



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní
Ústav letadlové techniky

Diplomová práce

Analýza motorového flutteru Whirl flutter

Whirl flutter analysis

Jan Mravinac

Studijní program: Letectví a kosmonautika
Studijní obor: Letadlová a kosmická technika

Vedoucí práce: Ing. Aleš Kratochvíl, Ph.D.

2019

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Mravinac** Jméno: **Jan** Osobní číslo: **396716**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav letadlové techniky**
Studijní program: **Letectví a kosmonautika**
Studijní obor: **Letadlová a kosmická technika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Analýza motorového flutteru Whirl flutter

Název diplomové práce anglicky:

Whirl flutter analysis

Pokyny pro vypracování:

Vytvořit výpočtový model turbopropového motoru včetně motorového lože. Pro výpočet nestacionárního aerodynamického zatížení použít model uvažující gyroskopické efekty vrtule. Stanovit rychlost motorového flutteru.

Seznam doporučené literatury:

Whirl Flutter of Turboprop Aircraft Structure J.Čečrdle

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Aleš Kratochvíl, Ph.D., ústav letadlové techniky FS


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:


Datum zadání diplomové práce: **15.10.2018**

Termín odevzdání diplomové práce: **31.07.2019**

Platnost zadání diplomové práce:


Ing. Aleš Kratochvíl, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


Ing. Robert Theiner, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

25.10.2018

Datum převzetí zadání


Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora / Author: Jan Mravinac

Název práce / Thesis name: Analýza motorového flutteru Whirl flutter / Whirl flutter analysis

Rok / Year: 2019

Obor studia / Field of study: Letadlová a kosmická technika / Aerospace Technology

Ústav / Department: Ústav letadlové techniky / Department of Aerospace Engineering

Vedoucí práce / Thesis head: Ing. Aleš Kratochvíl, Ph.D.

Bibliografické údaje / počet stran / no. of pages: 152

Bibliographic data: počet obrázků / no. of pictures: 38

počet grafů / no. of graphs: 30

počet tabulek / no. of tables: 8

počet příloh / no. of attachments: 8

Klíčová slova: *whirl flutter*, stabilita, MATLAB, *flutterová* analýza, nestacionární aerodynamické síly, turbovrtulový motor, dva stupně volnosti, idealizovaný model, stabilitní mez, tuhé křídlo, rychlost *flutteru*

Keywords: whirl flutter, stability, MATLAB, flutter analysis, non-stationary aerodynamic forces, turboprop engine, two degrees of freedom, idealized model, stability boundary, rigid wing, flutter velocity

Anotace:

Práce se zabývá *flutterovou* analýzou turbovrtulové pohonné jednotky, tedy analýzou dynamického aeroelastického jevu zvaného *whirl flutter*, kterým může být za letu postižena. Nalezení meze stability precesního pohybu, který při tomto jevu jednotka koná, a jí odpovídající kritické rychlosti *flutteru* je provedeno na zjednodušeném výpočtovém modelu uvažujícím absolutně tuhé křídlo. Veškeré potřebné výpočty jsou provedeny v programovém prostředí MATLAB.

Abstract:

The thesis deals with the flutter analysis of the turboprop powerplant, i.e. analysis of dynamic aeroelastic phenomenon called whirl flutter which may affect it during flight. Finding the limit of the stability of the precession movement that the unit takes in this phenomenon and its corresponding critical flutter velocity is done on a simplified computational model considering an absolutely rigid wing. All the necessary calculations are performed in MATLAB.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Analýza motorového flutteru Whirl flutter vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu na konci práce.

V Praze dne 31. 7. 2019

.....

Jan Mravinac

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu Ing. Aleši Kratochvílovi, Ph.D., za cenné připomínky a rady, které mi poskytl při psaní této diplomové práce. Stejně tak bych rád poděkoval svým rodičům za veškerou podporu při studiu.

Obsah

SEZNAM OBRÁZKŮ	1
SEZNAM GRAFŮ	2
SEZNAM TABULEK	2
SEZNAM PŘÍLOH.....	3
SEZNAM POUŽITÝCH PROGRAMŮ	4
SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK	4
SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ	5
1 ÚVOD.....	11
2 ŠIRŠÍ KONTEXT PROBLEMATIKY	13
2.1 VYMEZENÍ AEROELASTICITY	13
2.2 AEROELASTICITA JAKO LETECKÝ OBOR	15
2.3 ZÁKLADNÍ AEROELASTICKÉ JEVY A JEJICH PRINCIP.....	18
2.3.1 Definice a rozdělení	18
2.3.2 Statické aeroelastické jevy	20
2.3.2.1 Torzní divergence.....	20
2.3.2.2 Reverze řízení.....	21
2.3.2.3 Statická stabilita netuhého letounu.....	23
2.3.3 Dynamické aeroelastické jevy	23
2.3.3.1 Flutter	25
3 TEORETICKÝ ROZBOR WHIRL FLUTTERU	32
3.1 SOUHRN LITERATURY	32
3.2 FYZIKÁLNÍ PRINCIP	34
3.2.1 Model systému	34
3.2.2 Gyroskopické silové účinky.....	35
3.2.3 Aerodynamické silové účinky	37
3.2.3.1 Stabilita	37
3.2.3.2 Aerodynamické síly a momenty vznikající na vrtuli při vychýlení z osy.....	39

3.2.4	Mechanismus whirl flutteru	44
3.2.4.1	Princip vzniku dynamické divergence	46
3.2.4.2	Princip snižování kritické rychlosti	47
3.2.4.3	Princip vzniku statické divergence	48
3.2.4.4	Shrnutí získaných poznatků	49
3.3	MATEMATICKÁ FORMULACE PROBLÉMU	50
3.3.1	Pohybové rovnice vnitřně netlumené soustavy	50
3.3.2	Modely vnitřního tlumení a jejich implementace do pohybových rovnic	53
3.3.2.1	Viskózní model	53
3.3.2.2	Amplitudový model (materiálový útlum)	54
3.3.3	Aerodynamické síly	56
3.3.4	Analytický výpočet aerodynamických koeficientů	60
3.3.4.1	Stanovení posuvů a perturbačních rychlostí	60
3.3.4.2	Vyjádření přírůstku vztlaku na elementu vrtulového listu	61
3.3.4.3	Odvození aerodynamických sil a momentů	64
3.3.5	Zahrnutí vlivu zpoždění vztlaku do výpočtu aerodynamických koeficientů	69
3.3.6	Doplňující korekce listových integrálů	74
3.3.6.1	Korekce na vliv stlačitelnosti vzduchu	74
3.3.6.2	Korekce na reálné vrtulové parametry	75
3.3.6.3	Výsledná formulace listových integrálů po zahrnutí všech korekcí	76
3.3.7	Sestavení kompletního výpočetního modelu	77
3.3.8	Řešení stability	79
3.3.8.1	Definice matice flutteru	80
3.3.8.2	Interpretace vlastních čísel	82
3.4	VYBRANÉ POZNATKY Z LITERATURY	83
3.4.1.1	Zdůvodnění vzniku nestability pouze ve zpětném módu	83
3.4.1.2	Srovnání analyticky získaných koeficientů s experimentem	84
3.4.1.3	Doporučené hodnoty koeficientů tlumení	86
4	APLIKACE VÝPOČTOVÉHO MODELU NA KONKRÉTNÍ SYSTÉM	87
4.1	ZADÁNÍ	87
4.1.1	Zadání parametrů pro flutterovou analýzu	89
4.2	VÝPOČETNÍ PROGRAMY PRO FLUTTEROVOU ANALÝZU	92
4.2.1	Program WhirlFlutter1.m	92

4.2.2	Program WhirlFlutter2.m	97
4.2.3	Program PomocnyProgram.m	99
4.3	FLUTTEROVÁ ANALÝZA ZADANÉHO SYSTÉMU	99
4.3.1	Výchozí konfigurace programů.....	99
4.3.2	Stanovení rychlosti flutteru	100
4.3.3	Citlivostní analýza	105
5	DISKUSE ZÍSKANÝCH VÝSLEDKŮ	112
5.1	PLATNOST VÝSLEDKŮ	112
5.2	PROBLÉM S EFEKTIVNÍMI ÚHLY.....	116
6	ZÁVĚR.....	119
	POUŽITÁ LITERATURA A ZDROJE OBRÁZKŮ	120
	PŘÍLOHY	122
	PŘÍLOHA 1: ODVOZENÍ AERODYNAMICKÝCH MATIC.....	122
	PŘÍLOHA 2: PROGRAM WHIRLFLUTTER1.M	126
	PŘÍLOHA 3: PROGRAM WHIRLFLUTTER2.M	137
	PŘÍLOHA 4: PROGRAM POMOCNYPROGRAM.M	146

Seznam obrázků

Obr. 1: Pád mostu Tacoma Narrows Bridge [4].....	14
Obr. 2: Havárie uhelné elektrárny Ferrybridge [5].....	14
Obr. 3: Langelyho havárie (vlevo) a Flyer bratří Wrightů (vpravo) [6].....	16
Obr. 4: Collarův silový trojúhelník [2].....	18
Obr. 5: Přehled základních aeroelastických jevů [2].....	19
Obr. 6: Zpětnovazební princip aeroelastických jevů [2].....	19
Obr. 7: Princip torzní divergence [7].....	21
Obr. 8: Princip reverze řízení [7].....	22
Obr. 9: Schéma působení klonivých momentů na tuhém a poddajném křídle [2].....	22
Obr. 10: Časový průběh deformace v závislosti na celkovém tlumení [2].....	24
Obr. 11: Přehled sil působících při dynamických aeroelastických jevech [2].....	24
Obr. 12: Energetická bilance kmitající konstrukce a role tlumení [2].....	26
Obr. 13: Nestacionární aerodynamické zatížení [2].....	27
Obr. 14: Harmonický pohyb profilu s jedním stupněm volnosti [7].....	28
Obr. 15: Harmonický pohyb profilu se dvěma stupni volnosti [7].....	29
Obr. 16: Harmonický pohyb profilu s účastí křídélka [7].....	30
Obr. 17: Symetrický a antisymetrický tvar kmitu [2].....	31
Obr. 18: Nosníkový (konzolový) a závěsný typ modelu systému [12].....	34
Obr. 19: Schéma závěsného modelu systému [8].....	35
Obr. 20: Izolované vlastní tvary kmitu, (a) – klopný mód, (b) – otáčivý mód [7].....	36
Obr. 21: Vlastní precesní frekvence módů sdružených gyroskopickými efekty vrtule [10].....	36
Obr. 22: Sdružené módy, (a) zpětný mód, (b) dopředný mód [7].....	37
Obr. 23: Stabilní (a) a nestabilní (b) stav precesního vibračního pohybu [7].....	38
Obr. 24: Aerodynamické síly vznikající v důsledku naklopení (úhel θ) [7].....	40
Obr. 25: Aerodynamické síly vznikající důsledkem rychlosti \dot{z} (na (b) opravena osa) [7].....	42
Obr. 26: Aerodynamické síly vznikající v důsledku úhlové rychlosti $\dot{\theta}$ [7].....	43
Obr. 27: Schéma jednoho cyklu precesního pohybu systému pohonné jednotky [16].....	44
Obr. 28: Momenty vznikající v důsledku veličin $\theta, \dot{\theta}$ a $\ddot{\theta}$ [16].....	45
Obr. 29: Momenty vznikající v důsledku veličin $\Psi, \dot{\Psi}$ a $\ddot{\Psi}$ [16].....	45
Obr. 30: Tabulka extrémních hodnot všech veličin v každém bodě cyklu z (Obr. 27) [16].....	49
Obr. 31: Schéma výpočetního modelu systému [7].....	50
Obr. 32: Kinematické schéma systému pohonné jednotky (opraven moment) [7].....	51
Obr. 33: Obecná poloha vrtulového disku (doplňněn směr rychlosti $\Omega r + \dot{s}$) [7].....	60
Obr. 34: Úhly a rychlosti na elementu vrtulového listu (doplňněn úhel γ) [7].....	61
Obr. 35: Rozklad vztlačku na elementu vrtulového listu (upraveno) [7].....	64
Obr. 36: Řez turbovrtulového motoru M 601 E [20].....	87
Obr. 37: Geometrie vrtulového listu (přejato z [20] a upraveno).....	93
Obr. 38: Pozměněná definice efektivních úhlů [14].....	116

Seznam grafů

Graf 1: Křivky koeficientů tlumení potřebných pro setrvání na mezi stability [7] [8].....	83
Graf 2: Srovnání analyticky získaných koeficientů s experimentem [12].....	84
Graf 3: Vliv zpoždění vztaku na mez stability systému (náčrt) [10].....	85
Graf 4: Srovnání modelů vnitřního tlumení [7]	85
Graf 5: Stabilitní mez pro různé hodnoty koeficientu tlumení vs. experiment [7]	86
Graf 6: Geometrické parametry vrtule V510 [20]	90
Graf 7: Stoupání vztakové čáry profilu vrtulí AV-844 a AV-725 [7]	91
Graf 8: Průběhy hodnot listových integrálů	95
Graf 9: Průběhy hodnot koeficientů aerodynamických momentů	96
Graf 10: Průběhy hodnot koeficientů aerodynamických sil.....	96
Graf 11: V- σ -f diagram pro vnitřně netlumenou soustavu	100
Graf 12: V- σ -f diagram pro amplitudový model vnitřního tlumení	100
Graf 13: V- σ -f diagram pro viskózní model vnitřního tlumení.....	101
Graf 14: V- ξ -f diagram pro viskózní model vnitřního tlumení (let při hladině moře).....	101
Graf 15: V- ξ -f diagram pro letovou výšku 2 000 m MSA.....	102
Graf 16: V- ξ -f diagram pro letovou výšku 4 000 m MSA.....	102
Graf 17: V- ξ -f diagram pro letovou výšku 6 000 m MSA.....	103
Graf 18: V- ξ -f diagram pro letovou výšku 8 000 m MSA.....	103
Graf 19: Stabilitní meze pro různé případy symetrického tlumení.....	107
Graf 20: Stabilitní meze pro různé případy nesymetrického tlumení.....	107
Graf 21: Stabilitní meze v závislosti na symetrických změnách momentů setrvačnosti.....	108
Graf 22: Stabilitní meze v závislosti na nesymetrických změnách momentů setrvačnosti....	108
Graf 23: Stabilitní meze pro variaci polárního momentu setrvačnosti vrtule.....	109
Graf 24: Stabilitní meze pro variaci délky vyložení.....	109
Graf 25: Stabilitní meze pro různé rychlosti letu při hladině moře.....	110
Graf 26: Stabilitní meze pro různé otáčky vrtule.....	110
Graf 27: Stabilitní meze pro let konstantní dovolenou rychlostí (EAS) v různých výškách....	111
Graf 28: Stabilitní meze pro různé stoupání vztakové čáry listu vrtule	111
Graf 29: Stabilitní mez pro systém s uvažováním poddajného křídla [7].....	113
Graf 30: Stabilitní mez získaná pomocí výpočtu v MSC/Nastranu [7].....	114

Seznam tabulek

Tabulka 1: Základní parametry motoru M 601 E [20]	88
Tabulka 2: Vybrané základní technické parametry vrtule V 510 [20]	88
Tabulka 3: Zadané parametry systému pro flutterovou analýzu	89
Tabulka 4: Odečtené a přepočítané geometrické parametry vrtule V510	89
Tabulka 5 Odečtené stoupání vztakové čáry vrtule AV-725.....	91
Tabulka 6: Výchozí konfigurace programů pro flutterovou analýzu.....	99
Tabulka 7: Výsledné kritické rychlosti flutteru	104
Tabulka 8: Posouzení vlivu definice efektivních úhlů na stabilitu systému	118

Seznam příloh

Příloha 1:	Odvození aerodynamických matic	rozepsané odvození matic aerodynamické tuhosti a aerodynamického tlumení
Příloha 2:	<i>WhirlFlutter1.m</i>	hlavní program sloužící k určení kritické rychlosti <i>flutteru</i>
Příloha 3:	<i>WhirlFlutter2.m</i>	program k výpočtu stabilitních mezí pro citlivostní analýzu
Příloha 4:	<i>PomocnyProgram.m</i>	sekundární program pro <i>WhirlFlutter2.m</i> , vykreslující grafy
Příloha 5:	<i>PomocnySoubor.mat</i>	soubor s daty získanými pomocí programu <i>WhirlFlutter2.m</i> , z nichž byly pomocí programu <i>PomocnyProgram.m</i> vytvořeny grafy stabilitních mezí prezentované v této práci. K dispozici pouze v elektronické příloze
Příloha 6:	<i>WhirlFlutterStac.m</i>	v jádru stejný program jako <i>WhirlFlutter1.m</i> , ovšem upravený tak, aby pro výpočet využíval pouze stacionární aerodynamické síly. K dispozici pouze v elektronické příloze
Příloha 7:	Prepocet.pdf	odvození aerodynamických matic pro změněnou definici efektivních úhlů, viz podkapitola (5.2). K dispozici pouze v elektronické příloze
Příloha 8:	<i>WhirlFlutterPrepocet.m</i>	v jádru stejný program jako <i>WhirlFlutter1.m</i> , ovšem upravený tak, aby pro výpočet využíval aerodynamické matice přepočítané s ohledem na jinou definici efektivních úhlů, viz podkapitola (5.2). K dispozici pouze v elektronické příloze

Seznam použitých programů

MATLAB	společnosti MathWorks
Word	společnosti Microsoft

Seznam použitých zkratk

aero.	aerodynamic
ampl.	amplitudové
AC	aerodynamic centre
AEJ	aeroelastické jevy
DOF	degree of freedom
EA	elastic axis
EAS	Equivalent Airspeed
EC	elastic centre
E. C.	elastické centrum
E. O.	elastická osa
ekv.	ekvivalentní
max.	maximum, maximální
MATLAB	matrix laboratory (název programu)
MKP	metoda konečných prvků
MSC	The MacNeal-Schwendler Corporation
no.	number
obr.	obrázek
př.	příklad
pt.	point
TAS	True Airspeed
Theodorsen.	Theodorsenovou
tzv.	takzvaný
vl.	vlastní
VTOL	Vertical Take-off and Landing

Seznam použitého značení

$\mathbf{0}$	[-]	nulová matice
α	[rad]	úhel náběhu
α_0	[rad]	úhel náběhu elementu listu v ustáleném stavu
α_1	[rad]	změna úhlu náběhu listu č. 1 vlivem výchylek Θ a Ψ
α_{ef}	[rad]	efektivní úhel náběhu elementu listu
α_T	[rad]	úhel náběhu profilu křídla před deformací
β	[rad]	úhel nastavení
β	[rad]	výchylka křídélka
β_0	[rad]	amplituda výchylky křídélka
β_p	[1]	Prandtlův-Glauertův korekční faktor
γ	[rad]	náběhový úhel proudu
γ	[1]	koeficient konstrukčního tlumení/ztrátový úhel
$\boldsymbol{\gamma}$	[-]	vektor koeficientů konstrukčního tlumení
γ_Θ	[1]	koeficient konstrukčního tlumení pohybu ve vertikální rovině
γ_Ψ	[1]	koeficient konstrukčního tlumení pohybu v horizontální rovině
$\gamma_{\Theta FL}$	[1]	koeficient konstr. tlumení potřebný k setrvání na mezi stability
$\gamma_{\Theta 1 FL}$	[1]	$\gamma_{\Theta FL}$ pro dopředný mód
$\gamma_{\Theta 2 FL}$	[1]	$\gamma_{\Theta FL}$ pro zpětný mód
δ	[rad]	výchylka křídélka
$\delta\Theta$	[rad]	virtuální posuv (naklopení)
$\delta\Psi$	[rad]	virtuální posuv (natočení)
δW	[N.m]	virtuální práce
$\Delta\alpha$	[rad]	lokální změna úhlu náběhu
$\Delta\alpha_{(\dot{w}, \dot{s})}$	[rad]	lokální změna úhlu náběhu vlivem perturbačních rychlostí
ΔE	[J]	změna energie systému
ΔH	[N]	horizontální (momentová) složka změny vztlaku
ΔL_y	[N]	součet horizontálních složek vztlaku elementu všech listů
ΔL_y^*	[N]	součet horizontálních složek vztlaku elementu všech listů modifikovaného pomocí Theodorsenovy funkce
ΔL_z	[N]	součet vertikálních složek vztlaku elementu všech listů
ΔL_z^*	[N]	součet vertikálních složek vztlaku elementu všech listů modifikovaného pomocí Theodorsenovy funkce
ΔM_y	[N.m]	součet momentů elementu všech listů kolem horizontální osy
ΔM_y^*	[N.m]	součet momentů elementu všech listů kolem horizontální osy modifikovaných pomocí Theodorsenovy funkce
ΔM_z	[N.m]	součet momentů elementu všech listů kolem vertikální osy
ΔM_z^*	[N.m]	součet momentů elementu všech listů kolem vertikální osy modifikovaných pomocí Theodorsenovy funkce

ΔM_{xkor}	[N.m]	klonivý moment od přírůstku vztlaku ΔY_δ
$\Delta M_{xkř}$	[N.m]	klonivý moment od přírůstku vztlaku ΔY_φ
ΔT	[N]	tangenciální (tahová) složka změny vztlaku
ΔY_δ	[N]	přírůstek vztlaku v důsledku výchylky křídélka
ΔY_φ	[N]	přírůstek vztlaku v důsledku torzní deformace
η	[1]	bezrozměrný poloměr vrtule
η_0	[1]	bezrozměrný poloměr místa, kde list začíná generovat vztlak
Θ	[rad]	úhlový posuv systému okolo horizontální osy (naklopení)
$\bar{\Theta}$	[rad]	efektivní úhel naklopení
λ	[1]	vlastní číslo matice
μ	[1]	rychlostní poměr vrtule (J_0/π)
ξ	[1]	poměrný útlum
ξ_Θ	[1]	poměrný útlum vertikálního (klopného) módu
ξ_Ψ	[1]	poměrný útlum horizontálního (otáčivého) módu
π	[1]	Ludolfovo číslo
ρ	[kg.m ⁻³]	hustota vzduchu
ρ_0	[kg.m ⁻³]	hustota vzduchu při hladině moře MSA
σ	[1]	reálná část vlastního čísla
φ	[rad]	úhel natočení profilu (torzní deformace)
φ_0	[rad]	amplituda natočení profilu (torzní deformace)
ψ	[rad]	úhel fázového posunutí zatížení vůči pohybu
Ψ	[rad]	úhlový posuv systému okolo vertikální osy (natočení)
$\bar{\Psi}$	[rad]	efektivní úhel natočení
ω	[rad.s ⁻¹]	úhlová frekvence obecně
ω	[rad.s ⁻¹]	úhlová frekvence precesního pohybu systému
ω_Θ	[rad.s ⁻¹]	vlastní úhlová frekvence vertikálního (klopného) módu
ω_Ψ	[rad.s ⁻¹]	vlastní úhlová frekvence horizontálního (otáčivého) módu
ω_d	[rad.s ⁻¹]	tlumená sdružená úhlová frekvence
ω_n	[rad.s ⁻¹]	netlumená sdružená úhlová frekvence
ω_x	[rad.s ⁻¹]	úhlová frekvence pohybu kolem vychýlené osy x
ω_y	[rad.s ⁻¹]	úhlová frekvence pohybu kolem vychýlené osy y
ω_z	[rad.s ⁻¹]	úhlová frekvence pohybu kolem vychýlené osy z
Ω	[rad.s ⁻¹]	úhlová rychlost vrtule
a	[m]	délka vyložení (vzdálenost roviny vrtule od bodu uložení)
A_{1-3}	[-]	základní formulace listových integrálů
a_M	[rad ⁻¹]	maximální hodnota stoupání transsonické vztlakové čáry
A_r	[1]	štíhlost vrtulových listů
a_z	[m.s ⁻¹]	rychlost zvuku
Bj_0	[-]	Besselova funkce prvního druhu nultého řádu
Bj_1	[-]	Besselova funkce prvního druhu prvního řádu
By_0	[-]	Besselova funkce druhého druhu nultého řádu

By_1	[-]	Besselova funkce druhého druhu prvního řádu
c	[m]	polovina tětivy profilu (charakteristický rozměr)
$C(k)$	[-]	Theodorsenova funkce
c_0	[m]	tětiva profilu elementu
c_m	[1]	aerodynamický koeficient klopného momentu vrtule
c_n	[1]	aerodynamický koeficient natáčivého momentu vrtule
c_r	[m]	referenční tětiva profilu
c_y	[1]	aerodynamický koeficient horizontální síly vrtule
c_y^α	[rad ⁻¹]	stoupání vztlakové čáry
c_{yef}^α	[rad ⁻¹]	efektivní hodnota stoupání vztlakové čáry
c_{ymax}^α	[rad ⁻¹]	maximální hodnota stoupání nestlačitelné vztlakové čáry
c_z	[1]	aerodynamický koeficient vertikální síly vrtule
$c_{m\theta}$	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (klopný moment/naklopení)
$c_{m\psi}$	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (klopný moment/natočení)
c_{mq}	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (klopný moment/naklápění)
c_{mr}	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (klopný moment/natáčení)
$c_{n\theta}$	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (natáčivý moment/naklopení)
$c_{n\psi}$	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (natáčivý moment/natočení)
c_{nq}	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (natáčivý moment/naklápění)
c_{nr}	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (natáčivý moment/natáčení)
$c_{y\theta}$	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (horizontální síla/naklopení)
$c_{y\psi}$	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (horizontální síla/natočení)
c_{yq}	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (horizontální síla/naklápění)
c_{yr}	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (horizontální síla/natáčení)
$c_{z\theta}$	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (vertikální síla/naklopení)
$c_{z\psi}$	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (vertikální síla/natočení)
c_{zq}	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (vertikální síla /naklápění)
c_{zr}	[1]	aerodynamický koeficient-derivát (vertikální síla/natáčení)
D	[-]	disipační funkce
\mathbf{D}	[-]	matice viskózního tlumení
$\tilde{\mathbf{D}}$	[-]	celková matice tlumení
\mathbf{D}^A	[-]	matice aerodynamického tlumení
\mathbf{D}^{A*}	[-]	$-\mathbf{D}^A$, tedy před převedením na levou stranu pohybových rovnic
d_θ	[1]	koeficient viskózního tlumení pohybu ve vertikální rovině
d_ψ	[1]	koeficient viskózního tlumení pohybu v horizontální rovině
D_p	[m]	průměr vrtule
e	[1]	Eulerovo číslo
E	[J]	energie
E_β	[J]	energie od výchylky křídélka
E_φ	[J]	energie od torze křídla (profilu)
E_h	[J]	energie od ohybu křídla (profilu)

E_k	[J]	kinetická energie
E_p	[J]	potenciální energie
$F; F(k)$	[-]	reálná složka Theodorsenovy funkce
F_1	[-]	reálná složka Theodorsenovy funkce pro první výraz
F_2	[-]	reálná složka Theodorsenovy funkce pro druhý výraz
f_1	[-]	substituční funkce 1
f_2	[-]	substituční funkce 2
f_{10}	[-]	amplituda substituční funkce 1
f_{20}	[-]	amplituda substituční funkce 2
F_p	[m ²]	plocha vrtulového disku
g	[1]	celkové tlumení dostupné v soustavě
\mathbf{G}	[-]	gyroskopická matice
$G; G(k)$	[-]	imaginární složka Theodorsenovy funkce
G_1	[-]	imaginární složka Theodorsenovy funkce pro první výraz
G_2	[-]	imaginární složka Theodorsenovy funkce pro druhý výraz
g_A	[1]	aerodynamické tlumení
g_K	[1]	konstrukční tlumení
h	[m]	průhyb křídla
H	[m]	výška letu
h_0	[m]	amplituda průhybu křídla
i	[1]	komplexní jednotka
\mathbf{I}	[-]	jednotková matice
I_{1-3}	[-]	modifikovaná formulace listových integrálů (ve fázi)
j	[1]	komplexní jednotka
\mathbf{J}	[-]	matice <i>flutteru</i>
J_0	[1]	rychlostní poměr vrtule ($\mu \cdot \pi$)
J_{1-3}	[-]	modifikovaná formulace listových integrálů (mimo fázi)
J_X	[kg.m ²]	moment setrvačnosti k ose X
J_Y	[kg.m ²]	moment setrvačnosti k ose Y
J_Z	[kg.m ²]	moment setrvačnosti k ose Z
k	[1]	redukovaná frekvence
\mathbf{K}	[-]	matice tuhosti
$\tilde{\mathbf{K}}$	[-]	celková matice tuhosti
\mathbf{K}^A	[-]	matice aerodynamické tuhosti
\mathbf{K}^{A*}	[-]	$-\mathbf{K}^A$, tedy před převedením na levou stranu pohybových rovnic
k_1	[1]	redukovaná frekvence pro první výraz
k_2	[1]	redukovaná frekvence pro druhý výraz
K_Θ	[Nm.rad ⁻¹]	tuhost torzní pružiny ve směru naklápění
K_φ	[Nm.rad ⁻¹]	torzní tuhost křídla
K_Ψ	[Nm.rad ⁻¹]	tuhost torzní pružiny ve směru natáčení
k_p	[1]	redukovaná frekvence vyjádřená bezrozměrnými parametry

L_1	[N]	vztlak elementu listu číslo 1
L_2	[N]	vztlak elementu listu číslo 2
L_3	[N]	vztlak elementu listu číslo 3
L_4	[N]	vztlak elementu listu číslo 4
L_1^*	[N]	vztlak elementu listu číslo 1 modifikovaný Theodorsen. funkcí
L_3^*	[N]	vztlak elementu listu číslo 3 modifikovaný Theodorsen. funkcí
\mathbf{M}	[-]	matice hmotnosti
M_k	[N.m]	kroučící moment
M_r	[1]	lokální Machovo číslo pro řez listu na poloměru r
M_x	[N.m]	klonivý moment
M_y	[N.m]	celkový aerodynamický moment kolem osy Y
M_z	[N.m]	celkový aerodynamický moment kolem osy Z
$M_{Y,P}$	[N.m]	celkový aerodynamický moment kolem osy Y v rovině vrtule
$M_{Z,P}$	[N.m]	celkový aerodynamický moment kolem osy Z v rovině vrtule
M_∞	[1]	Machovo číslo letu
M_{z0}	[N.m]	aerodynamický moment profilu při nulovém vztlaku
n	[min ⁻¹]	otáčky vrtule
N_b	[1]	počet listů vrtule
P	[N]	vnitřní elastická síla v pružině
P_0	[N]	amplituda elastické síly v pružině
P^D	[N]	tlumicí síla v pružině
P^E	[N]	vratná elastická síla v pružině
P_Y	[N]	celková vertikální aerodynamická síla
P_Z	[N]	celková horizontální aerodynamická síla
\mathbf{q}	[-]	vektor zobecněných souřadnic
Q_Θ	[N.m]	zobecněný moment okolo horizontální osy
Q_Ψ	[N.m]	zobecněný moment okolo vertikální osy
q_i	[-]	i -tá zobecněná souřadnice
q_∞	[Pa]	dynamický tlak
Q_i^D	[N]	i -tá zobecněná tlumicí síla
Q_i^E	[N]	i -tá zobecněná elastická síla
Q_{q_i}	[N]	zobecněná síla pro děj v i -té zobecněné souřadnici
r	[m]	proměnný poloměr vrtule
R	[m]	poloměr vrtule
r_0	[m]	poloměr prvního řezu vrtulového listu, jenž generuje vztlak
s	[m]	vektor pohybu
\dot{s}	[m.s ⁻¹]	perturbační rychlost v rovině vrtulového disku
t	[s]	čas
T	[°C]	teplota
U	[m.s ⁻¹]	výsledná rychlost proudu nabíhajícího na element listu
U_{ef}	[m.s ⁻¹]	výsledná efektivní rychlost proudu nabíhajícího na element listu

v_d	[m.s ⁻¹]	dovolená rychlost letu
v_{DIV}	[m.s ⁻¹]	kritická rychlost statické torzní divergence
v_F, v_{FL}	[m.s ⁻¹]	kritická rychlost <i>flutteru</i>
v_{REV}	[m.s ⁻¹]	kritická rychlost reverzace řízení
v_y	[m.s ⁻¹]	vertikální rychlost (poryvu)
v_∞	[m.s ⁻¹]	rychlost letu (na některých přejatých obrázcích značena V)
w	[m]	deformace pružiny
\dot{w}	[m.s ⁻¹]	perturbační rychlost kolmá na rovinu vrtulového disku
w_0	[m]	amplituda deformace pružiny
x	[-]	osa souřadného systému pevně umístěného v prostoru
X	[-]	vychýlená osa x provázaná s pohonnou jednotkou
\tilde{x}	[-]	částečně vychýlená osa x provázaná s pohonnou jednotkou
y	[-]	osa souřadného systému pevně umístěného v prostoru
Y	[N]	vztlková síla
Y	[-]	vychýlená osa y provázaná s pohonnou jednotkou
y_1	[m]	horizontální posuv vrtulového náboje
z	[-]	osa souřadného systému pevně umístěného v prostoru
Z	[-]	vychýlená osa z provázaná s pohonnou jednotkou
z_1	[m]	vertikální posuv vrtulového náboje
z_{kor}	[m]	rameno klonivého momentu od přírůstku síly kormidla
$z_{kř}$	[m]	rameno klonivého momentu od přírůstku síly křídla
$^\circ V$	[-]	stupeň volnosti
\cdot	[-]	tečka nad symbolem znamená jeho časovou derivaci
$\ddot{\cdot}$	[-]	dvě tečky značí druhou časovou derivaci

Symbole z Tabulky 1 a Tabulky 2 nejsou v tomto seznamu uvedené. Je tomu tak z důvodu, že jsou vysvětleny přímo v tabulkách, a navíc mají pouze přehledový charakter, tedy nejsou v žádné jiné části práce použity.

1 Úvod

Whirl flutter neboli česky *vířivé třepetání* je dynamický jev z oboru (zejména) letecké aeroelasticity, kterým mohou být postiženy všechny létající stroje, součástí jejichž konstrukce je rotující vztlaková plocha. Primárně jde tedy o letouny vyvozující tah pomocí turbovrtulových proudových motorů, letouny typu VTOL s překlopnými rotory a vrtulníky. Obecně se *whirl flutter* projevuje krouživým rozkmitáním pohonné jednotky, které může mít ve specifickém případě divergentní charakter, a způsobit tak destrukci konstrukce. Hlavním úkolem výpočtové analýzy tohoto jevu je zjištění, za jakých podmínek zmíněný specifický případ nastává, tedy nalezení meze stability. Vzhledem ke značně odlišným charakteristikám pohonných jednotek všech zmíněných typů letadel se také používá pro každý typ jiný výpočtový model *whirl flutteru*.

V rámci této práce bude řešena pouze problematika spojená konkrétně s *whirl flutterem* turbovrtulových motorů. Takto zaměřený problém má dvě úrovně. První úroveň je řešení stability precesního pohybu systému pohonné jednotky, tedy motoru s vrtulí včetně gondoly, izolovaně od deformačního pohybu konstrukce draku. Toho se docílí předpokladem pružného uložení gondoly na absolutně tuhém křídle. Druhou úrovní je pak zařazení dvou stupňů volnosti pohybu systému pohonné jednotky do kompletního modelu poddajného letounu pro aeroelastickou analýzu. Tím se do výpočtu zahrne jak ovlivnění dynamiky letounu kmitáním pohonné jednotky, tak obráceně ovlivnění dynamiky pohonné jednotky deformačním pohybem draku, zejména křídla. Taková analýza se standardně provádí pomocí MKP výpočtu v softwaru MSC/Nastran, pro který je ovšem nejprve potřeba sestavit doplňující program, tzv. preprocesor, pro řešení složitých nestacionárních aerodynamických sil kmitající vrtule. Vzhledem k rozsahu i náročnosti takového úkolu bude tato diplomová práce omezena pouze na model systému předpokládající absolutně tuhé křídlo.

S ohledem na zadání si tedy práce stanovuje za hlavní cíl najít mez stability kmitajícího systému pohonné jednotky, definované parametry dodanými vedoucím práce, a příslušnou rychlost letu, tzv. kritickou rychlost *flutteru*, při které systém této meze dosáhne. Vedlejší cíle práce pak odpovídají nutným úkolům, které je potřeba pro splnění hlavního cíle provést.

V první řadě tedy bude v práci proveden rozbor teorie *whirl flutteru*, jehož výstupem musí být kompletní soustava pohybových rovnic v maticové formě, vhodné pro řešení pomocí

výpočetního softwaru MATLAB. Nejzásadnějším problémem tohoto bodu práce je výběr vhodného modelu vnitřního tlumení v systému a sestavení nestacionárních aerodynamických matic, které tvoří pravou stranu pohybových rovnic a jejichž konečná podoba není v doporučené literatuře uvedena.

Následující úkol bude spočívat ve vytvoření výpočetního skriptu v interaktivním programovém prostředí MATLAB na základě teorie řešené v předchozí části. Cílem je navrhnout výpočetní schéma pro řešení stability pohybu kmitajícího systému, jehož výstupem bude kritická rychlost *flutteru* a diagramy rychlost-tlumení-frekvence. Navíc bude nad rámec zadání vytvořen také skript sloužící k vykreslení křivky stabilitní meze v rovině tuhostí uložení motoru. Na základě grafů, které budou jeho výstupem, pak bude provedena citlivostní analýza systému na vybrané vstupní parametry.

Posledním bodem práce bude aplikace výpočetních programů na zadaný systém. Výsledkem bude kritická rychlost *flutteru* v různých letových výškách a zhodnocení, zda je systém při zadané konfiguraci parametrů bezpečný, tedy nachází-li se nalezená kritická rychlost v intervalu přípustných letových rychlostí. Dále bude provedena již zmíněná citlivostní analýza a diskuse platnosti výsledků získaných pomocí zvolené metodiky.

2 Širší kontext problematiky

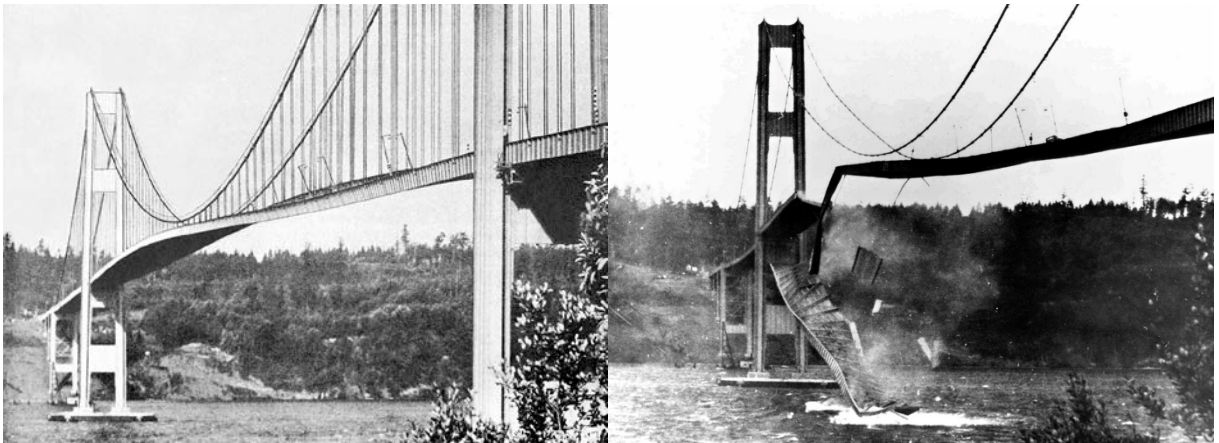
2.1 Vymezení aeroelasticity

Aeroelasticita, jak ji definuje Kopřiva [1], je „*vědní disciplínou z oboru aplikované mechaniky, která obecně studuje vzájemné působení tuhé a tekuté fáze reálného prostředí*“. Aeroelastické jevy lze tedy teoreticky pozorovat na jakémkoli tělese umístěném do proudu tekutého média. Mohou tím pádem vznikat jak na konstrukcích, které spadají pod oblast strojního inženýrství, tak i na těch, které se řadí do oblastí jiných. Vzhledem k tomu, že zásadní význam při buzení těchto jevů mají aerodynamické (nebo hydrodynamické) silové účinky, a naopak hlavní charakteristikou konstrukce působící proti jejich vzniku je její tuhost, jsou typicky problematické hlavně rozměrné a relativně lehké struktury. Jako klasické příklady jsou tedy v [1] uvedeny letadla, lodě, rakety, lopatkové stroje, vozidla, štíhlé budovy a věže, mostní konstrukce, visuté potrubí či lanová vedení nebo také zavěšené střechy. Kromě již zmíněných sil aerodynamických působí na těleso ještě vnitřní elastické a setrvačné síly, tedy pro posouzení možnosti vzniku nebezpečného jevu je důležité hlavně to, jak se projeví jejich vzájemná interakce. Aeroelastické jevy se dělí na statické, u kterých je vliv setrvačných sil zanedbatelný, a dynamické, kde naopak hrají podstatnou roli. Ve speciálních případech je nutné uvažovat také silové účinky vzniklé v konstrukci v důsledku teplotních změn.

Termín *aeroelasticita* byl zaveden už ve třicátých letech minulého století [1] jako souhrnné označení nebezpečných jevů pozorovaných tehdy primárně na leteckých konstrukcích a zároveň jako název interdisciplinárního oboru, který tyto jevy popisuje [2]. Tehdy se jednalo teprve o počátky systematického výzkumu, „*v současné době,*“ jak píše Daněk [3] už před třiceti lety, „*aeroelasticita představuje již jednoznačně samostatný vědní obor, který našel své uplatnění a opodstatnění nejen v letectví, ale i v řadě dalších technických aplikací, zejména ve stavebnictví a energetice*“. Svě tvrzení podkládá vznikem samostatných ústavů aeroelasticity nebo oddělení aeroelasticity pod ústavy mechaniky v technicky vyspělých zemích a také existencí příslušných sekcí například u všech významných výrobců letecké a kosmické techniky.

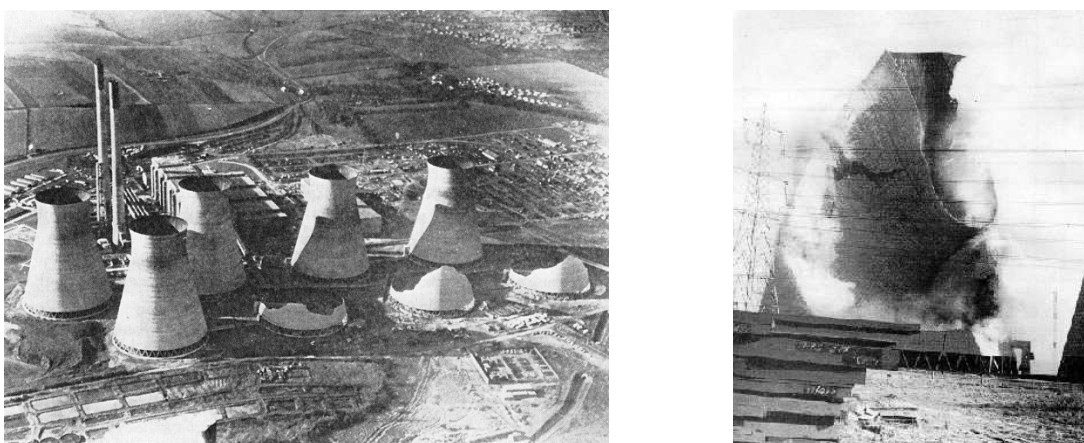
Důkazem, že aeroelasticita není vědní disciplína omezená pouze na aplikace ve strojním inženýrství jsou nechvalně proslulé případy stavebních konstrukcí, u kterých měly aeroelastické jevy katastrofický efekt. Asi nejznámějším je zřícení nově postaveného

dálničního mostu Tacoma Narrows Bridge v severoamerickém státě Washington v roce 1940. Mostní konstrukce tehdy podlehla divergentnímu torznímu rozkmitání působením poměrně slabého větru o rychlosti přibližně 65 km/h, přestože její statický výpočet byl proveden na 160 km/h. Než se celá konstrukce zřítily, dosahovaly úhlové výchylky mostovky mezi stožáry 45° [2]. Celá událost se stala důsledkem jednoho z typických aeroelastických jevů – *flutteru*.



Obr. 1: Pád mostu Tacoma Narrows Bridge [4]

Dalším dobře známým případem z historie je havárie uhelné elektrárny v anglické vesnici Ferrybridge v roce 1965. V důsledku dynamických účinků větru o rychlosti 130 km/h se během necelé hodiny zřítily tři z osmi válcovitých chladicích věží a zbylé byly vážně poškozeny. Na vině tenkrát bylo nevhodné rozmístění věží, které interferovaly s Karmánovou vírovou řadou [2].



Obr. 2: Havárie uhelné elektrárny Ferrybridge [5]

Na závěr lze uvést ještě například příčné kmitání listů větrných elektráren – *galloping* – nebo hrozbu řetězové reakce kácení nosných stožárů vedení vysokého napětí [2]. Vodiče při

námraze totiž výrazně nabydou na objemu, čímž umožní vznik nezanedbatelných aerodynamických sil v důsledku proudění větru a rovněž tak aeroelastických jevů. Tolik k aeroelasticitě obecně, následující kapitoly se zabývají už pouze aeroelasticitou v leteckých aplikacích.

2.2 Aeroelasticita jako letecký obor

Vývoj aeroelasticity je úzce spjat s vývojem letectví a také v leteckých aplikacích pokročil nejdále. Je tomu tak proto, že v tomto inženýrském oboru aeroelastické jevy, jak upozorňuje Daněk [3], „vystupují nejpálčivěji a v zájmu pokroku letadlové techniky je bylo třeba bezprostředně prakticky řešit, byť zpočátku jen intuitivně, experimentálně, a teprve mnohem později i teoreticky“. Dalším důvodem je, že se těmto jevům věnuje v letectví pozornost nejdéle, provází ho totiž už od prvních historických vzletů.

Jako vůbec první zakusil v roce 1903 ničivé účinky aeroelastických jevů jeden z průkopníků letectví profesor Samuel P. Langley v USA při uskutečnění prvního letu svého jednoplošníku řízeného člověkem. Jeho letoun tehdy havaroval kvůli nedostatečné torzní tuhosti nosných ploch, které se po dosažení kritické rychlosti letu ukroutily. Jednalo se o první případ jevu, který byl později nazván jako *torzní divergence* křídél. Vzhledem k pádu Langleyho letounu se tedy stali slavnými bratři Wrightové, kteří svůj úspěšný let provedli pouhých osm dní po něm, a Langley je tak připomínán hlavně v oboru aeroelasticity [3]. Důvodem, proč Flyer bratří Wrightů neselhal ze stejné příčiny, byla pravděpodobně výrazně tužší koncepce nosných ploch, tedy uspořádání typu dvouplošník, které se potom téměř výhradně používalo až do konce první světové války [2].

Navrhováním letadel se dvěma nosnými plochami se sice tehdejší konstruktéři vyhnuli problému torzní divergence křídél, nicméně se museli potýkat s dalšími aeroelastickými jevy u základních částí konstrukce, opět z důvodu jejich příliš nízké tuhosti. Objevuje se nutnost řešit první případy *flutteru* – tedy dynamického aeroelastického jevu projevujícího se rozkmitáním postižených částí letounu. Mezi typické případy zmiňované v literatuře patří například britský dvouplošný bombardér Handley-Page O/400, opatřený dvěma motorovými jednotkami a dvojitou svislou i vodorovnou ocasní plochou. Díky nedostatečně tuhému propojení obou výškových kormidel docházelo u tohoto typu k jejich rozkmitání s fázovým posuvem 180° , ke kterému se posléze vlivem vznikajících aerodynamických sil přidružilo torzní

kmitání trupu [3]. Tento jev vedl u několika kusů dokonce až k rozlámání letounu ve vzduchu [1]. Obdobné potíže měl i pozdější britský letoun, jednomotorový dvouplošný stíhač DH-9, a než se našlo účinné řešení, tedy torzně tuhé propojení obou částí kormidla, stály katastrofy v důsledku těchto poruch několik životů [2]. „*O praktické i teoretické rozbory s cílem tyto jevy objasnit a odstranit se největší měrou zasloužili F. W. Lanchester a L. Bairstov s A. Fagem. Společná zpráva posledně dvou jmenovaných je pravděpodobně první teoretickou analýzou flutteru se dvěma stupni volnosti (kroucení trupu + otáčení výškového kormidla)*“ [3].



Obr. 3: Langelyho havárie (vlevo) a Flyer bratří Wrightů (vpravo) [6]

V důsledku potřeby zvyšování letových výkonů u vojenských letounů se už ke konci války začíná přecházet na koncepci jednoplošníku. Přestože se jednalo o vyztužené konstrukce křídel, zvýšení tuhosti neodpovídalo nárůstu rychlosti letu, a letouny se tak opět potýkaly se statickými aeroelastickými jevy. Objevuje se ztráta účinnosti křidélek, případně úplná *reverze řízení*, problémem byl ale opět zejména výskyt *torzní divergence* s katastrofickými následky. Například německý stíhací hornoplošník Fokker D-8 vydržel na zkušebně při statických pevnostních zkouškách zatížení rovné násobku $n=6$, ale za letu při manévrech se křídla lámala. Přetrvávají samozřejmě i dynamické problémy, na stejném typu letounu byl později při zkouškách v USA objeven nový typ *flutteru*, a to ohybově-křidélkové kmitání křídla. Jev byl odstraněn statickým vyvážením křidélek pomocí přídavných hmot, kterým se zabývali A. G. Von Baumhauer a C. Konig. Ve dvacátých letech se konečně rozbíhá výzkum aeroelastických jevů na vědeckém základě. „*V roce 1926 předkládá v Německu H. Reisen první teoretické řešení zatížení netuhého křídla a jeho torzní divergence. Základy nestacionární aerodynamiky pokládají H. Glauert ve Velké Británii, H. Wagner a H. G. Küssner v Německu. Výsledky intenzivního výzkumu flutteru v Anglii předkládají R. A. Frazer a E. J. Dunacan*“ [2].

Další zvyšování letových výkonů během třicátých let a s ním související konstrukční změny vedou k výskytu nových aeroelastických jevů, jako je například kmitání kormidel s odlehčovacími ploškami [2]. Prohlubují se ale i teoretické poznatky. „V roce 1932 byly publikovány první výsledky teoretického řešení problémů snížení příčné říditelnosti letounu a reverze křidélek H. R. Coxem a A. G. Pugsleyem v Anglii. V USA se T. Theodorsenovi v roce 1934 podařilo exaktně řešit nestacionární aerodynamické síly na harmonicky kmitajícím tenkém profilu křídla s kormidlem“ [3]. Jak již bylo zmíněno, díky systematickému výzkumu těchto jevů se poprvé zavádí pojem *aeroelasticita* jako název nového vědeckého oboru.

Během druhé světové války je dosaženo transsonické rychlosti a s ní spojené rázové vlny způsobují další aeroelastické potíže. Jedná se o rozkmitání panelů potahu – *panel flutter* – a tzv. bzučení kormidel, z anglického *aileron buzz*. S dalším poválečným vývojem se už u nadzvukových letounů vyskytují značně komplikované problémy, u kterých „je nutno uvažovat vedle klasických sil vystupujících u nízkorychlostních aeroelastických jevů (aerodynamické, setrvačné a elastické síly) navíc přídavná pnutí od aerodynamického ohřevu“ [2]. V souvislosti se zaváděním servosystémů v řízení vzniká také termín *servoelasticita*. „Servosystémy vystupují jako energetické zdroje, které mohou energii konstrukci dodávat, nebo odebírat, a tak vyvodit, případně eliminovat aeroelastické jevy“ [2].

Přestože s pozdějším vývojem letectví (například letadla se sklopnými rotory, raketová technika) samozřejmě vznikají nové druhy aeroelastických jevů, lze říci, že v šedesátých letech už je běžná aeroelastická problematika zmapována a technicky dostatečně zvládnuta. Následující pokrok tedy souvisí hlavně s vylepšováním experimentálních i výpočetních metod. K tomu největší měrou přispělo zavedení výpočetní techniky, s jejíž pomocí je možné „numericky řešit obecné soustavy pohybových rovnic pro složité tuhostní, hmotnostní a aerodynamické fyzikální modely blížící se skutečné nosné ploše či celému letounu. Řešení tak může spolehlivěji popsat chování složitějšího konstrukčního schématu, které se blíží skutečné konstrukci“ [2].

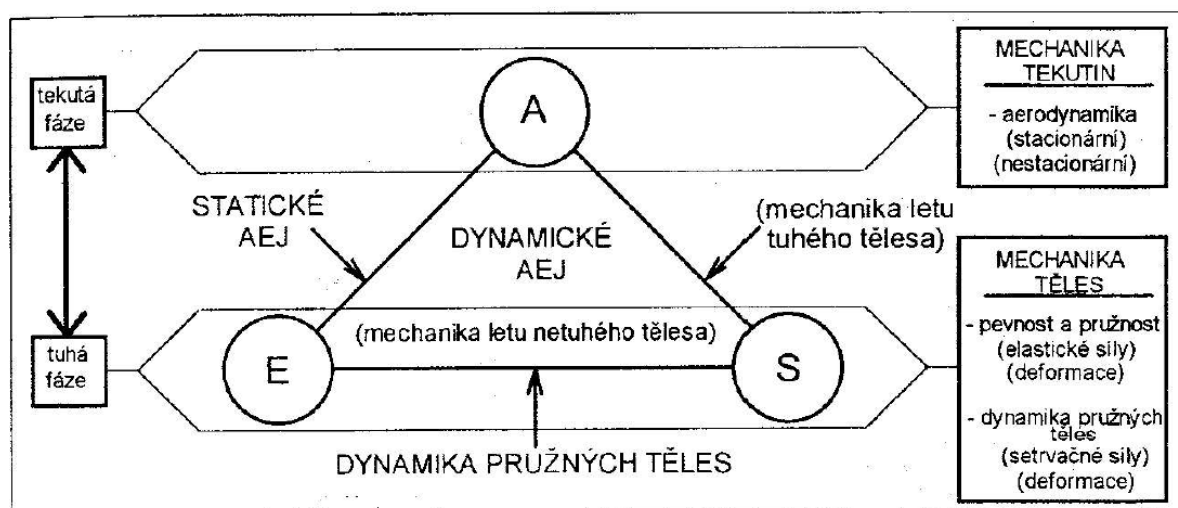
V současnosti je úkolem aeroelasticity zejména aktivním způsobem zasahovat do konstrukčních řešení letounů. Jde o proces optimalizace, při kterém se provedou na konstrukci úpravy tak, aby byla zajištěna dostatečná tuhost pro splnění pevnostních a aeroelastických kritérií při souběžném požadavku na minimální celkovou hmotnost. Jinou možností je pak například návrh systému aktivního řízení, který umožňuje řídicím plochám vhodnými zásahy

působit proti případným divergentním kmitům pevných částí. Díky tomu může být konstrukce méně tuhá, a tím pádem také lehčí. V neposlední řadě je úkolem oboru zajistit, aby konkrétní nový typ letounu splňoval letecké předpisy – zabývá se tedy aeroelastickými průkazy.

