na základě minima potenciální energie. Před každým vyhodnocením CF je nalezeno minimum potenciální energie E_{pmin} pomocí funkce $fminsearch$ s počáteční podmínkou \mathbf{q}_{eq} , která vyjadřuje rovnovážnou polohu tensegrity pro výchozí parametry $k, m1, m2, m3$ (Obr. 25). Potenciální energie je vyjádřena jako:

$$E_p = \frac{1}{2} \Delta^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta + \sum_{i=1}^6 m_i \cdot g \cdot y_{Si} \quad (129)$$

kde Δ je vektor deformace předepnutých lan, \mathbf{K} je diagonální matice tuhosti, m_i je hmotnost tyče a y_{Si} vertikální poloha těžiště tyče. Pokud během simulace klesne potenciální energie pod hodnotu E_{pmin} , tak není splněna podmínka prestress stability, viz. kapitola 6. Penalizační člen je definován jako:

$$p = \begin{cases} 0 & \text{pro } \min(E_p(t)) \geq E_{pmin} \\ 10^3 & \text{pro } \min(E_p(t)) \leq E_{pmin} \end{cases} \quad (130)$$

kde $E_p(t)$ je průběh potenciální energie během simulace.

Optimalizace s CF rozšířenou o penalizační člen p dává výsledky, které splňují průchod žádanými polohami. Nicméně se během optimalizace téměř nemění parametr

tuhosti k . Proto je do CF přidán člen $1/k$, který vyjadřuje poddajnost. S tímto členem dochází k maximalizaci tuhosti. Tento člen je dále přenásoben hodnotou 10^3 pro zvýšení důrazu na maximalizaci tuhosti.

Posledním členem přidaným do CF je standardní odchylka parametrů $m1$, $m2$ a $m3$:

$$S = \sqrt{\frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^3 (m_i - \bar{m})^2} \quad (131)$$

Přidáním tohoto členu dojde k lepšímu rozložení hmotnosti ve struktuře oproti výsledkům získaným bez tohoto členu. Výsledná cílová funkce je tedy:

$$CF = \sum_{i=1}^2 \| \mathbf{q}_{b6d}(t_i) - \mathbf{q}_{b6}(t_i) \| + p + \frac{10^3}{k} + S \quad (132)$$

