ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní
Ústav letadlové techniky

Diplomová práce

Aerodynamický návrh vrtule

Propeller Aerodynamic Design

David Tari

Praha 2019

Vedoucí práce:	Ing. Jan Klesa Ph.D.
Studijní program:	Letectví a kosmonautika
Studijní obor:	Letadlová a kosmická technika

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Tari** Jméno: **David** Osobní číslo: **409118**

Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**

Zadávající katedra/ústav: **Ústav letadlové techniky**

Studijní program: **Letectví a kosmonautika**

Studijní obor: **Letadlová a kosmická technika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Aerodynamický návrh vrtule

Název diplomové práce anglicky:

Propeller Aerodynamic Design

Pokyny pro vypracování:

Pro vypracování proveďte:
1) Přehled metod pro aerodynamický návrh vrtulí
2) Definujte návrhový režim
3) Návrh pomocí vybrané metody
4) Výpočet charakteristik vrtule
5) Základní pevnostní kontrolu listu
6) Výpočet tahové křivky vrtule

Seznam doporučené literatury:

Podklady a doporučená literatura dle doporučení vedoucího práce.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Jan Klesa, Ph.D., ústav letadlové techniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **30.04.2019** Termín odevzdání diplomové práce: **02.08.2019**

Platnost zadání diplomové práce: _____

Ing. Jan Klesa, Ph.D.	Ing. Robert Theiner, Ph.D.	prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis vedoucí(ho) práce	podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

29. 4. 2019 — Datum převzetí zadání

Tari D. — Podpis studenta

© ČVUT v Praze, Design: ČVUT v Praze, VIC

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci na téma „Aerodynamický návrh vrtule“ vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne ....

David Tari

Poděkování

Tímto děkuji mému vedoucímu Janu Klesovi za množství věnovaného času, cenných rad a připomínek při vypracování bakalářské práce.

David Tari

Obsah

Abstrakt ... 9
I. Úvod ... 10
II. Návrh vrtule ... 11
1. Technický popis letounu ... 11
1.1. Aerodynamická polára letounu ... 11
1.2. Charakteristické rychlosti letu ... 12
1.3. Pohonná jednotka ... 12
1.4. Konstrukční omezení rozměru navržené vrtule ... 12
2. Filozofie návrhu vrtule ... 13
2.1. Předběžný výpočet a návrhový režim vrtule ... 13
2.2. Volba geometrických parametrů vrtule ... 14
3. Metody pro návrh tvaru listů vrtule ... 16
3.1. Návrh podle Larrabee ... 16
3.2. Návrh podle Adkinse ... 17
3.3. Návrh podle Goldsteina ... 17
3.4. Numerická metoda pro řešení vírového modelu vrtule ... 18
3.5. Shrnutí ... 18
3.6. Návrh tvaru listu ... 18
3.7. Výsledky výpočtu ... 22
4. Stanovení charakteristik vrtulí ... 24
4.1. Základní rovnice a jejich odvození ... 25
4.2. Tah a výkon na vrtuli ... 30
4.3. Další vývoj vírové teorie Žukovského – listová teorie ... 32
4.4. Výpočet rychlostního pole ... 34
4.5. Postup výpočtu ... 37
4.6. Charakteristiky a tahová křivka vrtule ... 39
5. Volba materiálu a konstrukce vrtule ... 42
5.1. Konstrukce vrtule ... 42
5.2. Volba materiálu vláken ... 43
5.3. Volba materiálu jádra ... 44
5.4. Mechanické vlastnosti zvolených materiálů ... 44
6. Zatížení vrtulí ... 44
6.1. Požadavky a konstrukce vrtulových listů ... 44
6.2. Letová způsobilost leteckých vrtulí ... 47

6.3. Pevnost listů ... 49
6.4. Hmotné síly ... 50
6.5. Aerodynamické síly ... 54
6.6. Vliv deformace na charakteristiky listu ... 55
6.7. Postup výpočtu zatížení ... 57
7. Pevnostní kontrola listů ... 61
7.1. Fyzikální princip teorie ... 61
7.2. Postup výpočtu ... 62
7.3. Vyhodnocení pevnosti ... 64
7.4. Výpočetní model a výsledky ... 65
III. Závěr ... 66
IV. Seznamliteratury ... 67
V. Seznam obrázků, grafů a tabulek ... 68
VI. Příloh a seznam souborů ... 70
Příloha 1 – Geometrické charakteristiky vrtule ... 70
Příloha 2 – Číselné hodnoty aerodynamického ohybového napětí pro různé úhly nastavení listu ... 71
Příloha 3 – Číselné výsledky napjatosti laminátu v jednotlivých řezech ... 72
Příloha 4 – Výsledky kontrolního výpočtu dle Tsa-Hill ... 79

Nomenklatura

a	(1)	Faktor axiální indukované rychlosti
a'	(1)	Faktor tangenciální indukované rychlosti
A	(1)	Člen řady
A	(N/m)	Člen matice A
b	(m)	Délka tětivy profilu
B	(-)	Počet listů na vrtuli, výpočetní konstanta
B	(N)	Člen matice B
c_m	(1)	Součinitel momentu
c_p	(1)	Součinitel výkonu (vztažený k průměru vrtule)
c_T	(1)	Součinitel tahu (vztažený k průměru vrtule)
c_y	(1)	Součinitel vztlaku
c_x	(1)	Součinitel odporu
E	(Mpa)	Modul pružnosti v tahu
F	(N)	Síla
F	(-)	Disipační funkce
D	(m)	Průměr vrtule
D	(Nm)	Člen matice D
g	(m/s^2)	Gravitační zrychlení
G	(-)	Výpočetní konstatna
G	(Mpa)	Modul pružnosti ve smyku
I	(m^4)	Kvadratický moment průřezu
I, J	(-)	Výpočetní konstanty
k	(-)	Konstanta plochy profilu, proporce tahu, bezpečnostní faktor
K	(-)	Výpočetní konstanta
m	(kg)	Hmotnost
M	(Nm)	Moment síly
M	(N)	Moment síly na jednotku délky
n	(ot/min)	Otáčky vrtule
N	(W)	Výkon vrtule
N	(N/m)	Normálová síla
O	(N)	Odstředivá síla
p	(Pa)	Statický tlak
P	(kW)	Příkon motoru
P_c	(-)	Součinitel výkonu (vztažený k ploše vrtule)
q	(N/m^2)	Měrný krouticí moment
Q	(Mpa)	Redukovaná tuhost
Q'	(N)	Krouticí moment na jednotku délky vrtule
T'	(N/m)	Tah na jednotku délky vrtule
$\bar{r}$	(-)	Bezrozměrná radiální poloha na vrtuli
r	(m)	Radiální poloha na vrtuli
R	(m)	Průměr vrtule
S	(MPa)	Mez pevnosti ve smyku
t	(m)	Tloušťka profilu
t	(N/m)	Měrný tah
T	(N)	Tah vrtule
T'	(N/m)	Tah na jednotku délky vrtule
T_c	(-)	Součinitel tahu (vztažený k ploše vrtule)
u	(m/s)	Indukovaná obvodová rychlost
U	(m/s)	Obvodová rychlost
v	(m/s)	Indukovaná axiální rychlost

v'	(m/s)	Rychlost vírové soustavy
V	(m/s)	Rychlost
V_d	(m/s)	Maximální rychlost
$V_{návrh}$	(m/s)	Návrhová rychlost
V_{vz}	(m/s)	Vzletová rychlost
V_0	(m/s)	Rychlost letu
w	(m/s)	Relativní rychlost nabíhajícího proudu
X	(N)	Odporová síla
X	(MPa)	Mez pevnosti ve směru vlákna
Y	(N)	Vztlaková síla
Y	(Mpa)	Mez pevnosti ve směru kolmém k vlákně
z	(-)	Počet listů
x, y, z	(m)	Souřadnice
α	(°)	Úhel náběhu
β, φ	(°)	Úhel nastavení listu
ε	(-)	Lineární deformace
ρ	(kg/m³)	Hustota vzduchu
η	(-)	Účinnost
σ	(MPa)	Napětí
ξ	(-)	Bezrozměrná radiální poloha na vrtuli
κ	(-)	Křivost
ζ	(-)	Součinitel dopřední rychlosti
λ	(-)	Rychlostní poměr
γ	(-)	Torzní deformace
ν	(-)	Poissonova konstanta
τ	(Mpa)	Smykové napětí
Φ	(°)	Úhel nabíhajícího proudu v řezu listu, silová funkce
		Konstrukční vyklonění listu
μ	(-)	Aerodynamická jemnost
ω	(-)	Úhlová rychlost proudu
σ	(-)	Úhel mezi listy
Γ	(m²/ s²)	Bezrozměrná cirkulace
Ω	(s⁻¹)	Úhlová rychlost vrtule

Indexy

0	Veličina v nerozrušeném proudovém poli, statický, atmosférický
1	Veličina v rovině vrtule, směr vláken
2	Veličina za rovinou vrtule, směr kolmý k vlákně
c	V tlaku
t	V tahu
m	Člen řady
n	U náboje
o	Ohybový
r	Radiální
s	Za sekundu
$\bar{}$	Bezrozměrné, transformované veličiny
yz	Rovina vrtule
xr	Rovina tahu

Abstrakt

Tari, D.: Aerodynamický návrh vrtule: diplomová práce, Praha: ČVUT – České vysoké učení technické, Fakulta strojní, Ústav letadlové techniky, 2019, 60 s. Vedoucí práce: Ing. Jan Klesa Ph.D.

Tato práce je zaměřena na návrh vrtule pro koncepční ultralehký letoun s elektrickou pohonnou jednotkou. V práci nejdřív definujeme nejdůležitější kroky návrhu vrtule, pak na předem definovaný návrhový režim určíme geometrické charakteristiky vrtule se zřetelem na konstrukční omezení definované konstruktérem.

Pro navržený tvar vrtule určíme aerodynamické charakteristiky aplikací vírové teorie Žukovského. Tyto charakteristiky nám v dalších krocích slouží jako vstup k určení zatížení vrtule podél celého listu. V práci je také věnovaná pozornost konstrukci vrtule a volbě materiálů, které po určení průběhů zatížení zkontrolujeme, zda vyhovují pevnostním požadavkům. V závěru práce jsou uvedená doporučení, pomocí kterých je možné dále zkvalitnit konstrukci listu vrtule a která jsou rovněž nutná k ověření jak mechanických, tak aerodynamických vlastností vrtule.

Klíčová slova: Vrtule, Vírová teorie Žukovského, Larrabeeho metoda, Klasická laminační teorie

Abstract

Tari, D.: Propeller Aerodynamic Design: Master Thesis. Prague: CTU – Czech Technical University, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Aerospace Engineering, 2019, 70 p. Tutor: Klesa, J

The thesis is focused on propeller design of a conceptual ultralight aircraft with electric drive unit. In thesis are defined the most important steps in propeller design, than for the given operating mode we will provide the computation of geometric characteristics of the propeller, considering the limitations of the aircraft designer.

After the determination of the geometric properties of the propeller, we apply the vortex theory of Zhukovsky to compute the aerodynamic characteristics of the propeller. These characteristics are input data for the computation of aerodynamic loads. In the thesis we also focus on the construction and selection of the materials, which through stress analysis are evaluated, whether they meet the strength requirements or not. In the end we also mention recommendations, which could further improve the construction and are also important to verify the mechanic and aerodynamic properties of the propeller.

Keywords: Aircraft propeller, Vortex theory of Zhukovsky, Larrabee method, Classical lamination theory

I. Úvod

Hlavním cílem této diplomové práce je provedení rešerše metod pro návrh leteckých vrtulí včetně metod, pomocí kterých lze navrženou vrtuli se specifickými geometrickými charakteristikami analyzovat a stanovit její aerodynamické charakteristiky. Dále je cílem práce aplikovat navrženou metodu jak pro stanovení geometrie a charakteristiky, tak pro následné ověření navrženého tvaru a určit, zda vrtule splňuje požadavky definované návrhovým režimem koncepčního letounu. Parametry tohoto letounu jsou již známé a pro účely výpočtů byli poskytnuty Ing. Karlem Barákem z Ústavu letadlové techniky Fakulty strojní ČVUT.

Jako vstupní údaje jsme obdrželi provozní režimy letounu, parametry motoru, poláru naměřeného modelu a konstrukční omezení na průměr vrtule. Z existujících metod pro návrh tvaru lopatek, které jsou v kapitole 3. popsány, jsme použili postup podle Larrabeeho, který jsme pak analyzovali pro různé letové podmínky pomocí vírové teorie Žukovského.

V práci je také věnovaná pozornost rozboru principu výpočtu jednotlivých typů zatížení na vrtuli, na základě kterých pak provedeme pevnostní analýzu vrtulového listu. Posledním krokem je definování dalších dílčích analýz potřebných k dalšímu vylepšení konstrukce.

Veškeré výpočty a algoritmy byly zpracované pomocí software-u MATLAB a XFOIL, 3D model listu byla vytvořena pomocí CATIA V5.

II. Návrh vrtule

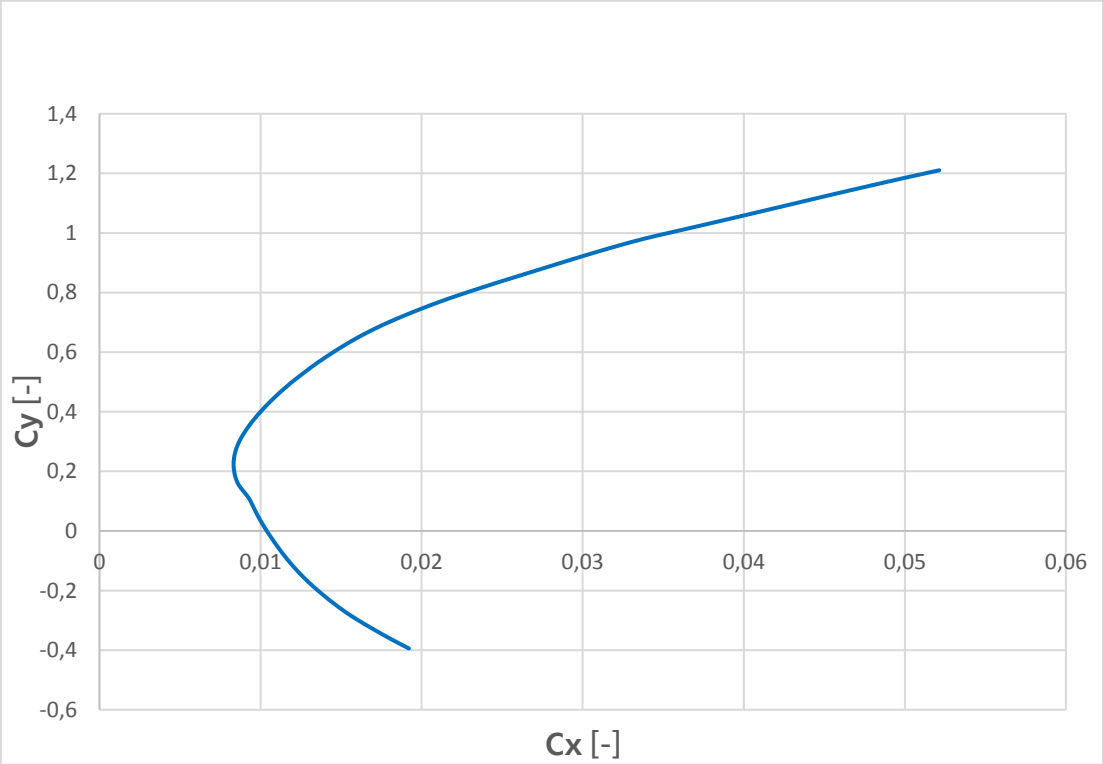
1. Technický popis letounu

Jedná se o koncept ultralehkého letounu s maximální vzletovou hmotností 250 kg. Pro potřeby návrhu vrtule byly vybrány a použity následující parametry letounu:

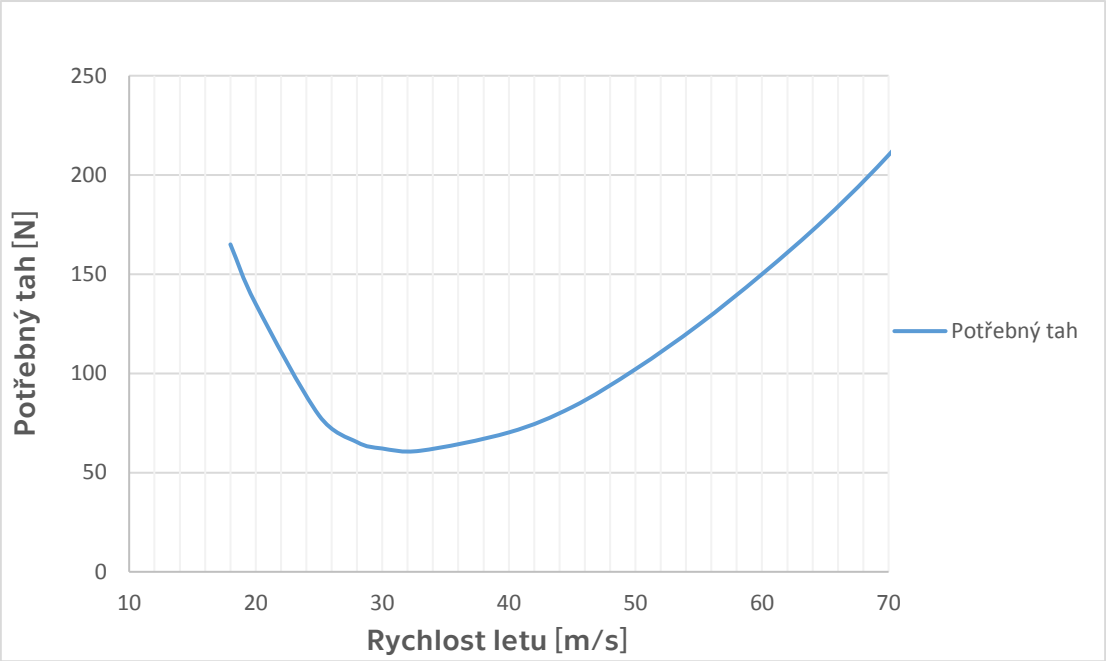
- Aerodynamická polára letounu
- Charakteristické rychlosti letu (vzletová, cestovní a maximální)
- Parametry pohonné jednotky
- Konstrukční omezení rozměru navržené vrtule

1.1. Aerodynamická polára letounu

Aerodynamická charakteristika letounu byla změřená v aerodynamickém tunelu. Na základě změřených dat byla sestavena polára letounu, pomocí níž byl stanoven potřebný tah letounu při různých rychlostech letu. Polára a graf potřebného tahu je znázorněn v Grafu 1, resp. 2.



Graf 1 - Polára letounu



Graf 2-Potřebný tah letadla pro různé rychlosti letu

1.2. Charakteristické rychlosti letu

Pro návrh vrtule jsou rozhodující dva rychlostní režimy, při kterých musí být vrtule schopná dodat potřebný tah. Jedná se o následující rychlosti:

- Vzletová rychlost $V_{vz} = 23\ m/s$
- Maximální rychlost $V_D = 55\ m/s$

Pozn.: charakteristické rychlosti a potřebný tah byly stanoveny pro výšku H=0m dle MSA pro maximální vzletovou hmotnost, tj.250 kg.

1.3. Pohonná jednotka

Pohonnou jednotku tvoří elektromotor s jmenovitým výkonem 15 kW a s jmenovitými otáčkami 2300 ot/min. Technická data a podrobnější popis je dostupný z [9].

1.4. Konstrukční omezení rozměru navržené vrtule

Z konstrukčního hlediska je rozměr navrhované vrtule omezen následovně:

- Vnější průměr vrtule
- Hmotnost navržené vrtule

Průměr vrtule je silně závislí na vnějších rozměrech letadla. Podle směrnice od konstruktéra by ideální průměr neměl přesahovat 1,4m, jelikož větší průměr působí značnou komplikaci pro existující konstrukci podvozku. Pro výslednou hmotnost vrtule nebyla zadaná omezení, ve výpočtech budeme přesto usilovat o co nejnižší hmotnost tak, aby nebyla negativně ovlivněna charakteristika vrtule jako celku ani pevnosti jednotlivých vrtulových listů.

2. Filozofie návrhu vrtule

Při návrhu vrtulového listu jsou zohledněny podmínky aerodynamické, konstrukční, dynamické, výrobní a provozní. [1]

Při návrhu vrtule vždy vycházíme z aerodynamických požadavků na vrtule. Aerodynamický návrh vrtule sestává z předběžného výpočtu, který je ověřen kontrolním výpočtem. [1]

Pomocí předběžného výpočtu jsou stanovené letadlové rychlosti, převody na vrtuli, vrtulový průměr, výškové otáčky a výkony motoru a hledají se následující geometrické charakteristiky vrtule: průběh šířky, tloušťky, zkroucení listů podél poloměru, jakožto i optimální počet listů tak, aby návrh vrtule vyhovoval aerodynamickým požadavkům. Současně je potřebné splnit podmínku co možná nejkratšího rozjezdu letadla a největší účinnosti při specifikovaných letových režimech. [1]

Po předběžném výpočtu se vrtulový list konstrukčně poupraví tak, aby vyhovoval všem dalším požadavkům, a následně se na poupraveném tvaru provede aerodynamický kontrolní výpočet. Kontrolní výpočet je potřebný k potvrzení, zda má vrtule požadované aerodynamické charakteristiky. [1]

Při samotném návrhu vrtule je potřebné zohlednit mnohé parametry, které si mohou vzájemně odporovat, proto je potřebné před finalizací návrhu zvážit všechny varianty k dosažení nejoptimálnější podoby výsledného tvaru. [1]

Jsou známé různé způsoby pro předběžný a kontrolní výpočet. Nejdražší, avšak nejsprávnější způsob je provedení předběžného a kontrolního výpočtu vrtule a následným potvrzením výpočtu měřením v aerodynamickém tunelu. [1]

2.1. Předběžný výpočet a návrhový režim vrtule

Pro předběžný výpočet je nutné znát následující parametry:

a. charakteristiky motoru, se zřetelem k náporovému plnění za letu
b. počet otáček vrtule, tehdy převodový poměr mezi výstupním hřídelem motoru a vrtulí
c. rychlost letu, a to maximální cestovní v různých výškách a rychlost vzletu při největší startovní váze (MTOW)
d. průměr vrtule a případně počet listů [1]

V našem případě charakteristika motoru není potřebná, jelikož vliv výšky nemá na motor žádní vliv, výkon a otáčky je možné jednoduše regulovat takovým způsobem, aby

vyhověly daným letovým podmínkám. Pro návrh budeme použít návrhový bod motoru, který je uveden v Tabulce 1.

Maximální cestovní a vzletová rychlost je daná konstruktérem a byla již definována v kapitole 1.2. Pro návrhový režim si zvolíme bod maximální rychlosti, při jmenovitých otáčkách a výkonu motoru. Důvodem, proč byl zvolen právě bod maximální rychlosti je to, že navržená vrtule musí být schopna absorbovat maximální motorem dodaný výkon, proto budeme při návrhu vycházet z výkonu motoru (viz. popis v kapitole 3.6).Jelikož jsou tyto údaje platné pro výšku H=0m dle MSA, hustotu vzduchu budeme uvažovat za konstantní během celého návrhového postupu. Důvodem volby návrhového režimu je, aby bylo možné při nejvyšší návrhové rychlosti vrtule využít dostupný výkon motoru. Shrnutí parametrů návrhového režimu je znázorněno v Tabulce 1.

$V_{návrh}$ [m/s]	55
H [m]	0
ρ [kg/m^3]	1,225
P [kW]	15
$n_{návrh}$ [ot/min]	2300

Tabulka1 – Parametry návrhového režimu

2.2. Volba geometrických parametrů vrtule

Volba geometrických parametrů vrtule se skládá z následujících kroků:

- Volba otáček vrtule a průměru vrtule (základní parametry)
- Volba ostatních geometrických charakteristik jako šířka profilů podél listu a úhel natočení (upřesňující parametry) [1]

V této kapitole se budeme věnovat pouze volbě základních parametrů. Postup výpočtu upřesňujících parametrů popíšeme v kapitole 3. Jelikož počet otáček jsme již zvolili v předcházející kapitole, následuje určení nejvhodnějšího průměr vrtule tak, aby měla vyhovující účinnost nejen v návrhovém režimu, ale v celém rozsahu možných rychlostí. Z konstrukčních hledisek plyne omezení průměru na 1,4m, je nutné tedy ověřit, zda je tento průměr nejvhodnější pro tento účel.

