

**ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

**FAKULTA
STROJNÍ**



**MODELOVÁNÍ A IDENTIFIKACE
MODELU STRUKTURY S MNOHA
ROVINNÝMI
PIEZOELEKTRICKÝMI PRVKY**

2019

**JAKUB
ŠMÍD**

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Šmíd** Jméno: **Jakub** Osobní číslo: **408543**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Modelování a identifikace modelu struktury s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky

Název diplomové práce anglicky:

Modeling and identification of structure with multiple planar piezoelectric elements

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s metodami modelování poddajných struktur s piezoelektrickými aktuátory a senzory.
- 2) Seznamte se s metodami identifikace dynamických systémů.
- 3) Proveďte identifikační experimenty na deskovém demonstrátoru a použitých zesilovačích.
- 4) Sestavte simulační model deskového experimentálního demonstrátoru s detailními modely piezoelektrických aktuátorů a senzorů.
- 5) Proveďte transformaci fyzikálního modelu do redukovaného modálního tvaru a připravte model celého experimentu.
- 6) Porovnejte výsledky identifikace redukovaného fyzikálního modelu a identifikace pouze na základě naměřených vstupů a výstupů.

Seznam doporučené literatury:

- [1] A. Preumont, Mechatronics. Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems, Springer, 2006.
- [2] ANSYS Inc., „ACT_Piezo & MEMS Extension_WS1 - Piezoelectric Fan,“ 2015.
- [3] Z. Šika, J. Zavřel and M. Valášek, Residual Modes for Structure Reduction and Efficient Coupling of Substructures, Bulletin of Applied Mechanics, vol. 5, no. 19, pp. 54-59, 2009.
- [4] J. Karlíček, Aktivní snižování vibrací pomocí rovinných piezoaktuátorů, diplomová práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2016.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D., odbor mechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **24.04.2019**

Termín odevzdání diplomové práce: **16.08.2019**

Platnost zadání diplomové práce:

prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

30.4.2019
Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Anotační list

| | |
|---------------------------------|---|
| Jméno autora: | Jakub Šmíd |
| Název diplomové práce: | Modelování a identifikace modelu struktury s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky |
| Anglický název: | Modeling and identification of structure with multiple planar piezoelectric elements |
| Akademický rok: | 2018/2019 |
| Obor studia: | Aplikovaná mechanika |
| Ústav / odbor: | Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky / Odbor mechaniky a mechatroniky |
| Vedoucí diplomové práce: | prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D. |
| Konzultant: | Ing. Jiří Volech |
| Bibliografické údaje: | Počet stran: 92 Počet obrázků: 70 Počet tabulek: 13 Počet příloh: 7 |
| Klíčová slova: | MKP model, vlastní frekvence, piezoelektrické prvky, ANSYS, MATLAB, mechatronický systém, stavový popis |
| Keywords: | FEM model, natural frequencies, piezoelectric elements, ANSYS, MATLAB, mechatronic system, state space |
| Anotace: | Práce se zabývá tvorbou matematického modelu s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky v podobě desky s aktuátory a senzory, tvorbou MKP modelu této soustavy, výpočtem jeho vlastních frekvencí, srovnáním vypočtených výsledků s experimentálně získanými daty, využitím MKP dat k tvorbě mechatronického simulačního modelu ve formě stavového popisu a jeho identifikací s experimentem. |
| Abstract: | The thesis deals with the development of a mathematical model of a structure with multiple planar piezoelectric elements, creation of the FEM model of the structure, calculations of its natural frequencies, comparing the calculated results with experimentally obtained data, using the FEM data for creation of a mechatronic simulation model in the form of state space model and its identification with the experiment. |

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v seznamu literatury.

V Praze dne

.....

podpis

Poděkování:

Tímto bych rád poděkoval panu prof. Ing. Zbyňku Šikovi, Ph.D., za vedení mé diplomové práce, ochotu a cenné rady. Dále bych chtěl poděkovat panu Ing. Jindřichu Karlíčkovi za spolupráci při tvorbě MKP modelu a panu Ing. Jiřímu Volechovi za jeho pomoc v experimentální a identifikační části této práce. Na závěr bych chtěl poděkovat svým blízkým za podporu.

Seznam obrázků

| | |
|--|----|
| Obr. 1-1 Soustava se soustřednými parametry | 13 |
| Obr. 1-2 Tvarová funkce v podobě lineárního průběhu posuvů po elementu | 19 |
| Obr. 1-3 Oblasti využití piezoelektrických materiálů [12] | 21 |
| Obr. 1-4 Přímý (a, b) a nepřímý piezoelektrický jev (c, d) [16] | 21 |
| Obr. 1-5 Orientace elektrických dipólů v piezoelektrickém materiálu před a po polarizačním procesu [15] | 22 |
| Obr. 1-6 Systém značení os a směr polarizace | 22 |
| Obr. 1-7 Ortotropní materiál a jeho roviny symetrie | 23 |
| Obr. 1-8 Podoba elementu SOLID 226 [21] | 24 |
| Obr. 3-1 Skutečná podoba „volně“ uložené experimentální soustavy | 33 |
| Obr. 3-2 Skutečná podoba vetknuté experimentální soustavy | 33 |
| Obr. 3-3 3D model experimentální soustavy | 33 |
| Obr. 3-4 Deska | 34 |
| Obr. 3-5 Planární piezoprvek CMBP06 [27] | 35 |
| Obr. 3-6 Vnitřní uskupení elektrod | 35 |
| Obr. 3-7 Napájení piezoelektrického aktuátoru [27] | 35 |
| Obr. 3-8 Částečně obroušený povrch piezoaktuátoru. Čáry, připomínající letokruhy, jsou jednotlivé vrstvy zmíněných piezoprvků | 36 |
| Obr. 3-9 Napájení piezoelektrického senzoru [27] | 36 |
| Obr. 3-10 Šablona pro přesné nalepení piezoprvků (piezopatchů). Eliptické kapsy jsou pro kabeláž ..37 | |
| Obr. 3-11 Ukázka průběhu aplikace piezoprvků (piezopatchů) na desku lepením. Fólie byla použita proto, aby bylo zabráněno znečištění jednotlivých komponent od lepidla | 37 |
| Obr. 3-12 Plochá tyč s otvory pro šrouby M8 | 38 |
| Obr. 4-1 Deska | 42 |
| Obr. 4-2 Piezopatche vytvořené na desce | 42 |
| Obr. 4-3 Rozměrové uspořádání piezopatchů | 42 |
| Obr. 4-4 Vrstvy jednotlivých piezopatchů | 43 |
| Obr. 4-5 Výsledná geometrická podoba modelu experimentální soustavy s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky | 43 |
| Obr. 4-6 Lokální souřadnicové systémy | 44 |
| Obr. 4-7 Polarizační souřadnicový systém udávající směr a kladný smysl polarizace (osa Y) | 44 |
| Obr. 4-8 Polarizace piezopatche. Plátky, které mají osu polarizace ve směru a kladném smyslu osy Y polarizačního souřadnicového systému, jsou znázorněny zeleně | 45 |
| Obr. 4-9 Definice kontaktů mezi deskou a piezopatchy | 45 |
| Obr. 4-10 Definice kontaktů mezi deskou a plochými tyčemi | 46 |
| Obr. 4-11 Konečnoprvková síť desky | 46 |
| Obr. 4-12 Konečnoprvková síť desky | 47 |
| Obr. 4-13 Konečnoprvková síť experimentální soustavy | 47 |
| Obr. 4-14 Zavedení okrajových podmínek | 48 |
| Obr. 4-15 Průběh deformace (ve směru osy Z) od vlastní tíhy | 49 |
| Obr. 4-16 1. vlastní (ohybový) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_1 = 1,67\text{Hz}$ | 52 |

| | |
|---|----|
| Obr. 4-17 2. vlastní (torzní) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_2 = 4,09\text{Hz}$ | 52 |
| Obr. 4-18 3. vlastní (ohybový) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_3 = 21,29\text{Hz}$ | 52 |
| Obr. 4-19 4. vlastní (torzní) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_4 = 43,96\text{Hz}$ | 52 |
| Obr. 4-20 5. vlastní (ohybový) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_5 = 59,86\text{Hz}$ | 53 |
| Obr. 4-21 6. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_6 = 69,55\text{Hz}$ | 53 |
| Obr. 4-22 7. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_7 = 105,46\text{Hz}$ | 53 |
| Obr. 4-23 8. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_8 = 43,96\text{Hz}$ | 53 |
| Obr. 4-24 9. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_9 = 118,23\text{Hz}$ | 53 |
| Obr. 4-25 10. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_{10} = 140,26\text{Hz}$ | 53 |
| Obr. 4-26 Porovnání vypočtených a naměřených vlastních frekvencí mechatronické soustavy | 54 |
| Obr. 4-27 Relativní chyby vypočtených vlastních frekvencí vůči experimentálně získaným | 54 |
| Obr. 5-1 Umístění piezopatchů v jednom pohledu ze strany aktuátorů. Červeně označené aktuátory (ACT 1–8) byly buzeny a na opačné straně desky černě označené senzory (1–19) byly použity ke snímání výstupního napětí | 59 |
| Obr. 5-2 Porovnání odezvy simulačního modelu a reálné struktury. Odezva senzoru číslo 3 při buzení všemi osmi aktuátory | 59 |
| Obr. 5-3 Porovnání odezvy simulačního modelu a reálné struktury. Odezva senzoru číslo 11 při buzení všemi osmi aktuátory | 60 |
| Obr. 6-1 Schéma zapojení experimentu | 61 |
| Obr. 6-2 Průběh napětí na senzorech při buzení všemi aktuátory | 63 |
| Obr. 6-3 Průběh napětí na senzorech při buzení aktuátorem číslo pět | 63 |
| Obr. 6-4 Amplitudová frekvenční charakteristika výstupního signálu naměřeného na senzoru číslo 11 | 64 |
| Obr. 6-5 Amplitudová frekvenční charakteristika výstupního signálu naměřeného na senzoru číslo 18 | 65 |
| Obr. 7-1 Schéma průběhu optimalizace | 67 |
| Obr. 7-2 Znázornění podoblastí číslo 1 (zelená) a číslo 2 (žlutá) ve struktuře piezopatchů | 70 |
| Obr. 7-3 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.1-1 | 75 |
| Obr. 7-4 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.1-2 | 76 |
| Obr. 7-5 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.1-3 | 76 |
| Obr. 7-6 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.1-4 | 77 |
| Obr. 7-7 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.4-1 | 77 |
| Obr. 7-8 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.4-2 | 78 |
| Obr. 7-9 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.4-3 | 78 |
| Obr. 7-10 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.4-4 | 79 |
| Obr. 7-11 Průběh shody identifikovaného modelu s experimentálně na měřenými daty. V tomto případě se jedná o výstup senzoru č. 3 z podoblasti č. 1. Parametr <i>fit</i> zde nabýval hodnoty 57.5% | 82 |
| Obr. 7-12 Průběh shody identifikovaného modelu s experimentálně na měřenými daty. V tomto případě se jedná o výstup senzoru č. 3 z podoblasti č. 4. Parametr <i>fit</i> zde nabýval hodnoty 61.8% | 82 |
| Obr. 7-13 Amplitudová frekvenční odezva redukováného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 1. senzor podoblasti číslo 1 | 83 |

| | |
|---|----|
| Obr. 7-14 Amplitudová frekvenční odezva redukováného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 2. senzor podoblasti číslo 1 | 83 |
| Obr. 7-15 Amplitudová frekvenční odezva redukováného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 3. senzor podoblasti číslo 1 | 84 |
| Obr. 7-16 Amplitudová frekvenční odezva redukováného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 2. senzor podoblasti číslo 4 | 84 |
| Obr. 7-17 Amplitudová frekvenční odezva redukováného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 3. senzor podoblasti číslo 4 | 85 |

Seznam tabulek

| | |
|--|----|
| Tab. 1 Některé parametry piezoaktuátoru / senzoru CMBP06 | 35 |
| Tab. 2 Mechanické vlastnosti oceli | 39 |
| Tab. 3 Mechanické vlastnosti piezokermiky NCE57 (PZT-5A) | 41 |
| Tab. 4 Vypočtené vlastní frekvence | 52 |
| Tab. 5 Experimentálně naměřené vlastní frekvence | 52 |
| Tab. 6 Hodnoty zvolených poměrných útlumů při ručním ladění odezvy simulačního modelu..... | 58 |
| Tab. 7 Přehled buzených aktuátorů. Vstupy u1 až u8 korespondují s označením aktuátorů viz obr. 5.1 | 62 |
| Tab. 8 Optimalizační parametry a jejich označení | 71 |
| Tab. 9 Přehled optimalizačních parametrů a jejich přípustných hodnot..... | 72 |
| Tab. 10 Počáteční hodnoty optimalizačních parametrů | 74 |
| Tab. 11 Hodnoty optimalizovaných parametrů pro podoblast (cluster) č.1..... | 75 |
| Tab. 12 Hodnoty optimalizovaných parametrů pro podoblast (cluster) č.4..... | 75 |
| Tab. 13 Parametry identifikace | 81 |

Seznam příloh

- Příloha č. 1: Tabulka odečtených vlastních frekvencí
- Příloha č. 2: MKP model struktury s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky
- Příloha č. 3: Program zprostředkující tvorbu modelu se zesilovačem ve formě stavového popisu
- Příloha č. 4: Redukovaný model struktury ve formě stavového popisu
- Příloha č. 5: Program pro optimalizaci redukováného modelu
- Příloha č. 6: Optimalizované redukované fyzikální modely podoblastí struktury ve formě stavového popisu
- Příloha č. 7: Identifikované modely podoblastí struktury ve formě stavového popisu

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Seznam obrázků..... | 6 |
| Seznam tabulek | 8 |
| Úvod | 12 |
| 1 Matematické modely poddajných struktur obsahující piezoelektrické prvky | 13 |
| 1.1 Mechanické modely | 13 |
| 1.1.1 Analytické modely..... | 13 |
| 1.1.1.1 Těleso typu pružina-tlumič-hmota..... | 13 |
| 1.1.1.2 Prutové těleso | 15 |
| 1.1.1.3 Skořepina..... | 17 |
| 1.1.1.4 Stavový popis lineárního dynamického systému | 17 |
| 1.1.2 Modely vytvořené metodou konečných prvků (MKP) | 18 |
| 1.2 Modelování soustav s piezoelektrickými prvky | 20 |
| 1.2.1 Stručná historie a využití piezoelektrického jevu..... | 20 |
| 1.2.2 Piezoelektrický jev..... | 21 |
| 1.2.3 Konstitutivní rovnice piezoelektrického materiálu | 22 |
| 1.2.4 Piezoelektrický jev v MKP..... | 24 |
| 2 Identifikace dynamických systémů | 26 |
| 2.1 Metoda Eigensystem Realization Algorithm (ERA) | 26 |
| 2.2 Identifikace v programu MATLAB | 29 |
| 2.2.1 Popis systému [8] | 29 |
| 2.2.2 Princip identifikace [8] | 30 |
| 2.2.3 Metoda N4SID (Numerical algorithm for subspace state space system identification) [8] | 31 |
| 2.2.4 Metoda PEM (Prediction error method) [8] | 32 |
| 3 Popis experimentální soustavy s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky | 33 |
| 3.1 Části experimentální soustavy | 34 |
| 4 Matematický model soustavy s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky | 39 |
| 4.1 Příprava MKP modelu | 39 |
| 4.1.1 Materiálové vlastnosti..... | 39 |
| 4.1.2 Geometrie modelu..... | 41 |
| 4.1.3 Výpočetní podmínky | 44 |
| 4.2 Statická analýza..... | 47 |
| 4.2.1 Okrajové podmínky a zatížení ve statické analýze..... | 48 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.2.2 | Vytvoření piezoelektrické interakce..... | 48 |
| 4.2.3 | Nastavení výpočtu statické analýzy | 49 |
| 4.2.4 | Vyhodnocení statické analýzy | 49 |
| 4.3 | Modální analýza | 49 |
| 4.3.1 | Okrajové podmínky v modální analýze | 51 |
| 4.3.2 | Nastavení výpočtu Modální analýzy..... | 51 |
| 4.3.3 | Vyhodnocení vlastních frekvencí | 51 |
| 4.3.3.1 | Porovnání vlastních frekvencí MKP modelu s experimentálně naměřenými vlastními frekvencemi..... | 53 |
| 4.3.3.2 | Diskuze výsledků vlastních frekvencí | 55 |
| 5 | Tvorba redukováného modelu a jeho implementace do modelu experimentu..... | 56 |
| 5.1 | Transformace modelu z MKP | 56 |
| 5.2 | Redukce modelu..... | 56 |
| 5.2.1 | Modální redukce a stavový popis modelu | 57 |
| 5.3 | Model experimentu | 58 |
| 6 | Identifikační experiment..... | 61 |
| 6.1 | Průběh měření | 61 |
| 6.2 | Analýza naměřených dat..... | 64 |
| 6.2.1 | Vlastní frekvence | 64 |
| 7 | Identifikace modelu..... | 66 |
| 7.1 | Optimalizace redukováného fyzikálního modelu na základě experimentu | 66 |
| 7.1.1 | Obecně o optimalizaci..... | 66 |
| 7.1.2 | Optimalizační metody | 67 |
| 7.1.2.1 | Optimalizace metodou genetických algoritmů | 67 |
| 7.1.3 | Optimalizace (Identifikace) redukováného fyzikálního modelu | 70 |
| 7.1.3.1 | Postup při optimalizaci..... | 70 |
| 7.1.3.2 | Parametry optimalizace | 71 |
| 7.1.3.3 | Cílová funkce | 72 |
| 7.1.3.4 | Optimalizace metodou fmincon..... | 74 |
| 7.1.3.5 | Diskuze výsledků optimalizovaného modelu | 79 |
| 7.2 | Identifikace na základě naměřených vstupů a výstupů | 80 |
| 7.2.1 | Příprava dat..... | 81 |
| 7.2.2 | Postup při tvorbě modelu | 81 |
| 7.3 | Porovnání výsledků modelů a experimentu | 82 |
| 7.3.1 | Diskuze výsledků identifikovaného modelu..... | 85 |

| | |
|--------------------------|-----------|
| Závěr | 86 |
| Literatura | 88 |
| Příloha č. 1..... | 92 |

Úvod

V současné době neustále rostou požadavky na snižování hmotnosti strojů a konstrukcí, a to zejména v letectví, automobilovém i vesmírném průmyslu. Tyto požadavky jsou spojeny s nežádoucími vibracemi a snížením tuhosti. Jednou z možností, jak předejít těmto nežádoucím jevům, je využití aktivního řízení a tlumení v podobě piezoaktuátorů/snímačů. Implementace tohoto přístupu na křídlo letadla včetně tvorby modelu je popsána v [1]. Další z možných aplikací jsou lopatky oběžného kola turbíny, obecně rotační komponenty s periodicky uspořádanými částmi, pracující za určitého provozního režimu, o čemž pojednává [2].

Pro přesnou predikci a návrh řízení je zapotřebí matematického modelu, který by popsal chování dané mechatronické soustavy s dostatečnou přesností a bral v potaz nejen samotnou mechanickou strukturu, ale také implementované piezoelektrické prvky, které jsou zdrojem vyšší hmotnosti, lokálního zvýšení tuhosti a popř. tlumení výsledné struktury. Tato práce navazuje na projekt GAČR „Mechatronické struktury se silně distribuovanými aktuátory a senzory“. Jejím úkolem je právě tvorba matematického modelu se zahrnutím piezoelektrických prvků (piezopatchů), jeho porovnání a identifikace s reálnou experimentální soustavou.

V úvodní kapitole je nejprve seznámení s některými dostupnými metodami modelování poddajných strojů obsahující piezoelektrické prvky, matematickými vztahy potřebnými k jejich popisu a některými základními vlastnostmi piezoelektrických materiálů.

Kapitola číslo dvě se soustředí na možnosti identifikace modelu pouze na základě naměřených vstupů a výstupů. Uvedena je tu základní metoda ERA a také metody N4SID a PEM používané identifikačním toolboxem programu MATLAB.

Ve třetí kapitole je podrobně probrána podoba experimentální soustavy včetně piezoelektrických prvků a způsobu jejich upevnění.

Čtvrtá kapitola je zaměřena na vytvoření MKP modelu mechatronické struktury s dvaceti pěti aktuátory i senzory v programu ANSYS, výpočet vlastních frekvencí společně s jejich vyhodnocením.

V páté kapitole byla provedena modální redukce transformovaného fyzikálního modelu a jeho začlenění do modelu experimentu ve formě stavového popisu. Byla také simulována odezva systému na budící signál. Ty byly následně porovnány s experimentálně naměřenými daty.

Šestá kapitola se zabývá experimentem, jeho uspořádáním a postupem testování.

V závěrečné kapitole byla provedena identifikace redukovaného fyzikálního modelu v návaznosti na experimentální data a identifikace na základě naměřených vstupů a výstupů včetně vzájemného porovnání těchto modelů a experimentálních dat.

1 Matematické modely poddajných struktur obsahující piezoelektrické prvky

1.1 Mechanické modely

Pro úplnost budou uvedeny některé modely poddajných struktur bez uvažování piezoelektrických prvků.

Způsobů, jak vytvořit model poddajného tělesa (komponenty) nebo soustavy těles (komponent), je celá řada [3]. V této práci se zaměříme jen na některé z nich.

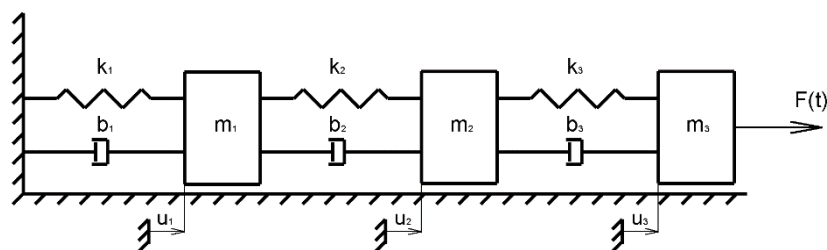
1.1.1 Analytické modely

Tyto modely jsou vhodné pro zjednodušený popis a rámcový náhled chování poddajného tělesa nebo soustavy. Často řeší soustavu diferenciálních rovnic analyticky prostředky, jako např. Airyho funkce napětí u strojních součástí, o které pojednává [4] apod. Mezi jejich hlavní výhody patří většinou nízká výpočetní náročnost a výsledek ve tvaru funkce. Mezi jejich nevýhody však patří omezené praktické použití při mnoha zjednodušujících předpokladech. Jedná se o:

- 1 těleso typu pružina-tlumič-hmota (soustava se soustřednými parametry),
- 2 prutové těleso,
- 3 skořepina.

1.1.1.1 Těleso typu pružina-tlumič-hmota

Poddajné těleso je zde modelováno z diskretních prvků. Mezi diskretní prvky patří hmotný bod (dokonale tuhý s danou hmotností m), pružina (poddajná s danou tuhostí k) a tlumič (nepoddajný s daným tlumením b). Tyto prvky jsou mezi sebou navzájem spojeny a tvoří tak výslednou strukturu [viz obr. 1.1].



Obr. 1-1 Soustava se soustřednými parametry

Vzniklou diskretní soustavu s N stupni volnosti pak můžeme popsat soustavou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu a příslušnými okrajovými podmínkami viz rovnice 1.1.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{B} matice tlumení, \mathbf{K} matice tuhosti, \mathbf{f} je vektor vnějších budících sil, \mathbf{u} je vektor polohy, $\dot{\mathbf{u}}$ vektor rychlosti a $\ddot{\mathbf{u}}$ vektor zrychlení ve všech N stupních volnosti. Tuto rovnici rozepíšeme pro soustavu [viz obr. 1.1] dle Newtonova zákona a za předpokladu že $u_1 < u_2 < u_3$ dostaneme

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & 0 \\ -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Tato metoda reprezentuje poddajné těleso pomocí pohybové rovnice 1.1 vyjadřující rovnováhu mezi setrvačnými, tlumícími, elastickými a vnějšími silami [8].

Obecně nemusejí být matice \mathbf{B} a \mathbf{K} známy, dají se však vyčíslit, například výpočtem nebo experimentálně [3]. Jejich určení může být však v mnohých případech složité nebo nepřesné.

Je několik způsobů, jak určit matici tlumení¹ \mathbf{B} . Jednou z možností je převod z oblasti fyzikálních do oblasti modálních souřadnic a využití předpokladu proporcionálního (Rayleigha) tlumení soustavy. Tento předpoklad diagonalizuje matici tlumení \mathbf{B} .

Rovnici 1.1 upravíme pomocí vztahu pro modální transformaci

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{V}\mathbf{q}(t), \quad (1.3)$$

kde \mathbf{V} je konstantní modální matice obsahující normalizované vlastní vektory a \mathbf{q} je vektor modálních souřadnic.

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_i \dots \mathbf{v}_N], \quad (1.4)$$

tím dostaneme

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\mathbf{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (1.5)$$

po vynásobení maticí \mathbf{V}^T zleva dále

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{q} = \mathbf{V}^T\mathbf{f}, \quad (1.6)$$

využitím výše zmíněné normy s vahou \mathbf{M} a ortogonalitě vlastních tvarů platí

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{I} \text{ a } \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Omega}^2, \quad (1.7)$$

¹ Tlumení zde předpokládáme za viskózní (lineární).

kde \mathbf{I} je jednotková matice a $\mathbf{\Lambda}$ je spektrální (diagonální) matice obsahující vzestupně seřazené hodnoty $\lambda_i = \Omega_i^2$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \Omega_i^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \Omega_N^2 \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

obdržíme výraz

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q} = \mathbf{V}^T \mathbf{f}, \quad (1.9)$$

vzhledem k předpokladu proporcionálního tlumení platí

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V}, \quad (1.10)$$

kde $\mathbf{\Delta}$ je diagonální matice a platí následující vztah

$$\ddot{q}_\vartheta + 2b_{r,\vartheta} \dot{q}_\vartheta + \Omega_{,\vartheta}^2 q_{,\vartheta} = \mathbf{v}_\vartheta^T \mathbf{f}, \quad (1.11)$$

kde $b_{r,\vartheta}$ je poměrný útlum ϑ tého tvaru.

Původní soustava N diferenciálních rovnic tak přešla na N rovnic samostatně řešitelných². Což je z matematického hlediska výhodné [4].

Stále však zůstává otázka určení koeficientů poměrného útlumu b_r odpovídajících příslušným vlastním tvarům. Odpověď na tuto otázku by mohl dát např. logaritmický dekrement popsany v [6], který je stanoven z poměru dvou výchylek vzájemně časově posunutých o jednu periodu. V případě, že máme k dispozici amplitudovou charakteristiku, je možné použít metodu rezonančního vrcholu nebo metodu postranních frekvencí [7]. Další možností by mohla být optimalizace na základě experimentálního měření neboli identifikace, která by stanovila poměrné útlumy, podle toho, pro které hodnoty by se model nejvíce blížil experimentálnímu průběhu sledovaných veličin.

1.1.1.2 Prutové těleso

Do této kapitoly patří několik teorií, které k vytvoření poddajného tělesa využívají prutový prvek.

² Což je dáno tím, že matice $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Omega}^2$ je diagonální.

Euler-Bernoulliho teorie

Tato teorie, která je mimo jiné nazývána klasickou nosníkovou teorií, umožňuje vypočítat jak statické vlastnosti nosníku (průhyb, natočení), tak i vlastnosti dynamické (vlastní frekvence a tvary kmitu).

Je založena na několika zjednodušeních [5], mezi ně patří.:

- rovnice platí pouze v lineární teorii pružnosti, proto se využití omezuje na oblast deformace, ve které zcela platí Hookeův zákon,
- každý průřez nosníku po deformaci je kolmý na neutrální osu,
- nosník má dostatečnou štíhlost (poměr průřezu vůči délce nosníku je zanedbatelný, dle [5] je vhodný pro popis prutových těles, kde jsou rozměry příčného průřezu menší než 1/10 délky prutu),
- je zanedbáno smykové napětí vzniklé od posouvající síly vlivem dostatečně velké štíhlosti.

Euler-Bernoulliho rovnice pro statické zatížení prutového tělesa, udávající obecný vztah mezi průhybem nosníku a vnějším zatížením je dle [5]

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x). \quad (1.12)$$

Odkud pomocí Schwedlerovy věty

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \text{ a } \frac{dM(x)}{dx} = T(x), \quad (1.13)$$

kde T je posouvající síla a M je ohybový moment, dostaneme

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{T(x)}{EJ}, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ}, \quad \frac{dw}{dx} = \varphi(x), \quad (1.14)$$

kde φ je natočení.

Euler-Bernoulliho rovnice pro dynamické zatížení pak obsahuje člen s druhou derivací průhybu w podle času násobený lineární hustotou μ dle [5]

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = -\mu \frac{d^2 w}{dt^2} + q(x), \quad (1.15)$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J kvadratický moment průřezu, q spojité zatížení, w průhyb, x je souřadnice, t je čas a veličina μ se nazývá lineární hustota určující hmotnost na jednotku délky (někdy také nazývána liniová). Pro vyřešení průhybu w je opět zapotřebí okrajových podmínek.

Dále je potřeba mít na zřeteli, že rovnice 1.14 nezohledňuje setrvačnost rotačních účinků, které jsou však při malých průhybech zanedbatelné.

1.1.1.3 Skořepina

Skořepiny jsou prostorová tělesa, u nichž dva rozměry výrazně převyšují zbývající rozměr a jsou schopny přenášet tahová/tlaková (membránová) a ohybová zatížení [9].

Výhodou skořepin je, že oproti 3D kontinuálnímu modelu je možné kinematiku deformace popsat dvou parametricky, což snižuje výpočtovou náročnost.

Mezi základní dva přístupy pro řešení skořepinových těles patří Reissner-Mindlinova a Kirchhoffova teorie, o kterých pojednává [9] a [10].

Blíže se v této práci výše uvedenou problematikou zabývat nebudeme.

1.1.1.4 Stavový popis lineárního dynamického systému

Pro zachycení chování spojitého lineárního dynamického systému, tj. zachycení jeho odezvy na daný vstup, lze použít tzv. stavový popis (State space):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).\end{aligned}\tag{1.16}$$

Ten využívá soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu, které jsou vhodnější pro numerické řešení, oproti diferenciálním rovnicím druhého řádu, využitě v kapitole 1.1.1.1. K popisu zavádí vektor stavů systému $\mathbf{z}(t)$, časovou derivaci vektoru stavů $\dot{\mathbf{z}}(t)$, vektor vstupů $\mathbf{u}(t)$ a vektor výstupů $\mathbf{y}(t)$. Dále matici systému \mathbf{A} (matice vnitřních vazeb), matici vstupní \mathbf{B} (matice vazeb na vstup), matici výstupní \mathbf{C} (matice vazeb mezi stavy a výstupy) a matici popisující vazbu přímo ze vstupu na výstup \mathbf{D} . Tato soustava může být také dle [8] rozšířena o matice vstupního šumu (šum měření atd.) a šumu systému (chyby modelu, nezahrnutá dynamika apod.).