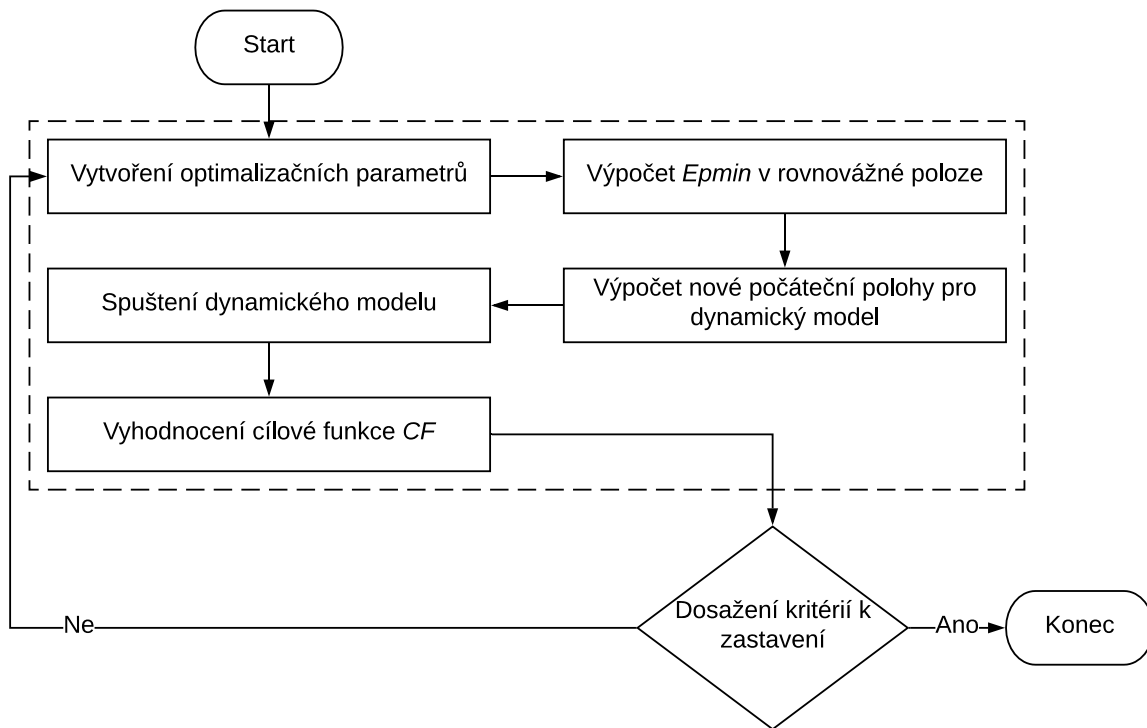
Dále je při každém vyhodnocení CF nutné upravit počáteční polohu \mathbf{q}_0 , ze které je spouštěna tensegrita v dynamickém modelu. A to proto, že se změnou parametrů tuhosti a hmotnosti dojde ke změně potenciální energie tensegrity v poloze \mathbf{q}_0 . Tato změna energie potom způsobí to, že tensegrita v dynamickém modelu začne vibrovat. Tento problém je vyřešen tím, že se pro žádanou polohu tyče $\mathbf{q}_{b6d}(t_0)$ najde zbytek souřadnic \mathbf{q}_{red} pro tyče $b1$ až $b5$, pro které je potenciální energie minimální. K tomu je opět využita funkce $fminsearch$. Výsledkem je nová počáteční poloha:

$$\hat{\mathbf{q}}_0 = (\mathbf{q}_{red}, \mathbf{q}_{b6d}(t_0))^T \quad (133)$$

Celková optimalizace (Obr. 40) je řešena pomocí funkce $fmincon$, pro kterou jsou okrajové podmínky a počáteční hodnoty uvedeny v Tabulka 5.

<i>parametr</i>	<i>poč.hodnoty</i>	<i>dolní mez</i>	<i>horní mez</i>
k	500	400	2000
$m1$	1	0	100
$m2$	1	0	100
$m3$	1	0	100