Jestliže definujeme součinitel tahu a výkonu následovně:

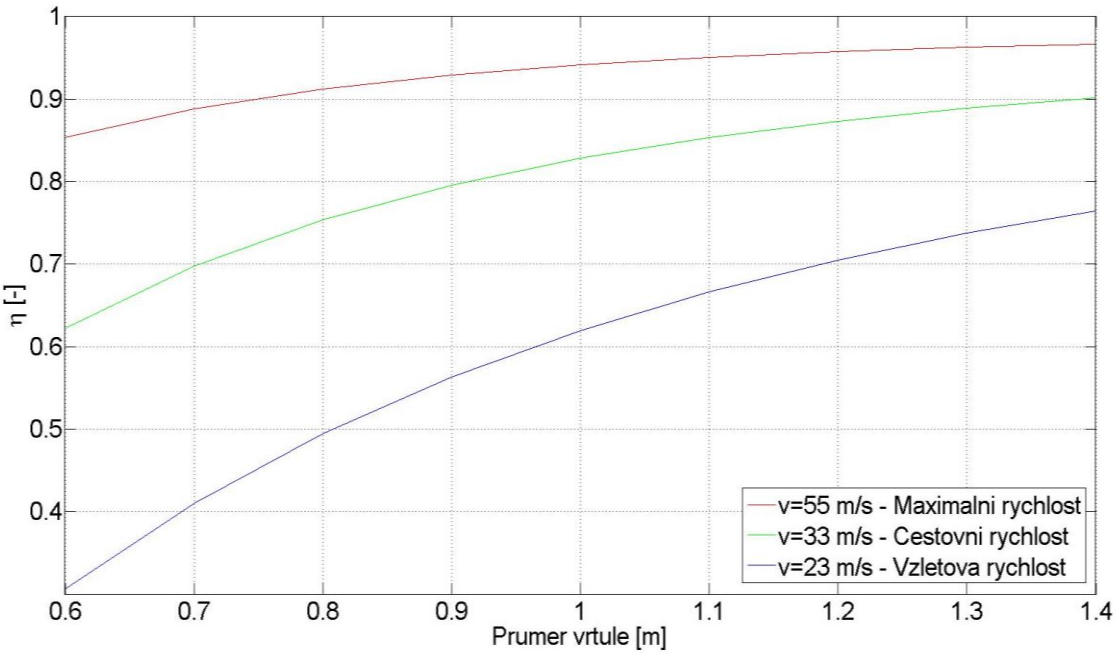
$$T_c = \frac{2T}{\rho {V_0}^2 \pi R^2} \tag{1}$$

$$P_c = \frac{2P}{\rho {V_0}^3 \pi R^2} \tag{2}$$

kde T je tah vrtule, P je výkon na vrtuli, R je poloměr vrtule a V_0 je rychlost letu, pak účinnost můžeme definovat jako

$$\eta = \frac{T_c}{P_c} \tag{3}$$

Jestliže použijeme teorii ideálního propulzoru, jsme schopni určit účinnost vrtule pro různé rychlosti letu a různé průměry vrtule. Výsledky výpočtu jsou patrné z Grafu 3.



Graf 3 – Závislost účinnosti vrtule na jejím průměru

Z Grafu 3 je zřejmé, že průměr vrtule má na její účinnost největší vliv při vzletové konfiguraci. Pro dosažení největší účinnosti proto zvolíme průměr vrtule 1,4m. Stanovením tohoto parametru jsou kompletní veškeré potřebné vstupní data k výpočtu upřesňujících parametrů vrtule.

3. METODY PRO NÁVRH TVARU LISTŮ VRTULE

V této kapitole probereme metody pro výpočet upřesňujících parametrů vrtule. Uvedené metody jsou na různé úrovni výpočetní náročnosti, kde má každý postup své výhody i nevýhody. Po popisu jednotlivých metod vybereme jednu, na základě které pak provedeme výpočet upřesňujících geometrických parametrů vrtule.

Metody podle Larrabbe a Adkins v kapitolách 3.1 a 3.2 vycházejí z předpokladu platnosti Beztove podmínky pro rozložení indukované rychlosti (podmínka pro práci vrtule s maximální účinností odvozená A. Betzem). Principem Betzove teorie je, že když vrtule pracuje při maximální účinnosti, tak by se měl systém vírů za vrtulí pohybovat jako tuhé šroubové těleso. [6] Goldsteinova metoda v kapitole 3.3 vychází z řešení Laplaceovy rovnice pro potenciální proudění. Na závěr popíšeme ještě numerickou metodu pro řešení vírového modelu v kapitole 3.4.

3.1. Návrh podle Larrabee

Jako první vypracoval Larrabee jednoduchý a pro praxi dostatečně přesný postup pro návrh vrtulí na základě Betzove teorie. Za předpokladu malých uhlů a při použití Prandtlovi disipační funkce vyjádřil rozložení cirkulace kolem listů následujícím způsobem [5]:

$$\frac{\overline{\Gamma}}{\overline{w}} = \frac{IF}{2\pi B} \cdot \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}^2 + \frac{\lambda}{\pi^2}}$$

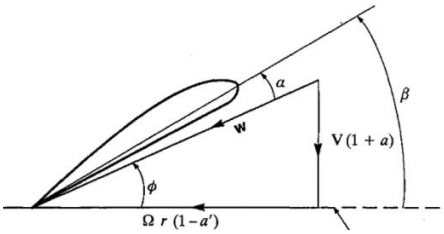
kde F je Prandtlova ztrátová funkce:

$$F = \frac{2}{\pi} \cdot arccos\left(e^{-f}\right) \text{ kde } \quad f = \frac{B}{2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2+\pi^2}}{\lambda} \cdot (1-\xi) \text{ a} \lambda = \frac{V_0}{\Omega R}$$

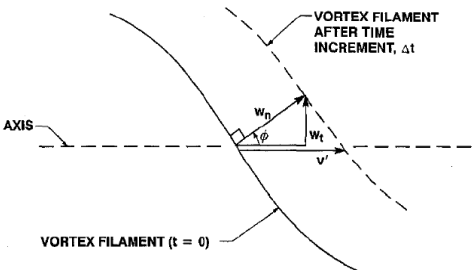
a kde ξ značí bezrozměrnou polohu na listu vrtule.

Metoda předpokládá následující:

- Výpočet generované rychlosti na elementu probíhá na základě stanovení součinitelů a a a' (axiální a tangenciální faktor indukované rychlosti)
- Předpokládá se spirálový úplav za listem
- Vírová soustava cestuje v prostoru s konstantní rychlostí v'
- Neuvažuje se kontrakce vírového systému za vrtulí a předpokládá se, že indukované rychlosti jsou výrazně menší než axiální a tangenciální rychlosti v rovině listu
- Úplav za řezem listu se pohybuje pod konstantním úhlem [5]



Obr. 1 – Rozbor rychlostí v řezu listu [5]



Obr. 2 – Pohyb systému víru za vrtulí [5]

3.2. Návrh podle Adkinse

Návrh podle Adkinse probíhá za stejných předpokladů jako návrh podle Larrabee, fyzikální předpoklady jsou ale doplněné o následující [5]:

- zachování hybnosti daleko před a za vrtulí
- Nepředpokládá malé úhly a předpokládá, že jsou indukované rychlosti a rychlosti volného proudu porovnatelné

Momentovou rovnici Adkins stanovuje takto:

$$T^{'} = 2\pi r\rho V(1+a)(2VaF) \tag{4}$$

$$\frac{Q^{'}}{r} = 2\pi r\rho V(1+a)(2\Omega r a^{'} F) \tag{5}$$

Předpokládá se, že proud vzduchu daleko před vrtulí vstupuje do prstencového objemu, a dále, že tento proud protéká elementem listu o šířce dr. Momentová rovnice popisuje změnu hybnosti proudu, když ta protéká prstencovým kanálem (předpoklad prstencového kanálu vyplívá z diskové teorie). [5]

Disipační funkce podél listu je definovaná jiným způsobem:

$$F = \frac{2}{\pi} \cdot arccos\left(e^{-f}\right) \text{ kde } f = \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{sin\Phi_T} \cdot (1-\xi) \text{ a } \Phi_T = atan\left(\lambda \cdot \left(1+\frac{\zeta}{2}\right)\right)$$

Tahle metoda umožní rozvinout metodu od Larrabeeho pro širší spektrum návrhových režimů.

3.3. Návrh podle Goldsteina

Goldsteinova formulace pro stanovení rozložení cirkulace je nejsložitější v porovnání s předešlými metodami. Jak jsme již zmínili na začátku kapitoly 3, tato metoda vychází z řešení problematiky potenciálního proudění pro Laplaceovy rovnice [10]:

$$\Delta\varphi = 0 \tag{6}$$

Výpočetně se jedná o značně složitou úlohu, nicméně potřebné hodnoty k výpočtu jsou tabelované, co významně ulehčuje výpočet.
Oblast použití této metody je nejuniverzálnější, obzvlášť u návrhu vrtulí pro vyšší rychlosti letu. Jelikož fyzikální princip metody je dost složitý, v naší práci se nebudeme věnovat dál jejímu popisu. Pro podrobnější popis viz. [10]

3.4. Numerická metoda pro řešení vírového modelu vrtule

Tato metoda spočívá v numerické řešení Biot-Savartova zákona pro systém spirálových vírů. Základní formulace Biot-Savartova zákona je následující:

$$d\vec{v_i} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \tag{7}$$

Modifikace obecného zákona pro axiální složku rychlostí umožní vypočítat indukovanou rychlost v místě $\bar{r}$ od spirálového vírového vlákna v místě $\bar{r_1}$. Velikost indukovaných rychlostí obdržíme pomocí numerické integrace:

$$d\overline{v_{iz}} = \frac{\overline{\Gamma}}{\frac{\overline{l}}{\pi}} \cdot \frac{\bar{r_1}\left(\bar{r_1} - rcos\left(\frac{\pi\bar{z}}{l} + \sigma\right)\right)}{\left(\bar{r_1}^2 + \bar{r}^2 - 2\bar{r}\bar{r_1}cos\left(\frac{\pi\bar{z}}{l} + \sigma\right) + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot d\bar{z} \tag{8}$$

kde

$$\sigma = 2\pi\frac{i-1}{B}$$

Z výpočetního hlediska lze Goldsteinovu metodu a numerickou metodu považovat za ekvivalentní. Podobně jako Goldsteinova metoda, i tento model vyžaduje obsáhlejší vysvětlení pro pochopení fyzikálního principu. [11]

3.5. Shrnutí

Na základě zkušeností lze jednoznačně stanovit, že pomocí metod Larrabeeho a Adkinse je možné navrhnout tvar vrtulových listů pro menší rychlostní poměry **λ,** nicméně u menších počtů listů tyhle metody dávají méně přesné výsledky. U vyšších rychlostních poměrů tyto metody nelze aplikovat s postačující přesností, proto se doporučuje použít Goldsteinovu metodu nebo numerickou metodu vírového modelu.

3.6. Návrh tvaru listu

Jelikož budeme vrtuli navrhovat na menší rychlosti a nebude vystavena extrémním režimům, z hlediska tvaru postačí návrh podle Larrabeeho. Výhodou této metody je, že je snadno programovatelná, v případě změn návrhového režimu nebo konstrukčních podmínek lze návrh vrtule snadno přepočítat tak, aby co nejlépe splnila návrhové parametry. V následující kapitole bude věnována pozornost výpočetnímu postupu dle Larrabeeho, kterou jsme představili v kapitole 3.1.

3.6.1. Popis modelu proudění

Úplav za vrtulí je modelován jako šroubovitá plocha, která se pohybuje s rychlostí $v^{'}$ vůči pozorovateli. Promítneme-li tuto rychlost kolmo k vírovému vláknu, obdržíme rychlost w_n. Pro výpočet je důležitější rychlost w_t, která je tangenciální složkou této rychlosti a lze ji vypočítat z výrazu [5]:

$$w_t = w_n sin\Phi = v^{'} sin\Phi cos\Phi \tag{9}$$

Tato rychlost se mění podél listu a je to rychlost, kterou list indukuje. Cirkulaci můžeme vypočítat následovně:

$$B\Gamma = 2\pi r w_t F = 2\pi r v^{'} sin\Phi cos\Phi F \tag{10}$$

kde F je již známá disipační funkce a Γ je cirkulace generovaná jedním listem. Pomocí trigonometrických vztahů z Obr. 1 můžeme sestavit následující výrazy:

$$sin\Phi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{11}$$

$$cos\Phi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{12}$$

Kde x je místní hodnota $\Omega r/V$. Po shrnutí obdržíme následující výraz:

$$\frac{B\Gamma\Omega}{2\pi V\, v^{'}} = \frac{x^2}{1+x^2} F = G \tag{13}$$

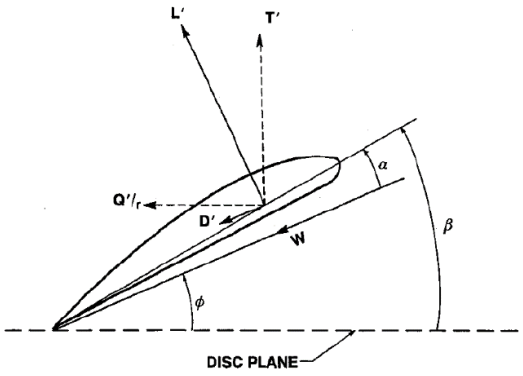
Cirkulaci pak můžeme vyjádřit následovně:

$$\Gamma = \frac{2\pi V\, v^{'} G}{B\Omega} = \frac{2\pi G}{B\Omega} V^2 \zeta \tag{14}$$

kde $\zeta = v^{'}/V$ je bezrozměrná dopřední rychlost šroubovitého vírového systému.

3.6.2. Vztah mezi silami na elementu listu a pohybem proudu

Teď vyjádříme síly působící na elementu listu jako funkci výše uvedených kinematických vazeb. Vycházíme z Obr. 3 [5]:



Obr. 3 – Rozbor sil na řezu listu [5]

Z Obr. 3 je zřejmé, že tah působící na elementu listu můžeme vyjádřit jako

$$T' = \frac{T}{dr} = L'cos\Phi - D'sin\Phi = L'cos\Phi(1 - \mu tan\Phi) \tag{15}$$

Kde μ je jemnost listu. Pomocí věty Žukovského člen L' můžeme nahradit, čímž dostaneme následující tvar [5]:

$$T' = B\rho\Gamma W cos\Phi(1 - \mu tan\Phi) \tag{16}$$

S aplikací trigonometrických poznatků z Obr. 1 můžeme výraz dál upravit:

$$T' = B\rho\Gamma\Omega r\ (1 - a')\ (1 - \mu tan\Phi) \tag{17}$$

Jestliže předpokládáme, že indukční faktor a'(v tangenciálním směru) bude polovina poměru tangenciální rychlosti v úplavu a obvodové rychlosti na daném řezu profilu, můžeme stanovit následující [5]:

$$a' = \frac{1}{2}\frac{w_t}{\Omega r} = \frac{1}{2}\frac{v' cos\Phi sin\Phi}{\Omega r} = \frac{1}{2}\zeta\frac{1}{1 + x^2} \tag{18}$$

Z toho vyplívá následující:

$$T' = B\rho\Gamma\Omega r\ \left(1 - \frac{1}{2}\zeta\frac{1}{1 + x^2}\right)\ (1 - \mu tan\Phi) \tag{19}$$

Jestli dosadíme výraz pro cirkulaci zpátky, dostaneme výsledný výraz pro tah, působící na elementu listu:

$$T' = 2\pi r G V^2\zeta\ \left(1 - \frac{1}{2}\zeta\frac{1}{1 + x^2}\right)\left(1 - \frac{\mu}{x}\right) \tag{20}$$

Po integraci po délce listu obdržíme na levé straně tah vrtule. Pravá strana reprezentuje sadu integrálů, kde x je proměnnou a ζ je konstanta po délce listu.
Rovnice19 bude velice důležitý z hlediska návrhu. Při definování návrhového režimu pro nás bude směrodatný potřebný tah v daném režimu. Vycházíme-li ze známého vztahu pro součinitel tahu, obdržíme následující [5]:

$$T_c = \frac{2T}{\rho V^2 \pi R^2} \rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{1}{2}\rho V^2 \pi R \frac{dT_c}{d\xi} \tag{21}$$

Srovnáním rovnic (20) a (21) dostaneme:

$$\frac{dT_c}{d\xi} = 4\xi G\zeta\left(1 - \frac{\mu}{x}\right) - 2\xi G\zeta^2\left(\frac{1-\mu}{x^2+1}\right) \tag{22}$$

Po provedení integrace můžeme zavést jednoduchý tvar pro výpočet ζ:

$$\zeta = \frac{I_1}{2I_2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4I_2T_c}{I_1^2}}\right) \tag{23}$$

Kde I_1 a I_2 jsou integrály podél listu:

$$I_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} 4\xi G \ \left(1 - \frac{\mu}{x}\right) d\xi \, I_2 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} 2\xi G \ \left(\frac{1 - \frac{\mu}{x}}{x^2+1}\right) d\xi \tag{24}$$

Úvaha je identická pro návrh tvaru pro daný výkon, v tomhle případě se výpočet změní pouze tím, že na začátku definujeme součinitel výkonu P_c a parametr ζ vypočítáme následovně [5]:

$$\zeta = \frac{J_1}{2J_2}\left(\sqrt{1 + \frac{4J_2P_c}{J_1^2}} - 1\right) \tag{25}$$

Kde J_1 a J_2 jsou integrály podél listu:

$$J_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} 4\xi G \ \left(1 + \frac{\mu}{x}\right) d\xi \, J_2 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} 2\xi G \ \left(\frac{1 + \frac{\mu}{x}}{x^2+1}\right) x^2 d\xi \tag{26}$$

Po výpočtu součinitele dopřední rychlosti už můžeme určit indukční faktor a (v axiálním směru):

$$a = \frac{1}{2}v' cos^2\Phi = \frac{1}{2}\zeta V \frac{x^2}{1+x^2} \tag{27}$$

<u>3.6.3. Geometrie listu</u>

Pomocí Obr. 1 již můžeme určit úhel nastavení listu v daném řezu:

$$\Phi = atan\left(\frac{V(1-a)}{\Omega r(1-a')}\right) \tag{28}$$

Potřebnou velikost profilu v daném řezu určíme ze závislosti

$$\rho W\Gamma = \frac{1}{2}bc_y\rho W^2 \rightarrow \ b = \frac{2\Gamma}{Wc_y} \tag{29}$$

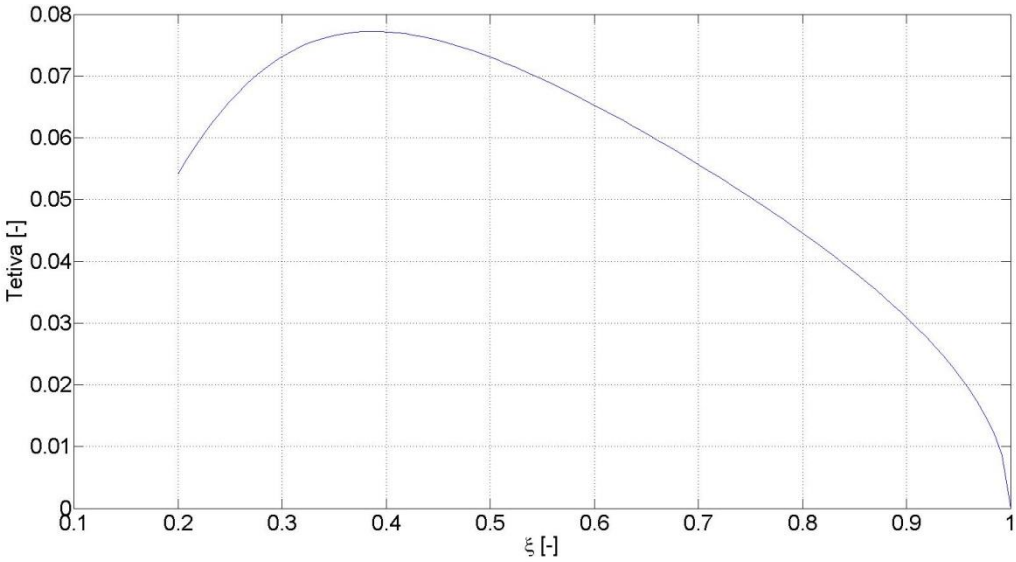
3.6.4. Postup návrhu

1. Volba průměru vrtule a návrhového režimu letadla
2. Určení potřebného tahu/výkonu v daném režimu letadla tj. T_c nebo P_c a rozložení součinitele vztlaku podél lopatky $c_y = \mathrm{f(r)}$ (pro zvolený c_y odečet úhlu náběhu α z charakteristiky profilu)
3. Výpočet jemnosti μ , disipační funkce F a funkce G
4. Výpočet integrálů I_1 a I_2, resp. J_1 a J_2
5. Stanovení součinitele dopřední rychlosti ζ
6. Výpočet indukčních faktorů v tangenciálním a axiálním směru a a a'
7. Výpočet úhlu Φ, který společně s úhlem α určí úhel nastavení listu v daném řezu, tj. $\beta = \Phi + \alpha$
8. Integrace výrazů dT/dr a dQ/dr podél listu, tím obdržíme výsledný tah, výkon a účinnost vrtule
9. Určení velikosti profilů podél listu z $b = \frac{2\Gamma}{W c_y}$ [5]

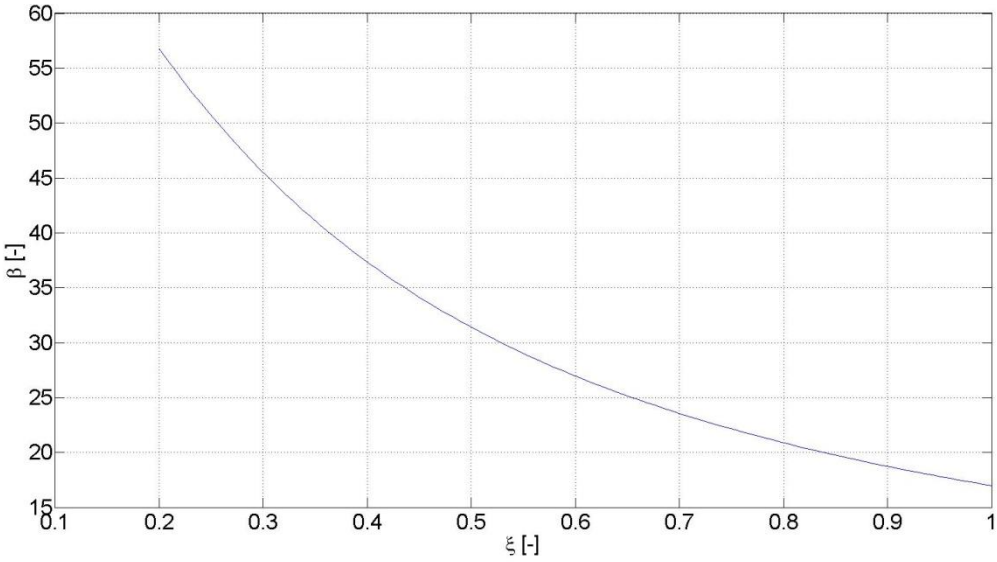
3.7. Výsledky výpočtu

Podle postupu výpočtu v kapitole 3.6 jsme stanovili upřesňující geometrické parametry vrtule, které odpovídají návrhovému režimu, který jsme popsali v kapitole 2.1. Počet listů jsme si zvolili 2 pro co nejmenší hmotnost vrtule. Použitý profil podél celé délky listu je RAF-6, který je běžně užívaným profilem u vrtulí. Důvodem pro volbu RAF-6 je dále snadná výroba a značná tolerance vůči nepřesnostem z výroby, které mohou u modernějších profilů značně ovlivnit aerodynamické vlastnosti. Uvedené výsledky jsou bezrozměrné, vztažené na poloměr vrtule. Číselné výsledky geometrických charakteristik jsou uvedeny v Příloze č. 1.

3.7.1. Geometrie listu

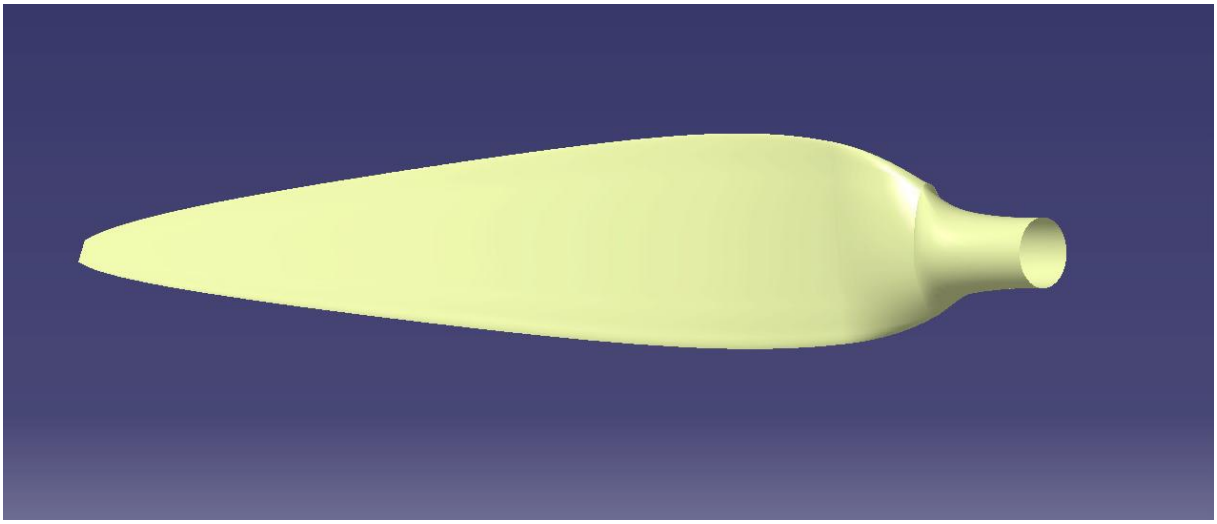


Graf 4 – Průběh šířky profilů podél listu



Graf 5 – Průběh natočení profilů podél listu

3.7.2. 3D model listu



Obr. 4 – 3D model navrženého listu

Profily na jednotlivých poloměrech vrtule byly umístěny tak, aby byla těžištní osa vrtule kolmá k ose otáčení. Toto rozhodnutí má významný vliv z hlediska namáhání vrtule, které popíšeme podrobněji v kapitole 6.4.3.