2.3 Základní aeroelastické jevy a jejich princip

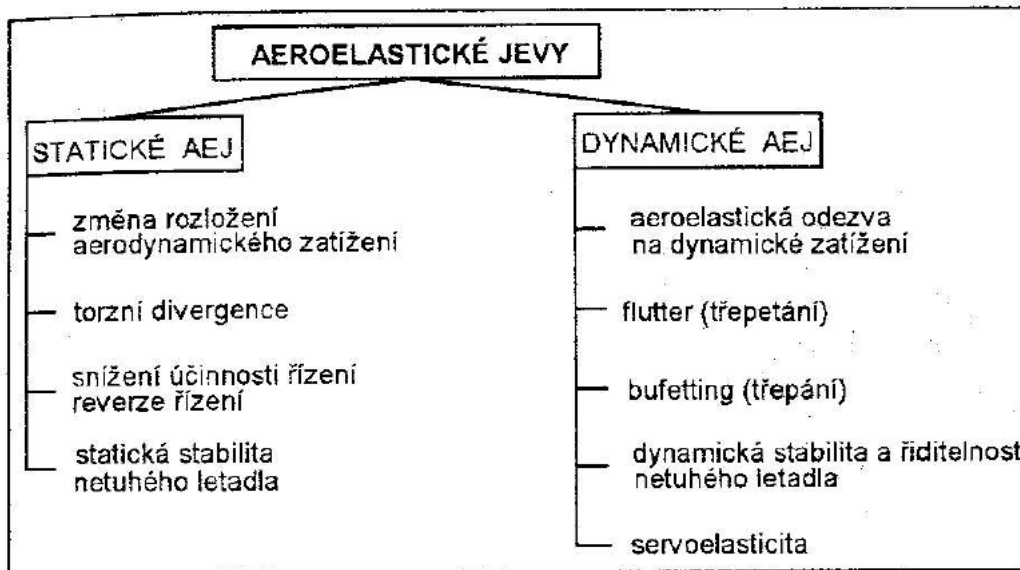
2.3.1 Definice a rozdělení

Na samém začátku práce byla uvedena obecná definice aeroelastivity platná napříč obory. V souvislosti s letectvím uvádí Slavík konkrétnější formu: „*Aeroelasticita je nauka zkoumající jevy při vzájemném působení aerodynamických, elastických a setrvačných sil při relativním pohybu vzduchu a letounu*“ [2]. Je nutno říci, že takto napsaná definice platí pouze v rámci klasické aeroelastivity – tedy v případech, kdy se neuvažují například vnitřní síly vzniklé v důsledku aerodynamického ohřevu.



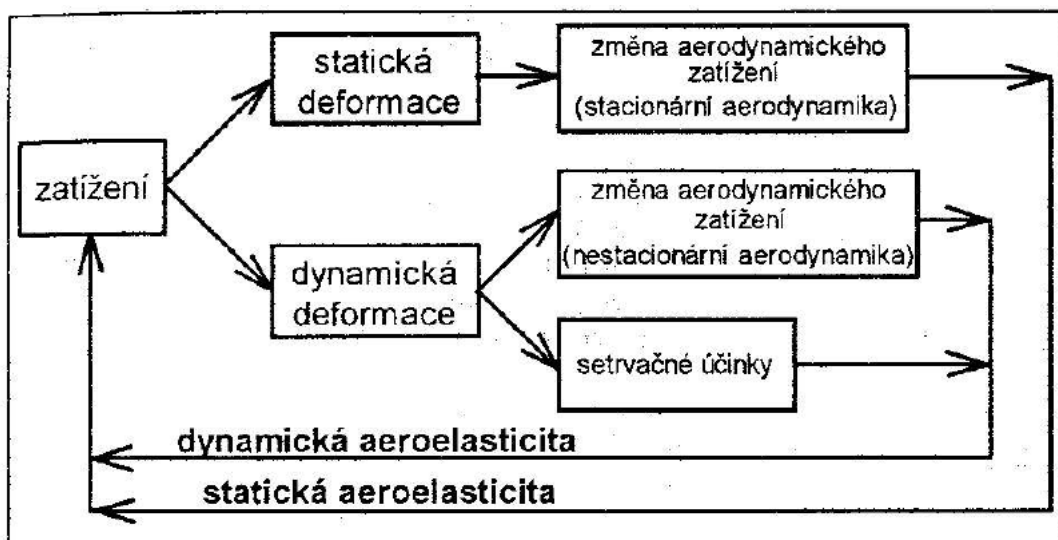
Obr. 4: Collarův silový trojúhelník [2]

Vzájemnou interakci sil přehledně vyjádřil už v roce 1946 A. R. Collar pomocí trojúhelníkového schématu, viz (Obr. 4). Každý vrchol představuje daný typ působících sil, jeho strany pak vyjadřují specifická odvětví mechaniky, pro něž je spojení příslušných vrcholů určující. Statické aeroelastické jevy se tedy nacházejí na levé straně, která propojuje aerodynamické (v tomto případě stacionární) a elastické síly. Vnitřek trojúhelníku je potom průnikem všech tří silových skupin (nyní nestacionární aerodynamika), čímž jsou charakterizovány dynamické aeroelastické jevy. Přehled všech základních typů je uveden níže na (Obr. 5):



Obr. 5: Přehled základních aeroelastických jevů [2]

Vznik každého aeroelastického jevu je podmíněn zpětnou vazbou mezi deformací konstrukce a zatížením. Princip této vazby je znázorněn na následujícím schématu (Obr. 6):



Obr. 6: Zpětnovazební princip aeroelastických jevů [2]

„Bude-li mít zatížení konstrukce statický charakter, bude i zpětný vliv deformace na aerodynamické síly statický a současně odpadnou superpoziční zatížení od setrvačných účinků deformačních pohybů. V případě nestacionárního zatížení je nutno uvažovat nestacionární vliv deformací na aerodynamické síly při současném působení setrvačných zatížení od deformací“ [2].

2.3.2 Statické aeroelastické jevy

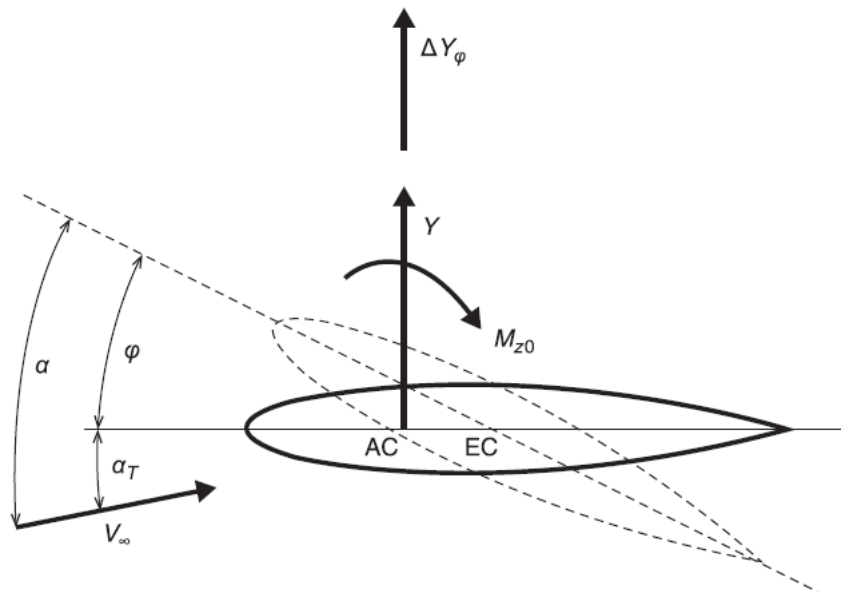
Statické jevy vznikají za působení stacionárních aerodynamických sil společně s vnitřními elastickými silami. Vyznačují se jednosměrným charakterem strukturní deformace, která způsobí změnu rozložení aerodynamického zatížení na konstrukci. Vznikající jevy jsou potom vlastně specifické formy této deformace či mezní stabilitní stavy konstrukce v důsledku změny zátěže.

2.3.2.1 Torzní divergence

Torzní divergence křídla je historicky prvním pozorovaným aeroelastickým jevem, obecně však může vzniknout na kterékoliv vztlakové ploše. Jedná se o mezní stav, kdy po redistribuci zatížení v důsledku deformace nedosáhnou vnitřní elastické síly rovnováhy s vnějšími aerodynamickými silami. Strukturní deformace se tedy nadále zvětšuje až do chvíle, kdy dojde k destrukci (prakticky okamžitě). Podmínku, která tento mezní stav charakterizuje, lze zapsat ve formě rovnosti torzní tuhosti konstrukce a aerodynamické tuhosti [2]:

$$K_{\varphi} = \frac{dM_k}{d\varphi} \quad (2.1)$$

Princip tohoto jevu lze ukázat na zjednodušeném modelu s jedním stupněm volnosti, kdy se křídlo zredukuje pouze na aerodynamický profil (Obr. 7). Ten je vystaven proudu vzduchu o rychlosti v_{∞} , nabíhajícímu pod úhlem α_T . Důsledkem toho je generován vztlak Y , jehož působením ve formě momentu k elastickému středu (společně s M_{z0}) se profil torzně deformuje o úhel φ a úhel náběhu se tak zvětší na α . Protože je velikost vztlakové síly tomuto úhlu přímo úměrná, dojde k jejímu navýšení o ΔY_{φ} . To opět způsobí nárůst deformace a smyčka se opakuje až do chvíle, kdy aerodynamický moment vyrovná protichůdně působící moment elastických sil. Po dobu, kdy je tuhost konstrukce dostatečná, a vnitřní síly tak dokážou aerodynamický moment zvládnout, je křídlo stabilní a dochází na něm pouze ke změně rozložení zatížení. Ovšem ve chvíli, kdy je rychlost proudu už příliš velká a elastický moment k vyrovnání toho aerodynamického nestačí, nemá torzní deformaci co bránit a nastává její divergentní šíření a ztráta stability křídla. Kritická rychlost nabíhajícího proudu, při které tento jev nastává, se nazývá rychlost divergence v_{DIV} .



Obr. 7: Princip torzní divergence [7]

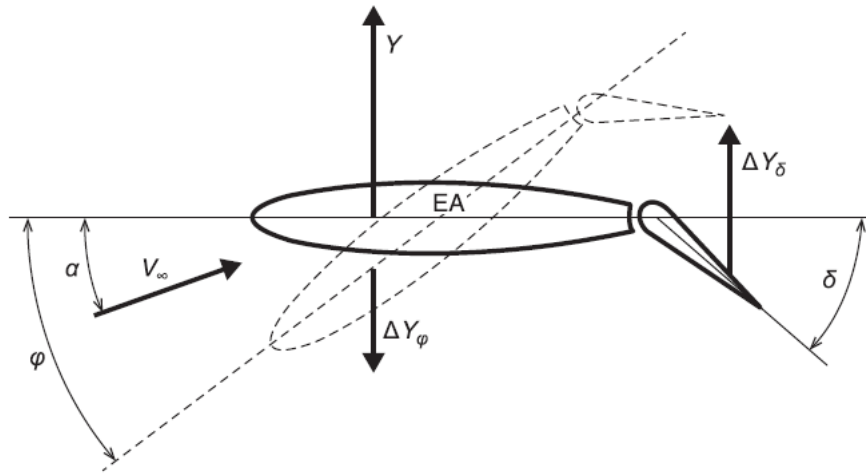
2.3.2.2 Reverze řízení

Snížení účinnosti řízení nebo v krajním případě dokonce změna smyslu pohybu letounu v důsledku vychýlení řídicí plochy – tedy *reverze řízení* – je statickým aeroelastickým jevem, při němž na rozdíl od *torzní divergence* nedochází ke ztrátě stability a s ní spojené destrukci konstrukce, ale „pouze“ k negativnímu ovlivnění, případně úplné ztrátě říditelnosti stroje v daném směru. Obecně může tento jev postihnout kteroukoliv řídicí plochu, nicméně je typický hlavně pro křídélka, méně často pak pro výšková kormidla, jak píše Slavík [2]: „Vzhledem k nižším tuhostem koncových částí křídla, je reverze křidélek a zejména pokles účinnosti příčného řízení pravděpodobnější než reverze kormidel na ocasních plochách.“

Princip spočívá v reakci pružné konstrukce na výchylku řídicí plochy. Změnou polohy kormidla se na něm vytvoří vztaková síla, která způsobí redistribuci zatížení na příslušné pevné ploše. To vede k opačně působícímu přírůstku vztlaku vzhledem k síle na kormidle, a tak i ke snížení jeho účinnosti. Mezní stav tohoto jevu nastává, když se zmíněné silové účinky vyrovnají. Účinnost kormidel se potom rovná nule, a letoun tak na jejich výchylku vůbec nereaguje. V případě, kdy dojde k překročení mezního stavu, je změna silového působení na pevné ploše dokonce vyšší než samotný efekt na řídicí ploše, a letoun tak na změnu polohy kormidla reaguje opačně vzhledem k běžnému stavu. Podmínku vzniku mezní situace stanovuje Slavík [2] skrze příslušné klonivé momenty:

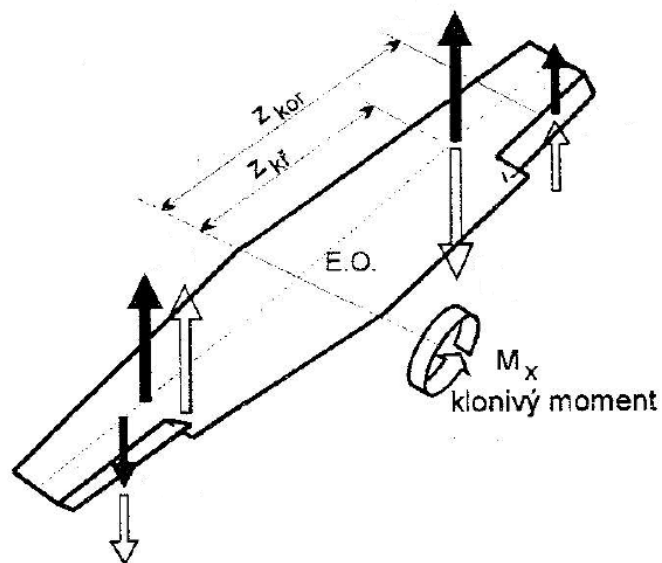
$$|-\Delta M_{xkř}| = |\Delta M_{xkor}| \quad (2.2)$$

Celý proces lze demonstrovat na systému se dvěma stupni volnosti, kdy je křídlo tentokrát včetně křídélka opět zredukováno na aerodynamický profil, viz (Obr. 8). Ten po umístění do proudu vzduchu v_∞ , jenž na něj nabíhá pod úhlem α , vytváří vztlakovou sílu Y . Křídélko po sklopení o úhel δ vytváří přídatný vztlak ΔY_δ , který torzně deformuje profil o úhel φ skrze moment k jeho elastickému středu. Následkem toho se také změní úhel náběhu proudu vzduchu a vztlaková síla Y poklesne o hodnotu ΔY_φ .



Obr. 8: Princip reverze řízení [7]

Pro demonstraci vlivu tohoto procesu na říditelnost letounu je v tomto případě třeba ještě jeden obrázek, protože nerozhodují síly samotné, nýbrž momenty jejich výslednic k podélné ose draku:



Obr. 9: Schéma působení klonivých momentů na tuhém a poddajném křídle [2]

Černě zvýrazněná soustava sil na (Obr. 9) představuje schéma pro tuhou konstrukci, zbylé, nezvýrazněné šipky pak reprezentují situaci na pružném křídle. Krátké šipky odpovídají výslednici ΔY_δ z řezu na (Obr. 8), dlouhé černé výslednici vztlaku Y a dlouhé nezvýrazněné výslednici změny tohoto vztlaku v důsledku deformace ΔY_φ . Jak je z obrázku dobře vidět, na tuhém letounu působí po vychýlení kormidel jediná dvojice sil rovna:

$$2 \cdot z_{kor} \cdot \Delta Y_\delta = \Delta M_{xkor}$$

Oproti tomu na pružné soustavě potom působí ještě dvojice v opačném směru:

$$2 \cdot z_{kř} \cdot \Delta Y_\varphi = \Delta M_{xkř}$$

Mohou tedy nastat celkem tři situace:

- 1) $|\Delta M_{xkř}| < |\Delta M_{xkor}|$; v tomto případě jde o snížení účinnosti řízení.
- 2) $|\Delta M_{xkř}| > |\Delta M_{xkor}|$; tento stav znamená *reverzi řízení*.
- 3) $|\Delta M_{xkř}| = |\Delta M_{xkor}|$; mezní stav.

Při rovnosti obou klonivých momentů jde o kritický stav reverze, kdy je aerodynamický silový účinek kormidel plně vykompenzován změnou vztlaku na pevné ploše v důsledku její deformace. Rychlost nabíhajícího proudu vzduchu, při které tento stav vzniká, se nazývá rychlost reverze v_{REV} .

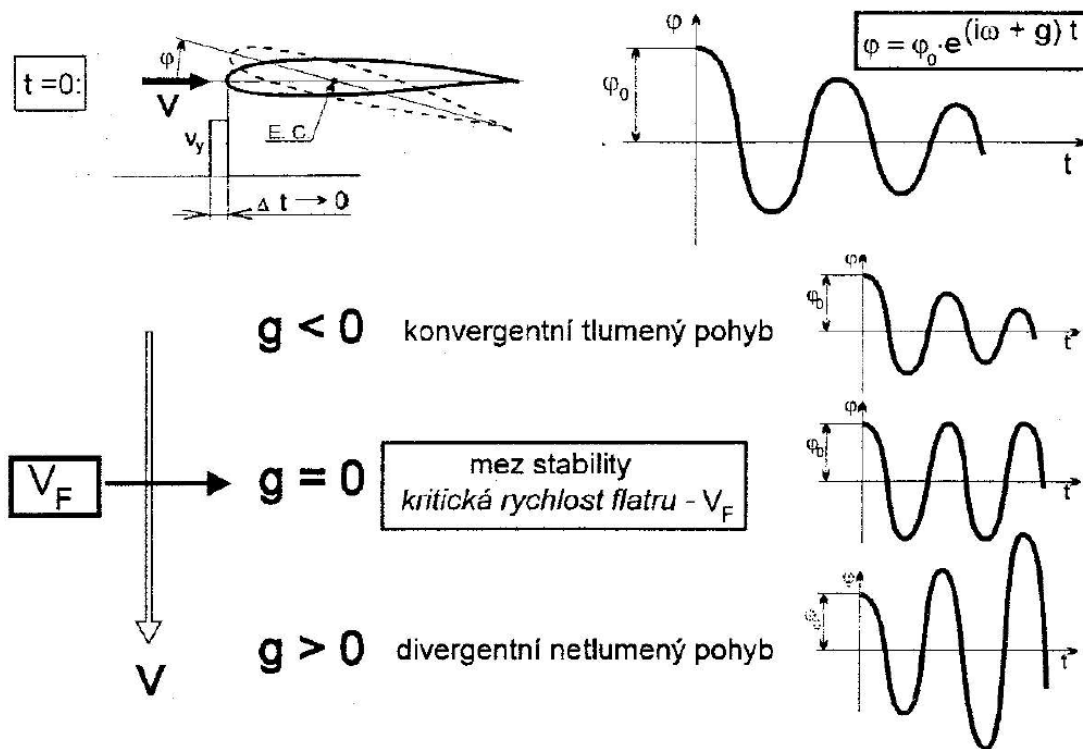
2.3.2.3 Statická stabilita netuhého letounu

Při uvažování letounu jako netuhého tělesa se může následkem deformací změnit i poloha jeho neutrálního bodu. Pokud dojde vlivem přerozdělení zatížení k jeho posuvu směrem k těžišti, bude mít letoun menší statickou zásobu, a tím pádem bude negativně ovlivněna jeho statická stabilita.

2.3.3 Dynamické aeroelastické jevy

Dynamické jevy vznikají za společného působení nestacionárních aerodynamických sil, setrvačných sil a vnitřních elastických sil. Vyznačují se časově proměnným zatížením, v jehož důsledku mají deformace vratný (kmitavý) charakter. Obdobně jako u statických aeroelastických jevů, kdy se působení silových účinků obecně projevuje přerozdělením aerodynamického zatížení, je u dynamických jevů obecným projevem aeroelastická odezva konstrukce. Ta je charakterizována časovým průběhem deformací a zatížení a může být v důsledku existence zpětné vazby buď tlumená, a tedy stabilní, anebo netlumená, a tím

pádem nestabilní a vedoucí k destrukci postižené části konstrukce. Stejně jako v případě statických jevů jsou pak ty dynamické mezními stavy nebo specifickými případy této odezvy. Závislost časového průběhu kmitavé deformace s jedním stupněm volnosti na hodnotě tlumení g je demonstrována na (Obr. 10):



Obr. 10: Časový průběh deformace v závislosti na celkovém tlumení [2]

Je důležité zmínit, že pro vznik nezanedbatelných setrvačných sil je třeba, aby změny zatížení v čase byly dostatečně intenzivní. Tím pádem jsou pak dostatečně velké i změny přírůstku deformací, na kterých je velikost setrvačných sil přímo závislá. Přehled působících sil pro případ na (Obr. 10) včetně jejich závislostí je uveden níže:

aerodynamické:
obecný pohyb - $P(V, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \dots)$
kmitavý pohyb - $P(V, \omega, \varphi_0, t, \dots)$
setrvačné:
obecný pohyb - $S(\ddot{\varphi}, \dots)$
kmitavý pohyb - $S(\omega, \varphi_0, t, \dots)$
elastické: $E(\varphi, \dots)$
konstrukční tření (disipační síly)
modely třecích sil: - $D(\dot{\varphi}, \dots)$ vízkozní
- $D(\varphi_0, \dots)$ amplitudový

Obr. 11: Přehled sil působících při dynamických aeroelastických jevech [2]

Krom setrvačných sil vyžadují komentář i ostatní efekty. „*Nestacionární aerodynamické síly jsou v každém okamžiku obecně závislé na historii předchozího pohybu (tj. jsou funkcionály stavových veličin závislých na čase...)*. Zjednodušené Bryanovo vyjádření umožňuje aerodynamické síly specifikovat jako funkce závislé pouze na okamžitých hodnotách těchto stavových parametrů a jejich časových derivacích“ [2]. Toto tvrzení, společně se zvyklostí rozkládat obecný pohyb netuhého letounu na pohyb tuhého tělesa a jeho deformaci, vede k možnosti zapsat závislost aerodynamických sil tak jako na (Obr. 11) a je zásadní pro matematický popis dynamických jevů v pozdějších kapitolách. Pro řešení rovnic vzešlých z tohoto popisu je potom v případě periodických kmitů s kruhovou frekvencí ω a amplitudou φ_0 důležitý převod derivovaných harmonických funkcí na komplexní tvary.

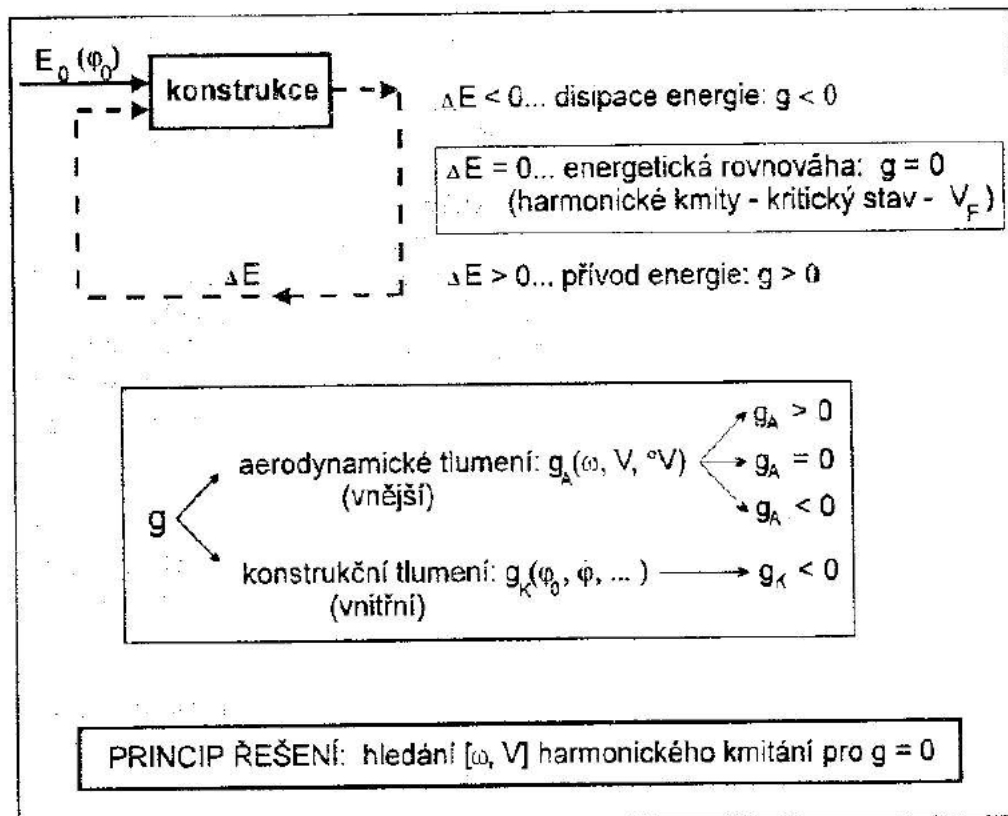
V neposlední řadě je nutno říci, že jsou dynamické aeroelastické jevy na rozdíl od statických také ovlivněny disipací energie důsledkem mezimolekulárního tření uvnitř konstrukčních materiálů a také tření ve spojích mezi jednotlivými díly. Do popisu silové rovnováhy je proto třeba zahrnout také disipativní síly ve formě jednoho z používaných modelů třecích sil nebo nějaké jejich kombinace. Na (Obr. 11) jsou uvedeny nejčastěji používané, tedy rychlosti úměrný viskózní model a amplitudě deformace úměrný model amplitudový.

2.3.3.1 Flutter

Jedním ze základních případů dynamické odezvy je reakce konstrukce na krátkodobou změnu zátěže v důsledku skokové změny vnějších podmínek – tedy odezva na impulzní zatížení. Tento impuls může být vyvolán například odhozem nákladu za letu nebo průletem letounu poryvem, viz (Obr. 10) z předchozí kapitoly, kde se jedná o kmitavou torzní deformaci řezu křídla od impulsu vertikální rychlosti. Následkem krátkodobé změny silového působení je konstrukci dodáno určité množství energie, díky kterému dojde k jejímu rozkmitání a které lze vyjádřit například pomocí počáteční deformace, viz (Obr. 10). Tomuto typu kmitání se termínem mechaniky říká samobuzené a je základním dynamickým aeroelastickým jevem. *Flutter* nebo česky třepetání je pak mezním stavem tohoto jevu, jak píše Slavík [2]: „*Flutter je dynamická nestabilita, resp. mezní případ stability dynamické odezvy částí či celého letounu za letu na impulzní zatížení.*“

Této stabilitní meze letoun dosáhne při takzvané kritické rychlosti *flutteru* v_F . Při této rychlosti je z proudu vzduchu skrze aerodynamické silové účinky do systému dodáváno právě

takové množství energie, jaké odpovídá energii disipované vlivem tlumení, a konstrukce se tak deformuje samobuzenými harmonickými kmity. Při rychlostech nižších pak množství dodávané energie nestačí a deformační pohyb je postupně tlumen, zatímco při přesažení kritické rychlosti energie systému naopak stále narůstá, deformační kmity jsou nestabilní, a vedou až k destrukci příslušného konstrukčního celku. Přehledné schéma této energetické bilance včetně role tlumení uvádí Slavík [2] ve formě zpětné vazby:

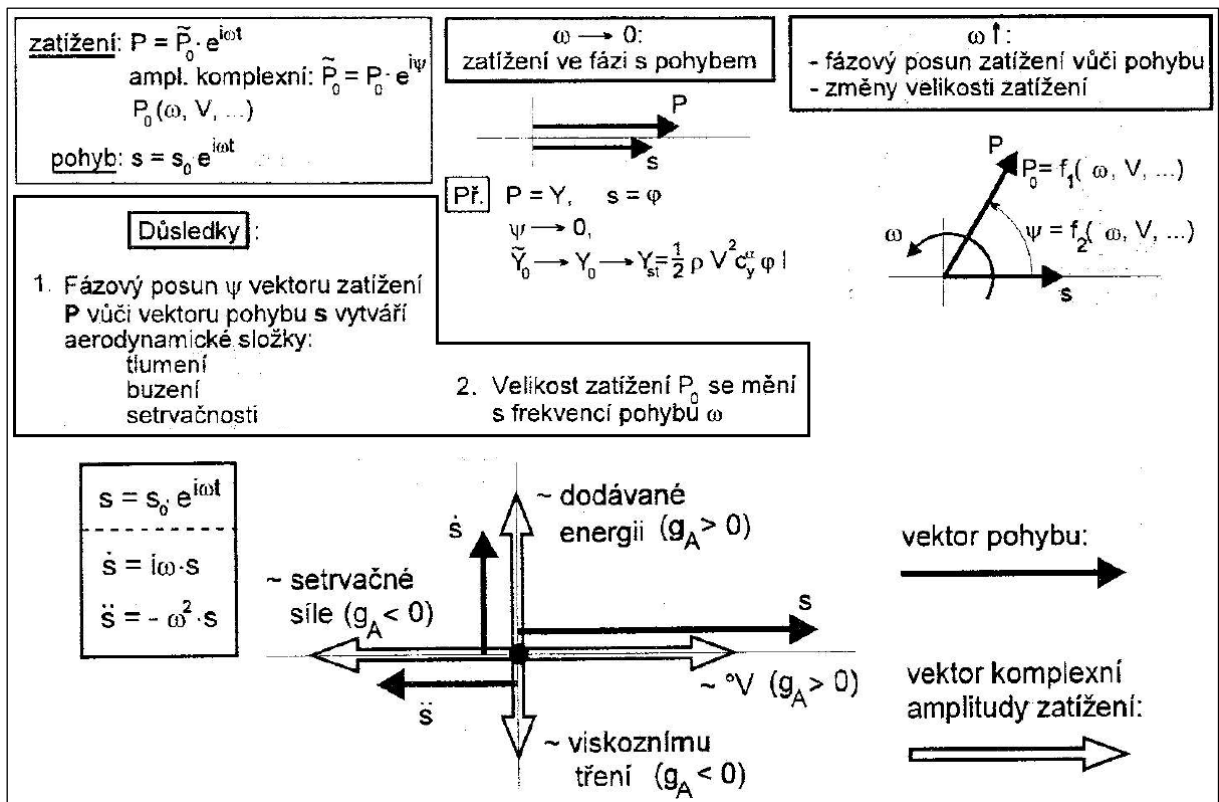


Obr. 12: Energetická bilance kmitající konstrukce a role tlumení [2]

Jak je vidět už na (Obr. 13), o stabilitě pohybu rozhoduje hodnota veličiny celkového tlumení g . Ta je zároveň svázána se změnou energetického stavu soustavy, viz (Obr. 12), a může nabývat kladných i záporných hodnot nebo může být právě nulová v případě energetické rovnováhy. Celkové tlumení se skládá ze dvou složek. První z nich je konstrukční tlumení g_K , jehož hodnota závisí hlavně na použitých konstrukčních materiálech a typu, množství a rozložení spojů mezi jednotlivými díly. Tato hodnota je vždy záporná¹, protože vždy představuje odvod energie ze systému, tedy již zmíněnou disipaci vlivem vnitřního mezimolekulárního tření a tření v konstrukčních spojích. Druhou složkou celkového tlumení je

¹. Koeficient konstrukčního tlumení, tedy ztrátový úhel γ , je ale naopak vždy kladný.

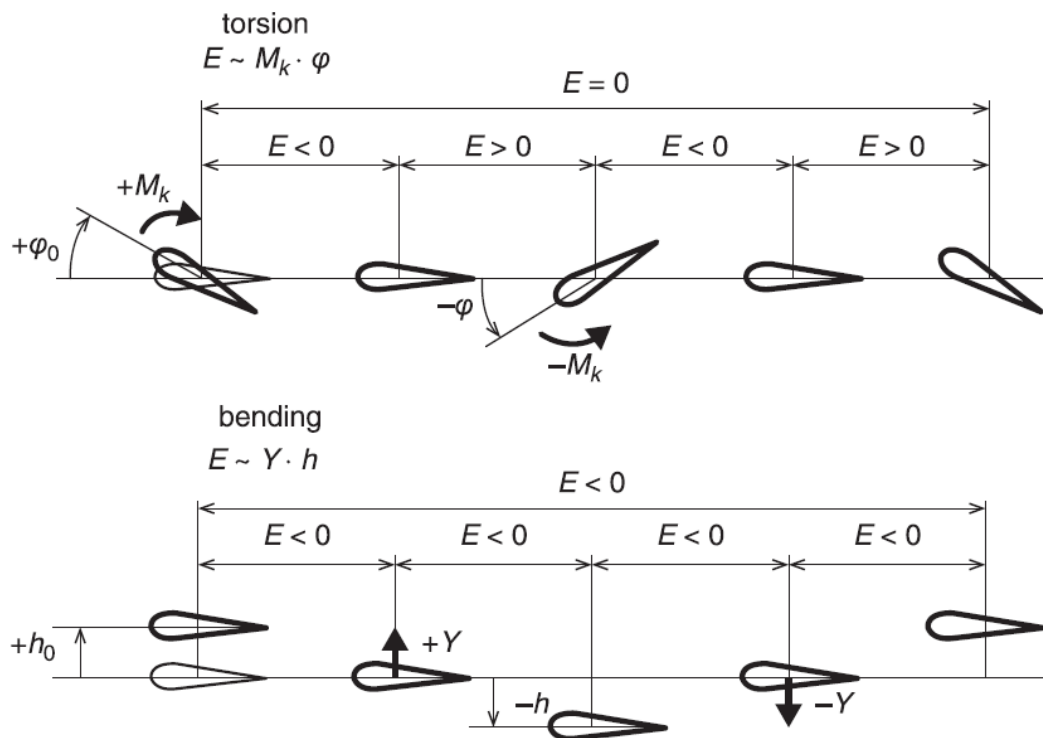
pak tlumení aerodynamické g_A , jehož hodnota je spjata s působícími aerodynamickými silami a může být kladná, záporná i právě nulová. O jejím znaménku rozhoduje počet stupňů volnosti deformačního pohybu (pro klasický nebo jinými slovy potenciální flutter postihující pevné vztlakové plochy samotné nebo včetně kormidel, a to v oblasti neodtrženého obtékání [2]) a hlavně „frekvenční fázové a amplitudové charakteristiky periodických aerodynamických zátěží“ [2]. Nestacionární aerodynamické síly totiž vlivem kmitavého deformačního pohybu konstrukce jednak mění amplitudu a také jsou vůči vektoru tohoto pohybu fázově posunuty v závislosti na úhlové frekvenci kmitání a rychlosti nabíhajícího proudu vzduchu – viz (Obr. 13). Právě tento fázový posuv, díky kterému mohou aerodynamické síly vykazovat charakter tlumících, budících, či setrvačných sil v závislosti na poloze jejich vektoru vůči vektoru deformace, je zásadní pro určení, zda je energie do systému dodávána, nebo je z něj naopak odebírána, a tím pádem i pro znaménko veličiny aerodynamického tlumení.



Obr. 13: Nestacionární aerodynamické zatižení [2]

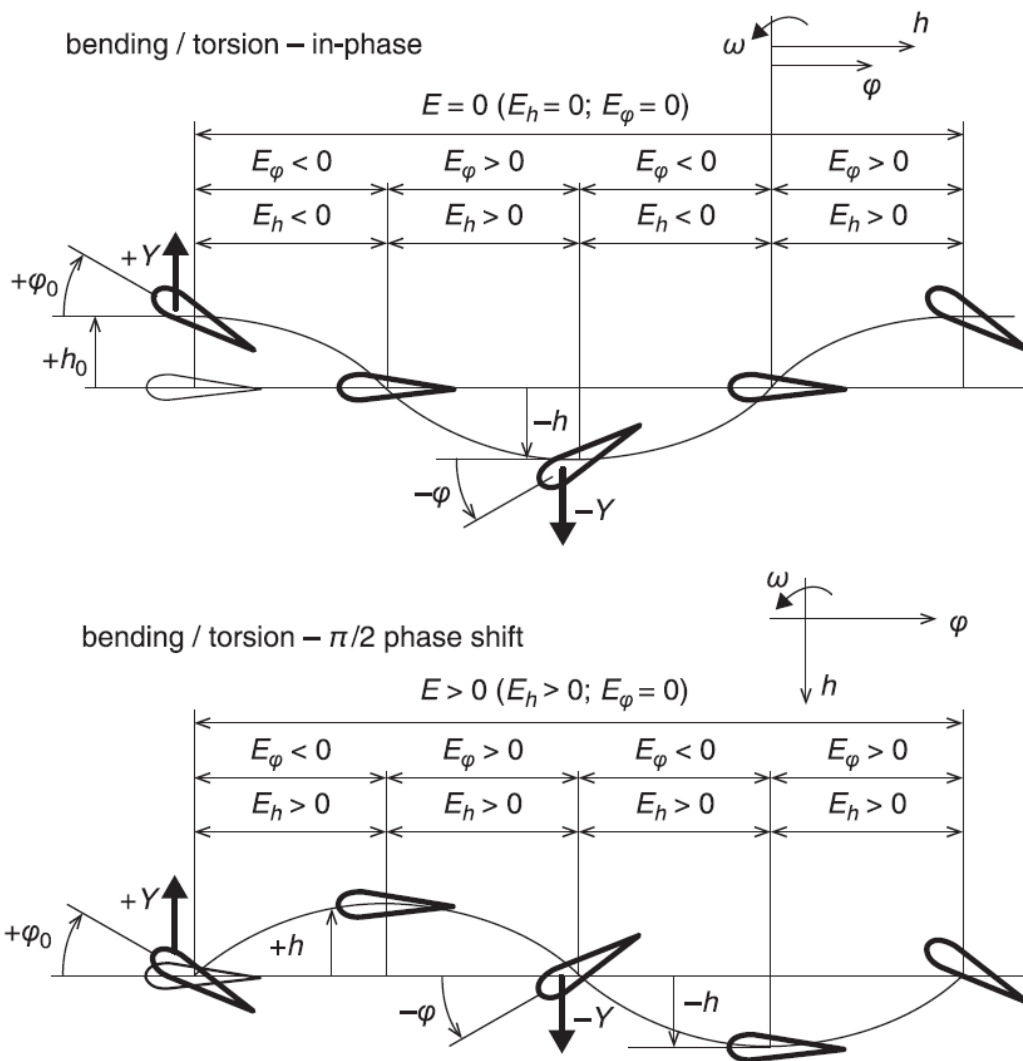
Vliv stupňů volnosti a princip flutteru lze ukázat na základě energetické bilance několika základních případů. Křídlo je zde opět pro zjednodušení zredukováno pouze na aerodynamický profil. Na (Obr. 14) je zobrazen celý cyklus harmonického deformačního pohybu tohoto profilu pro případ jednoho stupně volnosti, nahoře pro krut a dole pro ohyb. Vektor aerodynamické

zátěže a vektor pohybu jsou ve fázi, přičemž celková energetická změna systému je pro případ torze rovna nule, a pro případ ohybu je dokonce záporná. Tím pádem lze vyvodit závěr, že pro jeden stupeň volnosti je systém vždy stabilní a ke vzniku divergence, tedy *flutteru*, nedojde. Nicméně jak píše Slavík [2], „vybuzení 1°V (např. torze) je spíše teoretický případ, neboť např. u konstrukce křídla vzniklé aerodynamické síly i na čistě torzní impuls nevyvodí pouze silovou dvojici k elastické ose, ale i vztlakovou sílu vyvolávající ohyb“. Proto mají reálné případy kmitání v oblasti neodtrženého obtékání stupně volnosti vždy alespoň dva.



Obr. 14: Harmonický pohyb profilu s jedním stupněm volnosti [7]

Schéma celého pohybového cyklu opět pro harmonický případ kmitavé deformace profilu, tentokrát však se dvěma stupni volnosti, je na (Obr. 15). Demonstrace je provedena na energetické bilanci pro kombinaci krutu a ohybu. Oproti systému s jedním stupněm volnosti se nyní projeví již dříve zmíněný vliv fázového posunutí jednotlivých zátěžových a deformačních vektorů. V prvním případě (Obr. 15 nahoře) jsou oba pohyby ve fázi, cyklus je energeticky neutrální, a ke vzniku *flutteru* tedy dojít nemůže. Situace se ovšem zásadně změní například ve chvíli, kdy je ohyb za krutem zpožděn. Spodní část schématu ukazuje cyklus s fázovým posuvem o hodnotu $\pi/2$ mezi oběma účinky. V tomto případě sice zůstává samotná torze energeticky neutrální, nicméně vlivem zpoždění dodává energii deformaci od ohybu. Celková bilance tedy vyjde pozitivní a může vést ke vzniku ohybové divergence.



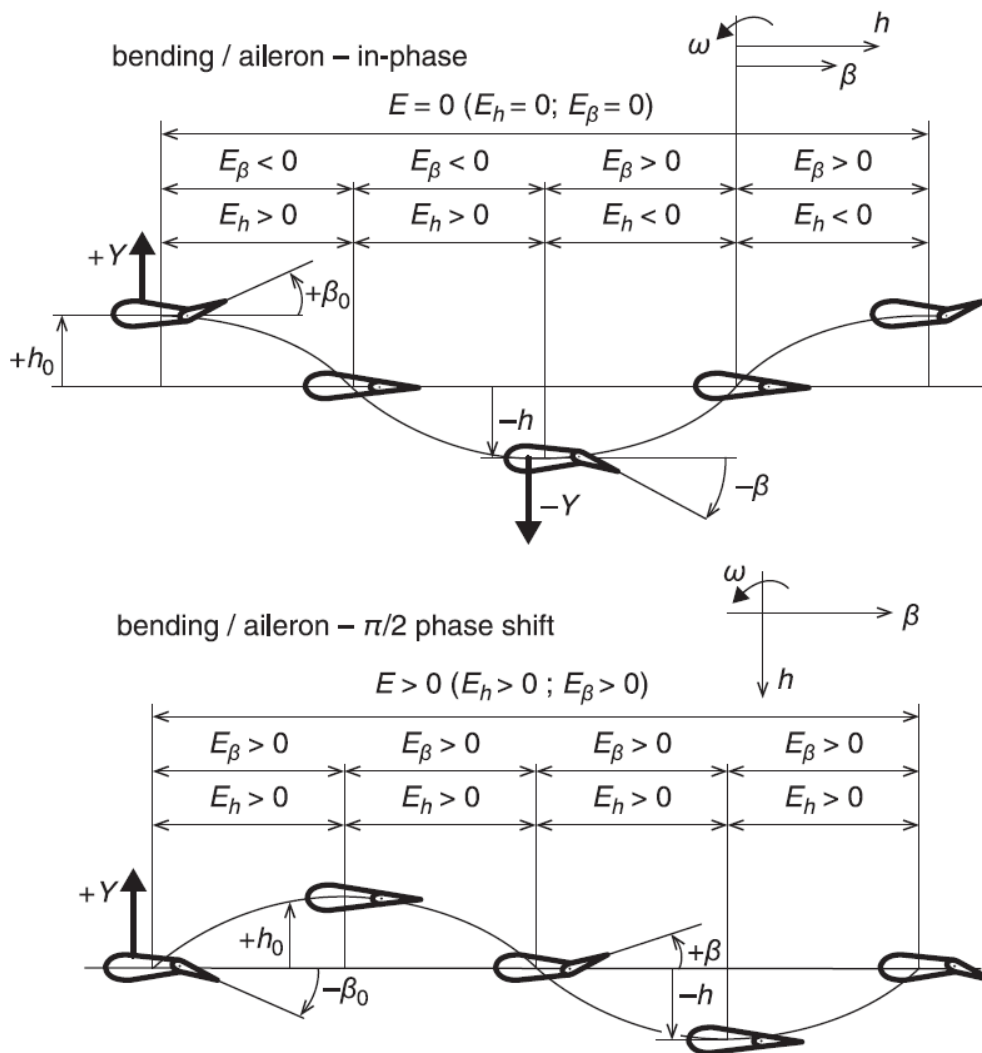
Obr. 15: Harmonický pohyb profilu se dvěma stupni volnosti [7]

Obecně může mít kmitající systém i více stupňů volnosti v závislosti na tom, kolik a které části letounu pohyb utvářejí. Mezi nejvýznačnější případy potenciálního flutteru řadí Slavík [2] tyto:

- 1) Ohybově-krouťivý flutter křídla nebo ocasních ploch. Jde o typ se dvěma stupni volnosti, jenž byl demonstrován na (Obr. 15). Řídící plochy v tomto případě kmitají spolu s pevnou plochou, jako by byly její nehybnou součástí.
- 2) Ohybově-křídélkový flutter. V tomto případě jde opět o pohyb se dvěma stupni volnosti, první představuje ohyb křídla, druhý pak výchylka křídélka. Obvykle vzniká z důvodu nedostatečného vyvážení řídicích ploch.
- 3) Ohybově-krouťivý flutter za účasti křídélek nebo kormidel. Tento typ je kombinací předchozích dvou případů a má tři stupně volnosti.

4) *Flutter* nosné plochy s kormidlem a pomocnými ploškami, který Slavík [2] charakterizuje jako „složitou a nebezpečnou vícestupňovou dynamickou aeroelastickou nestabilitu“.

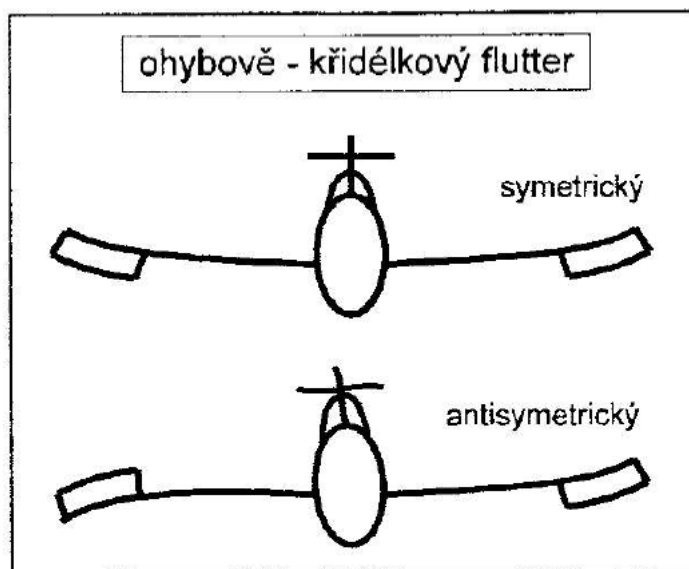
Princip vzniku *flutteru* s účastí řídicí plochy prezentuje Čechrdle [7] opět za pomoci zjednodušení křídla na pouhý profil:



Obr. 16: Harmonický pohyb profilu s účastí křídélka [7]

V prvním případě (nahore) je výchylka křídélka ve fázi s ohybem křídla, celková energie je nulová, a cyklus je tak opět energeticky neutrální a nevede ke vzniku *flutteru*. Naopak v druhém případě (dole), kde oba pohyby dělí fázový posuv o $\pi/2$, je kladný nejen celkový přírůstek energie, ale dokonce i přírůstky od obou dílčích částí. Ohybová deformace a výchylky křídélka se tedy budí navzájem a tento případ může vést k divergenci.

Vybrané případy na obrázcích (Obr. 14), (Obr. 15) a (Obr. 16) jsou záměrně jednoduché, aby dobře posloužily k demonstraci teorie uvedené v první půli kapitoly. Praxe může být o dost komplikovanější, zvláště u *flutteru* s více stupni volnosti. Obecně je proměnný i fázový posuv a tvar kmitů může být jak symetrický, tak antisymetrický – viz (Obr. 17). K divergenci však může dojít vždy pouze v případech, kdy je celková energetická bilance cyklu pozitivní.



Obr. 17: Symetrický a antisymetrický tvar kmitu [2]

Na závěr kapitoly o *flutteru* je dobré uvést ještě princip řešení kritického stavu. Ten je nastíněn už na schématech (Obr. 13) a (Obr.15) a vychází z podmínky energetické rovnováhy systému. Této rovnováhy je dosaženo ve chvíli, kdy se hodnota veličiny celkového tlumení rovná právě nule, a soustava tak koná harmonický kmitavý pohyb. Systém se tedy popíše soustavou pohybových rovnic, jejichž počet závisí na množství stupňů volnosti, ze kterých se posléze utvoří tzv. matice *flutteru*, jejíž determinant musí být pro harmonický pohyb roven nule. Její podoba závisí na použité metodě řešení a stejně tak i interpretace vyřešených vlastních čísel. Principem všech metod je ale nalezení bodu nulového celkového tlumení a jemu odpovídající frekvence a kritické rychlosti *flutteru* v_F .

3 Teoretický rozbor *whirl flutteru*

3.1 Souhrn literatury

Analytické řešení *whirl flutteru* se zakládá na poznatcích ze 60. let minulého století, kdy se v reakci na dva po sobě jdoucí pády letounu Lockheed L-188C Electra II rozběhlo rozsáhlé vyšetřování příčin těchto havárií. Prvním významným dokumentem je technická zpráva NASA nesoucí název *An Analytical Treatment of Aircraft Propeller Precession Instability* od autorů Wilmera H. Reeda a Samuela R. Blanda z roku 1961 [8]. Zpráva předkládá oproti realitě značně zjednodušený model instalace turbovrtulové pohonné jednotky včetně základního matematického popisu dynamiky precesního pohybu, který tento systém koná při *whirl flutteru*. Pohybové rovnice jsou před řešením nejdříve převedeny do bezrozměrné podoby, aby mohly být obdržené výsledky v závěru porovnány s experimentálními hodnotami získanými měřeními na aeroelastickém modelu letounu v transsonickém aerodynamickém tunelu. Současně zpráva obsahuje také řešení podmínek potřebných pro stabilitu zkoumaného jevu a analýzu citlivosti stabilitních mezí na změnu vybraných parametrů. Pro řešení aerodynamických sil, které vznikají na vrtuli při vychýlení osy rotoru, využívají autoři vztahy, které pro příslušné bezrozměrné aerodynamické koeficienty odvodil ve své práci *Propellers in Yaw* Herbert S. Ribner [9].

Na tuto studii navazuje Reed, tentokrát ve spolupráci s Johnem C. Houboltem, další stěžejní prací – s názvem *Propeller-Nacelle Whirl Flutter* [10]. Dílo vychází v *Journal of the Aerospace Sciences* v roce 1962 a obsahuje rozšíření předcházejících poznatků zejména o detailnější rozbor vlivu klíčových parametrů na meze stability, dále prezentuje jiný typ výpočtového modelu *whirl flutteru* a hlavně obsahuje vlastní přístup k řešení aerodynamiky vrtule. Ten je založen na tzv. *Strip Theory* (teorie izolovaného elementu listu) a v závěru obsahuje i metodiku potřebnou k zakomponování vlivu nestacionárního proudění. Reed později vydává ještě dvě zprávy [11] [12], v nichž shrnuje dosavadní poznatky.

V následujících letech samozřejmě spolu s prohlubováním a rozšiřováním znalostí problematiky vychází mnoho dalších odborných publikací na toto téma. Z hlediska *whirl flutteru* turbovrtulových motorů je zvláště důležitá například technická zpráva NASA z roku 1964 nesoucí název *Experimental and Analytical Investigation of Propeller Whirl Flutter of a Power Plant on a Flexible Wing* [13] od Roberta M. Bennetta a Samuela R. Blanda. Autoři v ní

prezentují rozšíření výpočtového modelu o poddajné křídlo (předchozí zmíněné dokumenty pracují s předpokladem, že křídlo je absolutně tuhé), čímž se idealizovaný systém výrazně přiblíží reálnému stavu, nicméně značně stoupá i obtížnost už tak komplikovaného řešení. Počet stupňů volnosti vzrůstá ze dvou na čtyři, protože k původním dvěma izolovaným vibračním módům (klopení a otáčení motorové gondoly spolu s motorem a vrtulí) přibývá ještě ohyb a torze křídla. Neméně významným posunem je potom report *Propeller/Nacelle Whirl Flutter Addition to MSC/NASTRAN* Williama P. Roddena a Teda L. Rose z roku 1989 [14]. Zpráva pojednává o možnosti využití MKP výpočetního softwaru MSC Nastran pro řešení *whirl flutteru* s pomocí preprocesoru pro výpočet aerodynamických a gyroskopických sil. Samotný Nastran bez podobného programu použít nelze.

Obsáhlou rešerši teorie (včetně již zmíněných publikací) vydává knižně v roce 2015 Jiří Čečrdle pod názvem *Whirl Flutter of Turboprop Aircraft Structures* [7]. Jak napovídá název, kniha je zaměřená zejména na *flutter* turbovrtulových motorů, nicméně se okrajově zabývá i složitější teorií určenou pro letouny s překlopnými rotory či vrtulníky. Kromě souhrnu analytických metod obsahuje také kapitolu týkající se experimentálního výzkumu a informace ohledně certifikačního procesu s ohledem na *whirl flutter* včetně vybraných příkladů z praxe.