Jak napovídá matice vnitřních vazeb systému \mathbf{A} , jedná se popis systému, který nahlíží do jeho vnitřní struktury a je tedy vhodnější např. pro návrh řízení, zejména systémů s více vstupy a výstupy (MIMO).

Další možností jsou přenosové funkce popisující systém jen na základě výstupů a vstupů, tento druh popisu se nazývá popisem vnějším.

Popis má také svoji diskrétní podobu, popsanou v kapitole 2.1. Ta je využívána v případě, kdy je systém měřen digitálně nebo jsou do něj prováděny nějaké akční zásahy s danou vzorkovací periodou T_{vz} .

1.1.2 Modely vytvořené metodou konečných prvků (MKP)

Většina úloh v technické praxi zahrnuje mnoho vlivů, které je potřeba zohlednit do výpočtového modelu, aby co nejpřesněji odpovídal skutečnosti a obsahoval všechny podstatné vlastnosti skutečné součásti, resp. soustavy. Tuto skutečnost je však často obtížné do analytických modelů promítnout, pokud se to však podaří, tak bývá často problém úlohu vyřešit z matematického hlediska.

Proto je vhodnější využít metody konečných prvků, dále jen MKP. Tato numerická přibližná metoda spočívá v diskretizaci spojitého kontinua (tělesa) na konečný počet elementů (prvků) o konečné velikosti. Hledané parametry řešení, jako např. posuvy, a souřadnice jsou ukládány do jednotlivých uzlů každého elementu a tvoří uzlové parametry. S rostoucím počtem prvků roste přesnost výpočtu, ale také časová náročnost jeho řešení.

Úlohy elastostatiky jsou charakterizovány maticí tuhosti a vektorem zatížení vyjadřující zatížení prvků. Jak matice tuhosti, tak vektor zatížení jsou složeny ze submatic, resp. vektorů tuhosti a zatížení jednotlivých prvků (elementů) ${}^e\mathbf{K}$ a ${}^e\mathbf{f}$:

$$\mathbf{K} = \sum_e {}^e\mathbf{K}, \quad \mathbf{f} = \sum_e {}^e\mathbf{f}. \quad (1.17)$$

Procedura sestavení matice tuhosti \mathbf{K} a hmotnosti \mathbf{M} je podrobně vysvětlena v [10] [11]. Základní rovnice pro MKP v oblasti elastostatiky, odvozená z principu minima celkové potenciální energie, viz [10] [11], má podobu

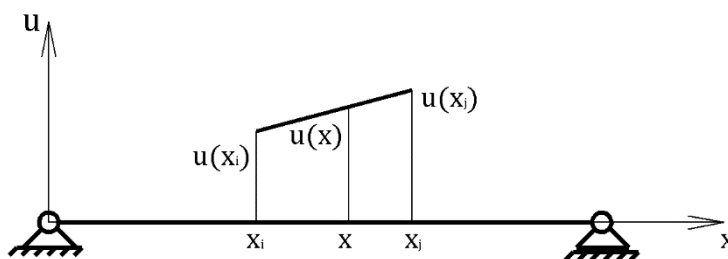
$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1.18)$$

kde \mathbf{K} je globální matice tuhosti, \mathbf{u} je globální vektor uzlových posuvů a \mathbf{f} je vektor zatížení soustavy.

Po zavedení okrajových podmínek, které vedou k regularizaci dosud singulární³ matice tuhosti, je možné vypočítat uzlová posunutí, která odpovídají statické rovnovážné poloze celé soustavy, viz [10] a [11]. Po zjištění posuvů jednotlivých uzlů soustavy je nutné zavést interpolační tvarové funkce, díky nimž můžeme vhodně aproximovat posuvy i v místech ležících mimo uzly.

Tvarové funkce sestavujeme na základě voleného deformačního modelu. Tento model vždy platí jen pro konkrétní prvek a každý může mít jiný. Volba tohoto modelu je klíčovým problémem MKP z hlediska pracnosti a přesnosti řešení [11].

³ Matice tuhosti popisuje vlastnosti volného tělesa, popř. soustavy těles, které může mít i nenulové deformace, tj. v případě přímočarého pohybu, kdy jsou všechny síly působící na těleso v rovnováze, nebo nulové deformace v případě nenulových uzlových posuvů, jak vyplývá z rovnice 1.17.



Obr. 1-2 Tvarová funkce v podobě lineárního průběhu posuvů po elementu

Za předpokladu znalosti uzlových posuvů (průhybů) pro jednorozměrný případ a jejich lineárního⁴ průběhu [viz obr. 1.2] můžeme pro daný element (u všech vektorů a matic předpokládáme index e, který vynecháme) psát

$$\tilde{u}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x = [1 \quad x] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (1.19)$$

pro známá uzlová posunutí

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_i) = u_i &= [1 \quad x_i] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{u}(x_j) = u_j &= [1 \quad x_j] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.20)$$

je možné sestavit soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

což můžeme přepsat ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \quad (1.22)$$

a dostaneme výsledný vztah

$$\tilde{u}(x) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}, \quad (1.23)$$

kde \mathbf{N} je matice tvarových funkcí [11]. Pro obecné použití přepíšeme tento vztah z jednorozměrného na třírozměrný případ

$$\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{u}. \quad (1.24)$$

Z hlediska dynamiky konstrukcí jsou však jak \mathbf{u} , tak \mathbf{N} funkcí času, tedy platí pro dynamiku jen přibližně. Pro výpočet matice hmotnosti \mathbf{M} , tedy vycházíme z předpokladu, že matice \mathbf{N} nezávisí na čase. Můžeme tedy psát

⁴ Průběh deformace podél prvku může být volen libovolně, např. kvadratický, kubický atd.

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{u}, \quad \ddot{\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}} \quad (1.25)$$

a matici hmotnosti \mathbf{M} elementu vypočteme z podmínky rovnosti virtuálních prací

$${}^e\mathbf{M} = \int_{eV} \rho \, {}^e\mathbf{N}^T \, {}^e\mathbf{N} \, dV, \quad (1.26)$$

procedura sestavení globální matice hmotnosti \mathbf{M} je obdobná sestavení matice tuhosti \mathbf{K} [11].

Základní rovnice dynamiky má stejný tvar jako tvar zmíněný v kapitole 1.1.1

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t), \quad (1.27)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{B} matice tlumení, \mathbf{K} matice tuhosti, $\mathbf{f}(t)$ je vektor vnějších budících sil, který je stejně jako vektor posuvů \mathbf{u} , funkcí času.

Na rozdíl od statiky lze rovnici 1.26 řešit i bez zavedení okrajových podmínek. To odpovídá konstrukci volně pohybuje se v prostoru, která se deformuje (kmitá) [11].

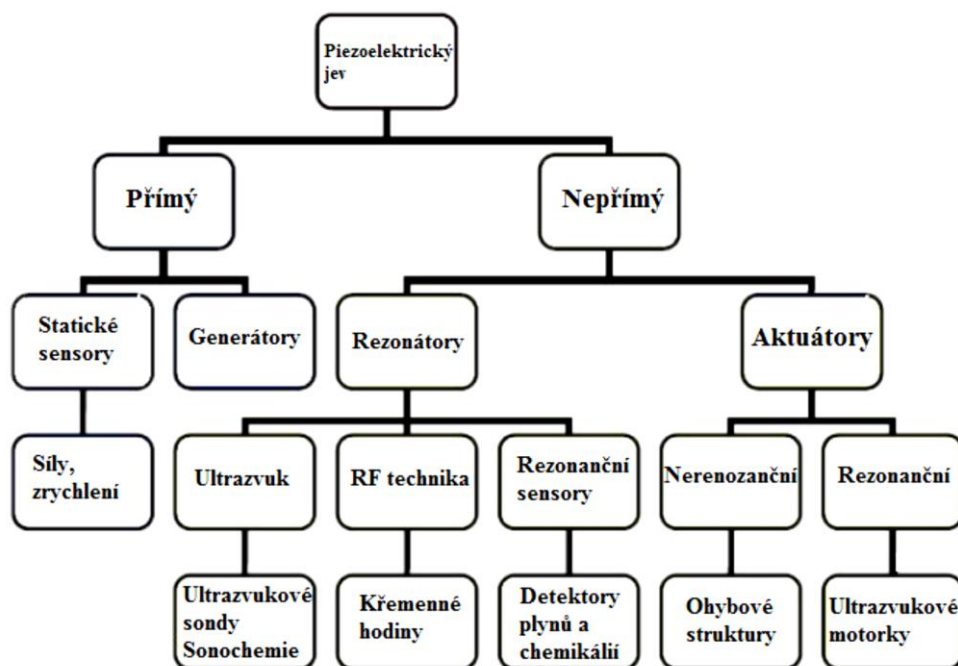
1.2 Modelování soustav s piezoelektrickými prvky

K zachycení chování těchto multifyzikálních soustav, které se také nazývají smart struktury, je možné využít jak analytických modelů, o kterých pojednává např. [12] a [13], tak i modelů vytvořených metodou konečných prvků. Tato práce bude dále pojednávat o druhé z těchto metod.

1.2.1 Stručná historie a využití piezoelektrického jevu

Piezoelektrina, jako odezva materiálu na mechanickou deformaci v podobě elektrického náboje, byla objevena Francouzskými vědci Pierrem a Paul-Jacquesem Curie v roce 1880. Ti zjistili, že při stlačení některých krystalů obsahující křemen, turmalín a Rochellovu sůl pod určitým směrem, je na povrchu krystalu generováno elektrické napětí [14].

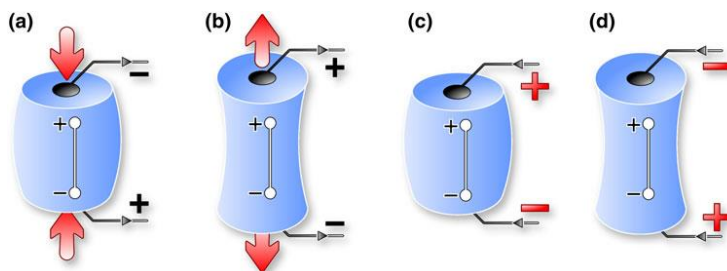
K rozšíření uplatnění tohoto materiálu došlo až ve 20. letech, a to ve zbrojním průmyslu, kde byl využit k vývoji SONARu (lokalizace objektů ultrazvukovými vlnami). V období během a po druhé světové válce posunul tuto technologii objev nových materiálů v podobě piezoelektrické keramiky [12]. Rozsáhlost využití těchto materiálů je patrná [viz obr. 1.3].



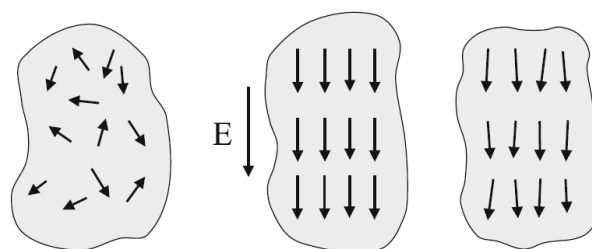
Obr. 1-3 Oblasti využití piezoelektrických materiálů [12]

1.2.2 Piezoelektrický jev

Piezoelektrický jev je vlastnost některých krystalických látek projevující se spojitostí mezi mechanickým a elektrickým chováním. Tato vazba se projevuje při silovém působení na tyto materiály, kdy je v důsledku vlastní deformace na jejich povrchu generován úměrný elektrický náboj (přímý piezoelektrický jev) [viz obr. 1.4 – a, b]. V opačném v případě, kdy je materiál vystaven působení vnějšího elektrického pole, pak dochází k jeho deformaci (nepřímý piezoelektrický jev) [viz obr. 1.4 – c,d]. Vzniká u látek, jejichž krystalografická soustava nemá střed symetrie, jedná se o jev anizotropní [17]. Z makroskopického pohledu tento jev vyplývá z nerovnoměrného rozložení elektrického náboje uvnitř krystalické mřížky, která u syntetických materiálů vznikne polarizačním procesem [viz obr. 1.5] nad Curieho teplotou popsaného v [15]. Při deformaci takového krystalu se kladná a záporná elektrická těžiště od sebe oddálí. Takže, i když je celkový náboj v krystalu neutrální, dojde vlivem oddálení elektrických těžišť ke vzniku elektrického dipólu a tím k elektrické polarizaci v daném směru. Na povrchu krystalu se pak vyskytuje elektrický náboj, který je možné snímat, resp. přivádět v případě opačného (inverzního) piezoelektrického jevu.



Obr. 1-4 Přímý (a, b) a nepřímý piezoelektrický jev (c, d) [16]

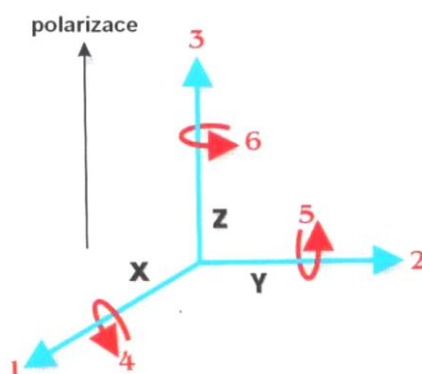


Obr. 1-5 Orientace elektrických dipólů v piezoelektrickém materiálu před a po polarizačním procesu [15]

Látky, u kterých se projevuje významnější⁵ piezoelektrické chování, mohou být přírodního či syntetického původu. Mezi přírodní (krystalické) patří např. již výše zmíněný křemen a turmalín. Syntetické jsou pak např. PZT (keramika na bázi tuhého roztoku olova, zirkonu a titanu) používající se k výrobě aktuátorů a senzorů [8] nebo polymery a tenké vrstvy popsané v [12].

1.2.3 Konstitutivní rovnice piezoelektrického materiálu

Pro popis chování těchto materiálů je potřeba vztahů, které by s dostatečnou přesností popsaly jejich provázanost mezi mechanickými a elektrickými vlastnosti. Tvar těchto rovnic je závislý na směru polarizace, který je v našem případě směr číslo 3 [viz obr. 1.6].



Obr. 1-6 Systém značení os a směr polarizace

V symbolickém zápisu s rozlišením na vektory a matice pomocí závorek mají tyto rovnice dle [17] podobu

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{s}^E]\{\mathbf{T}\} + [\mathbf{d}]\{\mathbf{E}\}, \quad (1.28)$$

$$\{\mathbf{D}\} = [\mathbf{d}]^T\{\mathbf{T}\} + [\boldsymbol{\epsilon}^T]\{\mathbf{E}\}, \quad (1.29)$$

po rozepsání symbolického zápisu do maticové podoby pak

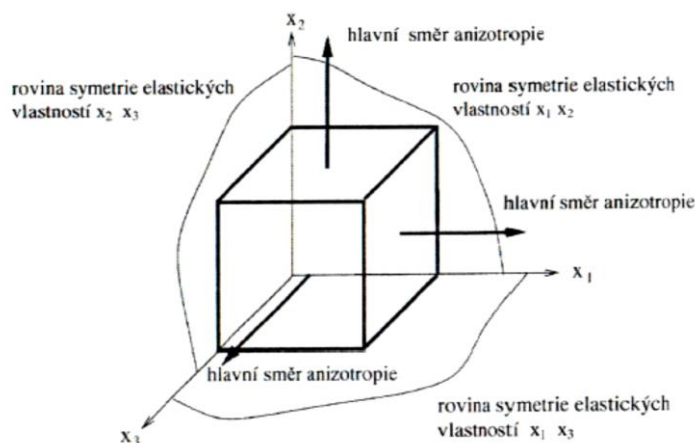
⁵ Materiálů, které vykazují piezoelektrické chování, je celá řada. Nicméně pouze u některých z nich je tento jev dostatečně výrazný pro technické využití.

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \quad (1.30)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \quad (1.31)$$

kde $\{S\}$ je vektor deformace, $\{T\}$ vektor napětí (N/m²), $\{D\}$ vektor elektrické indukce (C/m²), $\{E\}$ vektor intenzity elektrického pole (N/C), $[s^E]$ matice poddajnosti v konstantním elektrickém poli (m²/N; inverzní k matici tuhosti, která je někdy značena maticí c), $[d]$ matice piezoelektrických koeficientů (m/V nebo C/N) dávající do souvislosti mechanickou a elektrickou část a $[e^T]$ je matice dielektrických konstant při konstantním mechanickém napětí (jedná se o absolutní permitivitu materiálu v jednotkách F/m).

Z rovnice 1.29 je patrné (z matice poddajnosti s), že byl zaveden předpoklad ortotropního chování materiálu. Ortotropní materiály jsou charakteristické třemi navzájem kolmými rovinami symetrie elastických vlastností [viz obr. 1.7]. Pro matici poddajnosti, resp. tuhosti, je důsledkem této skutečnosti 9 nezávislých prvků a dále nezávislost mezi normálovými složkami napětí a zkosy vzhledem k příslušným nulovým prvkům matice tuhosti c , která má obdobný tvar jako matice poddajnosti s [18].



Obr. 1-7 Ortotropní materiál a jeho roviny symetrie

Dále se k popisu piezoelektrického materiálu využívá celá řada dalších veličin mající různý charakter, mezi některé z nich dle [19] patří,

piezoelektrická napěťová konstanta, vyjadřující intenzitu elektrického pole vztaženou na mechanické napětí v daném směru

$$g = \frac{E}{T}, \quad (1.32)$$

elektromechanický coupling faktor, který vyjadřuje účinnost přeměny mechanické energie v energii elektrickou a naopak [17]

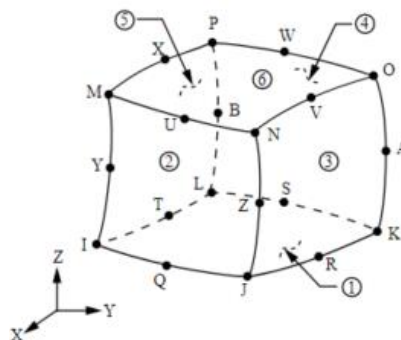
$$k^2 = \frac{d_{33}^2}{s^E \epsilon^T}, \quad (1.33)$$

kde číselné indexy označují směr polarizace, zde směr číslo 3 [viz obr. 1.6]. Účinnost piezoelektrické keramiky se dle [12] pohybuje v rozmezí 30 do 75 %.

1.2.4 Piezoelektrický jev v MKP

Pro získání matematických modelů zahrnující tento jev se nabízí celá řada komerčních softwarů, jako např. ANSYS, Abaqus a MSC/NASTRAN [20].

V našem případě byl využit software ANSYS Workbench 18.0. Ten využívá⁶ kvadratické elementy SOLID 226, což jsou prostorové dvacetiuzlové elementy, přičemž každý uzel může mít až pět stupňů volnosti [21] (pro náš případ čtyři, a to posuv ve směru x, y, z a VOLT) [viz obr. 1.8]. Tento typ elementu je možné využít pro statickou, modální i harmonickou analýzu a stejně tak pro analýzu přechodových dějů (transienční analýzu).



Obr. 1-8 Podoba elementu SOLID 226 [21]

Po využití variačního principu a diskretizaci pracuje MKP program s rovnicí dávající do souvislosti mechanické a elektrické vlastnosti piezoelektrického materiálu [20]:

⁶ Mezi další možné elementy s elektrickými stupni volnosti patří např.: SOLID5, SOLID98 nebo SOLID227. Mezi doporučené typy elementů patří uvedený SOLID226, případně SOLID227.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{UU} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{UU} & 0 \\ 0 & -\mathbf{C}_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU} & \mathbf{K}_{UV} \\ \mathbf{K}_{UV}^T & -\mathbf{K}_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

kde \mathbf{M}_{UU} je matice hmotnosti, \mathbf{C}_{UU} je matice mechanického tlumení, \mathbf{K}_{UU} je matice mechanické tuhosti, $\mathbf{K}_{UV}^T = \mathbf{K}_{VU}$ je piezoelektrická matice, \mathbf{K}_{VV} je matice dielektrické permitivity, \mathbf{U} je vektor uzlových posunutí, \mathbf{V} je vektor elektrického napětí, \mathbf{F} je vektor mechanické síly a \mathbf{L} je vektor elektrického náboje [22].

Mechanické tlumení \mathbf{C}_{UU} je definováno jako lineární kombinace hmotnosti a mechanické tuhosti

$$\mathbf{C}_{UU} = \alpha \mathbf{M}_{UU} + \beta \mathbf{K}_{UU}, \quad (1.35)$$

kde α a β jsou koeficienty Rayleighova tlumení, které obdržíme z poměrných útlumů b_r pro dané tvary kmitů, popsané v kapitole 1.1.1.1.

2 Identifikace dynamických systémů

V případech, kdy je obtížné vytvořit matematický model, který by s dostatečnou přesností zachycoval některé důležité vlastnosti mechanických, resp. mechatronických soustav ať už z důvodu některých zjednodušení, nebo neznalosti všech podstatných vlivů působících na soustavu, je možné vytvořit model pomocí experimentální identifikace. Základem této metody je měření odezvy chování reálné struktury při buzení vstupním signálem. Tento model je pak možné opět využít k návrhu řídicího algoritmu, např. pro realizaci aktivního tlumení vibrací apod.

2.1 Metoda Eigensystem Realization Algorithm (ERA)

Mezi známé metody identifikace lineárních dynamických systémů patří metoda ERA. Výstupem této metody je model v podobě diskrétního⁷ stavového popisu v balancovaném tvaru, což znamená, že všechny stavy jsou stejně pozorovatelné jako říditelné. Výhodou tohoto balancovaného tvaru je zajištění vyváženosti mezi těmito dvěma vlastnostmi, kdy jsou vybrány stavy, které jsou důležité pro chování systému [23]. Je tak například možné vyloučit z modelu stavy představující šum. Vstupem jsou pak časově diskrétní vstupní a výstupní signály.

Diskrétní stavový model popíšeme soustavou

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i+1} &= \mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}\mathbf{z}_i + \mathbf{D}\mathbf{u}_i, \end{aligned} \tag{1.36}$$

kde \mathbf{u}_i je vstupní hodnota, \mathbf{y}_i je výstupní hodnota, \mathbf{z}_i a \mathbf{z}_{i+1} jsou stavové vektory. Dolní index značí hodnotu diskrétního času $i\Delta t$, resp. $(i+1)\Delta t$, kde Δt je hodnota časového přírůstku.

Odezvu systému při zásahu budícího signálu za předpokladu nulových počátečních podmínek můžeme popsat následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{D}\mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 = \mathbf{B}\mathbf{u}_0, \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 \dots \end{aligned} \tag{1.37}$$

Tímto způsobem, který je podrobněji popsán v [23], se dostaneme až k následující formulaci, která nezahrnuje stavy modelu (z minulých a současných vstupů, počítáme současné výstupy)

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{A}^1\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{C}\mathbf{A}^0\mathbf{B}\mathbf{u}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u}_3, \tag{1.38}$$

⁷ Stejně tak existuje i spojité stavové popisy dynamických systémů, o kterém pojednává [8].

který pomocí tzv. Markovových parametrů \mathbf{h}_0 až \mathbf{h}_k , kde

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{D}, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, \quad k = 1, 2, 3 \dots, \quad (1.40)$$

přepíšeme do obecné podoby, která

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{h}_3\mathbf{u}_0 + \mathbf{h}_2\mathbf{u}_1 + \mathbf{h}_1\mathbf{u}_2 + \mathbf{h}_0. \quad (1.41)$$

Markovy parametry jsou v případě SISO⁸ systémů čísla a v případě MIMO⁹ systémů matice, resp. submatice a tvoří Markovu matici \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \dots \quad \mathbf{h}_p] = [\mathbf{D} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^0\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B}], \quad (1.42)$$

kde p je maximální uvažovaný řád systému. Je nutné brát na zřetel, že celkový počet vzorků q musí být větší než řád systému p .

První krok identifikace spočívá ve stanovení Markovových parametrů, a tedy ve stanovení matice \mathbf{H} . Nejdříve sestavíme souhrnnou vstupní \mathbf{U} a výstupní \mathbf{Y} matici v podobě

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_p & \dots & \mathbf{u}_q \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_{p-1} & \dots & \mathbf{u}_{q-1} \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 & \dots & \mathbf{u}_{p-2} & \dots & \mathbf{u}_{q-2} \\ \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 & \dots & \mathbf{u}_{q-p} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_0 \quad \mathbf{y}_1 \quad \dots \quad \mathbf{y}_q], \quad (1.44)$$

a sestavíme rovnici

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{U}. \quad (1.45)$$

Matice vstupů \mathbf{U} však není regulární maticí (je obdélníková a její rozměr je závislý na množství vstupů), tudíž je k vyjádření neznámé matice \mathbf{H} zapotřebí využít pseudoinverze popsané v [24]

$$\mathbf{H} = \mathbf{Y}\mathbf{U}^T(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1} = \mathbf{Y}\mathbf{U}^+. \quad (1.46)$$

Po vypočtení matice \mathbf{H} jsou již známy jednotlivé Markovy parametry a dospějeme tak ke stavové matici znázorňující vazbu mezi vstupem a výstupem \mathbf{D} .

Pro získání ostatních stavových matic je nutné Markovy parametry uspořádat do tzv. pomocných matic, což je základní Hankelova matice \mathbf{H}_1 a posunutá Hankelova matice \mathbf{H}_2

⁸ Single-input single-output system, tj. systém s jedním vstupem a výstupem.

⁹ Multiple input and multiple output systém, tj. systém s více vstupy a výstupy.

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_l \\ \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 & \cdots & \mathbf{h}_{l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_l & \mathbf{h}_{l+1} & \cdots & \mathbf{h}_{2l-1} \end{bmatrix}, \quad (1.47)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 & \cdots & \mathbf{h}_{l+1} \\ \mathbf{h}_3 & \mathbf{h}_4 & \cdots & \mathbf{h}_{l+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{l+1} & \mathbf{h}_{l+2} & \cdots & \mathbf{h}_{2l} \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

kde index l , pro který platí $2l=p$.

K tvorbě pomocných matic jsou využity matice říditelnosti \mathbf{Q} a pozorovatelnosti \mathbf{P} [23], které jsou definovány jako

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{l-1}\mathbf{B}], \quad (1.49)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{l-1} \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

a definují tak pomocné matice v podobě

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}\mathbf{Q}, \quad (1.51)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}. \quad (1.52)$$

Obě tyto rovnice však představují dvě neznámé, protože jsou dosud známy jen matice \mathbf{H}_1 a \mathbf{H}_2 . Vzhledem ke skutečnosti, že hledaný stavový model je ve výše zmíněném balancovaném tvaru, využijeme k řešení právě matic říditelnosti a pozorovatelnosti. Tyto matice obdržíme singulárním rozkladem matice \mathbf{H}_1 , díky kterému ohodnotíme pomocí singulárních čísel γ_i všechny stavy podle toho, jaký mají pro model význam [23]

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{U}^T = \mathbf{V}\mathbf{\Gamma}_v\mathbf{\Gamma}_u\mathbf{U}^T, \quad (1.53)$$

kde \mathbf{V} a \mathbf{U} jsou ortonormální matice a \mathbf{D} je diagonální matice singulárních čísel γ_i . Matice $\mathbf{\Gamma}_v$ a $\mathbf{\Gamma}_u$ jsou diagonální matice Hankelových singulárních čísel γ_i .

Pro matice říditelnosti \mathbf{Q} a pozorovatelnosti \mathbf{P} platí

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}\mathbf{\Gamma}_v, \quad (1.54)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}_u\mathbf{U}^T. \quad (1.55)$$

Po získání matic pozorovatelnosti \mathbf{P} a říditelnosti \mathbf{Q} , je matice řízení \mathbf{A} vypočtena opět pomocí pseudoinverze z rovnice (1.51) v podobě

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_2 \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T)^{-1} = \mathbf{P}^+ \mathbf{H}_2 \mathbf{Q}^+ . \quad (1.56)$$

Následně je pak možné vypočíst ostatní matice stavového popisu

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{Q} \mathbf{E}_m , \\ \mathbf{E}_m &= [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]^T \end{aligned} \quad (1.57)$$

a

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{E}_n^T \mathbf{P} , \\ \mathbf{E}_n &= [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]^T , \end{aligned} \quad (1.58)$$

kde \mathbf{E}_m a \mathbf{E}_n jsou jednotkové matice odpovídajícího rozměru.

ERA je základní metoda v oblasti identifikace a v mnoha případech je princip v určitých obměnách užíván v různých identifikačních metodách [23].

2.2 Identifikace v programu MATLAB

Identifikaci dynamického systému je možné provést i v programu MATLAB, který dle [25] nabízí implementované metody N4SID (Numerical algorithm for subspace state space system identification) a PEM (Prediction error method).

2.2.1 Popis systému [8]

Pro popis systému zde bude použito přenosových funkcí s uvažováním rušení ve formě

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{g})\mathbf{e}(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.59)$$

kde $y(t)$ je časová sekvence výstupního signálu a $u(t)$ je časová sekvence vstupního signálu, $e(t)$ je rušení jako sekvence náhodných čísel s nulovým průměrem a hodnotou hustoty pravděpodobnosti f_e , $G(g)$ je přenosová funkce popisující vztah mezi vstupy $u(t)$ a výstupy $y(t)$. $H(g)$ je potom přenosová funkce dávající do souvislosti vztah mezi rušením $e(t)$ a výstupním signálem systému $y(t)$. Symbol q označuje zpožďující operátor, pro který platí

$$\mathbf{q}^{-1}\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t - 1) . \quad (1.60)$$

Systém bez rušení je možné popsat

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{g}(k)\mathbf{u}(t - k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{g}(k)(\mathbf{q}^{-k}\mathbf{u}(t)) = \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{g}(k)\mathbf{q}^{-k} \right] \mathbf{u}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Z této rovnice je patrné, že výsledný vztah je polynom s koeficienty $g(k)$, které jsou násobeny vstupními hodnotami mající zpoždění k kroků.