4. Stanovení charakteristik vrtulí

Pro stanovení charakteristik vrtule jsme zvolili vírovou teorii N. J. Žukovského. V následující kapitole popíšeme princip a základní vztahy fyzikálního modelu včetně modifikací, které umožní snadnější výpočet při zachování přesnosti postačující pro praxi. [1]

Fyzikální model tvořící základ vírové teorie N. J. Žukovského je založen v podstatě na následujících předpokladech:

- Účinek vrtule na proud v určitém prostoru se nahrazuje analogickým účinkem vírové soustavy
- Vírová soustava se skládá s válcové vírové vrstvy, vírového rovinného dna a z centrálního vírového vlákna [1]

Uvažování zúžení proudu (tj. zúžení vírové soustavy), jen komplikuje teorii a z hlediska výpočtů nezlepšuje ani přesnost. V této teorii se uvažují střední obvodové rychlosti za absolutního pohybu, čímž se znatelně zjednodušuje rozbor jevů. Základním parametrem se zde volí cirkulace rychlosti. Indukovaná rychlost vrtulí v proudu se určuje v závislosti na cirkulaci; jinými slovy: cirkulace určuje rychlostní pole kolem vrtule. Žukovského vírová teorie vrtule určuje následující vztahy [1]:

- Vztah mezi cirkulací a konstrukčními parametry (základní rovnice teorie)
- Vztah mezi cirkulací a rychlostmi indukovanými vrtulí v proudu
- Vztah mezi cirkulací a výkonem
- Vztah mezi cirkulací a tahem vrtule pro zvolené podmínky

4.1. Základní rovnice a jejich odvození

Pro zjednodušení formulací Větčinkin zavedl bezrozměrné označení veličin, které jsou následovné [1]:

Poloměr:

$$\overline{r} = \frac{r}{R}$$

Obvodová rychlost podél listu:

$$\overline{U} = \frac{\Omega r}{\Omega R} = \overline{r}$$

Rychlost vrtule (vrtule):

$$\lambda = \frac{V}{\pi D n_s} = \frac{J}{\pi}$$

Indukovaná obvodová rychlost:

$$\overline{u} = \frac{u}{\Omega R}$$

Indukovaná osová rychlost:

$$\overline{v} = \frac{v}{\Omega R}$$

Šířka listu (tato označení je vztažená na celkovou šířku na všech listech vrtule)

$$\overline{b} = \frac{zb}{2\pi D}$$

Cirkulace

$$\overline{\Gamma} = \frac{\Gamma}{4\pi\Omega R^2}$$

Tah vrtule

$$\overline{T} = \frac{T}{2\pi\rho\Omega^2 R^4}$$

Krouticí moment na vrtuli

$$\overline{Q} = \frac{Q}{2\pi\rho\Omega^2 R^5}$$

Výkon vrtule

$$\overline{N} = \frac{N}{2\pi\rho\Omega^3 R^5}$$

V následujících výpočtech budeme uvažovat veličiny s indexem 0 jako veličiny proudového pole před vrtulí, veličiny s indexem 1 jako veličiny v rovině otáčení vrtule a veličiny s indexem 2 jako veličiny za rovinou vrtule. [1]

Pokud uvažujeme střední rychlosti proudění, lze použít Bernoulliho rovnici pro určení vztahu mezi cirkulací a indukovanou rychlostí. Jestliže budeme uvažovat Bernoulliho rovnici v relativním proudění, a přitom si zvolíme dva průřezy proudového prstencového vlákna v jistých velkých vzdálenostech před vrtulí a za ní, Bernoulliho rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru [1]

$$\frac{w^2}{2} - \Phi + \frac{p}{\rho} = const. \tag{30}$$

kde Φ je silová funkce hmotných sil. Jestliže hmotnost vzduchu jako nepatrnou zanedbáváme, je silová funkce redukována pouze na odstředivou složku, příslušnou jednotce hmoty. V tomto případě silová funkce bude mít tvar [1]

$$\Phi = \int \Omega^2 r \, dr = \frac{\Omega^2 r^2}{2} \tag{31}$$

Před vrtulí a za ní má proud axiální a obvodové rychlosti. Předpokládáme, že p_0, V_0 a $U_0 = \Omega r_0$ jsou tlak, axiální rychlost a obvodová rychlost před vrtulí a p_2, V_2 a [1]

$U_2 = (\Omega - \omega_1)\, r_0$ jsou stejné veličiny za ní. Jestliže neuvažujeme radiální rychlosti (proud je válcový), dostáváme následující vztah [1]:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2} + \frac{U_0^2}{2} - \frac{\Omega^2 r_0^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + \frac{U_2^2}{2} - \frac{\Omega^2 r_2^2}{2} \tag{32}$$

Tato rovnice platí pro jednu prstencovou proudnici. Ve skutečnosti vlivem zúžení proudu nejsou poloměry prstencové proudnice před vrtulí a za ní stejné. Protože zúžení proudnice není zpravidla velké, považujeme poloměry za konstantní. Rovnici předepíšeme tak, že do ní dosadíme indukované rychlosti v axiálním a obvodovém směru [1]:

$$\frac{p_0}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = v_2\left(V_2 + \frac{v_2}{2}\right) - r^2\omega_2\left(\Omega - \frac{\omega_2}{2}\right) \tag{33}$$

Jestliže proud za vrtulí rotuje a podléhá účinku odstředivých sil, nerovná se atmosférický tlak p_0 tlaku p_2. Tento tlak dokážeme vypočítat tak, že předpokládáme v prstencové proudnici na poloměru r, která se otáčí úhlovou rychlostí ω_2, že působí mezi dvěma řezy $d\sigma$ ve vzdálenosti dr, rozdíl tlaků dp_2 s nímž je odstředivá síla v rovnováze. [1]

Pak

$$dp_2 d\sigma = \rho \omega_2^2 r dr d\sigma$$

nebo

$$dp_2 = \rho \omega_2^2 r dr$$

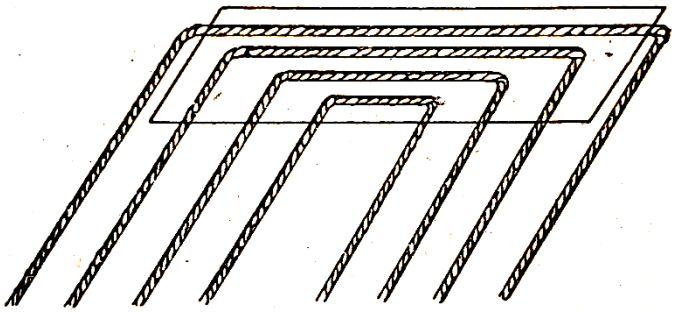
Integrací mezi vnějším proudovým polem a poloměrem $r\mathbf{r}$ určíme rozdíl tlaku proti atmosférickému tlaku:

$$\frac{p_0}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \int_r^R \omega_2^2 r \, dr \tag{34}$$

Jestliže levé strany vztahů (32) a (33) se rovnají, můžeme napsat následující vztah:

$$v_2 \left(V_0 + \frac{v_2}{2}\right) - r^2 \omega_2 \left(\Omega - \frac{\omega_2}{2}\right) = \int_r^R \omega_2^2 r \, dr \tag{35}$$

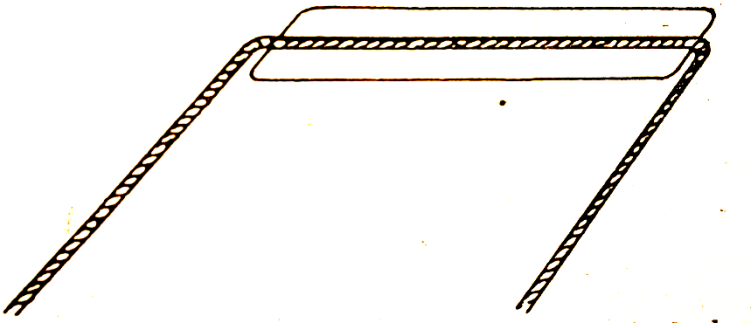
Podle vírové teorie se nosná plocha nahrazuje soustavou podkovitých vírů:



Obr. 5 – Systém podkovitých víru nahrazující nosnou plochu [1]

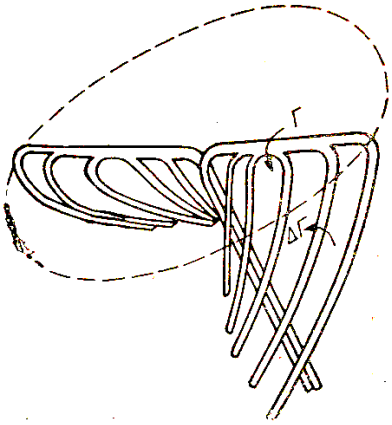
Myšlené víry nahrazující nosnou plochu se nazývají vázané víry, odtékající víry se nazývají volné víry. Cirkulace rychlosti podél nosné plochy a součet cirkulací podél jednotlivých obvodů, vymezujících složky volných vírů po jedné straně nosné plochy, tj. jednotlivé úplavy podkovitých vírů, se rovná cirkulaci vázaného víru v příslušném místě nosné plochy. [1]

Nosnou plochu lze si také představit ve tvaru jediného podkovitého víru, pak cirkulace po obvodu, vymezující volný vír, se rovná cirkulaci po obvodu, vymezující vázaný vír: [1]



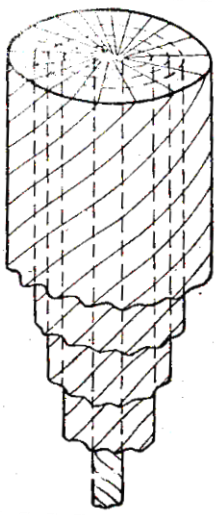
Obr. 6 – Nosná plocha nahrazená jediným podkovitým vírem [1]

Stejně si lze představit vírovou soustavu vrtulového listu. Z každého listu odtéká soustava podkovitého víru, které probíhají přibližně ve šroubovicích:



Obr. 7 – Systém podkovitých víru na listech otáčející se vrtule [1]

Jednotlivé vírové soustavy, spojené s vrtulovými listy, se postaví za rotace vrtule do různých poloh vzhledem k pozorovateli, kterému se bude zdát, že proud je vytvořen válcovou plochou vírů. Každý volný vír lze tedy nahradit válcovou plochou a vázané víry rovinnou plochou, jak je to znázorněn na Obr. 7:



Obr. 8 – Ilustrace válcových vírových ploch vrtule [1]

Uvažujeme-li vrtuli s proměnnou cirkulací, pak cirkulace podél kruhového obvodu, vzniklého řezem válcových ploch s rovinou, kolmou na osu vrtule, se rovná $z\Gamma$ a mění se změnou Γ podél listu. Je však známo, že cirkulace podél obvodu se rovná součtu součinů průmětů rychlosti a elementárních drah. Lze proto určit vztah mezi cirkulací a rychlostí indukovanou vrtulí. Průmět indukované rychlosti podél tohoto kruhového obvodu se rovná indukované obvodové rychlosti u. Jak jsme již uvedli, cirkulace podél tohoto obvodu se rovná $z\Gamma$, kde Γ je cirkulace jednoho listu. Současně se však tato cirkulace rovná součinu obvodové rychlosti a délky obvodu, tj. délky kružnice $2\pi r$. [1]

Tím dostaneme:

$$z\Gamma = 2\pi r u$$

Dále můžeme vztah rozepsat do tvaru:

$$u_2 = \omega_2 r = \frac{z\Gamma}{2\pi\Omega r} \rightarrow \omega_2 = \frac{z\Gamma}{2\pi\Omega r^2} \tag{36}$$

Jestliže vzorec (36) dosadíme zpátky do vzorce (35), dostaneme výraz:

$$v_2\left(V_0 + \frac{v_2}{2}\right) - \frac{z\Gamma}{2\pi}\left(\Omega - \frac{z\Gamma}{4\pi r^2}\right) = \int_r^R \left(\frac{z\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{dr}{r^3} \tag{37}$$

Jestliže zavedeme bezrozměrné veličiny definované na začátku kapitoly, dostaneme výraz:

$$\bar{v}_2\left(\lambda_0 + \frac{\bar{v}_2}{2}\right) - 2\bar{\Gamma}\left(1 - \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{r}^2}\right) = 4\int_{\bar{r}}^1 (\bar{\Gamma})^2 \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^3} \tag{38}$$

Zanedbáme-li odstředivou sílu, obdržíme zjednodušený tvar:

$$\bar{v}_2\left(\lambda_0 + \frac{\bar{v}_2}{2}\right) = 2\bar{\Gamma}\left(1 - \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{r}^2}\right) \tag{39}$$

Výpočet integrálu je jednoduchý, jestliže $\bar{\Gamma} = const$, což je u vrtule s konstantní cirkulací Γ. Výpočty však ukazují, že při proměnné cirkulací Γ se hodnota tohoto integrálu je málo liší od hodnoty příslušné vrtuli, u které je $\bar{\Gamma} = const$, pak:

$$\bar{v}_2\left(\lambda_0 + \frac{\bar{v}_2}{2}\right) - 2\bar{\Gamma}\left(1 - \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{r}^2}\right) = 4(\bar{\Gamma})^2 \int_{\bar{r}}^1 \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^3} \tag{40}$$

nebo

$$\bar{v}_2\left(\lambda_0 + \frac{\bar{v}_2}{2}\right) = 2\bar{\Gamma}(1 - \bar{\Gamma}) \tag{41}$$

Tento vzorec obsahuje rychlost indukovanou za vrtulí. Při výpočtech je jednoduší počítat s rychlostí v rovině vrtule. Z teorie ideálního propulzoru je známo, že indukovaná rychlost v rovině propulzoru se rovná polovině rychlosti za propulzorem. Zanedbáme-li účinek odstředivých sil, platí tato věta též v uvažovaném případě [1]. Přibližně lze psát:

$$\bar{v}_1(\lambda_0 + \bar{v}_1) = \bar{\Gamma}(1 - \bar{\Gamma}) \tag{42}$$

Jelikož hodnota $\bar{\Gamma}$ ve srovnání 1 je zanedbatelně malá (řádu 0,005), pro praktické účely lze použít vzorec

$$\bar{v}_1(\lambda_0 + \bar{v}_1) = \bar{\Gamma} \tag{43}$$

Dbáme-li účinku odstředivých sil na indukované rychlosti, vyjde vztah mezi rychlostmi v rovině vrtule a za ní značně složitější. Indukovaná rychlost bude v rovině vrtule poněkud větší než poloviční rychlost za vrtulí. Tento vztah lze odvodit z rovnice Bernoulliho a má tvar [1]

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{v}_2}{2}(1 + \bar{\Gamma}) \tag{44}$$

Uvažujeme-li účinek odstředivých sil a zúžení proudu, má konečný vzorec tvar:

$$\bar{v}_1(\lambda_0 + \bar{v}_1) = \bar{\Gamma}(1 - \bar{\Gamma}^2) \tag{45}$$

Řešením zjednodušené rovnice je

$$\bar{v}_1 = -\frac{\lambda_0}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{2} + \bar{\Gamma}} \tag{46}$$

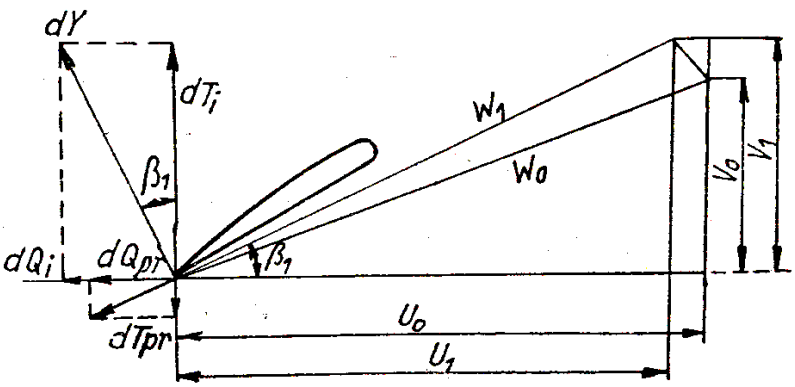
Rychlost v rovině vrtule je

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{4} + \bar{\Gamma}} \tag{47}$$

Všech odvozených vzorců lze použít s přesností, postačující pro praxi, nejen při cirkulací podél listů, ale i když je tato cirkulace podél listů proměnná. [1]

4.2. Tah a výkon na vrtuli

Uvažujme libovolný řez listu. Promítneme-li vztlak a čelní odpor elementu listu do směru osy vrtule a do směru kolmého na tuto osu, obdržíme indukované (průmět vztlaku) a profilové (průmět čelního odporu) síly na elementu listu. Síly určíme podle Obr.9:



Obr. 9- Rozbor sil a rychlosti v řezu listu [1]

Platí:

$$\frac{dX}{dY} = \mu$$

$$\frac{dT_{prof}}{z} = -dXsin\beta_1 = -\mu dYsin\beta_1 = -\mu dQ_i$$

$$\frac{dQ_{prof}}{z} = dXcos\beta_1 = \mu dYcos\beta_1 = \mu dT_i$$

Elementární tah a obvodovou sílu z listů můžeme vyjádřit:

$$dT = -dXsin\beta_1 = -\mu dYsin\beta_1 = -\mu dQ_i$$
$$dQ = dXcos\beta_1 = \mu dYcos\beta_1 = \mu dT_i$$

Podle věty Žukovského obvodovou a tahovou složku síly můžeme vyjádřit jednoduše:

$$dQ_i = z\rho V_1 dr$$
$$dT_i = z\rho U_1 dr$$

Jestliže použijeme označení podle Vetčinkina a geometrické poznatky z Obr.9, obdržíme následující vztah pro tah a výkon vrtule [1]:

$$d\bar{T} = 2\bar{\Gamma}(\overline{U_1} - \mu\lambda_1)d\bar{r} \tag{48}$$

$$d\bar{N} = 2\bar{\Gamma}(\lambda_1 + \mu\overline{U_1})\bar{r}d\bar{r} \tag{49}$$

Jestliže známe průběh uvedené veličiny ve vzorcích (48) a (49), celkový tah a výkon na vrtuli obdržíme pomocí integrálů [1]

$$\bar{T} = 2\int_{\overline{r_0}}^{1} \bar{\Gamma}(\overline{U_1} - \mu\lambda_1)\, d\bar{r} \tag{50}$$

$$\bar{N} = 2\int_{\overline{r_0}}^{1} \bar{\Gamma}(\lambda_1 + \mu\overline{U_1})\bar{r}\, d\bar{r} \tag{51}$$

Základní vztahy vírové teorie lze odvodit srovnáním vzorců pro aerodynamické síly, stanovené na základě cirkulace, s aerodynamickými silami, vyjádřenými na základě obecných vzorců experimentální aerodynamiky, tj. zavedením aerodynamických součinitelů. [1]

Podle věty Žukovského je vztlak dán vzorcem

$$Y = \rho\Gamma V l$$

Analogicky vztlak elementu listu délky dr je

$$dY = \rho\Gamma W_1 dr$$

Současně platí

$$dY = \frac{1}{2}\rho W_1^2 b c_y dr$$

Srovnáním obou vzorců dostaneme:

$$d\Gamma = \frac{1}{2} b c_y W_1 \; nebo \; \bar{\Gamma} = \frac{1}{2}\bar{b} c_y \overline{W_1} \tag{52}$$

4.3. Další vývoj vírové teorie Žukovského – listová teorie

Vírová teorie Žukovského je založena na třech základních předpokladech:

1. Soustava vírů, která se vytvořil podél proudnic relativního pohybu, vymezuje vnější válcovou plochu, ohraničující proud, jehož průměr se rovná průměru vrtule.
2. Soustava vírů má tvar válcové plochy, jejíž cirkulace se rovná součtu cirkulací kolem listů.
3. Rychlostní pole kolem vrtule se nahrazuje středními rychlostmi podél kružnic válce

Pokusy o zlepšení teorie spočívali v tom, že se souosé válce nahrazují rotačními plochami, které v určité vzdálenosti od vrtulí přecházejí v souosé válce. Později se potvrdilo, že tento postup značně komplikuje teorii a výrazně nezpřesní ani výpočet. [1]

Základní myšlenka vázaných vírů by umožnila počítat se skutečnými rychlostmi relativního pohybu tekutiny, ale taková analýza by značně komplikovala výpočet.

Předpoklad vírové soustavy ve tvaru soustavy vírů odtékajících z každého listu umožňuje vypočíst skutečné rychlosti indukované jednotlivými listy a proto se tato teorie nazývá teorie listová nebo teorie mříží. [1]

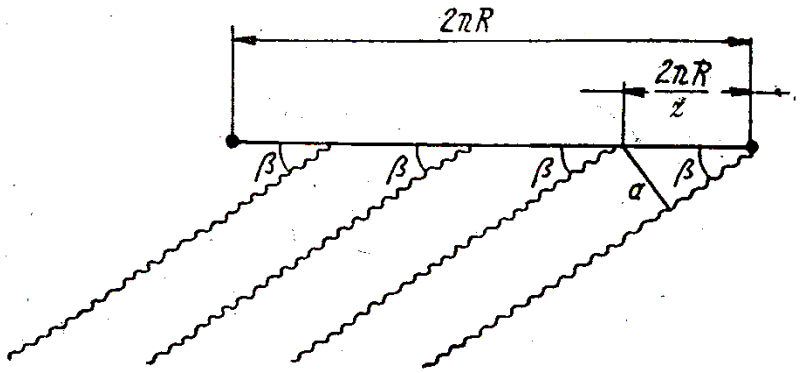
Základní teorie vírových mříží je, že jednotlivé víry se nahradili vírovými vrstvami, rovnoměrně rozloženými na válcových plochách. Tato záměna umožnila Žukovskému vypočítat indukované rychlosti v uzavřeném tvaru, což znatelně zjednodušil teorii i výpočet charakteristik vrtule. [1] Tato záměna podél obvodu nezpůsobí značnější nepřesnosti za následujících předpokladů:

- Vrtule má větší počet listů
- Rychlostní poměr je menší, než 1

Vlivem záměny při vyšších rychlostních poměrech (kdy poměrná vzdálenost vírových ploch značně vzroste) výrazně vzroste i rozdíl mezi střední indukovanou rychlostí a skutečnou rychlostí, dochází tím k značným nepřesnostem a je proto nutné dopočítat skutečné rychlosti, tj. rychlosti indukované vrtulovými víry v osách vázaných vírů. Tyto výpočty byly odvozeny na základě známé práce Žukovského o vírové teorii vrtule a umožnily sestavit výpočetní metodiku, která se podobá výpočtu nosné plochy letadla konečného rozpětí. [1]

Tyto výpočty mají stejné předpoklady, jak u vázaných výpočtů nosné plochy letadla:

1. Rovinné proudění (možnost transformace proudění do roviny):



Obr. 10 - Rozvinutí válcové vírové plochy do roviny [1]

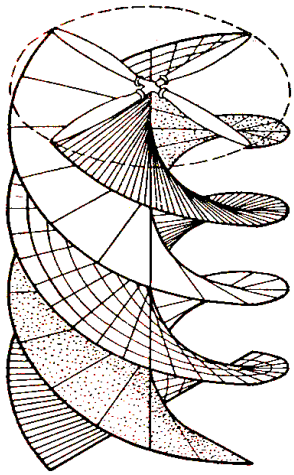
2. Indukované rychlosti jsou malé vůči letové rychlosti a obvodové rychlosti

Oba předpoklady nám umožní považovat volné víry za víry šroubové. Tato jednoduchá soustava vírů je aplikovatelná jen tehdy, jsou-li volné víry kolmé na víry vázané. U šavlových listů je nutné uvažovat rozložení rychlosti na složku kolmou na list a na podélnou na list. [1]

Teorie Žukovského předpokládá, že pohyb tekutiny kolem otáčející se vrtule se řídí vírovým vláknem, jímž je osové vírové vlákno pod vrtulí, které se otáčí ve smyslu točení vrtule s cirkulací $2\bar{\Gamma}$. Toto vírové vlákno se rozděluje na dvě soustavy vázaných vírů (týká

se to dvoulisté vrtule), probíhajících uvnitř vrtulového prostoru, takže cirkulace rychlosti podél listu se rovná $\bar{\Gamma}$ a pak klesá při výtoku z konce listů ve tvaru dvou vírových vláken s cirkulacemi $\bar{\Gamma}$. Přitom vázané víry mohou mít záporné cirkulace, pokud součet všech cirkulací se rovná $2\bar{\Gamma}$. [1]

Vírová soustava, příslušná z-listé vrtuli s cirkulací proměnnou podél poloměru, se skládá z vázaných vírů, od nichž odtékají volné vírové plochy, jak je to znázorněn na Obr. 11:

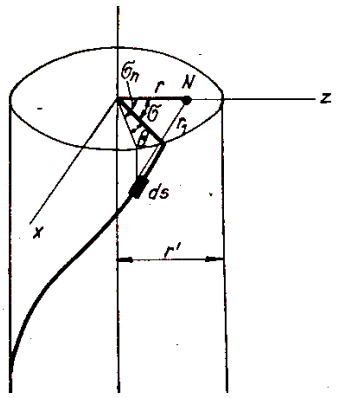


Obr. 11 - Soustava šroubovitých vírů z-listého vrtule [1]

Pro výpočet rychlosti indukované touto soustavou určíme napřed rychlost, indukovanou vrtulí, a konstantní cirkulací podél listů, čili předpokládáme, že vírová soustava vrtulového listu se skládá z volného víru, z vázaného víru a z osového vírového vlákna. [1]

4.4. Výpočet rychlostního pole

Rychlostní pole, indukované touto vírovou soustavou se dá vyšetřit s použitím věty Biot-Savartovy. Teď určíme rychlostní pole v rovině vrtule, indukované volným vírem listů. [1] Pro tento účel zavedeme souřadný systém podle Obr. 12:



Obr. 12- Souřadný systém pro určení indukovaných rychlostí [1]

při němž osou *z* volíme ve směru jednoho listu. Indukovaná osová rychlost se dá vyjádřit vztahem [1]:

$$dv = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{(z - z_0)dx_0 - (x - x_0)dz_0}{r_1^3} \tag{53}$$