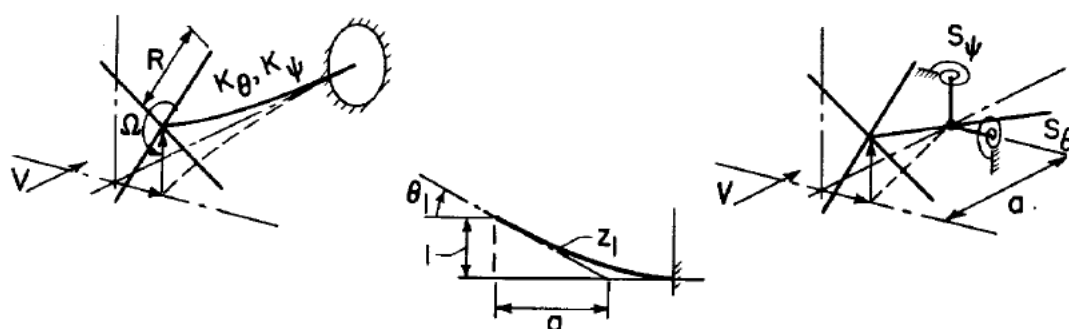
Kromě Čečrdleho knihy nebylo dosud publikováno žádné jiné podobně souhrnné dílo s touto tematikou. Zejména pak chybí literatura, která by obsahovala ucelený a dobře srozumitelný výklad základní problematiky, což činí prvotní seznámení se s *whirl flutterem* poměrně bolestným. V několika kapitolách se tomu věnuje Richard L. Bielawa v knize *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity* [15], text je však poměrně stručný. Výše zmíněná Čečrdleho kniha zase sice v analytické části obsahuje potřebné matematické popisy, nicméně často čistě přejaté z původních zdrojů, ve kterých autoři používají např. jiné souřadné systémy či jiné drobné odlišnosti, což při absenci vysvětlujících komentářů nepříjemně komplikuje sestavení celku. Rovněž chybí popis mechanismu vzniku zkoumané nestability, který je naštěstí poměrně srozumitelně vysvětlen v článku *Notes on Propeller Whirl Flutter* od K. E. Bakera a kolektivu [16]. Pro dobrou orientaci v problematice je tedy vhodné začít u původních článků ze 60. let.

Následující popis teorie *whirl flutteru* je tedy založen zejména na člancích zmíněných v první polovině této sekce a vybraných kapitolách z knihy od Jiřího Čečrdleho a místy jsou doplněny informace z jiných zdrojů.

3.2 Fyzikální princip

3.2.1 Model systému

Základní idealizovaný model systému pro řešení *whirl flutteru* spočívá v pružném uložení turbovrtulového motoru na absolutně tuhém křídle. Dvě ekvivalentní varianty takového modelu předkládá Houbolt v [10]. V první variantě (Obr. 18 vlevo) je pohonná jednotka včetně gondoly reprezentována konzolovým nosníkem se spojitě rozloženou hmotností a tuhostí po své délce. Druhou variantou (Obr. 18 vpravo) je tatáž konstrukce, nyní však absolutně tuhá, upevněná v otočném pouzdře umístěném v určité délce za rovinou vrtule a uchyceném v rámu (křídle) pomocí dvou rotačních pružin. Vibrační charakteristiky obou systémů lze popsat pomocí dvou stupňů volnosti, tedy klopného pohybu ve vertikální rovině a otočného pohybu v rovině horizontální. Pro tuhosti, hmotnostní charakteristiky a další parametry obou systémů lze odvodit vzájemné vztahy, jak je naznačeno na (Obr. 18) dole. Ostatní relace lze nalézt v příloze zdroje [10]. Pro výpočty v této práci bude uvažován pouze model číslo dvě (na obrázku vpravo).



EQUIVALENCE:

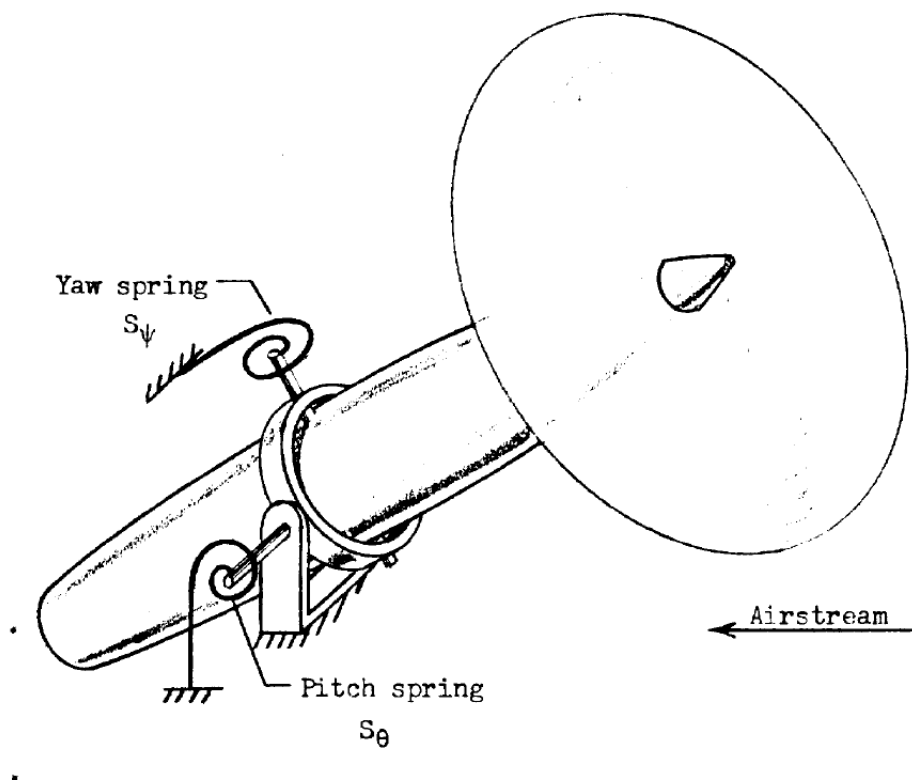
$$\frac{1}{\theta_1} \quad \text{EQUIVALENT TO} \quad a$$

$$K_\theta = \int E I_2 z_1''^2 dx \quad \text{EQUIVALENT TO} \quad \frac{S_\theta}{a^2} \quad \text{ETC}$$

Obr. 18: Nosíkový (konzolový) a závěsný typ modelu systému [12]

Názornější schéma použitého modelu je na (Obr. 19). Systém je vystaven podmínkám simulujícím motor za letu, na vrtuli tedy nabíhá proud vzduchu v_∞ . Vrtule rotuje úhlovou

rychlostí Ω a vrtulové listy jsou považovány za absolutně tuhé, což je předpoklad vyhovující pro standartní turbovrtulové jednotky, jak píše Čechrdle [7]: „*It is applicable for standard turboprop aircraft such as commuters, utility aircraft, military trainers, etc., for which the natural frequencies of the propeller blades are much higher than the frequencies of the engine system suspension vibrations. In large turboprops, in particular military transport aircraft with heavy multi-blade propellers, the solution requires taking into account the deformations of the propeller blades as well.*“ Řešeným problémem je stabilita pohybu modelu při skokové změně jinak ustálených vnějších podmínek, například při průletu poryvem.



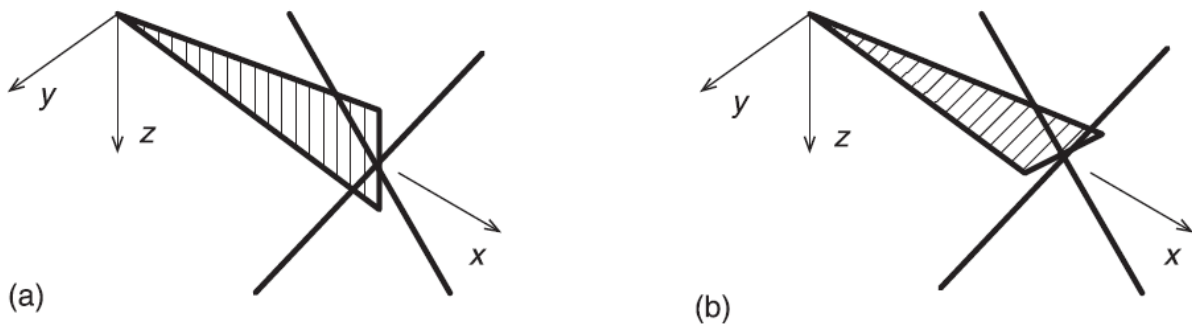
Obr. 19: Schéma závěsného modelu systému [8]

3.2.2 Gyroskopické silové účinky

Pro vysvětlení principu *whirl flutteru* je výhodné nejdříve separovat stěžejní silové účinky působící na takovýto systém a prozkoumat jejich vliv na sledovaný vibrační pohyb. V první řadě jsou to gyroskopické efekty.

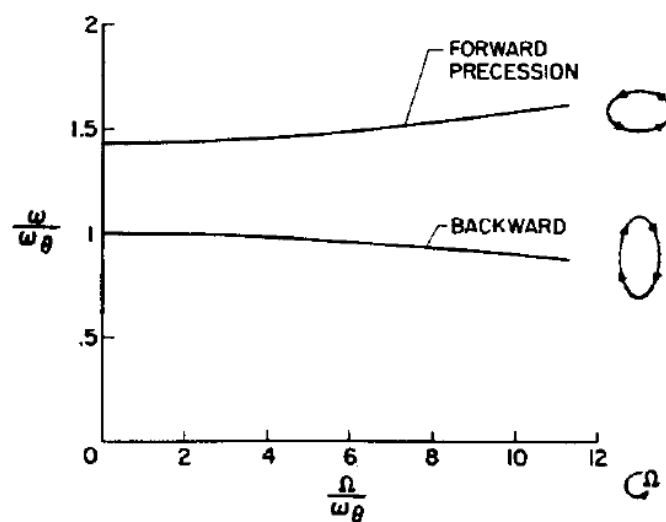
Ve stavu, kdy je motor vypnutý a vrtule nerotuje, se při současném zanedbání tlumicích sil může ofukovaný systém přirozeně rozvíbrovat nezávisle jak podle horizontální, tak podle vertikální osy. Tyto dva přirozené módy či vlastní tvary kmitu jsou znázorněny na (Obr. 20). Klopný mód (varianta a) představuje vibrace okolo horizontální osy a systém při něm kmitá

s vlastní úhlovou frekvencí, označenou ω_{Θ} . Otáčivý mód (varianta b) je pak charakterizován pohybem kolem vertikální osy s vlastní úhlovou frekvencí ω_{Ψ} .



Obr. 20: Izolované vlastní tvary kmitu, (a) – klopný mód, (b) – otáčivý mód [7]

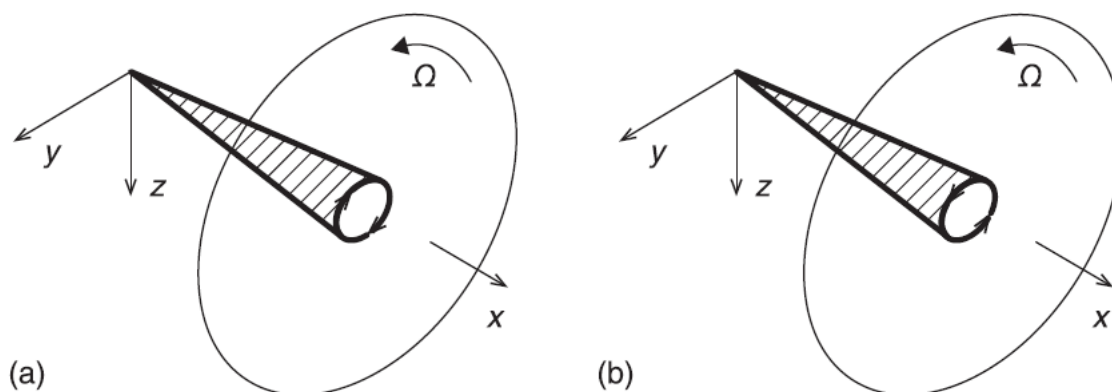
Jiná situace nastává ve chvíli, kdy je motor spuštěn. Za předpokladu zanedbání aerodynamických sil, které na rotující vrtuli vznikají, a při současném ponechání tlumení na nule se model chová jako gyroskopické kyvadlo [10]. To znamená, že ve chvíli, kdy se systém například pohybuje zpět z počátečního naklopení o úhel Θ okolo horizontální osy, vyvolává jeho úhlová rychlost $\dot{\Theta}$ reakční gyroskopický moment působící okolo vertikální osy. Ten způsobí, že systém začne okolo této osy zatáčet úhlovou rychlostí $\dot{\Psi}$. To samé platí i opačně, takže tato úhlová rychlost vyvolává gyroskopický moment okolo horizontální osy a smyčka je tak uzavřena. Z toho plyne zásadní poznatek, že oba dříve zmíněné módy, které se při vypnutém motoru mohly nezávisle objevit v horizontální či vertikální rovině, jsou pro rotující vrtuli vždy sdružené gyroskopickými efekty. Namísto rovinného jsou tedy oba charakterizovány pohybem precesním.



Obr. 21: Vlastní precesní frekvence módů sdružených gyroskopickými efekty vrtule [10]

Další informace ohledně tohoto charakteristického pohybu lze získat z grafu na (Obr. 21), který prezentuje Houbolt v [10]. Graf zobrazuje průběh precesních úhlových frekvencí při zvyšování rychlosti otáčení vrtule a byl získán pro dvakrát větší tuhost ve směru otáčení K_{Ψ} oproti tuhosti ve směru klopení K_{Θ} . Tím pádem je poměr vlastních úhlových frekvencí izolovaných módů $\omega_{\Psi}/\omega_{\Theta}$ v počátku grafu – tedy pro nehybnou vrtuli – roven $\sqrt{2}$. Veličina ω značí precesní úhlovou frekvenci již ovlivněnou gyroskopickými efekty a Ω úhlovou rychlost vrtule. Použitý výpočtový model je sice konzolový (Obr. 18 vlevo), nicméně to nemá na interpretaci grafu vliv vzhledem k tomu, že se oba uvedené systémy chovají stejně.

Z grafu je patrné, že zvyšování úhlové rychlosti vrtule vede skrze rovněž narůstající gyroskopický efekt k postupnému snižování hodnoty menší úhlové frekvence a nárůstu hodnoty větší úhlové frekvence. Rozdíl mezi jednotlivými sdruženými módy se tedy zvyšuje. Na pravé straně grafu jsou také schematicky znázorněny elipsy, které osa rotoru opisuje při daném precesním pohybu, včetně směru. Na základě toho lze konstatovat, že pro mód s nižší úhlovou frekvencí koná osa rotoru precesní pohyb proti směru otáčení vrtule a v případě módu s vyšší úhlovou frekvencí po směru jejího otáčení. Orientace pohybu jednotlivých módů vzhledem k rotaci vrtule je také důvodem k jejich příslušnému označení, tedy jako mód dopředný a zpětný. Názorné 3D zobrazení je na (Obr. 22):



Obr. 22: Sdružené módy, (a) zpětný mód, (b) dopředný mód [7]

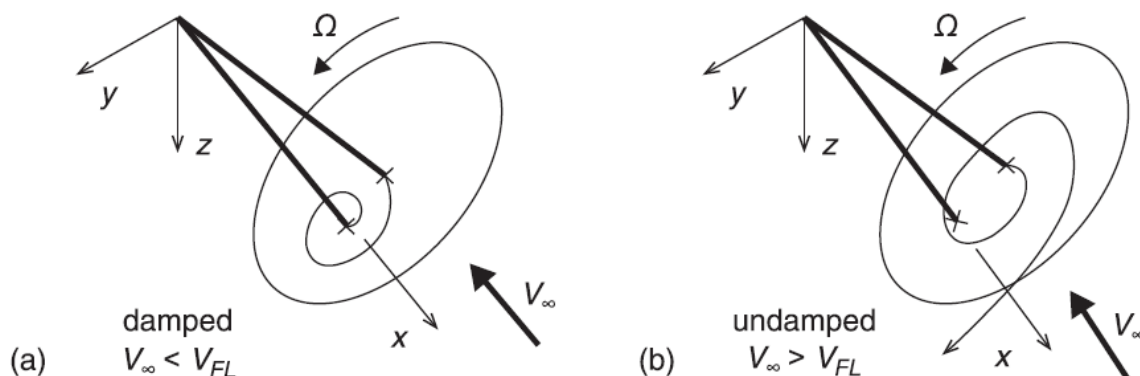
3.2.3 Aerodynamické silové účinky

3.2.3.1 Stabilita

Shrnutím předcházející podkapitoly může být tvrzení, že gyroskopické účinky rotující vrtule sdružují izolované vlastní tvary kmitu do popsaných precesních tvarů, dopředného a zpětného.

Z hlediska stability vibračního pohybu ovšem samy o sobě² nemají význam (platí pouze pro předpoklad absolutně tuhých vrtulových listů, jak píše Houbolt v [10]: „*If the propeller blades are sufficiently flexible, a mechanical instability of the type sometimes encountered in helicopters can occur*“). Gyroskopické momenty totiž sice mění charakter pohybu systému, nejsou však zdrojem žádné přídavné energie. Ke vzniku nestability je potřeba mechanismus dodávající větší množství energie, než je systém schopen disipovat, viz podkapitola (2.3.3.1).

Jiná situace ovšem nastává ve chvíli, kdy se vezme v potaz aerodynamika vrtule. Precesní pohyb vyvolaný gyroskopickými momenty totiž vede ke změně rychlostních poměrů na vrtulových listech a v důsledku toho také ke změnám náběhových úhlů. Vrtule tak oproti ustálenému stavu generuje přídavné nestacionární aerodynamické síly a momenty, které za specifických podmínek mohou způsobit divergenci. Při uvažování tlumení má stabilní pohyb charakter zmenšujícího se víru a nestabilní pohyb zvětšujícího se víru, podle kterého se také zkoumaný aeroelastický jev nazývá *whirl flutter* – vířivé třepetání, viz (Obr. 23):



Obr. 23: Stabilní (a) a nestabilní (b) stav precesního vibračního pohybu [7]

Při zafixování ostatních systémových parametrů (rozměry, tuhosti atd.), což je případ konkrétní pohonné jednotky uložené na křídle letounu, rozhodují o stabilitě dva vstupní parametry, které mají přímý vliv na velikost aerodynamických sil. Je to jednak úhlová rychlost vrtule Ω a potom rychlost nabíhajícího proudu v_∞ . Při uvažování konstantních otáček je tedy princip hledání bezpečné oblasti stejný jako u klasického *flutteru* – viz. podkapitola (2.3.3.1). Dojde-li k průletu poryvem, který dodá systému počáteční pohybový impuls, při určité letové

² V kombinaci s aerodynamickou zátěží ovšem mechanismus vzniku nestability nepřímou ovlivňují, jak bude demonstrováno v části (3.2.4).

rychlosti, energie vstupující do systému skrze aerodynamické účinky se právě vyrovná s energií, která ze systému odchází disipací. V tu chvíli je systém neutrálně stabilní. Rychlost, při které k tomu dojde, je nazvána kritickou rychlostí *flutteru* v_{FL} . Při rychlostech nižších je soustava stabilní a vibrace se postupně utlumí, pro vyšší rychlosti je dostupné tlumení nedostatečné. Systém se tak stává nestabilním a koná divergentní pohyb, jak je naznačeno na (Obr. 23). Jak bude později ukázáno, pro předpoklad absolutně tuhé vrtule může nestabilita nastat pouze ve zpětném módu víření. Při hodně poddimenzované tuhosti některé z pružin může dojít ke specifickému případu, kdy namísto rozkmitání systému dojde rovnou k nestabilnímu pohybu ve směru této slabiny. Tento jev se nazývá gyroskopická statická divergence [7].

3.2.3.2 Aerodynamické síly a momenty vznikající na vrtuli při vychýlení z osy

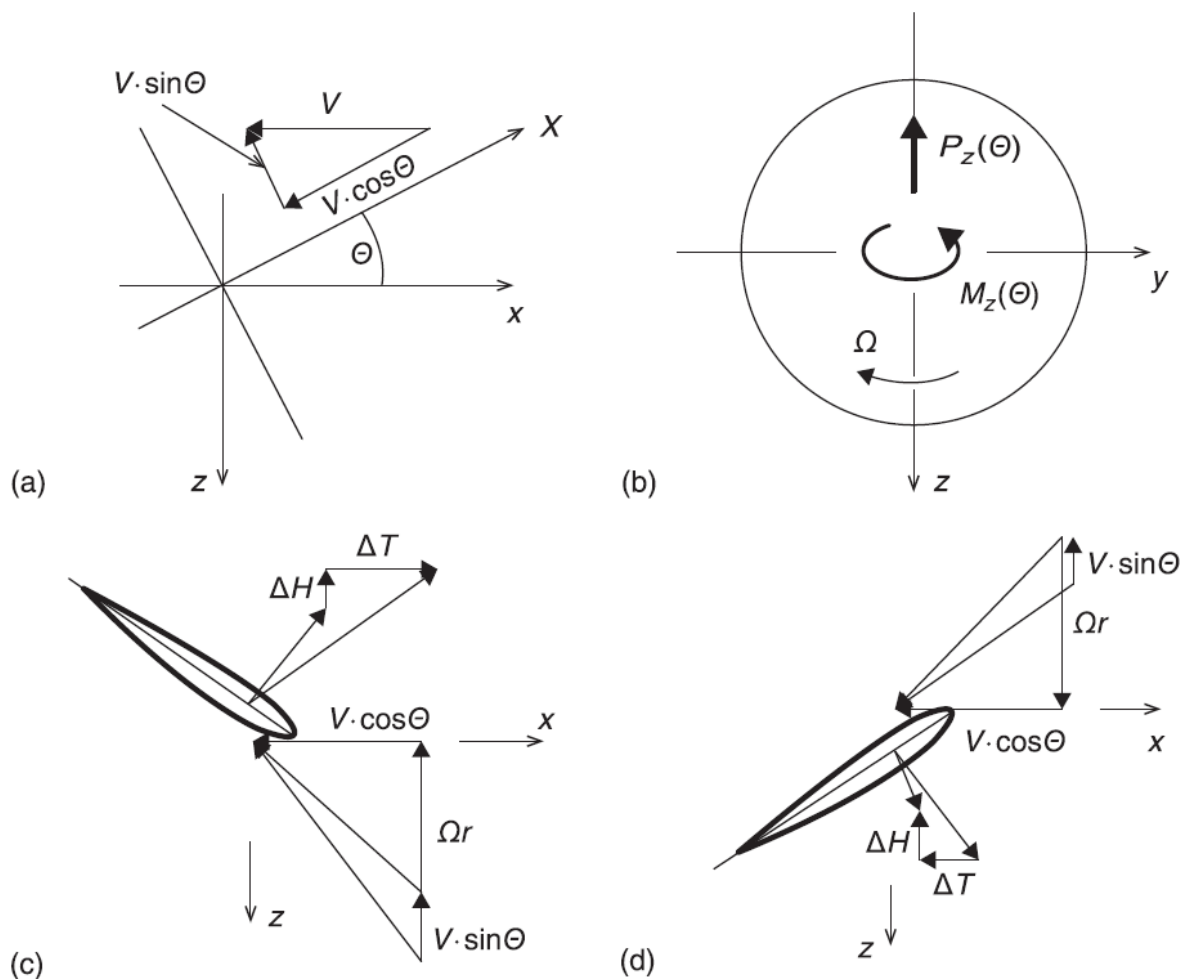
Z předcházející podkapitoly vyplývá, že právě aerodynamické síly jsou za určitých podmínek odpovědné za vznik mechanismu *whirl flutteru*. Vliv ostatních sil působících v rámci tohoto mechanismu, tedy elastických, tlumících a setrvačných, bude naznačen v další sekci. Nejdříve je však třeba prozkoumat hlouběji první zmíněné.

Jak již bylo řečeno, na vrtuli vznikají přídatné síly při jejím vychýlení ze statické osy. Tyto síly lze identifikovat pomocí vyjmutého elementu listu na základě kvazistacionární teorie [7]. Řešení je založeno na předpokladu, že proud vzduchu na vrtulový disk nabíhá kolmo, odporová složka aerodynamické síly je zanedbána. Rovněž je zanedbán statický tah³ protože nemá na *whirl flutter* při vysokých rychlostech letu přílišný vliv [12]. Odvození výpočtu bude ukázáno v detailu ve speciální kapitole, následující rozbor je proveden z důvodu demonstrace principu zkoumaného jevu.

Vznikající síly jsou výsledkem tří různých pohybových charakteristik, které dohromady identifikují celkovou precesi. Jedná se o úhlový posuv v obou směrech (Θ , Ψ), úhlovou rychlost v obou směrech ($\dot{\Theta}$, $\dot{\Psi}$) a horizontální či vertikální rychlost vrtulového náboje (\dot{y} , \dot{z}). Z důvodu symetrie však stačí vyšetřit pouze jednu rovinu pohybu. V souladu s Čečrdleho knihou [7] je zvolena vertikální rovina odpovídající klopení Θ .

³ Zanedbání se týká až derivace aerodynamických součinitelů v podkapitole (3.3.4). Na (Obr. 24) – (Obr. 26) uvažován je. Příslušné změny v silových poměrech na vrtulových listech jsou vyjádřeny pomocí rozdílu horizontální (v rovině rotace vrtule) a vertikální (kolmá na rovinu rotace) složky výsledné aerodynamické síly působící na element.

Z důvodu popisu mechanismu *whirl flutteru* v další sekci, provedeného na základě [16], je vhodné už v této části odvozené síly rozřadit podle příslušné terminologie. Článek [16] zavádí členění aerodynamických sil a momentů na aerodynamickou tuhost a aerodynamické tlumení podle toho, jsou-li funkcí příslušného úhlového posuvu či úhlové rychlosti, obdobně jako u klasických *flutterových* analýz, viz podkapitola (2.3.3.1). Dále pak, vzhledem k tomu, že pohyb v jedné rovině vytváří na vrtuli síly a momenty s působišťem v rovině druhé a naopak, jsou tyto silové účinky označeny pomocí termínů křížová tuhost a křížové tlumení. Členění se provádí podle stejného klíče jako u dříve zmíněných sil s přímou působností.



Obr. 24: Aerodynamické síly vznikající v důsledku naklonění (úhel θ) [7]

Na (Obr. 24) je schematicky zobrazena situace, kdy je osa vrtule nakloněná oproti nabíhajícímu proudu vzduchu v_∞ (na obrázku V) o úhel θ . Celkovou rychlost je možné rozdělit do složky nabíhající proti směru nakloněné osy a složky rovnoběžné s vrtulovým diskem, tak jako na (Obr. 24 – a). Naklonění způsobí příslušné změny v rychlostních poměrech na

vrtulových listech, které se nacházejí v horizontální poloze. Element vyjmutý z listu na pravé straně při pohledu ve směru osy x (tedy jako při pohledu ve směru letu zezadu na vrtuli) je na (Obr. 24 – c). Levou stranu pak reprezentuje (Obr. 24 – d). Jak je na obrázku vidět, složka rychlosti proudu ($V \cdot \sin \Theta$) se na pravém listu pohybujícím se směrem dolů úhlovou rychlostí Ω přičte⁴ ke složce obvodové rychlosti ($\Omega \cdot r$). Tím pádem se také zvětší úhel náběhu výsledného proudu a naroste aerodynamická síla generovaná elementem. Přírůstek této síly je rozložen na horizontální složku ΔH a složku kolmou na vrtulový disk, tedy odpovídající tahu ΔT . Obdobná situace nastává na levém listu, kde ovšem dojde k odečtení příslušných rychlostí, a proto ke snížení úhlu náběhu. ΔT má tedy opačný charakter. Výsledkem integrace ΔH a ΔT přes jeden cyklus rotace vrtule je síla $P_z(\Theta)$ a moment $M_z(\Theta)$ zobrazené na (Obr. 24 – b), který představuje zmíněný zadní pohled na vrtulový disk (proti směru nabíhajícího proudu).

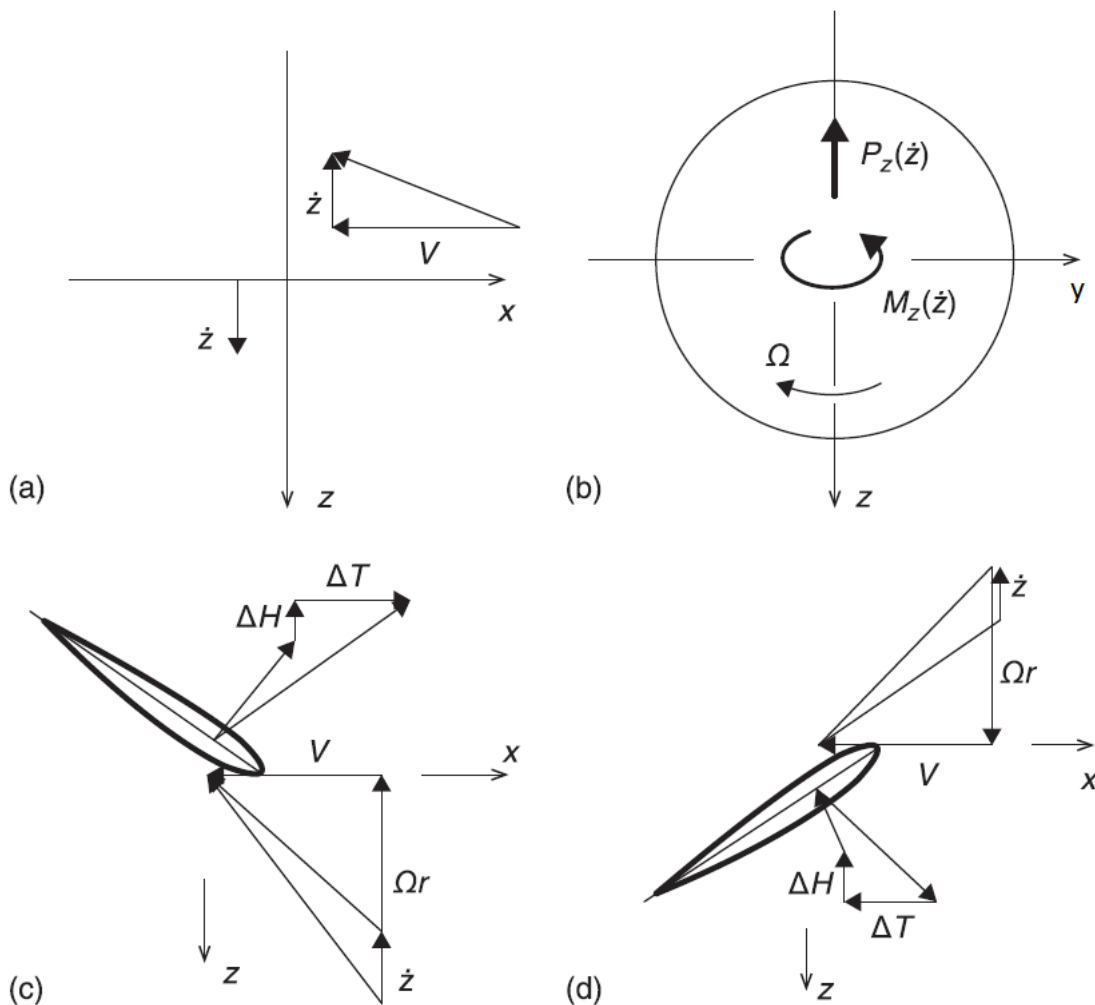
Vzhledem k tomu, že síla $P_z(\Theta)$ a moment $M_z(\Theta)$ jsou funkcí úhlového posuvu, jedná se s ohledem na dříve zavedenou terminologii o veličiny aerodynamické tuhosti. Moment $M_z(\Theta)$ navíc vzniká v důsledku naklopení ve vertikální rovině, ale způsobuje zatáčivý pohyb v rovině horizontální. Jde tedy o tuhost křížovou. Síla $P_z(\Theta)$ působí v opačném směru, než je kladný směr osy z , tím pádem má s ohledem na (Obr. 24) tendenci zvětšovat úhel Θ . Jedná se tedy o sílu, která umožňuje vznik již zmíněné statické divergence. Tento jev ovšem ve většině reálných případů nemá praktický význam, protože vnitřní elastické síly dané tuhostmi rotačních pružin (uložení) a působící proti smyslu $P_z(\Theta)$ jsou obvykle výrazně větší než tato síla [7]. Oproti tomu moment $M_z(\Theta)$ je zásadním silovým účinkem pro *whirl flutter*, protože zvětšuje úhel natočení Ψ v horizontální rovině při zpětném módu, což bude ukázáno v sekci (3.2.4.1). Jeho účinek je tedy destabilizující. Pokud má systém setrvat ve stabilním stavu, je nutné, aby byl právě tento moment vykompenzován silami s tlumícím účinkem.

Další veličinou charakterizující precesní pohyb *whirl flutteru* je vertikální rychlost. Na (Obr. 25) je tedy schéma rychlostních a silových poměrů na vrtuli v důsledku pohybu vrtulového náboje rychlostí \dot{z} v kladném⁵ směru osy z . Ze srovnání s (Obr. 24) je zřejmé, že aplikace kvazistacionární teorie vede v těchto dvou případech ke stejným výsledkům.

⁴ Obvodová složka rychlosti je orientována proti směru rotace vrtule, tedy tak jak přichází na profil.

⁵ Stejně jak bylo uvedeno v předchozí poznámce je třeba si uvědomit, že při pohybu vrtule určitým směrem nabíhá proud vzduchu na list ve směru opačném. Rychlost \dot{z} vrtulového náboje tedy směřuje v kladném směru osy z , ale vzniklá složka rychlosti proudu má orientaci opačnou. Viz (Obr. 25 – a).

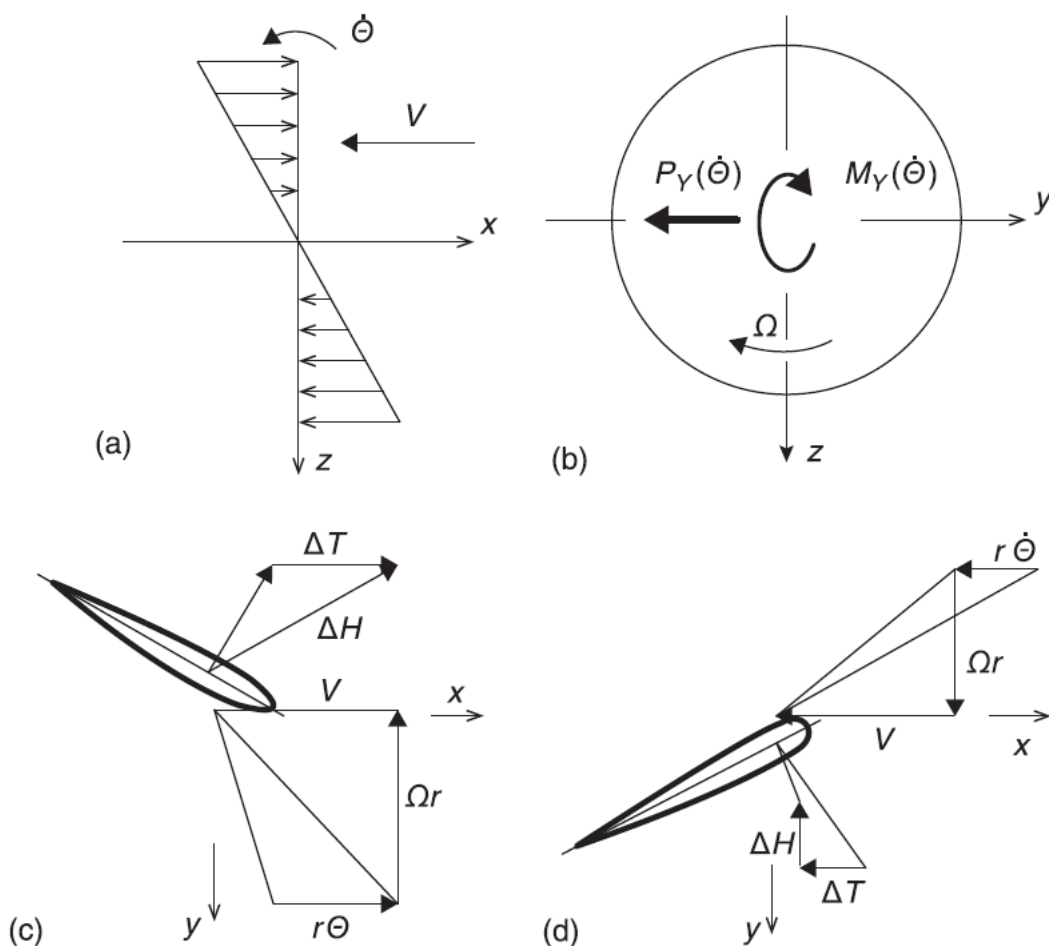
Síla $P_z(\dot{z})$ i moment $M_z(\dot{z})$ jsou funkcí rychlosti, a proto spadají do kategorie aerodynamického tlumení. V případě momentu se navíc jedná o tlumení křížové, protože je způsoben pohybem ve vertikální rovině, ale účinkuje v rovině horizontální. Za zmínku stojí fakt⁶, že na obou obrázcích je znázorněna jiná fáze pohybu, tedy na (Obr. 24) se systém naklápí směrem nahoru, kdežto na (Obr. 25) se pohybuje opačným směrem. Při uvažování stejné fáze by byl vektor síly $P_z(\dot{z})$ i momentu $M_z(\dot{z})$ orientován v kladném směru osy z , a tedy proti vektoru síly $P_z(\theta)$ a momentu $M_z(\theta)$. Tím pádem $P_z(\dot{z})$ a $M_z(\dot{z})$ skutečně představují zdroj aerodynamického tlumení systému. Protože \dot{z} je přímo závislá na $\dot{\theta}$, lze silové účinky $P_z(\dot{z})$ a $M_z(\dot{z})$ později vyjádřit jako funkce této úhlové rychlosti.



Obr. 25: Aerodynamické síly vznikající důsledkem rychlosti \dot{z} (na (b) opravena osa) [7]

⁶ Zobrazení přejaté z [7] je zde bez vysvětlení poněkud matoucí, protože čtenář má tendenci vidět ve stejném směru působící sílu a moment na obou obrázcích, kdežto v textu se dočte, že jedna dvojice vznikuje divergenci brání a druhá jej naopak podporuje.

Jako poslední zbývá určit změny rychlostních a silových poměrů na vrtuli v důsledku úhlové rychlosti $\dot{\theta}$. Schémata pro tento případ jsou na (Obr. 26). Na rozdíl od (Obr. 24) a (Obr. 25) jsou tentokrát zobrazeny elementy vyjmuté z listů, které se nacházejí ve vertikální poloze.



Obr. 26: Aerodynamické síly vznikající v důsledku úhlové rychlosti $\dot{\theta}$ [7]

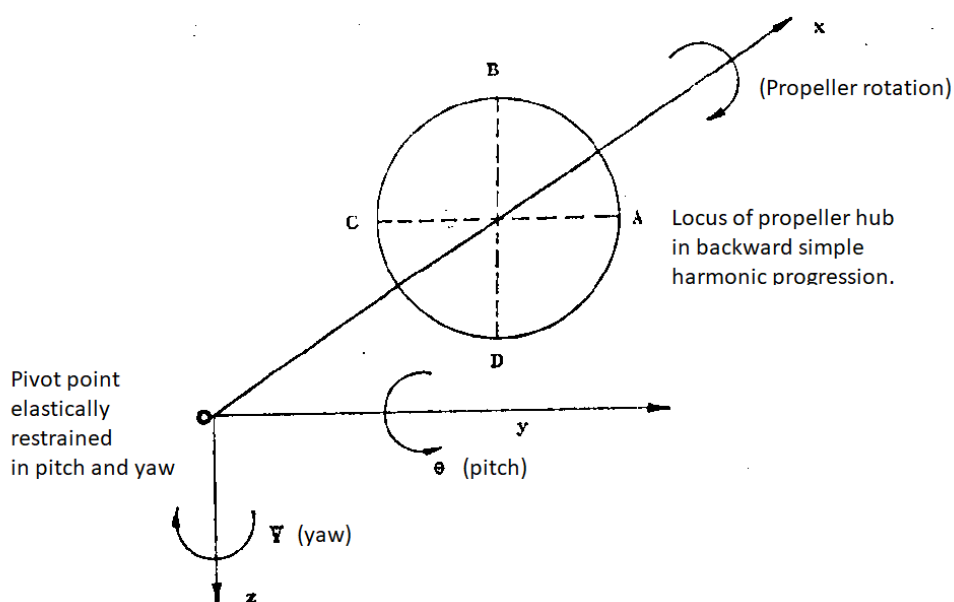
Jak je vidět na (Obr. 26 – a), při pohybu úhlovou rychlostí $\dot{\theta}$ v naznačeném směru vznikají na horní polovině vrtulového disku složky rychlosti na něj kolmé a působící proti směru nabíhajícího proudu vzduchu v_∞ (na obrázku V). Na spodní polovině jsou tyto složky orientovány opačně. Jejich velikost je rovna $(r \cdot \dot{\theta})$, kde r představuje vzdálenost vyjmutého elementu od středu vrtule. Element z horního listu je na (Obr. 26 – c), ze spodního listu na (Obr. 26 – d). Z rychlostních poměrů na elementu je zřejmé, že započtení vznikajících kolmých složek $(r \cdot \dot{\theta})$ vede u horního listu ke zvýšení úhlu náběhu, a tím pádem ke zvětšení vztlačové síly a u spodního listu naopak ke snížení. Integraci těchto efektů představuje vznikající moment $M_y(\dot{\theta})$ a boční síla $P_y(\dot{\theta})$, viz (Obr. 26 – b). Opět se v souladu s dříve zavedenou

terminologií jedná o veličiny aerodynamického tlumení. Boční síla $P_y(\dot{\theta})$ představuje tlumení křížové.

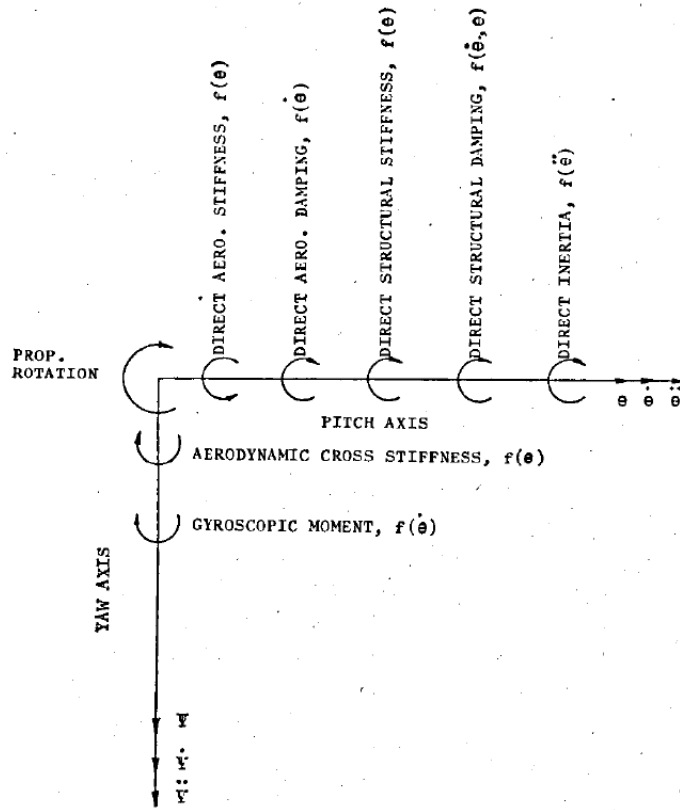
3.2.4 Mechanismus *whirl flutteru*

V podkapitolách (3.2.2) a (3.2.3) byl rozebrán význam silových efektů stěžejních pro *whirl flutter*. Gyroskopické momenty sdružují jinak izolované módy – horizontální a vertikální – do charakteristického precesního pohybu. Výsledné sdružené módy se liší na základě orientace pohybu vzhledem ke směru otáčení vrtule. Může tedy vzniknout dopředný mód, kdy systém rotuje souhlasně s vrtulí, anebo zpětný mód, při kterém se pohybuje proti směru otáčení vrtule. Precesní pohyb vede ke vzniku přídavných aerodynamických sil na vrtuli. Tyto síly lze rozčlenit na aerodynamickou tuhost a aerodynamické tlumení. Zásadní pro vznik statické nestability jsou síly $P_z(\theta)$ a $P_y(\psi)$, které vyvažuje elastická síla pružin, pro vznik dynamické nestability potom momenty $M_z(\theta)$ a $M_y(\psi)$ vyvažované aerodynamickým a konstrukčním tlumením. Některé ze sil a momentů mají křížový charakter, a proto přináší další propojení mezi pohybem v horizontální a vertikální rovině.

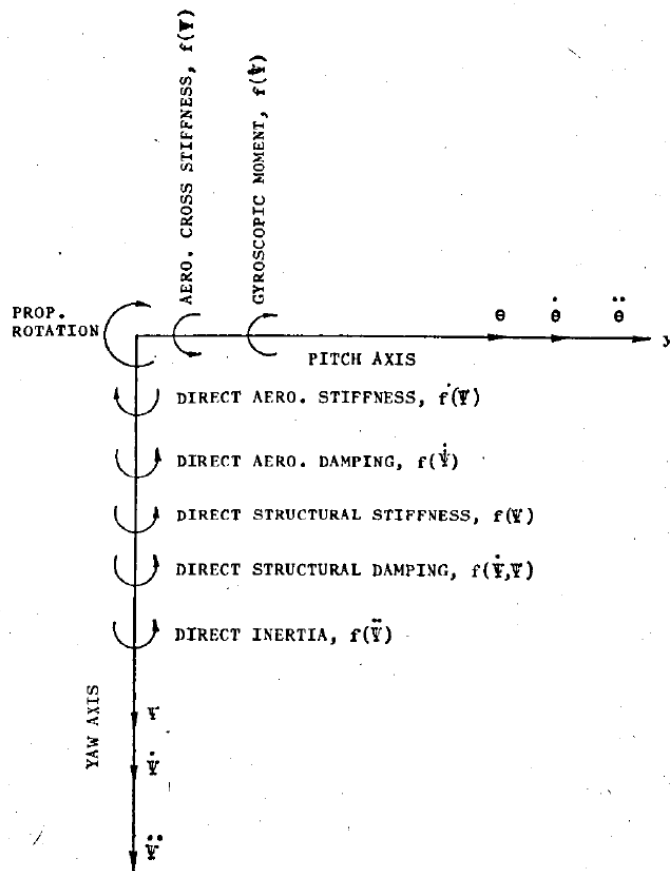
K odhalení mechanismu *whirl flutteru* je třeba znázornit jeden kompletní cyklus pohybu, který vibrující systém koná, a ukázat chování jednotlivých působících sil. Tento popis, s jehož významnou pomocí byla vytvořena tato kapitola, uvádějí autoři v [16].



Obr. 27: Schéma jednoho cyklu precesního pohybu systému pohonné jednotky [16]



Obr. 28: Momenty vznikající v důsledku veličin θ , $\dot{\theta}$ a $\ddot{\theta}$ [16]



Obr. 29: Momenty vznikající v důsledku veličin Ψ , $\dot{\Psi}$ a $\ddot{\Psi}$ [16]

Na (Obr. 27) je znázorněn precesní pohyb s konstantní amplitudou, který systém koná při zpětném vibračním módu. Zpětný mód je zvolen proto, že právě v něm dochází ke vzniku nestability, jak bylo řečeno dříve, v části (3.2.3.1), a bude zdůvodněno později. Systém je zobrazen v pohledu zezadu. Jako první je tedy vidět otočný čep, do kterého je umístěn střed souřadného systému, posléze kružnice s významnými body A, B, C a D, která představuje dráhu, již opíše vrtulový náboj během jednoho cyklu. Vrtule rotuje s konstantními otáčkami po směru hodinových ručiček. Tuhost rotačních pružin uložení je v obou směrech stejná.

Na (Obr. 28) a (Obr. 29) jsou vyobrazeny všechny⁷ celkové silové účinky vzhledem k příslušným osám. Jde o přímou i křížovou aerodynamickou tuhost a elastické síly vycházející z tuhosti pružin. Všechny zmíněné síly jsou funkcí úhlového posuvu. Dále pak přímé aerodynamické tlumení, konstrukční tlumení a gyroskopické síly. Velikost sil v této skupině závisí na úhlové rychlosti⁸. Poslední zbývají setrvačné účinky, které se odvíjejí od zrychlení. Na obrázku jsou také formou vektorů označeny směry rotačního pohybu obou os. Jak je vidět, v souladu se závěry z předchozí kapitoly, pouze momenty způsobené aerodynamickou tuhostí operují ve směru těchto pohybů, všechny ostatní působí proti (vyjma gyroskopických, které jsou nejednoznačné).

3.2.4.1 Princip vzniku dynamické divergence

Mechanismus, na základě kterého mohou aerodynamické síly dodávat do systému větší množství energie, než je schopen disipovat, a způsobit tak *whirl flutter*, je nyní možné odhalit pouze při znalosti proporcionality proti sobě působících sil. V bodě A na (Obr. 27) je naklopení Θ rovno nule a natočení Ψ naopak na maximální hodnotě. Pro úhlové rychlosti pak platí opak, tedy $\dot{\Theta}$ je na maximu a $\dot{\Psi}$ je rovno nule. Z toho také plyne, že i zrychlení $\ddot{\Theta}$ je nulové a $\ddot{\Psi}$ naopak maximální. Ze silového rozložení na (Obr. 28) a (Obr. 29) tedy vypadnou všechny momenty, které jsou závislé na veličinách s nulovou hodnotou. Při zaměření na rovnováhu pouze podél horizontální osy jsou jedinými zbylými silovými účinky působícími ve vertikální rovině křížová aerodynamická tuhost a přímé aerodynamické a konstrukční tlumení. Má-li systém setrvat v harmonickém pohybu, musí se tyto momenty vyrovnat.

⁷ Některé méně signifikantní silové účinky nejsou uvažovány – například křížové aerodynamické tlumení.

⁸ U konstrukčního tlumení záleží na použitém modelu – pro viskózní model je to rychlost, pro amplitudový model pak posuv.

Je zřejmé, že moment přímého aerodynamického tlumení závislý na úhlové rychlosti $\dot{\Theta}$ brání nárůstu úhlu Θ a moment křížové aerodynamické tuhosti, který je funkcí úhlu Ψ , naopak naklonění zvyšuje. Vzhledem k tomu, že je tlumicí aerodynamický moment úměrný⁹ rychlosti nabíhajícího proudu vzduchu v_∞ , křížový moment kvadrátu této rychlosti v_∞^2 a tlumicí konstrukční moment na ní není závislý, lze usoudit, že určitě existuje nějaká kritická rychlost proudu, při jejímž přesáhnutí bude společný účinek obou tlumicích momentů nižší než účinek momentu křížové tuhosti. Tím pádem přímo v bodě A dojde k nárůstu úhlu Θ , což je počátek divergence.

Obdobná situace nastává v bodě B, jenom jsou navzájem prohozené nulové a maximální hodnoty příslušných úhlů a rychlostí. Vzhledem k symetrickému charakteru aerodynamiky vrtule bude kritická rychlost, při které dojde k nárůstu úhlu Ψ v bodě B, stejná jako v bodě A. Ze stejného důvodu pak dojde k nárůstu úhlu Θ také v bodě C, respektive Ψ v bodě D. Vrtulový náboj tak už nekoná harmonický pohyb s konstantní amplitudou, nýbrž opisuje tvar divergentní spirály, typický pro *whirl flutter*.

Výše popsaný princip ukazuje, jakým způsobem mohou momenty křížové aerodynamické tuhosti způsobit nestabilitu. Zmiňované kritické rychlosti, při jejichž překročení k tomu dojde, jsou ovšem obvykle mimo rozsah přípustných letových rychlostí [16]. V rámci systému na (Obr. 27) existuje ovšem ještě jeden mechanismus, který bohužel tyto rychlosti snižuje.

3.2.4.2 Princip snižování kritické rychlosti

Předchozí popis vychází z momentové rovnováhy ve vertikální rovině s uvažováním pohybových parametrů v bodě A na (Obr. 27). Některé silové účinky na (Obr. 28) a (Obr. 29) nabydou v tomto místě nulových hodnot spolu s veličinami, na kterých jsou závislé. Efekt zbývajících momentů působících okolo horizontální osy byl popsán výše. Nyní je potřeba se zaměřit ještě na nenulové silové účinky působící v horizontální rovině, tedy okolo vertikální osy. Protože hodnoty Ψ , $\dot{\Psi}$, a $\dot{\Theta}$ jsou na maximu a ostatní naopak nulové, působí kolem osy z pouze moment přímé aerodynamické tuhosti, gyroskopický moment, setrvačný moment a vyvažující elastický moment příslušné pružiny.

⁹ Viz výpočtové vztahy v podkapitole (3.3.7)

Za předpokladu, že vrtule rotuje konstantními otáčkami, je gyroskopický moment v bodě A funkcí pouze úhlového zrychlení $\dot{\Theta}$. Vzhledem k jeho orientaci způsobuje nárůst natočení Ψ , a tím pádem v bodě A zvyšuje velikost momentu aerodynamické křížové tuhosti okolo horizontální osy, který je funkcí právě úhlového posuvu Ψ a který byl dříve identifikován jako odpovědný za vznik divergence. Z toho plyne, že rovnováhy ve vertikální rovině mezi součtem tlumicích momentů a křížovým momentem řešená v rámci prvního mechanismu vzniku divergence může být dosaženo při mnohem nižších rychlostech proudu vzduchu nabíhajícího na vrtuli [16]. Tím pádem se kritická rychlost vzniku nestability může dostat do intervalu přípustných letových rychlostí. Obdobná situace nastává i v bodech B, C a D, opět z důvodu symetrického charakteru vrtulové aerodynamiky. V bodech A a C dochází k nárůstu úhlu Ψ , v bodech B a D potom úhlu Θ . Vlivem působení gyroskopických momentů tedy příslušné křížové aerodynamické tuhosti nabývají na velikosti. Tomuto efektu do jisté míry brání opačně působící elastický moment spolu s tlumicím momentem aerodynamickým a naopak přímá aerodynamická tuhost tento efekt podporuje.