Přenosová funkce popisující rušení byla rozepsána jako součet koeficientů v podobě

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{h}(k)\mathbf{q}^{-k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{h}(k)\mathbf{q}^{-k}. \quad (1.62)$$

Dále bylo provedeno označení

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(t) \quad (1.63)$$

a hodnota, která je predikována modelem jako

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = [1 - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})]\mathbf{v}(t). \quad (1.64)$$

Predikovaná výstupní hodnota modelu v čase $t-1$ pak je

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) &= \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}(t) + [1 - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})][\mathbf{y}(t) - \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}(t)] \\ &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}(t) + [1 - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})]\mathbf{y}(t). \end{aligned} \quad (1.65)$$

V další podkapitole minimalizovaná chyba predikce je dána vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{y}(t). \quad (1.66)$$

2.2.2 Princip identifikace [8]

Dle výše zmíněného je model dán funkcemi G , H a f_e . Vzhledem ke skutečnosti, že není vhodné model definovat pomocí nekonečného součtu koeficientů $g(k)$, $h(k)$ a jim odpovídající funkci f_e , je určen konečný počet numerických hodnot funkcí G a H . Funkce f_e není ve většině případů známa a k určení hodnot rušení $e(t)$ je za předpokladu normálního (Gaussova) rozložení pravděpodobnosti využíváno statistických centrálních momentů.

Koeficienty funkcí G a H jsou většinou potřeba odhadnout. Proto je označíme vektorem $\boldsymbol{\theta}$ a dále píšeme

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{e}(t). \quad (1.67)$$

Vektor $\boldsymbol{\theta}$ se nachází v podprostoru prostoru R^d , kde d je dimenze $\boldsymbol{\theta}$.

Rovnice 1.66 znázorňuje množinu modelů a cílem metod pro odhad parametrů je určit, který model z této množiny nejlépe odpovídá stanoveným požadavkům. Každý model $M(\boldsymbol{\theta})$ vlastně popisuje způsob předpovědi budoucích výstupů na základě v něm obsažených informací, což jsou naměřené vstupy a výstupy obsažené ve vektoru \mathbf{Z}^N :

$$\mathbf{Z}^N = [\mathbf{y}(1), \mathbf{u}(1), \mathbf{y}(2), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{y}(N), \mathbf{u}(N)]. \quad (1.68)$$

Je tedy nutné na základě vektoru \mathbf{Z}^N určit vhodné hodnoty vektoru $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ a konkrétní model $M(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)$ tak specifikovat.

K určení kvality modelu definujeme chybu predikce modelu $M(\theta_*)$

$$\varepsilon(t, \theta_*) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|\theta_*), \quad (1.69)$$

kde $y(t)$ je měřený výstup v okamžiku t a $\hat{y}(t|\theta_*)$ je jeho predikovaná podoba. Kvalitní model by tedy měl mít minimální hodnotu chyby predikce $\varepsilon(t, \theta_*)$.

2.2.3 Metoda N4SID (Numerical algorithm for subspace state space system identification) [8]

Tato neiterační numericky stabilní metoda využívá k nalezení parametrů modelu soustavu lineárních rovnic a je počátečním odhadem iterativní metody PEM, o které je pojednáno níže.

Soustava rovnic má následující podobu

$$\mathbf{y}(t) = \Gamma \mathbf{x}_t + \Phi \mathbf{u}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (1.70)$$

kde $\mathbf{y}(t)$ je vektor naměřených výstupů ve tvaru

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{y}_t^T, \mathbf{y}_{t+1}^T, \dots, \mathbf{y}_{t+\alpha-1}^T]^T \text{ pro } t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.71)$$

kde α je parametr splňující nerovnost $\alpha > n_{max}$, n_{max} je nejvyšší očekávaný řád modelu, T je transpozice [8].

Vektor vstupů $\mathbf{u}(t)$ má poté obdobný tvar

$$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{u}_t^T, \mathbf{u}_{t+1}^T, \dots, \mathbf{u}_{t+\alpha-1}^T]^T \text{ pro } t = 1, 2, \dots, N. \quad (1.72)$$

Matice rozšířené pozorovatelnosti Γ , která je obdobná matici pozorovatelnost P , o které bylo pojednáno výše, má rozměr $\alpha p \times n$ a zapíšeme ji ve tvaru

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix}. \quad (1.73)$$

Matice Φ se nazývá Toeplitzova a je složena z koeficientů odezvy systému na impulz. Její rozměr je $\alpha p \times \alpha m$, přičemž m je počet vstupů. Jedná se o dolní trojúhelníkovou matici

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\alpha-3}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CB} & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (1.74)$$

Vektor \mathbf{x}_t je stavovým vektorem a $\mathbf{n}(t)$ je rušení [8].

Stavové matice \mathbf{A} a \mathbf{C} jsou nejdříve odhadnuty z matice $\mathbf{\Gamma}$. Matice \mathbf{B} a \mathbf{D} jsou pak stanoveny na základě lineární regrese. Blíže je tato procedura popsána v [26].

Pro kvalitní odhad modelu je důležitý také parametr $\mathbf{z}(t)$, resp. N4Horizon v MATLABu, který se skládá z minulých výstupů, minulých vstupů a budoucích vstupů systému

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{y}_{t-\beta}^T, \dots, \mathbf{y}_{t-1}^T, \mathbf{u}_{t-\beta}^T, \dots, \mathbf{u}_{t+\alpha-1}^T]^T, \quad (1.75)$$

kde $\beta \geq \alpha$ je uživatelem volený parametr. Důsledkem tohoto parametru je dynamický model, který odráží jak deterministické, tak stochastické chování, resp. chování způsobené vstupním signálem a šumem [26].

V případě, že chceme vytvořit model nezahrnující šum, je třeba do parametru $\mathbf{z}(t)$ nezahrnout minulé výstupy [8].

Tento parametr může do značné míry ovlivnit kvalitu odhadu modelu. Pro stanovení jeho hodnot však nejsou žádná jednoduchá a univerzální pravidla [27]. Stanovení může být často založeno na zkušenostech a náhodného zkoušení.

2.2.4 Metoda PEM (Prediction error method) [8]

Metoda PEM je iterační metodou a její výsledek je do značné míry závislý na modelu vytvořeným metodou N4SID.

Hlavním cílem této metody, jak už název napovídá, je stanovení chyby predikce. Tu je možné chápat jako vektor v prostoru R^N , který můžeme stanovit nějakou normou v témže prostoru.

Pro sekvenci v $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{\theta}_*)$, o které bylo pojednáno v kapitole 2.2.2, použijeme lineární filtr $L(q)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_F(t, \boldsymbol{\theta}) = L(q)\boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{\theta}_*) \quad \text{pro } 1 \leq t \leq N. \quad (1.76)$$

Dále zvolíme normu¹⁰

$$\mathbf{V}_N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z}^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N l(\boldsymbol{\varepsilon}_F(t, \boldsymbol{\theta})), \quad (1.77)$$

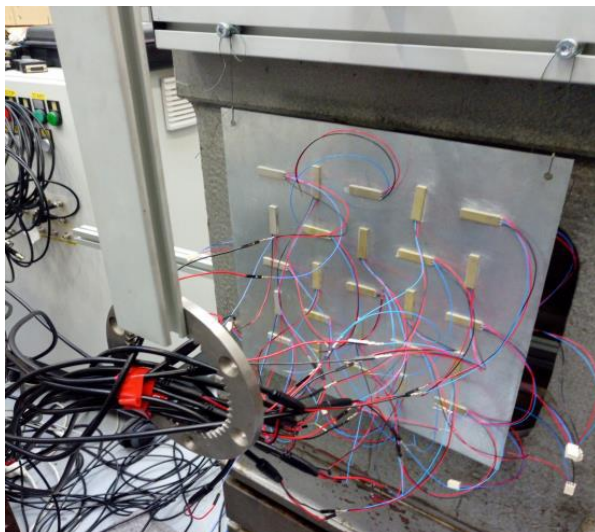
kde l je skalární pozitivní funkce. $\mathbf{V}_N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z}^N)$ je pro vektor \mathbf{Z}^N skalární funkce parametrů $\boldsymbol{\theta}$. K nalezení modelu s optimálními parametry je třeba nalézt takový vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, který minimalizuje funkci $\mathbf{V}_N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z}^N)$, tedy

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N(\mathbf{Z}^N) = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\theta} \in D_M} \mathbf{V}_N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z}^N). \quad (1.78)$$

¹⁰ System Identification Toolbox využívá normu $\mathbf{V}_N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z}^N) = \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^2$ [8].

3 Popis experimentální soustavy s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky

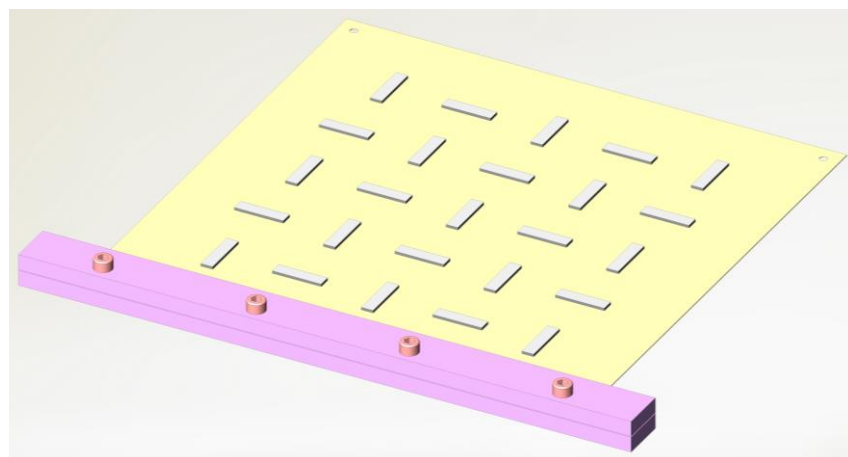
Jedná se o experimentální mechatronickou soustavu, která je tvořena ocelovým plechem a planárními piezoaktuátory a piezosensory, které jsou umístěny na obou stranách desky, tj. na horní straně aktuátory a na dolní pak kolokované senzory vždy v počtu 25 [viz obr. 3.1, 3.2 a 3.3]. Tato experimentální soustava má zachytit chování reálných poddajných strojních součástí vybavené aktivními prvky pro snižování vibrací, které jsou vystavovány buzení buď ze strany vnějšího okolí, nebo např. vlivem vlastních pohonů zajišťující funkčnost daného zařízení. S ohledem na skutečnost, že aktivní prvky se na desce vyskytují ve velkém množství a poměrně velké hustotě, hrají nezanedbatelnou roli, jak v reálné soustavě, tak i ve fyzikálním modelu s ohledem na změnu hmotnosti, tuhosti, a tedy i dynamické vlastnosti soustavy.



Obr. 3-1 Skutečná podoba „volně“ uložené experimentální soustavy



Obr. 3-2 Skutečná podoba vetknuté experimentální soustavy



Obr. 3-3 3D model experimentální soustavy

3.1 Části experimentální soustavy

Soustava se skládá z několika částí, přičemž použití některých z nich bylo závislé na zvolené experimentální konfiguraci:

Konfigurace č. 1

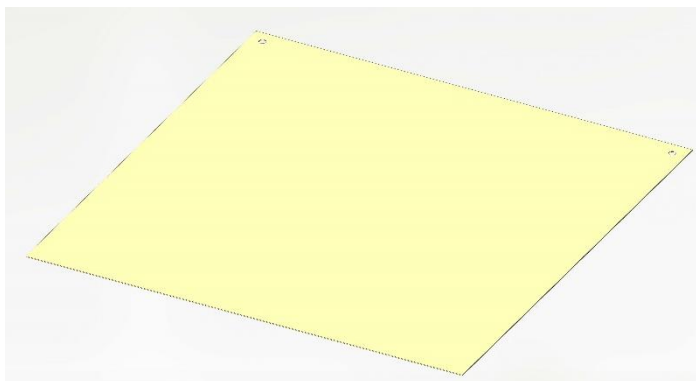
- 1) **Deska** – je základní částí, na které jsou umístěny prvky pro snímání a potlačování vibrací, která má velký vliv na mechanické vlastnosti soustavy, a to zejména na poddajnost,
- 2) **Aktuátory** – piezoelektrické prvky sloužící k vyvozování síly v místě jeho aplikace pomocí nalepení,
- 3) **Senzory** – piezoelektrické prvky sloužící ke snímání deformace v místě jeho aplikace pomocí nalepení.

Konfigurace č. 2

Této konfiguraci se bude tato práce věnovat zejména a obsahuje mimo výše zmíněné také:

- 4) **Ploché tyče** – pro konfiguraci č. 2 byly z důvodu zvýšení projevu některých dynamických vlastností (vlastních frekvencí, amplitud kmitání apod.) na konec desky z obou stran namontovány ploché tyče,
- 5) **Šrouby** – slouží k připevnění plochých tyčí k desce a v modelu nebudou dále uvažovány.

- ad 1) Desku představuje plech o rozměrech 326 x 326 a tloušťce 0,55 mm, na který jsou podle potřeb aplikovány okrajové podmínky ať už vetknutím pomocí šroubů, či „volným“ uložením umělými vlákny (vlasci) [viz obr. 3.4]. Materiál desky (plechu) je pozinkovaná ocel 1.0917 dle DIN.



Obr. 3-4 Deska

- ad 2) Aktuátory jsou prvky pracující na principu přímého piezoelektrického jevu pro aktivní snižování nežádoucích vibrací. Použity byly piezoelektrické rovinné aktuátory deskové

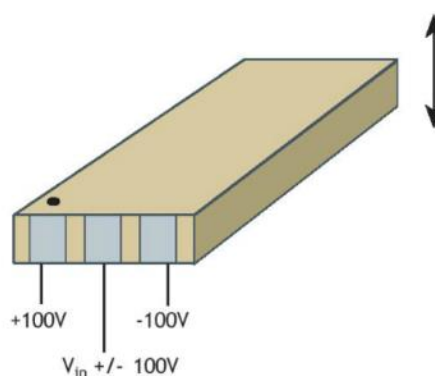
podoby CMBP06 od společnosti Noliac [28], [viz obr. 3.5]. Tyto prvky se skládají z několika tenkých vrstev (o tloušťce do 67 μm) piezoelektrického materiálu NCE 57, střídajících se s vnitřními elektrodami [viz obr. 3.6]. Na tyto elektrody je přiváděno napájecí (100 V a -100 V) a řídicí (+/-100V) napětí [viz obr. 3.7] způsobující deformaci podle přímého piezoelektrického jevu popsaného výše. Všechny elektrody (kladné, záporné i řídicí) jsou vždy navázané na jednu elektrodu vnější [viz obr. 3.6]. Rozměry aktuátorů společně s maximální vyvozenou silou, volnou deformací a maximálním operačním napětím jsou v tab. č. 1, další parametry jsou udané v [28]. Složitost struktury piezoprvků (piezopatchů) potvrzuje odhalená část, vzniklá odstraňováním poškozeného aktuátoru broušením [viz obr. 3.8].



Obr. 3-5 Planární piezoprvek CMBP06 [27]



Obr. 3-6 Vnitřní uskupení elektrod



Obr. 3-7 Napájení piezoelektrického aktuátoru [27]

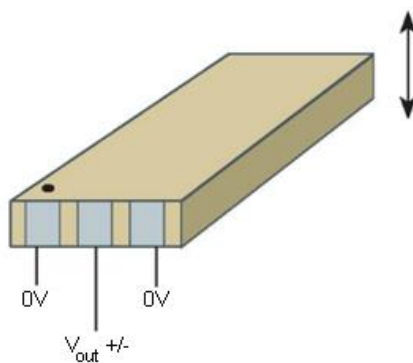
| Délka [mm] | Šířka [mm] | Výška [mm] | Maximální operační napětí [V] | Maximální volná deformace [μm] | Maximální vyvozená síla [N] |
|-------------|--------------|-------------|-------------------------------|---|-----------------------------|
| 32 +/- 0.65 | 7.8 +/- 0.15 | 1.8 +/- 0.1 | 200 | +/- 210 | 4.3 |

Tab. 1 Některé parametry piezoaktuátoru / senzoru CMBP06



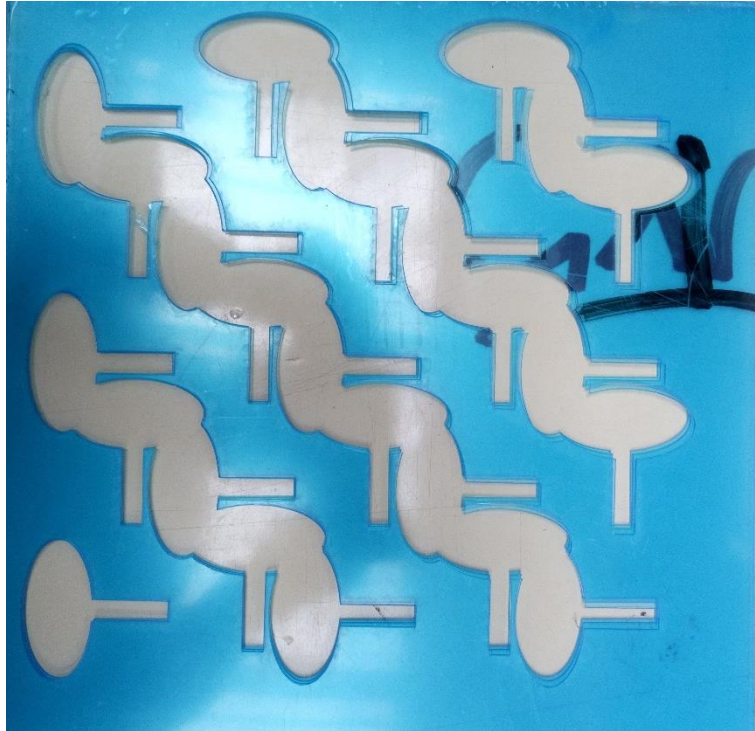
Obr. 3-8 Částečně obroušený povrch piezoaktuátoru. Čáry, připomínající letokruhy, jsou jednotlivé vrstvy zmíněných piezoprvků.

- ad 3) Sensory jsou stejné piezoelektrické prvky jako aktuátory s tím rozdílem, že nejsou napájeny, tj. napájecí napětí je nulové a snímané, resp. řídicí napětí se mění podle nepřímého piezoelektrického jevu v závislosti na deformaci desky, a tedy i senzoru [viz obr. 3.9]. Připevnění senzorů bylo rovněž stejné jako připevnění aktuátorů.

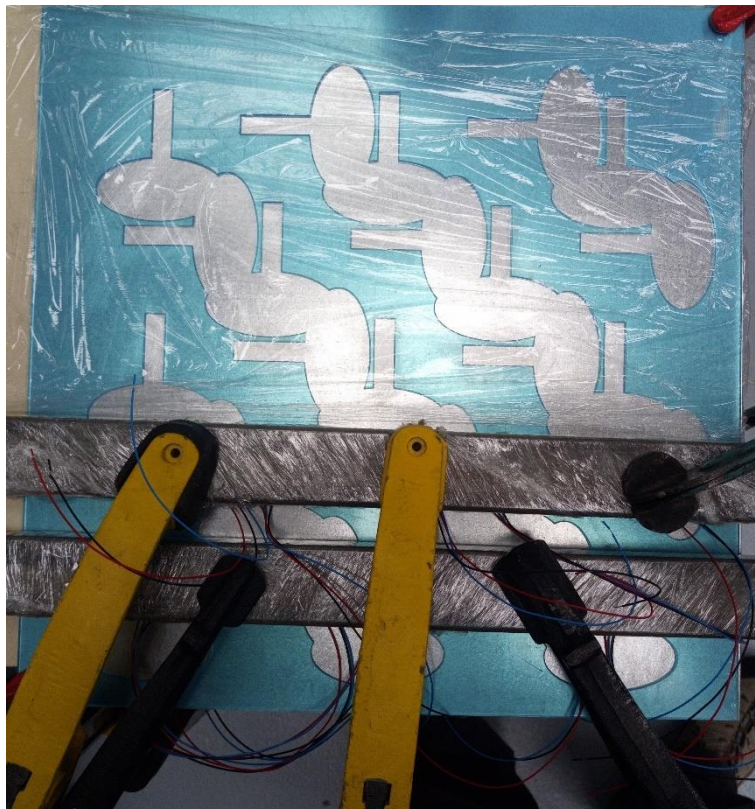


Obr. 3-9 Napájení piezoelektrického senzoru [27]

K připevnění piezoprvků na desku bylo použito vysoko pevnostní epoxidové lepidlo SPABOND 345. Aby byla zajištěna dostatečná přesnost uložení piezoprvků (piezopatchů), použilo se pro jejich uložení šablony z plexiskla vyrobené laserovou technologií [viz obr. 3.10 a 3.11].

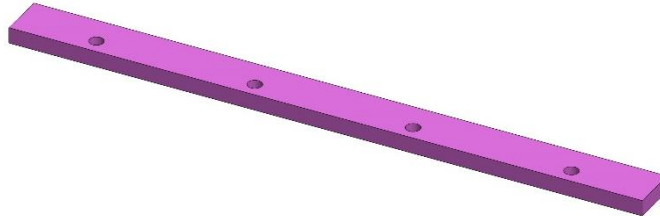


Obr. 3-10 Šablona pro přesné nalepení piezoprveků (piezopatchů). Eliptické kapsy jsou pro kabeláž



Obr. 3-11 Ukázka průběhu aplikace piezoprveků (piezopatchů) na desku lepením. Fólie byla použita proto, aby bylo zabráněno znečištění jednotlivých komponent od lepidla.

- ad 4) Ploché tyče o rozměru 30 x 10 x 400 mm jsou připevněny svěrně proti sobě na konci desky pomocí čtyř šroubů M8 [viz obr. 3.12]. Šrouby neprocházejí deskou. Materiál tyčí je nerezová ocel 1.4301 dle DIN. Tyče mají výrazný podíl na zvýšení hmotnosti a ovlivnění vlastních frekvencí celé soustavy [viz obr. 3.3].



Obr. 3-12 Plochá tyč s otvory pro šrouby M8

4 Matematický model soustavy s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky

V této části byl v programu ANSYS Workbench 18.0 a jeho nadstavbě Piezoelectric and MEMS extension vytvořen MKP model experimentální soustavy s piezoelektrickými prvky, pro který byla následně provedena statická, modální a tzv. harmonická analýza pro zjištění odezvy na dané buzení. Dále byly vygenerovány matice hmotnosti a tuhosti systému. Tyto matice byly následně použity v kapitole (6) této práce pro redukci a tvorbu stavového popisu výsledné mechatronické soustavy.

4.1 Příprava MKP modelu

Zde bude popsán postup přípravy (Preprocessing) výpočtového modelu s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky pro následnou statickou, modální a harmonickou analýzu.

4.1.1 Materiálové vlastnosti

Materiálové vlastnosti a jiné informace jsou v programu Ansys Workbench definovány pod položkou Engineering data. Konvenční materiály, jako např. konstrukční ocel, jsou zde předem definovány. Zbylé je třeba definovat ručně podle dostupných nebo vlastních zdrojů.

Jak již bylo popsáno výše, byla pro desku jako materiál použita ocel. Ta je definována jako izotropní, homogenní materiál. Z toho plyne, že k jeho úplnému popisu v oblasti lineárního Hookova zákona, kde se budou napětí a deformace pohybovat, je za potřebí dvou¹¹ nezávislých konstant, modulu pružnosti v tahu E a Poissonova čísla ν . Dále byla také definována hustota (měrná hmotnost) oceli ρ . Tyto hodnoty jsou patrné viz tab. 2.

| | |
|---|-------------------|
| Měrná hmotnost ρ [kg.m ⁻³] | 7850 |
| Poissonovo číslo ν [-] | 0.3 |
| Modul pružnosti v tahu E [N.m ⁻²] | $2 \cdot 10^{11}$ |

Tab. 2 Mechanické vlastnosti oceli

Piezokeramika [29], ze které jsou vyrobeny piezoelektrické aktuátory a senzory, uvažované v této práci, je považována za materiál s ortotropním mechanickým chováním, o kterém bylo blíže pojednáno v kapitole 1.2.3. Ortotropní materiál je úplně definován 9 nezávislými materiálovými konstantami uspořádanými do symetrické matice tuhosti \mathbf{C} , která se vzhledem k využití Voigtova¹² zápisu skládá ze 36 prvků, viz zápis 4.1:

¹¹ Obecný anizotropní materiál je definován maticí elastických konstant C_{ijkl} , která je 4. řádu a skládá se tak z 81 nezávislých složek. S ohledem na tzv. malou a velkou (energetickou) symetrii popsanou v [43] se počet těchto materiálových konstant sníží na 21.

¹² Při využití Voigtova zápisu se rozměr matice elastických konstant změní na 6 x 6, viz [43].

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Protože program ANSYS využívá jiné pořadí prvků v matici elastických konstant [29], kterou budeme dále nazývat maticí tuhosti, je potřeba mít tuto skutečnost na zřeteli při zadávání jednotlivých prvků do matice tuhosti v ANSYSu, kterou označíme \mathbf{C}_{ANSYS} a jejíž podoba je v 4.2:

$$\mathbf{C}_{ANSYS} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{16} & C_{14} & C_{15} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{26} & C_{24} & C_{25} \\ & & C_{33} & C_{36} & C_{34} & C_{35} \\ & & & C_{66} & C_{46} & C_{56} \\ & & & & C_{44} & C_{54} \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Matici tuhosti \mathbf{C} převedeme do její inverzní podoby, matice poddajnosti \mathbf{S} , pro kterou platí

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}, \quad (4.3)$$

a její prvky v zápisu programu ANSYS jsou dle [30] symbolicky rovny

$$\mathbf{S}_{ANSYS} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_y & -\nu_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ & & & & 1/G_{yz} & 0 \\ & & & & & 1/G_{xz} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

kde E_x, E_y, E_z jsou moduly pružnosti v tahu ve směrech x, y, z,

$\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$ jsou Poissonova čísla, u kterých první index představuje směr působícího normálového napětí a druhý směr, při němž vzniká příslušná deformace v příčném směru.

Konkrétní hodnoty matice poddajnosti byly zkombinovány¹³ z dostupných dat od výrobce [30] a z dat, která poskytují jiné informační zdroje [31]. Ty uvádějí hodnoty pro piezokeramiku na bázi olova, zirkonu a titanu s označením PZT-5A, která je podle [30] a [32] ekvivalentní materiálu NCE57, který lze také

¹³ Výrobce v technickém listu piezokeramiky NCE57 viz [30] poskytuje z mechanických vlastností pouze prvky s_{11} a s_{33} . Zbylé potřebné prvky této matice byly doplněny ze zdroje [31].

nalézt pod označením Navy Type II, stejně jako materiál PZT-5A. Matice poddajnosti pak získala následující podobu

$$S_{ANSYS} = \begin{bmatrix} 17 & -5.74 & -7.22 & 0 & 0 & 0 \\ -5.74 & 16.4 & -7.22 & 0 & 0 & 0 \\ -7.22 & -7.22 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 44.3 & 0 & 0 \\ & & & & 47.5 & 0 \\ & & & & & 47.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} [\text{m}^2/\text{N}] \quad (4.5)$$

a matice tuhosti mápodobu

$$C_{ANSYS} = \begin{bmatrix} 9.806 & 5.555 & 4.822 & 0 & 0 & 0 \\ 5.555 & 10.222 & 4.953 & 0 & 0 & 0 \\ 4.822 & 4.953 & 7.416 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2.257 & 0 & 0 \\ & & & & 2.105 & 0 \\ & & & & & 2.105 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} [\text{N}/\text{m}^2]. \quad (4.6)$$

Dále byla definována dle [30] hustota (měrná hmotnost) viz tab. 3.

| | |
|---|------|
| Měrná hmotnost ρ [kg.m ⁻³] | 7700 |
|---|------|

Tab. 3 Mechanické vlastnosti piezokermiky NCE57 (PZT-5A)

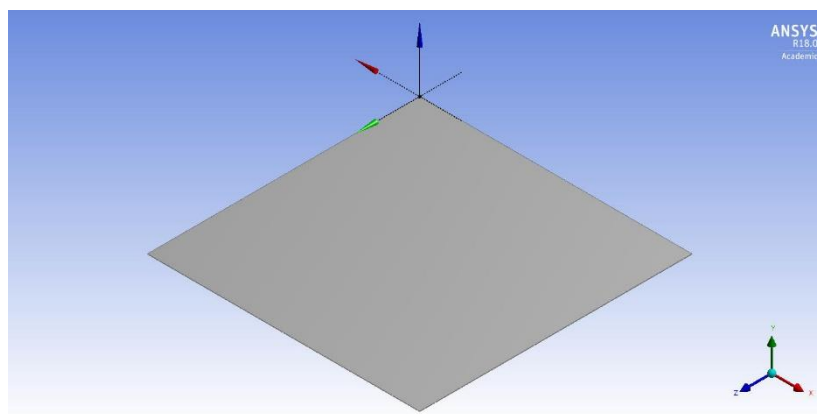
4.1.2 Geometrie modelu

V položce „Geometry“ byla definována geometrie výpočtového modelu. Jako nástroj¹⁴ byl využit modelář DesignModeler, který je součástí programu ANSYS Workbench a poskytuje pro naše účely všechny potřebné prvky k tvorbě geometrie 3D poddajných těles (vysunutí, dělení, lineární pole, zrcadlení apod.). Modelář pracuje na základě historie stavby modelu, což umožňuje zpětně provádět případné potřebné změny.

Model experimentální soustavy byl vytvořen postupným „vrstvením“ jednotlivých dílců na sebe s parametry popsány v kapitole č. 3.

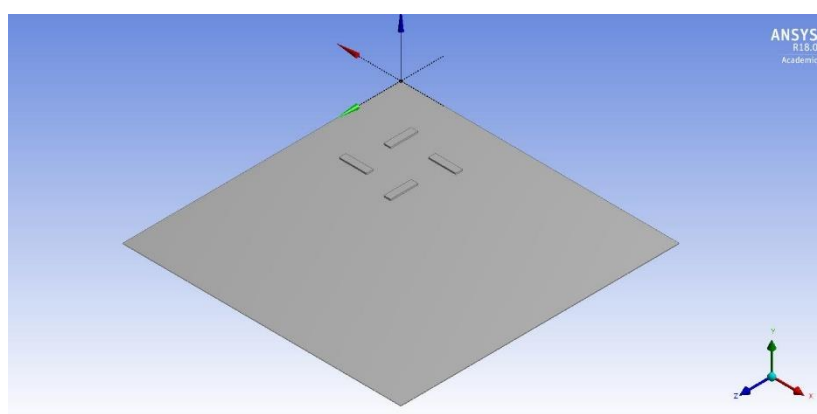
Nejdříve byla vytvořena deska [viz obr. 4.1].