Kde *x,z,y* jsou souřadnice bodu N, v němž se určuje rychlost indukovaná vírem, a x_0, z_0, y_0 jsou souřadnice vírového elementu. Protože v uvažovaném případě nám jde jen o určení indukované rychlosti v rovině vrtule, zvolíme bod N v této rovině. Pro usnadnění výpočtu použijeme pro vzorec (53) následující substituce [1]:

$$x = 0 \qquad x_0 = r' \sin(\theta + \sigma)$$

$$y = 0 \qquad y_0 = \frac{V_0}{\Omega}\,\theta$$

$$z = r \qquad z_0 = r' \cos(\theta + \sigma)$$

$$dx_0 = ds \cos\beta \cos(\theta + \sigma) \;\; dz_0 = -ds \cos\beta \sin(\theta + \sigma)$$

Poněvadž $ds \cos\beta = r' d\theta$, $dx_0 = r' \mathrm{d}\theta \cos(\theta + \sigma)$a$dz_0 = -r' \sin(\theta + \sigma) d\theta$

Dále platí:

$$r_1 = \sqrt{r^2 - r'^2 + \left(\frac{V_0}{\Omega}\,\theta\right)^2 - 2rr' \cos(\theta + \sigma)} \tag{54}$$

Jestli shrneme výše uvedené poznatky, obdržíme vzorec pro výpočet indukované rychlosti $d\mathbf{v}$ vírovým prvkem ds v bodě N. [1]

$$\mathrm{dv} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{r' - r\cos(\theta + \sigma)}{\left[r^2 + r'^2 + \left(\frac{V_0}{\Omega}\,\theta\right)^2 - 2rr' \cos(\theta + \sigma)\right]^{\frac{3}{2}}} r' d\theta \tag{55}$$

Účinek celého volného víru v bodě NN se určí integrací vzorce (54) v mezích od $\theta = 0$ a $\theta = \omega$.

$$\mathrm{v} = \frac{\Gamma\Omega}{4\pi V_0} \cdot \int_0^{\omega} \frac{r' - r\cos(\theta + \sigma)}{\left[r^2 + r'^2 + \left(\frac{V_0}{\Omega}\,\theta\right)^2 - 2rr' \cos(\theta + \sigma)\right]^{\frac{3}{2}}} r' \, d\left(\theta \frac{V_0}{\Omega}\right) \tag{56}$$

Vztah (55) vyjadřuje jen účinek volných vírů v bodě N. Systém vázaných vírů listu, k němuž patří bod N, nepůsobí totiž na tento bod, jestliže bod NN leží v nulové vzdálenosti od systému vírů. Vázané víry dalších listů indukují v bodě N rychlost opačného smyslu, které se navzájem ruší. Centrální vírové vlákno vyvolává rychlosti v bodě N, nicméně tato soustava neindukuje axiální rychlosti. [1]

Je-li počet listů vrtule z, je úhel mezi n-tým listem a listem, zvoleným za počáteční (kterému patří bod N), ležící v rovině listů a podrobený účinku zvoleného n-tého listu:

$$\sigma_n = \frac{2\pi(\mathrm{n}-1)}{z}$$

Kde úhel θ_n je

$$\theta_n = \theta + \sigma_n$$

Osová rychlost, indukovaná vírovou soustavou v bode N se tedy vyjádří vztahem:

$$\mathrm{v} = \frac{\Gamma\Omega}{4\pi V_0} \cdot \sum_1^z \int_0^\omega \frac{r'\left[r' - r\cos(\theta + \sigma_n)\right]}{\left[r^2 + r'^2 + \left(\frac{V_0}{\Omega}\,\theta\right)^2 - 2rr'\cos(\theta + \sigma)\right]^{\frac{3}{2}}} d\left(\theta \frac{V_0}{\Omega}\right) \tag{57}$$

Na základě předpokladů této teorie lze dokázat, že výsledná rychlost, indukovaná vrtulí, je kolmá ke šroubovici, představující proudovou čáru relativního pohybu podle Obr. 9. [1]

Pak je

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{V_0}{\Omega r}$$

Z toho plyne

$$\mathrm{u} = v\frac{V_0}{\Omega r}$$

Pro zjednodušení výpočtu lze zavést součinitel K, který po další parametrizaci umožní značné zkrácení výpočtu. [1]Označíme-li

$$\mathrm{K} = \frac{1}{z} \cdot \sum_1^z \int_0^\omega \frac{r'\left[r' - r\cos(\theta + \sigma_n)\right]}{\left[r^2 + r'^2 + \left(\frac{V_0}{\Omega}\,\theta\right)^2 - 2rr'\cos(\theta_n)\right]^{\frac{3}{2}}} d\left(\theta \frac{V_0}{\Omega}\right) \tag{58}$$

kde po zavedení dalších parametrů

$$\rho = \frac{r'}{r} \qquad tg\beta = \frac{V_0}{\Omega r}$$

Obdržíme další tvar výrazu (58) za předpokladu, že $tg\beta$ na zvoleném poloměru budeme uvažovat za konstantní:

$$\mathrm{K} = \frac{tg\beta}{z} \cdot \sum_1^z \int_0^\omega \frac{\rho[\rho - \cos\theta_n]\mathrm{tg}\beta}{[1 - 2\rho\cos\theta_n + \rho^2 + \mathrm{tg}^2\beta\theta^2]^{\frac{3}{2}}} d\theta_n \tag{59}$$

Výpočty ukázali, že součinitel K_0 nabývá nekonečné velké hodnoty pro $\rho = 1$, proto je výhodné tento součinitel vyjádřit jako součet dvou funkcí:

$$\mathrm{K} = \frac{sin\beta}{z}\left[\frac{1}{\rho - 1} - \frac{1}{2}cos^2\beta\,\ln(\rho - 1)\right] + K_0 \tag{60}$$

Kde K_0 je omezující funkce, která může být tabelovaná pro určitý počet listů. [1]

4.5. Postup výpočtu

Před popisem postupu je nutné doplnit výše uvedené předpoklady dalšíma:

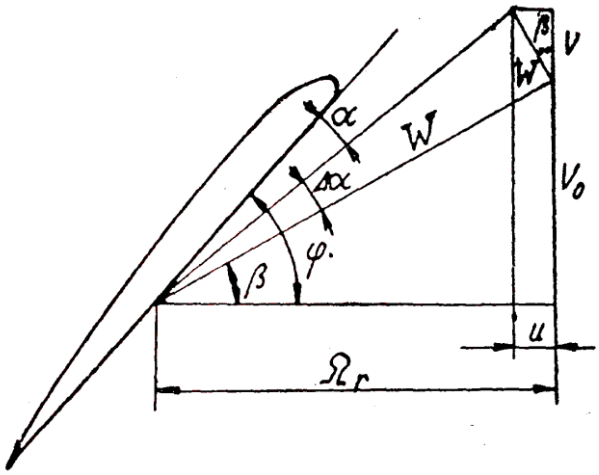
1. Ve výpočtu se vazkost a stlačitelnost tekutiny neuvažuje, tento předpoklad je již obsažen v součinitelích profilu c_x a c_y.
2. Předpokládá se lineární závislost součinitele vztlaku c_y na úhlu náběhu α.

Jako výchozí rovnice bude použita výše odvozená a popsaná rovnice, která stanovuje vazbu mezi proudem (cirkulací) a rozměry listu [1]:

$$2\bar{\Gamma} = c_y \bar{b}\bar{W} = \alpha a_\infty \bar{b}\bar{W}$$

Kde a_∞ je stoupání vztlakové čáry. Podle Obr. 13 lze vzorec přepsat následovně:

$$2\bar{\Gamma} = a_\infty \left(\varphi - \beta - \frac{\bar{w}}{\bar{W}}\right) \bar{b}\bar{W} \tag{61}$$



Obr. 13- Rozbor indukovaných rychlostí v řezu listu [1]

Podle vztahu (57) se vyjadřuje rychlost, indukovaná za vrtulí, pomocí funkcí K a cirkulací Γ. Elementární vír o poloměru r' a s cirkulací $d\Gamma$ indukuje na poloměru r na listu osovou rychlost [1]:

$$\mathrm{dv} = \frac{z\Omega}{4\pi\lambda_0} \cdot K\, d\Gamma$$

Dále s uvažováním bezrozměrných veličin podle Vetčinkina, osová indukovaná rychlost podél listu bude

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{z}{\lambda_0} \cdot \int_0^{\bar{\rho}} K\, d\bar{\Gamma} \tag{62}$$

kde

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\bar{r}}$$

Výsledná indukovaná rychlost $\bar{w}$ bude

$$\bar{w} = \frac{\bar{v}}{\cos\beta}$$

Jestliže

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\,\beta}} \qquad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\lambda_0}{\bar{r}}$$

bude platit:

$$\bar{w} = z\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\bar{r}^2}}\int_0^{\bar{\rho}} K\, d\bar{\Gamma} \tag{63}$$

Využitím tohoto poznatku a následným dosazením zpátky do vztahu (61) obdržíme výsledný výraz pro výpočet cirkulace:

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2}a_\infty\left(\varphi - \beta - \frac{1}{\bar{W}}z\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\bar{r}^2}}\int_0^{\bar{\rho}} K\, d\bar{\Gamma}\right)\bar{b}\bar{W} \tag{64}$$

Rovnice se dá řešit identickým způsobem, jaký se používá v teorii nosné plochy letadla konečného rozpětí, tj. rozvinutím funkce $\bar{\Gamma}$ v trigonometrickou řadu. [1]

Použijeme pro tuto funkci řady

$$\bar{\Gamma}(\varphi) = \sum_1^\infty A_m \sin m\varphi\,(1 - cos\varphi) \tag{65}$$

kde $cos\varphi = 1 - 2\bar{r}$ a A_m jsou součinitele řady, obdržíme výraz pro $\bar{\Gamma}_m$:

$$\bar{\Gamma}_m = \sin m\varphi(1 - cos\varphi)$$

Hodnota $\bar{\Gamma}_m$ je úměrná členům řady, ve které se dá rozvinout cirkulace $\bar{\Gamma}$ kolem vrtulového listu na určitém poloměru listu. Výsledná indukovaná rychlost $\bar{w}$ závisí tedy na cirkulaci. [1] Označíme-li rychlost indukovanou v rovině vrtule $\bar{w}_m$ a příslušnou cirkulaci Γ_m, lze indukovanou rychlost $\bar{w}$ vyjádřit řadou

$$\bar{w} = \sum_1^\infty A_m \bar{w}_m \tag{66}$$

Funkci $\bar{w}_m$ lze předem vypočítat, dosadíme-li $\bar{\Gamma}_m$ za $\bar{\Gamma}$. V praxi se už ukázalo, že $\bar{w}_m$ nabývá stejné hodnoty pro různý počet listů, vynášíme-li výsledky podle σ. Dosadíme-li do (63) výraz pro $\bar{w}$ a výraz pro $\bar{\Gamma}$ z (65), dostaneme [1]:

$$\sum_{1}^{\infty} A_m\left(2\bar{\Gamma}_m + a_\infty \bar{b}\bar{w}_m\right) = a_\infty(\varphi - \beta)\bar{b}\bar{W} \tag{67}$$

Výpočty ukazují, že již tři členy řady dávají dost přesné výsledky. V praxi se ukázalo, že je vhodné sestavit rovnice tak, aby platili pro $\bar{r_1} = 0{,}4\bar{r_2} = 0{,}7$ a $\bar{r_3} = 0{,}9$ a tím dostaneme 3 rovnice o třech neznámých: $A_1 A_2$ a A_3 které určíme z těchto rovnic. Po určení součinitelů můžeme stanovit rozložení cirkulace kolem listů podle (64) a indukovanou rychlost (65). Indukované rychlosti v axiálním a obvodovém směru budou [1]:

$$\bar{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{w}}\cos\beta = \frac{\bar{\mathrm{w}} \cdot \bar{\mathrm{r}}}{\sqrt{\bar{r}^2 + \lambda_0^2}} \tag{68}$$

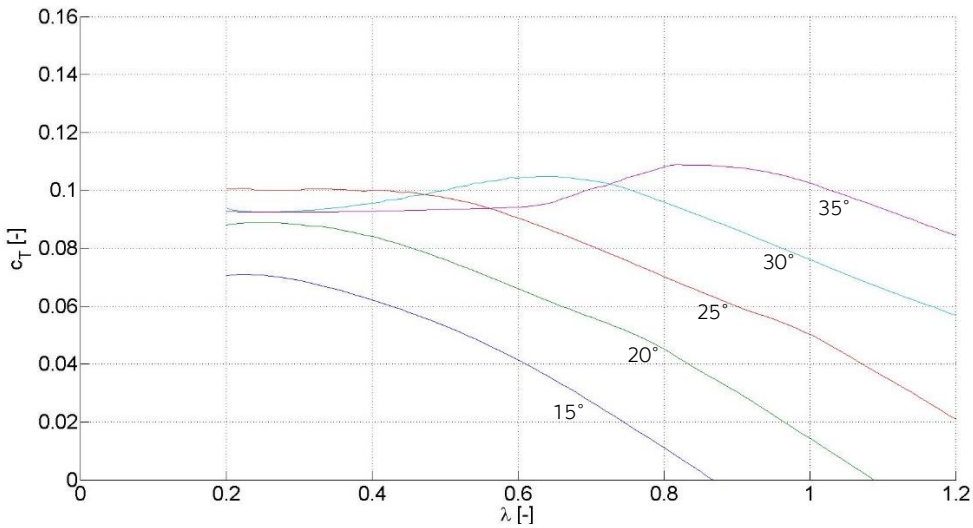
$$\bar{\mathrm{u}} = \bar{\mathrm{w}}\cos\beta = \frac{\bar{\mathrm{w}} \cdot \lambda_0}{\sqrt{\bar{r}^2 + \lambda_0^2}} = \bar{\mathrm{v}}\, tg\beta \tag{69}$$

Po srovnání výsledků s aerodynamickými zkouškami se ukázalo, že lopatková teorie dává přesnost zcela postačující pro praxi. [1]

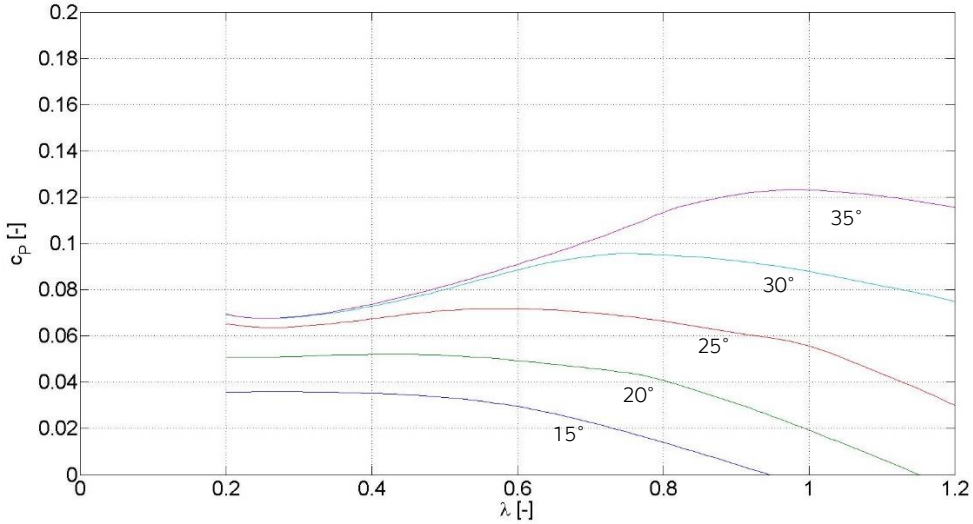
4.6. Charakteristiky a tahová křivka vrtule

Podle postupu naznačeného v kapitole 4.4 a 4.5 jsme aplikovali výpočet pro navrženou geometrii v kapitole 3.7. Jako vstupní údaje pro výpočet jsme použil geometrické charakteristiky vrtule a aerodynamické profilové charakteristiky pro RAF-6, které jsme získali pomocí volně dostupného software-u XFOIL.

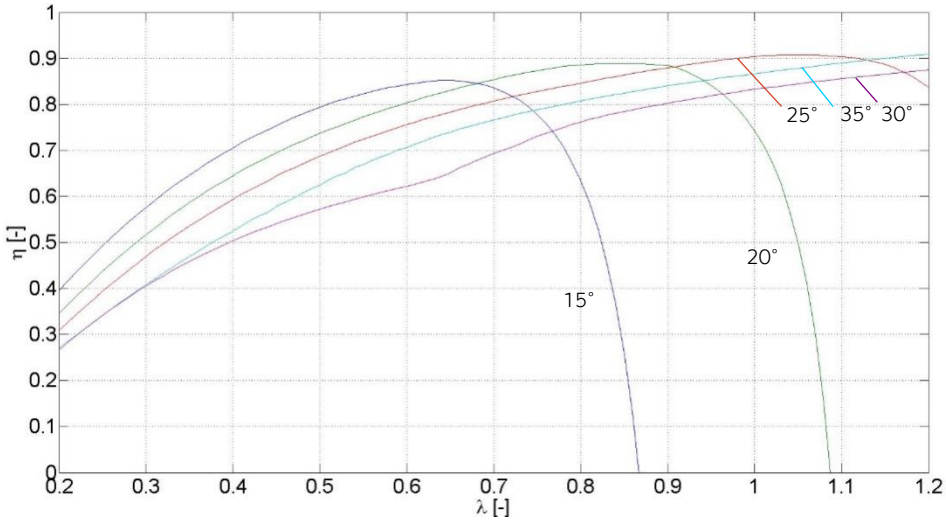
Výpočet jsme prováděli pro různé úhly nastavení φ, výsledky jsou uvedené v Grafech 6. 7. a 8 (uvedené úhly v grafech značí nastavení u 0,75R vrtule)



Graf 6 – Průběh součinitele tahu

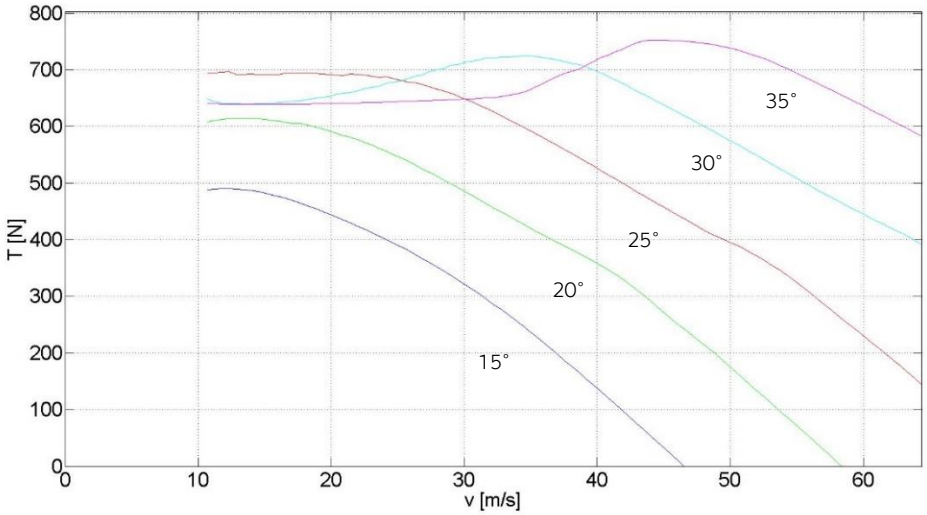


Graf 7 – Průběh součinitele výkonu

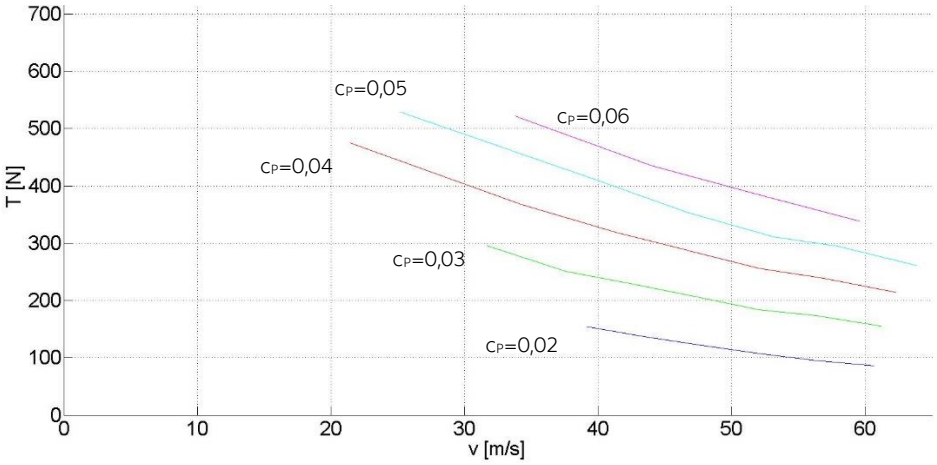


Graf 8 – Průběh účinnosti

Po získání charakteristik jsme již schopní sestavit i tahové křivky vrtule:



Graf 9 – Tahová křivka vrtule pro konstantní úhly nastavení



Graf 10 – Tahová křivka vrtule pro stálé otáčky
Pozn.: návrhový režim odpovídá součiniteli cP=0,04

Jelikož výpočetní metoda dává důvěryhodné výsledky zhruba od rychlostního poměru $\lambda = 0{,}2$, proto pro stanovení tahu za statických podmínek při konstantním úhlu nastavení jsme museli použít jinou metodu. Tah za statických podmínek bude mít významnou roli u pevnostní kontroly v kapitole 7.2. Pro tento účel jsme použili teorii ideálního propulzoru. Postup výpočtu byl následovný:

1. Výpočet tahu podle teorie ideálního propulzoru za statických podmínek, čili $v_0 = 0\ m/s$ a za rychlosti $v_0 = 10{,}73\ m/s$ (odpovída rychlostnímu poměru $\lambda = 0{,}2$). Rychlost za propulzorem jsme obdrželi numerickým řešením kubické rovnice
$$P = \frac{1}{4} A\rho(v_2^3 + v_2^2 v_0 - v_2 v_0^2 - v_0^3)$$
2. Pro získané hodnoty jsme určili generovaný tah podle vzorce
$$T_{id} = \frac{1}{2} A\rho(v_2^2 - v_0^2)$$
3. Pro rychlostní poměr $\lambda = 0{,}2$ jsme porovnali tah vrtule T_i pro různé úhly nastavení s tahem ideálního propulzoru. Tento poměr jsme definovali jako součinitel k.
$$k_i = \frac{T_i}{T_{id_{\lambda=0,2}}}$$
4. Pomocí tohoto součinitele jsme určili tah a tím i tahový součinitel za statických podmínek podle následujícímu vzorci:
$$T_{i0} = k_i \cdot T_{id_0}$$
5. Statický součinitel tahu jsme obdrželi podle vzorce
$$c_{To0} = \frac{T_{i0}}{\rho \cdot D^4 \cdot n^2}$$

Vypočtené hodnoty statických součinitelů tahu jsou shrnuty v Tabulce. 2.

$\varphi[^\circ]$	15	20	25	30	35
c_{T00}[-]	0,0907	0,1129	0,1289	0,1204	0,1189

Tabulka 2 – Součinitele tahu za statických podmínek pro různé úhly nastavení vrtule

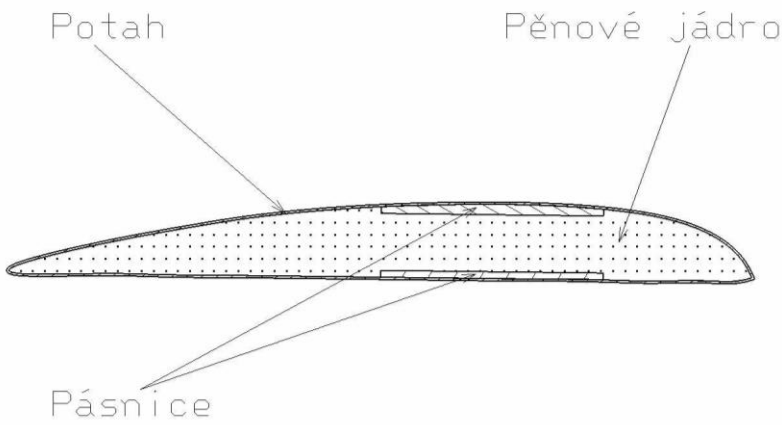
5. Volba materiálu a konstrukce vrtule

V dnešní době se používají nejrůznější typy materiálů k výrobě vrtulí. Konvenční materiály jsou slitiny hliníku, občas se vyskytují i typy dutých konstrukcí (viz kapitola 6.1.). U naší konstrukce bylo důležitým hlediskem to, aby měla vrtule co nejnižší hmotnost při maximální pevnosti a životnosti. Z tohoto důvodu jsme zvážili použití kompozitních materiálů, které mají výborné mechanické vlastnosti při nízké hmotnosti. V leteckých aplikacích se nejběžněji používají typy uhlíkových, skleněných nebo aramidových vláken přesycené s epoxidovou pryskyřicí, které ve správném složení dokážou vyhovět nejrůznějším požadavkům.

V leteckých aplikacích se často vyskytují i takzvané sendvičové konstrukce, které se skládají z jádra, která bývá měkčí a méně nosné a má za primární úkol udržet požadovaný tvar konstrukce a unést smykové síly. Jádro se nachází mezi dvěma vrstvami tenkého laminátu, které jsou nosnou částí skladby. Jejich tuhost je mnohonásobek tuhosti jádra a mají za úkol unést normálové síly působící na konstrukci. U vrtulí je tato skladba velice výhodná, jelikož houževnaté jádro dokáže udržet složitý tvar navřených profilů podél listu a vnější laminát přitom navrhneme tak, aby byly schopny unést veškeré hmotné a aerodynamické síly v celém rozsahu režimu vrtule.

5.1. Konstrukce vrtule

V kapitole 6.1 je popsáno, že existují různé typy konstrukce vrtulí. S ohledem na volbu typu materiálu je nejefektivnější a z hlediska hmotnosti nejúspornější sendvičová konstrukce s použitím pěnového jádra a tenkého laminátu.