3.2.4.3 Princip vzniku statické divergence

Stejně jako v předchozí části je stále uvažován bod A na (Obr. 27) a rovnováha okolo vertikální osy. Elastický moment je závislý na tuhosti příslušné pružiny a jeho velikost se neodvíjí od rychlosti proudu vzduchu nabíhajícího na vrtuli. Vzhledem k tomu, že je aerodynamická tuhost funkcí kvadrátu rychlosti proudu v_{∞}^2 , dochází při určité kritické rychlosti k rovnováze elastického momentu s momentem přímé aerodynamické tuhosti (pro statickou divergenci se neuvažuje vliv tlumení, jelikož k rozkmitání vůbec nedochází). Při přesáhnutí této rychlosti nemá přímou aerodynamickou tuhost co vyvažovat a dochází ke kontinuálnímu pohybu systému ve směru jejího působení, což je princip gyroskopické statické divergence.

V oblastech, kdy se rychlost letu blíží kritické rychlosti statické divergence, tedy přímá aerodynamická tuhost navíc významně ovlivňuje nárůst úhlových posuvů Θ , respektive Ψ vlivem gyroskopických momentů skrze citelné snížení společných tlumicích efektů elastické síly a aerodynamického tlumení. Tím pádem se tedy více zvyšují i velikosti křížových aerodynamických tuhostí, a tedy snižuje kritická rychlost dynamické divergence – *whirl flutteru*. Vzhledem k tomu, že tuhosti reálných uložení jsou ovšem obvykle dostatečně vysoké, a velikost elastické síly je tedy v intervalu přípustných letových rychlostí dostatečně veliká, tento efekt nemá v praxi přílišný význam, jak už bylo řečeno v části (3.2.3.2).

3.2.4.4 Shrnutí získaných poznatků

V předcházejícím textu bylo ukázáno, že se uvažovaný model pohonné jednotky může dostat do oblasti nestabilních vibrací v důsledku působení křížových aerodynamických tuhostí, tedy stěžejních momentů $M_z(\Theta)$ a $M_y(\Psi)$. Gyroskopické momenty potom, krom sdružování jinak izolovaných módů do charakteristických precesních tvarů, významně snižují kritickou rychlost *whirl flutteru* v_{FL} , kdy k nestabilitě dojde. Mají totiž na svědomí navyšování úhlových posuvů Θ a Ψ , na kterých je velikost křížových aerodynamických tuhostí závislá. Tento efekt je navíc značně posílen ve chvíli, kdy se rychlost letu blíží rychlosti statické divergence.

Position	A		B		C		D	
	Pitch	Yaw	Pitch	Yaw	Pitch	Yaw	Pitch	Yaw
Co-ordinate								
Motion								
Displacement	0	Max	Max	0	0	-Max	-Max	0
Velocity	Max	0	0	-Max	-Max	0	0	Max
Acceleration	0	-Max	-Max	0	0	Max	Max	0
Forces								
Aero. Stiffness (V^2)	0	Max	Max	0	0	-Max	-Max	0
Aero. Damping (V)	-Max	0	0	-Max	Max	0	0	Max
Aero. Cross-Stiffness (V^2)	Max	0	0	Max	-Max	0	0	-Max
Gyroscopic	0	Max	Max	0	0	-Max	-Max	0
Structural Stiffness	0	-Max	-Max	0	0	Max	Max	0
Inertia	0	Max	Max	0	0	-Max	-Max	0
Structural Damping	-Max			-Max	Max	0	0	Max

Summation of pitch columns A + C, and yaw columns B + D indicate degree of stability. For simple harmonic motion all should be zero. For instability, A + B should be positive, C + D negative. Signs in columns consistent with system of axes used.

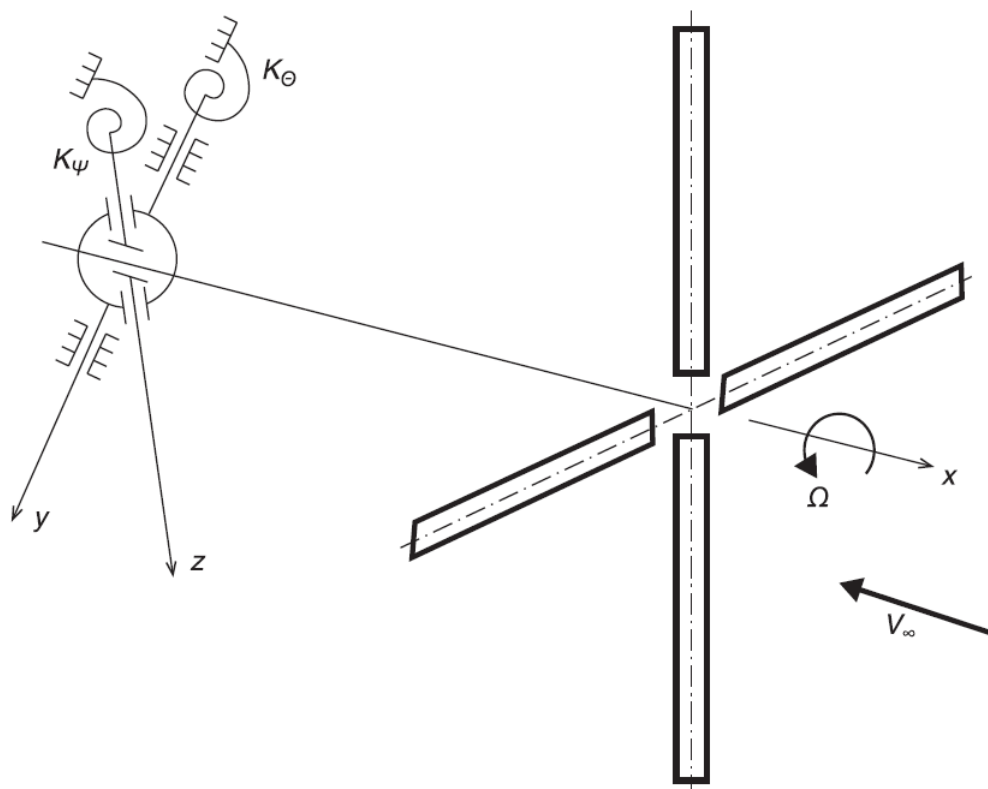
Obr. 30: Tabulka extrémních hodnot všech veličin v každém bodě cyklu z (Obr. 27) [16]

Na (Obr. 30) je tabulka shrnující všechny pohybové charakteristiky a dílčí silové efekty včetně jejich extrémních hodnot v bodech A, B, C a D ze schématu na (Obr. 27). U aerodynamických veličin je uvedena i jejich závislost na rychlosti proudu. Znaménka u příslušných maxim indikují směr působení a jsou v souladu s (Obr. 28) a (Obr. 29). Zaměřením se pouze na porovnání proti sobě působících silových efektů v jednotlivých bodech okolo příslušných os (tedy v rámci každého sloupce zvlášť) lze dojít ke stejným závěrům, které byly podrobně rozepsány v předchozích sekcích.

3.3 Matematická formulace problému

3.3.1 Pohybové rovnice vnitřně netlumené soustavy

Odvození dynamiky uvažovaného idealizovaného systému se dvěma stupni volnosti uvedené v [7] vychází z původní zprávy Reeda a Blanda [8]. Výsledné rovnice jsou oproti originálu upraveny do maticové formy, nicméně obsahují jen stručné komentáře, v důsledku čehož je lepší oba zdroje kombinovat. Uvedené matice navíc nezohledňují vliv zpoždění vztlaku. Formulace ke všemu není příliš vhodná pro řešení pomocí programu MATLAB a obsahuje jen jeden model vnitřního tlumení, takže jsou pro potřeby této práce provedeny určité změny. Schéma idealizovaného systému pohonné jednotky je na (Obr. 31):

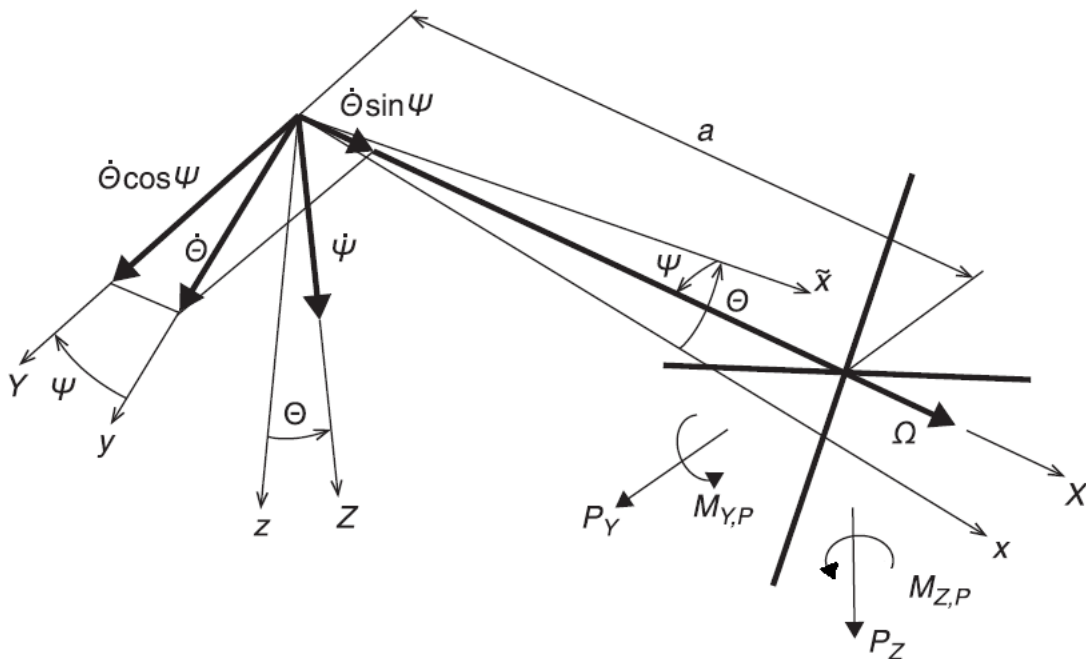


Obr. 31: Schéma výpočetního modelu systému [7]

Jak už bylo řečeno v podkapitole (3.2.1), celá kmitající soustava včetně vrtulových listů je uvažována jako absolutně tuhá, přičemž systém je na konci opačném směrem od vrtule přichycen k absolutně tuhému křídлу dvěma rotačními pružinami, které zastupují pružné uložení.

K derivaci pohybových rovnic jsou využity Lagrangeovy rovnice II. druhu, nejprve je tedy třeba stanovit jednotlivé energetické složky. Na (Obr. 32) je uvedeno kinematické schéma

systému. K popisu kinematiky je použit globální souřadný systém¹⁰ x, y, z pevně zakotvený v prostoru, vůči kterému se pohybuje druhý systém os X, Y, Z , který je spjatý s pohonnou jednotkou a nerotuje spolu s vrtulí. Popis je proveden pomocí Eulerovy transformace, příslušnými Eulerovými úhly mezi osami obou systémů jsou úhel naklopení Θ a úhel natočení Ψ .



Obr. 32: Kinematické schéma systému pohonné jednotky (opraven moment) [7]

Rotace probíhají následujícím způsobem:

- 1) Naklopení o úhel Θ okolo osy y globálního souřadného systému vede k novým souřadnicím \tilde{x} a Z .
- 2) Natočení o úhel Ψ kolem osy Z systému spjatého s pohonnou jednotkou dává nové souřadnice X a Y . Souřadnice Z se nemění.

Osa Z tedy setrvává ve vertikální rovině x - z globálního souřadného systému. Pozitivní směr rotací je na schématu naznačen pomocí příslušných vektorů v souladu s pravidlem pravé ruky. Celková úhlová rychlost rotujícího systému se skládá z vektorů $\dot{\Theta}$, $\dot{\Psi}$ a úhlové rychlosti vrtule Ω , viz (Obr. 32). Tyto vektory lze transformovat do složek ω_x , ω_y a ω_z působících okolo příslušných os pohybujícího se systému X, Y, Z .

¹⁰ Značení souřadných systémů na (Obr. 31) a (Obr. 32) spolu nesouvisí. (Obr. 31) je ilustrační, rovnice vychází z (Obr. 32).

Celková kinetická energie rotujícího systému je potom dána součtem:

$$E_K = \frac{1}{2}J_X\omega_X^2 + \frac{1}{2}J_Y\omega_Y^2 + \frac{1}{2}J_Z\omega_Z^2 \quad (3.1)$$

V rovnici (3.1) představuje veličina J_X polární moment setrvačnosti samotné vrtule k jejímu středu, veličiny J_Y a J_Z potom momenty setrvačnosti celého kmitajícího systému vzhledem k příslušným osám. Energie částí rotujících spolu s vrtulí, tedy např. kol kompresoru nebo turbíny atp., je zanedbána, protože je obecně považována za malou [8]. Dílčí úhlové rychlosti v pohybujícím se systému souřadnic jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned} \omega_X &= \Omega + \dot{\Theta} \sin \Psi \\ \omega_Y &= \dot{\Theta} \cos \Psi \\ \omega_Z &= \dot{\Psi} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Zavedením zásadního¹¹ předpokladu, že úhly Θ a Ψ jsou malé, lze jejich goniometrické funkce aproximovat:

$$\begin{aligned} \sin \Psi &\cong \Psi \\ \cos \Psi &\cong 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Úpravou rovnic (3.2) s ohledem na rovnice (3.3) a dále s uvážením, že součin $\dot{\Theta}^2\Psi^2$ je mnohem menší než kvadrát úhlové rychlosti vrtule Ω^2 , lze rovnici (3.1) přepsat do tvaru:

$$E_K = \frac{1}{2}J_X\Omega^2 + J_X\Omega\Psi\dot{\Theta} + \frac{1}{2}J_Y\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}J_Z\dot{\Psi}^2 \quad (3.4)$$

Potenciální energie pružnosti je dána vztahem:

$$E_P = \frac{1}{2}K_\Theta\Theta^2 + \frac{1}{2}K_\Psi\Psi^2 \quad (3.5)$$

Veličiny K_Θ a K_Ψ představují tuhosti rotačních pružin, viz (Obr. 31).

Lagrangeova rovnice druhého druhu zatím bez uvažování disipace energie má následující tvar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} + \frac{\partial E_P}{\partial q_i} = Q_{q_i} \quad (3.6)$$

¹¹ Tento předpoklad výrazně usnadňuje i pozdější řešení aerodynamických sil.

V rovnici (3.6) představuje člen q_i i -tou zobecněnou souřadnici, proměnná i je počet stupňů volnosti. V případě řešeného systému jsou tyto stupně dva a příslušné zobecněné souřadnice jsou úhly Θ a Ψ . Člen Q_{q_i} je pak zobecněná síla.

Zobecněnou sílu je možné určit pomocí virtuální práce, kterou vykonají aerodynamické síly virtuálním posuvem každé ze zobecněných souřadnic. Vyjádření těchto sil jakožto celkového aerodynamického momentu M_Z vzhledem k ose Z a M_Y k ose Y vede k celkové virtuální práci ve formě:

$$\delta W = M_Y \delta \Theta + M_Z \delta \Psi \quad (3.7)$$

Tím pádem jsou zobecněné silové momenty dány vztahy:

$$Q_\Theta = \frac{\delta W}{\delta \Theta} = M_Y \quad (3.8)$$

$$Q_\Psi = \frac{\delta W}{\delta \Psi} = M_Z$$

Nyní, dosazením vztahů pro kinetickou a potenciální energii z rovnic (3.4) a (3.5) a zobecněných momentů z rovnice (3.8) do Lagrangeovy rovnice (3.6) a provedením příslušných operací, vychází soustava diferenciálních pohybových rovnic vnitřně netlumené¹² soustavy takto:

$$J_Y \ddot{\Theta} + J_X \Omega \dot{\Psi} + K_\Theta \Theta = M_Y \quad (3.9)$$

$$J_Z \ddot{\Psi} - J_X \Omega \dot{\Theta} + K_\Psi \Psi = M_Z$$

3.3.2 Modely vnitřního tlumení a jejich implementace do pohybových rovnic

V podkapitole (2.3.3) byl stručně popsán význam vnitřního tlumení pro aeroelastické úlohy. V souvislosti s tím byly také okrajově zmíněny dva používané modely tlumících sil – viskózní a amplitudový. Nyní je potřeba tyto efekty matematicky formulovat a zahrnout do pohybových rovnic.

3.3.2.1 Viskózní model

Kopřiva v [1] píše, že „každá soustava s (vnitřním) tlumením je v podstatě neholonomním systémem a její pohyb není teoreticky možno popsat soustavou nezávislých zobecněných

¹² Soustava tlumená je, ovšem pouze aerodynamickými účinky.

souřadnic $q(t)$... Je však naštěstí možno ukázat, že Lagrangeovy rovnice zůstávají v platnosti i pro soustavu s tlumením, zavede-li se do nich vhodně upravená funkce ztrát“. Tuto disipační funkci pak definuje – s tím, že se sestavuje tak, aby při derivaci podle \dot{q}_i dávala potřebné velikosti tlumicí síly v jednotlivých stupních volnosti – následovně:

$$D = \frac{1}{2} \sum_{(i)} \sum_{(j)} d_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.10)$$

Členy d_{ij} mají význam obecných koeficientů tlumení a i -tá zobecněná tlumicí síla je dána vztahem:

$$Q_i^D = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.11)$$

Tím pádem se Lagrangeova rovnice (3.6) po zahrnutí (3.11) změní takto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} + \frac{\partial E_P}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_{q_i} \quad (3.12)$$

Rovnici (3.10) je možné přepsat do ekvivalentní maticové formy a je také beze změny platná pro viskózní model tlumení, který je přímo úměrný rychlosti. Při aplikaci na řešený systém pohonné jednotky tedy získá tvar:

$$D = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\Theta} & \dot{\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{\Theta} & 0 \\ 0 & d_{\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} d_{\Theta} \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} d_{\Psi} \dot{\Psi}^2 \quad (3.13)$$

Členy d_{Θ} a d_{Ψ} jsou koeficienty viskózního tlumení ve směru úhlu Θ , respektive Ψ . Provedením derivace disipační funkce v rámci Lagrangeovy rovnice (3.12) se tedy soustava pohybových diferenciálních rovnic (3.9) rozroste o členy viskózní tlumicí síly:

$$\begin{aligned} J_Y \ddot{\Theta} + d_{\Theta} \dot{\Theta} + J_X \Omega \dot{\Psi} + K_{\Theta} \Theta &= M_Y \\ J_Z \ddot{\Psi} + d_{\Psi} \dot{\Psi} - J_X \Omega \dot{\Theta} + K_{\Psi} \Psi &= M_Z \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3.2.2 Amplitudový model (materiálový útlum)

Předchozí stať zavádí do soustavy vliv vnitřního tlumení pomocí modelu, který je typický zejména pro kapaliny a plyny. V leteckých aplikacích se nicméně běžněji používá model vycházející z útlumu uvnitř konstrukčního materiálu vlivem tření mezi jeho molekulami. „Výsledné tlumicí síly jsou funkcí vnitřních pnutí, resp. pružných deformací při pohybu“ [1].

Princip je vysvětlen na chování kmitající nehmotné pružiny vnesením závislosti vznikající vnitřní elastické síly P na deformaci w , tedy hysterezní smyčky, viz [1]. Pro harmonicky kmitavý pohyb je časově proměnná velikost síly P dána vztahem:

$$P = P_0 \cos \omega t \quad (3.15)$$

Tomuto průběhu odpovídající pružná deformace pružiny s materiálovým útlumem vypadá takto:

$$w = w_0 \cos(\omega t - \gamma) \quad (3.16)$$

V rovnicích (3.15) a (3.16) vyjadřuje veličina ω úhlovou frekvenci kmitání, t je čas, P_0 a w_0 jsou amplitudy elastické síly, respektive deformace. Klíčovou veličinou je tzv. ztrátový úhel γ , o který se deformace opožďuje za elastickou silou, čímž je charakterizován vnitřní materiálový útlum.

„Obecně lze říci, že vnitřní tlumení v materiálu je v prvním přiblížení nezávislé na frekvenci kmitání a současně úměrné amplitudě, tedy v podstatě úměrné velikosti vznikající elastické síly. Materiálové tlumení lze tedy popsat tlumicí silou P^D , která je úměrná elastické vratné síle P^E a současně je ve fázi s rychlostí kmitavého pohybu, který probíhá s konstantní amplitudou,“ píše Kopřiva v [1]. S ohledem na to pak zavádí disipační funkci ve tvaru:

$$D = \frac{1}{2} \gamma \sum_{(i)} P_i^E \frac{\dot{q}_i^2}{\omega} \quad (3.17)$$

Rovnice (3.17) platí přesně pouze pro harmonické kmitání, a to za předpokladu, že je ztrátový úhel γ ve všech bodech soustavy stejný. Obdobnou formu disipační funkce použili Reed a Bland v [8] a přejímá ji i Čečrdle v [7]. Kopřiva nicméně v [1] dále uvádí, že je možné vyjádřit i -tou zobecněnou tlumicí sílu ve tvaru:

$$Q_i^D = i\gamma Q_i^E \quad (3.18)$$

První člen výrazu na pravé straně i představuje komplexní jednotku a Q_i^E je i -tá zobecněná elastická síla, která je rovna záporně vzaté parciální derivaci potenciální energie podle zobecněné souřadnice. Tím pádem lze Lagrangeovu rovnici (3.6) napsat ve tvaru, který zahrnuje materiálové tlumení, rovnou takto bez disipační funkce:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} + (1 + i\gamma) \frac{\partial E_P}{\partial q_i} = Q_{q_i} \quad (3.19)$$

Pro řešení soustavy s uvažováním amplitudového modelu vnitřního tlumení bude tedy v této práci použita rovnice (3.19). Při její aplikaci na řešený systém pohonné jednotky přejdou rovnice (3.9) do tvaru:

$$\begin{aligned} J_Y \ddot{\Theta} + J_X \Omega \dot{\Psi} + (1 + i\gamma_\Theta) K_\Theta \Theta &= M_Y \\ J_Z \ddot{\Psi} - J_X \Omega \dot{\Theta} + (1 + i\gamma_\Psi) K_\Psi \Psi &= M_Z \end{aligned} \quad (3.20)$$

Na závěr je třeba zmínit, že se do vnitřního tlumení řadí i disipace energie vlivem Coulombova (suchého) tření, které vzniká při vzájemném pohybu těles po jejich suchém povrchu, tedy například ve spojích mezi jednotlivými díly konstrukce, viz [1]. Pro tento typ není definována disipační funkce, tedy se jeho vliv zahrnuje do pohybových rovnic formou navýšení ztrátového úhlu. Pro reálnou konstrukci je tedy veličina γ chápána jako koeficient konstrukčního tlumení zahrnující v sobě všechny třecí ztráty.

3.3.3 Aerodynamické síly

V podkapitole (3.3.1) byly odvozeny pohybové rovnice kmitajícího systému pohonné jednotky, do kterých byly v kapitole předchozí doplněny členy reprezentující vnitřní tlumení v závislosti na použitém modelu. Jako poslední zbývá určit pravou stranu těchto rovnic, tedy aerodynamické síly generované vrtulí vychýlenou z osy. Principiálně byl jejich vnik popsán v části (3.2.3.2), nyní je však potřeba stanovit jejich velikost. Navíc byly ukázány jen nejzásadnější efekty a určení všech složek aerodynamických sil je složitější.

Na kinematickém schématu systému na (Obr. 32) jsou zakresleny celkové aerodynamické síly působící na vrtuli, tedy vertikální síla P_Z , horizontální síla P_Y a momenty v rovině vrtulového disku $M_{Z,P}$ a $M_{Y,P}$. S jejich pomocí lze vyjádřit zobecněné momenty v rovnicích (3.9), (3.14) a (3.19) takto:

$$\begin{aligned} M_Y &= M_{Y,P} - aP_Z \\ M_Z &= M_{Z,P} + aP_Y \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aerodynamické síly je možné obecně vyjádřit pomocí příslušných bezrozměrných koeficientů:

$$\begin{aligned} P_Y &= c_y \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 F_P \\ P_Z &= c_z \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 F_P \\ M_{Y,P} &= c_m \rho v_\infty^2 F_P R \\ M_{Z,P} &= c_n \rho v_\infty^2 F_P R \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pro dosažení do rovnic (3.21) je ovšem třeba stanovit velikosti těchto sil v závislosti na kmitavém pohybu systému pohonné jednotky, což je největším problémem analýzy *whirl flutteru*. Ve zdrojích [8] a [7] je uvedeno řešení na základě práce Herberta S. Ribnera [9], využívající systém¹³ derivací jednotlivých aerodynamických koeficientů vyjadřujících jejich změnu podle příslušných pohybových charakteristik:

$$\begin{aligned}
 c_{y\theta} &= \frac{\partial c_y}{\partial \theta} & c_{y\psi} &= \frac{\partial c_y}{\partial \psi} & c_{yq} &= \frac{\partial c_y}{\partial \left(\frac{\dot{\theta}R}{v_\infty}\right)} & c_{yr} &= \frac{\partial c_y}{\partial \left(\frac{\dot{\psi}R}{v_\infty}\right)} \\
 c_{z\theta} &= \frac{\partial c_z}{\partial \theta} & c_{z\psi} &= \frac{\partial c_z}{\partial \psi} & c_{zq} &= \frac{\partial c_z}{\partial \left(\frac{\dot{\theta}R}{v_\infty}\right)} & c_{zr} &= \frac{\partial c_z}{\partial \left(\frac{\dot{\psi}R}{v_\infty}\right)} \\
 c_{m\theta} &= \frac{\partial c_m}{\partial \theta} & c_{m\psi} &= \frac{\partial c_m}{\partial \psi} & c_{mq} &= \frac{\partial c_m}{\partial \left(\frac{\dot{\theta}R}{v_\infty}\right)} & c_{mr} &= \frac{\partial c_m}{\partial \left(\frac{\dot{\psi}R}{v_\infty}\right)} \\
 c_{n\theta} &= \frac{\partial c_n}{\partial \theta} & c_{n\psi} &= \frac{\partial c_n}{\partial \psi} & c_{nq} &= \frac{\partial c_n}{\partial \left(\frac{\dot{\theta}R}{v_\infty}\right)} & c_{nr} &= \frac{\partial c_n}{\partial \left(\frac{\dot{\psi}R}{v_\infty}\right)}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

S využitím vztahů (3.23) lze potom rovnice (3.22) přepsat do podoby:

$$\begin{aligned}
 P_Y &= q_\infty F_P \left(c_{y\theta} \bar{\theta} + c_{y\psi} \bar{\psi} + c_{yq} \frac{\dot{\theta}R}{v_\infty} + c_{yr} \frac{\dot{\psi}R}{v_\infty} \right) \\
 P_Z &= q_\infty F_P \left(c_{z\theta} \bar{\theta} + c_{z\psi} \bar{\psi} + c_{zq} \frac{\dot{\theta}R}{v_\infty} + c_{zr} \frac{\dot{\psi}R}{v_\infty} \right) \\
 M_{Y,P} &= q_\infty F_P D_P \left(c_{m\theta} \bar{\theta} + c_{m\psi} \bar{\psi} + c_{mq} \frac{\dot{\theta}R}{v_\infty} + c_{mr} \frac{\dot{\psi}R}{v_\infty} \right) \\
 M_{Z,P} &= q_\infty F_P D_P \left(c_{n\theta} \bar{\theta} + c_{n\psi} \bar{\psi} + c_{nq} \frac{\dot{\theta}R}{v_\infty} + c_{nr} \frac{\dot{\psi}R}{v_\infty} \right)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

V rovnici (3.24) představuje q_∞ dynamický tlak, F_P je plocha vrtulového disku, D_P je průměr vrtule a R poloměr vrtule. Úhly $\bar{\theta}$ a $\bar{\psi}$ jsou tzv. efektivní úhly mezi osou vrtule a proudem vzduchu v_∞ nabíhajícím na vrtuli [8]. Jsou definovány následovně:

¹³ Systém koeficientů (3.23) zahrnuje vliv nestacionární aerodynamiky, tedy efekt zpoždění vztlaku. Zdůvodnění v podkapitole (3.3.5).

$$\begin{aligned}\bar{\Theta} &= \Theta - \frac{\dot{z}}{v_{\infty}} = \Theta - \frac{a\dot{\Theta}}{v_{\infty}} \\ \bar{\Psi} &= \Psi - \frac{\dot{y}}{v_{\infty}} = \Psi - \frac{a\dot{\Psi}}{v_{\infty}}\end{aligned}\tag{3.25}$$

Tyto efektivní úhly jsou tvořeny ze dvou složek, tedy z geometrického úhlu, což je první člen na pravé straně rovnic (3.25), a z úhlu, který vznikne pohybem jednotky ve vertikálním nebo horizontálním směru, a ovlivní tak směr výsledné rychlosti proudu na vrtuli. Tímto způsobem je zohledněna situace z (Obr. 25) z podkapitoly (3.2.3.2), ovšem v širším měřítku, kdy translační rychlost vrtulového náboje ovlivňuje i velikost ostatních sil získaných pomocí kvazistacionární teorie. Hodnota rychlostní složky efektivních úhlů je dána opět tím, že jsou považovány za malé, tedy jejich sinus je jim přibližně roven. Výraz a je délka vyložení, viz (Obr. 32). Aerodynamická setrvačnost vznikající časovou derivací efektivních úhlů je v rovnicích (3.24) zanedbána.

S využitím symetrických vlastností vrtule jsou navíc koeficienty v rovnicích (3.23) vázány vztahy [7] [8]:

$$\begin{aligned}c_{y\Theta} &= c_{z\Psi} & c_{m\Theta} &= c_{n\Psi} \\ c_{yq} &= c_{zr} & c_{mq} &= c_{nr} \\ c_{y\Psi} &= -c_{z\Theta} & c_{m\Psi} &= -c_{n\Theta} \\ c_{yr} &= -c_{zq} & c_{mr} &= -c_{nq}\end{aligned}\tag{3.26}$$

Podle [7] navíc lze 4 z nich zanedbat díky jejich nízké hodnotě:

$$\begin{aligned}c_{mr} &= -c_{nq} = 0 \\ c_{yr} &= -c_{zq} = 0\end{aligned}\tag{3.27}$$

Reed a Bland [8] dokonce používají jenom¹⁴ 5 nezávislých koeficientů, tedy zanedbávají ještě:

$$c_{m\Theta} = c_{n\Psi} = 0\tag{3.28}$$

¹⁴ Používají Ribnerovy čtyři nezávislé koeficienty a pátý přidávají na základě jeho objevení v experimentu. Tehdy ještě nebylo známo řešení s vlivem nestacionární aerodynamiky, díky kterému se množství koeficientů zdvojnásobí.

S využitím předpokladů (3.27) a (3.28) lze rovnice (3.24) zjednodušit následujícím způsobem (předpoklad (3.26) bude zahrnut až v závěru odvození):

$$\begin{aligned}
 P_Y &= q_\infty F_P \left(c_{y\theta} \bar{\Theta} + c_{y\psi} \bar{\Psi} + c_{yq} \frac{\dot{\Theta} R}{v_\infty} \right) \\
 P_Z &= q_\infty F_P \left(c_{z\theta} \bar{\Theta} + c_{z\psi} \bar{\Psi} + c_{zr} \frac{\dot{\Psi} R}{v_\infty} \right) \\
 M_{Y,P} &= q_\infty F_P D_P \left(c_{m\psi} \bar{\Psi} + c_{mq} \frac{\dot{\Theta} R}{v_\infty} \right) \\
 M_{Z,P} &= q_\infty F_P D_P \left(c_{n\theta} \bar{\Theta} + c_{nr} \frac{\dot{\Psi} R}{v_\infty} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Dosazením rovnic (3.24) nebo zjednodušených rovnic (3.29) do vztahů pro zobecněné momenty (3.21) se stávají pohybové rovnice – (3.9), (3.14) a (3.20) – kmitajícího systému pohonné jednotky kompletními. Kromě neznámých, které vycházejí z vlastností konkrétní konstrukce, je zapotřebí určit vybrané aerodynamické koeficienty ze vztahů (3.23). To je možné buďto experimentálně, nebo analyticky. Vzhledem k tomu, že experimentální data obvykle nejsou k dispozici¹⁵, jsou k určení těchto koeficientů běžně používány výpočetní metody.

Základní analytickou metodu řešení aerodynamických koeficientů využitím teorie aerodynamiky izolovaného elementu¹⁶ předkládá ve své práci Ribner [9]. Další možností je řešení podle Houbolta a Reeda [10], provedené na základě aproximace prvního řádu výše zmíněné teorie [7]. Jejich přístup sice nevede přímo k hledaným koeficientům, protože odvození dává rovnou formulaci výsledných sil, nicméně protože jsou obě metody založeny na stejné teorii, jsou také navzájem porovnatelné. Koeficienty je potom možné získat srovnáním příslušných rovnic, jak autoři sami naznačují. Ribnerova metoda je sice přesnější nicméně také komplikovanější, a navíc neuvažuje některé koeficienty¹⁷, jak je uvedeno v [8]. Řešení tedy bude provedeno podle [10].

¹⁵ Potvrdil na osobní konzultaci autor knihy [7] pan Jiří Čečrdle, který se problematikou v praxi zabývá.

¹⁶ Z anglického Strip Theory Aerodynamics.

¹⁷ Ribner totiž neuvažuje vliv zpoždění vztaku. Uvažováním tohoto efektu se jeho původní systém osmi vzájemně provázaných koeficientů rozroste na šestnáct, tedy s uvažováním symetrie osm nezávislých – viz rovnice (3.23) a (3.26).

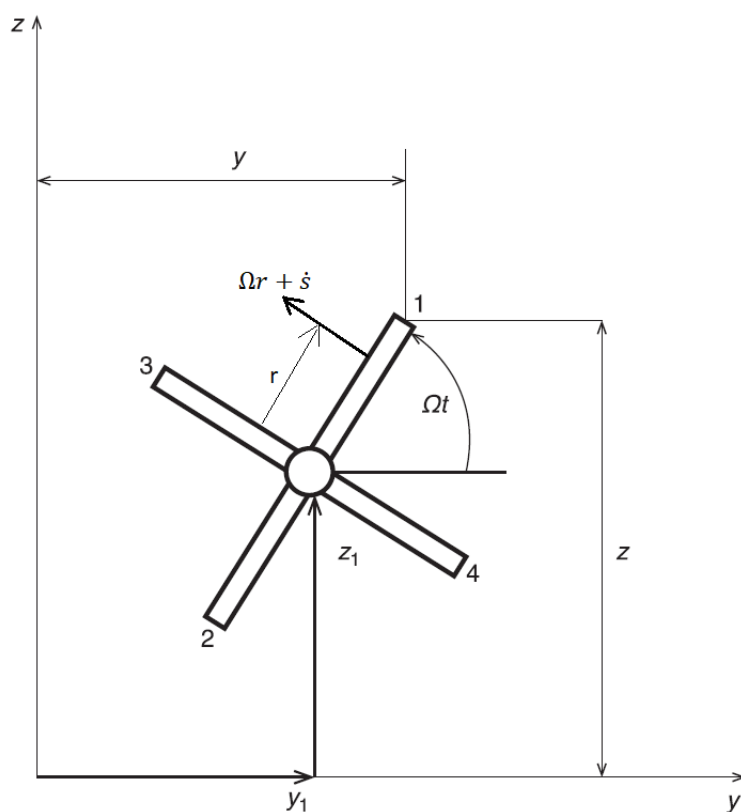
3.3.4 Analytický výpočet aerodynamických koeficientů

Jak bylo řečeno v předchozí kapitole, základní výpočet je založen na odvození prezentovaném v [10]. V téměř nezměněné formě ho uvádí také Čečrdle [7], přidává ovšem rozpracovanější a přehlednější systém korekcí na různé faktory, které jsou v [10] popsány pouze částečně. Důležité je zejména zahrnutí vlivu nestacionární aerodynamiky.

Odvození je provedeno na základě schématu na (Obr. 18) vpravo. V závěrečném vyjádření aerodynamických koeficientů platných pro výpočet podle schématu uvažovaného v této práci na (Obr. 32) je tedy potřeba zohlednit, že jsou souřadné systémy obou zmíněných schémat vzájemně pootočený kolem osy x o 180° . Pro celé odvození platí předpoklad malých úhlů.

3.3.4.1 Stanovení posuvů a perturbačních rychlostí

Schéma obecné polohy kmitajícího systému pohonné jednotky v pohledu ze směru nabíhajícího proudu vzduchu je na následujícím obrázku:



Obr. 33: Obecná poloha vrtulového disku (doplňen směr rychlosti $\Omega r + \dot{s}$) [7]

Kromě horizontálního a vertikálního posuvu, na (Obr. 33) značených jako y_1 a z_1 , je systém ještě naklonen o úhel Θ a natočen o úhel Ψ , což při pohledu zepředu není vidět, viz (Obr. 18) či přehledněji (Obr. 32), ovšem v jiné poloze a s jiným souřadným systémem.

Metoda určení aerodynamických sil objevujících se v důsledku kmitání systému je založena na vyjádření tří perturbačních veličin vznikajících pohybem vrtulového disku. Jde o:

- a) lokální změnu úhlu náběhu proudu vzduchu na element vrtulového listu $\Delta\alpha$
- b) perturbační složku rychlosti v rovině vrtulového disku \dot{s}
- c) perturbační složku rychlosti kolmou na vrtulový disk \dot{w}

Pro list 1 na (Obr. 33) platí, že se v důsledku výchylek Θ a Ψ změní úhel náběhu proudu všude po jeho délce takto:

$$\alpha_1 = \Psi \sin \Omega t - \Theta \cos \Omega t \quad (3.30)$$

Perturbační rychlostní složky v bodě vrtulového listu vzdáleného od středu ve vzdálenosti r lze určit z okamžité polohy tohoto bodu:

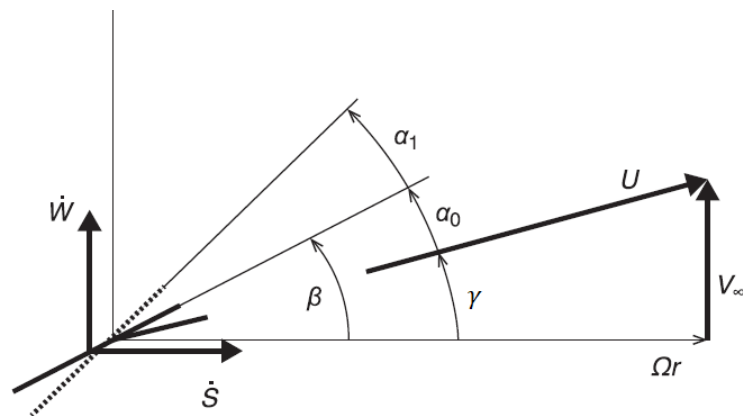
$$\begin{aligned} y &= y_1 + r \cos \Omega t \\ z &= z_1 + r \sin \Omega t \\ w_1 &= -\Psi r \cos \Omega t - \Theta r \sin \Omega t \end{aligned} \quad (3.31)$$

Perturbační rychlosti jsou pak dány časovou derivací:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\dot{y} \sin \Omega t + \dot{z} \cos \Omega t - \Omega r = -\dot{y}_1 \sin \Omega t + \dot{z}_1 \cos \Omega t \\ \dot{w} &= -\dot{\Psi} r \cos \Omega t + \Psi r \Omega \sin \Omega t - \dot{\Theta} r \sin \Omega t - \Theta r \Omega \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.3.4.2 Vyjádření přírůstku vztlaku na elementu vrtulového listu

Na (Obr. 34) jsou zakresleny rychlostní poměry na elementu listu včetně perturbačních veličin. Úhel β je úhel nastavení, γ je náběhový úhel proudu a α_0 úhel náběhu profilu listu. Všechny tři zmíněné veličiny představují ustálený stav, tedy stav, kdy systém nekmitá.



Obr. 34: Úhly a rychlosti na elementu vrtulového listu (doplňn úhel γ) [7]

Změna úhlu náběhu α_1 , viz rovnice (3.30), je přímo zakreslena v obrázku. Vliv perturbačních rychlostí lze zahrnout s využitím vztahů:

$$\sin \gamma = \frac{v_\infty}{U} a \quad \cos \gamma = \frac{\Omega r}{U} \quad (3.33)$$

Potom lze výslednou složku perturbační rychlosti kolmou na rychlost U vyjádřit s využitím podobnosti trojúhelníků takto:

$$-\dot{w} \left(\frac{\Omega r}{U} \right) + \dot{s} \left(\frac{v_\infty}{U} \right) \quad (3.34)$$

S využitím předpokladu, že vznikající změna úhlu náběhu v důsledku této složky je malá, ji lze vyjádřit rovnicí:

$$\Delta\alpha_{(\dot{w}, \dot{s})} = -\dot{w} \left(\frac{\Omega r}{U^2} \right) + \dot{s} \left(\frac{v_\infty}{U^2} \right) \quad (3.35)$$

Celkový efektivní úhel náběhu tedy potom je potom vyjádřen takto:

$$\alpha_{ef} = \alpha_0 + \Delta\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \Delta\alpha_{(\dot{w}, \dot{s})} \quad (3.36)$$

Rozkladem perturbačních rychlostí vzniká i složka ve směru rychlosti U , tím pádem je efektivní rychlost proudu vzduchu dána vztahem:

$$U_{ef} = U + \dot{w} \left(\frac{v_\infty}{U} \right) + \dot{s} \left(\frac{\Omega r}{U} \right) \quad (3.37)$$

Při znalosti efektivního úhlu náběhu a efektivní rychlosti nabíhajícího proudu vzduchu lze také vyjádřit vztlak elementu na poloměru r :

$$L_1 = \frac{1}{2} c_y^\alpha \alpha_{ef} \rho U_{ef}^2 c_0 \quad (3.38)$$

V rovnici (3.38) představuje c_y^α stoupání vztakové čáry profilu a c_0 tětivu profilu elementu. Dosazením rovnic (3.36) a (3.37) a úpravou vzniká rovnice [7] [10]:

$$L_1 = \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho U_{ef}^2 c_0 \left[\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{\Omega r}{U^2} \left(1 - \frac{2v_\infty}{\Omega r} \alpha_0 \right) \dot{w} + \frac{v_\infty}{U^2} \left(1 + \frac{2\Omega r}{v_\infty} \alpha_0 \right) \dot{s} \right] \quad (3.39)$$

Rovnice (3.39) je klíčová, protože na ní lze separovat ustálený vztlak (první člen hranaté závorky) od neustálených efektů. Nyní, jak bylo zmíněno už v podkapitole (3.2.3.2), lze ustálené síly pro řešení *whirl flutteru* zanedbat, protože nemají významný vliv [7] [10]. Tedy $\alpha_0 = 0$ a rovnice (3.39) přejde do tvaru:

$$L_1 = \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho U_{ef}^2 c_0 \left(\alpha_1 - \frac{\Omega r}{U^2} \dot{w} + \frac{v_\infty}{U^2} \dot{s} \right) \quad (3.40)$$

Nyní lze ještě vyjádřit rychlost U pomocí známých veličin:

$$U^2 = r^2 \Omega^2 + v_\infty^2 \quad (3.41)$$

Dosazením rovnic (3.30), (3.32) a (3.37) a (3.41) do vztahu (3.40) a úpravou se získá rovnice pro neustálený vztlak elementu ve vzdálenosti r na listu číslo 1 (Obr. 33) [7] [10]:

$$\begin{aligned} L_1 = & -\frac{1}{2} c_y^\alpha \rho c_0 (v_\infty^2 \Theta - v_\infty \dot{z}_1 - \Omega r^2 \dot{\Psi}) \cos \Omega t + \\ & + \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho c_0 (v_\infty^2 \Psi - v_\infty \dot{y}_1 + \Omega r^2 \dot{\Theta}) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (3.42)$$

Zavedením substituce se získá vztah:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho c_0 (v_\infty^2 \Theta - v_\infty \dot{z}_1 - \Omega r^2 \dot{\Psi}) \\ f_2 &= \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho c_0 (v_\infty^2 \Psi - v_\infty \dot{y}_1 + \Omega r^2 \dot{\Theta}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Výraz (3.42) lze přepsat takto:

$$L_1 = -f_1 \cos \Omega t + f_2 \sin \Omega t \quad (3.44)$$

S uvažováním osově symetrické čtyřlísté vrtule, viz (Obr. 33), lze pro určení vztlaku elementu na ostatních listech využít znalost jejich úhlové rozteče:

$$\begin{aligned} \Omega t &= \Omega t + \pi && \text{pro list číslo 2} \\ \Omega t &= \Omega t + \pi/2 && \text{pro list číslo 3} \\ \Omega t &= \Omega t + 3\pi/2 && \text{pro list číslo 4} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Vzhledem k vlastnostem funkcí sinus a kosinus a s ohledem na rovnici (3.44) pak lze vyjádřit vztlak elementu ostatních listů:

$$\begin{aligned} L_2 &= f_1 \cos \Omega t - f_2 \sin \Omega t \\ L_3 &= f_1 \sin \Omega t + f_2 \cos \Omega t \\ L_4 &= -f_1 \sin \Omega t - f_2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ze srovnání vztahů (3.44) a (3.46) je pak zřejmé, že ze symetrie vrtule plyne že:

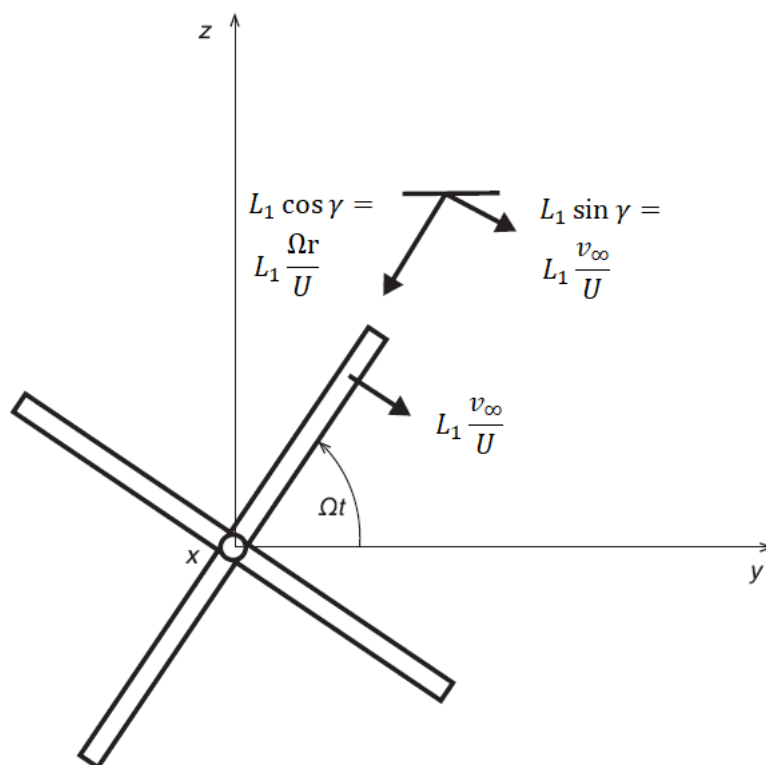
$$L_1 = -L_2 \quad a \quad L_3 = -L_4 \quad (3.47)$$

3.3.4.3 Odvození aerodynamických sil a momentů

Vzhledem k tomu, že je odporová složka aerodynamické resultanty pro řešení neustálených sil vrtule zanedbána, jsou vztlaky působící na element jednotlivých listů jedinými působícími silami. S ohledem na profilové vlastnosti působí ve směru kolmém na nabíhající proud vzduchu U_{ef} . Tyto vztlaky je vhodné rozložit do dvou následujících složek:

- do složky působící v rovině vrtulového disku, tedy tzv. momentové složky s ohledem na terminologii vrtulové aerodynamiky.
- do složky působící kolmo na tuto rovinu, tedy tzv. tahové složky.

Tento rozklad provádí Houbolt [10] s pomocí¹⁸ úhlu γ , viz (Obr. 34), jak je pro list číslo 1 zobrazeno na (Obr. 35). Momentové složky jsou potom odpovědné za vznik neustálených sil v horizontální a vertikální rovině, tahové složky za vznik neustálených momentů okolo osy x , respektive z .



Obr. 35: Rozklad vztlaku na elementu vrtulového listu (upraveno) [7]

¹⁸ Zde jde zřejmě opět o využití předpokladu, že změna úhlu γ na γ_{ef} související s uvažováním perturbačních veličin je malá.

Pro určení přírůstků těchto sil od elementů na poloměru r jednotlivých listů je potřeba momentovou a tahovou složku z (Obr. 35) dále rozložit na komponenty ve směru horizontální a vertikální osy. To lze provést pro všechny listy s využitím úhlu Ωt . Výsledné součty pak dají celkové přírůstky na poloměru r :

$$\begin{aligned}
 \Delta L_y &= \frac{v_\infty}{U} (L_1 \sin \Omega t + L_3 \cos \Omega t - L_2 \sin \Omega t - L_4 \cos \Omega t) \\
 \Delta L_z &= \frac{v_\infty}{U} (-L_1 \cos \Omega t + L_3 \sin \Omega t + L_2 \cos \Omega t - L_4 \sin \Omega t) \\
 \Delta M_y &= \frac{\Omega r^2}{U} (-L_1 \sin \Omega t - L_3 \cos \Omega t + L_2 \sin \Omega t + L_4 \cos \Omega t) \\
 \Delta M_z &= \frac{\Omega r^2}{U} (-L_1 \cos \Omega t + L_3 \sin \Omega t + L_2 \cos \Omega t - L_4 \sin \Omega t)
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Dosazením vztahů z rovnice (3.47) se výrazy dále zjednoduší:

$$\begin{aligned}
 \Delta L_y &= 2 \frac{v_\infty}{U} (L_1 \sin \Omega t + L_3 \cos \Omega t) \\
 \Delta L_z &= 2 \frac{v_\infty}{U} (-L_1 \cos \Omega t + L_3 \sin \Omega t) \\
 \Delta M_y &= -2 \frac{\Omega r^2}{U} (L_1 \sin \Omega t + L_3 \cos \Omega t) \\
 \Delta M_z &= 2 \frac{\Omega r^2}{U} (-L_1 \cos \Omega t + L_3 \sin \Omega t)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Dalším dosazením vztahů z rovnic (3.44), (3.46) a (3.43) a s využitím vlastností funkce sinus a kosinus, konkrétně:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{3.50}$$

získají rovnice (3.49) tvar:

$$\begin{aligned}
 \Delta L_y &= c_y^\alpha \rho c_0 \frac{v_\infty}{U} (v_\infty^2 \Psi - v_\infty \dot{y}_1 + \Omega r^2 \dot{\Theta}) \\
 \Delta L_z &= c_y^\alpha \rho c_0 \frac{v_\infty}{U} (v_\infty^2 \Theta - v_\infty \dot{z}_1 - \Omega r^2 \dot{\Psi}) \\
 \Delta M_y &= -c_y^\alpha \rho c_0 \frac{\Omega r^2}{U} (v_\infty^2 \Psi - v_\infty \dot{y}_1 + \Omega r^2 \dot{\Theta}) \\
 \Delta M_z &= c_y^\alpha \rho c_0 \frac{\Omega r^2}{U} (v_\infty^2 \Theta - v_\infty \dot{z}_1 - \Omega r^2 \dot{\Psi})
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Rovnice (3.51) představují přírůstky neustálených silových efektů od elementů všech vrtulových listů vzdálených r od středu vrtule. K získání celkových neustálených sil je tedy potřeba tyto vztahy ještě integrovat od středu vrtule do vnějšího poloměru R . V souvislosti s tím zavádí Houbolt [10] tzv. listové integrály, tedy veličiny obsahující v sobě integraci všech členů rovnic (3.51), které jsou funkcí polohy na listu směrem od středu vrtule. Pro jejich definici zároveň zavádí¹⁹ následující bezrozměrné veličiny:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{r}{R} && \text{bezrozměrný poloměr vrtule} \\ \mu &= \frac{v_\infty}{\Omega R} && \text{rychlostní poměr vrtule} \\ &\frac{c_0}{c_r} && \text{bezrozměrná tětiva profilu} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Následující základní tvar těchto integrálů vznikne úpravou veličin r a v_∞ v rovnicích (3.51) do bezrozměrného tvaru podle rovnic (3.52). Vzhledem k tomu, že r je integrační proměnná, je nutné zavést substituci $dr = \frac{1}{R} d\eta$. Formulace je také platná pouze pro univerzální přibližnou hodnotu stoupání vztlakové čáry vycházející z teorie tenkého profilu $c_y^\alpha = 2\pi$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 \frac{c_0(\eta)}{c_r} \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\ A_2 &= \int_0^1 \frac{c_0(\eta)}{c_r} \frac{\mu\eta^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\ A_3 &= \int_0^1 \frac{c_0(\eta)}{c_r} \frac{\eta^4}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \end{aligned} \quad (3.53)$$

Výraz c_r ve výše uvedených rovnicích představuje referenční tětivu vrtule, obvykle v 75 % délky listu. Listové integrály jsou funkcí pouze geometrie listu a rychlostního poměru a jejich zavedení je velmi výhodné pro přehledný výpočet a pozdější přidávání různých korekcí.