Tabulka 5 Okrajové podmínky a počáteční hodnota pro $fmincon$



Obr. 40 Vývojový diagram optimalizační smyčky

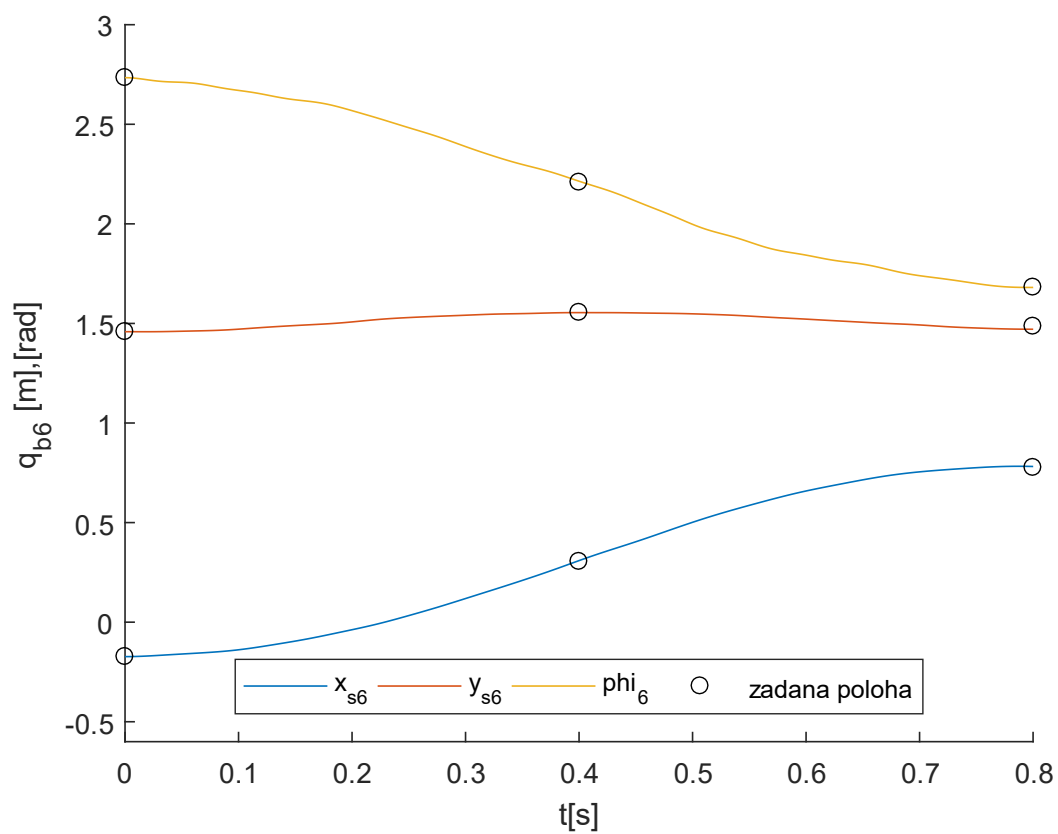
Tensegrita je optimalizována, aby procházela žádanými polohami v časech $t_1 = 0,4 \text{ s}$ a $t_2 = 0,8 \text{ s}$. Výsledky pro různé varianty cílové funkce jsou uvedeny v tabulce Tabulka 6. Pro výsledek získaný s variantou cílové funkce z rovnice (132) je přiložen graf na Obr. 41 zobrazující průběh polohy tyče b_6 . Celková mechanická energie:

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \Delta^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta + \sum_{i=1}^6 m_i \cdot g \cdot y_{Si} \quad (134)$$

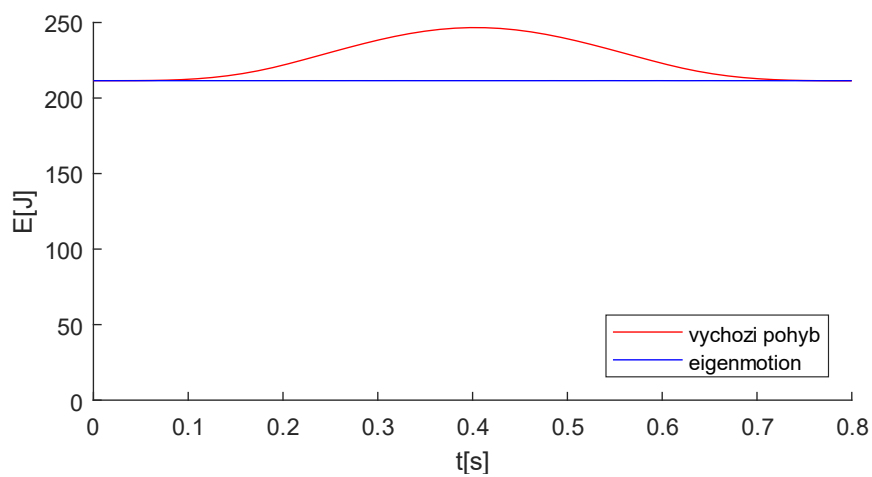
při vlastním pohybu a při výchozím pohybu odvozeném pomocí postupu uvedeném v kapitole 7.1 je porovnána na Obr. 42. Zde je vidět, že při výchozím pohybu se v systému generuje energie nepřirozenou deformací předepnutých lan.

varianta CF	k	m1	m2	m3
$CF(\mathbf{q}_{b6}(t_i), p)$	500,01	1,3207	0,6974	0,5209
$CF(\mathbf{q}_{b6}(t_i), p, k^{-1})$	1984,6	0,6939	2,2709	2,3305
$CF(\mathbf{q}_{b6}(t_i), p, k^{-1}, S)$	1794,6	2,0652	2,0652	2,0652