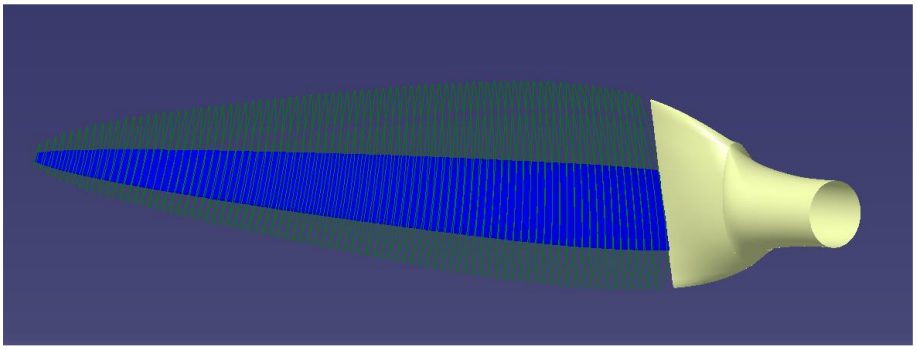


Obr. 14 – Schematické znázornění konstrukce vrtule

Jak je to znázorněno na Obr. 14, konstrukce se velice podobá konstrukci křídla. Pásnice budou mít za primární úkol unést normálové síly od aerodynamického ohybového momentu a odstředivé síly. Jejich šířka podél listu se mění tak, aby byly rozloženy kolem těžiště profilu, tím nedojde k indukci dalších nepříznivých hmotných sil.

Šířka pásnic byla stanovena jako 40% hloubky profilu, s použitím uhlíkových vrstev tloušťky 0,3mm. Skladba podél vrtule se taky mění, u kořene mají jednotlivé pásnice skladbu [90/45/-45], od 0.425R skladba pásnic je [90/45] a od 0.67R se pásnice skládají pouze z jedné vrstvy laminátu s orientací 90°. Schematické znázornění skladby je na Obr. 15, 3D model pozice nosníku je znázorněna na Obr.16.

Obr. 15 – Schéma skladby pásnic podél listu



Obr. 16 – Umístění nosníku listu

Potah a pěnové jádro bude sloužit k přenosu aerodynamického krouticího momentu a jiných smykových sil. Potah se skládá z jedné vrstvy laminátu s orientací 45°.

5.2. Volba materiálu vláken

Každý typ vlákna má své určité výhody a nevýhody. Jako nejběžnější materiál se používá E-sklo nebo S-sklo. Skleněné typy vláken mají obecně tu výhodu, že jsou houževnaté, pevné a z ekonomického hlediska jsou velice výhodné. Značnou nevýhodou pro náš účel je jeho hmotnost, která je pro nás rozhodující.

Další běžně použitý materiál je uhlík, který díky své nízké specifické pevnosti (podíl tuhosti a hustoty) je nejpoužívanější materiál v leteckých aplikacích. Nevýhodou uhlíku je křehkost oproti skleněným vláknům a vysoká cena, nicméně pro náš účel se pořád jedná o nejlepší volbu pro konstrukci nosné části vrtule.

Uhlíková vlákna jsou dostupné s různými vlastnostmi, jako vlákna vysokým modulem pružnosti nebo se zvýšenou pevností. Pro nás by tyto zvýšené vlastnosti nebyly využité, proto se v našem návrhu rozhodneme použít vlákna se standardními vlastnostmi.

5.3. Volba materiálu jádra

V leteckých aplikacích je velice rozšířená aplikace různých konstrukčních pěn, jako polyuretanové nebo PMI (Polymethacrylimide) pěny.

Jeden z nejznámějších dodavatelů je ROHACELL®, který poskytuje široké pásmo materiálů s různými vlastnostmi. Vzhledem k tomu, že silové účinky působící podél lopatek nejsou extrémně velké a vhodná volba jádra nám umožní zásadně redukovat hmotnost lopatek, rozhodli jsme se použít materiál ROHACELL51 WF. Tento materiál má velice dobrou tvarovatelnost a z hlediska výroby je univerzálně použitelný na různé typy technologie. [12]

Materiálové hodnoty a vlastnosti použitých materiálů jsou shrnuty v Tabulce 3.

5.4. Mechanické vlastnosti zvolených materiálů

Veličina	Jednotka	Uhlíkové vlákno (standardní vlastnosti)	Konstrukční pěna (ROHACELL 51 WF)
E_1	Gpa	135	0,075
E_2	Gpa	10	
G_{12}	Gpa	5	0,024
ν_{12}	-	0,3	(Vypočítá se)
ν_{21}	-		
X_{t1}	Mpa	1500	1,6
X_{c1}	Mpa	1200	
Y_{t2}	Mpa	50	0,8
Y_{c2}	Mpa	250	
S	Mpa	70	24
ρ	kg/m^3	1600	52

Tabulka 3 – Mechanické vlastnosti a materiálové hodnoty použitých materiálů [12] [13]

6. ZATÍŽENÍ VRTULÍ

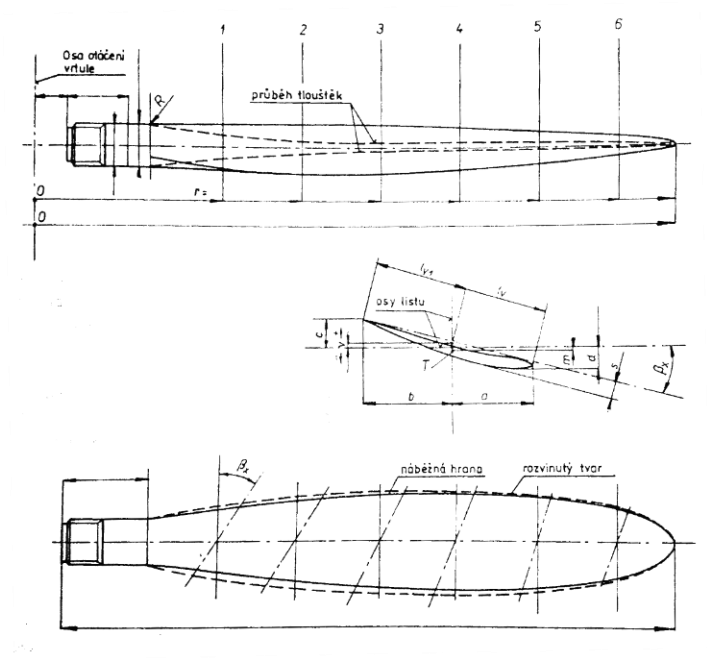
6.1. Požadavky a konstrukce vrtulových listů

Vrtule má za primární úkol absorbovat motorem dodaný výkon s co největší účinností a přeměnit krouticí moment na hřídeli v tah. Vrtule musí mít kromě optimálních aerodynamických vlastností také co nejmenší možnou hmotnost, vysokou životnost a spolehlivost. Po výrobě konstrukce musí být dostatečně vyvážená jak staticky, tak i dynamicky. [3]

Vrtule obvykle pracuje v dost širokém pásmu provozních podmínek. Znamená to, že musí být odolná vůči různým teplotním podmínkám a návrh musí probíhat se zřetelem na korozivní podmínky prostředí. Kromě zatížení hmotných a aerodynamických sil kvazistatického charakteru je nutné také vzít v úvahu i složité přídavné napětí od kmitání v dynamicky vázané soustavě vrtule-náboj-drak. Nezanedbatelný vliv má také

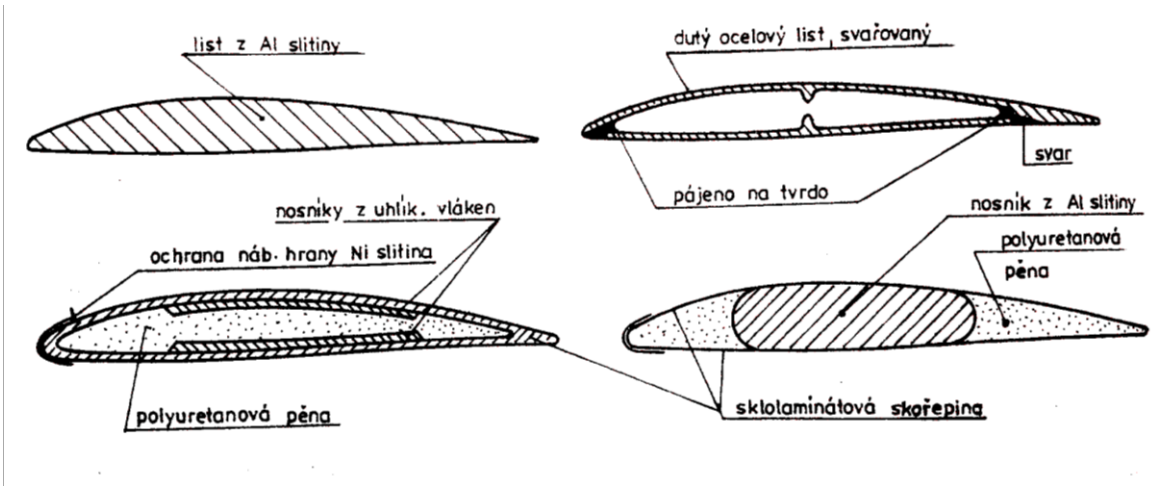
její napadání rychle nabíhajícími částicemi jako písek, led nebo kamínky ze startovací dráhy apod. [3]

Nejdůležitější konstrukční částí vrtule je vrtulový list, který lze popsat jako zkroucený nosník s měnicím se průřezem, vrtulový náboj a stavěcí mechanizmus listů. Tyto části vrtule jsou tvarově velice složité, což značně komplikuje proces jak návrhových, tak i kontrolních výpočtů. Na Obr. 17 je znázorněn výkres listu vrtule. [3]



Obr.17 – Konvenční vrtulový list z hliníkové slitiny [3]

Od druhé poloviny 20. století se postupně přecházelo od celodřevěných vrtulí na celokovové. Kovová konstrukce umožnila výrobu pevnějších, trvalejších a aerodynamicky jemnějších listů z hliníkových nebo titanových slitin a umožnil i výrobu dutých svařovaných ocelových listů. V současnosti začínají výrazně dominovat listy z kompozitních materiálů, nebo listy kombinovaných konstrukcí. Použití obou zmíněných umožňuje výrazně snížit hmotnost při tendenci zvyšovat počtu listů. Příklady koncepcí konstrukčního řešení listů jsou na Obr. 18. [3]



Obr. 18 - Ilustrace různých typů provedení konstrukce listu [3]

Výše uvedené výhody kovových nebo kombinovaných konstrukcí přinášeli i určité nevýhody, jako je menší schopnost útlumu vynuceného kmitání a významně nižší dynamická životnost. Obojí působilo problémy v plné šíři. U dřevěných listů se v důsledku nízké torzní tuhosti projevily hlavně jevy samobuzeného kmitání torzních módů. Při dimenzování listů z kovových materiálů se konstruktér musí zaměřit na vynucené kmitání a dynamické jevy na listu. To vyžaduje vedle pevnostního výpočtu i důkladné prověření dynamických stavů a kontrolu na únavovou pevnost. Stejný přístup je nezbytný také u vrtulí s kompozitními listy. [3]

„Současná koncepce zajištění dostatečné provozní spolehlivosti založená na filozofii SafeLife požaduje, aby životnost vrtule limitovalo poškození v důsledku provozního prostředí (eroze, koroze), které nelze údržbovou technologií odstranit a ne únava materiálu u nosných elementů. Vrtule se dimenzuje pro zatížení kvazistatického charakteru, s přihlédnutím na superponování zatížení od prvé harmonické vlivem šikmého ofukování vrtulového disku a gyroskopických sil." [3]

Dimenzování, požadavky a podmínky zkoušení leteckých vrtulí se v dnešní době řídí předpisem CS-P od EASA nebo Part 35 od FAA.

6.2. Letová způsobilost leteckých vrtulí

(Shrnutí tematického celku z [2])

Předpisy pro certifikaci vrtulí je řízená předpisem CS-P (EASA) nebo předpisem **Title 14** / **Chapter I** / **Subchapter C** / **Part 35** (FAR). Předpisy podrobně popisují požadavky na dynamickou pevnost, dopad ptáků, úder blesku a vytrvalost při různých podmínkách. Nicméně níže zmíníme pouze kritéria, která jsou z hlediska našeho koncepčního návrhu směrodatné.

I. Podle CS-P 350 (a) nebo §35.35(a):
Náboj, stavěcí systém a protizávaží musí být testovány na namáhání ekvivalentní dvojnásobku maximální odstředivé síly, která odpovídá 141% jmenovitých otáček v daném režimu.

II. Podle CS-P 390 (a) nebo §35.39(a):
Pevné, nebo na zemi stavitelné vrtule musí projít jedním z následujících testů:
   (1) 50 hodinový testový let v dané výšce nebo přistoupání. Vrtule musí být provozovaná výkonem a otáčkami motoru při vzletu minimálně 5 hodin v průběhu testového letu a ve zbylém času minimálně na 90 % výkonu a otáček při vzletu.
   (2) 50 hodin pozemního testu při otáčkách a výkonu vzletu

III. Podle CS-P 390 (b) nebo §35.39 (b):
Stavitelné vrtule musí projít jedním z následujících testů:
   (1) 110 hodinový test vytrvalosti, který seskládá z následujících částí:
      a) 5 hodin vzletového výkonu a počet otáček a 30 desetiminutových cyklů s průběhem
         – Zrychlení z klidového stavu
         – 5 minut na vzletovém výkonu a počtu otáček
         – Zpomalení do klidového stavu
         – 5 minut v klidovém stavu
      b) 50 hodin na maximálním kontinuálním výkonu a počtu otáček
      c) 50 hodin chodu, který se skládá z 10 pětihodinových cyklů s průběhem
         – 5 zrychlení a zpomalení mezi klidovým vzletovým výkonem a počtem otáček
         – 4,5 hodinový kontinuální přechod mezi klidovým maximálním kontinuálním výkonem a počtem otáček, nezahrnující maximální dovolený kontinuální výkon a počet otáček
   (2) Test vrtuli v průběhu testu vytrvalosti motoru podle CS-E 440 nebo CS-E 740

IV. Dle CS-P 240 nebo §35.24:
Maximální vyskytující se napětí na vrtuli nesmí překročit dovolenou velikost. Musí být věnovaná pozornost i zbytkovému napětí.

V. Dle CS-P 50(b) nebo §35.5 (b) :
Hodnocení a limitace musí být zavedeni pro následující případy:
(1) Výkon a počet otáček pro
a) Vzlet
b) Maximální kontinuální
c) Jiná limitace podle žádosti žadatele
(2) Limita při překročení rychlosti a kroutícího monetu

VI. Dle CS-P 170 nebo §35.17:
Vhodnost a trvanlivost materiálů vrtulí musí:
(1) být prověřená na základě experimentů, testů nebo obojí
(2) zohledňovat podmínky prostředí za provozních podmínek
(3) veškeré materiály, specifikace, procesy a výrobní metody, které budou součástí typového návrhu, musí být identifikované.
(4) při návrhu vycházet z nejnepříznivějších vlastností materiálu, které jsou uvedené v materiálovém listu

VII. Podle CS-P 240 nebo §35.24 :
Maximální vyvinuté napětí nesmí překročit dovolené meze při konkrétním provedení konstrukce a při nejběžnějších provozních podmínek. Musí být uvažován i veškeré zbytkové napětí.

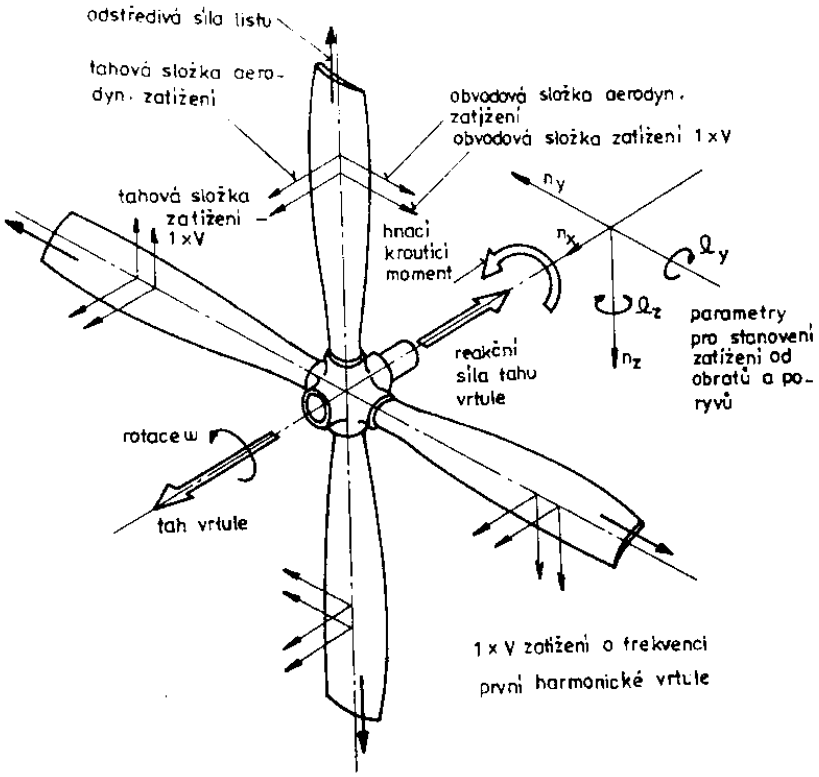
6.3. Pevnost listů

Pro úplnou pevnostní kontrolu vrtule jsou nezbytné geometrické charakteristiky listů, zástavbové údaje, aerodynamické a materiálové podklady a znalost provozních podmínek.

Rozhodující výpočetní režim nelze obecně stanovit. Záleží na specifických podmínkách provozu a zástavbě. Režimy, které je nutno ověřovat u konvenčních vrtulí jsou určeny přepisy, nicméně typické režimy bývají vzletový režim při nulové rychlosti letadla, let maximální rychlosti, střemhlavý a režim obráceného tahu. [3]

6.3.1. Silová soustava působící na vrtuli

Z hlediska namáhání vrtule můžeme rozlišit namáhání od kvazistatických zatížení, namáhání od cyklických zatížení ze šikmého ofukování, namáhání od gyroskopických sil a letových násobků a na dynamická zatížení.
Silová soustava působící na vrtuli je znázorněna na Obr. 19. Kvazistatická zatížení vyplívají ze zatížení od hmotných a aerodynamických sil (aerodynamické síly mají i dynamické složky namáhání, nicméně rozbor těchto jevů je již mimo rozsahu této práce). Oba typy zatížení generují ohybový a torzní zatížení, u hmotných sil ještě dále vyskytuje rozkrucovací moment, nicméně dominantním zatížení je odstředivá síla. Posouvající síly nemají významný vliv. [3] [4]



Obr. 19 – Silová soustava působící na vrtuli [3]

V následujících kapitolách se budeme věnovat popisu jednotlivých typů zatížení, případně jejích výpočtům. [3]

6.4. Hmotné síly

6.4.1. Odstředivá síla

Napětí od odstředivé síly budeme uvažovat jako hlavní zdroj napětí ve vrtulových listech. Z definice můžeme určit sílu následujícím vztahem:

$$dO_\omega = r\Omega^2 dm \tag{70}$$

Kde dm je elementární hmotnost elementu listu vrtule na průměru r. Po zavedení plošného součinitele k a uvažování konstantní hustoty ρ můžeme obecnou definici upravit na tvar

$$dO_\omega = \frac{\rho}{g}\Omega^2 k\ b\ t\ r\ dr \tag{71}$$

kde b a t označují délku tětivy a maximální tloušťku řezu listu na poloměru $\boldsymbol{r}$. Po úpravě můžeme rovnici přepsat na tvar

$$O_\omega = \frac{\rho}{g} n^2 D^4 K_\omega \tag{72}$$

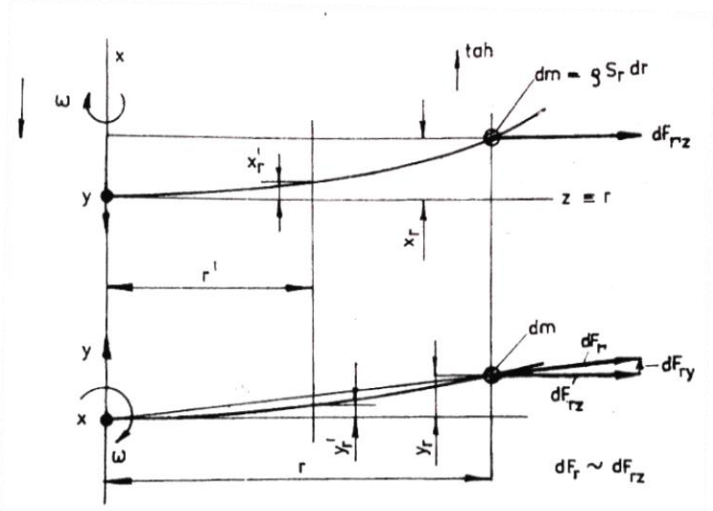
kde K_ω je součinitel odstředivé síly řezu. Jeho hodnotu získáme numerickou integrací pomocí vzorce

$$K_\omega = \frac{\pi^2 k}{3600}\int_{r_n}^{1} \overline{b^2}\,\overline{t}\,\bar{r}\,d\bar{r} \tag{73}$$

kde jsou veličiny vztažené k vnějšímu poloměru vrtule. [1]

6.4.2. Vratný moment od odstředivých sil

Jelikož vrtulový list je v podstatě štíhlý, zkroucený nosník, bude se vlivem aerodynamického ohybového momentu deformovat ve dvou rovinách. V těchto rovinách budou působit dvě složky aerodynamické síly, tj. tahová a obvodová složka. Vlivem prostorového ohybu budou vznikat ohybové momenty, které se snaží vrátit osu listu do původní polohy, jak je to znázorněn na Obr. 20 [3]:



Obr. 20 – Vratný ohybový moment od odstředivých sil [3]

Pro rovinu xy zatížení bude:

$$M_{oy} = \int_{r_n}^{R} \left(\frac{dx}{dr}\right)_r F_r \, dr \tag{74}$$

Kde $\left(\frac{dx}{dr}\right)_r$ představuje natočení průhybové čáry v rovině tahu na poloměru r a $F_r$je celková odstředivá síla na poloměru R.

Pro rovinu ry bude zatížení

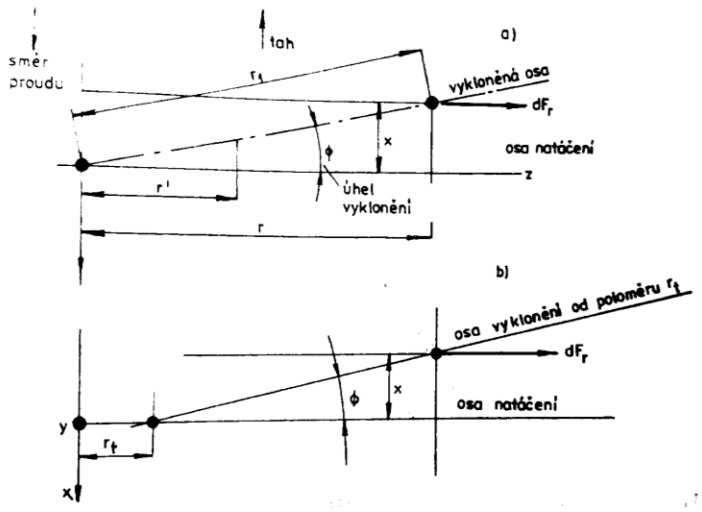
$$M_{ox} = \int_{r_n}^{R} \left(\frac{dy}{dr}\right)_r F_r \, dr - \rho\omega^2 \int_{r_n}^{R} \int_{r_n}^{R} y_r S_r F_r \, dr' dr \tag{75}$$

kde $\left(\frac{dy}{dr}\right)_r$ představuje sklon natočení průhybové čáry v rovině vrtule na poloměru R.

Je zřejmé, že tyto momenty mohou být stanoveny až v momentě rovnovážného stavu, tj. při známém průběhu ohybové deformace od aerodynamických sil. Tento stav je nutné stanovit postupnou integrací. [3]

6.4.3. Konstrukční vyklonění těžištní osy

Moment způsobený odstředivou silou a odklonem listu je moment, který má tendenci vrátit list do jeho nedeformovaného stavu – moment, který se odečítá od aerodynamického ohybového momentu. Provede-li se tedy určité konstrukční vyklonění listu, může se pro určitý režim docílit významného snížení ohybového momentu. Elementární úvahu provedeme pro lineární vyklonění těžištní osy v rovině tahu – Obr. 21



Obr. 21 – Konstrukční vyklonění těžištní osy listu [3]

Vyklonění bude působit přídavný vratný moment, který lze definovat vztahem

$$M_{vratný\,y} = tg\theta \int_{r_n}^{R} F_r \, dr \tag{76}$$

Vyklonění je možné provést již ve vrtulovém náboji, tento způsob ale znamená značné konstrukční potíže, proto se vyklonění většinou realizuje od náboje. Tato úprava může být užitečná s ohledem na namáhání, jelikož umožní snížení aerodynamického ohybového momentu. Nicméně se to musí potvrdit podél celého listu, jinak může nastat případ, kdy tento moment ještě víc zesílit aerodynamický moment.