Při uvažování vztahů (3.53) a po vytknutí dynamického tlaku, plochy vrtulového disku a průměru vrtule tak jako v rovnicích (3.24) a (3.29) vede integrace rovnic (3.51) k následující formulaci celkových neustálených aerodynamických sil a momentů vrtule [7]:

¹⁹ Značení je převzato z [7], který navíc upravuje definici původního rychlostního poměru dělením konstantou π , čímž vzniká tvar v rovnici (3.52).

$$\begin{aligned}
P_Y &= q_\infty F_P \left(\frac{4\Omega^2 R c_r}{v_\infty^2} \mu A_1 \Psi - \frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_1 \frac{\dot{y}_1}{v_\infty} + \frac{4\Omega R}{v_\infty} A_2 \frac{\dot{\Theta} c_r}{v_\infty} \right) \\
P_Z &= q_\infty F_P \left(\frac{4\Omega^2 R c_r}{v_\infty^2} \mu A_1 \Theta - \frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_1 \frac{\dot{z}_1}{v_\infty} - \frac{4\Omega R}{v_\infty} A_2 \frac{\dot{\Psi} c_r}{v_\infty} \right) \\
M_{Y,P} &= q_\infty F_P D_P \left(-\frac{2\Omega^2 R c_r}{v_\infty^2} \mu A_2 \Psi + \frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_2 \frac{\dot{y}_1}{v_\infty} - \frac{2\Omega R}{v_\infty} A_3 \frac{\dot{\Theta} c_r}{v_\infty} \right) \\
M_{Z,P} &= q_\infty F_P D_P \left(\frac{2\Omega^2 R c_r}{v_\infty^2} \mu A_2 \Theta - \frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_2 \frac{\dot{z}_1}{v_\infty} - \frac{2\Omega R}{v_\infty} A_3 \frac{\dot{\Psi} c_r}{v_\infty} \right)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Roznásobením výrazů v závorkách s využitím vztahů (3.52) a další úpravou vznikne tvar:

$$\begin{aligned}
P_Y &= q_\infty F_P \left(\frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_1 \Psi - \frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_1 \frac{\dot{y}_1}{v_\infty} + \frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_2 \frac{\dot{\Theta} R}{v_\infty} \right) \\
P_Z &= q_\infty F_P \left(\frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_1 \Theta - \frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_1 \frac{\dot{z}_1}{v_\infty} - \frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_2 \frac{\dot{\Psi} R}{v_\infty} \right) \\
M_{Y,P} &= -q_\infty F_P D_P \left(\frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_2 \Psi - \frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_2 \frac{\dot{y}_1}{v_\infty} + \frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_3 \frac{\dot{\Theta} R}{v_\infty} \right) \\
M_{Z,P} &= q_\infty F_P D_P \left(\frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_2 \Theta - \frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_2 \frac{\dot{z}_1}{v_\infty} - \frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_3 \frac{\dot{\Psi} R}{v_\infty} \right)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Nyní, rozepsáním rovnic (3.29) s využitím definic efektivních úhlů (3.25) a při položení nestacionárních koeficientů $c_{z\Psi} = c_{y\Theta} = 0$, protože tyto byly Reedem a Blandem [8] objeveny experimentálně a do rovnic (3.29) přidány uměle, vznikne tvar:

$$\begin{aligned}
P_Y &= q_\infty F_P \left(c_{y\Psi} \Psi - c_{y\Psi} \frac{\dot{y}}{v_\infty} + c_{yq} \frac{\dot{\Theta} R}{v_\infty} \right) \\
P_Z &= q_\infty F_P \left(c_{z\Theta} \Theta - c_{z\Theta} \frac{\dot{z}}{v_\infty} + c_{zr} \frac{\dot{\Psi} R}{v_\infty} \right) \\
M_{Y,P} &= q_\infty F_P D_P \left(c_{m\Psi} \Psi - c_{m\Psi} \frac{\dot{y}}{v_\infty} + c_{mq} \frac{\dot{\Theta} R}{v_\infty} \right) \\
M_{Z,P} &= q_\infty F_P D_P \left(c_{n\Theta} \Theta - c_{n\Theta} \frac{\dot{z}}{v_\infty} + c_{nr} \frac{\dot{\Psi} R}{v_\infty} \right)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Pro translační rychlosti v rovnicích (3.55) a (3.56) platí vzájemná rovnost, protože jsou obě definovány jako rychlosti vrtulového náboje:

$$\dot{y}_1 = \dot{y} \quad \dot{z}_1 = \dot{z} \quad (3.57)$$

Potom ze srovnání rovnic (3.55) a (3.56) plynou vztahy pro analytický výpočet stacionárních aerodynamických koeficientů²⁰:

$$\begin{aligned} c_{y\Psi}^{**} &= \frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_1 = c_{z\Theta}^{**} \\ c_{yq}^{**} &= \frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_2 = -c_{zr}^{**} \\ c_{m\Psi}^{**} &= \frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_2 = c_{n\Theta}^{**} \\ c_{mq}^{**} &= \frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_3 = -c_{nr}^{**} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Tyto koeficienty je ovšem potřeba ještě znaménkově korigovat vzhledem k rozdílné konvenci v systémech na (Obr. 18 – vpravo), pro který bylo provedeno odvození analytického výpočtu koeficientů, a (Obr. 32), ze kterého vycházejí pohybové rovnice. Po zahrnutí této korekce pak vypadají takto²¹ [10]:

$$\begin{aligned} c_{y\Psi}^* &= \frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_1 = -c_{z\Theta}^* \\ c_{yq}^* &= -\frac{4\Omega c_r}{v_\infty} A_2 = c_{zr}^* \\ c_{m\Psi}^* &= \frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_2 = -c_{n\Theta}^* \\ c_{mq}^* &= -\frac{2\Omega c_r}{v_\infty} A_3 = c_{nr}^* \end{aligned} \quad (3.59)$$

Pro řešení rovnic *whirl flutteru* bez uvažování nestacionární aerodynamiky by nyní bylo možné dosadit vztahy (3.59) do rovnic (3.29) a kompletní soustavu²² (3.9), (3.14) nebo (3.20) řešit. Jak vyplývá z Reedových analýz [11] [12], zahrnutí zpoždění vzlaku má stabilizující efekt, tedy by takové řešení bylo na straně bezpečnosti. V této práci ovšem zmíněný vliv uvažován bude.

²⁰ Dvě hvězdičky u výrazů (3.58) indikují, že jde o vztahy před znaménkovou korekcí.

²¹ Hvězdička u výrazů (3.59) vyjadřuje, že jde o koeficienty získané s uvažováním kvazistacionární aerodynamiky, tedy bez vlivu zpoždění vzlaku, který bude zahrnut v následující kapitole.

²² Při uvažování experimentálních koeficientů $c_{z\Psi} = c_{y\Theta} = 0$.

3.3.5 Zahrnutí vlivu zpoždění vztlaku do výpočtu aerodynamických koeficientů

Veškerý dosavadní přístup byl založen na kvazistacionárním řešení aerodynamiky vrtule. Reálné vznikající aerodynamické síly jsou ovšem stejně jako v případě kmitajícího křídla, viz podkapitola (2.3.3.1), fázově zpožděny za kvazistacionární hodnotou v důsledku vznikajícího víření. V případě vrtule je navíc situace o dost komplikovanější, protože každý její list vytváří v úplavu třírozměrný vír. Tyto víry navíc obsahují dvě frekvenční složky, protože frekvence precesního pohybu konaného celým systémem pohonné jednotky je obecně odlišná od frekvence otáčení vrtule [10]. Zahrnutí těchto efektů je v [10] provedeno přibližným řešením s využitím Theodorsenovy cirkulační funkce odvozené pro harmonicky kmitající profil. Toto řešení používá i Čechrdle [7] s tím, že bylo experimentálně ověřeno jako dostatečně přesné.

Navrácením zpět k rovnici kvazistacionárního vztlaku elementu vrtulového listu číslo jedna, tedy rovnici (3.44), lze předpoklad harmonického pohybu zahrnout takto:

$$f_{10} = f_{10}e^{j\omega t} \quad a \quad f_{20} = f_{20}e^{j\omega t} \quad (3.60)$$

Nula přidaná do značení indexů znamená změnu příslušných souřadnic na amplitudovou formu. S ohledem na úpravu (3.60) pak rovnice vztlaku elementu (3.44) vypadá takto:

$$L_1 = -f_{10}e^{j\omega t} \frac{e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}}{2} + f_{20}e^{j\omega t} \frac{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}}{2j} \quad (3.61)$$

Tvar (3.61) plyne z vlastností funkce sinus a kosinus v komplexním oboru:

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad a \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad (3.62)$$

Rovnici (3.61) lze dále upravit následovně [10]:

$$L_1 = -\frac{1}{2}(f_{10} + jf_{20})e^{j(\Omega+\omega)t} - \frac{1}{2}(f_{10} - jf_{20})e^{-j(\Omega-\omega)t} \quad (3.63)$$

Z tohoto tvaru plyne, že nestacionární vztlak a též i volný vír v úplavu mají výše zmíněné dvě frekvenční složky, tedy $\Omega + \omega$ a $\Omega - \omega$, kde je Ω frekvence otáčení vrtule a ω frekvence precesního pohybu systému pohonné jednotky. Celkový vliv úplavu na podobu vztlaku lze zohlednit pomocí zmíněné Theodorsenovy funkce:

$$C(k) = F(k) + jG(k) \quad (3.64)$$

Theodorsenova funkce $C(k)$ je komplexní funkce definovaná jako součet reálné složky $F(k)$ a imaginární složky $jG(k)$. Roznásobením funkce vztaku touto funkcí tedy vzniknou dvě složky, a to jednak vztlak, který je ve fázi s pohybem systému a jehož amplituda je ovlivněna hodnotou $F(k)$, a potom vztlak, který je mimo fázi – tedy fázově zpožděn – a jehož amplituda je ovlivněna hodnotou $G(k)$. Theodorsenova funkce závisí pouze na veličině známé jako redukovaná frekvence a definované takto [3]:

$$k = \frac{\omega c}{v_{\infty}} \quad (3.65)$$

Výraz c představuje polovinu těživy kmitajícího profilu, ω frekvenci kmitání a v_{∞} rychlost proudu, do kterého je profil umístěn.

Theodorsenovu funkci je možné vypočítat několika způsoby, Čechrdle v [7] uvádí přímo Theodorsenovu [17] formulaci s využitím Besselových funkcí:

$$F(k) = \frac{Bj_1(Bj_1 + By_0) + By_1(By_1 - Bj_0)}{(Bj_1 + By_0)^2 + (By_1 - Bj_0)^2} \quad (3.66)$$

$$G(k) = -\frac{By_1By_0 + Bj_1Bj_0}{(Bj_1 + By_0)^2 + (By_1 - Bj_0)^2}$$

kde Bj je Besselova funkce prvního druhu a By Besselova funkce druhého druhu. Indexy rozlišují nultý a první řád.

Aplikací Theodorsenovy funkce na rovnici (3.63) tedy vznikne modifikovaná vztaková funkce zahrnující vliv fázového zpoždění:

$$L_1^* = -\left[\frac{(F_1 + jG_1)}{2}\right](f_{10} + jf_{20})e^{j(\Omega+\omega)t} - \left[\frac{(F_2 + jG_2)}{2}\right](f_{10} - jf_{20})e^{-j(\Omega-\omega)t} \quad (3.67)$$

Redukované frekvence příslušné prvnímu, respektive druhému výrazu jsou dány vztahy [10]:

$$k_1 = \frac{(\Omega + \omega)c_0}{2\sqrt{v_{\infty}^2 + \Omega^2 R^2}} \quad (3.68)$$

$$k_2 = \frac{(\Omega - \omega)c_0}{2\sqrt{v_{\infty}^2 + \Omega^2 R^2}}$$

Nyní lze podle Houbolta [10] upravit rovnici (3.67) na tvar:

$$L_1^* = \frac{F_1 + F_2}{2} (-f_1 \cos \Omega t + f_2 \sin \Omega t) + \frac{G_1 + G_2}{2} (f_1 \sin \Omega t + f_2 \cos \Omega t) + \frac{G_1 - G_2}{2\omega} (-\dot{f}_1 \cos \Omega t + \dot{f}_2 \sin \Omega t) - \frac{F_1 - F_2}{2\omega} (\dot{f}_1 \sin \Omega t + \dot{f}_2 \cos \Omega t) \quad (3.69)$$

Rovnice (3.69) stále představuje funkci vztlaku, který generuje pouze element vyjmutý na listu číslo jedna, viz (Obr. 33). Stejnou procedurou je možné získat i vztah pro nestacionární vztlak elementu listu číslo 3, viz rovnice (3.46). S ohledem na rovnici (3.47) jsou pak dány všechny.

Pro modifikovaný vztlak elementu listu číslo 3 pak platí [10]:

$$L_3^* = \frac{F_1 + F_2}{2} (f_1 \sin \Omega t + f_2 \cos \Omega t) - \frac{G_1 + G_2}{2} (-f_1 \cos \Omega t + f_2 \sin \Omega t) + \frac{G_1 - G_2}{2\omega} (\dot{f}_1 \sin \Omega t + \dot{f}_2 \cos \Omega t) - \frac{F_1 - F_2}{2\omega} (-\dot{f}_1 \cos \Omega t + \dot{f}_2 \sin \Omega t) \quad (3.70)$$

Nyní, po dosazení těchto modifikovaných funkcí (3.69) a (3.70) do rovnic (3.49), vyjdou rovnice pro aerodynamické síly od elementů všech listů s uvažováním zpoždění vztlaku takto [10]:

$$\begin{aligned} \Delta L_y^* &= \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta L_y + \frac{G_1 + G_2}{2} \Delta L_z + \frac{G_1 - G_2}{2\omega} \Delta \dot{L}_y - \frac{F_1 - F_2}{2\omega} \Delta \dot{L}_z \\ \Delta L_z^* &= \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta L_z - \frac{G_1 + G_2}{2} \Delta L_y + \frac{G_1 - G_2}{2\omega} \Delta \dot{L}_z + \frac{F_1 - F_2}{2\omega} \Delta \dot{L}_y \end{aligned} \quad (3.71)$$

Vzhledem k tomu, že z rovnic (3.51) vyplývá vzájemná vazba mezi silami a momenty:

$$\begin{aligned} \Delta M_y &= -\frac{\Omega r^2}{v_\infty} \Delta L_y \\ \Delta M_z &= \frac{\Omega r^2}{v_\infty} \Delta L_z \end{aligned} \quad (3.72)$$

pak jsou rovnicemi (3.71) dány i modifikované momenty ΔM_y^* a ΔM_z^* .

Nyní je možné zavést řadu zjednodušujících předpokladů, které navrhuje Houbolt [10] a jako použitelné je potvrzuje i Čečrdle [7], a to:

1. Poslední dva výrazy v rovnicích (3.71) obsahují rozdíly $G_1 - G_2$ a $F_1 - F_2$, a tím pádem jsou velmi malé, a tedy pro praktické aplikace zanedbatelné.
2. Zbývající dva výrazy v rovnicích (3.71) pracují s průměrnými hodnotami $(F_1 + F_2)/2$ a $(G_1 + G_2)/2$ a zároveň lze předpokládat, že hodnota ω je výrazně menší než Ω . Tím

pádem lze výpočet (3.66) Theodorsenovy funkce provést na základě zjednodušení, že redukovaná frekvence, viz rovnice (3.68), je funkcí pouze parametru Ω :

$$k = \frac{\Omega c_0}{2\sqrt{v_\infty^2 + \Omega^2 R^2}} \quad (3.73)$$

Tento předpoklad výrazně usnadňuje i pozdější řešení pohybových rovnic, protože odpadá vazba aerodynamických sil na úhlové frekvenci kmitání soustavy.

Po zavedení těchto zjednodušení přejdou rovnice (3.71) do tvaru (při současném vyjádření momentů z rovnic (3.72)):

$$\begin{aligned} \Delta L_y^* &= F(k)\Delta L_y + G(k)\Delta L_z \\ \Delta L_z^* &= F(k)\Delta L_z - G(k)\Delta L_y \\ \Delta M_y^* &= -\frac{\Omega r^2}{v_\infty} (F(k)\Delta L_y + G(k)\Delta L_z) \\ \Delta M_z^* &= \frac{\Omega r^2}{v_\infty} (F(k)\Delta L_z - G(k)\Delta L_y) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Nyní lze stejnou cestou jako při odvození stacionárních sil (rovnice (3.49) až (3.59)) získat celkové síly a momenty s uvažováním zpoždění vztlaku, respektive příslušné aerodynamické koeficienty, vznikající na vrtuli při precesním pohybu systému pohonné jednotky. Tento zdoluhavý proces naštěstí provedli už Rodden a Rose [14], vzhledem k jeho složitosti bude uveden pouze přejatý výsledek. Jejich práci využívá i Čečrdle [7], nicméně protože sám používá k řešení pohybových rovnic MSC/NASTRAN, neuvádí už vazbu rozšíření koeficientů na změnu pravé strany pohybových rovnic. Je důležité zmínit, že následující rovnice (3.75) jsou použitelné pro schéma na (Obr. 32), autoři [14] používají stejné. Z nevysvětlených důvodů pozměňují pouze definici efektivních úhlů, viz rovnice (3.25). Znaménka u koeficientů „ve fázi“ v rovnicích (3.77), tedy u těch násobených integrály I_{1-3} , které obsahují reálnou část Theodorsenovy funkce, jsou nicméně ve shodě se stacionárními koeficienty (3.59), což odpovídá použití původní definice, která tedy v této práci bude zachována. Tento krok bude blíže komentován v závěrečné diskuzní sekci.

Po provedení výše zmíněného procesu tedy listové integrály modifikované o efekt zpoždění vztaku vypadají takto:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 \frac{c_0(\eta)}{c_r} \frac{\mu^2 F(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\
 J_1 &= \int_0^1 \frac{c_0(\eta)}{c_r} \frac{\mu^2 G(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\
 I_2 &= \int_0^1 \frac{c_0(\eta)}{c_r} \frac{\mu \eta^2 F(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\
 J_2 &= \int_0^1 \frac{c_0(\eta)}{c_r} \frac{\mu \eta^2 G(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\
 I_3 &= \int_0^1 \frac{c_0(\eta)}{c_r} \frac{\eta^4 F(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\
 J_3 &= \int_0^1 \frac{c_0(\eta)}{c_r} \frac{\eta^4 G(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Redukovaná frekvence (3.73) pro výpočet Theodorsenovy funkce je s ohledem na vztahy (3.52) použité v integrálech upravena:

$$k_p = \frac{c_0}{2R\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} \tag{3.76}$$

A vztahy pro kompletní systém koeficientů s využitím listových integrálů z rovnic (3.75) jsou:

$$\begin{aligned}
 c_{z\theta} &= -\left(\frac{4\Omega c_r}{v_\infty}\right) I_1 & c_{y\theta} &= -\left(\frac{4\Omega c_r}{v_\infty}\right) J_1 \\
 c_{yq} &= -\left(\frac{4\Omega c_r}{v_\infty}\right) I_2 & c_{zq} &= +\left(\frac{4\Omega c_r}{v_\infty}\right) J_2 \\
 c_{n\theta} &= -\left(\frac{2\Omega c_r}{v_\infty}\right) I_2 & c_{m\theta} &= -\left(\frac{2\Omega c_r}{v_\infty}\right) J_2 \\
 c_{mq} &= -\left(\frac{2\Omega c_r}{v_\infty}\right) I_3 & c_{nq} &= -\left(\frac{2\Omega c_r}{v_\infty}\right) J_3
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

S ohledem na vztahy (3.26) jsou nyní známé rovnice pro výpočet všech aerodynamických koeficientů. Jako poslední krok před řešením pohybových rovnic je ještě potřeba provést několik korekcí listových integrálů.

3.3.6 Doplnující korekce listových integrálů

Dosavadní formulace listových integrálů, viz. rovnice (3.75), je odvozena za předpokladu nestlačitelného proudění a konstantního přibližného stoupání vztlakové čáry vycházejícího z teorie tenkého profilu, tedy $c_y^\alpha = 2\pi$. Dále nejsou uvažovány reálné proporce vrtule, předpokládá se počet listů roven čtyřem a list sám je chápán jako nekonečný profil. Všechny zmíněné zjednodušující předpoklady je možné přiblížit realitě pouhou úpravou listových integrálů, čímž vyniká výhoda jejich použití, jak bylo zmíněno dříve.

3.3.6.1 Korekce na vliv stlačitelnosti vzduchu

Vliv stlačitelnosti vzduchu lze na základě Houboltova [10] doporučení přibližně zahrnout do výpočtu pomocí úpravy stoupání vztlakové čáry. Metoda, kterou zmiňuje, spočívá v použití Prandtlovy-Glauertovy transformace, aplikované na vztlakovou čáru pomocí dvou faktorů:

1. korekce stoupání vztlakové čáry Prandtl-Glauertovým faktorem $\beta_p = \sqrt{1 - M_r^2}$,
2. korekce vlivu konečné délky listu při stlačitelném proudění.

První faktor se aplikuje násobením c_y^α výrazem:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - M_r^2}} \quad (3.78)$$

Druhý pak dalším násobením pomocí výrazu:

$$\frac{A_r \sqrt{1 - M_r^2}}{2 + A_r \sqrt{1 - M_r^2}} \quad (3.79)$$

V rovnicích (3.78) a (3.79) představuje M_r Machovo číslo na elementu vrtulového listu vzdáleném r od středu vrtule (a_z je rychlost zvuku):

$$M_r = \frac{\sqrt{v_\infty^2 + \Omega^2 r^2}}{a_z} \quad (3.80)$$

V rovnici (3.79) pak A_r představuje štíhlost listu:

$$A_r = \frac{R}{c_r \int_0^1 \left(\frac{c_0}{c_r}\right) d\eta} \quad (3.81)$$

Výsledný výraz pro korekci stlačitelnosti má tedy tvar:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - M_r^2}} \cdot \frac{A_r \sqrt{1 - M_r^2}}{2 + A_r \sqrt{1 - M_r^2}} = \frac{A_r}{2 + A_r \sqrt{1 - M_r^2}} \quad (3.82)$$

Rovnici (3.82) lze ještě upravit do tvaru využívajícího Machova čísla letu a bezrozměrných parametrů (3.52) [7]. Tento tvar lze pak přímo zahrnout do listových integrálů (3.75):

$$\frac{A_r}{2 + A_r \sqrt{1 - M_\infty^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2}\right)}} \quad (3.83)$$

3.3.6.2 Korekce na reálné vrtulové parametry

Pro výpočet listových integrálů reálné vrtule je třeba uvážit fakt, že vrtulové listy negenerují vztlak přímo od středu vrtule, nýbrž od nějakého poloměru r_0 měřeného od tohoto středu. Tato vzdálenost je dána místem, kde válcový průřez vrtulového listu přejde do tvaru aerodynamického profilu, který je za rotace schopen vytvářet nezanedbatelnou aerodynamickou sílu. Při nedostatku geometrických dat je možné uvažovat minimálně poloměr předního krytu. Tím pádem je potřeba upravit i spodní mez listových integrálů na bezrozměrnou hodnotu tohoto poloměru, jak navrhuji Rodden a Rose [14]:

$$\eta_0 = \frac{r_0}{R} \quad (3.84)$$

V souvislosti s tím je třeba upravit také definici štíhlosti (3.81):

$$A_r = \frac{R(1 - \eta_0)}{c_r \int_0^1 \left(\frac{c_0}{c_r}\right) d\eta} \quad (3.85)$$

Další možná úprava listových integrálů plyne z nahrazení základního stoupání vztlakové čáry při nestlačitelném proudění $c_y^\alpha = 2\pi$ přesnější hodnotou, opět dle doporučení [14]. Tento krok dále rozvádí Čečrdle [7] s tím, že je možné hodnotu plynoucí z teorie tenkého profilu nahradit buďto efektivní hodnotou $c_{y_{ef}}^\alpha$ pro konkrétní typ vrtule, anebo rovnou reálným průběhem stoupání vztlakové čáry po délce listu $c_y^\alpha(\eta)$. Jak dále rozvádí, přesnost výsledku při použití hodnoty $c_y^\alpha = 2\pi$ závisí na konkrétním typu vrtule, a nelze tedy obecně říct, ve kterých případech je takové zjednodušení možné. Použití reálného průběhu oproti tomu očekávatelně vždy dává lepší a spolehlivější výsledky, nicméně vyžaduje buď data od výrobce, nebo provedení vlastního měření.

Při implementaci c_{yef}^α nebo $c_y^\alpha(\eta)$ do listových integrálů je podstatné neopomenout, že obě definice, (3.53) i (3.75), v sobě mají zahrnutou hodnotu $c_y^\alpha = 2\pi$. Tím pádem je nutné je rozšířit vztahem v následující formě:

$$\frac{c_y^\alpha(\eta)}{2\pi} \quad \text{nebo} \quad \frac{c_{yef}^\alpha}{2\pi} \quad (3.86)$$

Jako poslední je možná ještě úprava s ohledem na počet vrtulových listů. Ta se provede jednoduše vynásobením listových integrálů výrazem [14]:

$$N_b/4 \quad (3.87)$$

Proměnná N_b značí počet listů analyzované vrtule. Je důležité zmínit, že počet listů musí být takový, aby vrtule zůstala osově symetrická, a to z důvodu využití symetrie při odvození aerodynamických sil. Na to upozorňuje i Čečrdle [18], používá však formulaci: „*Note that the solution is valid for propellers of 3 or more blades that are considered as axisymmetric.*” Jakým způsobem se řeší vrtule, které osově symetrické nejsou, či za jakých podmínek je teoreticky možné nesymetrické vrtule za symetrické považovat, ovšem nezmiňuje a stejně tak ani ostatní autoři.

3.3.6.3 Výsledná formulace listových integrálů po zahrnutí všech korekcí

Po provedení všech zmiňovaných úprav dostanou listové integrály (3.75) formu, v jaké je prezentuje Čečrdle [7], který původní verzi [14] rozšířil o $c_y^\alpha(\eta)$. Tato finální podoba je uvedena v rovnicích (3.90).

Pro praktický výpočet koeficientů pomocí těchto integrálů je v [14] doporučeno vytvoření mezní hodnoty stoupání vztakové čáry při korekci na stlačitelnost vzduchu. Prandtl-Glauertův korekční faktor má totiž v případě, kdy je Machovo číslo rovno jedné, limitu v nekonečnu. Pro podmínku v rovnici (3.88) je tedy doporučeno provést korekci (3.89):

$$M_\infty^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2} \right) > 1 - \left(\frac{c_y^\alpha(\eta)}{a_M} \right)^2 \quad (3.88)$$

$$M_\infty^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2} \right) = 1 - \left(\frac{c_y^\alpha(\eta)}{a_M} \right)^2 \quad (3.89)$$

Výraz a_M v rovnicích představuje maximální stoupání vztakové čáry profilu listu analyzované vrtule při transsonických rychlostech proudění.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\frac{N_b}{4}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{\mu^2 A_r}{c_r} \int_{\eta_0}^1 \frac{c_y^\alpha(\eta) c_0(\eta) F(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2} \left[2 + A_r \sqrt{1 - M_\infty^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2}\right)} \right]} d\eta \\
J_1 &= \left(\frac{N_b}{4}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{\mu^2 A_r}{c_r} \int_{\eta_0}^1 \frac{c_y^\alpha(\eta) c_0(\eta) G(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2} \left[2 + A_r \sqrt{1 - M_\infty^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2}\right)} \right]} d\eta \\
I_2 &= \left(\frac{N_b}{4}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{\mu A_r}{c_r} \int_{\eta_0}^1 \frac{\eta^2 c_y^\alpha(\eta) c_0(\eta) F(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2} \left[2 + A_r \sqrt{1 - M_\infty^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2}\right)} \right]} d\eta \\
J_2 &= \left(\frac{N_b}{4}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{\mu A_r}{c_r} \int_{\eta_0}^1 \frac{\eta^2 c_y^\alpha(\eta) c_0(\eta) G(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2} \left[2 + A_r \sqrt{1 - M_\infty^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2}\right)} \right]} d\eta \\
I_3 &= \left(\frac{N_b}{4}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{A_r}{c_r} \int_{\eta_0}^1 \frac{\eta^4 c_y^\alpha(\eta) c_0(\eta) F(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2} \left[2 + A_r \sqrt{1 - M_\infty^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2}\right)} \right]} d\eta \\
J_3 &= \left(\frac{N_b}{4}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{A_r}{c_r} \int_{\eta_0}^1 \frac{\eta^4 c_y^\alpha(\eta) c_0(\eta) G(k_p)}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2} \left[2 + A_r \sqrt{1 - M_\infty^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2}\right)} \right]} d\eta
\end{aligned} \tag{3.90}$$

3.3.7 Sestavení kompletního výpočetního modelu

V této fázi jsou k dispozici všechny vztahy potřebné pro vytvoření kompletní soustavy pohybových rovnic *whirl flutteru* a její následný výpočet. Při zanedbání vnitřního tlumení mají tyto rovnice tvar (3.9), který lze vyjádřit také v maticové formě:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

Pravou stranu, tedy aerodynamické momenty, lze nyní získat dosazením rovnic (3.25) do vztahů (3.24) a výsledek následně do rovnic (3.21). Po několika dalších algebraických úpravách a využití symetrických vlastností vrtule, viz rovnice (3.26), je výsledkem matice aerodynamické

tuhosti a matice aerodynamického tlumení. Celý proces je krok po kroku proveden v příloze 1.

Po rozepsání pravé strany tedy rovnice (3.91) přejde do tvaru:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = q_{\infty} F_P D_P \mathbf{K}^{A*} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} + q_{\infty} F_P \frac{D_P^2}{v_{\infty}} \mathbf{D}^{A*} \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Rovnici lze dále upravit přesunutím aerodynamických matic na levou stranu:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \left[\mathbf{G} + q_{\infty} F_P \frac{D_P^2}{v_{\infty}} \mathbf{D}^A \right] \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + [\mathbf{K} + q_{\infty} F_P D_P \mathbf{K}^A] \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \{0\} \quad (3.93)$$

Zahrnutím vnitřního tlumení pomocí viskózního modelu tlumících sil, viz rovnice (3.14), dojde k rozšíření rovnice (3.93) takto:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \left[\mathbf{D} + \mathbf{G} + q_{\infty} F_P \frac{D_P^2}{v_{\infty}} \mathbf{D}^A \right] \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + [\mathbf{K} + q_{\infty} F_P D_P \mathbf{K}^A] \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \{0\} \quad (3.94)$$

A při použití amplitudového modelu vnitřního tlumení, viz rovnice (3.20) vypadá rozšíření následovně:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \left[\mathbf{G} + q_{\infty} F_P \frac{D_P^2}{v_{\infty}} \mathbf{D}^A \right] \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + [(1 + i\gamma)\mathbf{K} + q_{\infty} F_P D_P \mathbf{K}^A] \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \{0\} \quad (3.95)$$

V rovnicích (3.91) až (3.95) jsou jednotlivé matice definovány takto:

matice hmotnosti:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_y & 0 \\ 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

gyroskopická matice:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & J_x \Omega \\ -J_x \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

matice tuhosti:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{\Theta} & 0 \\ 0 & K_{\Psi} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

matice viskózního tlumení:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{\Theta} & 0 \\ 0 & d_{\Psi} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

vektor koeficientů konstrukčního tlumení:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{\Theta} \\ \gamma_{\Psi} \end{bmatrix}^T \quad (3.100)$$

matice aerodynamické tuhosti:

$$\mathbf{K}^A = \begin{bmatrix} \frac{a}{D_p} c_{z\Theta} - c_{m\Theta} & c_{n\Theta} + \frac{a}{D_p} c_{y\Theta} \\ -c_{n\Theta} - \frac{a}{D_p} c_{y\Theta} & \frac{a}{D_p} c_{z\Theta} - c_{m\Theta} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

matice aerodynamického tlumení:

$$\mathbf{D}^A = \begin{bmatrix} \frac{a}{D_p} c_{m\Theta} - \frac{1}{2} c_{mq} - \frac{a^2}{D_p^2} c_{z\Theta} + \frac{a}{2D_p} c_{zq} & -\frac{a}{D_p} c_{n\Theta} + \frac{1}{2} c_{nq} - \frac{a^2}{D_p^2} c_{y\Theta} + \frac{a}{2D_p} c_{yq} \\ \frac{a}{D_p} c_{n\Theta} - \frac{1}{2} c_{nq} + \frac{a^2}{D_p^2} c_{y\Theta} - \frac{a}{2D_p} c_{yq} & \frac{a}{D_p} c_{m\Theta} - \frac{1}{2} c_{mq} - \frac{a^2}{D_p^2} c_{z\Theta} + \frac{a}{2D_p} c_{zq} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Aerodynamické matice (3.101) a (3.102) obsahují kompletní set nezávislých osmi aerodynamických koeficientů, které zohledňují fázové zpoždění vztaku vlivem úplavu a které lze vypočítat pomocí rovnic (3.77) a (3.90). Parametry rovnic (3.90) jsou definovány vztahy (3.52), (3.76), (3.66) a (3.85), zbylé vycházejí z hmotnostních, geometrických a dalších parametrů konkrétního zadání. Pro výpočet pouze s využitím stacionární aerodynamiky je možné použít stejné vztahy s tím, že se v maticích (3.101) a (3.102) vynulují všechny koeficienty, které se nacházejí v pravém sloupci rovnic (3.77), a zbylé se dopočítají pomocí rovnic (3.90) pro integrály I_{1-3} , ve kterých je třeba položit hodnotu $F(k_p) = 1$. Tím získají charakter rovnic (3.53) s aplikovanou korekcí na různé faktory.

3.3.8 Řešení stability

Rovnice (3.93), (3.94) a (3.95) jsou platné pouze pro případ harmonického pohybu, protože nestacionární aerodynamické koeficienty matic (3.101) a (3.102) byly odvozeny pomocí Theodorsenovy funkce sestavené pro harmonicky kmitající profil v nerozrušeném nabíhající proudě vzduchu. Stejný předpoklad navíc platí i pro amplitudový model vnitřního tlumení. Ovšem vzhledem k tomu, že právě takový pohyb charakterizuje mez stability kmitajícího systému, viz podkapitola (2.3.3.1), je tento předpoklad v souladu s následujícím řešením.

Řešení stability precesních kmitů je možné provést pomocí řady metod včetně těch, které se používají pro standartní potenciální *flutter* pevných vztlakových ploch, viz sekce (2.3.3.1). Na rozdíl od klasického *flutteru* ovšem iterační schémata pro zpřesňování odhadu redukované frekvence kmitání při pouhém vyšetření stability pohybu systému ztrácí na významu, protože Theodorsenova funkce a spolu s ní i nestacionární aerodynamické síly na pravé straně pohybových rovnic se stávají díky předpokladu (3.73) funkcí pouze letové rychlosti a úhlové rychlosti vrtule. Vzhledem k tomu, že jsou otáčky vrtule pro konkrétní vyšetřovaný systém známým parametrem, je jedinou vstupní proměnnou rychlost letu.

3.3.8.1 Definice matice *flutteru*

Široký soupis variant výpočtu meze stability lze nalézt v [15], v rámci této práce bude použito řešení pomocí převodu soustavy diferenciálních rovnic druhého řádu na soustavu prvního řádu a následné posouzení stability pomocí vlastních čísel matice *flutteru*. Úprava rovnic do požadovaného tvaru pomocí substituce je provedena podle popisu v [19]. Tedy zavedením definice:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

a následně celkových matic tuhosti a tlumení, na základě jejichž definice bude také dále rozlišeno, zda je použit viskózní nebo amplitudový model vnitřního tlumení. Jsou to:

celková matice tuhosti pro vnitřně netlumený systém a pro viskózní model tlumení:

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} + q_{\infty} F_P D_P \mathbf{K}^A] \quad (3.104)$$

celková matice tuhosti pro amplitudový model vnitřního tlumení:

$$\tilde{\mathbf{K}} = [(1 + i\gamma)\mathbf{K} + q_{\infty} F_P D_P \mathbf{K}^A] \quad (3.105)$$

celková matice tlumení pro vnitřně netlumený systém a pro amplitudový model tlumení:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \left[\mathbf{G} + q_{\infty} F_P \frac{D_P^2}{v_{\infty}} \mathbf{D}^A \right] \quad (3.106)$$

celková matice tlumení pro viskózní model vnitřního tlumení:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \left[\mathbf{D} + \mathbf{G} + q_{\infty} F_P \frac{D_P^2}{v_{\infty}} \mathbf{D}^A \right] \quad (3.107)$$

Soustavy pohybových rovnic (3.93) – (3.95) potom přejdou do společného tvaru:

$$\mathbf{M}[\ddot{Y}] + \tilde{\mathbf{D}}[\dot{Y}] + \tilde{\mathbf{K}}[Y] = \{0\} \quad (3.108)$$

Po vynásobení inverzní maticí hmotnosti zleva získá rovnice (3.108) formu:

$$\mathbf{I}[\ddot{Y}] + \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}[\dot{Y}] + \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}[Y] = \{0\} \quad (3.109)$$

\mathbf{I} je jednotková matice 2x2. Nyní s využitím rovnosti:

$$[\ddot{Y}] - [\ddot{Y}] = \{0\} \quad (3.110)$$

Ize soustavu (3.109) napsat ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Dále pak zavedením další substituce:

$$[W] = \begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Ize soustavu (3.111) přepsat takto:

$$[\dot{W}] = \mathbf{J}[W] \quad (3.113)$$

kde \mathbf{J} představuje matici *flutteru*:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Předpokládané řešení rovnice (3.113) má tvar:

$$[W] = [W_0]e^{\lambda t} \quad (3.115)$$

S jeho využitím pak lze přepsat rovnici (3.113) do podoby:

$$\mathbf{J}[W_0] = \lambda[W_0] \quad (3.116)$$

a tu následně upravit:

$$[\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}][W_0] = \{0\} \quad (3.117)$$

Rovnice (3.117) je výchozím vztahem pro řešení stability precesního pohybu systému pohonné jednotky. V této formě totiž stačí některému z moderních výpočetních softwarů definovat matici *flutteru* \mathbf{J} a program je pak schopen pomocí předdefinovaných operací vyřešit vlastní čísla λ pro netriviální řešení soustavy (3.117).

3.3.8.2 Interpretace vlastních čísel

Řešením rovnice (3.117) je vždy počet vlastních čísel odpovídající dvojnásobku stupňů volnosti, tedy v tomto konkrétním případě jsou jím čtyři vlastní čísla. V případě, že je matice *flutteru* J reálná, tedy jsou-li matice M , \tilde{K} a \tilde{D} reálné, tvoří tuto čtveřici dva komplexně sdružené páry vlastních čísel. Je-li matice *flutteru* komplexní, pak jsou všechna vlastní čísla různá [19]. V prvním případě tedy vyjde v obecné formě:

$$\lambda_{1,2} = \sigma_{1,2} \pm j\omega_{d1,2} \quad (3.118)$$

V druhém případě potom:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sigma_1 + j\omega_{d1} \\ \lambda_2 &= \sigma_2 - j\omega_{d2} \\ \lambda_3 &= \sigma_3 + j\omega_{d3} \\ \lambda_4 &= \sigma_4 - j\omega_{d4} \end{aligned} \quad (3.119)$$

V případě zájmu pouze o chování reálného systému mají pro *flutterové* analýzy fyzikální význam jenom ta vlastní čísla, která obsahují kladné imaginární části [19]. Tím pádem pro oba horní případy zbydou pouze dvě podstatná vlastní čísla:

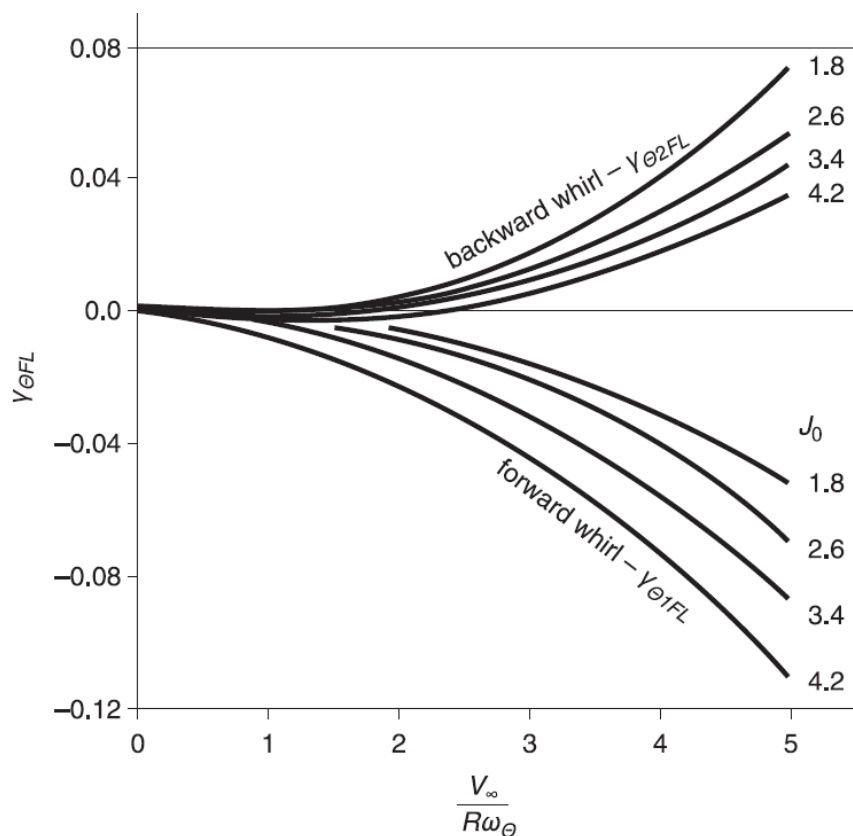
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sigma_1 + j\omega_{d1} \\ \lambda_2 &= \sigma_2 + j\omega_{d2} \end{aligned} \quad (3.120)$$

Reálnou část $\sigma_{1,2}$ těchto čísel pak lze interpretovat jako celkové dostupné tlumení v systému a imaginární část jako tlumenou frekvenci kmitání [15] [19]. Každé z vlastních čísel pak reprezentuje jeden sdružený mód, viz sekce (3.2.2). Dopředný mód odpovídá vlastnímu číslu s vyšší hodnotou frekvence a zpětný mód číslu s nižší hodnotou frekvence. Pro posouzení stability pohybu lze vystačit s reálnou částí vlastního čísla každého módu [15]. Je-li tato hodnota záporná, pak je systém stabilní. Je-li právě nulová, systém se nachází na mezi stability, a tedy je neutrálně stabilní. V tomto případě je vlastní číslo ryze imaginární, a systém tak koná harmonický pohyb, viz rovnice (3.115). Nalezení tohoto stavu, respektive rychlosti letu, která tomuto stavu při konkrétní konfiguraci ostatních parametrů odpovídá, je hlavním úkolem *flutterové* analýzy. Při překročení meze stability, což odpovídá jakékoli kladné reálné části vlastního čísla, se systém stává nestabilním, a tedy dochází k *whirl flutteru*. Závěrem je třeba připomenout, že rovnice (3.116) je platná pouze na mezi stability, viz první odstavec části (3.3.8). Pro všechny ostatní případy tedy vlastní čísla obsahují nepřesné hodnoty.

3.4 Vybrané poznatky z literatury

V této části budou stručně prezentovány některé informace přejaté z uvedených zdrojů, které jsou důležité pro analytické řešení *whirl flutteru*, zvláště při nedostatku experimentálních dat, případně pro podložení některých předpokladů zavedených při sestavování matematického modelu.

3.4.1.1 Zdůvodnění vzniku nestability pouze ve zpětném módu

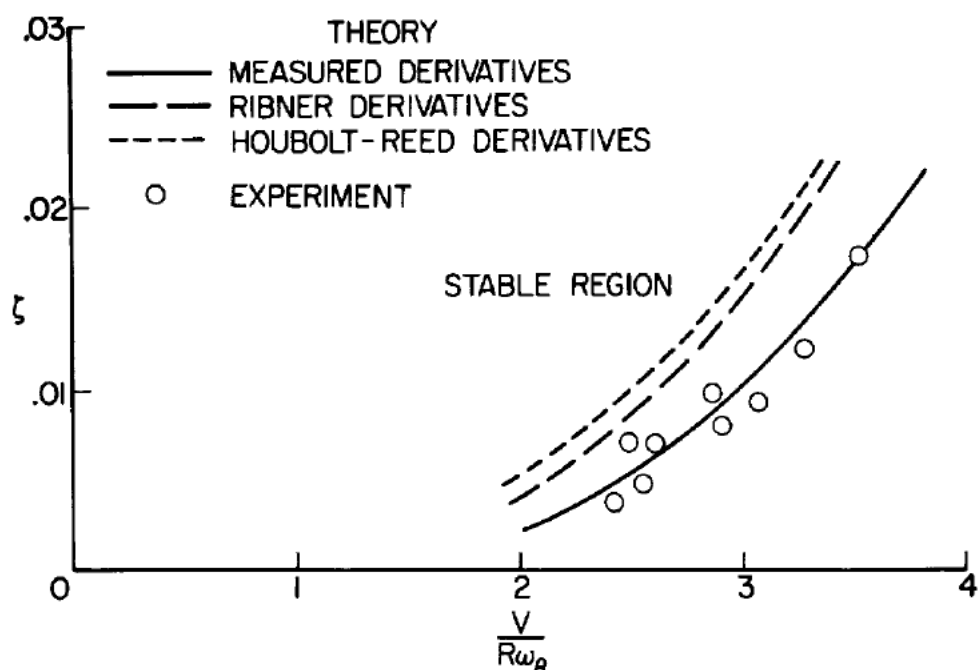


Graf 1: Křivky koeficientů tlumení potřebných pro setrvání na mezi stability [7] [8]

(Graf 1) vyjadřuje stabilitní mez, která vznikne úpravou pohybových rovnic *whirl flutteru* do bezrozměrné podoby a následným vyjádřením koeficientu konstrukčního tlumení $\gamma_{\Theta FL}$ potřebného pro setrvání systému v harmonickém pohybu. V grafu jsou zobrazeny křivky reprezentující hodnotu tohoto koeficientu v závislosti na bezrozměrné rychlosti letu pro oba sdružené módy a pro různé rychlostní poměry vrtule J_0 . Interpretace této stabilitní meze je taková, že pro všechny hodnoty koeficientu konstrukčního tlumení použitého v pohybových rovnicích, které spadají nad příslušnou křivku $\gamma_{\Theta FL}$, je systém stabilní a pro všechny hodnoty spadající pod ni dojde k *flutteru*. Vzhledem k tomu, že koeficient konstrukčního tlumení je vždy kladný, tak pro dopředný mód spadá vždy do stabilní oblasti, a tedy v tomto módu nikdy

nemůže dojít ke vzniku nestability. Toto tvrzení ovšem platí pouze za předpokladu absolutně tuhých vrtulových listů, jak už bylo řečeno dříve v části (3.2.3.1).

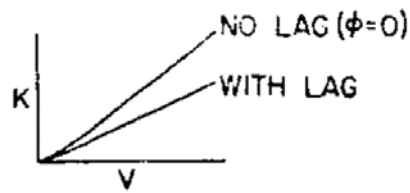
3.4.1.2 Srovnání analyticky získaných koeficientů s experimentem



Graf 2: Srovnání analyticky získaných koeficientů s experimentem [12]

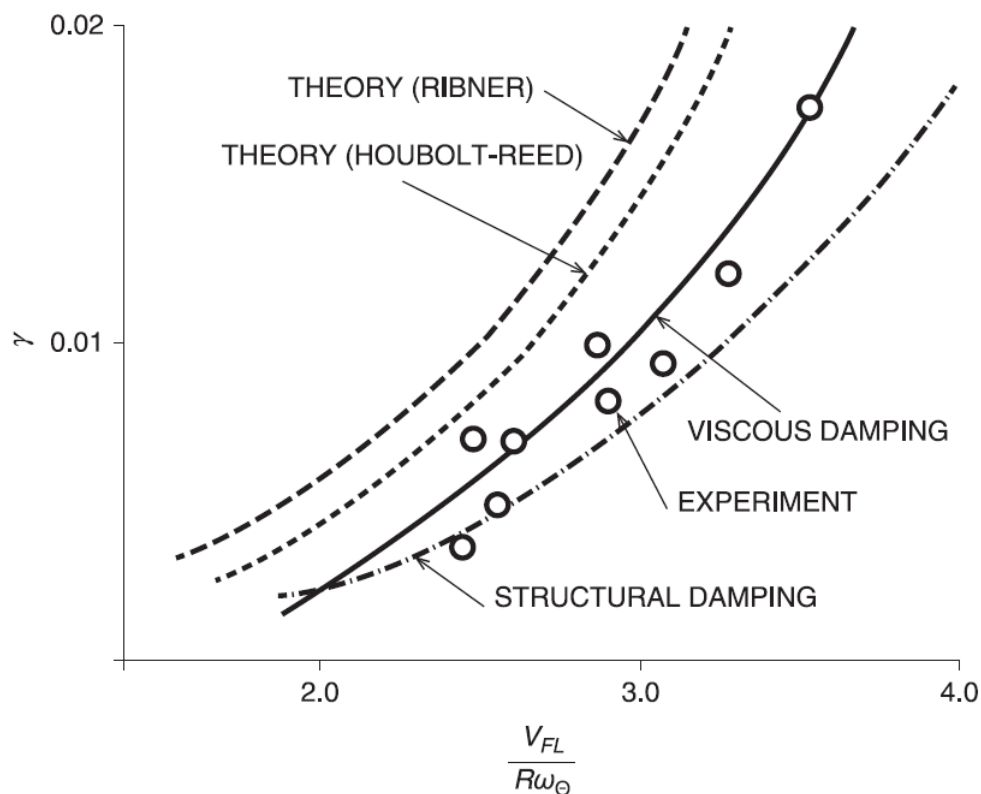
(Graf 2) zobrazuje stabilitní meze pomocí křivek poměrného útlumu potřebného k udržení neutrální stability systému v závislosti na bezrozměrné rychlosti letu. Graf srovnává křivky získané pomocí výpočtu s použitím aerodynamických koeficientů získaných analyticky podle dvou metod zmiňovaných v části (3.3.3) s křivkou získanou výpočtem s naměřenými koeficienty a zároveň se stabilitní mezí (ve formě bodů) získanou experimentem. Z grafu plyne, že analyticky vypočítané koeficienty rychlost *whirl flutteru* podceňují, nicméně výpočet s jejich pomocí je tedy na straně bezpečnosti. Je důležité zmínit, že v této práci použité Houboltovy-Reedovy koeficienty nebyly při vytváření grafu ještě modifikovány Theodorsenovou funkcí, tedy nezohledňovaly vliv zpoždění vztlaku. Stabilizující vliv této modifikace ukazuje Houbolt [10] pomocí jiného grafu stabilitní meze, viz (Graf 3). Ta představuje potřebnou tuhost v jednom směru (při konstantním poměru tuhostí) v závislosti na rychlosti letu. Nahoře nad křivkou se nachází stabilní oblast a dole pod křivkou oblast nestability. Lze se tedy domnívat, že po zahrnutí této modifikace do výpočtu, se křivka reprezentující použití Houboltových-

Reedových koeficientů, viz (Graf 2), výrazně posune směrem k experimentálně získaným datům.



Graf 3: Vliv zpoždění vztlaku na mez stability systému (náčrt) [10]

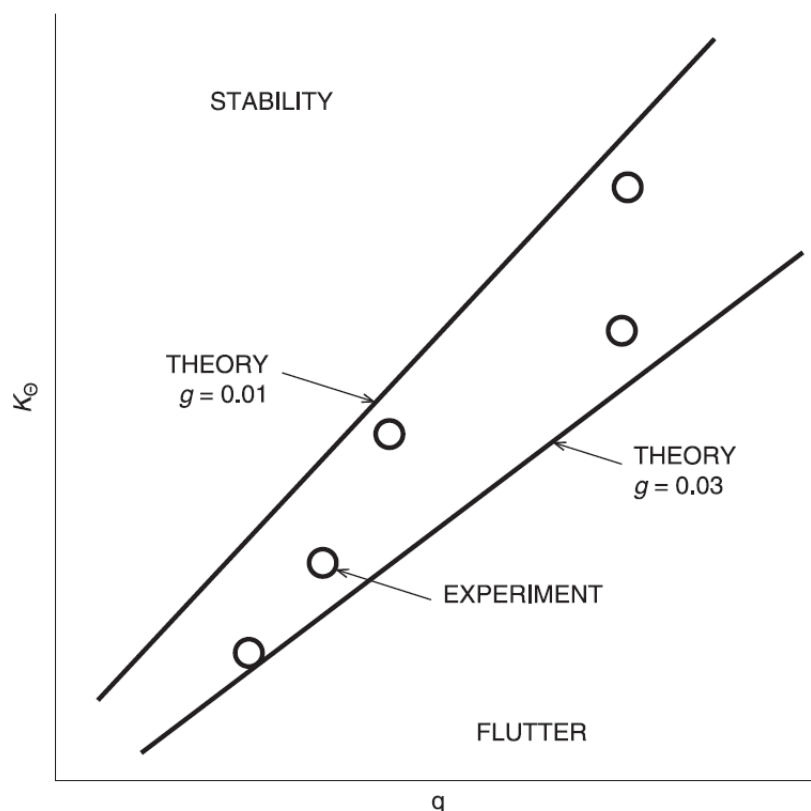
Podobný graf jako (Graf 2) uvádí i Čečrdle [7]:



Graf 4: Srovnání modelů vnitřního tlumení [7]

(Graf 4) má na rozdíl od (Graf 2) na svislé ose koeficient konstrukčního tlumení a s jeho pomocí lze také srovnat použití modelů vnitřního tlumení ve výpočtu. Jak je vidět, na rozdíl od standardních *flutterových* analýz, pro řešení rovnic *whirl flutteru* vychází realisticky použití viskózního modelu vnitřního tlumení, kdežto amplitudový model je příliš optimistický a výpočtovou rychlost *flutteru* nadhodnocuje oproti experimentu. Na základě toho bude pro konečné výsledky analýzy zadaného systému v kapitole (4) použit právě viskózní model.

3.4.1.3 Doporučené hodnoty koeficientů tlumení



Graf 5: Stabilitní mez pro různé hodnoty koeficientu tlumení vs. experiment [7]

(Graf 5) představuje potřebnou tuhost pro proměnný dynamický tlak. Křivky obalující experimentální body byly získány výpočtem pro hodnoty koeficientů konstrukčního tlumení ($g = \gamma$). Z grafu vyplývá, že při nedostatku vlastních experimentálních dat je rozumné volit koeficient z intervalu hodnot 0,01 – 0,03.