Tabulka 6 Výsledky optimalizace pro různé varianty CF



Obr. 41 Průběh polohy tyče b_6 a splnění požadovaného pohybu



Obr. 42 Porovnání průběhů celkové mechanické energie

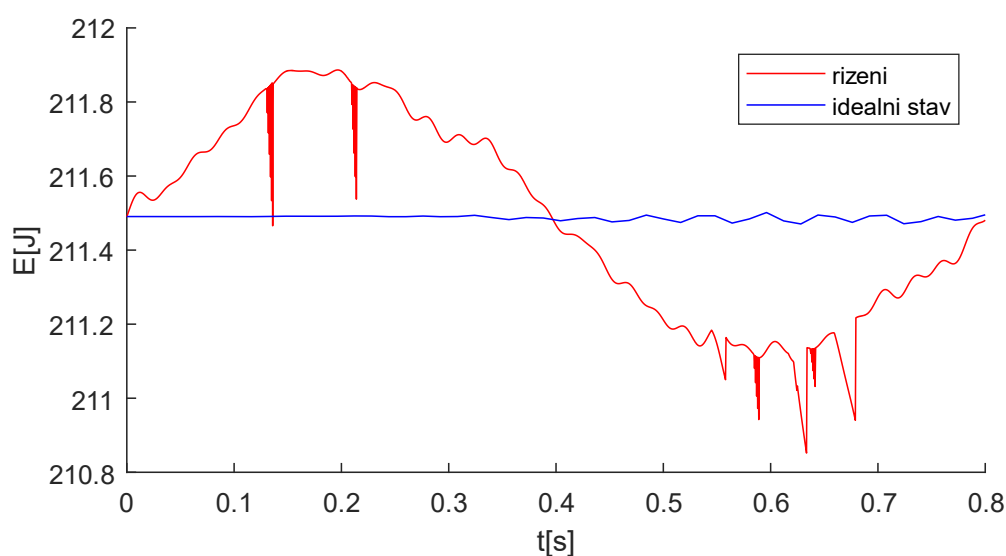
8.2. Využití pro řízení

Využití vlastního pohybu pro řízení tensegrity vede na energeticky efektivní řízení. Dynamický model je modifikován na tvar:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_a) \quad (135)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\tau}_p + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\tau}_a \quad (136)$$

kde $\boldsymbol{\tau}_p$ jsou pasivní síly předepnutí a $\boldsymbol{\tau}_a$ jsou akční síly, které vzniknou řízenou změnou volné délky předepnutých lan. Tato modifikace lépe popisuje pasivní chování tensegrity, podle kterého byl odvozen vlastní pohyb. Tím pádem akční síly $\boldsymbol{\tau}_a$ pouze kompenzují ztrátu energie vlivem disipativních jevů. Na Obr. 43 je porovnání celkové mechanické energie vlastního pohybu v případě ideálního stavu, kdy nepůsobí v systému disipativní jevy, a v případě řízení, kdy akční síly kompenzují energetické ztráty.



Obr. 43 Celková mechanická energie při řízení a při ideálním stavu

8.3. Shrnutí

V této kapitole byl rozveden koncept vlastního pohybu. Sekce 8.1 se zabývá optimalizací struktury pro nalezení požadovaného vlastního pohybu. Jsou zde uvedeny potřebné kroky, a jejich odůvodnění, k provedení samotné optimalizace. V sekci 8.2 je získaný vlastní pohyb použit k energeticky efektivnímu řízení.

9. Závěr

Obsahem práce je řešerše sériových a paralelních robotů, řešerše tensegrit, odvození dynamického modelu pro rovinné tensegrity, odvození řízení pro aktivní tensegrity a optimalizace tensegritních struktur.