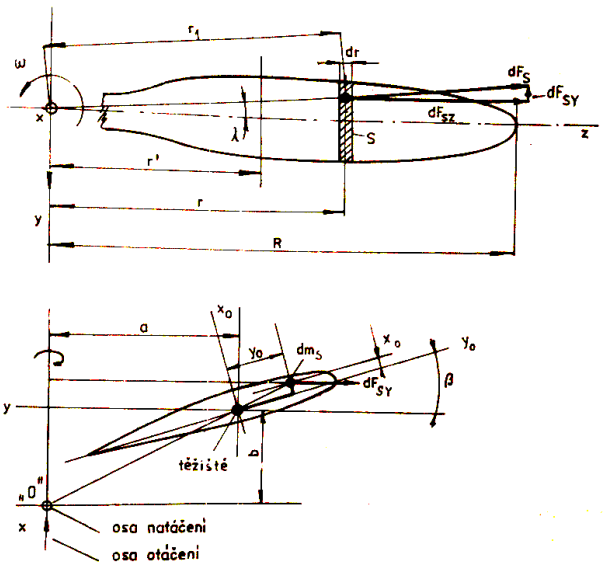
Výše uvedená úvaha platí pouze v případě, kdy osa listu leží téměř v těžištní ose. [3]

6.4.4. Krouticí moment od odstředivé síly

Jelikož těžištní osa není totožný s osou vrtule, odstředivá síla bude mít dvě složky: složku příčnou, která generuje určitý krouticí moment v daném řezu a složku podélnou, která vyvolá tahové napětí na daném průřezu listu. [3]

Tento krouticí moment v některých případech může mít dost velký vliv na konstrukci, jelikož je i hlavním momentem působící na mechanismus natáčení listů. [3]

Vznik momentu je znázorněn na Obr. 22



Obr. 22 – Vznik krouticího momentu od odstředivé síly [3]

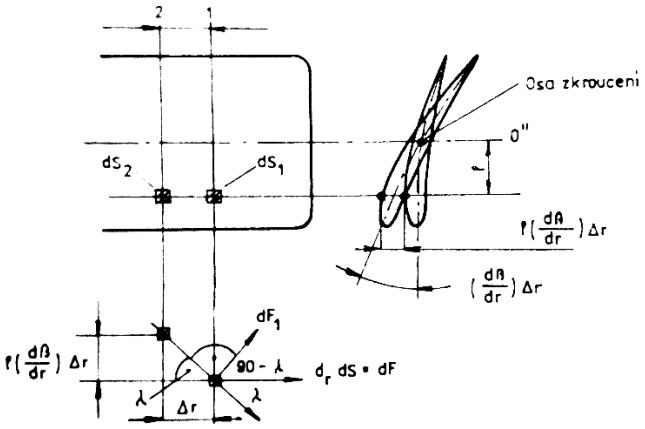
Velikost momentu od části listu od r' až R se dá definovat následujícím výrazem:

$$M_{KFr'} = \frac{\rho}{2}\Omega^2 \left[\int_{r'}^{R} (I_{max} - I_{min}) \sin 2\beta \, dr + \int_{r'}^{R} abS \, dr \right] \tag{77}$$

Kde I_{max} a I_{min} jsou hlavní momenty setrvačnosti.

6.4.5. Rozkrucovací moment od odstředivých sil

Rozkrucovací moment je následkem tahového zatížení od odstředivých sil. Jak u všech typů zkroucených nosníků, i v případě vrtulových listů vede zatížení k vzájemné vazbě tahových, ohybových a torzních deformací. Rozkrucovací moment bývá významný u velmi širokých listů a jeho velikost závisí pouze na lokální geometrii listu. [3]
Princip vzniku je znázorněn na Obr. 23



Obr. 23 – Princip vzniku rozkrucovacího momentu [3]

Analyticky je jeho velikost dána vztahem

$$(M_{K\,rozkr.})_r = \sigma_r \left(\frac{d\beta}{dr}\right)_r (I_{max} - I_{min})_r \tag{78}$$

Kde σ_r je napětí od odstředivé síly, $\frac{d\beta}{dr}$ je směrnice závislosti $\beta = f(r)$. Pro přesnější určení velikosti tohoto momentu se obecně doporučuje použití metody MKP. [3]

6.5. Aerodynamické síly

Pro určení aerodynamických zatížení je nezbytné znát návrhové provozní podmínky. Zásadně uvažujeme dvě návrhové oblasti: vzletový a letový režim. Při vzletovém režimu se předpokládá nulová rychlost letu, maximální výkon motoru a maximální tah vrtule. Velikost kvazistatických namáhání bývá při těchto podmínkách nejvyšší. Pří letovém režimu je celkové zatížení menší, ale velká část celkového aerodynamického zatížení je harmonická s frekvencí 1 x V (jeden zatěžující cyklus za otáčku vrtule). [3]

Z hlediska návrhu je proto směrodatný samotný dynamický návrh vrtule. Jelikož v letové oblasti je potřeba důkladnější rozbor letových podmínek a dynamických jevů na vrtuli, dále se budeme věnovat pouze zatížení kvazistatického charakteru.

6.5.1. Kvazistatická zatížení ohybu

Kvazistatické aerodynamické zatížení je výslednicí aerodynamických sil působících v jednotlivých poloměrech listu, které vznikají v důsledku nabíhajícího relativního proudu, který je výslednicí rotačního pohybu vrtulového disku a vstupující axiální rychlosti. Výslednicí těchto sil je tah vrtule a krouticí moment na hřídeli pro určité letové podmínky. [3]

Vycházíme-li z teorie obtékání izolovaného elementu profilu, jednotlivé složky zatížení můžeme rozložit na 3 složky:

$$dY = c_y \frac{1}{2} \rho w^2 b \mathrm{dr}$$

$$dX = c_x \frac{1}{2} \rho w^2 b \mathrm{dr}$$

$$dM = c_M \frac{1}{2} \rho w^2 b^2 \mathrm{dr}$$

Použitím již známého rozložení těchto sil do roviny tahu a do roviny vrtule obdržíme následující výrazy:

$$dT = dY sin\beta_1 - dX sin\beta_1 = tdr$$

$$dQ = dX cos\beta_1 + dY sin\beta_1 = qdr$$

Kde t a q jsou elementární složky tahové a obvodové síly. [3]

Tento rozbor nám umožní, abychom stanovili kvazistatické zatížení na vrtuli:

Ohybový moment listu v rovině tahu:

$$M_{Tr} = \int_{r_n}^{R} \int_{r_n}^{R} t \ drdr \tag{79}$$

Ohybový moment listu v rovině vrtule:

$$M_{Tr} = \int_{r_n}^{R} \int_{r_n}^{R} q \ drdr \tag{80}$$

Krouticí moment, který působí na hřídel z -listé vrtule:

$$M_{Tr} = z \int_{r_n}^{R} \int_{r_n}^{R} q \ drdr \tag{81}$$

Vlivem prostorové ohybové deformace listu se uplatní již zmíněný vratný ohybový moment od odstředivých sil, který bude mít určitou vliv pro výše uvedené aerodynamické momenty. [3]

6.5.2. Kvazistatická zatížení krutu

Krouticí moment od aerodynamických sil může mít různý charakter. Při normálním letu má tendenci list nastavit ne větší úhel stoupání, naopak při střemhlavém letu nebo v režimu obráceného tahu má tendenci nastavit na menší úhel stoupání (působí souhlasně s momentem odstředivých sil). [3]

Jeho velikost je dán vztahem:

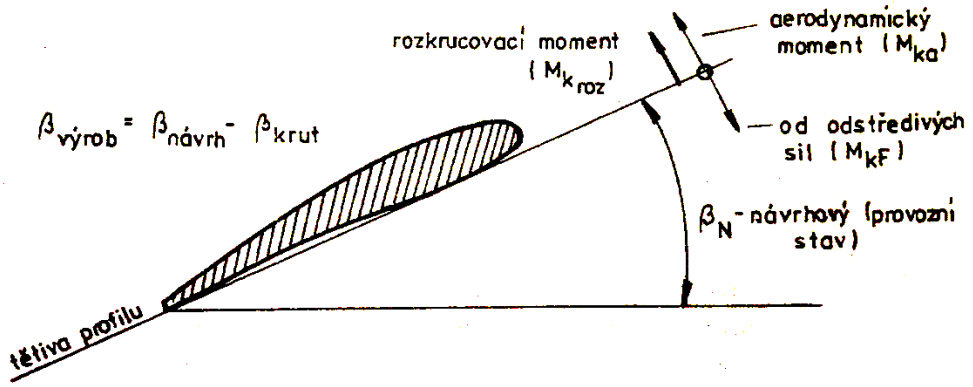
$$M_{kA} = \frac{\rho}{2} \int_{r}^{R} c_M w^2 b^2 \, \mathrm{dr} \tag{82}$$

Součinitel c_M se většinou stanovuje k ose natáčení vrtule, nicméně z hlediska namáhání je to většinou vztažený k torzní elastické ose. Stanovení průběhu aerodynamického krouticího momentu podél listu vyžaduje podrobnější analýzu a jeho důležitost se projevuje především u dimenzování stavěcího mechanizmu listů. [3]

6.6. Vliv deformace na charakteristiky listu

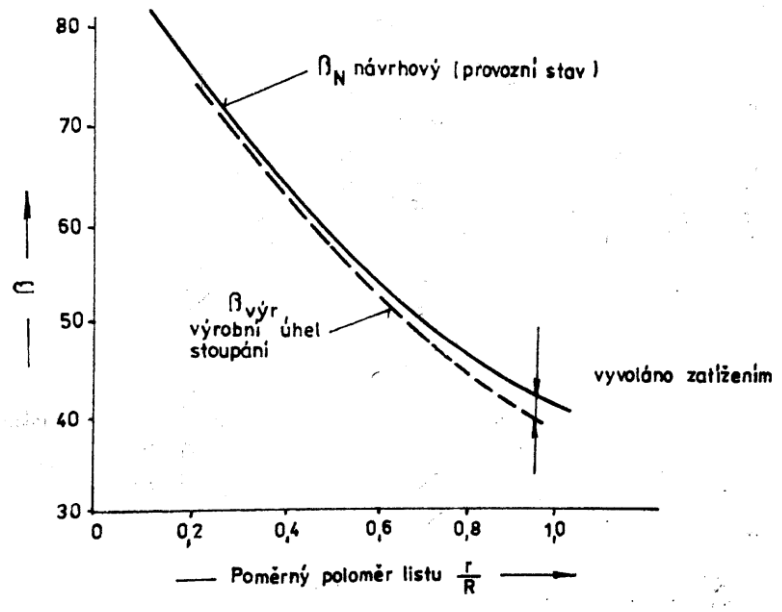
Jak jsme už to popsali ve výše uvedených kapitolách, různé typy zatížení budou vyvolávat tahovou, ohybovou a torzní deformaci na listech. Z těchto typů deformací bude torzní deformace ta, která ovlivní nejvýrazněji jak geometrické, tak i aerodynamické vlastnosti vrtule. [3]

Schematicky jsou znázorněni všechny typy zatížení vyvolávající torzní deformace na Obr. 24.



Obr. 24–Shrnutí sil, které působí změnu úhlu nastavení listu [3]

Jak to vyplívá z Obr. 24, v provozu vrtule bude mít vždy jiný úhel nastavení než v nezatíženém stavu. Jestli známe torzní tuhost listů a průběh zatížení vyvolávající torzní deformace podél listu, dokážeme listy vyrobit tak, aby při provozu fungovali na správném úhlu náběhu. [3]



Obr. 25 – Porovnání průběhů provozního a výrobního úhlu nastavení listu [3]

6.7. Postup výpočtu zatížení

V této kapitole se budeme věnovat postupu výpočtu kvazistatického aerodynamického ohybového momentu a odstředivé síly. Z hlediska návrhu tyhle dvě složky mají největší vliv na konstrukci, ostatní složky sil můžou účinek těchto sil buď zesílit, nebo potlačit.

Při stanovení zatížení jsme vycházeli z předpisů v kapitole 6.2. V souladu s předpisy, otáčky jsme nastavili na 3242 ot/min (141% jmenovitých otáček motoru) a průběhy těchto zatížení budeme uvažovat za statických podmínek.

6.7.1. Aerodynamický ohybový moment

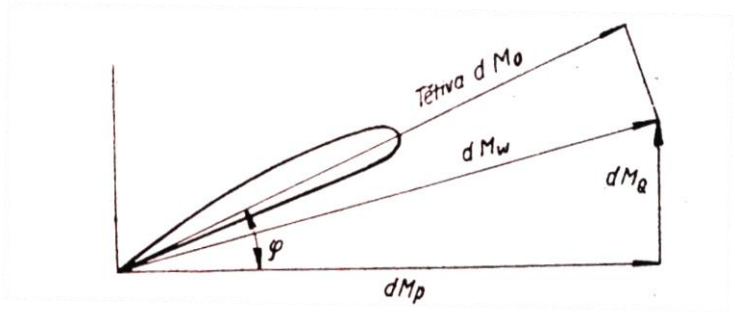
Jak jsme se už výše zmínili, ohybový moment působící na listy můžeme rozdělit na dvě složky: moment působící v rovině otáčení listů, který budeme značit jako M_Q a moment generovaný od tahové složky síly jako M_T. Výsledný moment označíme jako M_w. Jestli výsledný moment promítneme kolmo k ose nejmenšího odporu listu, obdržíme složku M_0. Podle zkušeností se dá předpokládat, že tato složka je prakticky identická s momentem generovaný od tahové složky vrtule, jak je znázorněno na Obr. 26. [1]

Můžeme tedy napsat:

$$dT = \rho\, n^2 D^5 dc_T$$

Pro daný element listu můžeme napsat:

$$dM_0 = dT\,(r - r_0)$$



Obr. 26 – Rozbor ohybových momentů v řezu listu [1]

Kde r_0 značí polohu řezu a r je vzdálenost, ve kterém elementární tah generuje elementární moment M_0. Jestli kombinujeme předešlé dvě rovnice, dostaneme následující vztah [1]:

$$M_0 = \frac{1}{2}\,\rho n_s^2 D^5 \int_{\bar{r}_0}^{1} \frac{dc_T}{d\bar{r}}(\bar{r} - \bar{r}_0)d\bar{r} \qquad (83)$$

Člen $dc_T/\,d\bar{r}$ vyjadřuje rozložení součinitele tahu podél listu. Dále víme, že aerodynamická síla, která vzniká na listech profilu se obecně dá rozložit na vztlakovou

složku Y a odporovou složku D. Pro přibližný výpočet odporovou složku zanedbáme a budeme předpokládat, že tahová a vztlaková složka bude svírat uhel β. Zavedeme následující vztahy [1]:

$$dY = \frac{1}{2} c_y \rho b W^2 dr = \frac{1}{4} c_y \rho \bar{b} W^2 D^2 dc_T \tag{84}$$

kde

$$W^2 = V^2 + 4\pi^2 n_s^2 r^2 \text{ nebo } W^2 = n_s^2 D^2 (\pi^2 \bar{r}^2 + J^2) \tag{85}$$

Z rychlostního trojúhelníku a ze silové rovnováhy na elementu listu můžeme určit následující vztahy:

$$\tan\beta = \frac{J}{\pi \bar{r}} \text{ a } \cos\beta = \frac{dT}{dY} \tag{86}$$

Shrnutím poznatků z (86) můžeme určit následující vztahy:

$$M_0 = \frac{1}{8} \rho n_s^2 D^5 \int_{\overline{r_0}}^{1} c_y \, (\pi^2 \bar{r}^2 + J^2)(\bar{r} - \overline{r_0}) \bar{b} d\bar{r} \tag{87}$$

$$T = z \frac{1}{4} \rho n_s^2 D^4 \int_{\overline{r_0}}^{1} c_y \, (\pi^2 \bar{r}^2 + J^2) cos\beta \bar{b} d\bar{r} \tag{88}$$

Kde J je rychlostní poměr. Jestli předpokládáme konstantní rozložení součinitele vztlaku c_y podél lopatky (či-li můžeme je vytknout za integrálem) a v tahové rovnici výraz za integrálem označíme jako B, dostaneme se k výrazu:

$$c_y = \frac{4T}{z \rho n_s^2 D^4 B} = \frac{4 c_T \rho n_s^2 D^4}{z \rho n_s^2 D^4 B} = \frac{4 c_T}{zB}$$

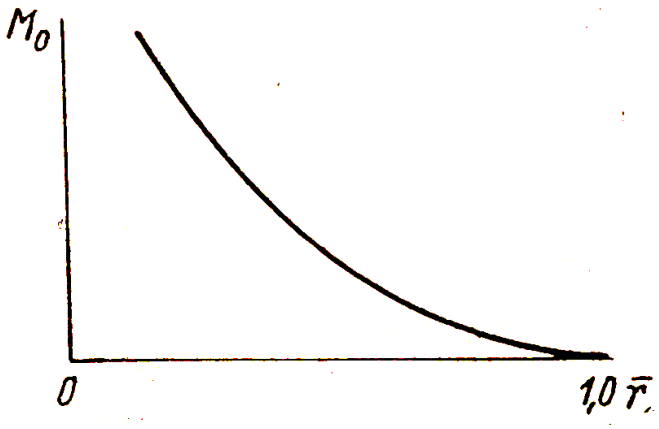
A tím dostaneme výsledný výraz pro ohybový moment:

$$M_0 = \frac{1}{2} \rho n_s^2 D^5 \frac{1}{zB} \int_{\overline{r_0}}^{1} (\pi^2 \bar{r}^2 + J^2) \, (\bar{r} - \overline{r_0}) \bar{b} d\bar{r} \tag{89}$$

Postup výpočtu ohybového momentu:

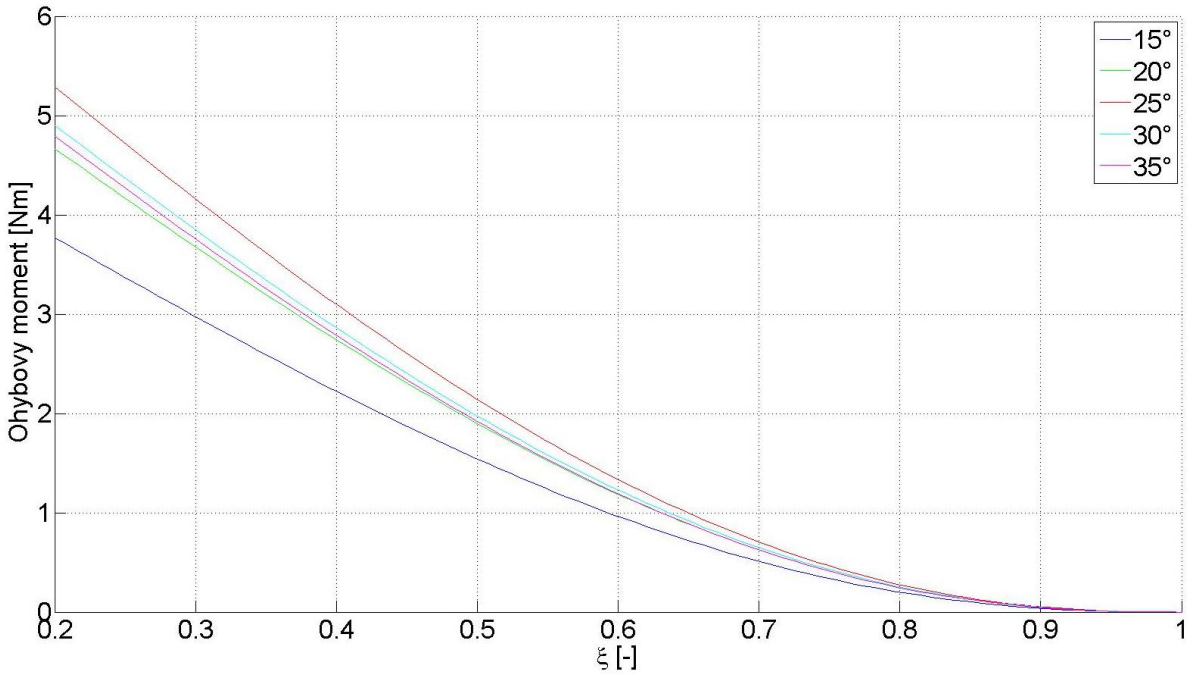
1. Zvolíme rychlostní poměr letu λ
2. Pro daný rychlostní poměr λ určíme z aerodynamických charakteristik c_T a c_P. Pomocí rychlostních poměrů určíme úhel β.
3. Pomocí geometrických a aerodynamických charakteristik určíme B.
4. Pro daný $\overline{r_0}$ a λ spočítáme M_0.

Vrtulový list se prakticky podobá na vetknutí nosník. U vetknutých nosníků na jednom konci se ohybový moment vždy zvětšuje k místu vetknutí. [1]



Obr. 17 – Typický průběh ohybového momentu od tahu [1]

6.7.2. Průběh aerodynamického ohybového momentu podél listu



Graf 11. – Průběh ohybového momentu pro různé úhly nastavení za statických podmínek

Číselné výsledky ohybového momentu podél listu jsou součástí Přílohy 2.

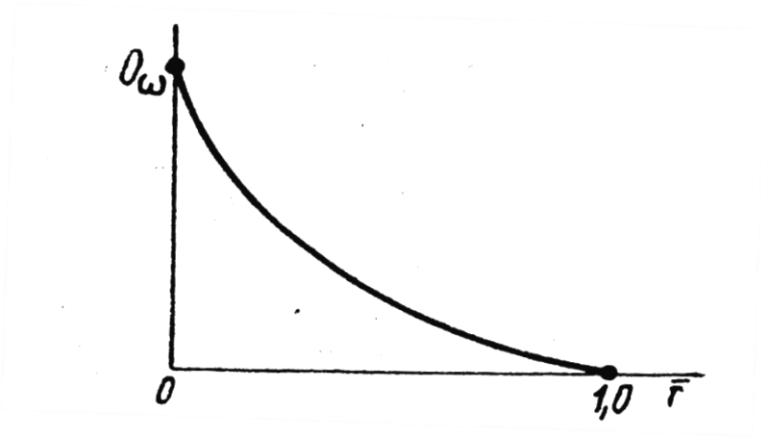
6.7.3. Odstředivá síla

Vliv a postup výpočtu jsme probrali již v kapitole 6.4.1.Jelikož cílem byl navrhnout vrtuli tak, aby při nejnižší hmotnosti měla co nejvyšší pevnost, rozhodli jsme se použít kompozitní materiály, které nemůžeme podél listu považovat za izotropní.

Pozn.: Konstrukci vrtule a skladbu materiálu popíšeme podrobně v kapitole 5.1

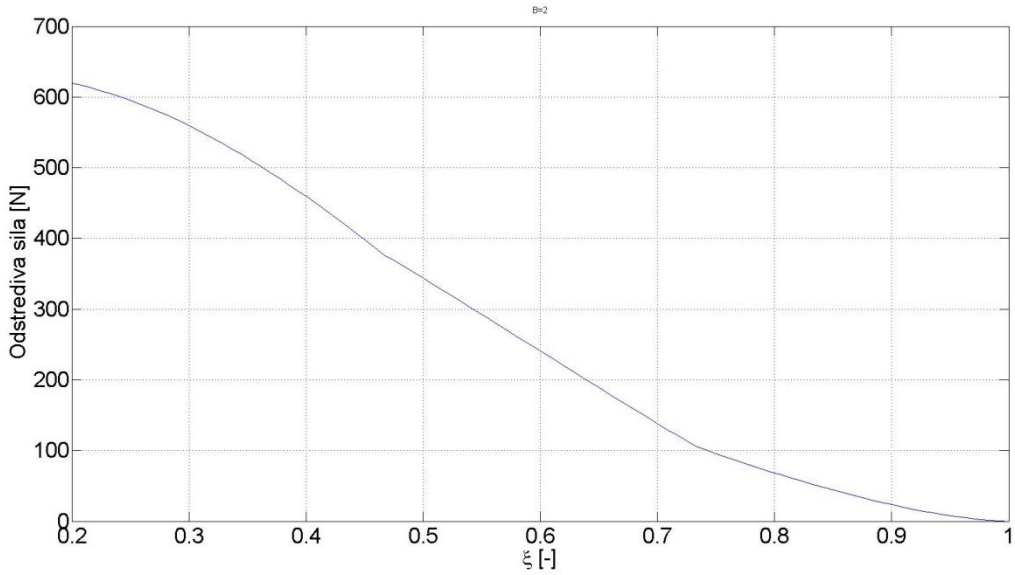
Jelikož v jednotlivých průřezech vrtule se bude měnit jak průřez, tak i poměr jednotlivých materiálů, vycházeli jsme z definice těžiště. Ve smyslu této definice, vrtuli jsme rozdělily na k počet elementů, pro které jsme předpokládali, že v něm podíl různých materiálů je konstantní a mají konstantní průřez. [1]

Tento postup nám umožnilo určit těžiště části vrtule vymezenou poloměry $r \div R$ a tím i velikost odstředivé síly na daném poloměru r. [1]



Obr. 28 – Typický průběh odstředivé síly podél listu [1]

6.7.4. Průběh odstředivé síly podél listu



Graf 12. – Průběh odstředivé síly podél listu

Jelikož průběh odstředivé síly závisí pouze na počtu otáček a hmotnostních charakteristikách vrtule, bude pro každý případ nastavení listu stejný. Číselné výsledky ohybového momentu podél listu jsou částí Přílohy 2.

7. Pevnostní kontrola listů

Pevnostní kontrola listů je nejkomplikovanější část návrhu listu. U pevnostní kontroly vypočítáme již pro známou geometrii listů a průběhů zatížení napětí a deformace podél listů.

Jak jsme už to výše zmínily, list vrtule se dá představit jako zkroucený nosník s proměnným průřezem, na který působí spojité proměnné zatížení krutu, ohybu a tahu ve formě odstředivé síly. Pevnostní kontrola již v tomto případě je značně komplikovaný.

V případě použití konvenčních materiálů jako různé slitiny hliníku a titanu se kontrolu dá zjednodušit pomocí různých numerických metody, jelikož tyto materiály mají izotropní vlastnosti. V našem případě výpočet bude mnohem složitější, jelikož u kompozitních materiálů skladba materiálu neumožní nám přepokládat izotropní vlastnosti v jednotlivých směrech zatížení.