¹⁴ Nástrojů, které je možné použít pro tvorbu geometrie modelu, je celá řada. ANSYS nabízí mimo zmíněný DesignModeler také SpaceClaim, o němž pojednává [33], což je sofistikovanější program pro tvorbu 3D modelů, který je implementován do prostředí programu ANSYS. Další možností by bylo využití některých z komerčních 3D CADů, např.: Solid Works, Autodesk Inventor, CATIA atd., a geometrický model pak importovat do prostředí programu ANSYS.

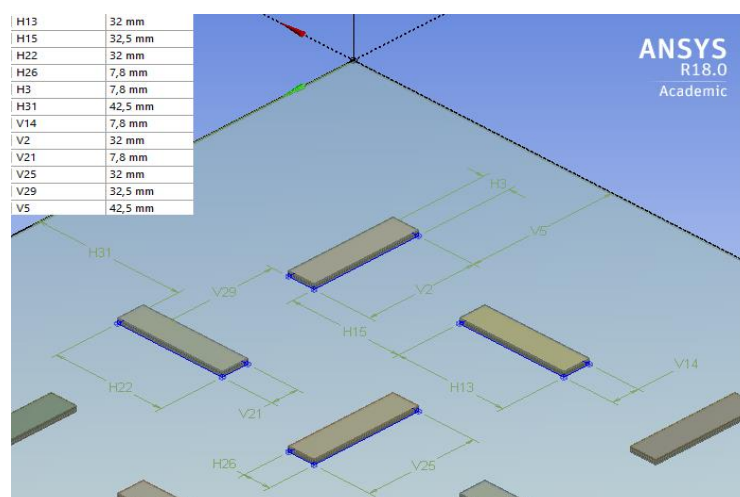


Obr. 4-1 Deska

Na její vrchní straně byly vzápětí vysunuty destičky v podobě obdélníku představující piezopatche [viz obr. 4.2]. Rozměrové uspořádání je patrné [viz obr. 4.3].



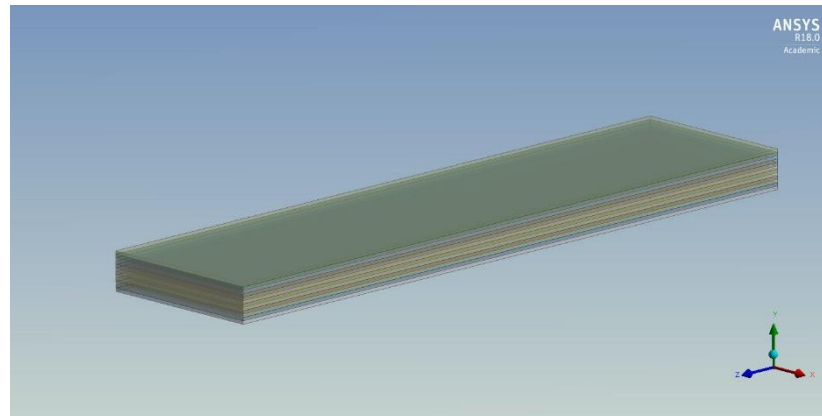
Obr. 4-2 Piezopatche vytvořené na desce



Obr. 4-3 Rozměrové uspořádání piezopatchů

Tyto destičky byly dále rozděleny na 12 plátek o tloušťce 0,15 mm znázorňující vrstvy a zároveň plochy (elektrody), kam budou aplikovány elektrické okrajové podmínky a napětí [viz obr. 4.4]. Tyto plátky, které tvoří piezopatch, byly sjednoceny do jediné komponenty příkazem „Form New Part“.

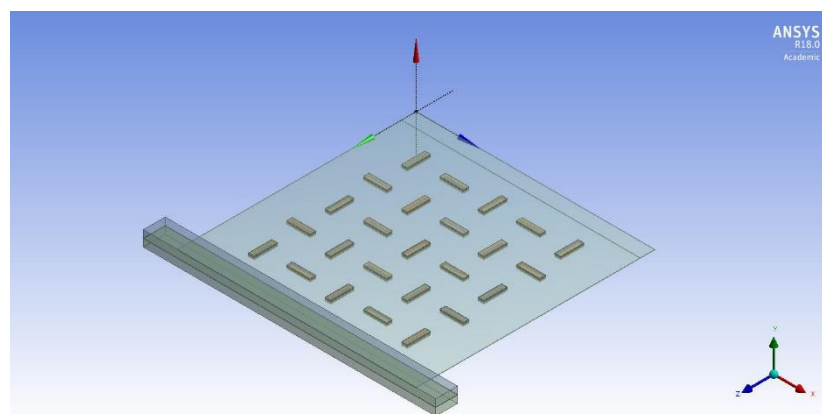
Výhoda tohoto sjednocení do jedné komponenty je v tom, že plátky mají v dělicích rovinách svázaný posuvy, resp. stupně volnosti. Není pro ně pak nutné definovat zvlášť kontaktní vazby ani nejsou automaticky generovány na sebe doléhajících plochách. To je příznivé z hlediska výpočtové náročnosti s ohledem na počet piezopatchů, resp. plátek v celé experimentální soustavě. Zdůrazněme, že první plátek od shora a od spodu představují izolaci, která se aktivně nepodílí na procesu generování deformace, resp. elektrického napětí.



Obr. 4-4 Vrstvy jednotlivých piezopatchů

Následně bylo využito prvků lineárního pole a zrcadlení kolem roviny symetrie desky pro všechny dosud vymodelované piezopatche.

Jako poslední byly vymodelovány dvě ploché tyče na konci desky. Tyto tyče byly zjednodušené na úkor děr pro šrouby. Výsledný geometrický model experimentální soustavy je patrný [viz obr. 4.5]. Na tomto vyobrazení je v horní v pravé části desky patrná čára, která vymezuje oblast pro budoucí zavedení okrajových podmínek.

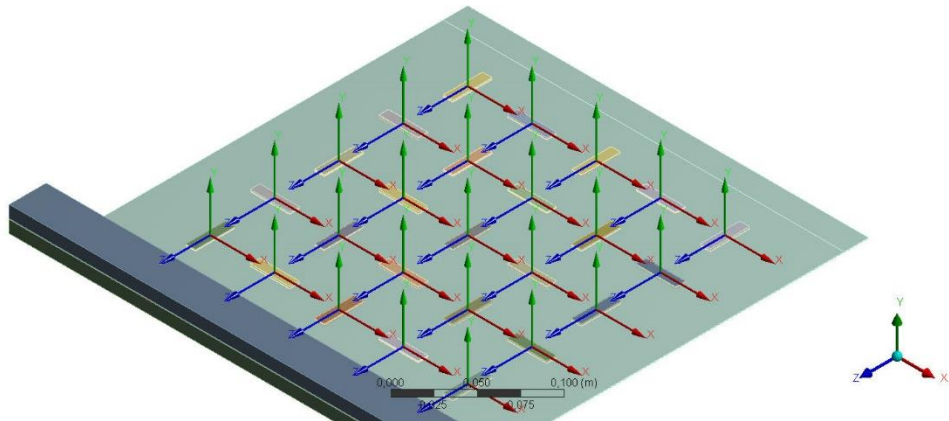


Obr. 4-5 Výsledná geometrická podoba modelu experimentální soustavy s mnoha rovinnými piezoelektrickými prvky

4.1.3 Výpočetní podmínky

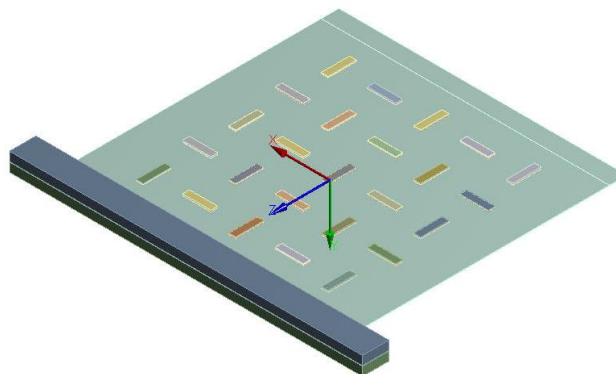
Pod položkou „Model“, byly definovány potřebné souřadnicové systémy, kontaktní vazby, druh a jemnost použité sítě, okrajové podmínky, druh matematického řešiče, druh analýzy (statická a modální), atd.

V prvním kroku byly definovány souřadnicové systémy pro každý piezopatch na vrchní straně desky [viz obr. 4.6]. Ty sloužily jako lokální souřadnicové systémy aktuátorů a senzorů pro výběr ploch při definici okrajových podmínek a napětí.



Obr. 4-6 Lokální souřadnicové systémy

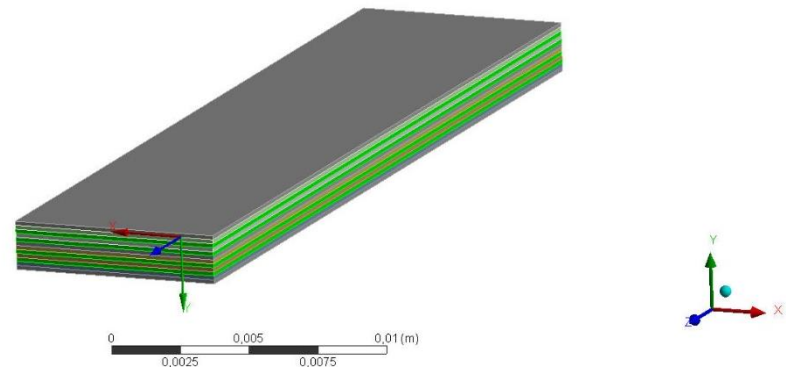
Poté následovala definice souřadnicového systému k nastavení směru polarizace aktuátorů, který bude v této práci uvažován ve směru osy (Y) (zelená šipka) [viz obr. 4.7]. Tento souřadnicový systém budeme nazývat polarizačním.



Obr. 4-7 Polarizační souřadnicový systém udávající směr a kladný smysl polarizace (osa Y)

Jednotlivým piezopatchům, desce a plochým tyčím byly v poloze geometrie tohoto modulu přiřazeny materiály a souřadnicové systémy definované výše. Tato procedura je významná především pro piezopatche (aktuátory a senzory), kde je zapotřebí kromě materiálu v podobě piezokeramiky přiřadit také souřadnicový systém pro směr polarizace. Směr polarizace se kvůli zvýšení deformace aktuátoru, na jehož vstupní elektrody je přivedeno elektrické napětí, střídá po jednotlivých vrstvách (plátcích). Ty jsou zároveň zrcadlově převrácené vůči rovině symetrie piezopatche kolmé na osu (Y)

globálního souřadnicového systému [viz obr. 4.8]. Zeleně označené vrstvy mají směr polarizace v kladném smyslu osy (Y) polarizačního souřadnicového systému (viditelného na přední straně piezopatche), ostatní pak ve smyslu opačném stejného směru.



Obr. 4-8 Polarizace piezopatche. Plátky, které mají osu polarizace ve směru a kladném smyslu osy Y polarizačního souřadnicového systému, jsou znázorněny zeleně.

Definice kontaktů mezi piezopatchy a deskou byla nastavena dle modelu, o kterém pojednává [33] [viz obr. 4.9].

| | |
|-------------------------------|--------------------|
| Scope | |
| Scoping Method | Geometry Selection |
| Contact | 1 Face |
| Target | 1 Face |
| Contact Bodies | Solid |
| Target Bodies | Plech |
| Definition | |
| Type | Bonded |
| Scope Mode | Automatic |
| Behavior | Symmetric |
| Trim Contact | Program Controlled |
| Trim Tolerance | 5,e-005 m |
| Suppressed | No |
| Advanced | |
| Formulation | Pure Penalty |
| Detection Method | Program Controlled |
| Elastic Slip Tolerance | Program Controlled |
| Normal Stiffness | Program Controlled |
| Update Stiffness | Never |
| Pinball Region | Program Controlled |
| Geometric Modification | |
| Contact Geometry Correction | None |
| Target Geometry Correction | None |

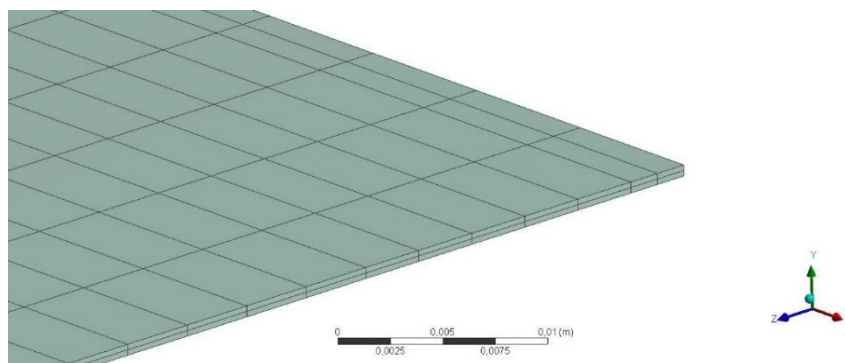
Obr. 4-9 Definice kontaktů mezi deskou a piezopatchy

Kontakt mezi deskou a plochými tyčemi byl definován [viz obr. 4.10].

| | |
|-------------------------------|--------------------|
| Scope | |
| Scoping Method | Geometry Selection |
| Contact | 1 Face |
| Target | 1 Face |
| Contact Bodies | Plech |
| Target Bodies | Solid |
| Definition | |
| Type | Bonded |
| Scope Mode | Manual |
| Behavior | Program Controlled |
| Trim Contact | Program Controlled |
| Suppressed | No |
| Advanced | |
| Formulation | MPC |
| Detection Method | Program Controlled |
| Constraint Type | Program Controlled |
| Pinball Region | Program Controlled |
| Geometric Modification | |
| Contact Geometry Correction | None |
| Target Geometry Correction | None |

Obr. 4-10 Definice kontaktů mezi deskou a plochými tyčemi

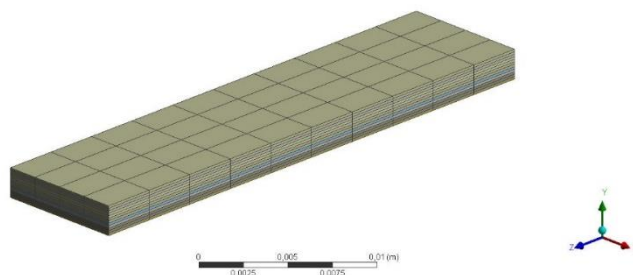
Při generování konečno prvkové sítě desky byl využit atribut „Edge Sizing“, který generuje síť pro dané objemové¹⁵ těleso na základě rozměru vybrané úsečky rozdělené na počet zadaných částí. Pro náš případ byla touto úsečkou spojnice rohů plechu rozdělená na dva elementy po tloušťce [viz obr. 4.11]. Druh elementů použitých pro síťování byly objemové SOLID 186, což jsou kvadratické dvacetizlové prvky se třemi stupni volnosti pro každý uzel. Pro ploché tyče byla použita stejná technika.



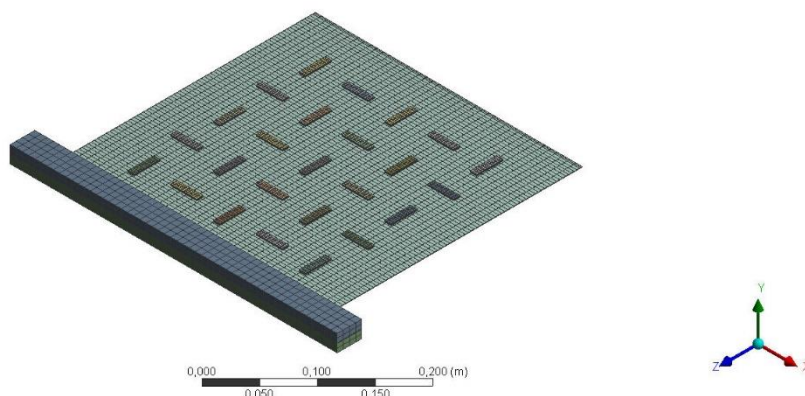
Obr. 4-11 Konečno prvková síť desky

Piezopatche byly síťovány obdobným způsobem tak, aby byl jeden element po tloušťce každého plátku (vrstvy) [viz obr. 4.12]. Prostorové elementy použité pro síť byly SOLID 226, které byly zmíněny v kapitole 1. Počet použitých elementů na celkový model byl 32 588, počet uzlů pak 179 075 [viz obr. 4.13].

¹⁵ Desku (plech) by bylo s ohledem na její rozměry, kde výrazně převyšují dva rozměry nad tloušťkou vhodnější modelovat jako skořepinu, o kterých pojednává [8]. Nicméně předchozí konfigurace, o které pojednává [8] využívala tento postup, který v této práci dodržíme.



Obr. 4-12 Konečnoprvková síť desky



Obr. 4-13 Konečnoprvková síť experimentální soustavy

4.2 Statická analýza

Statická, resp. kvazistatická analýza, spočívá ve zjištění časově neměnných, resp. velmi pomalu se měnících závislostí mezi veličinami. Těmito veličinami mohou být např. závislost mezi deformací, posuvy a povrchovým či objemovým silovým zatížením, nebo v našem pojetí závislost mezi deformací a intenzitou vnějšího elektrického pole za ustáleného stavu, o které bylo pojednáno v kapitole 1. této práce a mnoho dalších.

Pro tuto práci byla statická analýza použita pro „předepnutí“ od tíhové síly, která je výrazně vyšší s ohledem na ploché tyče. Tato analýza byla vstupním modelem pro analýzu modální, o které bude pojednáno v následující kapitole. Kromě toho sloužila také k ověření a vizualizaci interakcí a kontaktů mezi jednotlivými vrstvami a prvky, tj. pro předběžnou kontrolu modelu.

Základní rovnice 1.17 používaná pro řešení statických úloh v MKP byla popsána v kapitole 1.2 této práce. Pro její řešení je nutné zavést doplňující předpoklady:

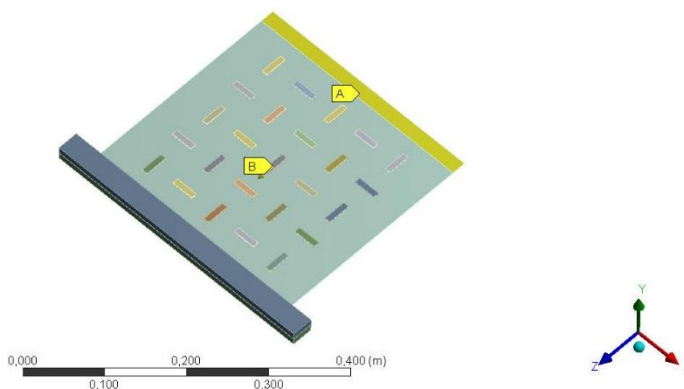
- 1) matice tuhosti \mathbf{K} je konstantní, časově neměnná,
- 2) chování materiálu, jako odezvy na zatížení je lineární,
- 3) všechny posuvy (deformace) jsou malé,
- 4) vektor vnějšího silového zatížení \mathbf{f} je časově neměnný,
- 5) nejsou zahrnuty žádné tlumící účinky.

4.2.1 Okrajové podmínky a zatížení ve statické analýze

Experimentální soustava byla upevněná vetknutím desky na opačném konci, než se nacházejí ploché tyče [viz obr. 3.1 a 3.2]. Toto vetknutí předepsalo všem uzlům příslušným oblasti nulové posuvy, jelikož síť jednotlivých prvků byla tvořena uzly se třemi stupni volnosti (posuvy) [viz obr. 4.14].

Vzhledem ke skutečnosti, že ploché tyče významně zvyšují hmotnost celé experimentální soustavy, bylo nutné tuto skutečnost reflektovat v modelu.

Zatížení bylo definováno tíhovou silou atributem „Standart Earth Gravity“, která působí na všechny komponenty sestavy, které mají definovanou měrnou hmotnost ρ , což jsou všechny součásti. Nastavena byla hodnota tíhového zrychlení g o velikosti $9,8066 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ve směru a kladném smyslu osy Z dle globálního souřadnicového systému [viz obr. 4.14].



Obr. 4-14 Zavedení okrajových podmínek

4.2.2 Vytvoření piezoelektrické interakce

Aby se u jednotlivých piezopatchů začal projevovat piezoelektrický jev, je nutné těmto komponentám tuto vlastnost přiřadit atributem „Piezoelectric Body“. Poté je nutné analogicky s konstitutivním zákonem 1.27 a 1.28 přiřadit následující parametry:

- 1) matici relativní permittivity s ohledem na osu polarizace (Y) dle [34] a její hodnoty zkombinované dle [30] a [31]

$$\frac{\boldsymbol{\epsilon}^T}{\epsilon_0} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & & \\ & \epsilon_{33} & \\ & & \epsilon_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1730 & & \\ & 1800 & \\ & & 1730 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

kde $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ je permitivita vakua,

- 2) piezoelektrickou matici \mathbf{e} , pro kterou platí dle [31]

$$\mathbf{e} = \mathbf{s}^{\mathbf{E}^{-1}} \mathbf{d} = \mathbf{c}^{\mathbf{E}} \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5.6 \\ 0 & 0 & -5.6 \\ 0 & 0 & 14.9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.3 & 0 \\ 12.3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right], \quad (4.8)$$

kde \mathbf{d} má podobu matice z kombinace¹⁶ dle [30] a [31].

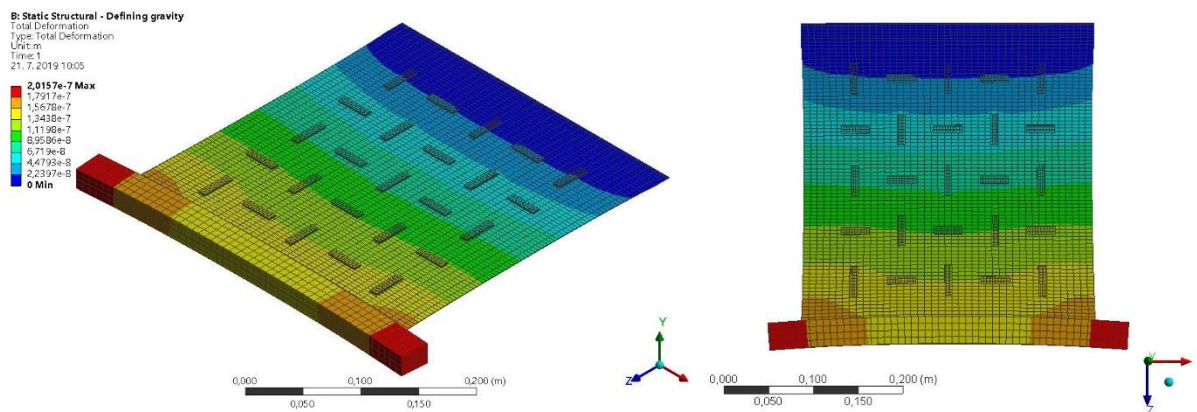
$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 584 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 584 & 0 \\ -171 & -171 & 425 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{C}}{\text{N}} \right]. \quad (4.9)$$

4.2.3 Nastavení výpočtu statické analýzy

Zde byl z důvodu statické analýzy nastaven přímý typ (Direct – Sparse Direct Solver) řešiče u kolonky „Solver Type“. Ostatní parametry byly ponechány ve standartním nastavení. Poté byl spuštěn samotný výpočet.

4.2.4 Vyhodnocení statické analýzy

V této části, která se také nazývá postprocessing, byly vyhodnoceny výsledky statické analýzy. To znamenalo vizualizaci průběhu deformace od vlastní tíhy, působící ve směru a kladném smyslu osy Z, globálního souřadnicového systému [viz obr. 4.15]. Průběh deformace desky, včetně převislých konců plochých tyčí, odpovídá představě skutečnosti. Posuv samotné desky na volném konci byl 0,000182 mm ve směru osy Z.



Obr. 4-15 Průběh deformace (ve směru osy Z) od vlastní tíhy

4.3 Modální analýza

Modální analýza patří k oblastem dynamiky mající velký význam v technické praxi. Je využívána pro analýzu mechanického kmitání, vynuceného ať už běžným provozem zařízení, nebo testovacími signály (impuls). Jejím výstupem jsou modální vlastnosti, jako:

¹⁶ Prvek d_{33} je jako jediný poskytován výrobcem.

- 1) vlastní frekvence,
- 2) vlastní tvary kmitů,
- 3) vlastní tlumení tvarů kmitů [5].

Analýzu je možné provádět teoreticky (výpočtem) nebo prakticky pomocí experimentu na existujícím zařízení. V některých případech lze provést obě varianty. Výhodou je pak možnost verifikace matematického modelu, což je i náš případ.

Modální analýza se v praxi používá například pro piezoaktuátory, pro které je výhodné pracovat v oblasti rezonančních frekvencí dané soustavy z důvodu zvýšení účinnosti. Příkladem takové aplikace je ventilátor v podobě tenkého plechového plátku, k němuž je připevněn piezoaktuátor. Ten slouží jako pohon k rozkmitání plátku. V případě, že je soustava vhodně naladěna tak, aby pracovala v rezonanční frekvenci (v ohybovém, většinou prvním tvaru), dosáhneme maximálních kmitavých výchylek (amplitud) a i maximální intenzity toku media (vzduchu). O této aplikaci modální analýzy v oblasti piezoelektrického jevu za použití programu ANSYS pojednává článek [35].

V našem případě však tato analýza nebyla použita jen ke zjištění modálních vlastností, ale i k vytvoření multifyzikálního modelu. Jeho výstupem byly matice popisující chování mechatronické soustavy, nezbytné k tvorbě stavového modelu soustavy, využitelného k návrhu vhodného způsobu řízení.

Základní rovnice pro modální analýzu je obdobná rovnici 1.1 s tím rozdílem, že soustava není buzená a v rovnici neuvažujeme tlumení, tj. vektor \mathbf{f} a matice \mathbf{B} je nulová

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

což je rovnice pro volné netlumené kmitání, jejímž řešením je harmonický pohyb v předpokládaném tvaru

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}_i \cos \Omega_i t = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} \cos \Omega_i t, \quad (4.11)$$

kde $\boldsymbol{\phi}_i$ je i -tý vlastní vektor se složkami ϕ_1 až ϕ_N a Ω_i je jemu příslušná vlastní úhlová frekvence. Po derivaci této rovnice a jejím dosazení do rovnice 4.10 dostaneme

$$(\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{M})\mathbf{u} \sin \phi = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

protože případ, kdy je $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ a pro který je tato rovnice splněna, nemá žádný význam – soustava nekmitá a je nutné získat netriviální řešení¹⁷ z tzv. frekvenčního determinantu

¹⁷ Netriviální řešení je dosaženo položením frekvenčního determinantu rovného nule, což však zapříčiní, že matice $\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{M}$ jsou lineárně závislé. To znamená, že absolutní hodnoty výchylek vlastních tvarů obdržíme až po

$$\det[\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{M}] = 0, \quad (4.13)$$

kde platí $\lambda_i = \Omega_i^2$, což jsou vlastní čísla. Řešení je právě tolik, kolik stupňů volností daná soustava má. V našem případě je to kolik prvků, resp. uzlů použijeme při tvorbě konečno prvkové sítě.

Předpoklady při řešení:

- 1) mechatronická soustava má konstantní matici tuhosti \mathbf{K} a všechny nelinearity jsou ignorovány [36],
- 2) nebylo nastaveno žádné tlumení¹⁸,
- 3) na soustavu nepůsobí časově proměnné síly, přetvoření, tlaky nebo teploty [36].

4.3.1 Okrajové podmínky v modální analýze

Nastaveny byly okrajové podmínky pomocí atributu „Voltage“, které simuluje aplikaci elektrického potenciálu na dané plochy¹⁹ (elektrody) piezopatchů. Nejdříve byly definovány na všech napájecích elektrodách (plochách) aktuátorů s hodnotami +/- 100 V a poté na všech napájecích elektrodách (plochách) senzorů s nulovou hodnotou v souladu s kapitolou č. 3.1.

Dále bylo třeba svázat elektrické stupně volnosti řídicích elektrod (ploch) piezopatchů. To bylo provedeno atributem „Voltage Coupling“, opět v souladu s kapitolou č. 3.1. Zde je třeba si uvědomit, že při přiřazování tohoto atributu musíme na rozdíl od vlastnosti představovanou atributem „Voltage“, postupně svazovat elektrické stupně volnosti ploch jednotlivých patchů, a ne tuto vlastnost zadat všem patchů naráz. Tato procedura je tedy časově náročnější a je třeba si vhodně definovat výběr ploch, např. pomocí atributu „Name Selection“.

4.3.2 Nastavení výpočtu Modální analýzy

Zde byla nastavena metoda řešení v podobě iterativního řešiče²⁰. Počet hledaných vlastních frekvencí a příslušných vlastních tvarů kmitů byl stanoven na deset.

4.3.3 Vyhodnocení vlastních frekvencí

V této části byly vyhodnoceny výsledky modální analýzy MKP modelu. To znamenalo porovnání shody jednotlivých vlastních frekvencí vytvořeného modelu mechatronické soustavy s naměřenými hodnotami.

zavedení okrajových podmínek. Rovnice 4.13 tedy představuje problém vlastních hodnot. Blíže lze o této problematice nalézt v [3].

¹⁸ Tlumení společně s jeho předpoklady bylo vloženo až při tvorbě redukováného modálního tvaru, viz následující kapitola.

¹⁹ Atribut „Voltage“ vlastně přiřadí elektrickým stupňům volnosti příslušných uzlů danou hodnotu elektrického napětí. Což je analogické k situaci, kdy předepisujeme např. požadovaný posuv uzlům s mechanickými stupni volnosti.

²⁰ Podle [34] je jako doporučený typ řešiče pro modální analýzy „Direct Solver“, neboli přímý řešič. Ten však při řešení vykazoval problém se „Solver Pivotem“ a úloha nemohla být dořešena. Proto byl zvolen iterativní řešič, který tyto problémy neměl.

Hodnoty vypočtených vlastních frekvencí byly získány z MKP modelu a jsou patrné z tab. 4. Hodnoty vlastních frekvencí z experimentu viz tab. 5 byly získány z naměřených dat pomocí rychlé Fourierovy transformace v programu MATLAB.