V kapitole 5 byly uvedeny dva postupy pro sestavení dynamického modelu. Kapitola 6 se zabývala optimalizací tensegritní struktury z hlediska stability. Uvedený postup pak byl úspěšně aplikován na dvě tensegritní struktury. Kapitola 7 se zabývala řízením pohybu tensegrit. Zde byl ukázán postup k plánování pohybu tensegrity a následně řízení, které pohybuje tensegritou požadovaným způsobem. Kapitola 8 se zabývala optimalizací pohybu tensegrity z hlediska energetické efektivity. V této kapitole byl ukázán postup jak získat energeticky optimální pohyb tensegrity pro její řízení. Celá praktická část byla realizována v programech MATLAB R2017a a Simulink, ilustrace v práci byly zhotoveny ve volně dostupném programu Inkscape

Autor by rád v budoucnu tuto práci rozšířil na prostorové tensegrity a dále se seznámil s dalšími metodami pro energeticky efektivní řízení tensegrit. Další vytyčený cíl je sestavení experimentálního modelu pro ověření simulačních modelů, které byly uvedeny v této práci.

Závěrem tedy může být řečeno, že cíle definované v kapitole 4, byly v rámci práce splněny.

10. Literatura

- [1] J. Talácko a R. Matička, Konstrukce průmyslových robotů a manipulátorů, Vydavatelství ČVUT, ISBN: 80-01-01291-3, 1995.
- [2] J. P. Merlet, Parallel Robots, Dordrecht: Springer, 2006, ISBN: 978-1-4020-4133-4.
- [3] V. Scheinman, J. M. McCarthy a J. Song, Springer Handbook of Robotics, Springer Nature, 2016, pp. 68 - 87, ISBN: 978-3-319-32550-7.
- [4] D. L. Pieper, The Kinematics of Manipulators under Computer Control, Ph.D. Thesis, Stanford University, Department of Mechanical Engineering, 1968.
- [5] Z. Pandilov a V. Dukovski, „Comparison of the Characteristics Between Serial and Parallel Robots,“ v *ACTA TEHNICA CORVINIENSIS - Bulletin of Engineering*, Skopje, 2014.
- [6] D. Stewart, „A Platform with Six Degrees of Freedom,“ Sage Publications, 1965.
- [7] K. L. Cappel, „Motion Simulator“. US Patent 3295224, 3 Jan. 1967.
- [8] Giddings&Lewis, *Variac*, 1994.
- [9] P. Svatoš, Optimalizace a řízení pohybu vláknově ovládaných paralelních mechanismů, Disertační práce, Praha: ČVUT v Praze, 2016.
- [10] P. Svatoš a Z. Šika, „Model Identification and Control Law Optimization of Fiber Driven Mechanism QuadroSphere,“ v *Book of Extended Abstracts, 30th conference with international participation Computational Mechanics 2014*, Plzeň, University of West Bohemia, 2014.
- [11] M. Valášek a M. Karásek, „Kinematical Analysis of HexaSphere,“ *Conference Proceedings of Engineering Mechanics*, pp. 1371-1378, 2009.
- [12] Y. D. Bansod, D. Nandanwar a J. Bursa, „Overview of Tensegrity - I: Basic Structures,“ *Engineering MECHANICS*, sv. 21, č. 5, pp. 355-367, 2014.
- [13] R. E. Skelton a M. C. Oliveira, Tensegrity Systems, 2009.
- [14] A. G. Tibert a S. Pellegrino, „Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures,“ *International Journal of Space Structures*, sv. 18, č. 4, pp. 209-223, 2003.
- [15] V. Finnoto, Cabled-trusses: Concept, Modeling and Optimization, Disertační práce, ČVUT v Praze, 2013.