Pro kontrolu našeho návrhu využití této metody není avšak nutný, jelikož neznáme všechny typy zatížení, které na vrtulové listy budou působit a jak se už to zmínilo v kapitole 6, jednotlivé typy zatížení se vzájemné ovlivňují a dají se považovat za známé až v rovnovážném stavu všech sil.

Pro kontrolu listů byla zvolena metoda klasické laminační teorie, která za zavedení zjednodušujících předpokladů umožní analyzovat jednotlivé vrstvy podél celého listu.

V následující kapitole popíšeme fyzikální princip metody a postup výpočtu aplikovaný pro náš případ.

7.1. Fyzikální princip teorie

Použitím klasické laminační teorie (CLT) lze odvodit tuhost výsledného komp. laminátu z jeho jednotlivých vrstev. U kompozitních materiálu se setkáváme s množstvím zajímavých jevů, které u klasických izotropních materiálu nemohou nastat. Například pouhou záměnou posloupnosti skladby jednotlivých vrstev dosáhneme odlišných mechanických vlastností.

Použití této metody má následující předpoklady [7] [8]:

- Deformace je lineární k napětí
- Homogennost jednotlivých vrstev laminátu
- Osa 1 základního materiálového souřadného systému je rovnoběžná se směrem vláken výztuhy laminy
- Dokonalé spojení mezi vrstvami bez skluzu mezi vrstvami
- Předpoklad rovinné napjatosti tj. $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$
- Veškeré deformace jsou podstatně menší než tloušťka laminátu

7.2. Postup výpočtu

Před definováním matematického modelu definovat souřadné systémy, ve kterých budeme jednotlivé výpočty provádět [7]:

- systém xy , nebo absolutní souřadný systém představuje souřadný systém konstrukce
- systém 12, nebo lokální souřadný systém představuje souřadný systém vrstvy k, kde index 1 značí směr vláken a index 2 směr kolmý na vláken

Ve výpočtech budeme předpokládat, že pro každou vrstvu lze sestavit redukovanou matici tuhosti, jejíž závislost s deformací a napětí bude následovná [7]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{90}$$

kde

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

Konstanty E_1, E_2, G_{12}, ν_{12} a ν_{21}jsou materiálové hodnoty. Výše uvedený vztah lze transformovat do globálního systému laminátu, tím obdržíme tvar [7]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{91}$$

Jestli použijeme poznatky z Kirchhoffovy hypotézy, tak transformovaný systém můžeme přepsat na tvar (transformace provedeme pomocí matice T $(3\mathrm{x}3)$, kterou ještě využijeme u transformace napětí a deformace)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + \kappa_x \\ \varepsilon_y^0 + \kappa_y \\ \gamma_{xy}^0 + \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{92}$$

Kde ε je deformace a κ zakřiveni vztažného povrchu laminátu. Transformace závisí pouze na orientaci vrstvy α vůči absolutnímu souřadnému systému. [7]

Síly a momenty které působí na daný laminát, který má celkovou tloušťku h se vyjadřují specificky na jednotku šířky laminátu. Zpětně síly a momenty se dá definovat následovně:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, zdz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, zdz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz$$

(Souřadnice $-h/2$ představuje horní a $h/2$ dolní potah laminátu, čili souřadnice z ukazuje na „spodek" laminátu). [7]

Jestli všechny poznatky shrneme, tak obdržíme lineární systém o 6 neznámých, který bude mít obecně tvar:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{93}$$

Kde členy A představují tahovou, členy B kombinovanou a členy D ohybovou matici tuhosti. A dají se dopočítat následujícím způsobem [7]:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left[\overline{Q_{ij}}\right]_k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\overline{Q_{ij}}\right]_k ({z_k}^2 - {z_{k-1}}^2)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left[\overline{Q_{ij}}\right]_k ({z_k}^3 - {z_{k-1}}^3)$$

Kde indexy i a j můžou nabývat hodnoty 1,2,6.

Deformace a napětí pak lze vypočítat pro každou vrstvu k . Deformace a napětí třeba vyjádřit nejprve v absolutním souřadným systému, a pak následně i v lokálním souřadném systému. Z hlediska kontroly a vyhodnocení pevnostních kritérii třeba použít hodnoty v lokálním systému. [7]

Nejprve vypočítáme deformace vrstvy k

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + h_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{94}$$

Kde hodnota h_k vyjadřuje střednici vrstvy. Následovně pomocí transformované matice tuhosti vrstvy k dopočítáme napětí [7]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k \tag{95}$$

Výsledné napětí a deformace v lokálním systému již vyjádříme snadno:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_k = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k \tag{96}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}_k = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k \tag{97}$$

Pozn.:
Jestli skladba vrstev bude symetrický, kombinovaný efekt tahu/tlaku a ohybu můžeme vyloučit, tím pádem členy matice B budou nulové.

7.3. Vyhodnocení pevnosti

Po určení deformací a napětí laminátu, třeba provést kontrolu, zda napětí v laminátu nepřesahuje přípustné meze materiálu. Pro vyhodnocení pevnosti existují různé pevnostní kritéria, ze kterých budeme použít teorii Tsai-Hill. Výhodou této teorie je, že je univerzální a dá se ji využít pro vyhodnocení pevnosti jak v tahu, tak i v tlaku. Bude platit:

$$k = \left[\frac{\sigma_1}{X_1}\right]^2 - \left[\left(\frac{\sigma_1}{X_2}\right)\left(\frac{\sigma_2}{X_2}\right)\right] + \left[\frac{\sigma_2}{Y}\right]^2 + \left[\frac{\tau_{12}}{S}\right]^2 < 1 \tag{98}$$

kde hodnoty X_1, X_2, Y a S jsou mezní materiálové hodnoty v tahu, nebo v tlaku. Když příslušná složka napětí bude větší než 0, tak se používá mezní hodnota pevnosti v tahu. V opačném případě se jako mezní hodnota používá pevnost v tlaku. Nevýhoda spočívá v tom, že o módu poruchy nezískáme žádní informace, ale z hlediska návrhového výpočtu to není ani důležitý. [7]

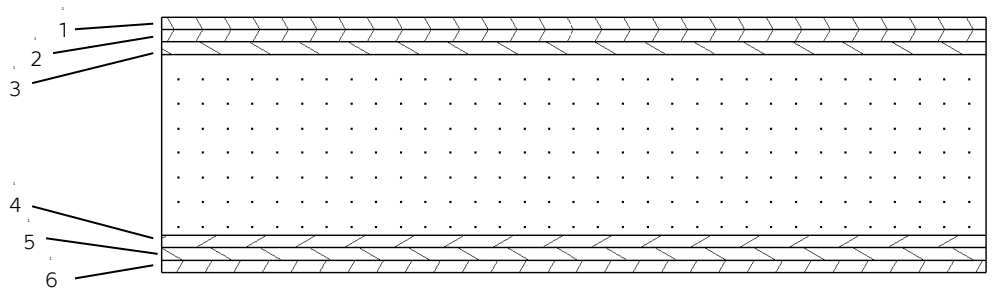
7.4. Výpočetní model a výsledky

Při pevnostní kontrole na normálové síly (odstředivá síla a aerodynamický ohybový moment) byly uvažované pouze nosné části listů, tj. pásnice a část pěnového jádra mezi pásnicemi vrtule.

Pevnostní kontrola na krut nebyla provedená z důvodu omezených možností na výpočet rozkrucovacího momentu a momentu od odstředivých sil.

Uvedený postup v kapitole 7.2 jsme aplikovali pro různé skladby vrstev pro místní geometrické rozměry podél listu s uvažováním průběhu zatížení z kapitoly 6.7.2 a 6.7.4 Jak je to patrné z Tabulky 2, největší součinitel tahu má konfigurace s úhlem nastavění 25° v kapitole 4.6, tím pádem aerodynamický ohybový moment dosahuje největší hodnoty. Veškeré uvedené výsledky a kontroly byly vztažené na touto konfiguraci.

Průřez výpočetního modelu je znázorněn na Obr 29,



Obr. 29 – Průřez nosníku

Pro definování výpočetního modelu jsme nosník vrtule rozdělili na 3 intervaly:

I. 0,2R – 0.425R
II. 0.425R – 0,67R
III. 0,67R – 0,99R

Šířka a tloušťka průřezu se neustále mění podél listu, jak už to bylo zmíněno v kapitole 6.1. Řez nosníku je reprezentován na Obr 29. v intervale I.. V intervale II. již vrstvy 3 a 4 nejsou přítomen, stejně jako vrstvy 2 a 5 v intervale III..

Pomocí výše uvedeného postupu byli definovány lokální rozměry jednotlivých řezů podél listu a k tomu příslušné měrné zatížení vztažené k lokální šířce průřezu. Jelikož ohybový moment nepůsobí kolmo k průřezu listu, musíme ho rozložit na 2 složky.

Po provedení výpočtu se zjistilo, že nosník vyhovuje ve všech místech podél listu s dostatečnou rezervou na to, aby byl schopný přenášet i přídavné zatížení od dynamických jevů vyskytující se za provoz vrtule. Číselné výsledky pevnostní kontroly jsou uvedeny v Příloze 4.

III. Závěr

V této práci byl provedený návrh vrtule pro koncepční ultralehký letoun. Cílem práce bylo, aby byla ke zvolené pohonné jednotce navržená vrtule, která je schopná absorbovat dodaný výkon motoru s co nejvyšší účinností.

Při volbě základních parametrů vrtule byli respektovány veškeré omezující podmínky definované konstruktérem, které jsme pak následně upřesnili pomocí algoritmu od Larrabee.

Na základě aerodynamických charakteristik z kapitoly 4.6 byly stanovené aerodynamické charakteristiky vrtule, na základě kterých byly stanové tahové křivky vrtule. Tahová charakteristika byla stanovená ve dvou konfiguracích: pro konstantní úhly nastavení a pro stálé otáčky. Na základě těchto charakteristik je již možné nastavit regulaci motoru a stavěcího mechanizmu tak, aby vrtule dodala v různých režimech požadované množství tahu.

Jestliže použitá aerodynamická metoda dává pro menší počet listů méně přesné výsledky a použitá metoda ke stanovení charakteristik vrtule také obsahuje značné zjednodušení vůči realitě (zanedbává vliv viskozity a nepočítá), doporučuje se ověření vlastností CFD softwarem, nebo aerodynamickým měřením v tunelu.

Po určení geometrických a aerodynamických vlastností byla zvolena konstrukce a materiály (uhlíkový laminát prosycený s epoxidovou pryskyřicí pro nosné části a pěna ROHACELL51 W) tak, aby byla při nejnižší hmotnosti zaručena co nejvyšší pevnost konstrukce. Výslednou hmotnost jednoho listu lze odhadnout kolem 300 gramů.

U pevnostní kontroly konstrukce byla kontrolována na zatížení stanové předpisem CS-P nebo FAR-35. Byl uvažovaný pouze případ při úhlu nastavení listu 25°, jelikož při této konfiguraci byl průběh aerodynamického ohybového momentu největší. Ke kontrole byl použitý zjednodušený pevnostní výpočet dle klasické laminační teorie a výsledky ukázali, že návrh vyhovuje pevnostním požadavkům.

Pro přesnější ověření mechanických vlastností vrtule se doporučuje provedení výpočtu pomocí MKP, která je schopná analyzovat konstrukci se zřetelem na složitost tvaru a s uvažováním dynamických jevů na vrtuli. Po přesném vyhodnocení mechanických vlastností se dá zvážit i další zlehčení konstrukce, aby vlastnosti použitých materiálů byly využité do co největší míry.

Před výrobou se musí definovat i nedeformovaný tvar listů, aby při provozu se listy deformovali do správného tvaru a byly schopni splnit aerodynamické požadavky stanovené v návrhu.

Po optimalizaci aerodynamických a mechanických vlastností vrtule, její letová způsobilost se musí prokázat dle požadavky uvedené v CS-P nebo FAR-35.

IV. Seznamliteratury

[1] Alexandrov, V. L., Letecké vrtule, SNTL, Praha, 1954

[2] Certification Specifications for Propellers – CS-P - Amendment 1 16 November 2006

[3] STATEČNÝ, Jiří, František SEDLÁŘ a Zdeněk DOLEŽAL. *Pevnost a životnost leteckých turbínových motorů*. Dot. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1995. ISBN 80-01-00420-1.

[4] STATEČNÝ, Jiří a Zdeněk DOLEŽAL. *Pevnost a životnost leteckých turbínových motorů*. Dot. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1995. ISBN 80-01-00662-x.

[5] Implementation of Blade Element Momentum/Vortex Methods for the Design of Aero Engine Propellers
Dostupné z: https://www.semanticscholar.org/paper/Implementation-of-Blade-Element-Momentum%2FVortex-for-Patrao/66d7b2fb8e02ec5584332ac881178bfd0f6c3d38

[6] PRANDTL, Ludwig a Albert BETZ. *Vier abhandlungenzurhydrodynamikundaerodynamik (flüssigkeitmitkleinerreibung; tradflügeltheorie, I. und II. mitteilung; schraubenpropellermitgeringstemenergieverlust)*. Göttingen: Selbstverlag des Kaiser Wilhelm-institutsfürströmungsforschung, 1927.

[7] KAW, Autar K. *Mechanics of composite materials*. 2nd ed. Boca Raton, FL: Taylor&Francis, 2006. Mechanical engineering series (Boca Raton, Fla.), v. 29. ISBN 0-8493-1343-0.

[8] Mechanika kompozitních materiálů, analytické metody výpočtu stabilitních úloh kompozitních desek a sendvičových panelů a jejich porovnání s MKP
Dostupné z:http://www.kompozity.info/clanky/compdb/ztrata_stability_kompozitu.pdf

[9] 25KW 120100 OutrunnerBrushless Motor for Electric Drone/ Paragliderwith 22S 500A ESC-in Parts&AccessoriesfromToys&Hobbies on Aliexpress.com | Alibaba Group. 302 Found [online]. Copyright © 2010 [cit. 25.07.2019]. Dostupné
z: https://www.aliexpress.com/item/32842843648.html

[10] Wald, Q. R., Theaerodynamics of propellers, Progress in AerospaceSciences 42 (2006), pp 85–128, doi:10.1016/j.paerosci.2006.04.001

[11] Ing. Jan Klesa, Comparison of Methods for Computation of Ideal Circulation Distribution on the Propeller
Dostupné z: chrome-extension://oemmndcbldboiebfnladdacbdfmadadm/http://stc.fs.cvut.cz/history/2010/sbornik/papers/pdf/KlesaJan-306748.pdf

[12] Specification - ROHACELL® - High-performance structural foam cores. 301 Moved Permanently [online].
Dostupné z: https://www.rohacell.com/product/rohacell/en/products-services/rohacell-wf/

[13] Mechanical Properties of Carbon Fibre Composite Materials. Carbon Fibre Tubes, Filament Winding and Composite Engineering[online]. Dostupné z: http://www.performance-composites.com/carbonfibre/mechanicalproperties_2.asp

V. Seznam obrázků, grafů a tabulek

Obr. 1 – Rozbor rychlostí v řezu listu

Obr. 2 – Pohyb systému víru za vrtulí

Obr. 3 – Rozbor sil na řezu listu

Obr. 4 – 3D model navrženého listu

Obr. 5 – Systém podkovitých víru nahrazující nosnou plochu

Obr. 6 – Nosná plocha nahrazená jediným podkovitým vírem

Obr. 7 – Systém podkovitých víru na listech otáčející se vrtule

Obr. 8 – Ilustrace válcových vírových ploch vrtule

Obr. 9 – Rozbor sil a rychlosti v řezu listu

Obr. 10 – Rozvinutí válcové vírové plochy do roviny

Obr. 11 – Soustava šroubovitých vírů z-listého vrtule

Obr. 12 – Souřadný systém pro určení indukovaných rychlostí

Obr. 13 – Rozbor indukovaných rychlostí v řezu listu

Obr. 14 – Schematické znázornění konstrukce vrtule

Obr. 15 – Schéma skladby pásnic podél listu

Obr. 16 – Umístění nosníku listu

Obr. 17 – Konvenční vrtulový list z hliníkové slitiny

Obr. 18 – Ilustrace různých typů provedení konstrukce listu

Obr. 19 – Silová soustava působící na vrtuli

Obr. 20 – Vratný ohybový moment od odstředivých sil

Obr. 21 – Konstrukční vyklonění těžištní osy listu

Obr. 22 – Vznik krouticího momentu od odstředivé síly

Obr. 23 – Princip vzniku rozkrucovacího momentu

Obr. 24 – Shrnutí sil, které působí změnu úhlu nastavení listu

Obr. 25 – Porovnání průběhů provozního a výrobního úhlu nastavení listu

Obr. 26 – Rozbor ohybových momentů v řezu listu

Obr. 27 – Typický průběh ohybového momentu od tahu

Obr. 28 – Typický průběh odstředivé síly podél listu

Obr. 29 – Průřez nosníku

Grafy

Graf 1 – Polára letounu

Graf 2 – Potřebný tah letadla pro různé rychlosti letu

Graf 3 – Závislost účinnosti vrtule na jejím průměru

Graf 4 – Průběh šířky profilů podél listu

Graf 5 – Průběh natočení profilů podél listu

Graf 6 – Průběh součinitele tahu

Graf 7 – Průběh součinitele výkonu

Graf 8 – Průběh účinnosti

Graf 9 – Tahová křivka vrtule pro konstantní úhly nastavení

Graf 10 – Tahová křivka vrtule pro stálé otáčky

Graf 11. – Průběh ohybového momentu pro různé úhly nastavení za statických podmínek

Graf 12. – Průběh odstředivé síly podél lopatek

Tabulky

Tabulka 1 – Parametry návrhového režimu

Tabulka 2 – Součinitele tahu za statických podmínek pro různé úhly nastavení vrtule

Tabulka 3 – Mechanické vlastnosti a materiálové hodnoty použitých materiálů

VI. Příloh a seznam souborů

Příloha 1 – Geometrické charakteristiky vrtule

r [-]	**c** [-]	**β** [°]
0,2	0,05425	56,7645
0,21616	0,05855	54,6932
0,23232	0,06236	52,7228
0,24848	0,06568	50,8503
0,26465	0,06852	49,0725
0,28081	0,07091	47,3853
0,29697	0,07285	45,7849
0,31313	0,07439	44,267
0,32929	0,07556	42,8273
0,34545	0,0764	41,4616
0,36162	0,07693	40,1658
0,37778	0,07719	38,9359
0,39394	0,07721	37,7681
0,4101	0,07702	36,6586
0,42626	0,07664	35,6041
0,44242	0,07609	34,601
0,45859	0,07539	33,6464
0,47475	0,07457	32,7374
0,49091	0,07364	31,871
0,50707	0,07261	31,0449
0,52323	0,07149	30,2565
0,53939	0,0703	29,5036
0,55556	0,06904	28,7842
0,57172	0,06772	28,0962
0,58788	0,06634	27,4378
0,60404	0,06492	26,8073
0,6202	0,06346	26,2032
0,63636	0,06196	25,6238
0,65253	0,06042	25,0679
0,66869	0,05884	24,5342
0,68485	0,05722	24,0213
0,70101	0,05557	23,5283
0,71717	0,05389	23,054
0,73333	0,05216	22,5975
0,74949	0,0504	22,1578
0,76566	0,04859	21,7341
0,78182	0,04673	21,3255
0,79798	0,04482	20,9314
0,81414	0,04286	20,5509
0,8303	0,04082	20,1834
0,84646	0,0387	19,8284
0,86263	0,03649	19,4851
0,87879	0,03417	19,1531
0,89495	0,03172	18,8318
0,91111	0,02909	18,5207
0,92727	0,02623	18,2194
0,94343	0,02307	17,9274
0,9596	0,01944	17,6444
0,97576	0,01501	17,3698
0,99192	0,00864	17,1035

Příloha 2 – Číselné hodnoty aerodynamického ohybového napětí pro různé úhly nastavení listu

	$M_{0\ aerodynamický}$ [Nm]					
r [-]	**φ=15°**	**φ =20°**	**φ =25°**	**φ =30°**	**φ =35°**	**O [N]**
0,2	3,77054	4,66647	5,28737	4,90176	4,79404	616,409
0,21616	3,64022	4,50422	5,10229	4,72882	4,62328	609,113
0,23232	3,51043	4,34268	4,91808	4,55678	4,45352	600,664
0,24848	3,38128	4,18198	4,73491	4,38578	4,28489	591,056
0,26465	3,25286	4,02224	4,5529	4,21596	4,11753	580,289
0,28081	3,12529	3,86363	4,37224	4,04748	3,95162	568,381
0,29697	2,99869	3,70627	4,19309	3,8805	3,78727	555,372
0,31313	2,87318	3,55032	4,01562	3,71516	3,62465	541,307
0,32929	2,74888	3,39592	3,84	3,55163	3,46392	526,235
0,34545	2,6259	3,24325	3,6664	3,39008	3,30523	510,203
0,36162	2,50439	3,09244	3,49502	3,23067	3,14874	493,279
0,37778	2,38447	2,94367	3,32601	3,07355	2,99461	475,529
0,39394	2,26626	2,79707	3,15955	2,91888	2,84296	457,007
0,4101	2,14989	2,65282	2,99584	2,76685	2,69399	437,781
0,42626	2,0355	2,51108	2,83504	2,61758	2,54783	417,926
0,44242	1,9232	2,37198	2,67731	2,47125	2,40462	397,502
0,45859	1,81311	2,23568	2,52283	2,328	2,26451	376,569
0,47475	1,70537	2,10234	2,37176	2,18798	2,12764	360,781
0,49091	1,60009	1,9721	2,22427	2,05135	1,99414	344,716
0,50707	1,4974	1,8451	2,08051	1,91824	1,86417	328,427
0,52323	1,3974	1,72149	1,94064	1,78879	1,73784	311,94
0,53939	1,30023	1,60141	1,80484	1,66317	1,6153	295,32
0,55556	1,20599	1,48501	1,67324	1,54148	1,49667	278,583
0,57172	1,1148	1,37241	1,54599	1,42388	1,38207	261,78
0,58788	1,02675	1,26373	1,42322	1,31046	1,27162	244,94
0,60404	0,94194	1,15909	1,30507	1,20136	1,16541	228,109
0,6202	0,86048	1,05861	1,19165	1,09667	1,06356	211,314
0,63636	0,78243	0,96238	1,08307	0,99649	0,96613	194,589
0,65253	0,70789	0,87051	0,97945	0,90093	0,87324	177,974
0,66869	0,63693	0,78308	0,88088	0,81006	0,78495	161,504
0,68485	0,56961	0,70017	0,78743	0,72395	0,70132	145,198
0,70101	0,50601	0,62185	0,6992	0,64268	0,62242	129,107
0,71717	0,44617	0,5482	0,61625	0,56629	0,5483	113,257
0,73333	0,39015	0,47926	0,53864	0,49486	0,479	100,706
0,74949	0,33798	0,4151	0,46642	0,42841	0,41458	91,4239
0,76566	0,2897	0,35573	0,39963	0,36697	0,35503	82,4058
0,78182	0,24534	0,3012	0,3383	0,31058	0,3004	73,65
0,79798	0,20491	0,25151	0,28242	0,25923	0,25067	65,2104
0,81414	0,16839	0,20664	0,23199	0,21289	0,20581	57,0953
0,8303	0,13575	0,16656	0,18695	0,17152	0,16578	49,3236
0,84646	0,10695	0,13119	0,14723	0,13505	0,13049	41,9257
0,86263	0,08191	0,10046	0,11272	0,10337	0,09986	34,9342
0,87879	0,06054	0,07423	0,08327	0,07635	0,07374	28,3853
0,89495	0,04272	0,05237	0,05874	0,05384	0,05199	22,3197
0,91111	0,02831	0,0347	0,03891	0,03566	0,03443	16,7842
0,92727	0,01716	0,02103	0,02358	0,0216	0,02085	11,8347
0,94343	0,00907	0,01112	0,01246	0,01142	0,01102	7,53103
0,9596	0,00381	0,00467	0,00523	0,00479	0,00462	3,94737
0,97576	0,001	0,00122	0,00137	0,00125	0,00121	1,27431
0,99192	5,8E-05	7,1E-05	7,9E-05	7,3E-05	7E-05	0