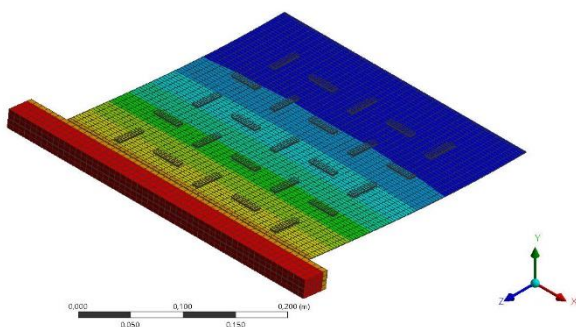
| VI. Frekvence - MKP [Hz] | | | | | | | | | |
|--------------------------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| 1,67 | 4,09 | 21,29 | 43,96 | 59,86 | 69,55 | 105,46 | 112,88 | 118,23 | 140,00 |

Tab. 4 Vypočtené vlastní frekvence

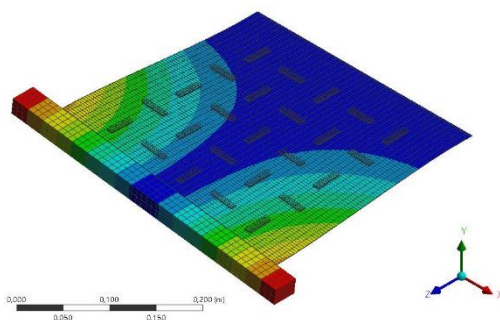
| VI. Frekvence - Experiment [Hz] | | | | | | | | | |
|---------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| 1,73 | 3,86 | 20,98 | 36,29 | 53,51 | 71,62 | 102,87 | 115,39 | 127,36 | 137,40 |

Tab. 5 Experimentálně naměřené vlastní frekvence

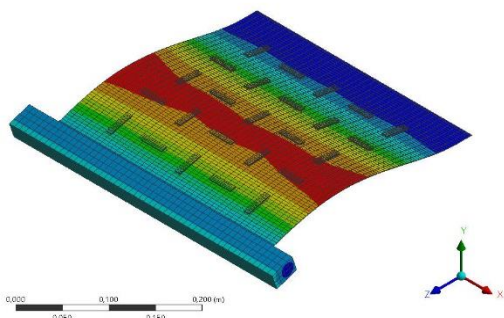
Podoby jednotlivých vlastních tvarů jsou na následujících obrázcích:



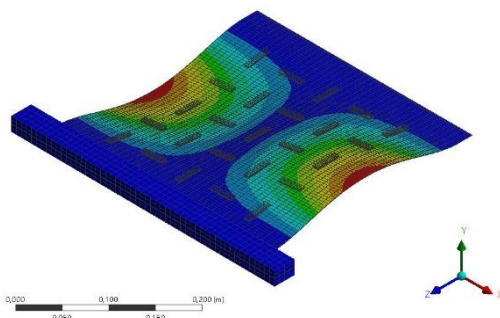
Obr. 4-16 1. vlastní (ohybový) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_1 = 1,67\text{Hz}$



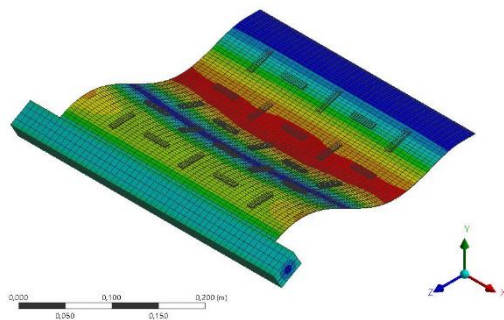
Obr. 4-17 2. vlastní (torzní) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_2 = 4,09\text{Hz}$



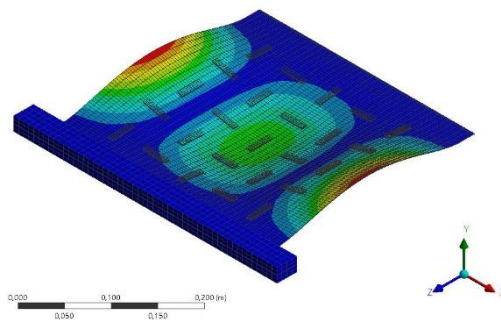
Obr. 4-18 3. vlastní (ohybový) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_3 = 21,29\text{Hz}$



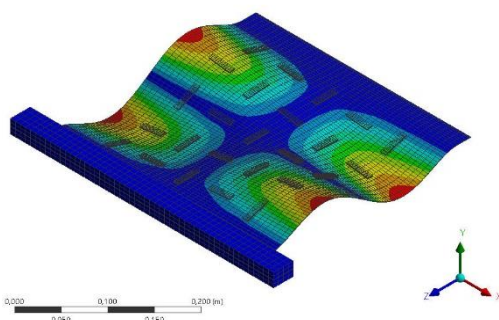
Obr. 4-19 4. vlastní (torzní) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_4 = 43,96\text{Hz}$



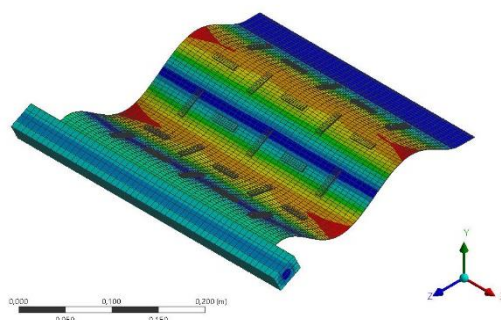
Obr. 4-20 5. vlastní (ohybový) tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_5 = 59,86\text{Hz}$



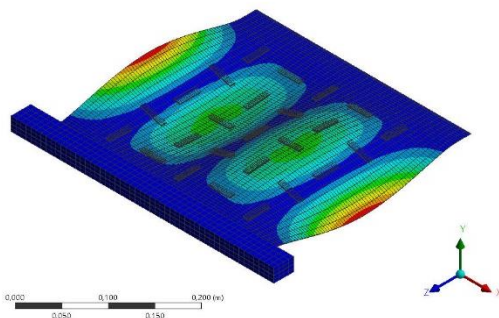
Obr. 4-21 6. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_6 = 69,55\text{Hz}$



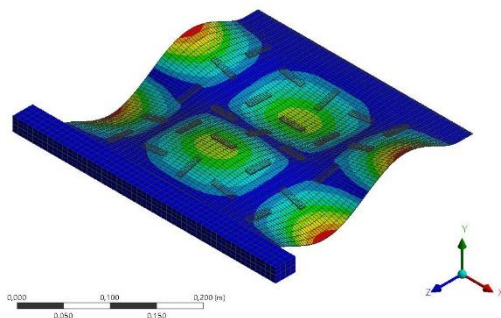
Obr. 4-22 7. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_7 = 105,46\text{Hz}$



Obr. 4-23 8. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_8 = 43,96\text{Hz}$



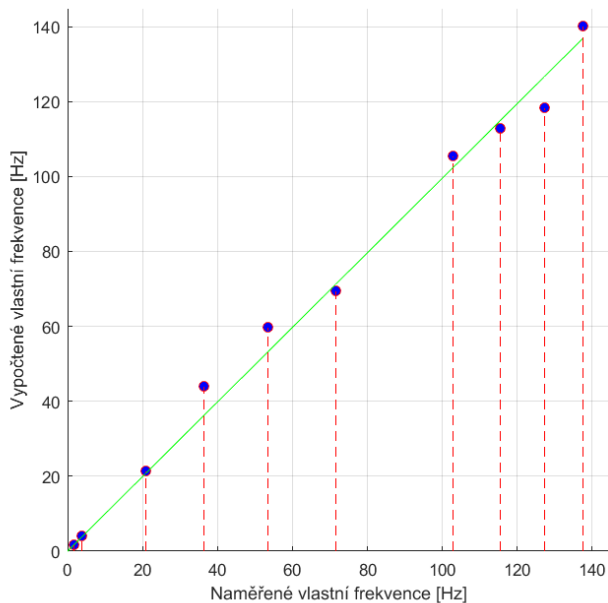
Obr. 4-24 9. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_9 = 118,23\text{Hz}$



Obr. 4-25 10. vlastní tvar mechatronické soustavy pro příslušnou vlastní frekvenci $\Omega_{10} = 140,26\text{Hz}$

4.3.3.1 Porovnání vlastních frekvencí MKP modelu s experimentálně naměřenými vlastními frekvencemi

Pro porovnání shody vypočtených a naměřených vlastních frekvencí byly frekvence vyneseny do grafu obsahující body tvořené průsečíky sobě odpovídajících naměřených a vypočtených frekvencí. Tyto body byly proloženy přímkou pomocí metody nejmenších čtverců jdoucí z počátku souřadnicového systému. Směrnice této přímky určuje, jak dobře se experiment s modelem shoduje [viz obr. 4.26].



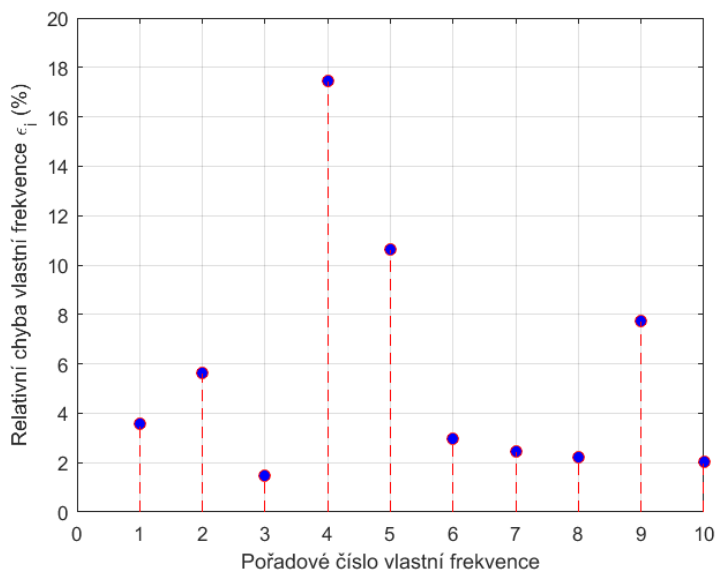
Obr. 4-26 Porovnání vypočtených a naměřených vlastních frekvencí mechatronické soustavy

Body patrné z grafu [viz obr. 4.26] leží v okolí přímky se směrnicí $k = 0,9954$.

Vyhodnoceny byly také relativní chyby naměřených vlastních frekvencí vůči experimentálně získaným [viz obr. 4.27]. Jejich hodnoty jsou dány vztahem

$$\epsilon_i = \left| \frac{f_i - f_j}{f_i} \right| \cdot 100 [\%], \quad (4.14)$$

kde f_i značí i -tou vypočtenou vlastní frekvenci a f_j j -tou experimentálně zjištěnou vlastní frekvenci.



Obr. 4-27 Relativní chyby vypočtených vlastních frekvencí vůči experimentálně získaným

4.3.3.2 Diskuze výsledků vlastních frekvencí

Z porovnání výsledků modální analýzy MKP modelu a výsledků získaných experimentální analýzou byly shrnuty následující body:

- 1) Všechny vlastní frekvence se vyskytují v okolí přímky, jejíž směrnice k se liší od ideální (tj. $k = 1$) o hodnotu 0,0046 [viz obr. 4.26]. Tyto odchylky mohly být důsledkem zejména:
 - a. čtvrtou a pátou vlastní frekvencí, lišící se od experimentálně zjištěných přibližně o 8 a 6 Hz (3,2 Hz). Zmíněné vlastní frekvence mají také ze všech ostatních nejvyšší hodnoty relativních chyb [viz obr. 4.27]. Tyto a jiné nepřesnosti jsou pravděpodobně důsledkem zjednodušení, které při modelování podstoupily zejména piezoprvky. Jejich reálná struktura uvnitř obsahuje v jednotlivých vrstvách elektrody, které nebyly explicitně modelovány, a za elektrody byly považovány pouze plochy vzniklé dělením na vrstvy. Dalším důvodem může být skutečnost, že piezoprvky mají na sobě izolační neaktivní materiál, který tvoří jejich obal. Tento obal byl modelován jako horní a spodní vrstva (plátek), avšak ne na bocích piezoprvků, což by se mohlo odrazit na jejich ohybové tuhosti. Kompaktnost samotného piezoprvku, je založena na vzájemně k sobě přilepených vrstvách pomocí lepidla, které není výrobcem blíže specifikováno, a tedy není součástí simulačního modelu. To má bezpochyby nezanedbatelný vliv na mechanické vlastnosti piezoprvků. K připevnění piezoprvků na desku bylo použito epoxidového lepidla SPABOND 345 o nedefinované tloušťce vrstvy, což se projevilo na jeho kohezi. Také adheze k povrchům jednotlivých prvků byla rozdílná a rozdílná byla tedy i účinnost jednotlivých aktuátorů a senzorů. Chování lepidla bylo také nejspíše závislé na kmitočtu budící frekvence. Odlišnosti mezi modelem a experimentem mohly být taktéž podpořeny zanedbáním kabeláže použité v experimentu, nicméně tento vliv má projev spíše na tlumení soustavy než na její tuhost a hmotnost.
 - b. chybnými materiálovými vlastnostmi. Jak bylo zmíněno v kapitole 4.1, výrobce poskytuje pro modelování velmi strohé informace o materiálu. Pro matici poddajnosti pouze prvky s_{11} a s_{33} , to jsou dva z devíti potřebných. Dále uvádí jen jednu hodnotu relativní permitivity ze dvou potřebných a dvě hodnoty piezoelektrických konstant d_{31} , d_{33} z pěti potřebných hodnot. Pro všechny jím uváděné parametry navíc dle [30] uvádí, že se mohou lišit v závislosti na tvaru součásti, povrchové úpravě, procesu tvarování apod. Potřebné parametry bylo proto nutné čerpat z jiných zdrojů, které s výrobcem těchto piezoprvků nesouvisely.

5 Tvorba redukováného modelu a jeho implementace do modelu experimentu

Tato kapitola se zabývá redukcí vytvořeného MKP modelu. Takovýto redukováný model je pro věrohodnost zahrnut do modelu v podobě stavového popisu simulující celkový experiment, tzn. do sériového zapojení se zesilovači zvyšující výstupní napětí jdoucí z řídicí jednotky do aktuátorů.

5.1 Transformace modelu z MKP

Z MKP modelu byly exportovány ve formátu Harwell Boeing²¹ matice hmotnosti a tuhosti. Společně s nimi byly exportovány také souřadnice všech uzlů pro desku a jednotlivé piezopatche, hodnoty posuvů a elektrického napětí ve všech uzlech pro jednotlivé vlastní tvary. Dále souřadnice uzlů, tvořící plochy elektrod, které byly následně sloučeny do jednoho řídicího uzlu.

Tato data byla poté pomocí programu MATLAB vhodně rozparcelována do matic a vektorů podle toho, zda se jednalo o vstupní elektrody aktuátorů nebo výstupní elektrody senzorů tvořené uzly s mechanickými a elektrickými stupni volnosti. Zbylé stupně volnosti tvořily samotnou mechanickou neboli strukturální část modelu. Maticová interpretace této procedury vycházející z rovnice 1.33 je následující

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{UU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{V}}_i \\ \ddot{\mathbf{V}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU} & \mathbf{K}_{Ui} & \mathbf{K}_{Uo} \\ \mathbf{K}_{iU} & \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{io} \\ \mathbf{K}_{oU} & \mathbf{K}_{oi} & \mathbf{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{L}_i \\ \mathbf{L}_o \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

kde indexy i označují vstupy (aktuátory) a o výstupy (senzory) pro jednotlivé matice a vektory popsané v kapitole 1.2.4, kde pro matici tlumení zatím platí $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Výsledkem je matematický model popsaný soustavou diferenciálních rovnic druhého řádu s konstantními koeficienty. Vzájemným dosazením rozepíšeme do rovnice

$$\mathbf{M}_{UU}\ddot{\mathbf{U}} + [\mathbf{K}_{UU} - \mathbf{K}_{Uo}\mathbf{K}_{oo}^{-1}\mathbf{K}_{oU}]\mathbf{U} = [\mathbf{K}_{Uo}\mathbf{K}_{oo}^{-1}\mathbf{K}_{oi} - \mathbf{K}_{Ui}]\mathbf{V}_i + \mathbf{F}. \quad (5.2)$$

Nevýhodou je však obrovský počet stupňů volnosti, a tedy i velikost samotných matic. Na tuto problematiku navazuje následující kapitola.

5.2 Redukce modelu

MKP modely jsou často složeny z velkého množství elementů, ať už z důvodu jejich celkové velikosti, nebo požadavků na dostatečně jemnou síť k zachycení některých lokálních jevů nemajících významný vliv na následnou dynamickou odezvu. S počtem elementů je nerozlučně spojen i počet

²¹ Matice z MKP programů mají velké rozměry a přitom je většina jejich prvků rovna nule. Proto se pro zápis těchto řídkých nebo také sparse matic používá tohoto speciálního formátu, kterému se věnuje [37]. Dalším důvodem exportu matic v tomto formátu je přehledné třídění elektrických a mechanických stupňů volnosti. K tomu se používá mapping souborů, generovaných společně s maticemi, popisující stupně volnosti jednotlivých prvků.

uzlů obsahující neznámé parametry, respektive stupně volnosti (až 10^6). Pro dynamické simulace je nezbytné takovýto MKP model zjednodušit, a to snížením počtu stupňů volnosti.

Redukce počtu stupňů volnosti může být dle [3] žádoucí např. v těchto případech:

- Při simulaci pohybu mechanismu je třeba řešit každou polohu jako samostatnou úlohu. Pro modely s velkým počtem stupňů volnosti by to znamenalo dlouhé výpočetní časy a omezení v dosažitelné jemnosti při změně jeho poloh.
- Pro simulaci dynamického modelu ve formě stavového popisu s ohledem na zachycení všech modálních vlastností při omezeném počtu stavů.
- Při optimalizaci mechanických vlastností, kdy je potřeba vhodně navrhnout rozměrové, tvarové, nebo jiné optimalizační parametry tak, aby soustava plnila svůj účel s dostatečnou přesností za přijatelných podmínek. Výsledkem je pak opět snížení výpočtového času.

Metody, které se pro redukci využívají, jsou popsány v [3] a [41]. V této práci se budeme věnovat jen redukci modální, která byla pro model použita.

5.2.1 Modální redukce a stavový popis modelu

Základem pro tuto redukci představuje transformace:

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}\xi, \text{ resp. } \mathbf{u} = \mathbf{V}\ddot{\xi}, \quad (5.3)$$

kde \mathbf{u} je původní vektor posuvů ve fyzikálních souřadnicích, \mathbf{V} je matice vlastních tvarů (transformační matice) a ξ je redukovaný vektor modálních souřadnic. Transformační matice dle [3] představuje předpokládané tvary kmitu a zvolený počet sloupců této matice má zásadní vliv na předpokládaný deformační tvar. Ty jsou dále nazývány módy (v našem případě je počet zvolených módů deset). Po dosazení této transformace do 5.2 společně s přidáním matice tlumení vznikne v souladu s kapitolou 1.1.1.1 následující analogický vztah

$$\mathbf{I}\ddot{\xi} + \mathbf{\Delta}\dot{\xi} + \mathbf{\Lambda}\xi = \mathbf{V}^T[\mathbf{K}_{Uo}\mathbf{K}_{oo}^{-1}\mathbf{K}_{oi} - \mathbf{K}_{Ui}]\mathbf{V}_i + \mathbf{V}^T\mathbf{F}, \quad (5.4)$$

kde opět vzhledem k proporcionálnímu tlumení dojde k diagonalizaci matice tlumení $\mathbf{\Delta}$.

Redukovaný model ve formě stavového popisu má následující podobu

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Lambda} & -\mathbf{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{V}^T[\mathbf{K}_{Uo}\mathbf{K}_{oo}^{-1}\mathbf{K}_{oi} - \mathbf{K}_{Ui}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$[\mathbf{y}] = [-\mathbf{K}_{oo}^{-1}\mathbf{K}_{ou}\mathbf{V} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + [\mathbf{0} \quad -\mathbf{K}_{oo}^{-1}\mathbf{K}_{oi}] \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix}.$$

Matice \mathbf{A} má pro náš konkrétní případ rozměr 20 x 20 a podobu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\Omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\Omega_{10}^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2b_{r_1}\Omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -2b_{r_{10}}\Omega_{10}^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Stavový vektor má rozměr 20 x 1, jeho podoba je

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{10} \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{10} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

5.3 Model experimentu

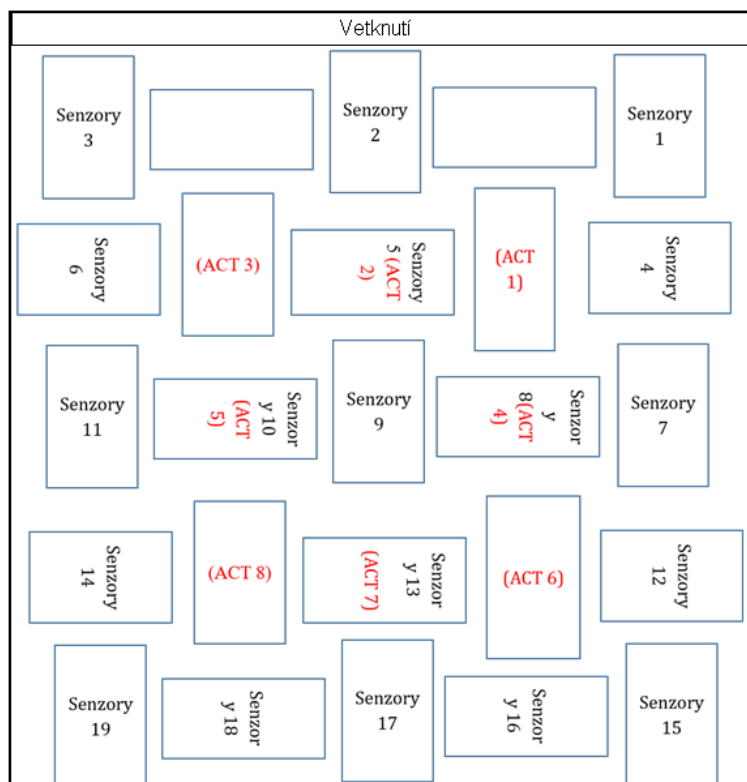
Bylo třeba vytvořit model, který by bral v potaz nejen samotný mechatronický model, ale také okolní aparaturu nutnou pro experiment, a mající vliv na měřená výstupní data. Zejména se jednalo o zesilovače, které bylo do měřicí aparatury nutné zahrnout s ohledem na řídicí jednotku DSpace pracující s maximálním napětím na výstupu +/-5 V. Zesilovače způsobovaly útlum výstupních dat z důvodu poklesu jejich výkonu při vyšší frekvenci. Spojité SISO modely prvního řádu osmy zesilovačů pro každý aktuátor získané identifikací na základě měřených vstupů a výstupů byly převzaty.

Připravené modely ve formě stavového popisu byly pomocí programu MATLAB vhodně přizpůsobeny a zapojeny do série se zesilovači pro příslušné aktuátory v souladu s experimentem. Stavové matice \mathbf{A} a \mathbf{C} byly zároveň ručně laděny²² poměrnými útlumy a zesílením, resp. tlumením senzorů, tak aby co nejvíce odpovídaly experimentálně získaným odezvám soustavy. Programy zprostředkovávající tyto operace jsou s popisem v příloze č. 2. Výsledný stavový popis modelu experimentální soustavy byl porovnán s daty získanými experimentem. Některá z těchto porovnávaných jsou na následujících obrázcích, přičemž číslování aktuátorů a senzorů v korespondenci s experimentem je patrné [viz obr. 5.1].

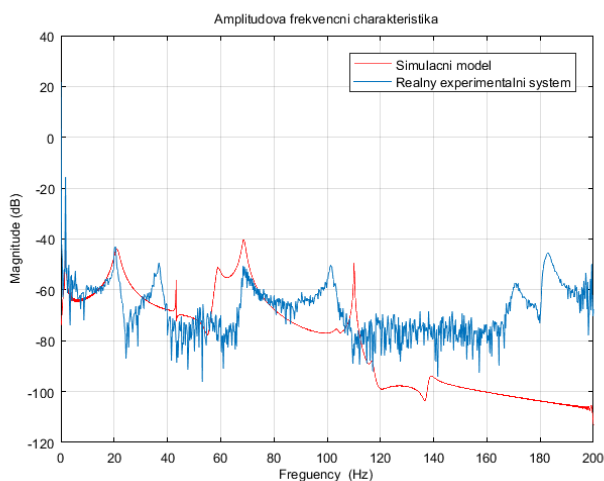
| Číslo módu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------|-------|---------|------|--------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| br [-] | 0,003 | 0,00002 | 0,05 | 0,0006 | 0,015 | 0,01 | 0,001 | 0,009 | 0,007 | 0,009 |

Tab. 6 Hodnoty zvolených poměrných útlumů při ručním ladění odezvy simulačního modelu

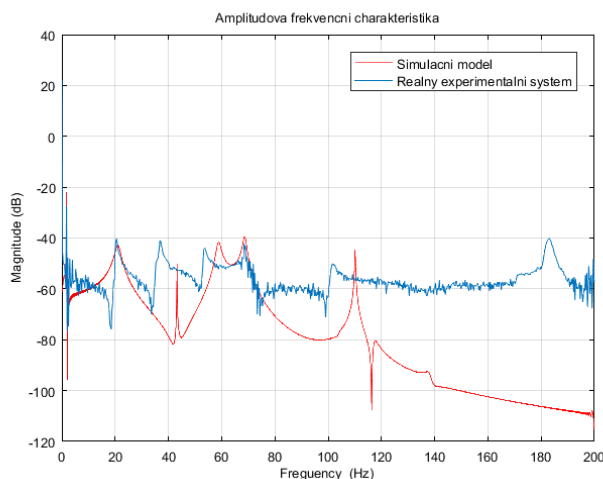
²² Vzhledem k závěrům s kapitoly 4.3.3.2 je nutné vykompenzovat nepřesnosti vzniklé v důsledku nalepení senzorů apod. Co se pak poměrných útlumů týče, ty je nutné naladit právě podle odezvy reálné struktury.



Obr. 5-1 Umístění piezopatchů v jednom pohledu ze strany aktuátorů. Červeně označené aktuátory (ACT 1–8) byly buzeny a na opačné straně desky černě označené senzory (1–19) byly použity ke snímání výstupního napětí



Obr. 5-2 Porovnání odezvy simulačního modelu a reálné struktury. Odezva senzoru číslo 3 při buzení všemi osmi aktuátory



Obr. 5-3 Porovnání odezvy simulačního modelu a reálné struktury. Odezva senzoru číslo 11 při buzení všemi osmi aktuátory

Ze vzájemných porovnání, z nichž některá jsou na obrázcích [viz obr. 5.2 a 5.3], byly patrné značné neshody i přes ručně vložené poměrné útlumy a zesílení senzorů. Největší z nich se týkaly vrcholů v oblastech vlastních frekvencí, mající buď malou, nebo naopak velkou amplitudu, související zejména s poměrnými útlumy. Hodnoty některých poměrných útlumů jsou však příliš malé, např. pro mód číslo dva viz tab.5. Dále také ve vzájemných výškových rozdílech (offsetech) křivek tvořící průběh signálů na ose y, které jsou závislé hlavně na volbě zesílení senzorů. Jejich hodnoty jsou součástí přílohy č. 2.

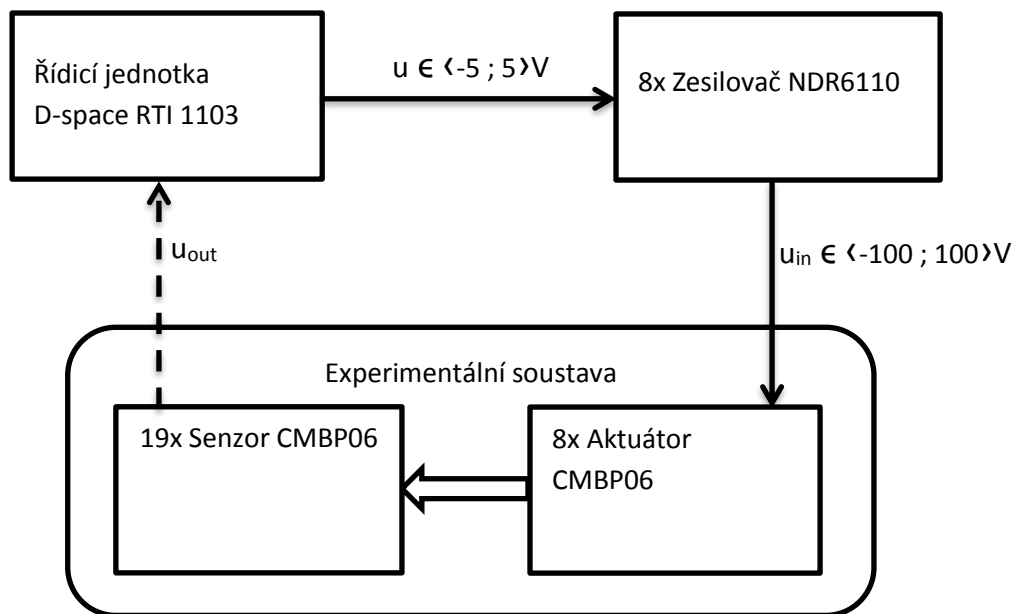
S ohledem na tyto nedokonalosti modelu bylo nutné zvolit cestu automatizované počítačové optimalizace, která vybrala nevhodnější hodnoty zmíněných optimalizačních parametrů z definovaného intervalu, případně jiných dalších tak, aby bylo dosaženo větší míry shody simulačního modelu a reálné soustavy.

6 Identifikační experiment

Cílem tohoto experimentu bylo na základě měření reálné poddajné soustavy s rovinnými piezoelektrickými prvky popsané v kapitole číslo 3 získat odezvu výstupního napětí v časové oblasti jednotlivých senzorů při buzení jednotlivými aktuátory a všemi aktuátory současně. Tato data pak vhodně upravit a použít pro porovnání správnosti simulačního modelu a případně pro identifikaci jen na základě naměřených vstupů a výstupů.

6.1 Průběh měření

Měřicí aparatura byla zapojena ve shodě se schématem [viz obr. 6.1]. Zde je mimo jiné vidět, že výstupní signál z DSpace²³ +/- 5 V je dále dvacetkrát zesílen pomocí zesilovačů NDR6110. Po vyvolání deformace a piezoelektrického jevu, kdy je na senzorech generován elektrický náboj, je tato skutečnost zaznamenána řídicím procesorem DSpace a odečítán na PC.