Pro určení koeficientů viskózního tlumení $d_{\theta,\psi}$ lze využít vztah, který uvádějí Reed a Bland [8], jenž vyjadřuje, v jakém případě amplitudový a viskózní model disipují stejné množství energie:

$$\gamma_{\theta,\psi} = 2\xi_{\theta,\psi} \frac{\omega}{\omega_{\theta,\psi}}, \text{ kde } \xi_{\theta,\psi} = \frac{d_{\theta,\psi}}{2J_{y,z}\omega_{\theta,\psi}} \quad (3.121)$$

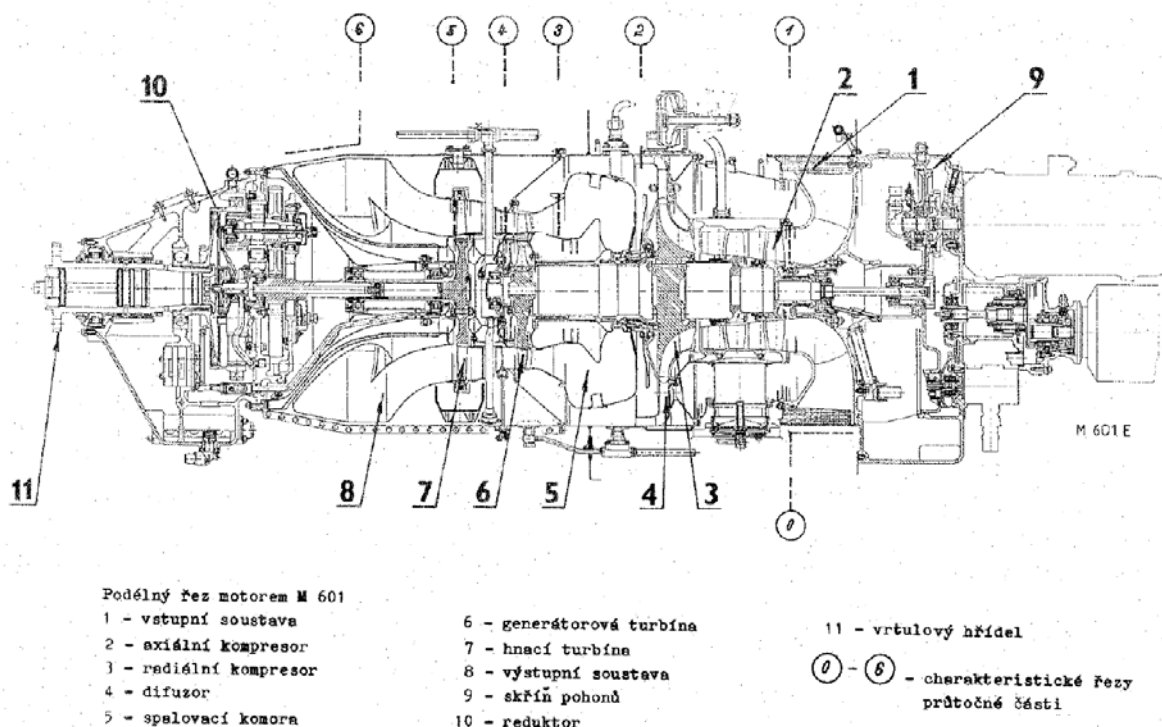
Pro přibližné vyjádření je možné zanedbat vliv sdružování izolovaných módů za rotace vrtule, a použít tak vztah ve formě:

$$\gamma_{\theta,\psi} \cong 2\xi_{\theta,\psi} \quad (3.122)$$

4 Aplikace výpočtového modelu na konkrétní systém

4.1 Zadání

Vzhledem k charakteru problému je z pochopitelných důvodů obtížné získat všechny potřebné vstupy. Charakteristiky reálné kmitající soustavy musí být naměřeny nebo napočítány s ohledem na hmoty a rozměry konkrétního motoru a všech dílů, které kmitají spolu s ním. Velkým problémem je samotná vrtule, u které je potřeba znát nejen detailní geometrii a hmoty, ale také profilové charakteristiky, zejména stoupání vztlakové čáry jako funkci poloměru listu. Protože žádný takový reálný systém včetně naměřených dat není na fakultě k dispozici, bylo vytvořeno teoretické zadání, vycházející z parametrů turbovrtulového motoru M 601 E v kombinaci s vrtulí Avia V 510.



Obr. 36 Řez turbovrtulového motoru M 601 E [20]

Walter M 601 E je československý letecký turbovrtulový motor dvourotorového uspořádání s protiproudým průtokem plynu. Jde o verzi motoru M 601, která byla vyvinuta pro letoun Let L-410UVP-E a certifikována v roce 1985. Kromě celé řady konstrukčních úprav oproti původní verzi je navýšen také vzletový výkon na 560 kW a navýšen čas mezi generálními opravami na 2 000 hodin. Maximální trvalý výkon 490 kW zůstává na tomto typu nezměněný. Motor pohání pětistou vrtulí Avia VJ8.510E.

Základní parametry motoru jsou uvedeny v následující tabulce:

Max. výkon na hřídeli vrtule ($H = 0, v_{\infty} = 0$, MSA)		$P_v = 560 \text{ kW} = 100\%$
Měrná spotřeba paliva (ekv.) při max. vzletovém výkonu		$C_{ekv} = \max 0,395 \text{ kg/kWh}$
Měrná spotřeba paliva (ekv.) na typ. cestovním režimu		$C_{ekv} = \max 0,300 \text{ kg/kWh}$
Teplota plynu před generátorovou turbínou (výpočtová)		$T_{3c} = 1\,230 \text{ K}$
Teplota plynu za generátorovou turbínou		$T_{4c} = \max 1\,023 \text{ K}$
Celkové stlačení vzduchu v kompresoru		$K_c = 6,65$
Hmotnostní tok vzduchu na vstupu do kompresoru		$G_v = 3,60 \text{ kg/s}$
Odběr vzduchu pro drak ($H = 4200 \text{ m}, v_{\infty} = 400 \text{ km/h}$)		$G_{odb} = \max 62 \text{ g/s}$
Max. otáčky rotoru generátoru		$n_G = 36\,660 \text{ ot/min}$
Max. otáčky hnací turbíny		$n_{HT} = 31\,023 \text{ ot/min}$
Krouticí moment na hřídeli vrtule		$M_k = 2\,571 \text{ N.m} = 100\%$
Hmotnost suchého motoru		$m_M = 200 \text{ kg}$
Výkonová hmotnost		$m_P = 0,357 \text{ kg/kW}$
Rozměry:	šířka	$h_m = 590 \text{ mm}$
	výška	$v_m = 650 \text{ mm}$
	délka	$L_m = 1\,675 \text{ mm}$
Vibrace motoru	na generátoru plynu	$v_{b1} = \max 5 \text{ mm/s}$
	na volné turbíně	$v_{b2} = \max 10 \text{ mm/s}$
Doba akcelerace z volnoběhu na režim $0,95 P_{max}$		$t_a \leq 5 \text{ s}$

Tabulka 1: Základní parametry motoru M 601 E [20]

„V 510 je tažná pětistá vrtule, regulovaná na konstantní otáčky s polohou praporovou a reverzní, s omezovačem otáček a blokováním jeho činnosti v reverzní poloze a možností plynulé změny úhlu nastavení v celém rozsahu stavění. Rozsah stavění je rozdělen na dvě samostatná pracovní pásma – pásmo letových režimů, řízených regulátorem otáček, a pásmo přistávacích a reverzních režimů řízených polohově ručním zásahem pilota“ [20]. Vybrané základní technické údaje jsou uvedeny v tabulce níže:

Max. absorbovaný výkon na max. otáčkách		$P_v = 560 \text{ kW}$
Rozsah regulovaných otáček		$n = 1\,550 \text{ až } 2\,080 \text{ ot/min}$
Průměr vrtule		$D_p = 2\,300 \pm 2 \text{ mm}$
Profil		VZLÚ VI S
Hmotnost	vrtule suchá s odmrazováním	$m_v = 83,3 \text{ kg}$
	jeden list	$m_1 = 6,4 \text{ kg}$
Provozní podmínky	rozsah teplot	$-60 \leq t_b \leq +50 \text{ } ^\circ\text{C}$
	rozsah výšek	$0 \leq H \leq 8500 \text{ m MSA}$
	rychlost letu	$v_{\infty} = 0 \text{ až } 445 \text{ km/h EAS}$

Tabulka 2: Vybrané základní technické parametry vrtule V 510 [20]

4.1.1 Zadání parametrů pro flutterovou analýzu

Pro provedení výpočtové analýzy zadal vedoucí této diplomové práce systém pohonné jednotky s následujícími parametry:

Parametry motoru a lože		
Momenty setrvačnosti:	k horizontální ose	$J_y = 126,03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
	k vertikální ose	$J_z = 126,12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
VI. frekvence izolovaných módů:	v horizontální rovině	$f_\Psi = 7,9 \text{ Hz}$
	ve vertikální rovině	$f_\Theta = 6,8 \text{ Hz}$
Délka vyložení (od středu vrtule k uchycení motoru):		$a = 1,045 \text{ m}$
Parametry vrtule		
Polární moment setrvačnosti:		$J_x = 20,61 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Rozsah otáček:		$n = 1\,550 \text{ až } 2\,080 \text{ ot/min}$
Průměr vrtule:		$D_p = 2\,300 \text{ mm}$
Počet listů:		$N_b = 4$
Letové rychlosti		
Dovolená rychlost:		$v_d = 495 \text{ km/h EAS}$

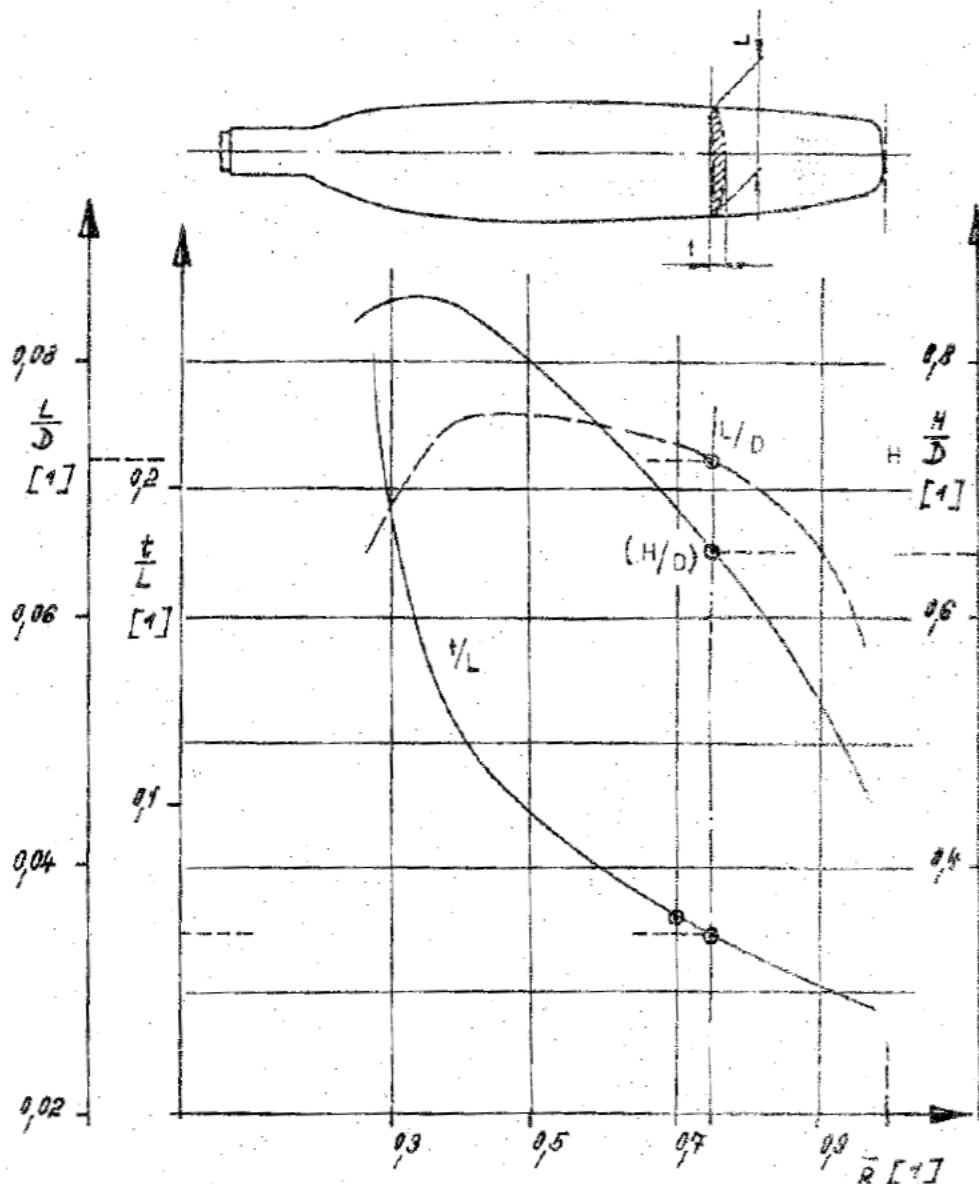
Tabulka 3: Zadané parametry systému pro flutterovou analýzu

Další potřebné parametry byly zadány k odečtení z grafů, které jsou obsahem [20] a [7]:

1. Hloubka profilu po délce listu

První třetina listu							
$\bar{R} = \eta [1]$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$D = D_p [m]$	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3
$L/D [1]$	-	-	-	-	0,0590	0,0647	0,0687
$L = c_0 [m]$	-	-	-	-	0,1357	0,1488	0,1580
Druhá třetina listu							
$\bar{R} = \eta [1]$	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65
$D = D_p [m]$	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3
$L/D [1]$	0,0730	0,0753	0,0757	0,0753	0,0750	0,0743	0,0738
$L = c_0 [m]$	0,1679	0,1732	0,1741	0,1732	0,1725	0,1709	0,1697
Třetí třetina listu							
$\bar{R} = \eta [1]$	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
$D = D_p [m]$	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3
$L/D [1]$	0,0733	0,0724	0,0703	0,0683	0,0653	0,0600	0,0527
$L = c_0 [m]$	0,1686	0,1665	0,1617	0,1571	0,1502	0,1380	0,1212

Tabulka 4: Odečtené a přepočítané geometrické parametry vrtule V510



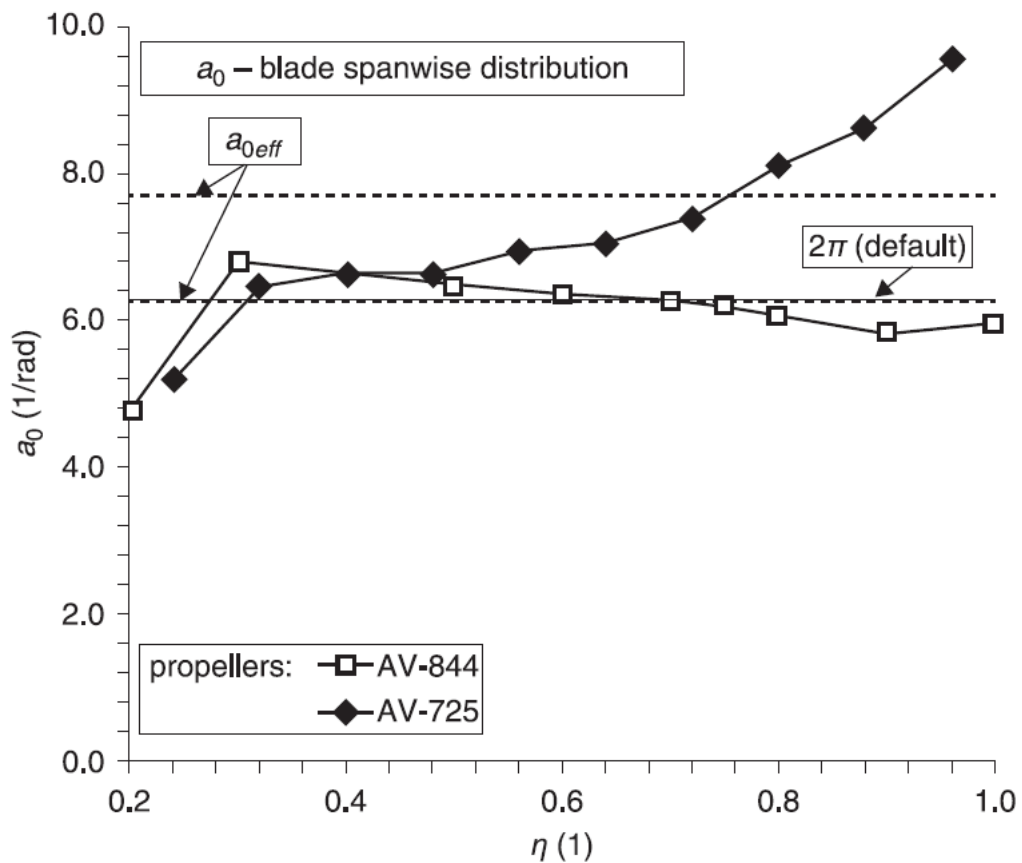
Graf 6: Geometrické parametry vrtule V510 [20]

Přestože podle (Graf 6) má vrtule V510 už pro $\eta = 0,3$ kruhový průřez, byla hodnota prvního vztlakového bodu poloměru vrtule stanovena na $\eta_0 = 0,2$. Je tomu tak z důvodu, že vztlaková čára bude použita z jiného typu vrtule, kde začíná právě na této hodnotě (naměřený bod zřejmě odpovídá středu elementu). Zadané parametry jsou navíc teoretického charakteru, takže tyto drobné odlišnosti nemají přílišný význam. Jde primárně o to, aby hodnoty přibližně odpovídaly nějaké reálné konfiguraci. To samé platí o špičce listu, kde je koncový zaoblený tvar uvažován jako rovný řez. Obě aproximace vedou k velmi malému navýšení vztlaku, mají destabilizační efekt, a jsou tedy navíc na straně bezpečnosti.

2. Stoupání vztlakové čáry profilu jako funkce poloměru vrtule

První třetina listu							
η [1]	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
c_y^α [1/rad]	-	-	-	-	4,55	5,35	6,10
Druhá třetina listu							
η [1]	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65
c_y^α [1/rad]	6,52	6,60	6,62	6,70	6,90	7,00	7,10
Třetí třetina listu							
η [1]	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
c_y^α [1/rad]	7,32	7,60	8,10	8,55	8,85	9,35	10,00

Tabulka 5 Odečtené stoupání vztlakové čáry vrtule AV-725



Graf 7: Stoupání vztlakové čáry profilu vrtulí AV-844 a AV-725 [7]

Pro zadanou teoretickou vrtuli bylo zvoleno použít křivku vrtule AV-725. Jednak proto, že jde o modernizovanou verzi V 510, a také proto, že se její funkce stoupání vztlakové čáry více liší od základní hodnoty 2π . V citlivostní analýze pak bude možné porovnat výsledek pro oba přístupy a rozdíl bude zřetelnější.

4.2 Výpočetní programy pro flutterovou analýzu

Na základě teorie popsané v kapitole (3) byly vytvořeny programy *WhirlFlutter1.m*, *WhirlFlutter2.m* a *PomocnyProgram.m* v interaktivním programovém prostředí MATLAB společnosti MathWorks. Popis každého z nich je uvedený níže.

4.2.1 Program *WhirlFlutter1.m*

První z programů slouží k vyšetření rychlosti letu, při které se systém nachází v bodě neutrální stability, tedy kritické rychlosti flutteru v_{FL} . Program reprezentuje výpočetní model sestavený v podkapitolách (3.3.7) a (3.3.8). Princip spočívá v řešení vlastních čísel matice flutteru, viz rovnice (3.117), pro určitý interval letových rychlostí za pomoci *for* cyklu. Vlastní čísla jsou ukládána do matice, ve které každý řádek představuje jednu letovou rychlost a každý ze čtyř sloupců jedno vlastní číslo, viz podkapitola (3.3.8.2). Matice je posléze upravena tak, aby obsahovala pouze vlastní čísla s fyzikálním významem, viz rovnice (3.120). Zbydou tak pouze dva sloupce, které odpovídají dopřednému a zpětnému módu, viz podkapitoly (3.2.2) a (3.3.8.2). Posléze jsou sloupce matice analyzovány z hlediska znaménka reálné části vlastního čísla. Hledaná rychlost flutteru se pak nachází mezi řádkem s posledním vlastním číslem se zápornou reálnou částí a řádkem s prvním vlastním číslem s kladnou reálnou částí. Hodnota je stanovena pomocí lineární regrese, i když by v rámci přesnosti naprosto stačilo vzít rychlost z prvního ze zmíněných řádků. Celý skript je uveden v příloze 2 na zadních stranách práce a také jako program v elektronické příloze. Je systematicky rozdělen do několika bloků:

1) Nastavení výstupů

V této části (řádky 12–28) je možné zvolit požadované výstupní grafy pomocí přiřazení hodnot 0 a 1 příslušným proměnným. Pro všechny hodnoty rovné nule program pouze vypíše do příkazového okna frekvenci a rychlost flutteru, kterou následně porovná s dovolenou rychlostí letu, a rozhodne, zda kritická rychlost leží v přípustném intervalu.

2) Vstupní parametry

Zde je potřeba definovat hodnoty vstupních parametrů. Nejprve je nutné provést výběr modelu tlumících sil (řádky 30–40), opět pomocí přiřazení hodnot 0 a 1 řídicím proměnným. Podle zvoleného modelu program při sestavení matice flutteru uvažuje příslušné celkové matice tlumení a tuhosti, viz podkapitola (3.3.8.1). Dále je třeba zadat maximální návrhovou

rychlost letu na řádku 43, program ji posléze sám přepočítá (řádek 44) na dovolenou rychlost podle obvyklého vztahu:

$$v_d = 1,1 \cdot v_{max} \quad (4.1)$$

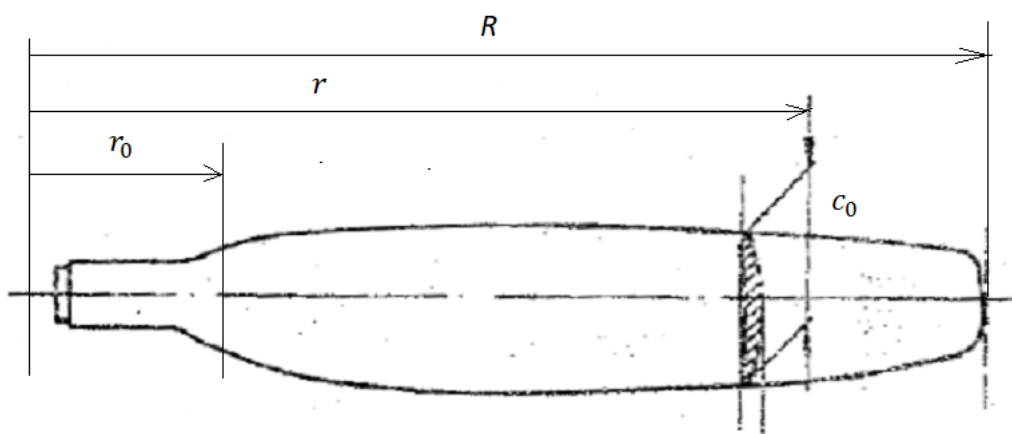
Na řádku 47 se definuje interval letových rychlostí pro *for* cyklus, pro které bude výpočet proveden. Pro správnou funkci programu musí hledaná kritická rychlost ležet uvnitř tohoto intervalu. Následují parametry proudu vzduchu, kde je potřeba nastavit pouze výšku letu na řádku 53, zbylé proměnné (řádky 54–61) si program dopočítá na základě vztahů platných pro MSA do výšky jedenácti kilometrů:

$$T = 15 - 0,0065 \cdot H \text{ [}^\circ\text{C]} \quad (4.2)$$

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{H}{44\,308}\right)^{4,2553} \text{ [kg/m}^3\text{]} \quad (4.3)$$

$$a_z = (331,57 + 0,607 \cdot T) \text{ [m/s]} \quad (4.4)$$

Dále je třeba nastavit parametry vrtule. Kromě zřejmých parametrů (řádky 63–80) je třeba zvolit, na kolik elementů bude list vrtule rozdělen pro výpočet pomocí teorie izolovaného elementu listu. Každý element je pak ohraničen poloměry r_{x-1} zleva a r_x zprava počínaje hodnotou r_0 a konče poloměrem vrtule R . Délka každého elementu musí být stejná.



Obr. 37: Geometrie vrtulového listu (přejato z [20] a upraveno)

Hodnoty mezních poloměrů se pak zapíší v řádcích 81–97. Každému poloměru odpovídá hloubka listu, respektive tětiva profilu, c_0 v příslušném řezu. Ty je třeba zapsat do řádků 99–115. A konečně posledním vrtulovým parametrem je stoupání vztlakové čáry profilu jednotlivých elementů. Tato hodnota je obvykle známa na jejich středech, tím pádem je

potřeba získané body nejprve proložit křivkou a posléze odečíst hodnoty v krajních bodech každého elementu, které je pak možné zapsat do řádků 117–133. Jak již bylo zmíněno, program počítá s jednoduchou aproximací, která uvažuje zaoblený konec vrtule jako rovný řez. Při lepší znalosti geometrie a aerodynamických vlastností je možné tuto část zpřesnit. Dále je třeba zdůraznit, že ve výchozím stavu program počítá s maximální hodnotou rozsahu vrtulových otáček. Hodnotu lze samozřejmě upravit na jakoukoli požadovanou, nicméně protože otáčky mají destabilizující efekt, jak bude ukázáno v citlivostní analýze, je z hlediska aeroelastické analýzy zajímavá pouze maximální hodnota.

V poslední části vstupních parametrů je nutné zadat hodnoty setrvačných momentů na řádcích 152–156, hodnoty vlastních frekvencí izolovaného horizontálního a vertikálního módu kmitání (řádky 158–159), koeficienty konstrukčního tlumení (řádky 167–168) a délku vyložení na řádku 178. Potřebné tuhosti v příslušných směrech si program dopočítá z frekvencí podle vztahu:

$$K_{\theta,\psi} = J_{y,z} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_{\theta,\psi})^2 \quad (4.5)$$

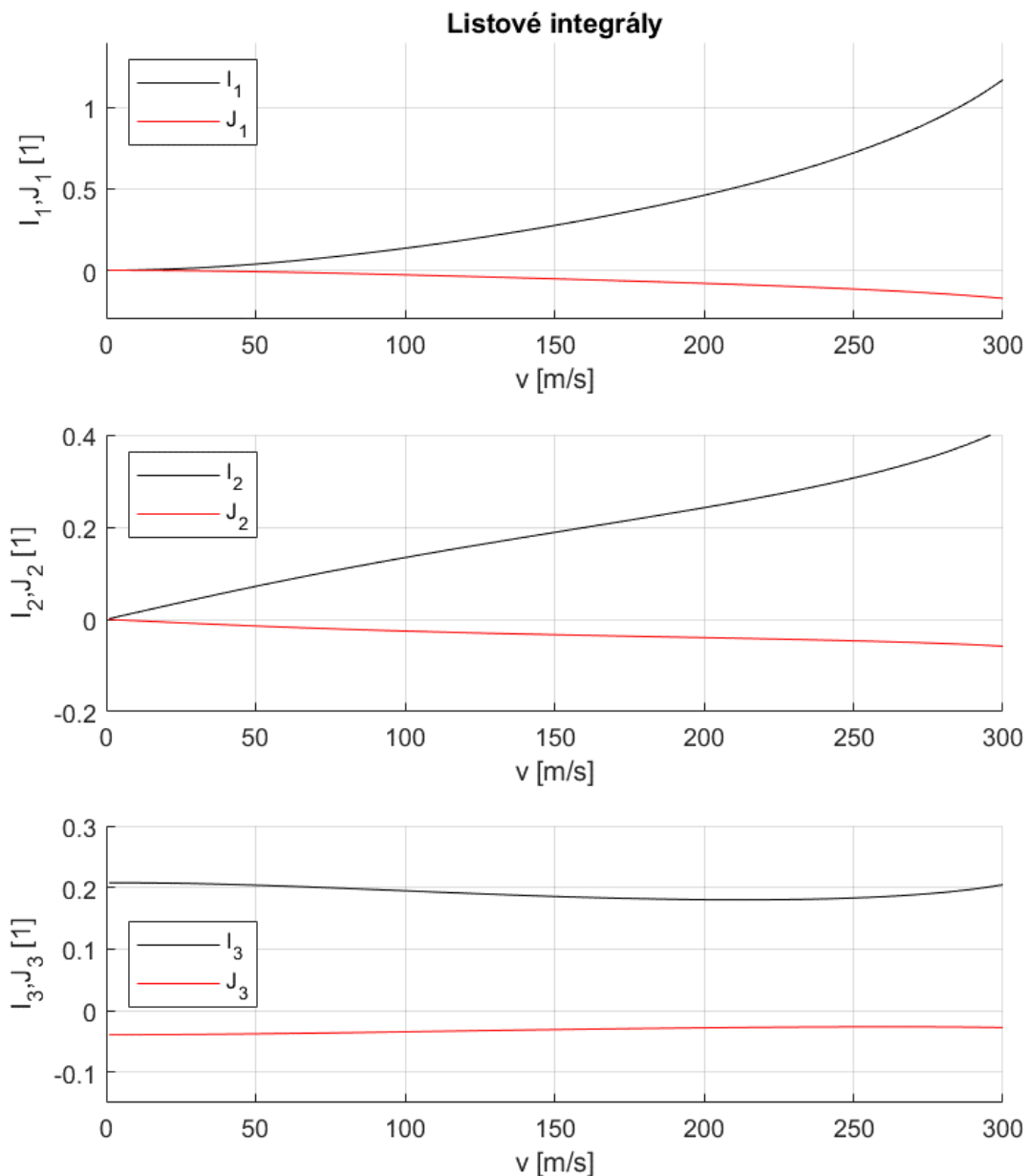
a pro výpočet s využitím ekvivalentního viskózního vnitřního tlumení přepočítá koeficienty konstrukčního tlumení dle rovnice (3.122).

3) Výpočet aerodynamických koeficientů

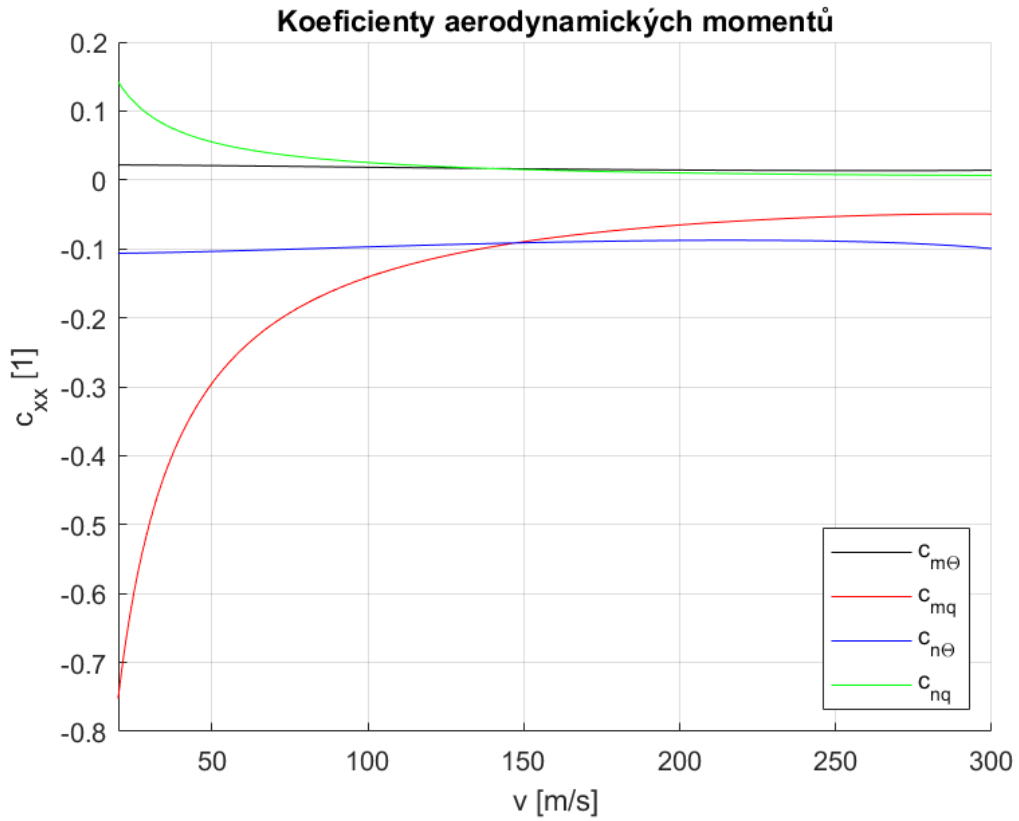
V tomto bloku probíhá výpočet aerodynamických koeficientů podle vztahů (3.77). Program nejprve vypočítá hodnotu redukované frekvence, viz rovnice (3.76), pro každý řez (řádek 187). Posléze vypočítá složky Theodorsenovy funkce, viz rovnice (3.66), také pro každý řez listu (řádky 191–205). Následně spočítá štíhlost listu, viz rovnice (3.85), (řádek 212), pro výpočet integrálu je použita lichoběžníková metoda (řádek 208). V dalším kroku provede výpočet samostatného členu pod odmocninou v rovnicích (3.90), také v každém řezu, a aplikuje korekci, viz rovnice (3.88) a (3.89), to vše na řádcích 214–231.

V poslední fázi výpočtu koeficientů program v rámci přípravy k integraci po poloměru listu napočítá nejprve hodnoty argumentu všech integrálů v rovnicích (3.90), a to opět v každém řezu listu (řádky 232–271). Tyto hodnoty posléze integruje lichoběžníkovou metodou (řádky 272–280) a následně vyřeší kompletní listové integrály na řádcích 281–289. Průběhy těchto integrálů v závislosti na rychlosti letu jsou v (Graf 8) pro výchozí vstupní hodnoty. Posledním

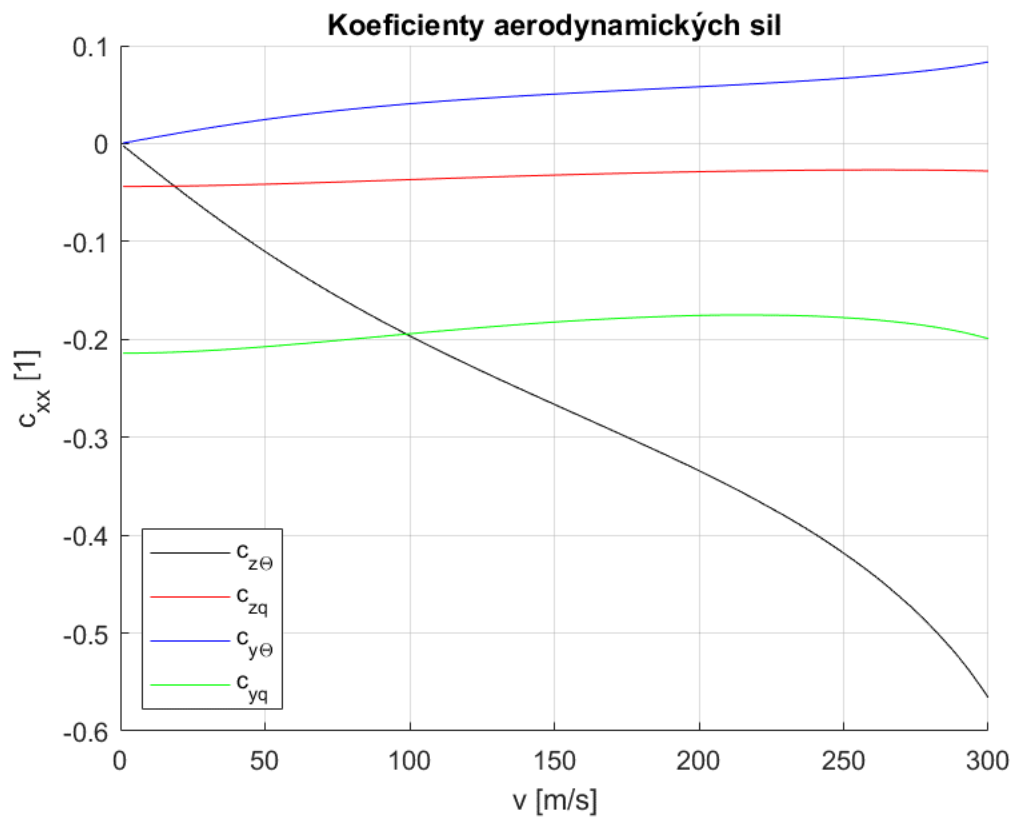
krokem výpočtu je dosažení vypočítaných integrálů do vztahů (3.77), jejichž výsledkem jsou pro danou rychlost letu příslušné aerodynamické koeficienty. Stejně jako listové integrály jsou pak hodnoty koeficientů aerodynamických momentů a aerodynamických sil zobrazeny v závislosti na letové rychlosti v (Graf 9) a (Graf 10). V případě momentů začíná vodorovná osa na rychlosti 20 m/s z důvodu přehlednosti. Hodnoty pro tyto grafy program ukládá na řádcích 300-320.



Graf 8: Průběhy hodnot listových integrálů



Graf 9: Průběhy hodnot koeficientů aerodynamických momentů



Graf 10: Průběhy hodnot koeficientů aerodynamických sil

4) Výpočet matic a řešení rovnice *flutteru*

Jak název napovídá, v této části programu jsou definovány jednotlivé matice, přesně podle podkapitol (3.3.7) a (3.3.8.1). Výsledná matice *flutteru* je na řádcích 420–421. Řádky 395–416 představují výběr celkových matic tlumení a tuhosti podle zvoleného modelu vnitřního tlumení na začátku skriptu. Na řádce 426 je pak definována matice vlastních čísel, která je výsledkem *for* cyklu pro zvolený interval rychlostí letu a která v sobě nese informaci o stabilitě. Řádky 432–435 pak představují její již zmíněnou úpravu tak, aby obsahovala pouze fyzikálně významné módy.

5) Stanovení rychlosti *flutteru*

V tomto bloku proběhne už pouze prohledání sloupců matice a následná identifikace řádku s první kladnou hodnotou reálné části vlastního čísla. Posléze je provedena lineární regrese a výpis hledaných údajů do příkazového okna.

6) Diagramy v_{∞} - σ - f a další grafy

V závěru jsou už pouze naprogramovány grafy, jejichž vykreslení je řízeno prvním blokem skriptu. Kromě již popsaných grafů si lze zobrazit v_{∞} - σ - f diagram, který je grafickou reprezentací hledání rychlosti *flutteru* (pojmenování je zvoleno z důvodu odlišení od K-metody a ostatních metod vyšetření stability pro standardní *flutter* pevných vztlakových ploch). Druhou variantou je v_{∞} - ξ - f diagram pro viskózní model vnitřního tlumení, kde lze vlastní čísla dále interpretovat podle rovnice [15]:

$$\lambda_{1,2} = \sigma_{1,2} \pm j\omega_{d1,2} = \xi_{1,2}\omega_{n1,2} \pm i\omega_{n1,2}\sqrt{(1 - \xi_{1,2})^2} \quad (4.6)$$

V rovnici (4.6) představuje ω_n netlumenou sdruženou frekvenci a ξ poměrný útlum, tedy poměr tlumení ku jeho kritické hodnotě. Poslední na výběr je ještě tzv. *Root locus plot*.

4.2.2 Program *WhirlFlutter2.m*

Druhý program, který lze nalézt v příloze 3, byl sestaven pro citlivostní analýzu *whirl flutteru* na vybrané vstupní parametry. Jádro programu, tedy výpočet aerodynamických koeficientů a sestavení matice *flutteru*, je až na drobné změny stejné jako v první verzi. Program je sestaven pouze pro model viskózního tlumení, který se ukázal realističtější, viz podkapitola (3.4). Zásadní rozdíl spočívá ve schématu pro výpočet celkové matice vlastních čísel. Program nyní

obsahuje dva *for* cykly pro intervaly vlastních frekvencí izolovaných módů (řádky 23 a 29), protože jeho výsledkem je stabilitní mez v jejich rovině a její změna při variaci vybraných vstupů. Rychlost letu je nyní konstanta, kterou je třeba definovat na řádce 44.

Princip nalezení meze stability je také stejný jako v první verzi. Výsledkem druhého (vnořeného) *for* cyklu je matice vlastních čísel pro jednu hodnotu frekvence v horizontální rovině z prvního *for* cyklu a celý interval frekvencí ve vertikální rovině, tedy každý řádek odpovídá vlastním číslům pro jednu tuto frekvenci. Po doběhnutí vnořeného cyklu je matice upravena tak, aby zbyla pouze vlastní čísla příslušná zpětnému módu, tedy jedinému, ve kterém je možný vnik nestability za předpokladu absolutně tuhých vrtulových listů, viz podkapitola (3.4.1.1). Tyto úpravy jsou na řádcích 387–405. Takto upravená matice, respektive nyní už vektor vlastních čísel, je následně zapsána jako sloupec do celkové matice vlastních čísel na řádce 412. Zapsaný sloupec odpovídá na začátku odstavce zmíněné hodnotě frekvence ve vertikální rovině. Smyčka prvního *for* cyklu se následně opakuje pro další hodnoty intervalu, až vznikne kompletní matice vlastních čísel, jejíž řádky odpovídají vlastním číslům matice *flutteru* pro hodnoty vlastních frekvencí izolovaných módů ve vertikální rovině a sloupce vlastním číslům pro hodnoty vlastních frekvencí v rovině horizontální.

Na konci programu jsou oproti první verzi dva nové bloky:

1) Vyšetření stabilitní meze

Tento blok principiálně odpovídá bloku 5 první verze. Posouzení vlastního čísla je stejné, ovšem v tomto případě je třeba skenovat celou matici nejprve po sloupcích a zapsat souřadnice prvního bodu se zápornou hodnotou, tedy prvního stabilního bodu. Stejný proces je pak třeba provést ještě po řádcích. Výsledkem jsou souřadnice meze stability v rovině vlastních frekvencí izolovaných módů, tedy dva vektory hodnot f_{ψ} a dva vektory jim odpovídajících hodnot f_{θ} .

2) Graf stabilitní meze

Poslední blok má za úkol už pouze danou stabilitní mez vykreslit. Na řádce 469 je pak ještě uveden příkaz, jehož pomocí dojde k zápisu získaných souřadnic do samostatného souboru. Tímto způsobem jsou získána data pro poslední program, jehož funkcí je pouze vytvořit grafy stabilitních mezí pro variaci vstupních parametrů.

4.2.3 Program *PomocnyProgram.m*

Poslední z programů je napsán pro grafické vyobrazení výsledků obdržných pomocí *WhirlFlutter2.m*. Schéma je provedeno tak, že jsou tyto výsledky zapisovány pro každou konfiguraci parametrů, tedy každé jedno spuštění programu *WhirlFlutter2.m*, pouze do jednoho souboru, pojmenovaného *PomocnySoubor.mat*. Aby nedošlo k jejich přepisování, je třeba vždy změnit název příslušných čtyř výstupních proměnných na konci skriptu. Pro jednoduchost byla tato změna provedena přiřazením jednoho písmena každé konfiguraci a toto písmeno potom bylo přidáno na konec názvu proměnné – tedy např. pro konfiguraci „a“ se výstupní proměnná „reseni_psi“ změní na „reseni_psia“ a tak dále.

Řádek 16 programu *PomocnyProgram.m* po spuštění nahraje výsledky zapsané v souboru *PomocnySoubor.mat* a program následně vykreslí grafy zvolené opět pomocí přiřazení hodnot 0 a 1 řídicím proměnným na řádcích 18–45. *PomocnyProgram.m* je k nalezení v příloze 4 a stejně jako dva předcházející také v elektronické příloze (včetně datového souboru *PomocnySoubor.mat*).

4.3 Flutterová analýza zadaného systému

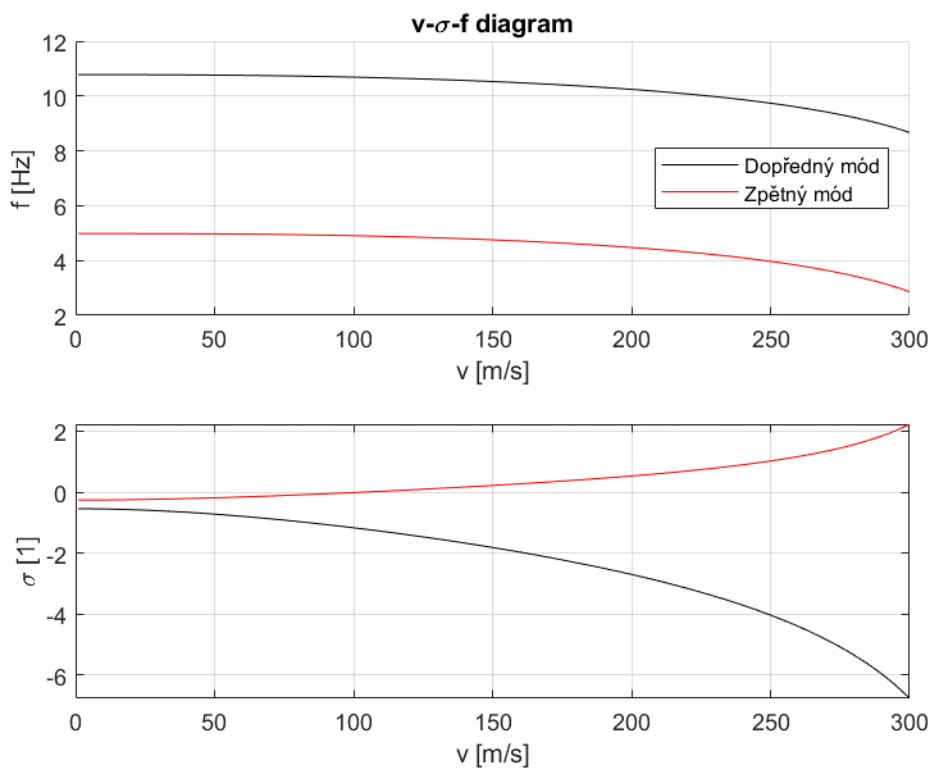
4.3.1 Výchozí konfigurace programů

v_{max} [km/h]	H [m]	N_b [1]	r_0 [m]	R [m]
450	0	4	$0,2 \cdot R$	1,150
n_{max} [ot/min]	$c_{y_{max}}^\alpha$ [1/rad]	J_x [kg.m ²]	J_y [kg.m ²]	J_z [kg.m ²]
2080	10	20,61	126,03	126,12
f_Θ [Hz]	f_Ψ [Hz]	γ_Θ [1]	γ_Ψ [1]	a [m]
6,8	7,9	0,02	0,02	1,045

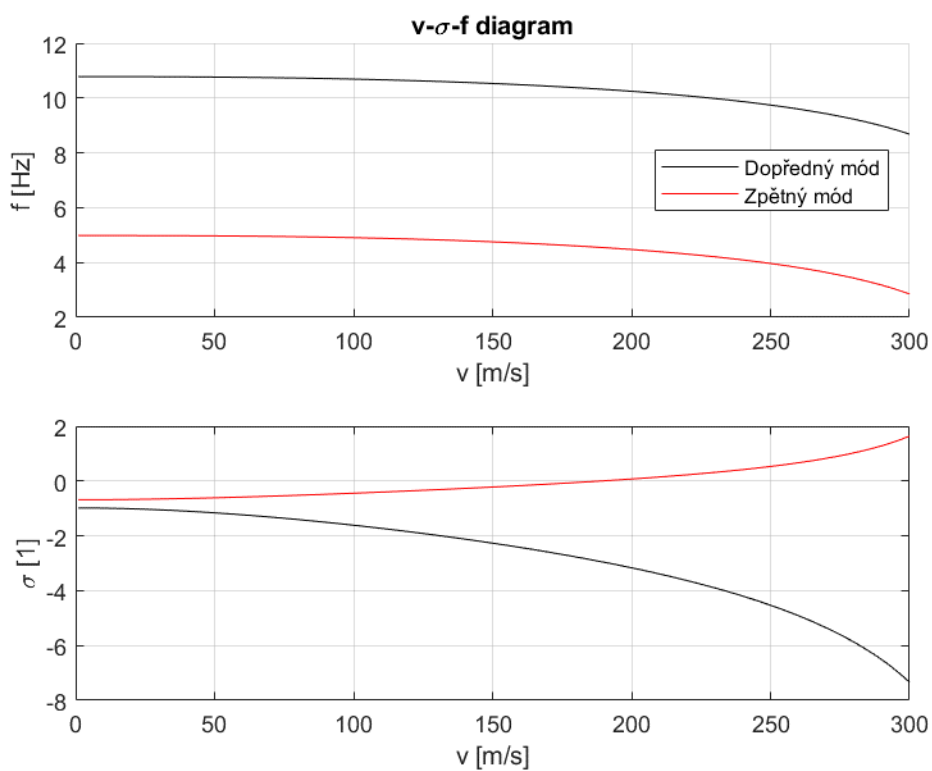
Tabulka 6: Výchozí konfigurace programů pro flutterovou analýzu

V tabulce výše jsou uvedeny hodnoty proměnných použitých pro výpočet flutterové analýzy pomocí programů popsaných v podkapitole (4.2). Jedná se o výchozí konfiguraci, tedy toto nastavení bylo použito vždy v případě, že přímo v příslušném grafu nebo v popisku není stanoveno jinak. Hodnoty vycházejí ze zadání, viz podkapitola (4.1.1). Koeficienty tlumení pak byly použity na základě poznatků v podkapitole (3.4.1.3). Výchozí otáčky vrtule jsou maximem zadaného rozsahu. V tabulce nejsou uvedeny geometrické a aerodynamické parametry jednotlivých řezů vrtulového listu, které jsou použity z tabulek (4) a (5).