Příloha 3 – Číselné výsledky napjatosti laminátu v jednotlivých řezech

Napjatost laminátu v mezích 0,2R-0,425

r [-]	0,20000												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-1E+08	-1E+08	-1E+08	-1E+08	-3E+07	-6E+07	-6E+07	3,5E+07	9,6E+07	1E+08	1,3E+08	1,4E+08	4,8E-12
σ_2 [Pa]	-4E+06	-3E+06	-5E+06	-5E+06	-8E+06	-1E+07	-1E+07	7769653	4527040	4913306	3396967	3664024	-5E-12
τ_{12} [Pa]	-3E+06	-2E+06	4649087	4283593	-4E+06	-7E+06	-7E+06	4283593	-4E+06	-5E+06	2497185	2693505	1,4E-11
r [-]	0,21616												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-1E+08	-1E+08	-9E+07	-8E+07	-3E+07	-5E+07	-5E+07	2,7E+07	8,2E+07	8,8E+07	1E+08	1,1E+08	3,4E-12
σ_2 [Pa]	-4E+06	-3E+06	-4E+06	-4E+06	-7E+06	-1E+07	-1E+07	6595650	3710432	3999135	3297234	3535422	-3E-12
τ_{12} [Pa]	-2E+06	-2E+06	3194060	2963112	-3E+06	-5E+06	-5E+06	2971680	-3E+06	-3E+06	2206530	2365791	1,3E-11
r [-]	0,23232												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-9E+07	-8E+07	-8E+07	-7E+07	-2E+07	-4E+07	-4E+07	2,3E+07	7,1E+07	7,7E+07	8E+07	8,5E+07	2,5E-12
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-3E+06	-3E+06	-6E+06	-1E+07	-1E+07	5723624	3132916	3358983	3174412	3388481	-2E-12
τ_{12} [Pa]	-2E+06	-2E+06	2208973	2059381	-2E+06	-4E+06	-4E+06	2083199	-2E+06	-2E+06	1970858	2103424	1,2E-11
r [-]	0,24848												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-7E+07	-6E+07	-7E+07	-6E+07	-2E+07	-3E+07	-3E+07	1,9E+07	6,3E+07	6,8E+07	6,5E+07	6,9E+07	1,8E-12
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-3E+06	-3E+06	-5E+06	-9E+06	-9E+06	5058463	2709514	2893256	3049401	3243785	-2E-12
τ_{12} [Pa]	-2E+06	-2E+06	1516506	1418715	-1E+06	-2E+06	-2E+06	1460258	-1E+06	-2E+06	1779641	1892535	1,1E-11
r [-]	0,26465												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-6E+07	-5E+07	-6E+07	-6E+07	-2E+07	-3E+07	-3E+07	1,7E+07	5,7E+07	6,1E+07	5,3E+07	5,7E+07	1,2E-12
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-3E+06	-2E+06	-5E+06	-8E+06	-8E+06	4545328	2393680	2548023	2936078	3114975	-1E-12
τ_{12} [Pa]	-2E+06	-2E+06	1013633	950218	-950218	-2E+06	-2E+06	1010889	-1E+06	-1E+06	1625008	1723269	1E-11
r [-]	0,28081												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-5E+07	-4E+07	-5E+07	-5E+07	-1E+07	-2E+07	-2E+07	1,5E+07	5,2E+07	5,5E+07	4,5E+07	4,8E+07	8,4E-13
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-2E+06	-2E+06	-4E+06	-7E+06	-7E+06	4140174	2151157	2284264	2835061	3001656	-8E-13
τ_{12} [Pa]	-2E+06	-1E+06	635712	596140	-596140	-1E+06	-1E+06	677214	-677214	-716787	1498447	1585544	9,6E-12
r [-]	0,29697												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-4E+07	-4E+07	-5E+07	-5E+07	-1E+07	-2E+07	-2E+07	1,3E+07	4,8E+07	5,1E+07	3,8E+07	4,1E+07	5,3E-13
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-2E+06	-2E+06	-4E+06	-6E+06	-6E+06	3817659	1962844	2080355	2749020	2906067	-5E-13

τ_{12} [Pa]	-1E+06	-1E+06	342861	320457	-320457	-583311	-583311	423299	-423299	-445703	1394634	1473144	9E-12
r [-]	**0,31313**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-3E+07	-3E+07	-5E+07	-4E+07	-1E+07	-2E+07	-2E+07	1,2E+07	4,5E+07	4,8E+07	3,3E+07	3,5E+07	3E-13
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-2E+06	-2E+06	-3E+06	-6E+06	-6E+06	3556961	1813943	1919730	2676220	2825864	-3E-13
τ_{12} [Pa]	-1E+06	-1E+06	108935	99382,2	-99382	-214034	-214034	225469	-225469	-235021	1308588	1380381	8,5E-12
r [-]	**0,32929**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-3E+07	-3E+07	-4E+07	-4E+07	-1E+07	-2E+07	-2E+07	1,1E+07	4,2E+07	4,5E+07	2,9E+07	3,1E+07	1E-13
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-2E+06	-2E+06	-3E+06	-6E+06	-6E+06	3344014	1694802	1791650	2615464	2759461	-1E-13
τ_{12} [Pa]	-1E+06	-1E+06	-83383	-82952	82952	88211,1	88211,1	68036,3	-68036	-67605	1236715	1303195	8,1E-12
r [-]	**0,34545**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-2E+07	-2E+07	-4E+07	-4E+07	-1E+07	-2E+07	-2E+07	1E+07	4E+07	4,2E+07	2,6E+07	2,7E+07	-5E-14
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-2E+06	-2E+06	-3E+06	-5E+06	-5E+06	3168502	1598564	1688532	2565399	2705200	5,1E-14
τ_{12} [Pa]	-1E+06	-1E+06	-245930	-237454	237454	342155	342155	-59696	59696,5	68172,6	1176226	1238470	7,7E-12
r [-]	**0,36162**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-2E+07	-2E+07	-4E+07	-4E+07	-1E+07	-2E+07	-2E+07	9942598	3,8E+07	4E+07	2,3E+07	2,4E+07	-2E-13
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-2E+06	-1E+06	-3E+06	-5E+06	-5E+06	3021958	1519769	1604371	2523879	2660628	1,8E-13
τ_{12} [Pa]	-1E+06	-1E+06	-386787	-371601	371601	560592	560592	-165000	165000	180186	1124728	1183546	7,4E-12
r [-]	**0,37778**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-2E+07	-2E+07	-4E+07	-3E+07	-9E+06	-2E+07	-2E+07	9492585	3,7E+07	3,9E+07	2,1E+07	2,2E+07	-3E-13
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-1E+06	-1E+06	-3E+06	-5E+06	-5E+06	2898429	1454688	1535083	2489508	2624158	2,9E-13
τ_{12} [Pa]	-1E+06	-1E+06	-511746	-490776	490776	752692	752692	-253033	253033	274003	1080463	1136489	7,1E-12
r [-]	**0,39394**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-1E+07	-1E+07	-4E+07	-3E+07	-9E+06	-2E+07	-2E+07	9123391	3,5E+07	3,7E+07	1,9E+07	2E+07	-4E-13
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-1E+06	-1E+06	-3E+06	-5E+06	-5E+06	2792603	1400041	1477091	2460203	2593486	3,7E-13
τ_{12} [Pa]	-1E+06	-971443	-624733	-598640	598640	924666	924666	-327252	327252	353345	1041831	1095540	6,9E-12
r [-]	**0,41010**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-1E+07	-1E+07	-3E+07	-3E+07	-8E+06	-1E+07	-1E+07	8824888	3,4E+07	3,6E+07	1,7E+07	1,8E+07	-4E-13
σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-1E+06	-1E+06	-3E+06	-4E+06	-4E+06	2702278	1354526	1428983	2436271	2568923	4,5E-13
τ_{12} [Pa]	-980186	-928380	-729241	-698460	698460	1081992	1081992	-390573	390573	421354	1008132	1059939	6,7E-12
r [-]	**0,42626**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-1E+07	-9E+06	-3E+07	-3E+07	-8E+06	-1E+07	-1E+07	8578779	3,3E+07	3,5E+07	1,6E+07	1,6E+07	-5E-13

σ_2 [Pa]	-3E+06	-3E+06	-1E+06	-1E+06	-2E+06	-4E+06	-4E+06	2623601	1315824	1388238	2415573	2548140	5,1E-13
τ_{12} [Pa]	-938579	-888372	-827294	-792137	792137	1227824	1227824	-444610	444610	479768	978168	1028374	6,5E-12

Napjatost laminátu v mezích 0,425R -0,67R

r [-]	0,442424286								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-19383350,72	-18190919,53	-6446225,2	-6086331,6	-6086331,6	6831151,28	25800848,1	26993279,2	-1,43298E-12
σ_2 [Pa]	-5202146,972	-4935057,75	-5557882,4	-5246643,5	-5246643,5	5924500,13	4918531,37	5185620,59	1,43298E-12
τ_{12} [Pa]	2672250,466	2530491,486	-1646614,3	-1567510	-1567510	1271738,32	-2699351,7	-2841110,7	-1,77693E-11
r [-]	0,458585714								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-17038628,73	-15933322,19	-6251612,8	-5897572,8	-5897572,8	6682354,69	24446288,9	25551595,4	-1,45517E-12
σ_2 [Pa]	-5132447,22	-4866532,608	-5379956,6	-5074202,1	-5074202,1	5790019,76	4847992,95	5113907,56	1,45517E-12
τ_{12} [Pa]	2588153,851	2448916,356	-1720294,4	-1637595,4	-1637595,4	1300906,83	-2637777,5	-2777014,9	-1,73402E-11
r [-]	0,474747143								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-14595106,91	-13572895,77	-6065897,6	-5716136,5	-5716136,5	6559602,75	23326370,8	24348581,9	-1,72638E-12
σ_2 [Pa]	-5075434,831	-4809549,807	-5207648,2	-4906102,9	-4906102,9	5677381,64	4788234,85	5054119,87	1,72638E-12
τ_{12} [Pa]	2507076,148	2369784,152	-1804825,7	-1718140,6	-1718140,6	1324287,35	-2586113,7	-2723405,7	-1,92627E-11
r [-]	0,490908571								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-11993532,69	-11053784,21	-5879042,6	-5532701,3	-5532701,3	6454171,1	22410659,3	23350407,7	-1,73753E-12
σ_2 [Pa]	-5024836,114	-4758291,187	-5032709,3	-4734695,8	-4734695,8	5579551,08	4733373,68	4999918,61	1,73753E-12
τ_{12} [Pa]	2425013,685	2289362,267	-1899923,8	-1808930,7	-1808930,7	1340338,09	-2541184,7	-2676836,1	-1,89157E-11
r [-]	0,50707								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-9412601,724	-8551950,172	-5699607,3	-5355669,3	-5355669,3	6362297,99	21631099,8	22491751,3	-1,7417E-12
σ_2 [Pa]	-4979671,804	-4711786,231	-4863046,8	-4567759,8	-4567759,8	5492670,02	4682960,83	4950846,41	1,7417E-12
τ_{12} [Pa]	2345653,668	2211280,135	-1996619,7	-1901132,8	-1901132,8	1352106,66	-2501199,7	-2635573,2	-1,86038E-11
r [-]	0,523232857								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-6825163,357	-6041768,537	-5523695,3	-5181390,2	-5181390,2	6280696,24	20973601,8	21756996,7	-1,73827E-12
σ_2 [Pa]	-4937697,239	-4667933,739	-4695407,3	-4402252,7	-4402252,7	5414029,8	4634860,57	4904624,07	1,73827E-12
τ_{12} [Pa]	2267424,543	2134062,366	-2095073,4	-1994906,6	-1994906,6	1359179,86	-2464932,3	-2598294,5	-1,83184E-11
r [-]	0,539394286								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-4212584,524	-3505513,609	-5350197,2	-5008767,8	-5008767,8	6208895,07	20432372,2	21139443,1	-1,72735E-12
σ_2 [Pa]	-4898803,846	-4626598,912	-4528774,8	-4237179,8	-4237179,8	5343174,45	4588899,15	4861104,08	1,72735E-12
τ_{12} [Pa]	2189850,244	2057243,086	-2196069,5	-2090979,6	-2090979,6	1361747,85	-2432172,3	-2564779,4	-1,8058E-11

r [-]	0,555555714								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	-1547396,892	-917470,4684	-5172922,1	-4832081	-4832081	6141299,2	19992937,1	20622863,6	-1,70716E-12
σ_2 [Pa]	-4858685,453	-4583798,919	-4358131	-4067914,2	-4067914,2	5275616,15	4541059,59	4815946,12	1,70716E-12
τ_{12} [Pa]	2110486,375	1978555,351	-2298810,3	-2188635,2	-2188635,2	1358454,28	-2400895	-2532826	-1,78086E-11
r [-]	0,571717143								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	1187358,009	1738507,334	-4990588,1	-4650087	-4650087	6077402,38	19653616,2	20204765,5	-1,67739E-12
σ_2 [Pa]	-4817010,07	-4539201,616	-4182355,6	-3893376,5	-3893376,5	5210912,91	4490962,18	4768770,63	1,67739E-12
τ_{12} [Pa]	2028802,989	1897488,203	-2403903,6	-2288441,7	-2288441,7	1349185,99	-2370898,9	-2502213,7	-1,75689E-11
r [-]	0,587878571								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	4008423,293	4478350,103	-4802143,4	-4461756,9	-4461756,9	6017040,52	19414973,7	19884900,5	-1,63774E-12
σ_2 [Pa]	-4773661,538	-4492676,85	-4000529,5	-3712675,2	-3712675,2	5148917,93	4438421,47	4719406,16	1,63774E-12
τ_{12} [Pa]	1944367,764	1813622,461	-2512049,9	-2391053,5	-2391053,5	1333821,01	-2342117	-2472862,3	-1,73386E-11
r [-]	0,60404								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	6935764,614	7320779,557	-4603682,1	-4263478,7	-4263478,7	5957083,08	19272605,9	19657620,9	-1,5868E-12
σ_2 [Pa]	-4726092,386	-4441872,122	-3809514,3	-3522917,7	-3522917,7	5087161,65	4381035,44	4665255,71	1,5868E-12
τ_{12} [Pa]	1855653,412	1725542,122	-2622948,2	-2496209,3	-2496209,3	1311343,61	-2313437,6	-2443548,9	-1,71101E-11
r [-]	0,620201429								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	9986157,74	10281942,87	-4396242,8	-4056098,6	-4056098,6	5899921,12	19235358,8	19531143,9	-1,52472E-12
σ_2 [Pa]	-4676102,832	-4388401,066	-3610012,4	-3324663	-3324663	5027513,69	4320331,39	4608033,16	1,52472E-12
τ_{12} [Pa]	1763032,767	1633556,144	-2738200,8	-2605385,8	-2605385,8	1282108,51	-2285701,2	-2415177,8	-1,68896E-11
r [-]	0,636364286								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	13181441,61	13382067,58	-4173471,7	-3833831,6	-3833831,6	5839967,68	19297022,7	19497648,7	-1,44907E-12
σ_2 [Pa]	-4619078,872	-4328055,209	-3397079,6	-3113427,9	-3113427,9	4965681,65	4252049,94	4543073,6	1,44907E-12
τ_{12} [Pa]	1664076,384	1535443,258	-2856630,6	-2717535,6	-2717535,6	1244237,56	-2256982,9	-2385616	-1,66643E-11
r [-]	0,652525714								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	16541286,16	16639745,05	-3933583	-3595007	-3595007	5776776,11	19463546,1	19562005	-1,35889E-12
σ_2 [Pa]	-4554461,764	-4260322,53	-3169312,7	-2887907	-2887907	4901404,25	4175590,7	4469729,93	1,35889E-12
τ_{12} [Pa]	1558108,569	1430572,21	-2978871	-2833264	-2833264	1197137,44	-2227170,6	-2354706,9	-1,64341E-11
r [-]	0,668687143								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
σ_1 [Pa]	20086518,76	20074999,32	-3679798	-3342405,9	-3342405,9	5715727,63	19754211,9	19742692,5	-1,2547E-12
σ_2 [Pa]	-4486275,321	-4188824,805	-2929100,7	-2650153,1	-2650153,1	4838893,53	4094428,45	4391878,97	1,2547E-12
τ_{12} [Pa]	1446345,956	1320009,045	-3107737,5	-2955142,4	-2955142,4	1141655,77	-2198158,1	-2324495	-1,62124E-11

Napjatost laminátu v mezích 0,67R –0,99R

r [-]	0,684848571				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	1834017,17	1964469,53	1964469,53	5486683,41	-4,05524E-12
σ_2 [Pa]	-6744932,2	-6263151,3	-6263151,3	6744932,21	4,05524E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,70101				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	2789357,58	2884601,44	2884601,44	5374037,83	-3,94214E-12
σ_2 [Pa]	-6603170,7	-6116525,2	-6116525,2	6603170,72	3,94214E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,717171429				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	3834716,66	3889528,16	3889528,16	5273655,59	-3,81779E-12
σ_2 [Pa]	-6448367	-5957109,7	-5957109,7	6448367,04	3,81779E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,733332857				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	4985529,73	4993493,88	4993493,88	5187381,24	-4,43956E-12
σ_2 [Pa]	-6279012,7	-5783529,3	-5783529,3	6279012,68	4,43956E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,749494286				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	6406139,99	6353805,18	6353805,18	5127992,98	-4,29889E-12
σ_2 [Pa]	-6089939,5	-5591224	-5591224	6089939,46	4,29889E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,765657143				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	7992077,25	7868567,4	7868567,4	5092374,64	-4,14298E-12
σ_2 [Pa]	-5883238,6	-5382057,6	-5382057,6	5883238,59	4,14298E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,781818571				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	9777512,02	9569213,02	9569213,02	5090263,78	-3,97261E-12
σ_2 [Pa]	-5660839,3	-5157709,5	-5157709,5	5660839,28	3,97261E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0

r [-]	0,79798				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	11804586	11494098,2	11494098,2	5127546,06	-3,78283E-12
σ_2 [Pa]	-5416825,1	-4913051,5	-4913051,5	5416825,08	3,78283E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,814141429				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	14134747,1	13699472,9	13699472,9	5224684,09	-3,57605E-12
σ_2 [Pa]	-5156286,1	-4652496,6	-4652496,6	5156286,13	3,57605E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,830302857				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	16843573,3	16253741,7	16253741,7	5397891,02	-3,34587E-12
σ_2 [Pa]	-4872386,1	-4370207,7	-4370207,7	4872386,13	3,34587E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,846464286				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	20048606,2	19263525,2	19263525,2	5685548,44	-3,09223E-12
σ_2 [Pa]	-4568673,6	-4069228,5	-4069228,5	4568673,59	3,09223E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,862625714				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	23917358	22879819,5	22879819,5	6141728,6	-2,8102E-12
σ_2 [Pa]	-4243798,3	-3748389,2	-3748389,2	4243798,33	2,8102E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,878788571				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	28691377,4	27319097,6	27319097,6	6848113,78	-2,48858E-12
σ_2 [Pa]	-3890863,8	-3401985	-3401985	3890863,78	2,48858E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,89495				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	34784915,2	32951698,8	32951698,8	7969542,21	-2,11724E-12
σ_2 [Pa]	-3512189,8	-3031972,4	-3031972,4	3512189,76	2,11724E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,911111429				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	42876246,3	40379940,6	40379940,6	9806437,15	-1,67009E-12
σ_2 [Pa]	-3102032,9	-2633713,2	-2633713,2	3102032,92	1,67009E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0

r [-]	0,927272857				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	54209621,6	50704049,1	50704049,1	13001616,5	-1,0957E-12
σ_2 [Pa]	-2653866,4	-2202336,6	-2202336,6	2653866,45	1,0957E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,943434286				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	71456209,8	66281644,1	66281644,1	19244842	-2,74571E-13
σ_2 [Pa]	-2171031,4	-1740698,1	-1740698,1	2171031,37	2,74571E-13
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,959595714				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	100881811	92698002,7	92698002,7	33835960,6	1,18373E-12
σ_2 [Pa]	-1643551	-1242317,9	-1242317,9	1643551,02	-1,18373E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,975757143				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	162059454	148872055	148872055	84583485,7	5,27587E-12
σ_2 [Pa]	-1086905,6	-716895,16	-716895,16	1086905,56	-5,27587E-12
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0
r [-]	0,991918571				
Vrstva	1		6		Pěna
σ_1 [Pa]	210572754	442047207	442047207	796203119	5,70551E-11
σ_2 [Pa]	-589955,34	-123587,48	-123587,48	589955,343	-5,70551E-11
τ_{12} [Pa]	0	0	0	0	0

Příloha 4 – Výsledky kontrolního výpočtu dle Tsa-Hill

Kontrola skladby vrtule v mezích 0,2R-0,425R

r [-]	**0,20000**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,016	0,013	0,021	0,018	0,005	0,016	0,016	0,028	0,008	0,009	0,014	0,016	5E-38
r [-]	**0,21616**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,009	0,008	0,014	0,012	0,003	0,009	0,009	0,019	0,005	0,006	0,01	0,011	4E-38
r [-]	**0,23232**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,006	0,005	0,009	0,008	0,002	0,005	0,005	0,014	0,003	0,004	0,008	0,009	3E-38
r [-]	**0,24848**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,004	0,003	0,007	0,006	0,001	0,003	0,003	0,011	0,002	0,003	0,006	0,007	3E-38
r [-]	**0,26465**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,003	0,002	0,005	0,005	6E-04	0,002	0,002	0,009	0,002	0,002	0,005	0,006	2E-38
r [-]	**0,28081**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,002	0,002	0,004	0,004	4E-04	0,001	0,001	0,007	0,001	0,001	0,005	0,005	2E-38
r [-]	**0,29697**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,002	0,001	0,003	0,003	3E-04	1E-03	1E-03	0,006	0,001	0,001	0,004	0,005	2E-38
r [-]	**0,31313**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,001	0,001	0,003	0,003	3E-04	8E-04	8E-04	0,005	9E-04	0,001	0,004	0,004	1E-38
r [-]	**0,32929**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna

Bezpečnostní faktor k	9E-04	8E-04	0,001	0,001	0,004	0,013	0,013	0,005	8E-04	9E-04	0,003	0,004	1E-38
r [-]	**0,34545**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	8E-04	7E-04	0,001	0,001	0,004	0,011	0,011	2E-04	0,002	0,002	0,003	0,004	1E-38
r [-]	**0,36162**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	6E-04	6E-04	0,001	1E-03	0,003	0,01	0,01	2E-04	0,002	0,002	0,003	0,003	1E-38
r [-]	**0,37778**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	5E-04	5E-04	1E-03	9E-04	0,003	0,009	0,009	2E-04	0,001	0,002	0,003	0,003	1E-38
r [-]	**0,39394**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	5E-04	4E-04	9E-04	8E-04	0,003	0,009	0,009	2E-04	0,001	0,001	0,003	0,003	1E-38
r [-]	**0,41010**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	4E-04	4E-04	9E-04	8E-04	0,003	0,008	0,008	2E-04	0,001	0,001	0,003	0,003	9E-39
r [-]	**0,425**												
Vrstva	1		2		3		4		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	3E-04	3E-04	9E-04	8E-04	0,002	0,007	0,007	2E-04	0,001	0,001	0,003	0,003	9E-39

Kontrola skladby vrtule v mezích 0,425R -0,67R

r [-]	0,442424286								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,012	0,011	0,001	9E-04	9E-04	0,014	0,002	0,002	6E-38
r [-]	0,458585714								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,012	0,011	0,001	1E-03	1E-03	0,014	0,002	0,002	6E-38
r [-]	0,474747143								

Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,012	0,01	0,001	1E-03	1E-03	0,013	0,002	0,002	8E-38
r [-]	0,490908571								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,011	0,01	0,001	0,001	0,001	0,013	0,002	0,002	7E-38
r [-]	0,50707								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,011	0,01	0,001	0,001	0,001	0,012	0,002	0,002	7E-38
r [-]	0,523232857								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,011	0,01	0,001	0,001	0,001	0,012	0,002	0,002	7E-38
r [-]	0,539394286								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,011	0,009	0,001	0,001	0,001	0,012	0,002	0,002	7E-38
r [-]	0,555555714								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,01	0,009	0,001	0,001	0,001	0,012	0,002	0,002	6E-38
r [-]	0,571717143								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,01	0,009	0,001	0,001	0,001	0,011	0,002	0,002	6E-38
r [-]	0,587878571								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,01	0,009	0,002	0,001	0,001	0,011	0,002	0,002	6E-38
r [-]	0,60404								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,01	0,009	0,002	0,001	0,001	0,011	0,002	0,002	6E-38
r [-]	0,620201429								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní	0,009	0,008	0,002	0,002	0,002	0,01	0,001	0,002	6E-38

faktor k									
r [-]	0,636364286								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,009	0,008	0,002	0,002	0,002	0,01	0,001	0,002	6E-38
r [-]	0,652525714								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,009	0,008	0,002	0,002	0,002	0,01	0,001	0,002	6E-38
r [-]	0,67								
Vrstva	1		2		5		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,009	0,008	0,002	0,002	0,002	0,01	0,001	0,002	5E-38

Kontrola skladby vrtule v mezích 0,67R –0,99R

r [-]	0,684848571				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000738	0,000638	0,000638	0,000725	2,82E-40
r [-]	0,70101				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000714	0,000615	0,000615	0,000695	2,66E-40
r [-]	0,717171429				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000689	0,000591	0,000591	0,000663	2,5E-40
r [-]	0,733332857				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000664	0,000566	0,000566	0,000628	3,38E-40
r [-]	0,749494286				
Vrstva	1		6		Pěna

Bezpečnostní faktor k	0,000639	0,000543	0,000543	0,000591	3,17E-40
r [-]	0,765657143				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000615	0,00052	0,00052	0,000552	2,94E-40
r [-]	0,781818571				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000594	0,000501	0,000501	0,000511	2,7E-40
r [-]	0,79798				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000576	0,000484	0,000484	0,000469	2,45E-40
r [-]	0,814141429				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000565	0,000474	0,000474	0,000426	2,19E-40
r [-]	0,830302857				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000563	0,000472	0,000472	0,000381	1,92E-40
r [-]	0,846464286				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000576	0,000484	0,000484	0,000337	1,64E-40
r [-]	0,862625714				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000613	0,000517	0,000517	0,000293	1,35E-40
r [-]	0,878788571				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,000686	0,000581	0,000581	0,000251	1,06E-40
r [-]	0,89495				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,00082	0,000699	0,000699	0,000213	7,68E-41
r [-]	0,911111429				

Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,001063	0,00091	0,00091	0,000183	4,78E-41
r [-]	0,927272857				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,001519	0,001298	0,001298	0,000172	2,06E-41
r [-]	0,943434286				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,002452	0,002081	0,002081	0,000221	1,29E-42
r [-]	0,959595714				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,004682	0,003924	0,003924	0,000527	2,4E-41
r [-]	0,975757143				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,011814	0,009933	0,009933	0,003158	4,77E-40
r [-]	0,991918571				
Vrstva	1		6		Pěna
Bezpečnostní faktor k	0,019799	0,086885	0,086885	0,281548	5,58E-38

Seznam souborů

1. Soubor MATLAB skriptů pro návrh a analýzu
2. Excel tabulka - Body definující tvar lopatek
3. 3D model listu