Obr. 6-1 Schéma zapojení experimentu

Soustava byla při měření buzena aktuátory, jejichž vstupním signálem jdoucí ze zesilovačů bylo napětí v rozsahu +/- 100 V. K dosažení dostatečného množství charakterově různorodých dat, která by mohla být použita k porovnání a identifikaci modelu, byl signál vždy generován pro určité aktuátory a příslušná odezva snímána některými senzory vyskytující se na opačné straně desky [viz obr. 5.1 a tab. č.1].

²³ Pro export/import dat a jejich kompilaci do DSpace byl použit program MATLAB/Simulink.

| Název měření | počet vzorků [-] | délka měření [s] | maximální frekvence [Hz] | u1 | u2 | u3 | u4 | u5 | u6 | u7 | u8 |
|--------------|------------------|------------------|--------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| mereni1 | 200001 | 200 | 200 | Chirp - ampl. 5 V, stř. hodnota 0 V | | | | | | | |
| mereni2 | 200001 | 200 | 200 | | Chirp - ampl. 5 V, stř. hodnota 0 V | | | | | | |
| mereni3 | 200001 | 200 | 200 | | | Chirp - ampl. 5 V, stř. hodnota 0 V | | | | | |
| mereni4 | 200001 | 200 | 200 | | | | Chirp - ampl. 5 V, stř. hodnota 0 V | | | | |
| mereni5 | 200001 | 200 | 200 | | | | | Chirp - ampl. 5 V, stř. hodnota 0 V | | | |
| mereni6 | 200001 | 200 | 200 | | | | | | Chirp - ampl. 5 V, stř. hodnota 0 V | | |
| mereni7 | 200001 | 200 | 200 | | | | | | | Chirp - ampl. 5 V, stř. hodnota 0 V | |
| mereni8 | 200001 | 200 | 200 | | | | | | | | Chirp - ampl. 5 V, stř. hodnota 0 V |
| mereni9 | 200001 | 200 | 200 | | | | | | | | Chirp - ampl. 5 V, stř. hodnota 0 V |

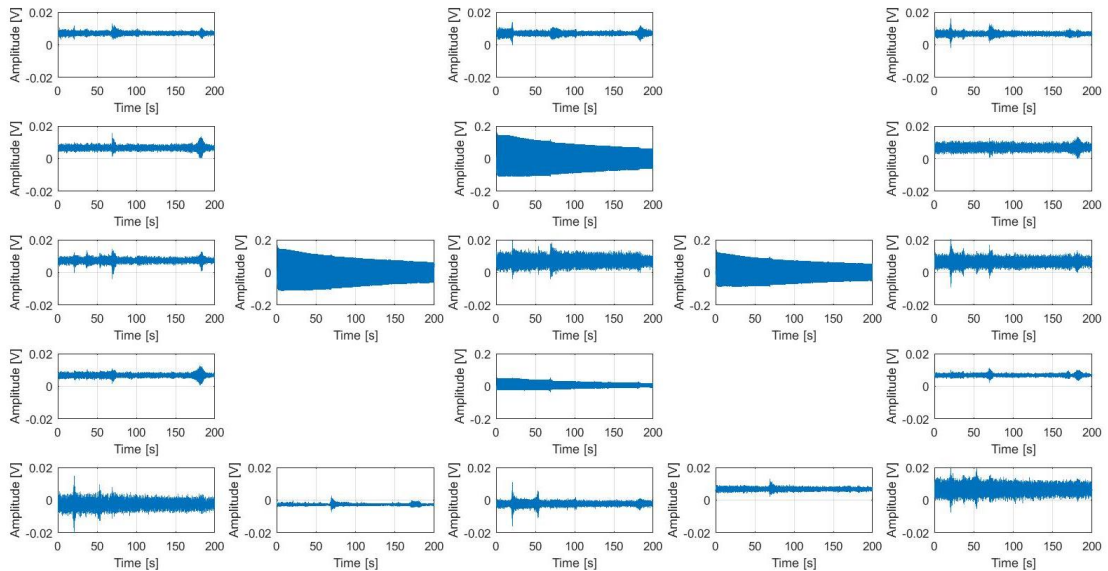
Tab. 7 Přehled buzených aktuátorů. Vstupy u1 až u8 korespondují s označením aktuátorů viz obr. 5.1

Vstupem byl zvolen budící signál v podobě chirpu, který je také nazýván jako sweep signal. Tento signál má podobu sinusoidy s lineárně²⁴ rostoucí, příp. klesající, frekvencí v závislosti na čase. Amplituda byla 100 V a střední hodnota 0 V s lineární rychlostí nárůstu frekvence 200 Hz za 200 s.

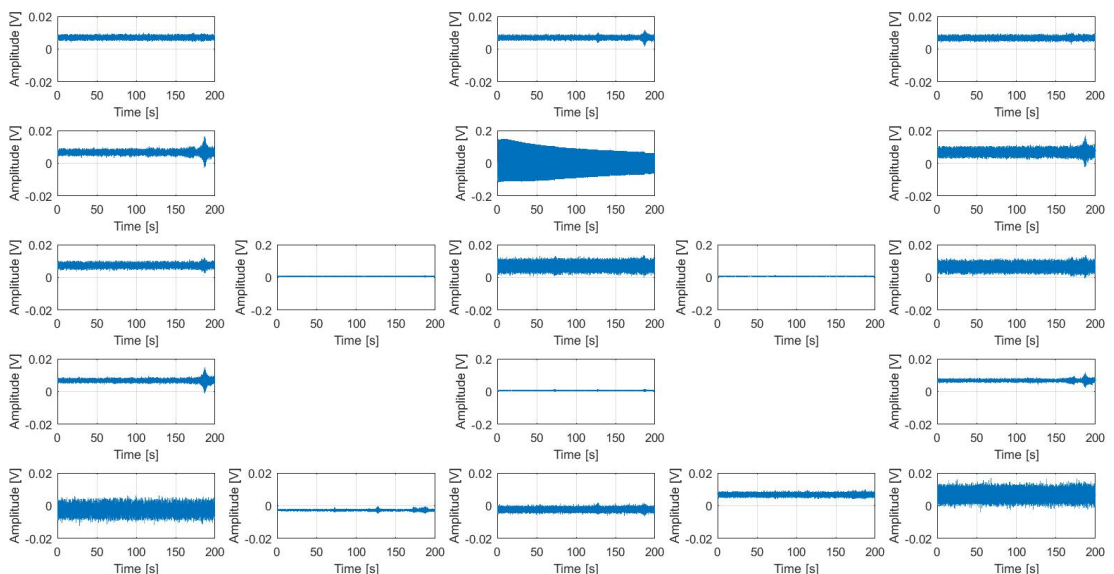
²⁴ Mimo lineární závislosti růstu frekvence na čase existuje celá řada jiných [38].

Vzorkovací frekvence byla 1 000 Hz, což je pětikrát více než nejvyšší frekvence, experiment tak neodporuje dle [45] Nyquistovu vzorkovacímu teorému.

Provedeno bylo celkem devět měření. Pro prvních osm byl tento signál přiveden vždy na jeden z aktuátorů a při devátém měření byly buzeny aktuátory všechny. Průběhy některých měření jsou patrné [viz obr. 6.2 a 6.3].



Obr. 6-2 Průběh napětí na senzorech při buzení všemi aktuátory



Obr. 6-3 Průběh napětí na senzorech při buzení aktuátorem číslo pět

6.2 Analýza naměřených dat

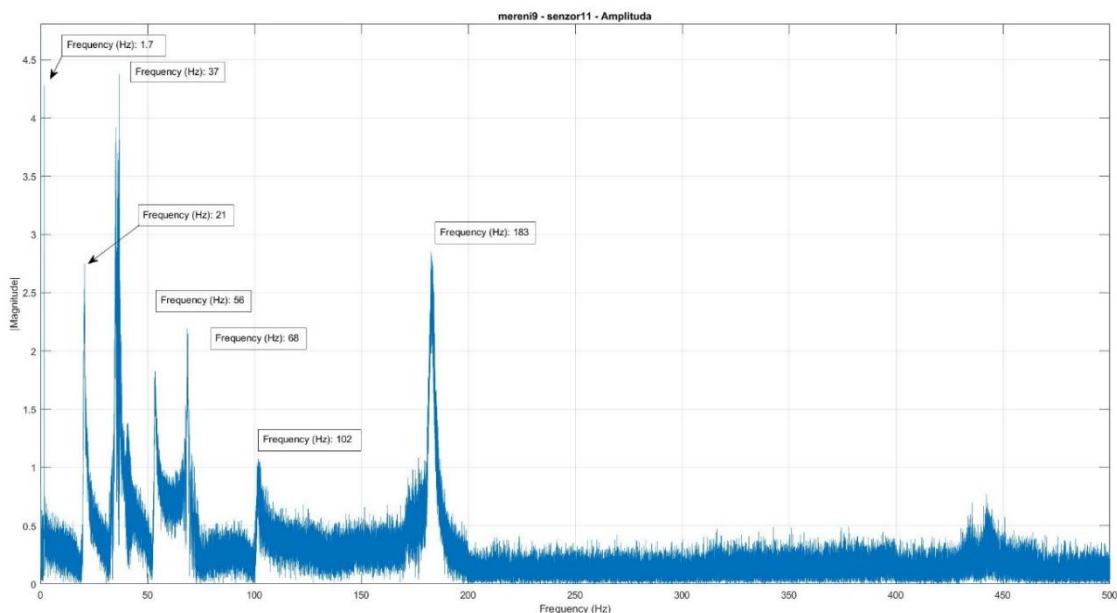
6.2.1 Vlastní frekvence

Vlastní frekvence systému patří k základním dynamickým charakteristikám a jsou nedílnou součástí při porovnání simulačního nebo identifikovaného modelu, tj. modelu vzniklého identifikací z experimentálně naměřených dat. Vlastní frekvence se většinou vyznačují náhlým nárůstem amplitudy kmitů soustavy, která je buzená touto nebo jinou jí blízkou frekvencí. O chování systémů s více stupni volnosti v rezonanční oblasti je pojednáno např. v [21] a [11].

V případě výše zmíněného experimentu byla experimentální soustava buzena do frekvence 200 Hz, což je také maximální hranice rezonančních frekvencí, které mohou být v měřeném signálu rozpoznány.

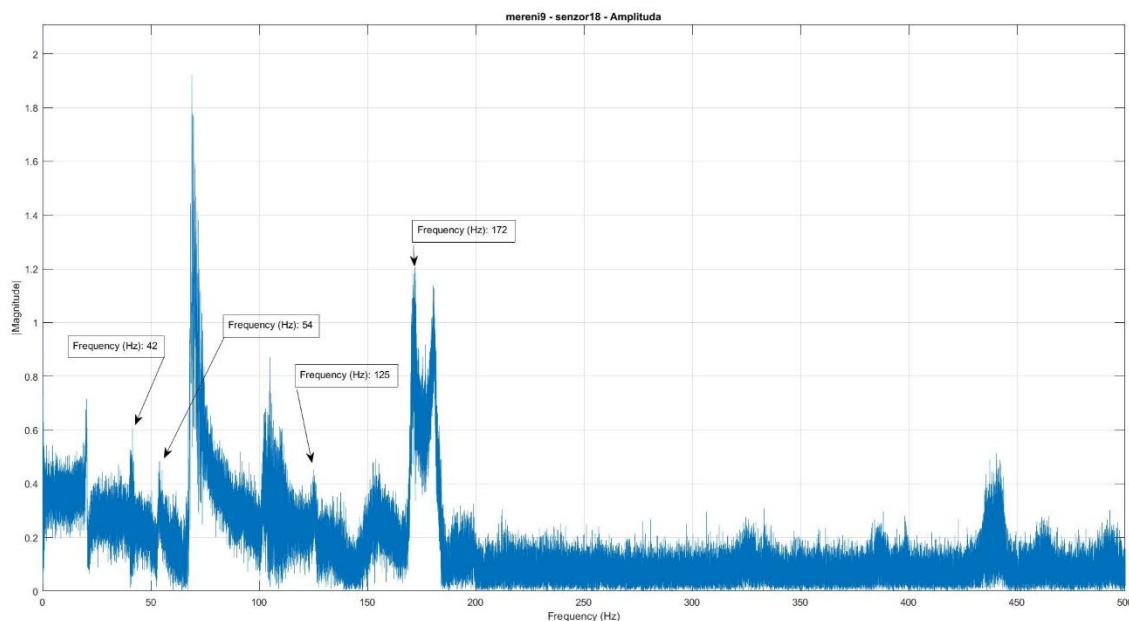
Pro odečtení rezonančních frekvencí z experimentálně naměřených dat je možné přímo využít průběhy napětí v závislosti na čase, což je ale značně nepraktické s ohledem na přesnost odečtení a celkový přehled. Daleko užitečnější a v praxi využívaná je metoda rychlé Fourierovy transformace, dále jen FFT z anglického názvu Fast Fourier Transformation, která průběhy signálů transformuje z časové do frekvenční oblasti. Tato metoda je popsána v [39], obyčejná Fourierova transformace, ze které FFT vychází je popsána v [24].

Amplitudová frekvenční charakteristika v lineárním měřítku výstupního signálu naměřeného na senzoru číslo 11 je vidět [viz obr. 6.4]. Zde jsou dobře čitelné některé z vlastních frekvencí (vrcholy – peaky), které soustava obsahuje.



Obr. 6-4 Amplitudová frekvenční charakteristika výstupního signálu naměřeného na senzoru číslo 11

Další vlastní frekvence, tentokrát ze senzoru číslo 18, jsou patrné [viz obr. 6.5].



Obr. 6-5 Amplitudová frekvenční charakteristika výstupního signálu naměřeného na senzoru číslo 18

Amplitudová frekvenční charakteristika byla takto vytvořena pro vybrané senzory při buzení aktuátory 1–8 a 9, kdy byly buzeny všechny aktuátory společně. Hodnoty vlastních frekvencí byly postupně odečteny z jednotlivých charakteristik a zaneseny do tabulky. Jejich výsledné hodnoty byly stanoveny jako aritmetický průměr [viz příloha č. 1].

Je nutné podotknout, že druhá vlastní frekvence se v amplitudových charakteristikách vycházejících z experimentálních dat projevila pouze jednou, což může být způsobeno mimo jiné šumem.

Hodnoty odečtených vlastních frekvencí z naměřených dat byly následně porovnány s vypočtenými vlastními frekvencemi pomocí modální analýzy MKP modelu viz kapitola číslo 4.

7 Identifikace modelu

Tato část práce navazuje na kapitolu číslo 5, kde byl vytvořen redukovaný fyzikální model, jehož průběhy amplitudových frekvenčních charakteristik měly špatnou shodu s reálnou soustavou. Z tohoto důvodu byla zvolena nejdříve cesta optimalizace²⁵, neboli identifikace redukovaného fyzikálního modelu, na základě naměřených výstupů a identifikace modelu pouze na základě naměřených vstupů a výstupů.

7.1 Optimalizace redukovaného fyzikálního modelu na základě experimentu

7.1.1 Obecně o optimalizaci

Optimalizace jako taková slouží k řešení problémů převedených do minimalizace, popř. do maximalizace vytvořených cílových funkcí F . Cílové funkce F jsou matematické formulace²⁶ optimalizačních úloh, sestavené z optimalizačních proměnných (parametrů) \mathbf{p} .

$$\mathbf{p} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \dots \quad p_n]^T. \quad (7.1)$$

Pro různé hodnoty parametrů p_i , jejichž počet může být např. sto a více, nabývá cílová funkce F_j různých funkčních hodnot. Parametry p_i mají různý fyzikální význam podle druhu řešené problematiky dle [40] např.:

- 1) geometrické – délky, úhly, ...
- 2) kinematické – rychlosti, zrychlení, ...
- 3) hmotnostní – hmotnost, souřadnice těžiště, momenty setrvačnosti, ...
- 4) termodynamické – teplota, tlak, ...
- 5) materiálové – tuhost, dovolené namáhání, ...
- 6) ekonomické – současná čistá hodnota, vnitřní výnosové procento apod.

Cílem je pak nalézt takové hodnoty parametrů p_i , pro které cílová funkce F_j nabývá minimální, popř. maximální hodnoty. Dle [40] představuje např.:

- 1) hmotnost konstrukce,
- 2) životnost,
- 3) silové reakce v podporách,
- 4) zástavbový prostor apod.

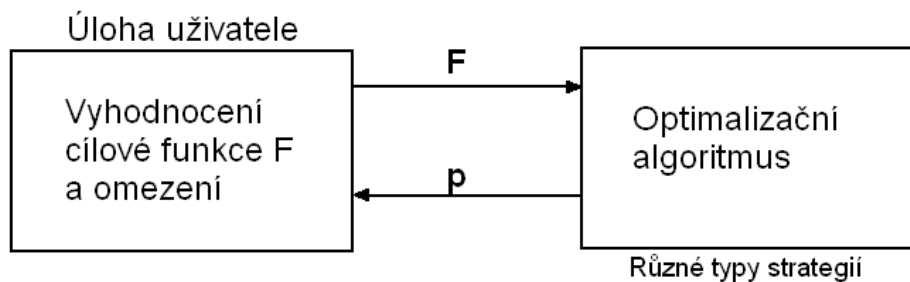
²⁵ Optimalizaci je možné též použít jako nástroj pro identifikaci dynamického systému.

²⁶ Velmi často se nejedná o vyjádření ve tvaru analytické funkce jedné nebo více proměnných (funkce v uzavřeném tvaru), ale o model vzešlý simulací dynamického modelu.

Často je nutné optimalizační parametry s ohledem na řešenou problematiku doplnit omezujícími podmínkami rovnicového a nerovnicového typu, které je při řešení nutné dodržet. Jejich podoba může být následující

$$p_{i_{\min}} \leq p_i \leq p_{i_{\max}}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2)$$

Po formulaci cílové funkce je třeba zvolit vhodný optimalizační algoritmus, kterých je velké množství. Schéma optimalizační procedury v širším smyslu je patrný [viz obr. 7.1]. Blíže o cílové funkci a optimalizaci píše [44].



Obr. 7-1 Schéma průběhu optimalizace

7.1.2 Optimalizační metody

Optimalizační metody se v základu dělí na lokální a globální. Lokální metody vyhledávají extrém jen v podmnožině prohledávaného prostoru, v okolí počátečního bodu. Globální hledají extrém v celém prostoru, na kterém jsou cílové funkce a optimalizační parametry definovány.

Mezi lokální metody patří dle [40] např.:

- 1) simplexová metoda,
- 2) polytopová metoda,
- 3) Rosenbrockova metoda,
- 4) Newtonova metoda,
- 5) sdružené směry (gradientní metoda) atd.

Globální jsou pak např.:

- 1) genetické algoritmy,
- 2) metoda ptačího hejna,
- 3) metoda simulovaného žíhání
- 4) metoda neuronových sítí atd.

V této práci byla blíže popsána metoda genetických algoritmů využívaná i programem MATLAB.

7.1.2.1 Optimalizace metodou genetických algoritmů

Tento algoritmus je dle [47] inspirován modelem přirozeného výběru jedince v přírodě a principy genetiky. Je založen na hodnocení zdatnosti daného jedince (chromosomu), který má s vyšší zdatností

(hodnotou cílové funkce F) zároveň i vyšší pravděpodobnost výběru, tedy nejsilnější jedinec má největší šanci. Zároveň však není vyloučena možnost výběru jedince slabšího.

Genetické algoritmy je možné, jako globální metodu optimalizace, aplikovat v nejrůznějších oblastech s velkým množstvím možných řešení. Výhodou těchto metod je schopnost rychle nalézt oblasti s požadovanou hodnotou cílové funkce. K samotnému extrému však konvergují pomaleji.

Postup algoritmu dle [46] a [40]:

- 0) vygenerování náhodné nulté (výchozí) populace jedinců P_0 ,
- 1) vyhodnocení cílové funkce F_j a výběr populace rodičů P_i' ,
- 2) vytvoření nové populace P_i „křížením“ rodičů,
- 3) mutace nové populace jedinců,
- 4) vyhodnocení stavu optimalizačního procesu.

ad 0) Vygenerování výchozí populace P_0 probíhá v podprostoru prostoru optimalizačních parametrů, kde je pomocí generátoru náhodných čísel generována nultá populace bodů jedince

$$\mathbf{x}_j = [x_{1j} \quad x_{2j} \quad x_{3j} \quad \dots \quad x_{nj}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (7.3)$$

kde \mathbf{x}_j je vektor obsahující body j -tého jedince představující souřadnice v n -rozměrném podprostoru a N je počet jedinců v nulté generaci.

ad 1) Vyhodnocení cílové funkce F_j každého jedince a přiřazení míry možnosti výběru do populace rodičů P_i' pomocí pravděpodobnosti. Pro každého jedince platí

$$F_j = F(\mathbf{x}_j), \quad (7.4)$$

cílové funkce všech jedinců jsou uspořádány do intervalu

$$\langle 0, \sum_{j=1}^N F_j \rangle, \quad (7.5)$$

pro který platí, že jedinci s vyšší hodnotou cílové funkce F_j , je přiřazena vyšší pravděpodobnost výběru p_j podle [40]

$$p_j = \frac{F_j}{\sum_{j=1}^N F_j}. \quad (7.6)$$

Po náhodném výběru i -tého subintervalu je tento jedinec zařazen do populace rodičů P_i' .

ad 2) Křížením jedinců z populace rodičů P_i' je vytvořena nová populace P_i . Jedná se o operaci simulující chování v přírodě, kdy je každému potomku od rodiče předána část genetické informace (chromosomu). Metod pro křížení je několik, zde zmíníme např.:

aritmetické křížení

řídící se vztahem

$$\begin{aligned}\bar{x} &= rx' + (1 - r)y', \\ \bar{y} &= ry' + (1 - r)x',\end{aligned}\tag{7.7}$$

kde \bar{x} a \bar{y} jsou potomci rodičů x' a y' , r z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ je náhodné číslo udávající, kterému rodiči jsou potomci více podobní.

jednobodové křížení [40]

To spočívá ve volbě náhodného bodu v chromosomu, kdy určená hranice rozdělí chromozom na dvě části, přičemž jedna z částí se mezi potomky vymění

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= [x'_1 \quad x'_2 \quad x'_3 | \quad x'_4 \quad x'_5]^T, \\ \mathbf{y}' &= [y'_1 \quad y'_2 \quad y'_3 | \quad y'_4 \quad y'_5]^T.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Vzniknou tak dva noví jedinci

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \bar{x}_3 | \quad \bar{y}_4 \quad \bar{y}_5]^T, \\ \bar{\mathbf{y}} &= [\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \bar{y}_3 | \quad \bar{x}_4 \quad \bar{x}_5]^T.\end{aligned}\tag{7.9}$$

Mimo jednobodové křížení existuje také křížení více bodové, kdy potomek vzniká z více jak dvou rodičů.

ad 3) Při mutaci je stanovena hladina pravděpodobnosti, se kterou se každá souřadnice (gen) každého jedince zamění náhodným číslem z uzavřeného intervalu. Tato operace je provedena proto, že se tak v dané populaci může objevit vlastnost, kterou žádný jedinec neměl a nemohla tak být ani předána následným potomkům.

ad 4) Zde je posouzeno, zda má být algoritmus optimalizace ukončen, nebo pokračovat znovu od počátečního (nultého) kroku, tj. z populace vzniklé mutací se stává populace rodičů. Aby o tomto bylo možné rozhodnout, je třeba zavést kritéria ukončení optimalizace:

- a) dosažení uspokojivé hodnoty,
- b) maximální počet populací,
- c) maximální počet iterací (spíše jako pojišťovací prvek),
- d) míra zlepšení cílové funkce (při stagnaci zlepšení cílové funkce přerušíme optimalizaci),
- e) míra degenerace²⁷ populace.

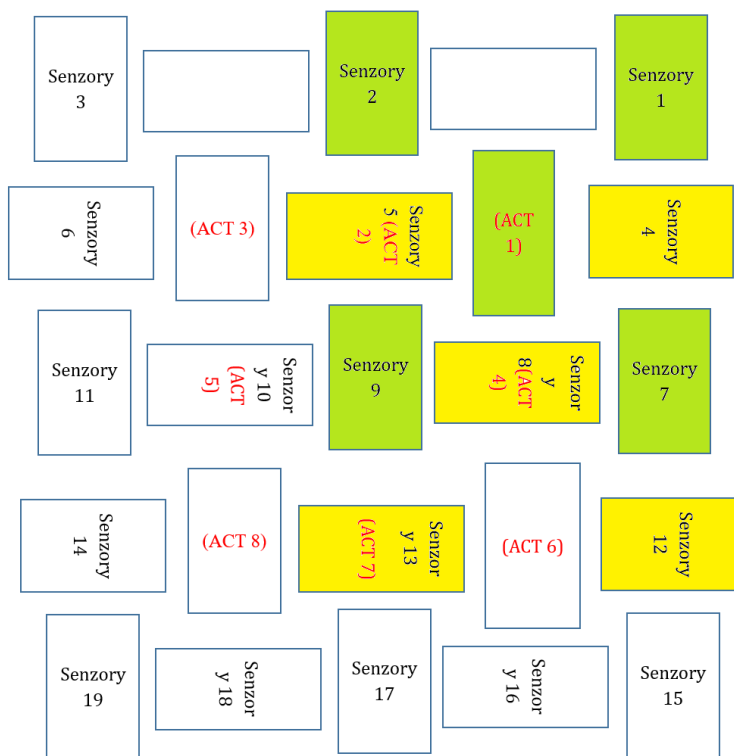
²⁷ Důsledkem stanoveného kritéria výběru může dojít k tomu, že se ve výběru vyskytují téměř totožní jedinci.

Pro optimalizaci genetickými algoritmy je vhodné uschovat všechny testované jedince a jejich cílové funkce. Protože i přesto, že se tyto jedinci nedostanou do výběru, mohou mít větší váhu než jedinci vybraní.

Optimalizační metoda genetickými algoritmy je společně s některými možnostmi nastavení zmíněnými výše k dispozici i v programu MATLAB pod označením GA – genetic algorithms, jako implementovaný nástroj nástavby Optimization Toolbox.

7.1.3 Optimalizace (Identifikace) redukovaného fyzikálního modelu

Pro zjednodušení řešeného problému optimalizace modelu se bude tato práce dále soustředit na dvě zvolené k sobě kolmé podoblasti (zelená s označením č.1 a žlutá s označením č. 4 podle středového aktuátoru) tzv. clustery [viz obr. 7.2], které zahrnují vždy jeden vybraný aktuátor a jemu nejbližší umístěné čtyři stejně orientované senzory. Ty budeme pro každou podoblast označovat od 1 do 4, vždy od nejnižšího čísla po nejvyšší [viz obr. 7.2]. Takovýto SIMO systém by mohl být dále použit pro návrh řízení některých pracovních režimů i přes absenci ostatních vstupů a výstupů.



Obr. 7-2 Znárodnění podoblastí číslo 1 (zelená) a číslo 2 (žlutá) ve struktuře piezopatchů

7.1.3.1 Postup při optimalizaci

Optimalizace byla pro obě podoblasti rozdělena na několik kroků

1. krok spočíval v nahrazení vlastních frekvencí modelu frekvencemi získanými experimentálně,

2. krok sloužil k nalezení parametru k_b , tj. zesílení příslušného aktuátoru a poměrných útlumů b_r . Optimalizace tak probíhala pro všechny optimalizační proměnné a po jejím dokončení byly uloženy parametry k_b a b_r ,
3. krok se skládal z vložení dále neoptimalizovaných parametrů k_b a b_r do modelu. Ty byly dále pokládány za konstantní a nebyly již optimalizované. Následovalo hledání parametrů k_c , tj. zesílení jednotlivých senzorů, přičemž byly zároveň optimalizovány i zbylé parametry matice D ,
4. krok sloužil po vložení nalezených parametrů k_c do modelu k optimalizaci parametrů matice D .

Po dokončení předchozích kroků byly všechny parametry již vloženy v modelu a následovalo ruční doladění poměrných útlumů b_r tak, aby průběh amplitudových frekvenčních charakteristik co nejlépe souhlasil s experimentálními daty.

7.1.3.2 Parametry optimalizace

Jak bylo zmíněno výše, pro optimalizaci jsou nutné také optimalizační parametry. Pro náš případ jsou uvedeny viz tab. 8.

| Označení | Optimalizační parametr |
|----------|--------------------------------|
| k_b | Zesílení aktuátoru |
| k_c | Zesílení senzorů |
| b_r | Poměrné útlumy módů |
| D | Koeficienty stavové matice D |

Tab. 8 Optimalizační parametry a jejich označení

Parametry k_b a k_c

Tyto parametry představují zesílení, resp. tlumení, aktuátorů a senzorů způsobené zejména vrstvou nedefinovaného lepidla mezi deskou a piezoprvkou. Dá se předpokládat, že v důsledku různé adheze lepidla ke spodním kontaktním plochám piezoprveků a případně jeho koheze a jiným nepřesnostem vzniklé při aplikaci na desku, budou jednotlivé hodnoty těchto optimalizačních parametrů odlišné.

Parametr k_b je pro náš systém s jedním vstupem skalární hodnotou, jenž je vložena do stavového popisu a násobí matici (vektor) vstupu B viz rovnice 7.10. Interval, ve kterém mají ležet jeho hodnoty byl odhadnut na $\langle 0,5; 2,5 \rangle$.

Parametr k_c násobí výstupní matici C a matici D . Jedná se o diagonální matici o rozměru 4×4 , s ohledem na to, že obsahuje hodnoty zesílení pro čtyři senzory viz rovnice 7.10. Upravuje tedy výstupní hodnoty ze senzorů modelu tak, aby jejich průběh co nejvíce odpovídal experimentálně naměřenému. Interval stanovující rozmezí hodnot, ve kterém tento parametr leží, je $\langle 0,3; 3 \rangle$.

Parametr b_r

Parametr \mathbf{b}_r představující poměrné útlumy jednotlivých módů mechanické soustavy má vliv především na šikmost, špičatost a výšku rezonančních vrcholů v oblastech jednotlivých vlastních frekvencí při zobrazení např. v amplitudové charakteristice.

Jednotlivé parametry vektoru \mathbf{b}_r jsou zahrnuty v matici \mathbf{A} mající strukturu podle kapitoly 5.2.1 a jenž jsou součástí stavového popisu viz vztah 7.10. Interval hodnot tohoto parametru je $\langle 1 \cdot 10^{-5}; 2 \cdot 10^{-1} \rangle$.

parametr \mathbf{D}

Matice \mathbf{D} , mající ve stavovém popisu význam přímé vazby mezi výstupem a vstupem, zde plní funkci členu, který ladí nepřesnosti mezi modelem a experimentem, které buď vznikly, nebo nebyly eliminovány pomocí parametrů zesílení \mathbf{k}_b a \mathbf{k}_c . Pro náš konkrétní případ je \mathbf{D} vektorem o rozměru 4×1 . Interval přípustných hodnot pro parametry v této matici byl stanoven na $\langle -2; 2 \rangle$.