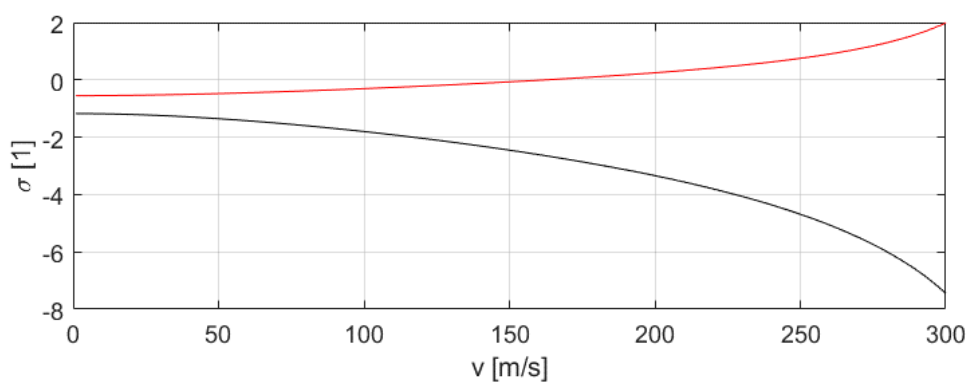
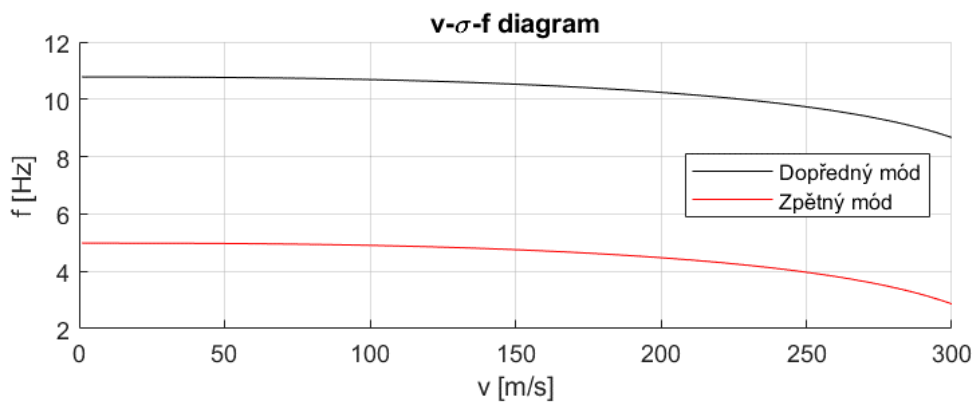
4.3.2 Stanovení rychlosti flutteru



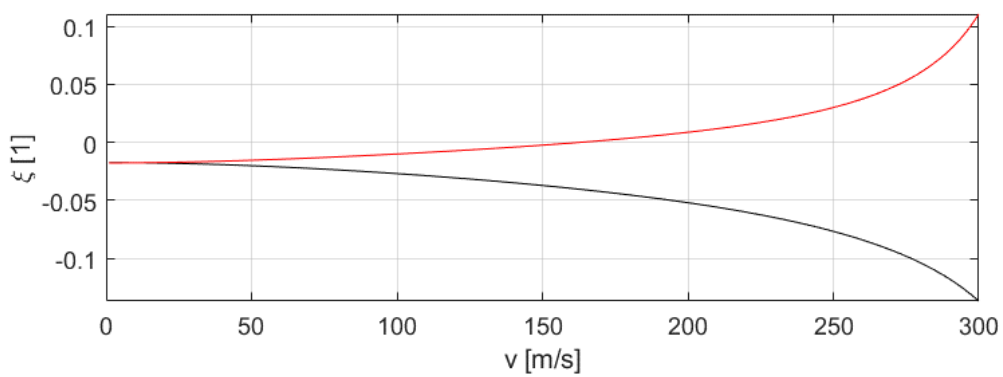
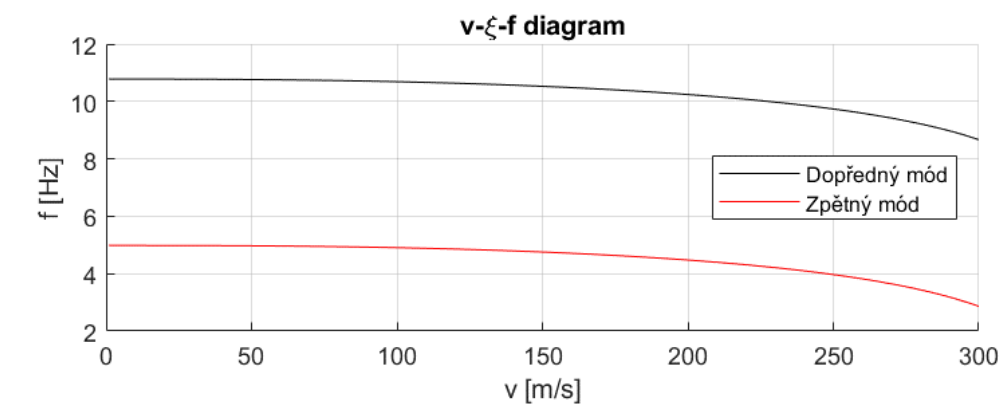
Graf 11: V- σ -f diagram pro vnitřně netlumenou soustavu



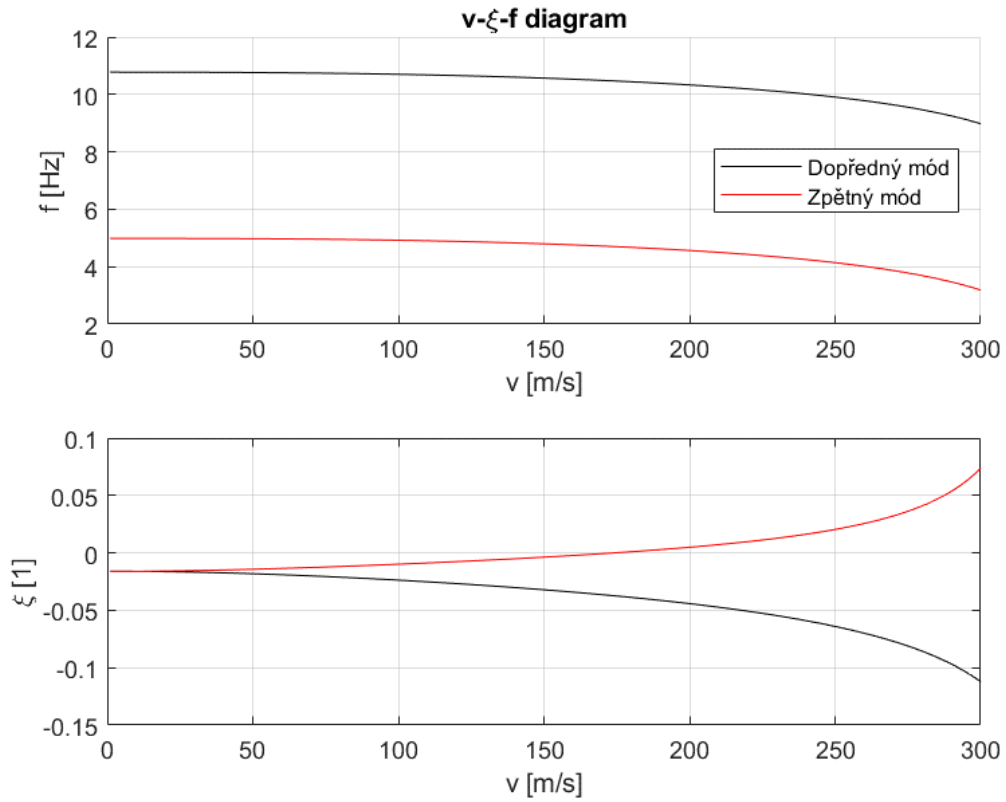
Graf 12: V- σ -f diagram pro amplitudový model vnitřního tlumení



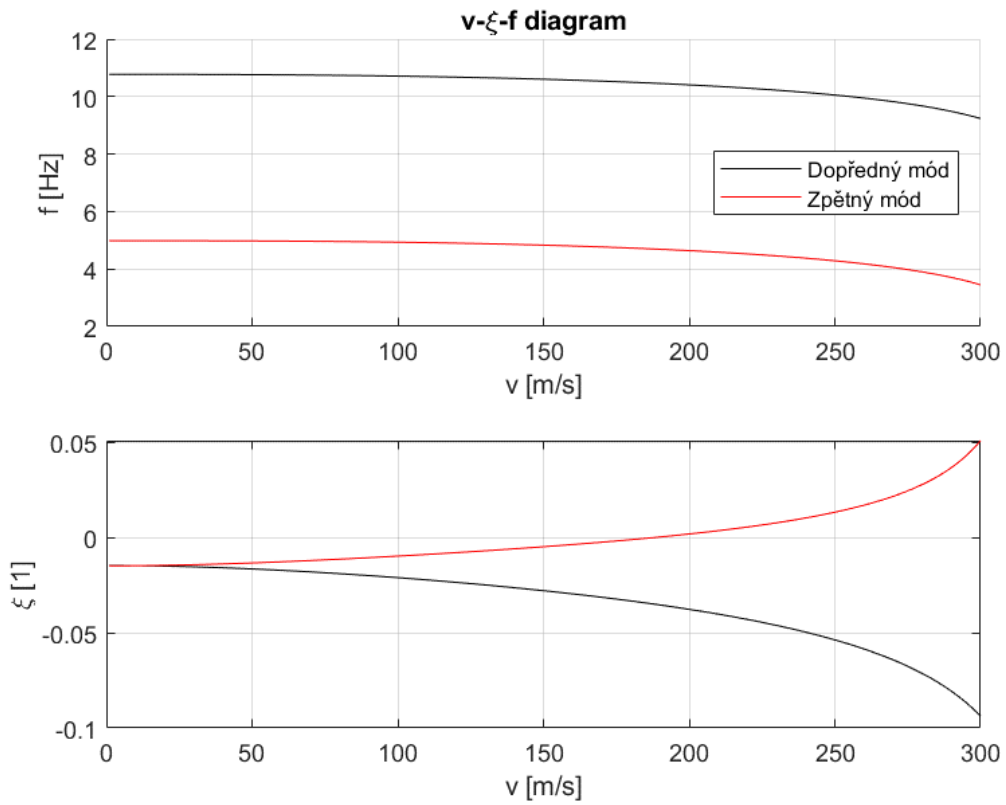
Graf 13: V- σ -f diagram pro viskózní model vnitřního tlumení



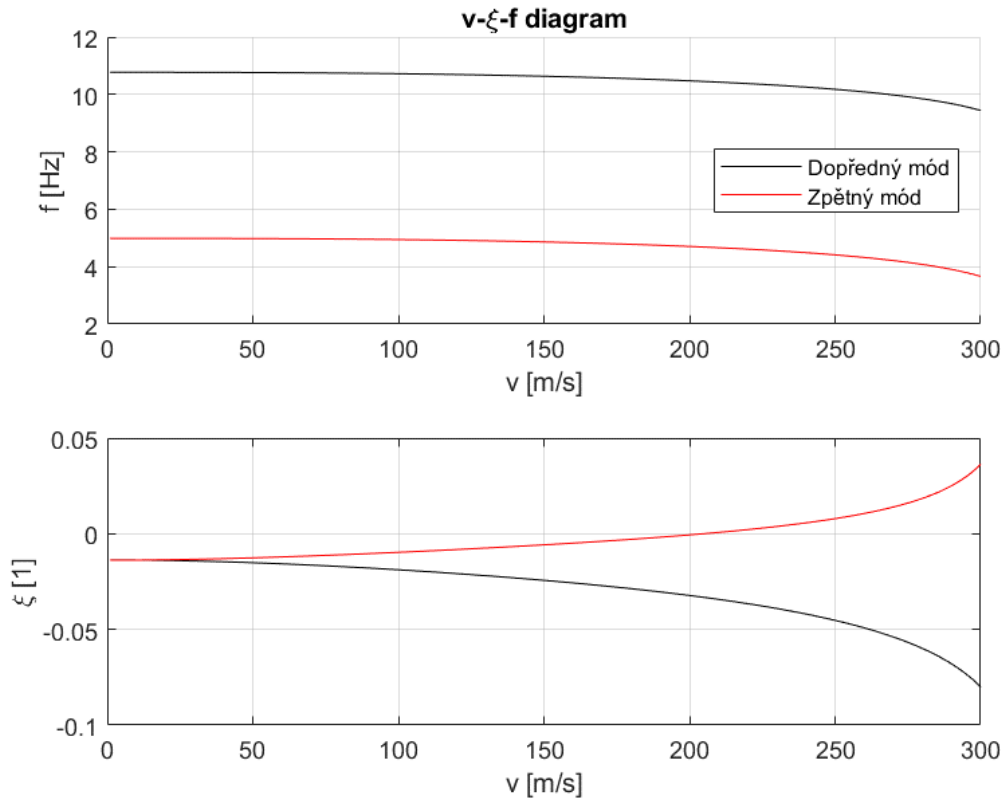
Graf 14: V- ξ -f diagram pro viskózní model vnitřního tlumení (let při hladině moře)



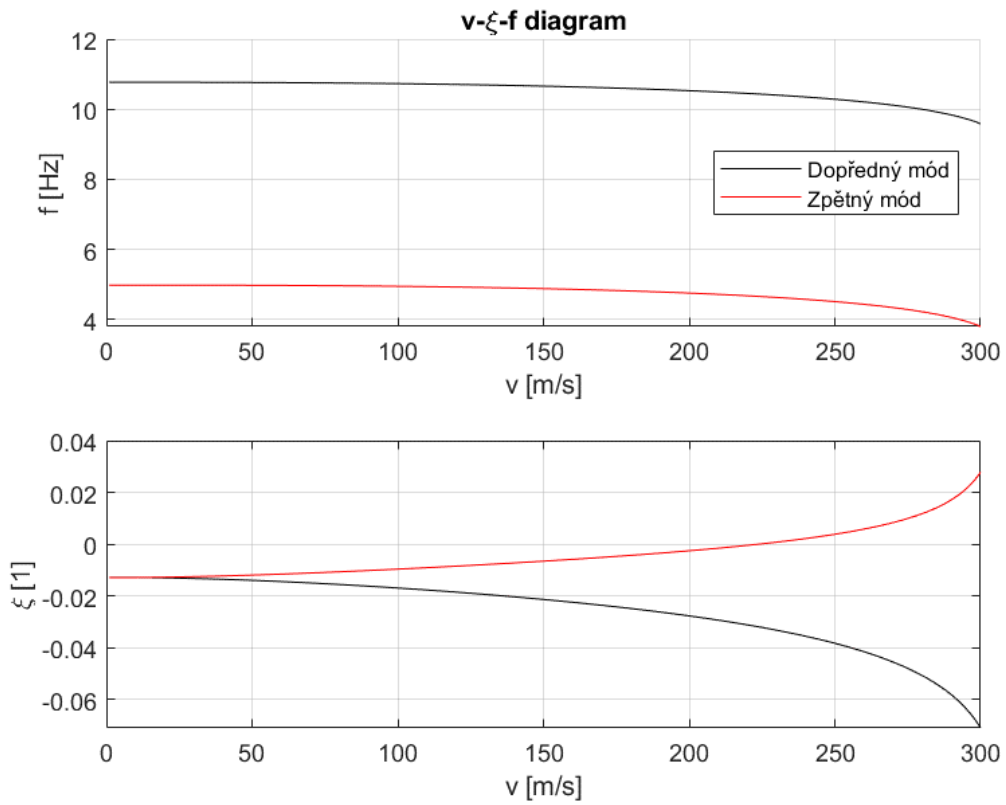
Graf 15: V- ξ -f diagram pro letovou výšku 2 000 m MSA



Graf 16: V- ξ -f diagram pro letovou výšku 4 000 m MSA



Graf 17: V- ξ -f diagram pro letovou výšku 6 000 m MSA



Graf 18: V- ξ -f diagram pro letovou výšku 8 000 m MSA

První tři grafy – (Graf 11), (Graf 12) a (Graf 13) – jsou uvedeny pro srovnání použitých modelů vnitřního tlumení. Ze srovnání plyne, že na rozdíl od standardních *flutterových* analýz má vnitřní útlum nezanedbatelný význam, a je tedy velmi důležité zvolit správný model i hodnotu koeficientu. Amplitudový model vykazuje zdaleka nejvyšší kritickou rychlost, kdežto při použití viskózního modelu vychází rychlost *flutteru* podstatně nižší, což je v souladu s předpoklady, viz podkapitola (3.4.1.2).

Výsledné kritické rychlosti s uvažováním viskózního modelu, které by měly s ohledem na (Graf 4) nejlépe odpovídat realitě, jsou pak patrné z grafů (Graf 14) až (Graf 18), které reprezentují v - ξ - f diagramy, viz rovnice (4.6), pro různé letové hladiny. Grafy pracují s tzv. TAS – *True Air Speed* – která představuje skutečnou rychlost letounu vůči okolnímu vzduchu. Pro porovnání s rozsahem přípustných letových rychlostí je tedy třeba nejprve získané kritické rychlosti přepočítat na ekvivalentní rychlosti při hladině moře, tzv. EAS – *Ekvivalent Air Speed*. Výsledky jsou v následující tabulce:

	TAS				
H [m]	0	2000	4000	6000	8000
v_{FL} [m/s]	162,5	174,1	188,1	204,7	223,7
v_{FL} [km/h]	584,9	626,9	677,3	736,9	805,4
	EAS				
H [m]	0	2000	4000	6000	8000
v_{FL} [m/s]	162,5	157,8	153,8	150,2	146,5
v_{FL} [km/h]	584,9	568,2	553,8	540,7	527,2

Tabulka 7: Výsledné kritické rychlosti flutteru

Z porovnání posledního řádku tabulky (7) se zadanou dovolenou rychlostí letu z tabulky (3) je zřejmé, že k *whirl flutteru* nemůže dojít v přípustném rozsahu letových rychlostí v žádné z letových hladin. Pro certifikační potřeby by bylo nutné vyhovět přísnějším požadavkům, nicméně certifikační proces v této práci řešen nebude z důvodů probíraných v závěrečné diskusi. Na okraj může být zmíněno, že v rámci certifikační *flutterové* analýzy podle předpisů CS/FAR 23 se z hlediska stability vyšetřuje bod letové obálky s rychlostí letu na horizontální ose a výškou letu na vertikální ose, který vznikne průnikem křivek 1,2násobku dovolené rychlosti (TAS) a 1,2násobku dovoleného Machova čísla [7].

4.3.3 Citlivostní analýza

Citlivost systému na vybrané parametry byla provedena ve formě grafického zobrazení změny stabilitních mezí v rovině vlastních frekvencí izolovaných módů při variaci zkoumaných parametrů. Výpočet byl proveden pro viskózní model vnitřních tlumicích sil, a to vždy pro konfiguraci z tabulky (6), samozřejmě s výjimkou variovaných hodnot. Výhodou tohoto zobrazení je, že každý graf zároveň poskytuje informaci o tuhostech uložení potřebných pro udržení kritické rychlosti *flutteru* mimo rozsah přípustných letových rychlostí, viz rovnice (4.5). Červená křivka stabilitní meze je pro všechny grafy stejná a reprezentuje výchozí hodnoty. Zbylé dvě potom slouží k porovnání změny, ke které dojde variací příslušného parametru. Z grafů je také patrná minimální hodnota frekvencí v obou směrech, při které ještě nedojde ke statické divergenci. Jsou jí koncové body zobrazených křivek, tedy pro každou hodnotu frekvence izolovaného módu v příslušném směru menší, než je koncový bod, bude tuhost uložení v daném směru příliš malá, takže touto tuhostí daný elastický moment nedokáže udržet moment od vznikající aerodynamické síly a systém staticky selže.

První dva grafy – (Graf 19) a (Graf 20) – zobrazují vliv velikosti koeficientů tlumení na stabilitu systému. Variovaným parametrem jsou koeficienty konstrukčního tlumení $\gamma_{\Theta, \Psi}$, kterým pak podle rovnic (3.121) a (3.122) odpovídají příslušné ekvivalentní poměrné útlumy $\xi_{\Theta, \Psi}$ a koeficienty viskózního tlumení $d_{\Theta, \Psi}$. Z prvního grafu je opět patrný zcela zásadní vliv zahrnutí vnitřních tlumicích sil do výpočtu ze srovnání velikosti nestabilní oblasti pod černou křivkou, která odpovídá vnitřně netlumené soustavě, a velikosti zbylých dvou oblastí ohraničených křivkami pro dvě různé velikosti koeficientů tlumení. Z porovnání červené a modré stabilitní meze pak plyne i vysoká citlivost soustavy na velikost těchto koeficientů. Z černé stabilitní meze je také dobře vidět, že nezáleží pouze na velikosti tuhostí uložení, ale také na jejich poměru, kde je z hlediska stability jasně nejhorší poměr 1:1. V takovém případě platí $f_{\Theta} = f_{\Psi}$, a tím pádem je i interakce mezi pohyby v obou rovinách nejvyšší. Se zvyšující se hodnotou koeficientů tlumení vliv poměru tuhostí slábne, jak je také dobře patrné z tvarů křivek. Dále, pokud je tuhost v jednom směru dostatečně vysoká, může být ve druhém směru i na minimální hodnotě a k *whirl flutteru* nedojde, což je dáno přerozdělením zátěže uložení vlivem sdružování izolovaných módů gyroskopickými efekty do charakteristického precesního pohybu. V případě nesymetrického rozdělení tlumicích koeficientů je pak na (Graf 20) vidět příslušná změna tvaru stabilitních mezí. Podle očekávání se nestabilní oblast zvětší ve směru

sníženého tlumení a zmenší ve směru zvýšeného tlumení. Tohoto efektu lze využít při konstrukčně daném poměru tuhostí, kdy lze stabilní oblast ve směru nižší hodnoty tuhosti navýšit přidáním nějakého tlumicího členu a dostat tak systém do stabilní oblasti bez výrazných zásahů do konstrukce. Dále je srovnáním černých křivek (Graf 19) a (Graf 20) vidět, že při navýšení koeficientu tlumení v jednom směru dojde i k ovlivnění oblasti ve druhém směru, což je opět dáno gyroskopickým sdružováním obou izolovaných módů.

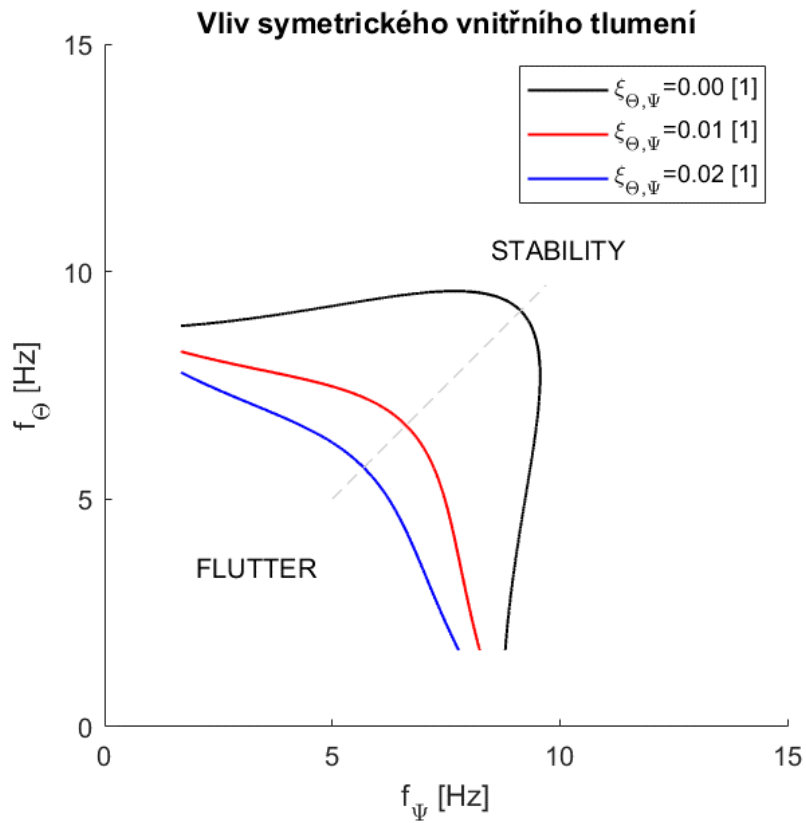
Další dva grafy – (Graf 21) a (Graf 22) – zobrazují vliv velikosti momentů setrvačnosti na stabilní mez. Protože je velikost momentu setrvačnosti už z definice obecně stabilizujícím parametrem, podle očekávání se při jejich symetrickém navýšení nestabilní oblast zmenšuje a při snížení zvětšuje. Ovlivněn je i bod vzniku statické divergence, což je také v souladu s předpoklady.

(Graf 23) představuje vliv polárního momentu setrvačnosti samotné vrtule. Jeho velikost má destabilizující účinek, protože přímo ovlivňuje velikost gyroskopických momentů, které zase mají nepřímý vliv na vznik dynamické divergence – *whirl flutteru* – viz podkapitola (3.2.4.2). Chování stabilní meze je tedy v souladu s předpoklady.

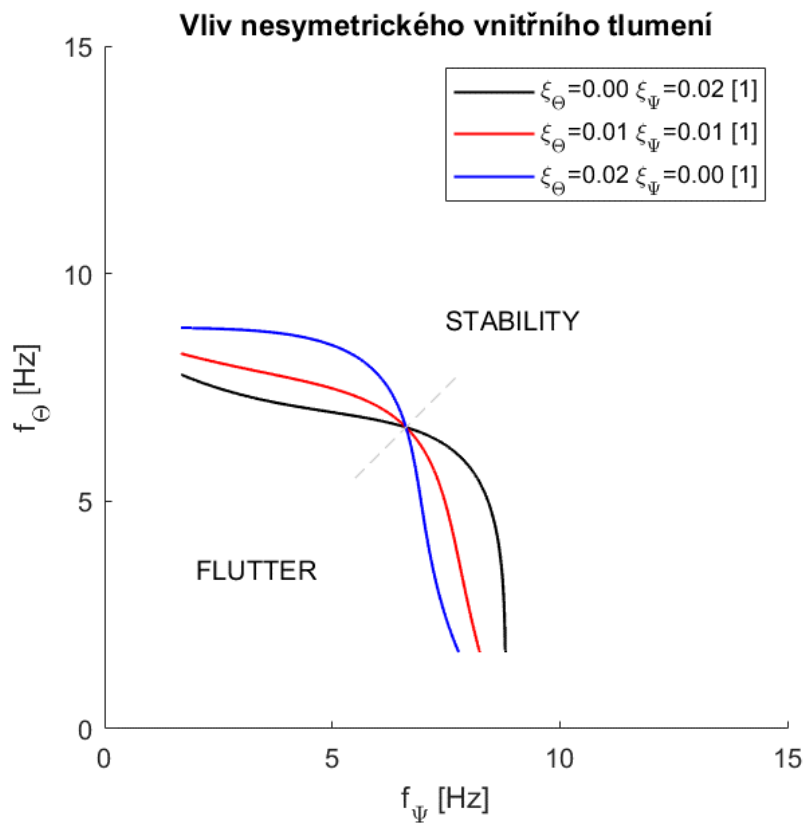
(Graf 24) zobrazuje vliv délky vyložení, tedy vzdálenosti roviny vrtule od bodu uložení systému. Je zatížen určitou chybou, protože spolu s touto vzdáleností nebyly měněny velikosti momentů setrvačnosti celé soustavy, které na ní také závisí. Jak je z grafu patrné, stabilita systému je na tento parametr poměrně výrazně citlivá. Je tomu tak proto, že jsou s ní spjaty tlumicí aerodynamické momenty od sil $P_z(\dot{z})$ a $P_y(\dot{y})$, viz podkapitola (3.2.3.2). Totéž platí i pro změny bodů statické divergence, které jsou zase spjaty s momenty od sil $P_z(\theta)$ a $P_y(\psi)$.

Grafy (Graf 25) a (Graf 26) představují závislost stability soustavy na dvou hlavních letových parametrech, tedy rychlosti letu a otáčkách vrtule. Oba parametry zásadně ovlivňují velikosti působících aerodynamických sil, a jsou tedy silně destabilizační. Z grafů je také patrné, že jak rychlost, tak otáčky ovlivňují stabilitu přibližně stejnou měrou.

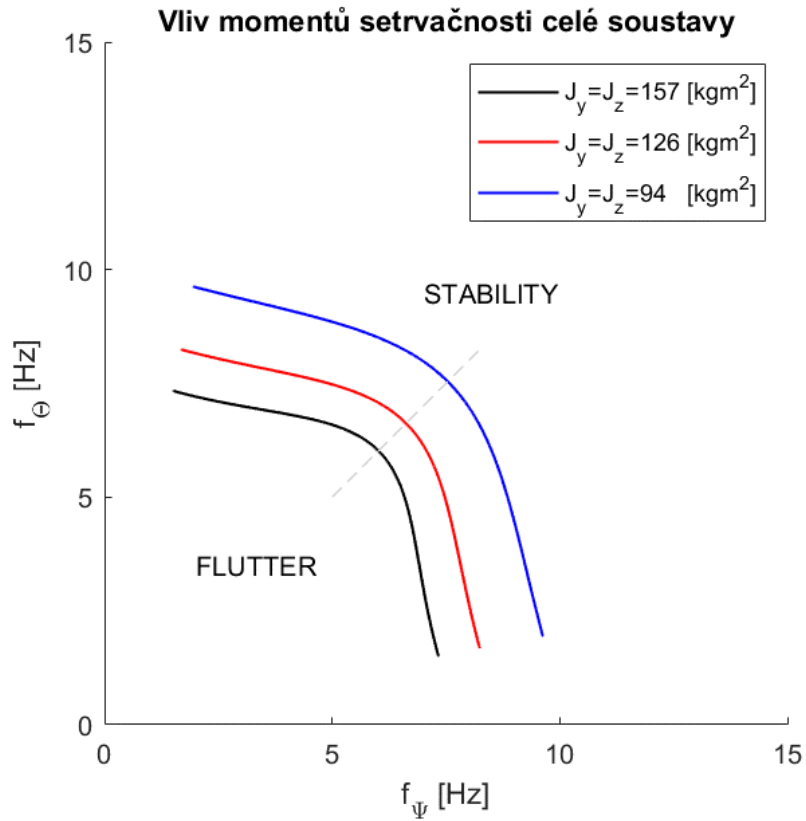
Poslední dva grafy jsou spíše doplňující. První z nich, tedy (Graf 27), představuje stabilní mez v různých letových výškách napočítanou pro konstantní hodnotu v_D EAS. Je z něj patrné, že nestabilní oblast s výškou podle očekávání roste. Druhý graf, tedy (Graf 28), ukazuje chybu způsobenou použitím přibližné hodnoty stoupání vztlakové čáry.



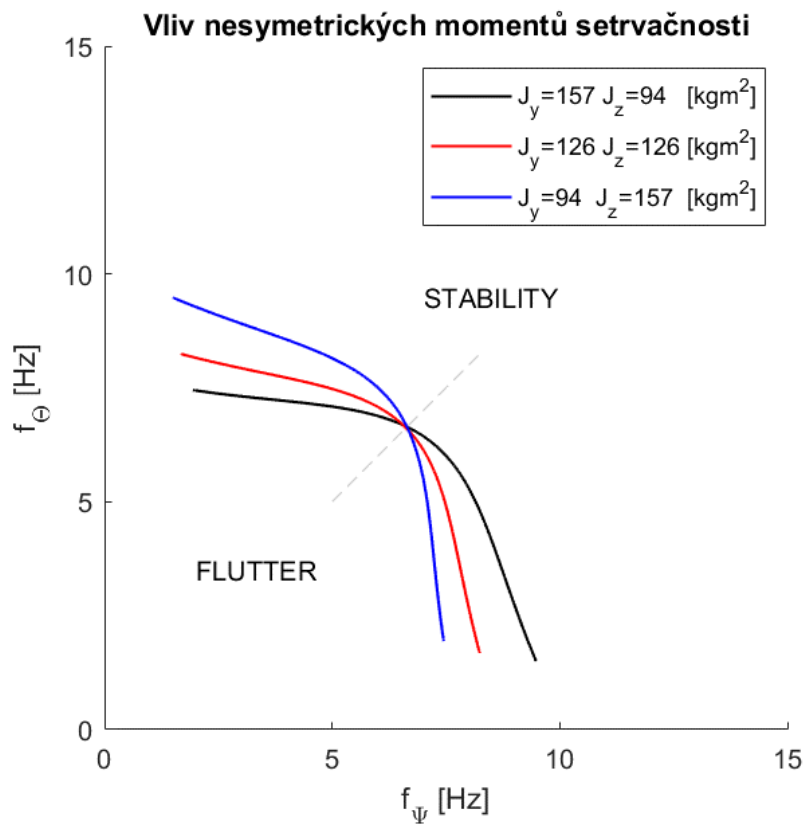
Graf 19: Stabilitní meze pro různé případy symetrického tlumení



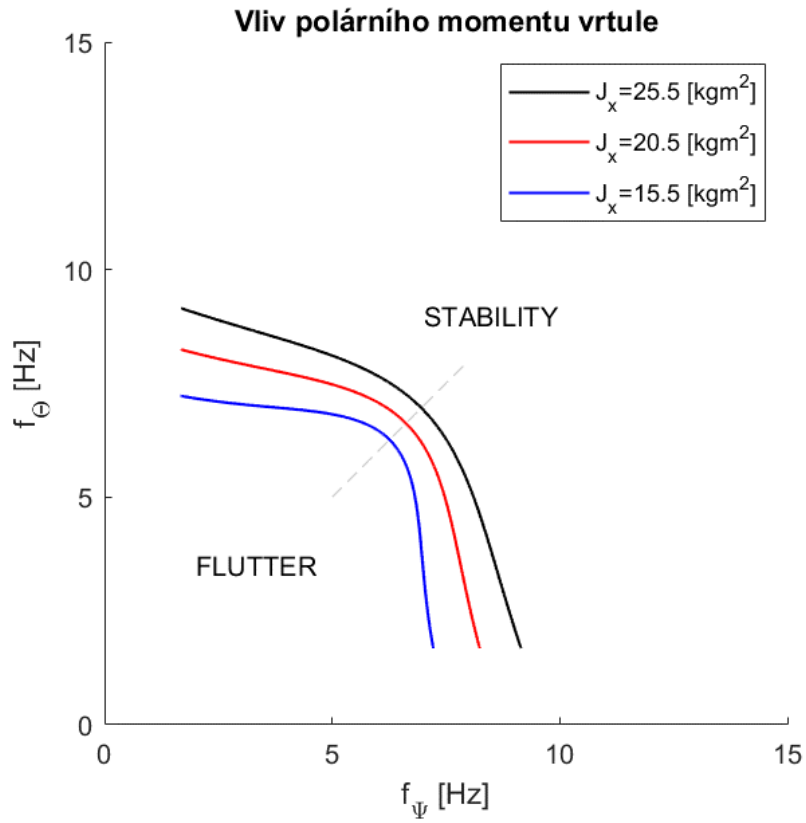
Graf 20: Stabilitní meze pro různé případy nesymetrického tlumení



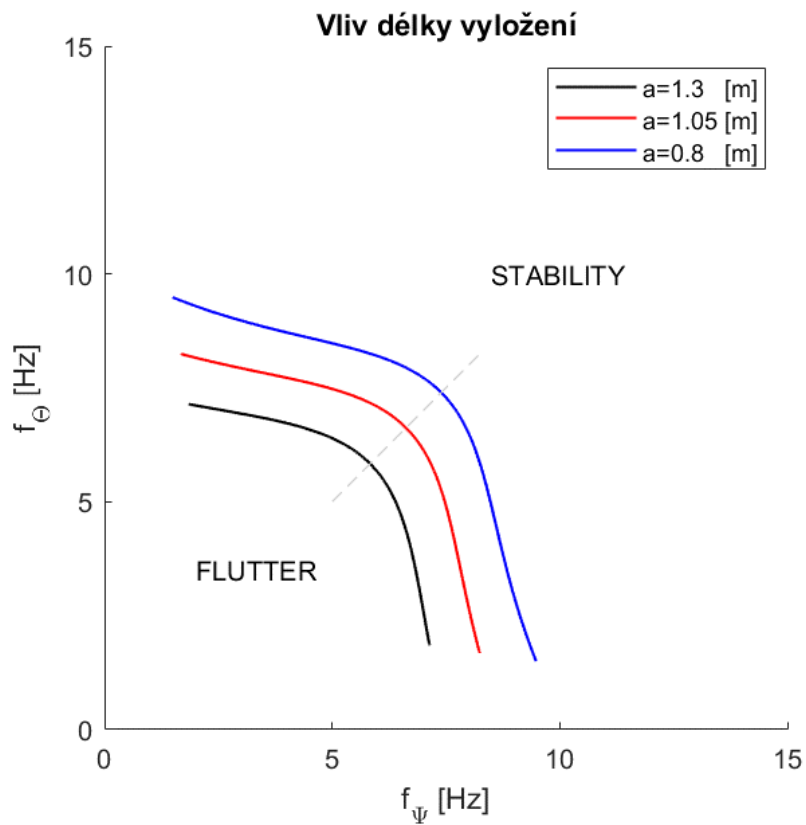
Graf 21: Stabilitní meze v závislosti na symetrických změnách momentů setrvačnosti



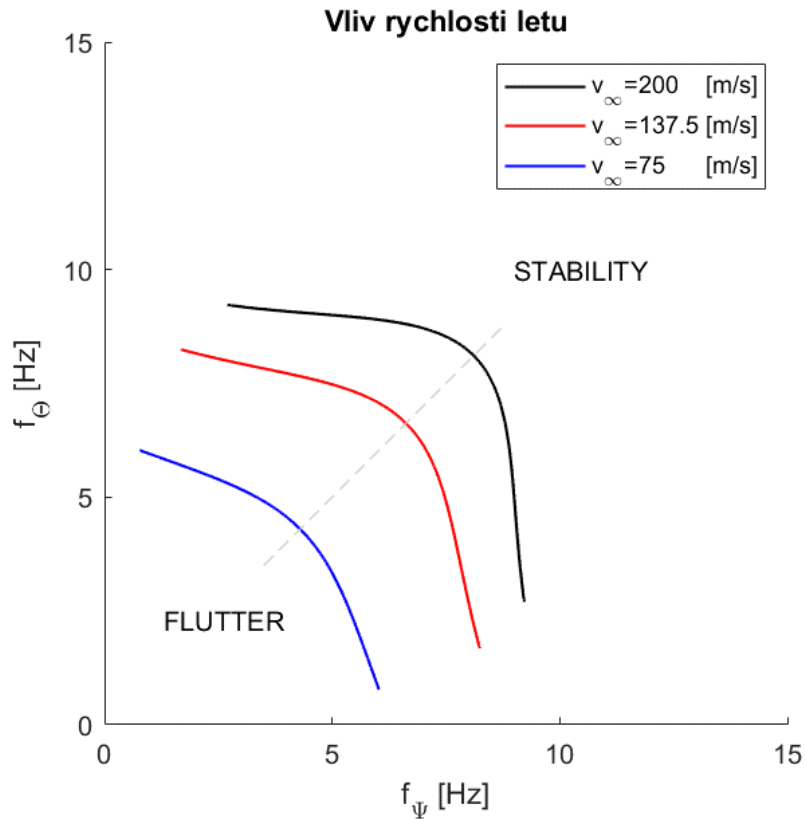
Graf 22: Stabilitní meze v závislosti na nesymetrických změnách momentů setrvačnosti



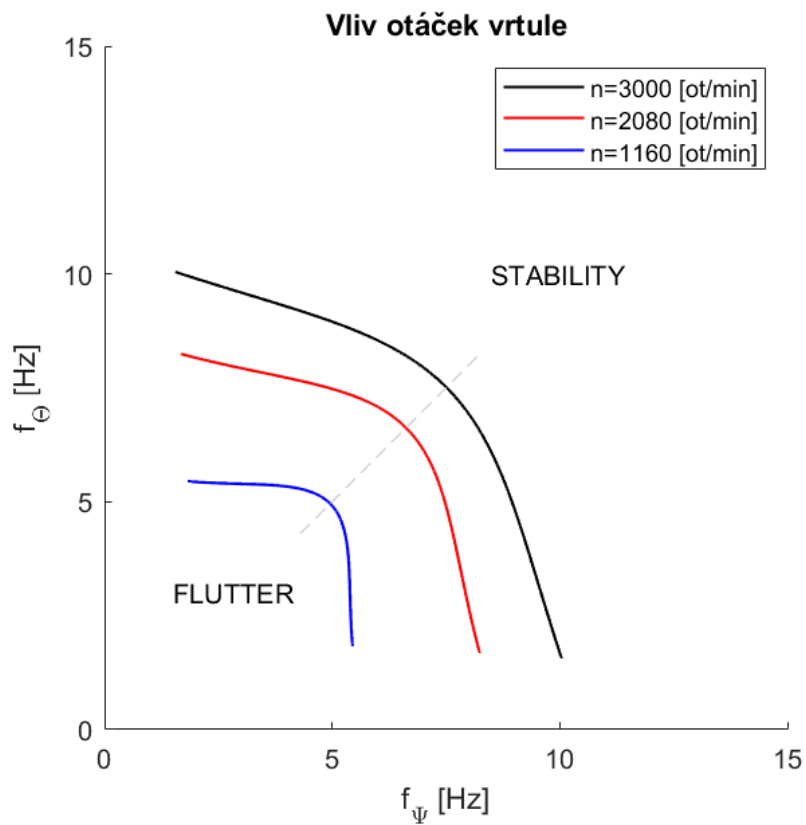
Graf 23: Stabilitní meze pro variaci polárního momentu setrvačnosti vrtule



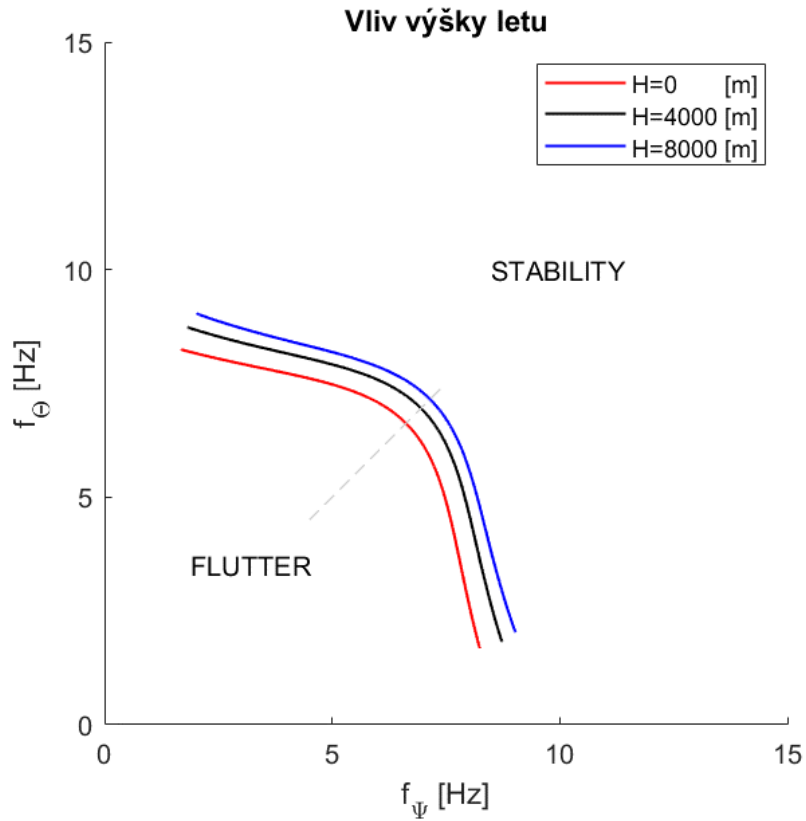
Graf 24: Stabilitní meze pro variaci délky vyložení



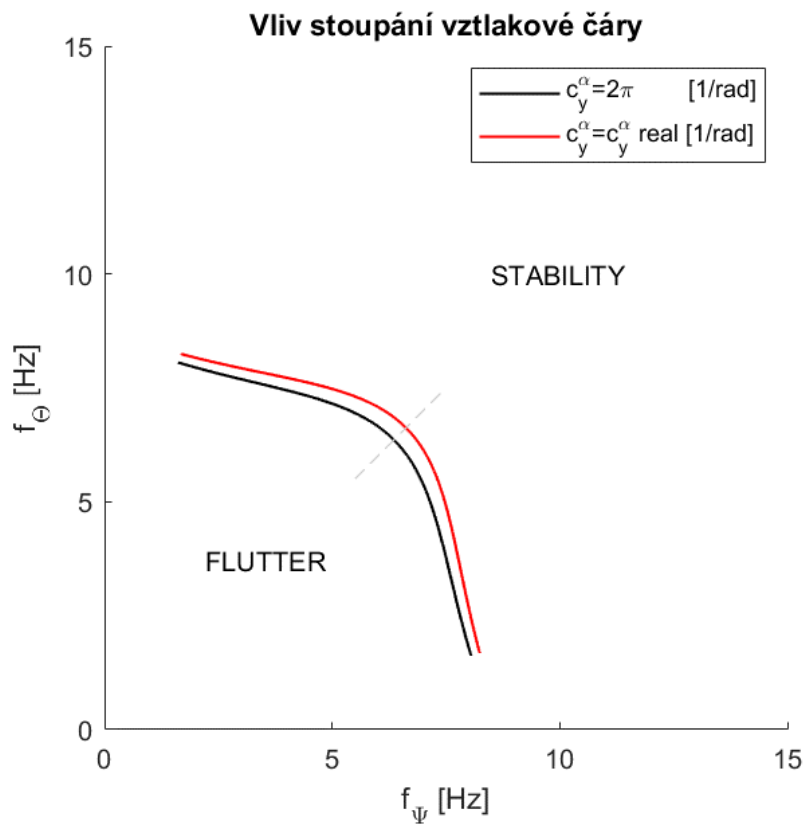
Graf 25: Stabilitní meze pro různé rychlosti letu při hladině moře



Graf 26: Stabilitní meze pro různé otáčky vrtule



Graf 27: Stabilitní meze pro let konstantní dovolenou rychlostí (EAS) v různých výškách



Graf 28: Stabilitní meze pro různé stoupání vztlakové čáry listu vrtule

5 Diskuse získaných výsledků

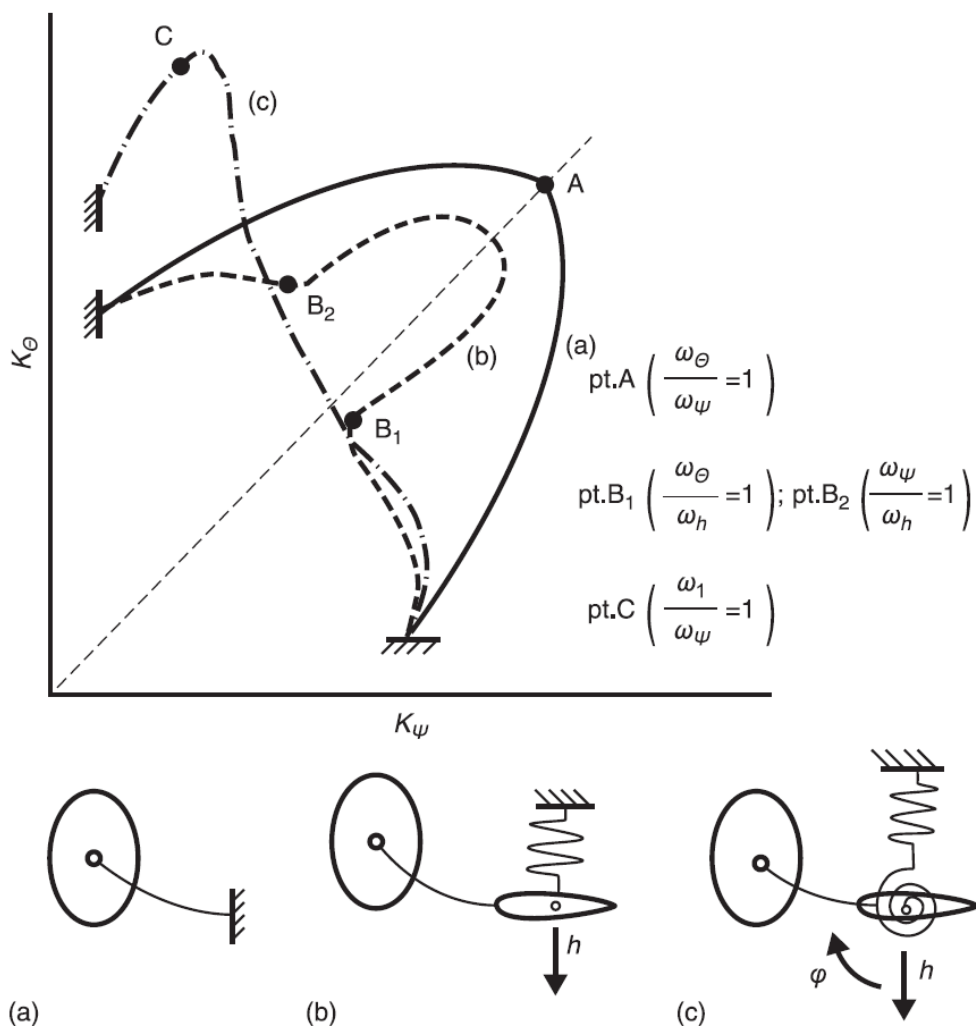
5.1 Platnost výsledků

Pro potřeby posouzení rozsahu platnosti získaných výsledků jsou v následujícím seznamu shrnuty nejdůležitější předpoklady, s jejichž využitím byl sestaven matematický model systému a následně provedena *flutterová* analýza:

1. Křídlo, k němuž je systém pohonné jednotky pružně upevněn, je absolutně tuhé.
2. Vrtulové listy jsou absolutně tuhé.
3. Úhlové posuvy Θ a Ψ jsou malé.
4. Vrtule je osově symetrická a v režimu autorotace (je zanedbán ustálený tah).
5. Nestacionární aerodynamické síly jsou řešeny pomocí Theodorsenovy funkce.
6. Interferenční efekty mezi vrtulí, gondolou a křídlem jsou zanedbány.

V rámci vymezeného zaměření práce pouze na *whirl flutter* standardních turbovrtulových motorů jsou předpoklady 2–5 ve shodě s běžnou praxí a v rámci certifikační analýzy je pro výpočet používá i Čečrdle v [7]. Problém činí předpoklad 1, protože zahrnutí poddajného křídla do výpočtu zjevně ovlivní dynamické charakteristiky celého systému, a tím pádem i charakteristiky *whirl flutteru*. S tím potom souvisí také předpoklad 6, protože vrtulový proud ovlivní vztlak generovaný na křídle v oblasti umístění gondoly, v důsledku čehož jsou charakteristiky systému opět pozměněny. Čečrdle [7] zavedení těchto efektů do výpočtu v MSC/Nastranu uvádí jako volitelné – ovšem s tím, že by v případě pohonné jednotky umístěné na křídle zavedeny být měly, protože vedou ke zvýšení vztlaku křídla, a tím pádem jsou obecně považovány za destabilizační.

Formulaci pohybových rovnic se zavedením vlivu ohybu a torze křídla, ovšem stále se zanedbáním interferenčních efektů, provedli Bennett a Bland v [13] a je uvedena i v [7]. Jiná studie pak předkládá stabilitní meze takového systému v rovině tuhostí rotačních pružin K_{Θ} a K_{Ψ} , které jsou posléze převzaty a komentovány ve zdrojích [11] a [12] a které v překreslené formě používá i Čečrdle v [7]. Právě na základě této stabilitní meze lze porovnáním s těmi, které byly získány v podkapitole (4.3.3), zhodnotit chybu, kterou jsou obdržené výsledky zatíženy vlivem předpokladu číslo jedna. Tato mez je uvedena v (Graf 29):



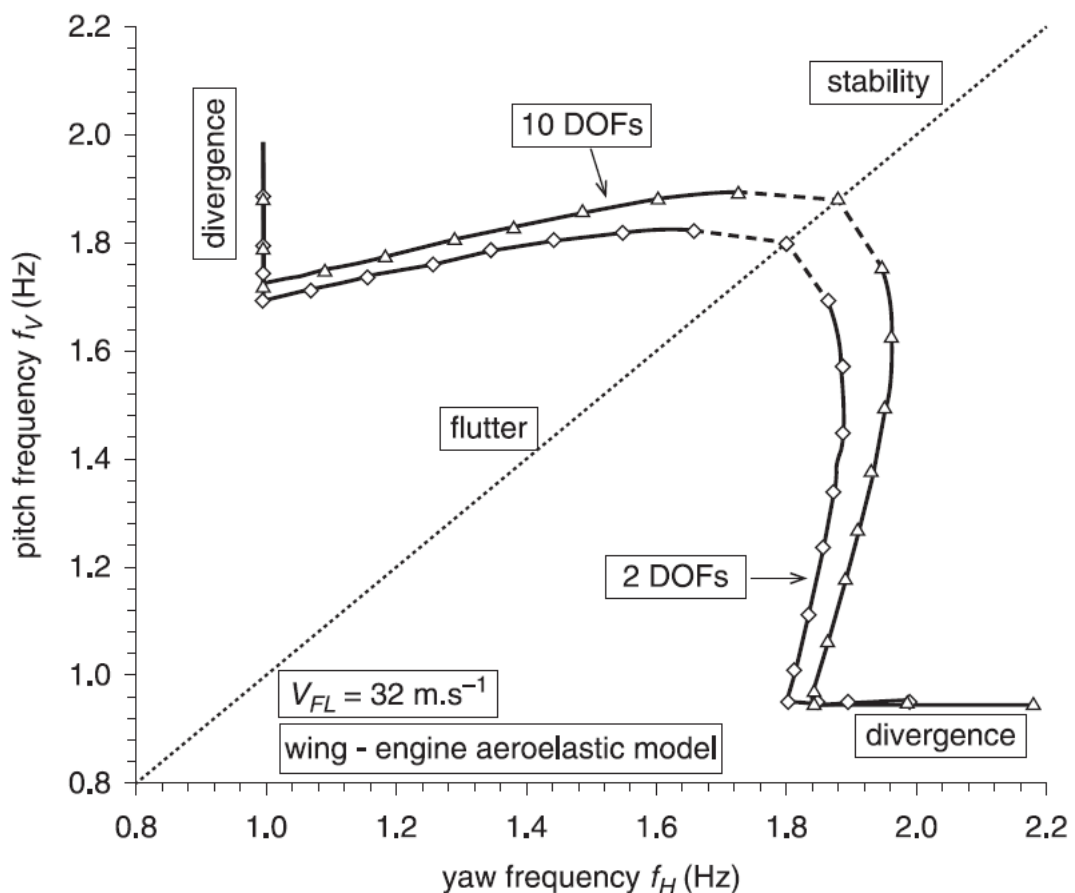
Graf 29: Stabilitní mez pro systém s uvažováním poddajného křídla [7]

V (Graf 29) dole jsou uvedeny tři modelové reprezentace systému, kterým pak odpovídají tři křivky stabilitní meze na obrázku nahoře. Varianta (a) představuje systém s tuhým křídlem, jaký byl uvažován pro výpočty v této práci. Varianta (b) pak zahrnuje další stupeň volnosti, a to ohyb křídla, a varianta (c) představuje kompletní systém se čtyřmi stupni volnosti včetně torze. V posledních dvou zmíněných variantách je pro výpočet uvažován i vztlak křídla.

Z porovnání stabilitních mezí vyplývá, že zahrnutí vlivu poddajného křídla do výpočtu má obecně stabilizující efekt. Není-li uvažována torze, je kritická rychlost *whirl flutteru* vždy vyšší než pro systém s absolutně tuhým křídlem, což autoři [7] [11] [12] připisují tlumícím aerodynamickým silám působícím na křídle. Zajímavější je ale případ se všemi čtyřmi stupni volnosti, kde je ve většině bodů systém ještě stabilnější – ovšem s výjimkou rozsahu nízkých hodnot tuhosti K_ψ , kde je nestabilní oblast větší než pro případ tuhého křídla. Tento efekt lze

vysvětlit zaměřením se na bod C, ve kterém je hodnota tuhosti K_{Θ} požadovaná pro stabilitu systému nejvyšší a ve kterém je také poměr frekvence ω_1 sdruženého módu (torze-ohyb) křídla a frekvence izolovaného horizontálního módu pohonné jednotky ω_{Ψ} roven jedné. Vzhledem k tomu, že mód pohybu křídla může nahradit vertikální mód pohonné jednotky ω_{Θ} , protože v sobě zahrnuje její klopení, je bod C vlastně obdobou bodu A pro systém s absolutně tuhým křídlem, ve kterém je nejvyšší míra interakce pohybu v obou rovinách, a tím pádem také nejvyšší míra nestability. Obecným závěrem tedy je, že zahrnutí²³ ohybu a torze křídla do výpočtu *whirl flutteru* má stabilizující účinek s výjimkou oblasti, kde se hodnota frekvence izolovaného horizontálního módu pohonné jednotky ω_{Ψ} blíží torzní frekvenci křídla ω_{ϕ} [12].

Před vyozením závěrů ve vztahu k výsledkům této práce je třeba uvést ještě jednu stabilitní mez, kterou uvádí Jiří Čechrdle v [7] v příkladovém výpočtu pomocí softwaru MSC/Nastran:



Graf 30: Stabilitní mez získaná pomocí výpočtu v MSC/Nastranu [7]

²³ Stále ovšem bez uvažování interferenčních efektů mezi vrtulovým proudem, gondolou a částí křídla.

První stabilitní mez, označená 2 DOFs, byla získána pro výpočet pouze s uvažováním dvou stupňů volnosti pohybu, tedy pro pohyb pohonné jednotky v horizontálním a vertikálním směru, což odpovídá výpočtům v této práci. Druhá mez je dána výpočtem, který proběhl při uvažování osmi dalších módů. Jediný, ovšem zásadní poznatek, který z (Graf 30) plyne, je, že zahrnutí dalších módů do výpočtu mělo destabilizační efekt. To znamená, že ani provedení výpočtu s uvažováním torze a ohybu křídla podle [13] není zcela průkazné.

S ohledem na porovnání výsledků *flutterové* analýzy v kapitole (4.3) s poznatky uvedenými v této kapitole, viz grafy (Graf 29) a (Graf 30), je možné konstatovat, že vyšetření stability pomocí použitého modelu se dvěma stupni volnosti lze brát pouze jako orientační a např. na certifikační analýzu by nestačilo. Oproti výpočtovému modelu s uvažováním torze a ohybu křídla podle [13] jsou získané výsledky za předpokladu dostatečně rozdílných frekvencí ω_ψ a ω_φ konzervativní, což však s ohledem na (Graf 30) nelze tvrdit pro obecný případ s vícero módy vyskytujícími se na letounu. Pro potřeby certifikace je tedy zřejmě nutné použít MKP výpočet, což ovšem v případě využití MSC/NASTRANU znamená nutnost naprogramování již dříve zmíněného preprocesoru k vypočítání aerodynamických matic. Výpočet pro více než dva stupně volnosti je ale každopádně mimo rozsah této práce a informace uvedené v této kapitole slouží pouze ke zhodnocení rozsahu platnosti výsledků z kapitoly (4.3).