- [16] V. Finotto, W. Leal Da Silva, M. Valášek a P. Štemberk, „Hybrid Optimization of Cabled-trusses: Benchmarks for Mechanical Engineering,“ *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, sv. 1, č. 28, pp. 433-446, 2015.
- [17] H. Murakami, „Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part 1. Nonlinear equations of motion,“ *International Journal of Solids and Structures*, sv. 38, pp. 3599-3613, 2001.
- [18] N. Bel Hadj Ali a I. F. C. Smith, „Dynamic behavior and vibration control of a tensegrity structure,“ *International Journal of Solids and Structures*, sv. 47, pp. 1285-1296, 2010.
- [19] J. V. Hendrickson, J. Valasek a R. E. Skelton, „Shape Control of Tensegrity Structures,“ v *AIAA SPACE 2015 Conference and Exposition*, Pasadena, California, 2015.
- [20] J. M. Porta a S. Hernández-Juan, „Path planning for active tensegrity structures,“ *International Journal of Solids and Structures*, pp. 47-56, 2016.
- [21] D. E. Ingber, „Cellular tensegrity: defining new rules of biological design that govern the cytoskeleton,“ *Journal of Cell Science*, sv. 104, pp. 613-627, 1993.
- [22] G. Scarr, „A consideration of the elbow as a tensegrity structure,“ *International Journal of Osteopathic Medicine*, sv. 15, pp. 53-65, 2012.
- [23] V. SunSpiral, A. Agogino a D. Atkinson, „Final Report Phase II, Super Ball Bot - Structures for Planetary Landing and Exploration for the NASA Innovative Advanced Concepts (NIAC) Program,“ NASA Ames Research Center, 2015.
- [24] C. Sultan a R. Skelton, „Deployment of tensegrity structures,“ *International Journal of Solids and Structures*, sv. 40, pp. 4637-4657, 2003.
- [25] C. Sultan, „Tensegrity deployment using infinitesimal mechanisms,“ *International Journal of Solids and Structures*, sv. 51, pp. 3653-3668, 2014.
- [26] Schwarzfischer, „The Dynamic Synthesis of an Energy-Efficient Slider-Crank-Mechanism,“ *Proceedings of the International Symposium of Mechanism and Machine Science*, pp. 156-163, 2017.
- [27] G. Tibert, Deployable Tensegrity Structures for Space Applications, Doctoral Thesis, Stockholm: Royal Institute of Technology, 2002.
- [28] A. G. Tibert a S. Pellegrino, „Deployable Tensegrity Reflectors for Small Satellites,“ *Journal of Spacecraft and Rockets*, sv. 39, pp. 701-709, 2002.

- [29] K. Miura a Y. Miyazaki, „Concept of the Tension Truss Antenna,“ *AIAA JOURNAL*, sv. 28, č. 6, pp. 1098-1104, 1990.
- [30] B. T. Mirlletz, P. Bhandal, R. D. Adams, A. K. Agogino, R. G. Quinn a V. SunSpiral, „Goal-Directed CPG Control for Tensegrity Spines with Many Degrees of Freedom Traversing Irregular Terrain,“ *Soft Robotics*, sv. 2, č. 4, pp. 165-176, 2015.
- [31] C. Sultan a R. Skelton, „A force and torque tensegrity sensor,“ *Sensors and Actuators*, sv. 112, pp. 220-231, 2004.
- [32] C. Sultan, M. Corless a R. E. Skelton, „Tensegrity Flight Simulator,“ *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, sv. 23, č. 6, pp. 1055-1064, 2000.
- [33] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, Toronto: University of Toronto Press, 1970, ISBN: 978-0-486-65067-8.
- [34] R. Connelly, „Tensegrity structures: Why are they stable?,“ v *Rigidity Theory and Applications*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999, pp. 47-54.
- [35] K. Koohestani, „Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm,“ *International Journal of Solids and Structures*, č. 49, pp. 739-747, 2012.
- [36] F. L. Lewis, D. M. Dawson a C. T. Abdallah, *Robot Manipulator Control Theory and Practice*, Marcel Dekker, 2004.
- [37] S. Qian, B. Zi, W. Shang a Q. Xu, *A Review on Cable-driven Parallel Robots*, Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018.