Výsledná podoba optimalizovaného stavového popisu mechatronického modelu je zřejmá z následujícího zápisu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{k}_b\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{k}_c\mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{k}_c\mathbf{D}\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Přehled jednotlivých optimalizačních parametrů

| Č. param. | Optimalizační parametr | Interval |
|-----------|--|--|
| 1. | $\mathbf{k}_b = k_{b_1}$ | $\langle 0,5; 2,5 \rangle$ |
| 2. | $\mathbf{k}_c = \text{diag} [k_{c_1} \quad k_{c_2} \quad k_{c_3} \quad k_{c_4}]$ | $\langle 0,3; 3 \rangle$ |
| 3. | $\mathbf{b}_r = [b_{r_1} \quad b_{r_2} \quad \dots \quad b_{r_{10}}]^T$ | $\langle 1 \cdot 10^{-5}; 2 \cdot 10^{-1} \rangle$ |
| 4. | $\mathbf{D} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]^T$ | $\langle -2; 2 \rangle$ |

Tab. 9 Přehled optimalizačních parametrů a jejich přípustných hodnot

7.1.3.3 Cílová funkce

Cílem naší optimalizace je minimalizovat rozdíl průběhů frekvenčních amplitudových a fázových charakteristik modelu a experimentu pomocí výše zmíněných optimalizačních parametrů. Tím dostaneme nejen hodnoty zesílení, ale také i hodnoty poměrných útlumů.

Využijeme obor komplexních čísel. Kmitavý pohyb je možné pomocí komplexních čísel v exponenciálním tvaru popsat následujícím způsobem. Odhad řešení rovnice 1.1 lze napsat ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}e^{i\omega t}, \quad (7.11)$$

kde \mathbf{r} je komplexní amplituda pro kterou platí

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}|e^{i\theta}, \quad (7.12)$$

kde e je Eulerovo číslo, i je imaginární jednotka, ω je uhlová rychlost budící síly, θ je fázový posuv (zpoždění odezvy za budící silou) a t je čas. Řešení má jak reálnou, tak imaginární složku. Po dosazení tohoto řešení do rovnice 1.1 včetně jeho derivací obdržíme po několika úpravách vztah pro komplexní frekvenční přenos

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{F}_0} = \frac{\Omega^2 - \omega^2 - i2b_r\Omega\omega}{m[(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4b_f^2\Omega^2\omega^2]}, \quad (7.13)$$

kde \mathbf{F}_0 je komplexní amplituda síly.

V MATLABu byla pomocí příkazu *freqresp*²⁸ provedena frekvenční odezva mechatronického modelu. Výsledkem byl soubor obsahující reálné a imaginární složky komplexní frekvenční odezvy pro interval frekvencí od 0 do 130 Hz.

Z tohoto pak byly pomocí příkazů *abs* a *angle* spočteny absolutní hodnoty (amplitudy) r_a a fázové úhly θ pro všechny výstupy mechatronického modelu v celém frekvenčním rozsahu a uspořádány do vektoru r_{ans} a θ_{ans} .

Stejným způsobem byla zpracována i experimentálně naměřená data, kde byla frekvenční odezva získána pomocí příkazu *tfestimate*²⁹. Vygenerovaná data pak byla pro snížení vlivu šumu nekauzálně filtrována příkazem *sgolayfilt*³⁰. Řád křivky a počet aproximovaných bodů byl podle vizuálního porovnání několika variant stanoven na 39. řád 101 bodů. Po této proceduře byly vyčísleny absolutní hodnoty a fázové úhly. Ty pak byly uspořádány do vektorů r_{CFE} a θ_{CFE} .

Amplitudy modelu a experimentu převedené příkazem *mag2db* z absolutních hodnot na decibely, byly pro příslušné frekvence vzájemně odečteny a vznikl vektor rozdílů amplitud modelu a experimentu

$$\mathbf{cfe}_r = \mathbf{r}_{CFE} - \mathbf{r}_{ans}. \quad (7.14)$$

Stejným způsobem to bylo provedeno i pro fázové úhly. Zde však bylo nutné vybrat nejmenší rozdíl úhlů ze tří možných a vynásobit jej koeficientem 10 s ohledem na to, že fázové úhly jsou v radiánech a jsou tedy řádově menší než amplitudy. Ten pak vložit do výsledného vektoru rozdílů fázových úhlů modelu a experimentu

$$\mathbf{cfe}_\theta = \theta_{CFE} - \theta_{ans}. \quad (7.15)$$

Výsledná cílová funkce CF je dána

²⁸ K provedení tohoto příkazu je nutné definovat model ve tvaru stavového popisu, vektor frekvencí, pro které bude odezva počítána a jednotky.

²⁹ Tento příkaz odhadne přenosovou funkci na základě vstupních a výstupních experimentálních dat z časové oblasti ze kterých byla zároveň odstraněna střední hodnota a trend. Blíže o této funkci lze najít v [41].

³⁰ Tato filtrace nazývaná Savitzky-Golay filtering využívající metodu nejmenších čtverců, vyžaduje dva parametry, a to, řád křivky a počet bodů, které bude daná křivka aproximovat.

$$F = cfe_r + cfe_\theta , \quad (7.16)$$

ze kterého pak

$$CF = \sum_j \sum_i F_{ij} . \quad (7.17)$$

7.1.3.4 Optimalizace metodou *fmincon*

Optimalizace byla provedena pomocí příkazu *fmincon* [43], což je lokální metoda a je tedy nutné volit počáteční podmínky optimalizačních parametrů viz tab.10. Před optimalizací byly pro větší shodu v modelu upraveny hodnoty vlastních úhlových frekvencí Ω podle experimentálně naměřených.

| Č. param. | Opt. param. | Poč. hodnota | Č. param. | Opt. param. | Poč. hodnota |
|-----------|-------------|--------------|-----------|--------------|--------------|
| 1. | k_{b_1} | 1 | 11. | b_{r_6} | 1 |
| 2. | k_{c_1} | 1 | 12. | b_{r_7} | 1 |
| 3. | k_{c_2} | 1 | 13. | b_{r_8} | 1 |
| 4. | k_{c_3} | 1 | 14. | b_{r_9} | 1 |
| 5. | k_{c_4} | 1 | 15. | $b_{r_{10}}$ | 1 |
| 6. | b_{r_1} | 1 | 16. | d_1 | 1 |
| 7. | b_{r_2} | 1 | 17. | d_2 | 1 |
| 8. | b_{r_3} | 1 | 18. | d_3 | 1 |
| 9. | b_{r_4} | 1 | 19. | d_4 | 1 |
| 10. | b_{r_5} | 1 | | | |

Tab. 10 Počáteční hodnoty optimalizačních parametrů

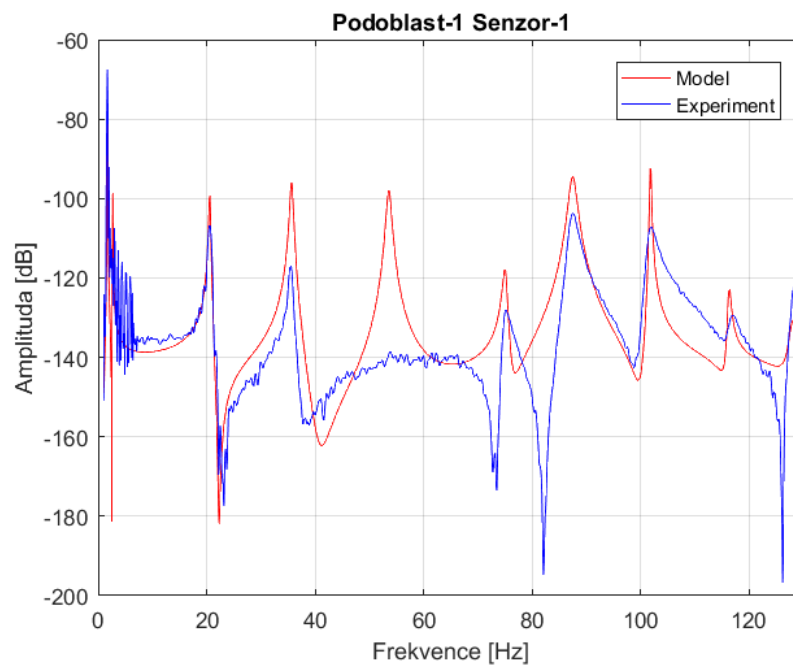
Hodnoty optimalizovaných parametrů pro podoblasti č.1 a č.4 jsou patrné viz tab.11 a 12. Poměrné útlumy b_r byly vypočítány z první podoblasti. Průběhy amplitudových frekvenčních charakteristik modelu a experimentu jsou znázorněny [viz obr. 7.3 až 7.10].

| Č. param. | Opt. param. | Hodnota | Č. param. | Opt. param. | Poč. hodnota |
|-----------|-------------|----------|-----------|--------------|--------------|
| 1. | k_{b_1} | 1.271945 | 11. | b_{r_6} | 0.006000 |
| 2. | k_{c_1} | 2.395568 | 12. | b_{r_7} | 0.009000 |
| 3. | k_{c_2} | 2.530220 | 13. | b_{r_8} | 0.001496 |
| 4. | k_{c_3} | 0.883783 | 14. | b_{r_9} | 0.002990 |
| 5. | k_{c_4} | 0.300004 | 15. | $b_{r_{10}}$ | 0.007372 |
| 6. | b_{r_1} | 0.002284 | 16. | d_1 | 0.000248 |
| 7. | b_{r_2} | 0.002508 | 17. | d_2 | 0.000386 |
| 8. | b_{r_3} | 0.008000 | 18. | d_3 | 0.000454 |
| 9. | b_{r_4} | 0.009000 | 19. | d_4 | 0.0003693 |
| 10. | b_{r_5} | 0.009000 | | | |

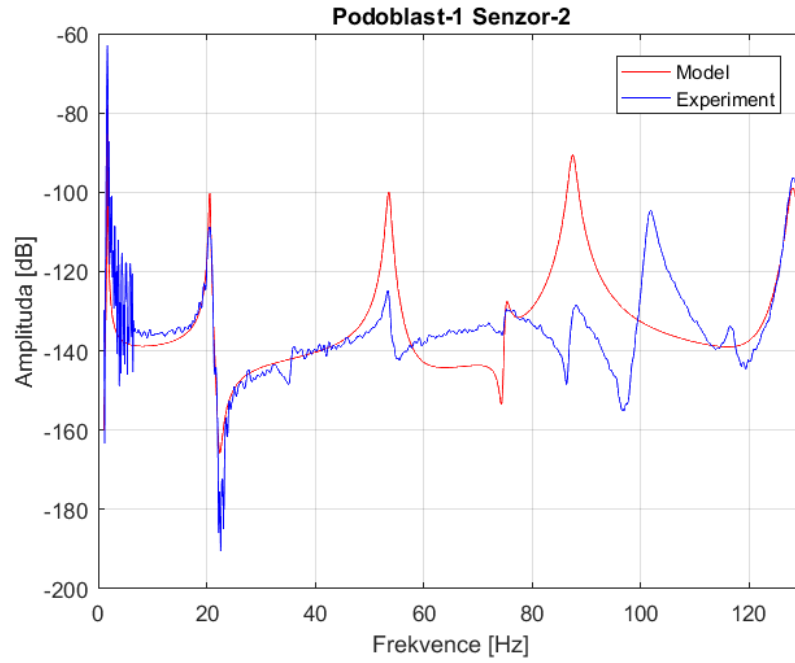
Tab. 11 Hodnoty optimalizovaných parametrů pro podoblast (cluster) č.1

| Č. param. | Opt. param. | Poč. hodnota | Č. param. | Opt. param. | Poč. hodnota |
|-----------|-------------|--------------|-----------|--------------|--------------|
| 1. | k_{b_1} | 0.549087 | 11. | b_{r_6} | 0.006000 |
| 2. | k_{c_1} | 2.999940 | 12. | b_{r_7} | 0.009000 |
| 3. | k_{c_2} | 2.999955 | 13. | b_{r_8} | 0.001496 |
| 4. | k_{c_3} | 2.454439 | 14. | b_{r_9} | 0.002990 |
| 5. | k_{c_4} | 0.300010 | 15. | $b_{r_{10}}$ | 0.007372 |
| 6. | b_{r_1} | 0.002284 | 16. | d_1 | 0.000024 |
| 7. | b_{r_2} | 0.002508 | 17. | d_2 | 0.000455 |
| 8. | b_{r_3} | 0.008000 | 18. | d_3 | 0.0004347 |
| 9. | b_{r_4} | 0.009000 | 19. | d_4 | 0.0004133 |
| 10. | b_{r_5} | 0.009000 | | | |

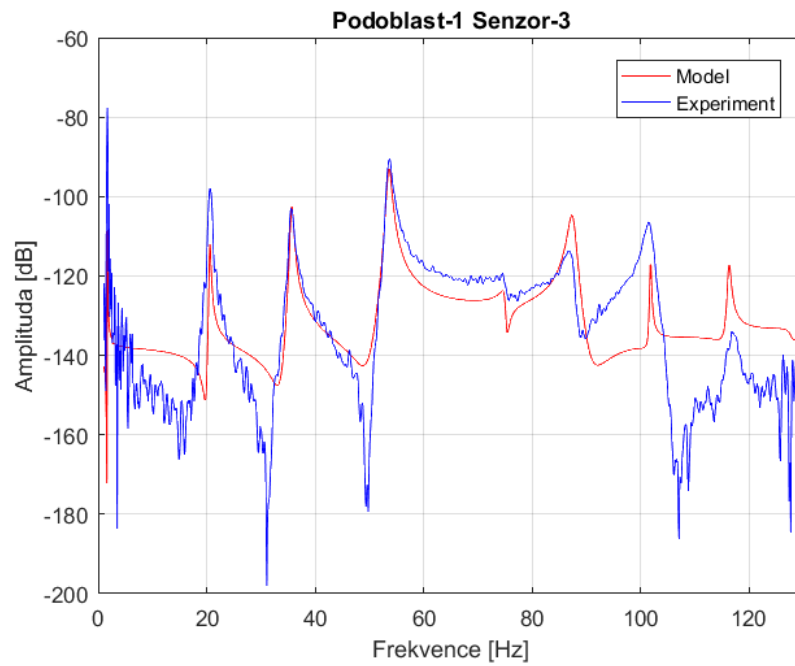
Tab. 12 Hodnoty optimalizovaných parametrů pro podoblast (cluster) č.4



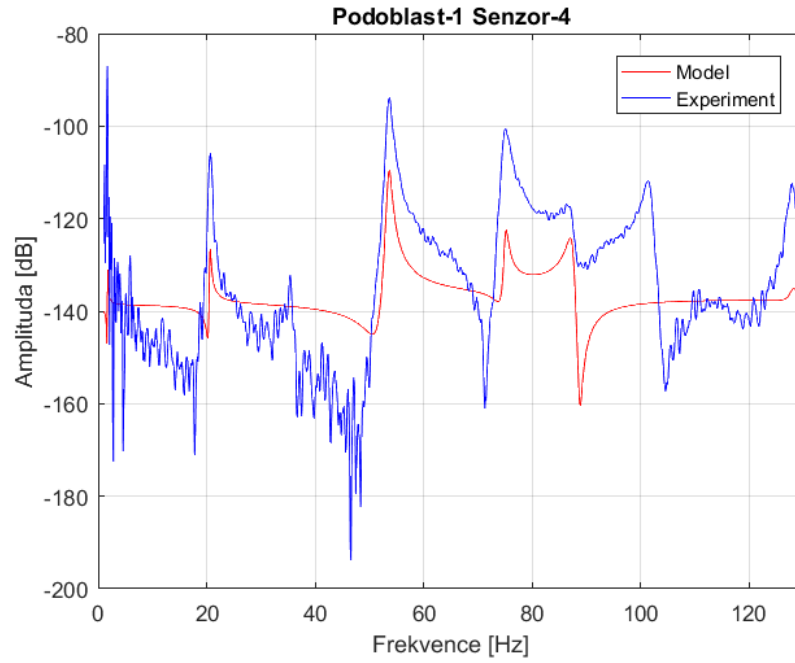
Obr. 7-3 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.1-1



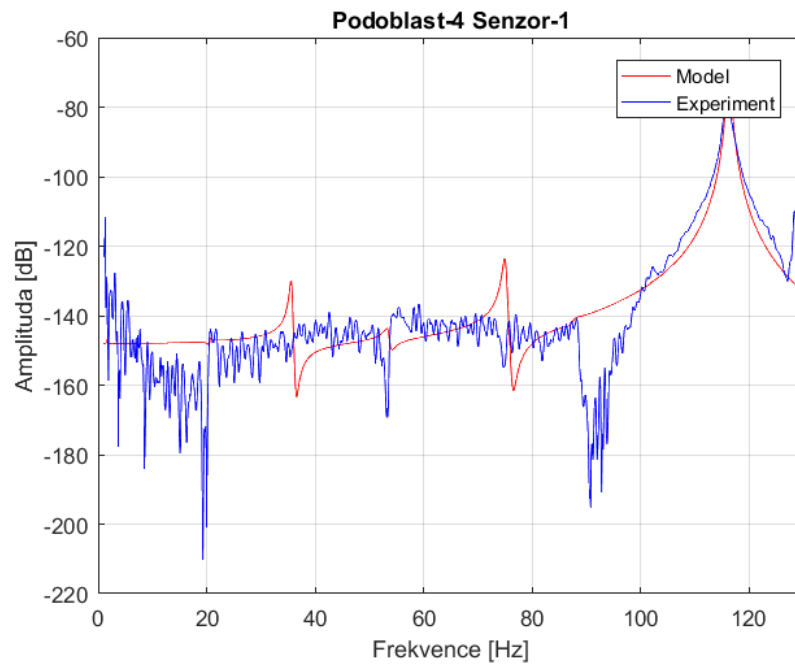
Obr. 7-4 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.1-2



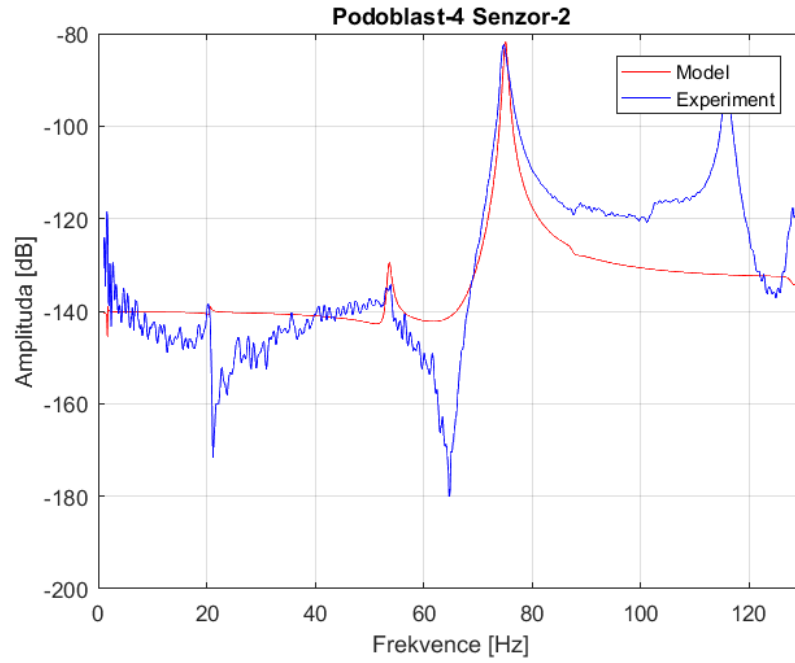
Obr. 7-5 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.1-3



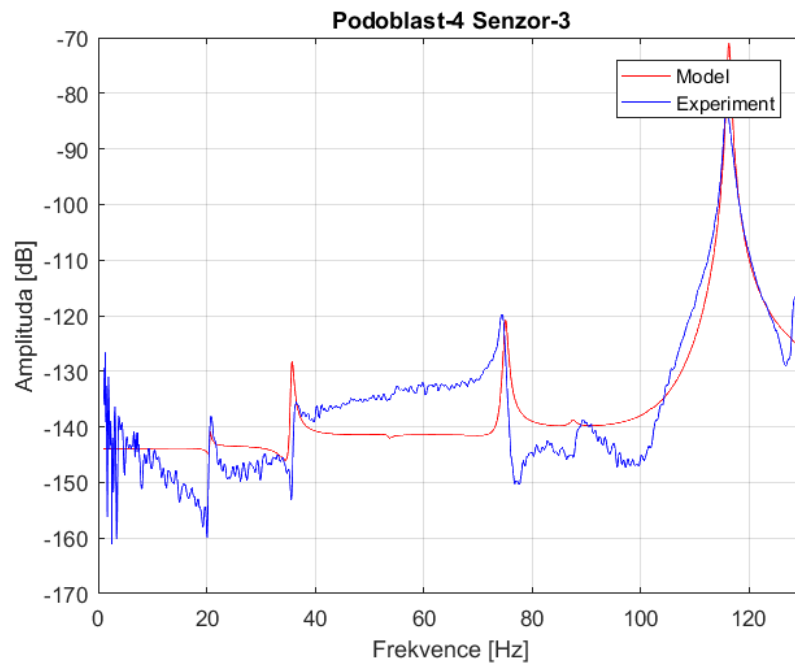
Obr. 7-6 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.1-4



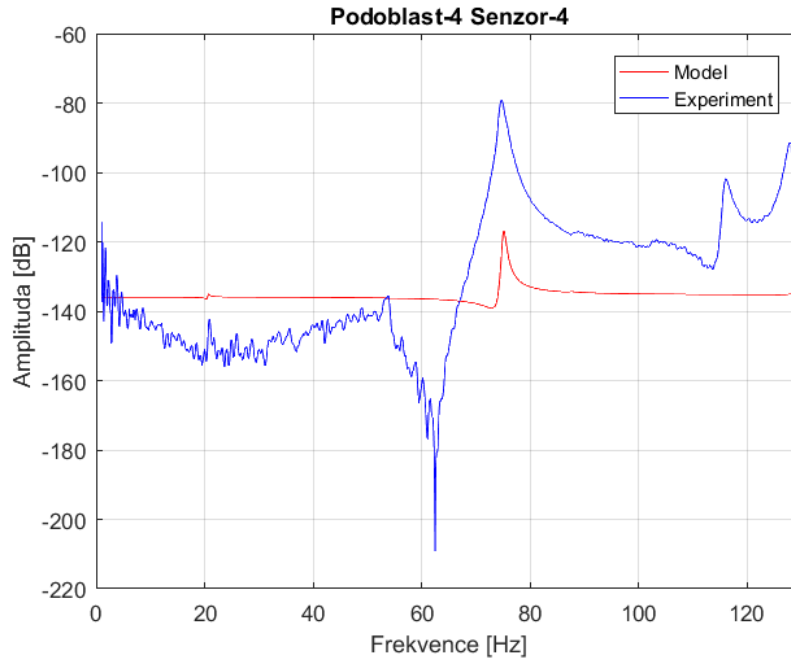
Obr. 7-7 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.4-1



Obr. 7-8 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.4-2



Obr. 7-9 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.4-3



Obr. 7-10 Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pro model a experiment podoblasti č.4-4

7.1.3.5 Diskuze výsledků optimalizovaného modelu

Z amplitudových frekvenčních charakteristik zobrazených výše je patrná jistá shoda mezi redukováným fyzikálním modelem a experimentální reálnou soustavou. Na druhou stranu se zde vyskytuje i množství nesrovnalostí.

Podoblast č. 1

Charakteristiky z této podoblasti zachycují zejména ohybové vlastní tvary a dále i některé tvarově složitější módy, jež jsou na většině z nich dobře patrné. Tento jev se pravděpodobně projevuje z důvodů malé ohybové tuhosti tenké desky. Aktuátory jsou tím pádem schopny desku dostatečně vybudit. Charakteristika [viz obr. 7.3] se dobře shoduje s experimentem až na vrchol čtvrtého tvaru (frekvence okolo 55 Hz). Tato nepřesnost může být spojena buď chybou modelu, kterým se věnovala podkapitola 4.3.3.2, nebo také nedostatečným vybuděním experimentální soustavy v oblasti senzoru číslo 1, který, jak je patrné [viz obr.4.20], by měl tento ohybový tvar zachytit. Je nutné zmínit, že v oblasti senzoru číslo 1 je okrajová podmínka v podobě vetknutí celé soustavy, jenž může do značné míry lokálně zvýšit tuhost a potlačit tak projev deformace např. z důvodu silněji utaženého šroubu zprostředkovávající vetknutí. Podobný, i když výraznější, jev lze sledovat [viz obr. 7.4], zde se však tento tvar slabě projevuje, ačkoliv podle simulačního modelu by měl být opět výraznější. Zbylé tvary na této charakteristice se dále špatně shodují. Můžeme říci, že v této oblasti nám podává simulační model shodu pouze do přibližně 80 Hz. Odezva senzoru číslo 3 [viz obr. 7.5] odpovídá velmi dobře experimentu. Důvodem může být právě poloha, která se nachází na kraji desky uprostřed, nejdále od obou okrajových podmínek (vetknutí a uložení plochých tyčí). Na krajní straně také nesousedí s jiným piezoprvkem, což může mít kladný vliv na projev poddajnosti v této oblasti. Senzor číslo 4 [viz obr. 7.6] už má shodu oproti předchozímu o něco

horší. Neprojevuje se v něm vlastní frekvence okolo 4 a 35 Hz, což ale naznačuje tvar [viz obr. 4.17 a 4.19], kde je v oblasti tohoto senzoru vidět v podstatě nulová deformace a model tudíž zcela nepostihl tento mód. Obecně lze o simulačním modelu první podoblasti říci, že zachycuje chování experimentální struktury do frekvence buzení 100 Hz.

Podoblast č. 4

Charakteristiky z podoblasti č. 4 jsou tvořeny senzory kolmé na směr senzorů z podoblasti č. 1. Dalo by se proto usuzovat, že budou zachycovat především torzní tvary nebo jiné bohatější tvary kmitů deformující se kolmo na ohybové v rovině desky. Na charakteristice [viz obr. 7.7] nejlépe vynikají vlastní frekvence v okolí 38 a 75 Hz, což je i v souladu s vlastními tvary patrnými [viz obr. 4.19 a 4.21], ale ne příliš v souladu s experimentálními daty, kde se tyto dva tvary téměř neprojevují. To může být následkem šumu v měřeném signálu. V charakteristice dobře vyniká shoda frekvencí v oblasti 115 Hz. Odezva senzoru č. 2 je vidět [viz obr. 7.8]. Zde je odlišnost zejména v rozmezí frekvencí 20 až 40 Hz a 55 až 65 Hz, kde model zjevně nedokáže zachytit poklesy (propasti) mezi vlastními frekvencemi. Pravděpodobná příčina je opět v nedostatečné detailnosti modelu, který při tomto tvaru kmitu nedokáže poskytnout uspokojující poddajnost samotných piezoprveků. Frekvence okolo 119 Hz se znovu na tomto senzoru příliš neprojevuje [viz obr. 4.24]. Nejlepší shodu s experimentem zde vykazuje charakteristika senzoru č. 3. V té se projevují téměř všechny vlastní frekvence ve shodě s experimentem včetně poměrně odpovídajícího průběhu amplitudy. Opět se jedná o senzor nacházející se v oblasti na kraji desky, která mu zřejmě umožňuje větší volnost pohybu. Nejhorší podobu průběhu odezvy vykazuje senzor č. 4, který v podstatě nevykazuje žádnou shodu s experimentálními daty.

Nejlepších výsledků tedy dosáhli senzory nacházející se na krajích desky, tj. č. 3 u obou podoblastí. Závěrem této diskuze je, že zvýšení shody simulačních a experimentálních dat by mohlo přinést zvětšení roztečí (prostoru) mezi jednotlivými piezoprvky a snížení jejich hustoty (počtu). To by snížilo vzájemný vliv mezi piezoprvky a mohlo tak více eliminovat nepřesnosti jejich modelu. Dalším řešením by mohl být detailnější model piezoprveků zahrnující jejich kompletní izolační obal a vzájemné spojení vrstev pomocí lepidla. Přínos by měl jistě i model zohledňující vrstvu lepidla mezi deskou a piezoprvky popisující chování i při vyšších frekvencích kmitání. Podotkněme však, že takový model by musel obsahovat velké množství elementů s ohledem na tenké vrstvy lepidla, tudíž by náročnost výpočtu ještě vzrostla.

7.2 Identifikace na základě naměřených vstupů a výstupů

Pro identifikaci modelu, jejíž výsledkem má být model ve formě stavového popisu, byla využita nástavba programu MATLAB – Identification Toolbox, o které je detailně pojednáno v [25]. Tento nástroj je mimo jiné možno použít pro identifikaci lineárních a nelineárních dynamických systémů s měřenými vstupy a výstupy. Umožňuje úpravu dat, tj. odstranění střední hodnoty, trendu, použití filtrace signálu apod.

Pro vyhodnocení shody identifikovaného modelu s naměřenými daty je využíván parametr *fit*, který je definován jako

$$\text{fit} = 100 \left(\frac{|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}|}{|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}|} \right), \quad (7.18)$$

kde \mathbf{y} je vektor výstupů z validačních dat, $\hat{\mathbf{y}}$ vektor výstupních hodnot modelu $\bar{\mathbf{y}}$ je aritmetický průměr z validačních dat. Výsledná hodnota parametru *fit* je v procentech [23].

7.2.1 Příprava dat

S ohledem složitosti našeho SIMO systému viz výše je nutné, aby byla použita data, ve kterých se projevívá vliv každého vstupu na každý výstup, tj. deformace aktuátorů na deformaci senzorů. Po odstranění střední hodnoty trendu a šumu byla data v programu MATLAB sjednocena do jediného souboru pomocí formátu *iddata*. Tento formát zároveň zachová informaci, která data jsou vstupy a která výstupy společně se vzorkovací periodou.

7.2.2 Postup při tvorbě modelu

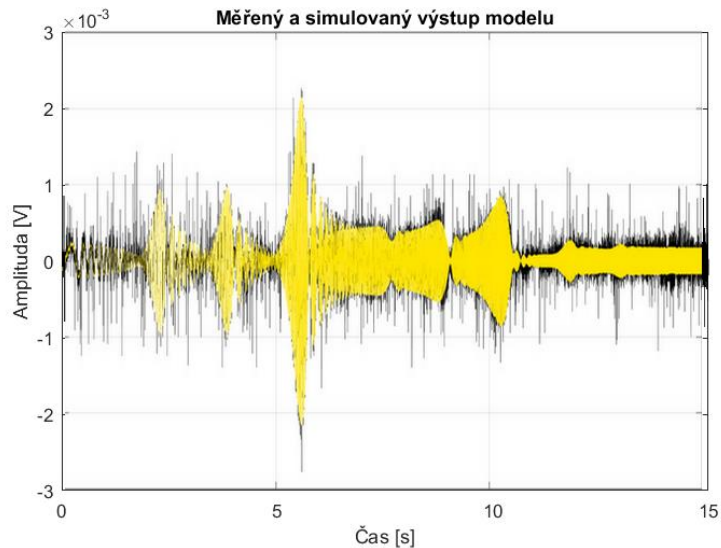
Pro soustavu byla nejdříve využita metoda N4SID (numerical algorithm for subspace state space system identification). Model, vytvořený touto metodou byl pak počátečním odhadem pro první iteraci metody PEM (Prediction error method). Obě tyto identifikační metody byly popsány výše.

Aby bylo dosaženo co nejlepší shody modelu s experimentálními daty, byly pomocí cyklů testovány různé hodnoty parametrů. Zejména volba varianty metody PEM (MOESP, CVA a SSARX), řád metody a parametr N4Horizon, které jak se zdálo, měly nezanedbatelný vliv na výsledný model. Tímto způsobem bylo vytvořeno několik modelů. Tyto modely byly následně pomocí příkazu *d2c* převedeny do spojitě podoby. Parametry pro stanovení modelu s nejlepší *fit* shodou jsou zřejmé viz tab. 13.

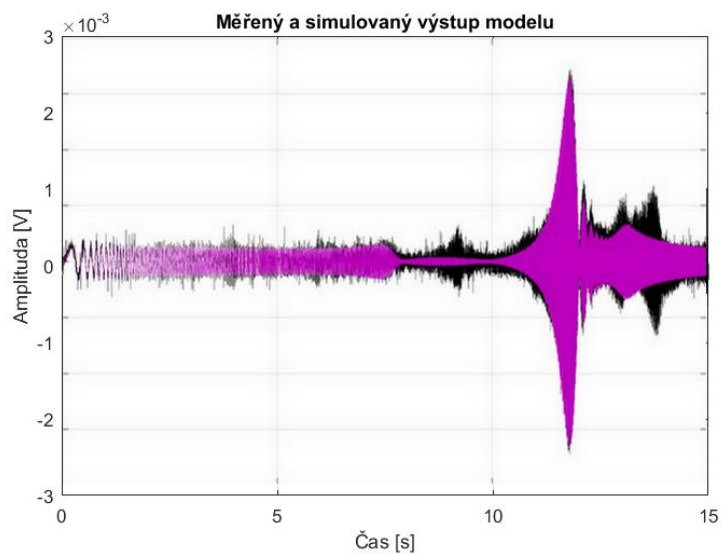
| Název parametru | Hodnota p. pro podoblast 1 | Hodnota p. pro podoblast 4 |
|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Metoda | PEM | PEM |
| Model | Diskrétní | Diskrétní |
| Vzorkovací perioda | 0.001 | 0.001 |
| Forma | Modální | Modální |
| Řád | 25 | 28 |
| Feedthrough matice \mathbf{D} | Ano | Ano |
| N4Weight | MOESP | MOESP |
| N4Horizon | 48 0 45 | 54 0 54 |
| Focus | Simulation | Simulation |
| Rušení | Ano | Ano |

Tab. 13 Parametry identifikace

Podoba shody modelů obou podoblastí s experimentem v časové oblasti je [viz obr. 7.11 a 7.12].



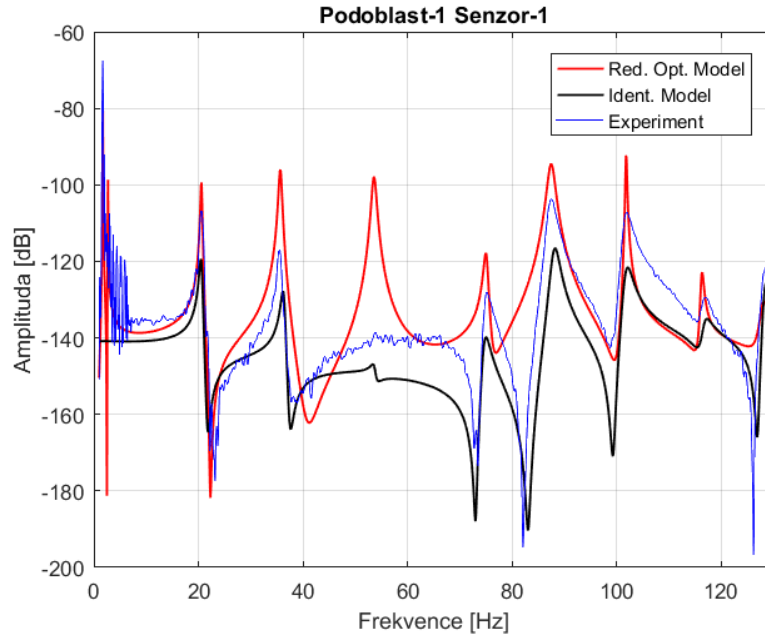
Obr. 7-11 Průběh shody identifikovaného modelu s experimentálně na měřenými daty. V tomto případě se jedná o výstup senzoru č. 3 z podoblastí č. 1. Parametr *fit* zde nabýval hodnoty 57.5%



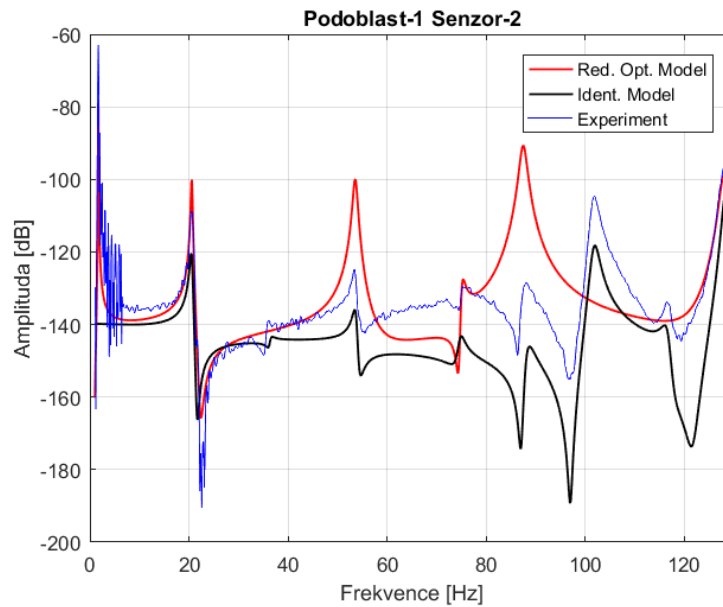
Obr. 7-12 Průběh shody identifikovaného modelu s experimentálně na měřenými daty. V tomto případě se jedná o výstup senzoru č. 3 z podoblastí č. 4. Parametr *fit* zde nabýval hodnoty 61.8%

7.3 Porovnání výsledků modelů a experimentu

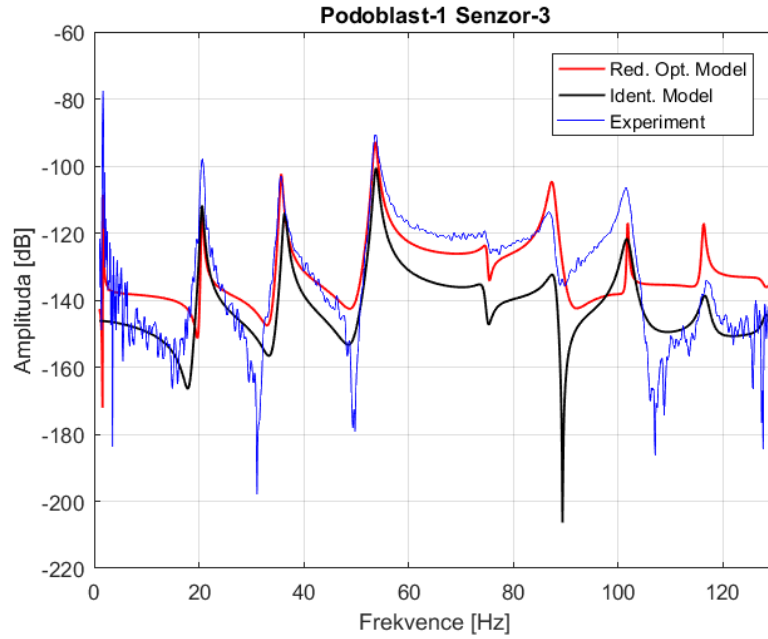
V této podkapitole byly pro porovnání vyobrazeny některé amplitudové frekvenční charakteristiky obou modelů a experimentu. Jejich průběh je znázorněn na následujících grafech.



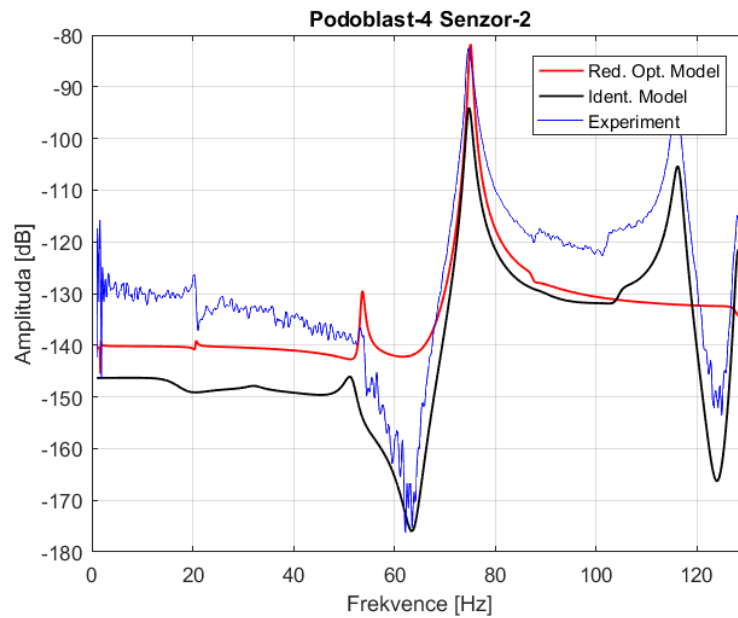
Obr. 7-13 Amplitudová frekvenční odezva redukováného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 1. senzor podoblasti číslo 1



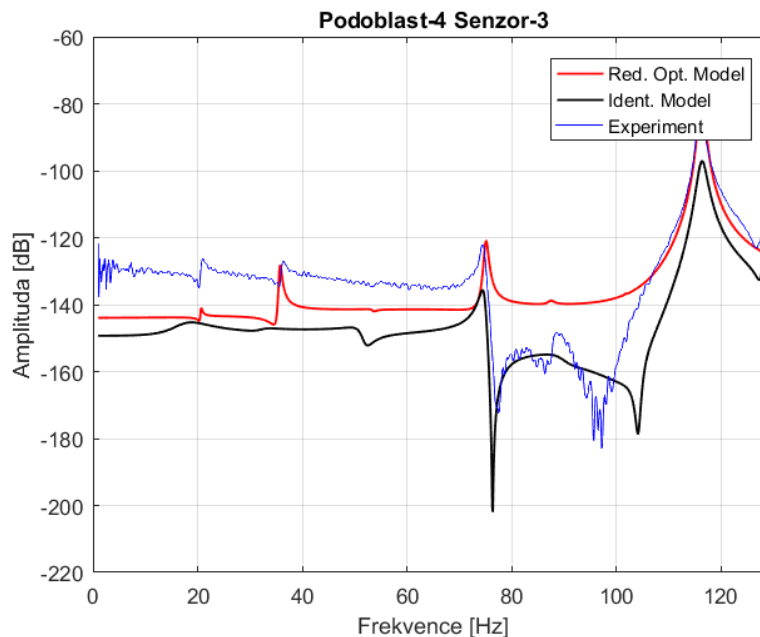
Obr. 7-14 Amplitudová frekvenční odezva redukováného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 2. senzor podoblasti číslo 1



Obr. 7-15 Amplitudová frekvenční odezva redukovaného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 3. sensor podoblasti číslo 1



Obr. 7-16 Amplitudová frekvenční odezva redukovaného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 2. sensor podoblasti číslo 4



Obr. 7-17 Amplitudová frekvenční odezva redukovaného modelu (červeně), identifikovaného modelu (černě) a skutečné experimentální soustavy (modře), pro 3. senzor podoblasti číslo 4

7.3.1 Diskuze výsledků identifikovaného modelu

Identifikovaný model pouze na základě naměřených vstupů a výstupů podle amplitudových frekvenčních charakteristik [viz obr. 7.13 a 7.17], až na některé výjimky, dobře popisuje chování skutečné experimentální soustavy. U všech charakteristik je vidět, že identifikovaný model postihne většinu vlastních frekvencí a jeho průběhy jsou prakticky shodné s experimentálně naměřenými. Jeho nepřesnost se projevuje v některých charakteristikách poklesem průběhu, a to někdy až ekvidistantně, což by mohlo napovídat, že problém je ve střední hodnotě signálu, která nebyla odečtena. Opak je však pravdou, proto není zcela jasné, co způsobuje tento pokles signálu v některých částech charakteristik oproti experimentu. Možná příčina je v použitých zesilovačích, jejichž dynamika se podle [8] projevuje jako nelinearita způsobující nepřesnosti mezi měřeným nelineárním a simulovaným lineárním výstupem systému.

Každopádně identifikovaný model pouze na základě naměřených vstupů a výstupů prokazuje jistou výhodu oproti fyzikálnímu modelu, který složitou strukturu piezoprvků v tomto uspořádání z hlediska rozmístění není schopen zcela správně vystihnout. Jiná situace by mohla nastat v případě identifikace všech 25 vstupů a výstupů. Takováto „black-box“ identifikace, na základě vstupních a výstupních dat z experimentu, by byla nejen časově náročná, ale také s největší pravděpodobností nepřesná.

Závěr

V souladu se zadáním této diplomové práce byly popsány metody modelování poddajných struktur s piezoelektrickými prvky, přičemž byla zmíněna i metoda konečných prvků, které se tato práce zejména věnuje. Nechyběl zde ani stručný náhled do principu piezoelektrického jevu a jeho všeobecného využití.

V další části byl popsán princip identifikace dynamických systémů pouze na základě naměřených vstupů a výstupů. Pojednáno bylo o lineární metodě ERA, a také o metodách N4SID a PEM využívané identifikačním toolboxem programu MATLAB.

Dále byla popsána podoba celé experimentální soustavy, včetně popisu a konstrukčního řešení jednotlivých prvků, montáž piezoprvků pomocí speciální šablony a způsob lepení.

V následující kapitole byl vytvořen MKP model této experimentální soustavy zahrnující všechny piezoelektrické prvky i okrajové podmínky v programu ANSYS Workbench s využitím modulu Piezo & Mems. Dále byla provedena modální analýza v tomto programu a vlastní frekvence z této analýzy vyhodnocena a porovnána z experimentálně zjištěnými. Výsledky shrnuté v podkapitole 4.3.3.2 poukazují na jistou shodu vlastních frekvencí simulačního modelu a reálné struktury, jejichž odlišnost se projevuje u čtvrté a páté vlastní frekvence. Toto poukazuje na jisté nepřesnosti způsobené zejména zanedbáním vrstvy lepidla mezi deskou a piezoprvkem, izolační vrstvy na bocích a lepidla nacházejícího se mezi jednotlivými vrstvami (plátky) aktuátorů a senzorů.

Následně navazovala část, ve které byl proveden export matic struktury z MKP programu ve formátu Harwell Boeing, který byl po převedení a redukci modální metodou transformován do stavového popisu v programu MATLAB. Redukovaný fyzikální model byl dále rozšířen o modely zesilovačů tak, aby se simulační model co nejvíce podobal skutečnosti. Jeho porovnání s reálnou soustavou však nebylo uspokojivé. Tato skutečnost je pravděpodobně opět důsledkem lepených spojů mezi deskou a piezoprvkem, jejichž adheze a koheze se může lišit v závislosti na kvalitě povrchů spojovaných součástí a tloušťce vrstvy. Z tohoto důvodu bylo nutné zvolit cestu optimalizace (identifikace) redukovaného fyzikálního modelu, která by model doplnila o koeficienty zesílení aktuátorů a senzorů tak, aby jejich hodnoty vhodně vzniklé nepřesnosti kompenzovali. Stejně tak bylo nutné stanovit i hodnoty poměrných útlumů.

V předposlední části byl podrobně popsán postup experimentu, včetně pořadí a způsobu buzení aktuátorů.

Poslední část této práce se soustředila na metody optimalizace a byl v ní vytvořen optimalizovaný model ve formě stavového popisu pro dvě stanovené podoblasti. Optimalizovanými parametry byly vlastní frekvence, nastavené podle výsledků experimentu, zesílení senzorů, zesílení aktuátoru, parametry matice D , a poměrné útlumy, které bylo nutné na závěr optimalizace ještě ručně doladit při zachování ostatních parametrů. Kvalita shody optimalizovaného redukovaného modelu s naměřenými daty je shrnutá v kapitole 7.1.3.5., kde je v případě první podoblasti zřejmá dobrá shoda u senzorů číslo 1, 3 a 4. Pro podoblast číslo čtyři je dobrá shoda u senzoru číslo 3. Ostatní senzory nevykazují tak

kvalitní průběh vzhledem k naměřeným datům. To je pravděpodobně příčinou již zmíněných nedostatků v modelu, nebo také nedostatečným vybuzením experimentální soustavy a šumu v signálu.

Identifikovaný model vytvořený na základě naměřených vstupů a výstupů identifikačním toolboxem programu MATLAB v následující podkapitole vykazuje dobrou shodu pro většinu senzorů. Zejména pro první podoblast, kde se až na pokles průběhu signálu prakticky shoduje s experimentálně naměřeným průběhem a zachycuje jeho vlastní frekvence.

Z výše uvedeného v této práci lze shrnout, že pro modelování piezoelektrických prvků v omezeném počtu vstupů a výstupů je přesnější metoda identifikace na základě měřených vstupů a výstupů. To zejména z toho důvodu, že není nutné vytvářet v MKP složité modely lepených spojů, které jak napovídají výsledky této práce, jsou nedílnou a neopomenutelnou součástí přesného modelu piezoelektrických aktuátorů a senzorů. Na druhou stranu se dá očekávat, že se situace otočí ve prospěch simulačního modelu v případě více vstupů a výstupů, než bylo v této práci uvažováno.

Literatura

- [1] Ahmed Abdul-hussain Ali, Hussain Yousif Mahmood, Mahmood Wael Saeed.: *Vibration Control Analysis of Aircraft Wing by Using Smart Material*, International Journal of Scientific & Engineering Research. 2016, vol. 7, issue 5, p. 977-984.
- [2] Mokrani B., Bastaits R., Horodincea M., Romanescu I., Burda I., Vigiú R. and Preumont A.: *Parallel Piezoelectric Shunt Damping of Rotationally Periodic Structures*, Advances in Materials Science and Engineering. 2015, p. 1-12.
- [3] KŠICA, Filip. *Modelování mechatronické soustavy s poddajnými členy* [online]. Brno: bakalářská práce, VUT, Fakulta strojního inženýrství, 2014 [cit. 2016-07-14]. Dostupné z WWW: <https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=84983>; str. 20-27
- [4] KOLDA, Jan. *Modelování poddajných soustav s použitím redukovaných subsystému*. Praha: bakalářská práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2013.
- [5] HEINL, Tomáš. *Posouzení výpočtových metod pro návrh kompozitních elementů výrobních strojů* [online]. ČVUT, Fakulta strojní, 2014 [cit. 2016-07-17]. Dostupné z WWW: <<http://users.fs.cvut.cz/tomas.mares/theses/TomasHeinl2014.pdf>>; str. 26-29.
- [6] VALÁŠEK, Michael, BAUMA, Václav, ŠIKA, Zbyněk. *Mechanika B*. Praha: ČVUT, 2006. ISBN 80-01-02919-0.
- [7] SLAVÍK, Jaromír, STEJSKAL, Vladimír, ZEMAN, Vladimír. *Základy dynamiky strojů*. Praha: ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01622-6.
- [8] KARLÍČEK, Jindřich. *Aktivní snižování vibrací pomocí rovinných piezoaktuátorů*. Praha: diplomová práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2016.
- [9] ŠPANIEL, Miroslav. *Modelování skořepinových konstrukcí MKP* [online]. ČVUT, Fakulta strojní, 2009 [cit. 2016-07-17]. Dostupné z WWW: <http://mechanika2.fs.cvut.cz/old/pme/predmety/mkp1/podklady/skorepiny_ju.pdf>; str. 32.
- [10] ŠPANIEL, Miroslav, HORÁK, Zdeněk. *Úvod do metody konečných prvků*. Praha: ČVUT, 2011. ISBN 978-80-01-04665-4.
- [11] BAUMA, Václav. *Přednášky z předmětu Kmitání mechanických soustav*. Praha: ČVUT, 2017.
- [12] HONS, Richard. *Model kompozitního nosníku s piezoelektrickou vrstvou* [online]. VUT, Fakulta strojního inženýrství, 2018 [cit. 2019-06-23]. Dostupné z WWW: <https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=174188>.
- [13] IRSCHIK, H., NADER M.: *Actuator placement in static bending of smart beams utilizing Mohr's analogy*, Engineering Structures. 2009, vol. 31, issue. 8, p. 1968-1706.

- [14] HALIM, Dunant, MOHEIMANI, Reza.: Spatial Resonant Control of Flexible Structures Application to a Piezoelectric Laminate Beam. *Ieee Transactions On Control Systems Technology*. 2001, vol. 9, no. 1, p. 37-53.
- [15] BAXTER, F.R., BOWEN, C.R, TURNER, I.G., DENT, A. C. E.: Electrically Active Bioceramics: A Review of Interfacial Responses. 2009, vol. 38, no. 6, p. 2079-2092.
- [16] XIONG, Xingyu: Development of vibration-based multi-resonance energy harvesters using piezoelectric materials. University of Manchester, School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, 2014.
- [17] A. PREUMONT, *Mechatronics - Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*, Dordrecht: Springer, 2006. ISBN 978-1-4020-4696-4.
- [18] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2004. ISBN 80-7043-273-X.
- [19] PIEZO TERMINOLOGY [online]. [cit. 2019-06-26]. Dostupné z WWW: <<https://piezo.com/pages/piezo-terminology-glossary>>.
- [20] MALGACA, L., KARAGULLE, H.: Numerical and experimental study on integration of control actions into the finite element solutions in smart structures, *Shock and Vibration* 16 (2009), 401-415.
- [21] SHARCNET: 3-D 20-Node Coupled-Field Solid [online]. [cit. 2019-07-09]. Dostupné z WWW: <https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-s/help/ans_elem/Hlp_E_SOLID226.html>.
- [22] ANSYS Inc., „ACT_Piezo & MEMS Extension_Lecture.pdf,“ 2015.
- [23] DVOŘÁK, Ladislav. *Modelování a identifikace poddajného mechanismu s mechanicky zesílenými piezoaktuátory*. Praha: bakalářská práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2018.
- [24] MILÁČEK, Stanislav. *Náhodné a chaotické jevy v mechanice*. Praha: ČVUT, 2000. ISBN 80-01-02170-X.
- [25] LJUNG, Lenhart. *System Identification Toolbox: User's Guide* [online]. MathWorks [cit. 2019-07-13]. Dostupné z WWW: <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/845043405443234/ident_r2015a.pdf>; str. 5-41.
- [26] VIBERG, M.: *Subspace-based state-space system identification*, *Circuits Systems Signal Processing*. 2002, vol. 21, no. 1, p. 23-37.
- [27] Documentation *N4Sid Options* [online]. MathWorks [cit. 2019-07-14]. Dostupné z WWW: <<https://ch.mathworks.com/help/ident/ref/n4sidoptions.html>>.

- [28] NOLIAC *plate benders CMBP06* [online]. [cit. 2019-07-14]. Dostupné z WWW: <<http://www.noliac.com/products/actuators/plate-benders/kind/card/cardaction/pdf/cardcontroller/Card/show/cmbp06/pagetype/67589/>>.
- [29] ANSYS, Inc., *ANSYS Piezoelectric material data for the Piezoelectric and MEMS ACT Extension*, 2015.
- [30] NOLIAC *PIEZO CERAMICS* [online]. [cit. 2019-07-15]. Dostupné z WWW: <http://www.mmech.com/images/stories/Technologies/Piezo%20Ceramics/Noliac_CERamics_NCE_datasheet.pdf>; str.2,4.
- [31] eFunda *Properties of Piezo Material Lead Zirconate Titanate (PZT-5A)* [online]. [cit. 2019-07-15]. Dostupné z WWW: <https://www.efunda.com/materials/piezo/material_data/matdata_output.cfm?Material_ID=PZT-5A>.
- [32] BOSTON PIEZO OPTICS *Ceramic materials* [online]. [cit. 2019-07-15]. Dostupné z WWW: <<https://bostonpiezooptics.com/ceramic-materials-pzt>>.
- [33] ANSYS *Discovery SpaceClaim* [online]. [cit. 2019-07-16]. Dostupné z WWW: <<https://www.ansys.com/products/3d-design/ansys-spaceclaim>>.
- [34] ANSYS, Inc., *ANSYS Piezoelectric & MEMS exposure in ANSYS WorkBench using ACT*, 2014.
- [35] ANSYS, Inc., *ACT_Piezo & MEMS Extension_WS1 – Piezoelectric Fan*, 2015.
- [36] KLAŠKA, Petr. *Implementace nových metod řešení úloh dynamiky v programovém systému ANSYS*. Brno: diplomová práce, [online]. VUT, Fakulta strojního inženýrství, 2008 [cit. 2019-07-21]. Dostupné z WWW: <https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=7348>; str. 11-12.
- [37] DUFF, I. S., GRIMES, R. G., LEWIS, J. G. *User's guide for the Harwell-Boeing sparse matrix collection*. Chilton: RAL,1992.
- [38] Documentation *Chirp* [online]. MathWorks [cit. 2019-07-30]. Dostupné z WWW: <<https://ch.mathworks.com/help/signal/ref/chirp.html>>.
- [39] KLEJCHOVÁ, Martina. *Rychlá Fourierova transformace*. Praha: bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2008.
- [40] KRIVOŠEJ, Jan. *Návrh struktury a řízení rovinných robotů s pevnými a lanovými částmi*. Praha: diplomová práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2018.
- [41] ŠIKA, Z., ZAVŘEL, J., VALÁŠEK, M.: Residual Modes for Structure Reduction and Efficient Coupling of Substructures, Bulletin of Applied Mechanics, vol.5, no. 19, pp. 54-59, 2009.

- [42] Documentation *tfestimate* [online]. MathWorks [cit. 2019-08-10]. Dostupné z WWW: <<https://ch.mathworks.com/help/signal/ref/tfestimate.html>>.
- [43] Documentation *fmincon* [online]. MathWorks [cit. 2019-08-10]. Dostupné z WWW: <<https://ch.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>>.
- [44] FRANTIŠEK, Ondřej. *Analýza a syntéza mechanismů* [online]. Ostrava: Disertační práce, VŠB, Fakulta strojní, 2011 [cit. 2019-08-04]. Dostupné z WWW: <<https://dspace.vsb.cz/handle/10084/90342>>; str. 49-72.
- [45] HOFREITER, Milan. *Základy automatického řízení*. Praha: ČVUT, 2012. ISBN 978-80-01-05007-1.
- [46] ŠIKA, Zbyněk. *Přednášky z předmětu Syntéza a optimalizace mechanických systémů*. Praha: ČVUT, 2018.
- [47] SVOBODA, Petr. *Optimalizace pomocí genetických algoritmů a genetického programování*. Ostrava: diplomová práce, VŠB, Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2014.

Příloha č. 1

Tabulka odečtených vlastních frekvencí

| Název měření | VI. Frekvence - Experiment [Hz] | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|---------------------------------|----|-----|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. |
| mereni1.senzor17 | | | | 20,9 | | 52,9 | | 102,1 | | 127,0 | | |
| mereni1.senzor8 | | | | | | | 73,2 | 102,1 | | 127,6 | | 172,1 |
| mereni1.senzor14 | | | | | | 53,8 | 73,2 | 102,3 | | | | 187,8 |
| mereni2.senzor10 | | | | | | | 72,9 | | 115,6 | 127,3 | | 186,8 |
| mereni3.senzor11 | | | | | | | | | | | | |
| mereni4.senzor1 | | | | 21,1 | | | 72,7 | | 115,4 | | | 172,3 |
| mereni4.senzor10 | | | | | | | 72,7 | | 115,1 | 128,1 | | 186,4 |
| mereni4.senzor12 | | | | | | | | | 115,4 | | | 187,5 |
| mereni4.senzor14 | | | 3,9 | | | | 72,4 | | 115,3 | | | 186,9 |
| mereni5.senzor2 | | | | 21,0 | | | | 102,1 | 115,5 | 127,5 | | 187,0 |
| mereni5.senzor1 | | | | 21,0 | 36,8 | | 72,7 | 101,9 | 115,4 | | | 170,4 |
| mereni6.senzor17 | | | | 20,9 | | 53,6 | | 102,1 | | 127,3 | | 187,4 |
| mereni7.senzor1 | | | | 21,1 | 36,8 | | 72,1 | | | 126,7 | | 170,5 |
| mereni8.senzor3 | | | | 20,9 | 36,9 | | | 101,4 | | | | 172,4 |
| mereni9.senzor3 | 1,7 | | | 20,4 | | 53,1 | | | | | | 181,0 |
| mereni9.senzor6 | 1,7 | | | 22,0 | 35,0 | | 69,1 | 104,9 | | | 137,3 | 183,4 |
| mereni9.senzor14 | 1,7 | | | 20,7 | 37,0 | 54,2 | 68,4 | 104,9 | | | | 181,3 |
| mereni9.senzor12 | 1,8 | | | 20,7 | 35,2 | | 68,4 | 104,9 | | | 137,5 | 183,1 |
| Odečtené hodnoty [Hz] | 1,7 | | 3,9 | 21,0 | 36,3 | 53,5 | 71,6 | 102,9 | 115,4 | 127,4 | 137,4 | 171,3 |
| | | | | | | | | | | | | 185,3 |