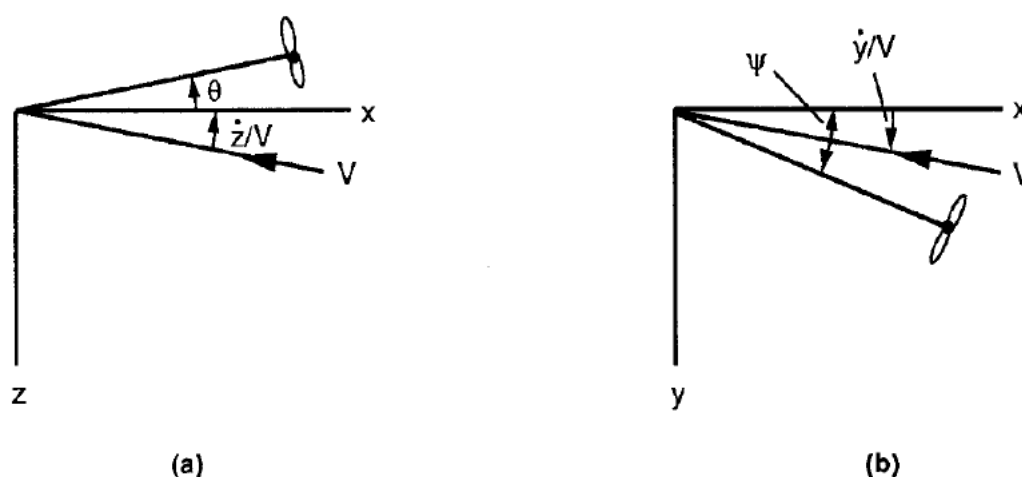
Jako poznámku na závěr je však dobré připomenout, že výpočtové vztahy pro nestacionární aerodynamické síly vrtule, respektive jejich koeficienty, využití v této práci jsou v plném rozsahu použitelné i pro ostatní výpočetní modely. Vliv interferenčních efektů se do výpočtu zahrnuje modifikací efektivních úhlů, viz rovnice (3.25), o úhel zakřivení proudu [7] [14]. Ten sice výsledné aerodynamické matice ovlivní, ale princip jejich výpočtu zůstává stejný.

5.2 Problém s efektivními úhly

Na konci podkapitoly (3.3.5) je stručně komentován rozpor ohledně definice efektivních úhlů, viz rovnice (3.25). Výsledné vztahy pro výpočet aerodynamických koeficientů s uvažováním zpoždění vztaku, viz rovnice (3.77), jsou totiž převzaty z [14], kde autoři uvádějí, že byly odvozeny podle postupu, který navrhuje Houbolt v [10] a který je až do rovnic (3.74) rozpracován i v této práci. Problém spočívá v tom, že přestože používají identický systém jako [8], viz (Obr. 32), z nevysvětleného důvodu mění definici efektivních úhlů z rovnice (3.25) na:

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \theta + \frac{\dot{z}}{v_\infty} = \theta + \frac{a\dot{\Theta}}{v_\infty} \\ \bar{\psi} &= \psi - \frac{\dot{y}}{v_\infty} = \psi - \frac{a\dot{\Psi}}{v_\infty}\end{aligned}\tag{5.1}$$

podle obrázku:



Obr. 38: Pozměněná definice efektivních úhlů [14]

Protože není uveden důvod této změny a Houbolt se o ní v [10] nikterak nezmiňuje, přestože uvádí, že jeho řešení aerodynamických sil vrtule je porovnatelné se systémem v [8], čímž jsou po znaménkové korekci získány právě výpočtové vztahy pro aerodynamické koeficienty, je tato změna nesrozumitelná. Z logiky věci navíc vyplývá, že mezi geometrickou složkou a rychlostní složkou efektivního úhlu by mělo být znaménko minus, protože příslušná translační rychlost má vždy opačný směr, než je směr růstu θ nebo ψ , a tím pádem daný úhel snižuje. Rozpor nepomáhá objasnit ani Čečrdle, který na začátku knihy [7, p. 21] uvádí stejnou definici jako [8], obrázek [7, p. 84] i výpočtové vztahy ovšem přejímá z [14]. Na konci knihy [7, p. 206] pak znovu odkazuje právě na definici efektivních úhlů podle [8] a zároveň používá

výpočtové vztahy pro aerodynamické koeficienty přejaté z [14]. Všechny okolnosti tedy nasvědčují k použití původní definice.

Problémem ovšem zůstává nejistota, zda jsou přejaté výpočetní vztahy pro aerodynamické koeficienty, viz rovnice (3.77), použitelné pro výpočet aerodynamických sil podle rovnic (3.24) i v případě ponechání původní definice efektivních úhlů. První důvod k odpovědi, že ano, byl zmíněn přímo v podkapitole (3.3.5), a to že znaménka u koeficientů „ve fázi“ v rovnicích (3.77), tedy u těch násobených integrály I_{1-3} , které obsahují reálnou část Theodorsenovy funkce, jsou ve shodě se stacionárními koeficienty (3.59), což by pro použití změněné definice platit nemělo. Tento důvod je ovšem těžko průkazný, takže byly výpočtem ověřeny obě varianty a výsledky byly porovnány na základě předpokladu, že zahrnutí zpoždění vztlaku má mít na systém stabilizující efekt, což tvrdí v [10] sám Houbolt a což se následně objevuje i v [11] a [12].

Pro toto porovnání byl jednoduše upraven program *WhirlFlutter1.m* tak, aby počítal pouze se stacionárními koeficienty, viz rovnice (3.59), u kterých je v [10] jasně řečeno, že je lze použít pro model systému z [8] s uvažováním původní definice efektivních úhlů. Toho se docílí tak, že se na řádcích 233, 245 a 259 vymaže ze skriptu výraz „*F_vektor“, čímž se odstraní modifikace Theodorsenovou funkcí, a na řádcích 291, 292, 294 a 297 se nastaví hodnota koeficientů vzniklých vlivem zpoždění vztlaku na 0. Takto upravený program je k dispozici v elektronické příloze pod názvem *WhirlFlutter1Stac.m*.

Pro výpočet s vlivem zpoždění vztlaku a zároveň s uvažováním definice efektivních úhlů podle [14], tedy rovnice (2.2), byly s ohledem na tuto definici přepočítány aerodynamické matice \mathbf{K}^A a \mathbf{D}^A . Textový soubor obsahující tento přepočet je také k dispozici v elektronické příloze pod názvem *Přepocet.doc*. Vzhledem k tomu, že matice \mathbf{K}^A vychází stejně jako pro původní definici efektivních úhlů, stačí v programu *WhirlFlutter1.m* změnit matici aerodynamického tlumení \mathbf{D}^A . Takto upravený program je rovněž k dispozici v elektronické příloze pod názvem *WhirlFlutter1Prepocet.m*.

Při výpočtu s konfigurací z tabulky (6) pak vychází kritické rychlosti *flutteru* tak, jak je uvedeno v tabulce (8). Z jejich porovnání pak jasně plyne, že použití původní definice, viz rovnice (3.25), vede k vyšším kritickým rychlostem *flutteru* než při výpočtu se stacionárními koeficienty, a má tedy očekávaný stabilizující efekt. Oproti tomu použití změněné definice

z [14], viz rovnice (2.2), má naopak destabilizující efekt, a tedy jde proti předpokladu, který stanovuje sám autor analytické metody řešení aerodynamických koeficientů jak s vlivem zpoždění vztlaku, tak bez něj.

Stacionární koeficienty		
Bez vnitřního tlumení	Viskózní model	Amplitudový model
$v_{FL} = 317,4 \text{ km/h}$	$v_{FL} = 451,3 \text{ km/h}$	$v_{FL} = 506,9 \text{ km/h}$
Nestacionární koeficienty, definice efektivních úhlů podle rovnice (3.25)		
Bez vnitřního tlumení	Viskózní model	Amplitudový model
$v_{FL} = 373,4 \text{ km/h}$	$v_{FL} = 584,9 \text{ km/h}$	$v_{FL} = 679,7 \text{ km/h}$
Nestacionární koeficienty, definice efektivních úhlů podle rovnice (2.2)		
Bez vnitřního tlumení	Viskózní model	Amplitudový model
$v_{FL} = 255,7 \text{ km/h}$	$v_{FL} = 402,9 \text{ km/h}$	$v_{FL} = 463,8 \text{ km/h}$

Tabulka 8: Posouzení vlivu definice efektivních úhlů na stabilitu systému

Na základě těchto zjištění byla tedy původní definice efektivních úhlů, viz rovnice (3.25), ponechána jako platná.

6 Závěr

V první části této diplomové práce byl proveden rozbor teorie *whirl flutteru*, na jehož základě byla sestavena soustava pohybových rovnic v maticové podobě, popisující dynamiku kmitavého pohybu idealizovaného modelu turbovrtulové pohonné jednotky včetně gondoly pružně uložené na křídle letounu. Idealizace spočívá v předpokladu absolutně tuhého křídla, v důsledku čehož má systém pouze dva stupně volnosti, a zanedbání interferenčních aerodynamických efektů mezi vrtulí, gondolou a křídlem. V rámci sestavení pohybových rovnic byla odvozena také finální podoba aerodynamických matic, reprezentujících nestacionární aerodynamické síly generované kmitající vrtulí. Pohybové rovnice byly sestaveny pro dva modely vnitřního tlumení – viskózní a amplitudový – z nichž byl posléze pro závěrečnou analýzu vybrán viskózní model jako nejlépe odpovídající realitě.

Následně byly s využitím rovnic získaných v teoretickém rozboru vytvořeny výpočetní programy *WhirlFlutter1.m*, *WhirlFlutter2.m* a *PomocnyProgram.m* v programovém prostředí MATLAB, pomocí kterých byla ve druhé části práce provedena *flutterová* analýza zadaného systému. Na základě kritických rychlostí *flutteru* získaných výpočtem v programu *WhirlFlutter1.m* pro různé letové hladiny bylo rozhodnuto, že zadaná konfigurace systémových parametrů je z hlediska stability bezpečná v celém intervalu přípustných letových výšek a rychlostí. Dále byl v rámci *flutterové* analýzy diskutován vliv vybraných parametrů na stabilitu systému s využitím grafů stabilitních mezí v rovině tuhostí uložení gondoly, získaných pomocí programů *WhirlFlutter2.m* a *PomocnyProgram.m*.

V závěrečné diskusi byly pak získané grafy stabilitních mezí porovnány s grafy získanými jinými autory na složitějších výpočetních modelech. Ze srovnání plyne, že výsledky získané na použitém základním výpočetním modelu lze považovat pouze za orientační, protože zahrnutí dalších stupňů volnosti do výpočtu může mít na chování modelu destabilizující účinek.

Závěrem je možné říci, že všechny cíle stanovené v úvodu práce byly splněny v plném rozsahu. Do celkové koncepce práce byla navíc zahrnuta ještě počáteční kapitola představující kontextové zařazení řešené problematiky.

Použitá literatura a zdroje obrázků

- [1] Kopřiva, Z. a Maleček, J.: Aeroelasticita. Vojenská akademie Antonína Zápotockého, Brno, 1987.
- [2] Slavík, S.: Aeroelasticita leteckých konstrukcí. České vysoké učení technické v Praze, Praha, 1997.
- [3] Daněk, V.: Aeroelasticita. Vysoké učení technické v Brně, Brno, 1987.
- [4] Blaschke, J.: 75 years after infamous Tacoma Narrows Bridge collapse: Not so fast!. In: Texas State University/Office of Media Relations [online]. 3.11.2015 [cit. 20.7.2019], dostupné z: https://www.txstate.edu/news/news_releases/news_archive/2015/November-2015/TacomaNarrows110315.html.
- [5] King, H.: Ferrybridge. In: [halinaking.co.uk/Ferrybridge](http://www.halinaking.co.uk/Ferrybridge), Knottingley [online]. [cit. 20.7.2019], dostupné z: <http://www.halinaking.co.uk/Location/Yorkshire/Frames/Places/W%20Yorkshire/Knottingley/Ferrybridge/Ferrybridge.htm>.
- [6] Wright Brothers Aeroplane Company. In: [wright-brothers.org](http://www.wright-brothers.org) [online]. [cit. 20.7.2019], dostupné z: 1) http://www.wright-brothers.org/History_Wing/Wright_Story/Inventing_the_Airplane/Inventing_the_Airplane_Intro_images/1903_First_Flight_LOC.jpg, 2) http://www.wright-brothers.org/History_Wing/History_of_the_Airplane/Who_Was_First/Smithsonian_Contract/Smithsonian_Contract_images/1903-Langely-Aerodrome-A-collapses-after-launch-Dec-8.jpg.
- [7] Čečrdle, J.: Whirl Flutter of Turboprop Aircraft Structures. Woodhead Publishing, Cambridge, 2015.
- [8] Reed, W. H. a Bland, S. R.: An Analytical Treatment of Aircraft Propeller Precession Instability. NASA Langley, Technical Note, TN D-659, 1961.
- [9] Ribner, H. S.: Propellers in Yaw. NACA Report 819, 1945.
- [10] Houbolt, J. C. a Reed, W. H.: Propeller-Nacelle Whirl Flutter. Journal of Aerospace Sciences, Vol.29, 1962.
- [11] Reed, W. H.: Propeller-Rotor Whirl Flutter: A-State-of-The-Art Review. Journal of Sound and Vibration, Vol.4, No.3, 1966.
- [12] Reed, W. H.: Review of Propeller-Rotor Whirl Flutter. NASA, Technical Report, NASA TR R-264, 1967.
- [13] Bennett, R. M. a Bland, S. R.: Experimental and Analytical Investigation of Propeller Whirl Flutter of a Power Plant on a Flexible Wing. NASA, Technical Note, TN D-2399, 1964.

- [14] Rodden, W. P. a Rose, T. L.: Propeller/Nacelle Whirl Flutter Addition to MSC/NASTRAN. Paper No. 12, Proceedings of the 1989 MSC World User's Conference, Universal City, 1989.
- [15] Bielawa, R. L.: Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, D.C., 1992.
- [16] Baker, K. E., Smith, R. a Toulson, K. V.: Notes on Propeller Whirl Flutter. Canadian Aeronautics and Space Journal, Vol.11, No.8, 1965.
- [17] Theodorsen, T.: General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. NACA Report 496, 1935.
- [18] Čečrdle, J.: Influence of Propeller Blade Lift Distribution on Whirl Flutter Stability Characteristics. International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering, Vol.8, No.4, 2014.
- [19] Kvaternik, R. G.: Studies in Tilt-Rotor VTOL Aircraft Aeroelasticity. NASA TM X-69497 a TM X-69496, 1973.
- [20] Říha, B.: Pohon letadel – příkladová část. České vysoké učení technické v Praze, Praha, 1992.

Přílohy

Příloha 1: Odvození aerodynamických matic

Rozepsání rovnic aerodynamických sil

Při uvažování následující definice efektivních úhlů:

$$\bar{\Theta} = \Theta - \frac{\dot{z}}{v_\infty} = \Theta - \frac{a\dot{\Theta}}{v_\infty}$$

$$\bar{\Psi} = \Psi - \frac{\dot{y}}{v_\infty} = \Psi - \frac{a\dot{\Psi}}{v_\infty}$$

Ize vztahy pro aerodynamické síly generované vrtulí rozepsat do tvaru:

$$P_Y = q_\infty F_P \left[c_{y\bar{\Theta}} \left(\Theta - \frac{a\dot{\Theta}}{v_\infty} \right) + c_{y\bar{\Psi}} \left(\Psi - \frac{a\dot{\Psi}}{v_\infty} \right) + c_{yq} \left(\frac{\dot{\Theta}R}{v_\infty} \right) + c_{yr} \left(\frac{\dot{\Psi}R}{v_\infty} \right) \right]$$

$$P_Z = q_\infty F_P \left[c_{z\bar{\Theta}} \left(\Theta - \frac{a\dot{\Theta}}{v_\infty} \right) + c_{z\bar{\Psi}} \left(\Psi - \frac{a\dot{\Psi}}{v_\infty} \right) + c_{zq} \left(\frac{\dot{\Theta}R}{v_\infty} \right) + c_{zr} \left(\frac{\dot{\Psi}R}{v_\infty} \right) \right]$$

$$M_{Y,P} = q_\infty F_P D_P \left[c_{m\bar{\Theta}} \left(\Theta - \frac{a\dot{\Theta}}{v_\infty} \right) + c_{m\bar{\Psi}} \left(\Psi - \frac{a\dot{\Psi}}{v_\infty} \right) + c_{mq} \left(\frac{\dot{\Theta}R}{v_\infty} \right) + c_{mr} \left(\frac{\dot{\Psi}R}{v_\infty} \right) \right]$$

$$M_{Z,P} = q_\infty F_P D_P \left[c_{n\bar{\Theta}} \left(\Theta - \frac{a\dot{\Theta}}{v_\infty} \right) + c_{n\bar{\Psi}} \left(\Psi - \frac{a\dot{\Psi}}{v_\infty} \right) + c_{nq} \left(\frac{\dot{\Theta}R}{v_\infty} \right) + c_{nr} \left(\frac{\dot{\Psi}R}{v_\infty} \right) \right]$$

Pravá strana pohybových rovnic je dána vztahy:

$$M_Y = M_{Y,P} - aP_Z$$

$$M_Z = M_{Z,P} + aP_Y$$

a tedy se po dosazení, roznásobení a vytknutí získá:

$$\begin{aligned} M_Y = q_\infty F_P D_P & \left[(c_{m\bar{\Theta}})\Theta - \left(\frac{a}{v_\infty} c_{m\bar{\Theta}} \right) \dot{\Theta} + (c_{m\bar{\Psi}})\Psi - \left(\frac{a}{v_\infty} c_{m\bar{\Psi}} \right) \dot{\Psi} + \left(\frac{R}{v_\infty} c_{mq} \right) \dot{\Theta} \right. \\ & + \left(\frac{R}{v_\infty} c_{mr} \right) \dot{\Psi} - \left(\frac{a}{D_P} c_{z\bar{\Theta}} \right) \Theta + \left(\frac{a^2}{D_P v_\infty} c_{z\bar{\Theta}} \right) \dot{\Theta} - \left(\frac{a}{D_P} c_{z\bar{\Psi}} \right) \Psi + \left(\frac{a^2}{D_P v_\infty} c_{z\bar{\Psi}} \right) \dot{\Psi} \\ & \left. - \left(\frac{aR}{D_P v_\infty} c_{zq} \right) \dot{\Theta} - \left(\frac{aR}{D_P v_\infty} c_{zr} \right) \dot{\Psi} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_Z = q_\infty F_P D_P & \left[(c_{n\Theta})\Theta - \left(\frac{a}{v_\infty} c_{n\Theta} \right) \dot{\Theta} + (c_{n\Psi})\Psi - \left(\frac{a}{v_\infty} c_{n\Psi} \right) \dot{\Psi} + \left(\frac{R}{v_\infty} c_{nq} \right) \dot{\Theta} + \left(\frac{R}{v_\infty} c_{nr} \right) \dot{\Psi} \right. \\
& + \left(\frac{a}{D_P} c_{y\Theta} \right) \Theta - \left(\frac{a^2}{D_P v_\infty} c_{y\Theta} \right) \dot{\Theta} + \left(\frac{a}{D_P} c_{y\Psi} \right) \Psi - \left(\frac{a^2}{D_P v_\infty} c_{y\Psi} \right) \dot{\Psi} \\
& \left. + \left(\frac{aR}{D_P v_\infty} c_{yq} \right) \dot{\Theta} + \left(\frac{aR}{D_P v_\infty} c_{yr} \right) \dot{\Psi} \right]
\end{aligned}$$

Nyní po separaci na aerodynamickou tuhost a aerodynamické tlumení a dalším vytknutí vznikne:

$$M_y = M_Y^K + M_Y^D$$

$$M_Z = M_Z^K + M_Z^D$$

$$M_Y^K = q_\infty F_P D_P \left[\left(c_{m\Theta} - \frac{a}{D_P} c_{z\Theta} \right) \Theta + \left(c_{m\Psi} - \frac{a}{D_P} c_{z\Psi} \right) \Psi \right]$$

$$\begin{aligned}
M_Y^D = q_\infty F_P \frac{D_P^2}{v_\infty} & \left[\left(-\frac{a}{D_P} c_{m\Theta} + \frac{1}{2} c_{mq} + \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\Theta} - \frac{a}{2D_P} c_{zq} \right) \dot{\Theta} \right. \\
& \left. + \left(-\frac{a}{D_P} c_{m\Psi} + \frac{1}{2} c_{mr} + \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\Psi} - \frac{a}{2D_P} c_{zr} \right) \dot{\Psi} \right]
\end{aligned}$$

$$M_Z^K = q_\infty F_P D_P \left[\left(c_{n\Theta} + \frac{a}{D_P} c_{y\Theta} \right) \Theta + \left(c_{n\Psi} + \frac{a}{D_P} c_{y\Psi} \right) \Psi \right]$$

$$\begin{aligned}
M_Z^D = q_\infty F_P \frac{D_P^2}{v_\infty} & \left[\left(-\frac{a}{D_P} c_{n\Theta} + \frac{1}{2} c_{nq} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\Theta} + \frac{a}{2D_P} c_{yq} \right) \dot{\Theta} \right. \\
& \left. + \left(-\frac{a}{D_P} c_{n\Psi} + \frac{1}{2} c_{nr} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\Psi} + \frac{a}{2D_P} c_{yr} \right) \dot{\Psi} \right]
\end{aligned}$$

což lze přepsat do maticové podoby:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_Z \end{bmatrix} = q_\infty F_P D_P \begin{bmatrix} m_{Y1}^K & m_{Y2}^K \\ m_{Z1}^K & m_{Z2}^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} + q_\infty F_P \frac{D_P^2}{v_\infty} \begin{bmatrix} m_{Y1}^D & m_{Y2}^D \\ m_{Z1}^D & m_{Z2}^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

kde jsou matice definovány takto:

$$\begin{bmatrix} m_{Y1}^K & m_{Y2}^K \\ m_{Z1}^K & m_{Z2}^K \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{A*} = \text{matice aerodynamické tuhosti před úpravou}$$

$$\begin{bmatrix} m_{Y1}^D & m_{Y2}^D \\ m_{Z1}^D & m_{Z2}^D \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{A*} = \text{matice aerodynamického tlumení před úpravou}$$

Matice aerodynamické tuhosti

Po vyjádření jednotlivých členů získá matice aerodynamické tuhosti před úpravou tvar:

$$\mathbf{K}^{A*} = \begin{bmatrix} c_{m\theta} - \frac{a}{D_P} c_{z\theta} & c_{m\psi} - \frac{a}{D_P} c_{z\psi} \\ c_{n\theta} + \frac{a}{D_P} c_{y\theta} & c_{n\psi} + \frac{a}{D_P} c_{y\psi} \end{bmatrix}$$

S využitím symetrických vlastností vrtule:

$$c_{y\theta} = c_{z\psi} \quad c_{m\theta} = c_{n\psi}$$

$$c_{yq} = c_{zr} \quad c_{mq} = c_{nr}$$

$$c_{y\psi} = -c_{z\theta} \quad c_{m\psi} = -c_{n\theta}$$

$$c_{yr} = -c_{zq} \quad c_{mr} = -c_{nq}$$

Ize matici upravit:

$$\mathbf{K}^{A*} = \begin{bmatrix} c_{m\theta} - \frac{a}{D_P} c_{z\theta} & -c_{n\theta} - \frac{a}{D_P} c_{y\theta} \\ c_{n\theta} + \frac{a}{D_P} c_{y\theta} & c_{m\theta} - \frac{a}{D_P} c_{z\theta} \end{bmatrix}$$

a po převedení na levou stranu pohybových rovnic *whirl flutteru* získá konečný tvar:

$$\mathbf{K}^A = \begin{bmatrix} \frac{a}{D_P} c_{z\theta} - c_{m\theta} & c_{n\theta} + \frac{a}{D_P} c_{y\theta} \\ -c_{n\theta} - \frac{a}{D_P} c_{y\theta} & \frac{a}{D_P} c_{z\theta} - c_{m\theta} \end{bmatrix}$$

Na levé straně pohybových rovnic bude tedy aerodynamická tuhost reprezentována členem:

$$q_{\infty} F_P D_P \mathbf{K}^A = q_{\infty} F_P D_P \begin{bmatrix} \frac{a}{D_P} c_{z\theta} - c_{m\theta} & c_{n\theta} + \frac{a}{D_P} c_{y\theta} \\ -c_{n\theta} - \frac{a}{D_P} c_{y\theta} & \frac{a}{D_P} c_{z\theta} - c_{m\theta} \end{bmatrix}$$

Matice aerodynamického tlumení

Stejným způsobem jako v předchozím případě lze získat i výslednou matici aerodynamického tlumení:

$$\mathbf{D}^{A*} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{D_P} c_{m\theta} + \frac{1}{2} c_{mq} + \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\theta} - \frac{a}{2D_P} c_{zq} & -\frac{a}{D_P} c_{m\psi} + \frac{1}{2} c_{mr} + \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\psi} - \frac{a}{2D_P} c_{zr} \\ -\frac{a}{D_P} c_{n\theta} + \frac{1}{2} c_{nq} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\theta} + \frac{a}{2D_P} c_{yq} & -\frac{a}{D_P} c_{n\psi} + \frac{1}{2} c_{nr} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\psi} + \frac{a}{2D_P} c_{yr} \end{bmatrix}$$

S využitím symetrických vlastností vrtule:

$$c_{y\theta} = c_{z\psi} \quad c_{m\theta} = c_{n\psi}$$

$$c_{yq} = c_{zr} \quad c_{mq} = c_{nr}$$

$$c_{y\psi} = -c_{z\theta} \quad c_{m\psi} = -c_{n\theta}$$

$$c_{yr} = -c_{zq} \quad c_{mr} = -c_{nq}$$

Lze matici upravit:

$$\mathbf{D}^{A*} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{D_P} c_{m\theta} + \frac{1}{2} c_{mq} + \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\theta} - \frac{a}{2D_P} c_{zq} & \frac{a}{D_P} c_{n\theta} - \frac{1}{2} c_{nq} + \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\theta} - \frac{a}{2D_P} c_{yq} \\ -\frac{a}{D_P} c_{n\theta} + \frac{1}{2} c_{nq} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\theta} + \frac{a}{2D_P} c_{yq} & -\frac{a}{D_P} c_{m\theta} + \frac{1}{2} c_{mq} + \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\theta} - \frac{a}{2D_P} c_{zq} \end{bmatrix}$$

a po převedení na levou stranu pohybových rovnic *whirl flutteru* získá konečný tvar:

$$\mathbf{D}^A = \begin{bmatrix} \frac{a}{D_P} c_{m\theta} - \frac{1}{2} c_{mq} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\theta} + \frac{a}{2D_P} c_{zq} & -\frac{a}{D_P} c_{n\theta} + \frac{1}{2} c_{nq} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\theta} + \frac{a}{2D_P} c_{yq} \\ \frac{a}{D_P} c_{n\theta} - \frac{1}{2} c_{nq} + \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\theta} - \frac{a}{2D_P} c_{yq} & +\frac{a}{D_P} c_{m\theta} - \frac{1}{2} c_{mq} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\theta} + \frac{a}{2D_P} c_{zq} \end{bmatrix}$$

Na levé straně pohybových rovnic bude tedy aerodynamické tlumení reprezentováno členem:

$$\begin{aligned} q_\infty F_P \frac{D_P^2}{v_\infty} \mathbf{D}^A &= \\ &= q_\infty F_P \frac{D_P^2}{v_\infty} \begin{bmatrix} \frac{a}{D_P} c_{m\theta} - \frac{1}{2} c_{mq} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\theta} + \frac{a}{2D_P} c_{zq} & -\frac{a}{D_P} c_{n\theta} + \frac{1}{2} c_{nq} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\theta} + \frac{a}{2D_P} c_{yq} \\ \frac{a}{D_P} c_{n\theta} - \frac{1}{2} c_{nq} + \frac{a^2}{D_P^2} c_{y\theta} - \frac{a}{2D_P} c_{yq} & +\frac{a}{D_P} c_{m\theta} - \frac{1}{2} c_{mq} - \frac{a^2}{D_P^2} c_{z\theta} + \frac{a}{2D_P} c_{zq} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Příloha 2: Program *WhirlFlutter1.m*

```

1  %=====
2  %                               W H I R L   F L U T T E R                               %
3  %=====
4  %
5  close all
6  clear all
7  clc
8  navez='Whirl flutter';
9  %
10 %=====
11 %                               NASTAVENÍ VÝSTUPU                               %
12 %=====
13 %
14 v_sigma_f_diagram=0;           % NASTAV HODNOTU 1 PRO V-SIGMA-F DIAGRAM
15 %
16 v_ksi_f_diagram=0;            % NASTAV HODNOTU 1 PRO V-KSI-F DIAGRAM
17 %                               (ksi = poměrný útlum. Nefunguje pro
18 %                               konstrukční tlumení)
19 root_locus_plot=0;           % NASTAV HODNOTU 1 PRO ROOT LOCUS PLOT
20 %                               (nefunguje pro model konstrukčního tlumení)
21 listove_integraly=0;         % NASTAV HODNOTU 1 PRO GRAF VELIKOSTI LISTOVYCH
22 %                               INTEGRÁLU
23 aerodynamicke_koef_moment=0; % NASTAV HODNOTU 1 PRO PRUBEH AERODYNAMICKYCH
24 %                               KOEFICIENTU MOMENTU V JEDNOM GRAFU
25 aerodynamicke_koef_sily=0;   % NASTAV HODNOTU 1 PRO PRUBEH AERODYNAMICKYCH
26 %                               KOEFICIENTU SIL V JEDNOM GRAFU
27 %
28 %=====
29 %                               VSTUPNÍ   PARAMETRY                               %
30 %=====
31 %
32 % Výběr modelu tlumící síly
33 %
34 konstrukcni_tlumeni=0;       % NASTAV HODNOTU 1 PRO VÝPOČET S KONSTRUKČNÍM
35 %                               TLUMENÍM (hodnota viskozni_tlumeni=0 !!)
36 viskozni_tlumeni=1;         % NASTAV HODNOTU 1 PRO VÝPOČET S VISKÓZNÍM
37 %                               TLUMENÍM (hodnota konstrukcni_tlumeni=0 !!)
38 %                               % PRO OBĚ HODNOTY ROVNY NULE PROBĚHNE VÝPOČET
39 %                               VNITŘNĚ NETLUMENÉ SOUSTAVY
40 %
41 % Interval rychlostí nabíhajícího proudu
42 %
43 v_max=450;                   % Maximální návrhová rychlost letu [km/h]
44 v_d=1.1*v_max;              % Dovolená rychlost letu [km/h]
45 %
46 n=1;
47 V=1:1:300;                   % Vyšetřovaný interval letových rychlostí [m/s]
48 for n=1:numel(V)
49     v=V(n);
50     %
51     % Parametry proudu vzduchu
52     %
53     H=0;                       % výška letu MSA [m]

```

```

54 - T=15-0.0065*H; % teplota vzduchu MSA [°C]
55 - ro_0=1.225; % hustota vzduchu při hladině moře MSA [kg/m3]
56 - ro=ro_0*(1-H/44308)^4.2553; % hustota vzduchu MSA [kg/m3]
57 - az=(331.57+0.607*T); % rychlost zvuku v atmosféře v závislosti na
58 - % teplotě (aproximace pro suchý vzduch v
59 - % rozsahu teplot -100°C až 100°C) [m/s]
60 - Mach=v/az; % Machovo číslo [1]
61 - q=0.5*ro*v^2; % dynamický tlak [kg/m*s2]
62 - %
63 - % Parametry vrtule
64 - %
65 - Nb=4; % počet listů vrtule (musí být symetrická!)[1]
66 - R=1.150; % poloměr vrtule [m]
67 - Dp=2*R; % průměr vrtule [m]
68 - Fp=pi*R^2; % plocha vrtulového disku [m2]
69 - r0=0.2*R; % radius krytu/začátek profilu vrtule [m]
70 - n_max=2080; % max. otáčky vrtule [1/min]
71 - Big_omega=2*pi*n_max/60; % úhlová rychlost vrtule [rad/s]
72 - my=v/(Big_omega*R); % rychlostní poměr (blade advance ratio) [1]
73 - cr=0.1665; % referenční tětiva profilu (0,75R) [m]
74 - Mmax=sqrt(v^2+Big_omega*... % maximální lokální machovo číslo [1]
75 - R)/az;
76 - c_y_alpha_max=10; % maximální stoupání nestlačitelné vztlakové
77 - % čáry vrtulového listu
78 - aM=c_y_alpha_max/... % maxiální stoupání vztlakové čáry vrtulového
79 - sqrt(1-Mmax^2); % listu při transsonických rychlostech [1/rad]
80 - %
81 - r01=r0; % složky vektoru vzdálenosti řezů vrtulového
82 - r02=0.25*R;% listu měřené od středu vrtule počínaje
83 - r03=0.30*R;% vzdáleností r0 za předním krytem až po vnější
84 - r04=0.35*R;% poloměr R(pro řešení aerodynamiky pomocí
85 - r05=0.40*R;% Strip Theory) [m]
86 - r06=0.45*R;
87 - r07=0.50*R;
88 - r08=0.55*R;
89 - r09=0.60*R;
90 - r10=0.65*R;
91 - r11=0.70*R;
92 - r12=0.75*R;
93 - r13=0.80*R;
94 - r14=0.85*R;
95 - r15=0.90*R;
96 - r16=0.95*R;
97 - r17=1.00*R;
98 - %
99 - c01=0.1357; % složky vektoru tětiv jednotlivých řezů
100 - c02=0.1488;% vrtulového listu [m]
101 - c03=0.1580;
102 - c04=0.1679;
103 - c05=0.1732;
104 - c06=0.1741;
105 - c07=0.1732;
106 - c08=0.1725;
107 - c09=0.1709;
108 - c10=0.1697;
109 - c11=0.1686;
110 - c12=cr;

```

```

111 - c13=0.1617;
112 - c14=0.1571;
113 - c15=0.1502;
114 - c16=0.1380;
115 - c17=0.1212;
116 - %
117 - a01=4.55; % složky vektoru stoupání vztlakové čáry
118 - a02=5.35;% % profilu v jednotlivých řezech listu [1/rad]
119 - a03=6.10;
120 - a04=6.52;
121 - a05=6.60;
122 - a06=6.62;
123 - a07=6.70;
124 - a08=6.90;
125 - a09=7.00;
126 - a10=7.10;
127 - a11=7.32;
128 - a12=7.60;
129 - a13=8.10;
130 - a14=8.55;
131 - a15=8.85;
132 - a16=9.35;
133 - a17=10.00;
134 - %
135 - % % příslušné vektory
136 - %
137 - r_vektor=[r01 r02 r03 r04 r05 r06 r07 r08 r09 r10 r11 r12 r13 r14 r15...
138 - r16 r17];
139 - %
140 - a_vektor=[a01 a02 a03 a04 a05 a06 a07 a08 a09 a10 a11 a12 a13 a14 a15...
141 - a16 a17];
142 - %
143 - c_vektor=[c01 c02 c03 c04 c05 c06 c07 c08 c09 c10 c11 c12 c13 c14 c15...
144 - c16 c17];
145 - %
146 - pomerny_c_vektor=c_vektor/cr; % vektor poměrných (bezrozměrných) tětiv [1]
147 - %
148 - eta_vektor=r_vektor/R; % vektor poměrných (bezrozměrných) poloměrů [1]
149 - %
150 - % Parametry motoru a jeho uložení
151 - %
152 - Jx=20.61; % polární moment setrvačnosti samotné vrtule k
153 - % jejím středu (podélná osa x) [kg*m2]
154 - Jy=126.03; % moment setrvačnosti celé soustavy k ose y
155 - % (vodorovná osa) [kg*m2]
156 - Jz=126.12; % moment setrvačnosti celé soustavy k ose z
157 - % (svislá osa) [kg*m2]
158 - f_theta=6.8; % vlastní frekvence klopivého módu [Hz]
159 - f_psi=7.9; % vlastní frekvence zatáčivého módu [Hz]
160 - %
161 - Omega_theta=2*pi*f_theta; % vlastní úhlová frekvence klopivého módu [Hz]
162 - Omega_psi=2*pi*f_psi; % vlastní úhlová frekvence zatáčivého módu [Hz]
163 - %
164 - K_theta=Jy*Omega_theta^2; % Tuhost klopivé pružiny [N*m/rad]
165 - K_psi=Jz*Omega_psi^2; % Tuhost zatáčivé pružiny [N*m/rad]
166 - %
167 - gamma_theta=0.02; % Konstrukční tlumení ve směru klopení [1]

```



```

168 - gamma_psi=0.02;           % Konstrukční tlumení ve směru zatáčení [1]
169 - %
170 - ksi_theta=gamma_theta/2; % Poměrný útlum ve směru klopení (viskózní) [1]
171 - ksi_psi=gamma_psi/2;    % Poměrný útlum ve směru zatáčení (viskózní) [1]
172 - %
173 - b_theta=2*ksi_theta*... % koeficient viskózního tlumení ve směru
174 -       Jy*Omega_theta;% klopení [N*m*s/rad]
175 - b_psi=2*ksi_psi*Jz*... % koeficient viskózního tlumení ve směru
176 -       Omega_psi;% zatáčení [N*m*s/rad]
177 - %
178 - a=1.045;                % délka vyložení (od středu vrtule k uchycení
179 - %                        motoru) [m]
180 - %
181 - %=====
182 - %                        VÝPOČET AERODYNAMICKÝCH KOEFICIENTŮ           %
183 - %=====
184 - %
185 - % vektor lokálních redukovaných frekvencí jednotlivých řezů listu [1]
186 - %
187 - kp_vektor=c_vektor./(2*R*sqrt(my^2+eta_vektor.^2));
188 - %
189 - % vektor složek Theodorsenovy funkce reprezentujících část "ve fázi"
190 - % (opět pro každý řez)
191 - %
192 - F_vektor=(besselj(1,kp_vektor).*(besselj(1,kp_vektor)+...
193 -           bessely(0,kp_vektor))+bessely(1,kp_vektor).*...
194 -           (bessely(1,kp_vektor)-besselj(0,kp_vektor)))./...
195 -           ((besselj(1,kp_vektor)+bessely(0,kp_vektor)).^2)+...
196 -           ((bessely(1,kp_vektor)-besselj(0,kp_vektor)).^2));
197 - %
198 - % vektor složek Theodorsenovy funkce reprezentujících část "mimo fázi"
199 - % (opět pro každý řez)
200 - %
201 - G_vektor=-((bessely(1,kp_vektor).*bessely(0,kp_vektor)+...
202 -            besselj(1,kp_vektor).*besselj(0,kp_vektor))./...
203 -            ((besselj(1,kp_vektor)+bessely(0,kp_vektor)).^2)+...
204 -            ((bessely(1,kp_vektor)-besselj(0,kp_vektor)).^2));
205 - %
206 - % integrál funkce poměrné šířky [1]
207 - %
208 - pomocny_integral=trapz(eta_vektor,pomerny_c_vektor);
209 - %
210 - % štíhlost listu vrtule [1]
211 - %
212 - Ar=(R*(1-r0/R)^2)/(cr*pomocny_integral);
213 - %
214 - % pomocná funkce pro korekci nadzvukového obtékání
215 - % (cut-off value of the compressible lift curve slope) [1]
216 - %
217 - M_fce=(Mach^2)*(1+(eta_vektor.^2)/(my^2));
218 - %
219 - a_fce=(1-(a_vektor/aM).^2);
220 - %
221 - □ for nn=1:length(M_fce)
222 -
223 -     if M_fce(1,nn) >= a_fce(1,nn)
224 -

```

```

225 -         Mfce_final(1,nn)=a_fce(1,nn);
226
227 -     else Mfce_final(1,nn)=M_fce(1,nn);
228
229 -     end
230 - end
231 - %
232 - % vektor hodnot funkce III1 v jednotlivých řezech
233 - % (k integraci po poloměru vrtule)
234 - %
235 - III1_vektor=(a_vektor.*c_vektor.*F_vektor)./(((my^2)+(eta_vektor.^2)).^...
236 -         (0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^0.5)));
237 - %
238 - % vektor hodnot funkce JJ1 v jednotlivých řezech
239 - % (k integraci po poloměru vrtule)
240 - %
241 - JJ1_vektor=(a_vektor.*c_vektor.*G_vektor)./(((my^2)+(eta_vektor.^2)).^...
242 -         (0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^0.5)));
243 - %
244 - % vektor hodnot funkce II2 v jednotlivých řezech
245 - % (k integraci po poloměru vrtule)
246 - %
247 - II2_vektor=((eta_vektor.^2).*a_vektor.*c_vektor.*F_vektor)./...
248 -         (((my^2)+(eta_vektor.^2)).^0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^...
249 -         (0.5)));
250 - %
251 - % vektor hodnot funkce JJ2 v jednotlivých řezech
252 - % (k integraci po poloměru vrtule)
253 - %
254 - JJ2_vektor=((eta_vektor.^2).*a_vektor.*c_vektor.*G_vektor)./...
255 -         (((my^2)+(eta_vektor.^2)).^0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^...
256 -         (0.5)));
257 - %
258 - % vektor hodnot funkce II3 v jednotlivých řezech
259 - % (k integraci po poloměru vrtule)
260 - %
261 - II3_vektor=((eta_vektor.^4).*a_vektor.*c_vektor.*F_vektor)./...
262 -         (((my^2)+(eta_vektor.^2)).^0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^...
263 -         (0.5)));
264 - %
265 - % vektor hodnot funkce JJ3 v jednotlivých řezech
266 - % (k integraci po poloměru vrtule)
267 - %
268 - JJ3_vektor=((eta_vektor.^4).*a_vektor.*c_vektor.*G_vektor)./...
269 -         (((my^2)+(eta_vektor.^2)).^0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^...
270 -         (0.5)));
271 - %
272 - % integrály hodnot funkcí III1 až JJ3 (metoda trapz)
273 - %
274 - III1_integral=trapz(eta_vektor,III1_vektor);
275 - JJ1_integral=trapz(eta_vektor,JJ1_vektor);
276 - II2_integral=trapz(eta_vektor,II2_vektor);
277 - JJ2_integral=trapz(eta_vektor,JJ2_vektor);
278 - II3_integral=trapz(eta_vektor,II3_vektor);
279 - JJ3_integral=trapz(eta_vektor,JJ3_vektor);
280 - %
281 - % integrály vrtulových listů I1 až J3

```

```

282 %
283 I1=(Nb/4)*(1/(2*pi))*(my^2)*Ar*II1_integral/cr;
284 J1=(Nb/4)*(1/(2*pi))*(my^2)*Ar*JJ1_integral/cr;
285 I2=(Nb/4)*(1/(2*pi))*my*Ar*II2_integral/cr;
286 J2=(Nb/4)*(1/(2*pi))*my*Ar*JJ2_integral/cr;
287 I3=(Nb/4)*(1/(2*pi))*Ar*II3_integral/cr;
288 J3=(Nb/4)*(1/(2*pi))*Ar*JJ3_integral/cr;
289 %
290 % hodnoty aerodynamických koeficientů v závislosti na rychlosti letu
291 %
292 c_ztheta=-I1*4*Big_omega*cr/v;
293 c_zq=J2*4*Big_omega*cr/v;
294 c_mtheta=-J2*2*Big_omega*cr/v;
295 c_mq=-I3*2*Big_omega*cr/v;
296 c_ytheta=-J1*4*Big_omega*cr/v;
297 c_yq=-I2*4*Big_omega*cr/v;
298 c_ntheta=-I2*2*Big_omega*cr/v;
299 c_nq=-J3*2*Big_omega*cr/v;
300 %
301 % hodnoty integrálů I1 až J3 pro všechny letové rychlosti
302 %
303 I1_vektor(n,:)=I1;
304 J1_vektor(n,:)=J1;
305 I2_vektor(n,:)=I2;
306 J2_vektor(n,:)=J2;
307 I3_vektor(n,:)=I3;
308 J3_vektor(n,:)=J3;
309 %
310 % vektory aerodynamických koeficientů pro všechny rychlosti letu
311 %
312 c_ztheta_vektor(n,:)=c_ztheta;
313 c_zq_vektor(n,:)=c_zq;
314 c_mtheta_vektor(n,:)=c_mtheta;
315 c_mq_vektor(n,:)=c_mq;
316 c_ytheta_vektor(n,:)=c_ytheta;
317 c_yq_vektor(n,:)=c_yq;
318 c_ntheta_vektor(n,:)=c_ntheta;
319 c_nq_vektor(n,:)=c_nq;
320 %
321 %=====
322 % VÝPOČET MATIC A ŘEŠENÍ ROVNICE FLUTTERU %
323 %=====
324 %
325 m11=Jy; % prvky matice hmotnosti [kg*m2]
326 m12=0;
327 m21=0;
328 m22=Jz;
329 %
330 M=[m11 m12 % matice hmotnosti
331 m21 m22];
332 %
333 g11=0; % prvky gyroskopické matice [kg*m2/s]
334 g12=Jx*Big_omega;
335 g21=-g12;
336 g22=0;
337 %
338 G=[g11 g12 % gyroskopická matice

```

```

339     g21 g22];
340     %
341     k11=K_theta;           % prvky matice tuhosti [N*m/rad]
342     k12=0;
343     k21=0;
344     k22=K_psi;
345     %
346     K=[k11 k12
347         k21 k22];       % matice tuhosti
348     %
349     % matice tuhosti s implementací
350     % konstrukčního tlumení (komplexní
351     % forma tuhosti)
352     %
353     K_s_tlumenim=[(1+li*gamma_theta)*k11 k12
354                   k21 (1+li*gamma_psi)*k22];
355     %
356     d11=b_theta;         % prvky matice viskózního tlumení
357     d12=0;%              [N*m*s/rad]
358     d21=0;
359     d22=b_psi;
360     %
361     D=[d11 d12
362         d21 d22];       % matice viskózního tlumení
363     %
364     % prvky matice aerodynamického
365     % tlumení [1]
366     %
367     da11=(a/Dp)*c_mtheta-0.5*c_mq-((a^2)/(Dp^2))*c_ztheta+(a/(2*Dp))*c_zq;
368     da12=-(a/Dp)*c_ntheta+0.5*c_nq-((a^2)/(Dp^2))*c_ytheta+0.5*(a/Dp)*c_yq;
369     da21=-da12;
370     da22=da11;
371     %
372     DA=[da11 da12
373         da21 da22];     % matice aerodynamického tlumení
374     %
375     % prvky matice aerodynamické tuhosti[1]
376     %
377     ka11=(a/Dp)*c_ztheta-c_mtheta;
378     ka12=c_ntheta+(a/Dp)*c_ytheta;
379     ka21=-ka12;
380     ka22=ka11;
381     %
382     KA=[ka11 ka12
383         ka21 ka22];     % matice aerodynamické tuhosti
384     %
385     % Převod na náhradní soustavu + výpočet matice vlastních čísel/vlastních
386     % vektorů pro všechny rychlosti letu
387     %
388     M_vlnka=M;          % celková matice hmotnosti
389     %
390     %
391     DA_roznasobena=q*Fp*((Dp^2)/v)*DA;
392     %
393     KA_roznasobena=q*Fp*Dp*KA;
394     %
395     if konstrukcni_tlumeni==0&&viskozni_tlumeni==0

```

```

396 %
397 D_vlnka=G+DA_roznasobena; % celková matice tlumení
398 %
399 K_vlnka=K+KA_roznasobena; % celková matice tuhosti
400 %
401 elseif konstrukcni_tlumeni==0&&viskozni_tlumeni==1
402 %
403 D_vlnka=D+G+DA_roznasobena; % celková matice tlumení
404 %
405 K_vlnka=K+KA_roznasobena; % celková matice tuhosti
406 %
407 elseif konstrukcni_tlumeni==1&&viskozni_tlumeni==0
408 %
409 D_vlnka=G+DA_roznasobena; % celková matice tlumení
410 %
411 % % celková matice tuhosti
412 K_vlnka=K_s_tlumenim+KA_roznasobena;
413 %
414 else
415 error('Nastavení modelu tlumení na začátku skriptu je nesprávné.')
416 end
417 %
418 % % náhradní soustava - matice flutteru
419 %
420 J=[zeros(2,2) eye(2,2)
421 M_vlnka\ -K_vlnka M_vlnka\ -D_vlnka];
422 %
423 % % Matice vlastních čísel pro všechny
424 % rychlosti letu
425 %
426 EIG_matrix(n,:)=eig(J);
427 %
428 n=n+1;
429 %
430 end
431 %
432 EIG_matrix2=EIG_matrix;
433 EIG_matrix2(imag(EIG_matrix2)<0)=0;
434 EIG_matrix_final=sort(EIG_matrix2,2,'descend');
435 EIG_matrix_final(:,3:4)=[];
436 %
437 %=====
438 % STANOVENÍ RYCHLOSTI FLUTTERU %
439 %=====
440 %
441 [row,col]=find(real(EIG_matrix_final)>0,1);
442 y_1=real(EIG_matrix_final(row-1,col));
443 y_2=real(EIG_matrix_final(row,col));
444 x_1=V(1,row-1);
445 x_2=V(1,row);
446 x_vektor=[x_1 x_2];
447 y_vektor=[y_1 y_2];
448 coeffs=polyfit(x_vektor,y_vektor,1);
449 v_flutter=roots(coeffs);
450 frekv=imag(EIG_matrix_final(row-1,col))/(2*pi);
451 disp('Dovolená rychlost [km/h] EAS')
452 Dovolena_rychlost_EAS=v_d

```

```

453 - disp('Dovolená rychlost [km/h] TAS')
454 - Dovolena_rychlost_TAS=v_d*(ro_0/ro)^(1/2)
455 - disp('Frekvence whirl flutteru [Hz]')
456 - Frekvence=frekv
457 - disp('Rychlost whirl flutteru [m/s] TAS')
458 - Rychlost_TAS=v_flutter
459 - disp('Rychlost whirl flutteru [m/s] EAS')
460 - Rychlost_EAS=v_flutter*(ro/ro_0)^(1/2)
461 - disp('Rychlost whirl flutteru [km/h] TAS')
462 - Hledana_rychlost_TAS=3.6*v_flutter
463 - disp('Rychlost whirl flutteru [km/h] EAS')
464 - Hledana_rychlost_EAS=3.6*v_flutter*(ro/ro_0)^(1/2)
465 - if Dovolena_rychlost_EAS>=Hledana_rychlost_EAS
466 - disp('RYCHLOST FLUTTERU LEŽÍ V INTERVALU PŘÍPUSTNÝCH LETOVÝCH RYCHLOSTÍ')
467 - else
468 - disp('RYCHLOST FLUTTERU NELEŽÍ V INTERVALU PŘÍPUSTNÝCH LETOVÝCH RYCHLOSTÍ')
469 - end
470 - %
471 - %=====
472 - %                               DIAGRAMY V-SIGMA-F A DALSI GRAFY                               %
473 - %=====
474 - %
475 - if v_sigma_f_diagram==1
476 - %
477 -     Omega1_vektor(:,1)=imag(EIG_matrix_final(:,1));
478 -     Omega2_vektor(:,1)=imag(EIG_matrix_final(:,2));
479 - %
480 -     Sigma1_vektor(:,1)=real(EIG_matrix_final(:,1));
481 -     Sigma2_vektor(:,1)=real(EIG_matrix_final(:,2));
482 - %
483 -     figure(1)
484 -     subplot(2,1,1)
485 -     hold on
486 -     plot(V,Omega1_vektor/2/pi,'k','DisplayName','Dopředný mód');
487 -     plot(V,Omega2_vektor/2/pi,'r','DisplayName','Zpětný mód');
488 -     hold off
489 -     xlabel('v [m/s]')
490 -     ylabel('f [Hz]')
491 -     legend('Location','east')
492 -     title('v-\sigma-f diagram')
493 -     grid
494 -     subplot(2,1,2)
495 -     plot(V,Sigma1_vektor,'k',V,Sigma2_vektor,'r');
496 -     xlabel('v [m/s]')
497 -     ylabel('\sigma [1]')
498 -     grid
499 - end
500 - %
501 - if v_ksi_f_diagram==1&&konstrukcni_tlumeni==0
502 - %
503 -     Omega1_vektor(:,1)=imag(EIG_matrix_final(:,1));
504 -     Omega2_vektor(:,1)=imag(EIG_matrix_final(:,2));
505 - %
506 -     Sigma1_vektor(:,1)=real(EIG_matrix_final(:,1));
507 -     Sigma2_vektor(:,1)=real(EIG_matrix_final(:,2));
508 - %
509 -     Ksil_vektor(:,1)=Sigma1_vektor./Omega1_vektor;

```

```

509 -     Ksil_vektor(:,1)=Sigma1_vektor./Omega1_vektor;
510 -     Ksi2_vektor(:,1)=Sigma2_vektor./Omega2_vektor;
511 -     %
512 -     figure(2)
513 -     subplot(2,1,1)
514 -     hold on
515 -     plot(V,Omega1_vektor/2/pi,'k','DisplayName','Dopředný mód');
516 -     plot(V,Omega2_vektor/2/pi,'r','DisplayName','Zpětný mód');
517 -     hold off
518 -     xlabel('v [m/s]')
519 -     ylabel('f [Hz]')
520 -     legend('Location','east')
521 -     title('v-\xi-f diagram')
522 -     grid
523 -     subplot(2,1,2)
524 -     plot(V,Ksil_vektor,'k',V,Ksi2_vektor,'r');
525 -     xlabel('v [m/s]')
526 -     ylabel('\xi [1]')
527 -     grid
528 - end
529 - %
530 - if root_locus_plot==1&&konstrukcni_tlumeni==0
531 -     %
532 -     figure(3)
533 -     plot(real(EIG_matrix(:,1)),imag(EIG_matrix(:,1)),'k'...
534 -         ,real(EIG_matrix(:,2)),imag(EIG_matrix(:,2)),'k'...
535 -         ,real(EIG_matrix(:,3)),imag(EIG_matrix(:,3)),'k'...
536 -         ,real(EIG_matrix(:,4)),imag(EIG_matrix(:,4)),'k');
537 -     xlabel('Reálná část vlastních čísel');
538 -     ylabel('Imaginární část vlastních čísel');
539 -     sgrid
540 -     title('Root Locus Plot')
541 -     %
542 - end
543 - %
544 - if listove_integraly==1
545 -     %
546 -     figure(4)
547 -     subplot(3,1,1)
548 -     hold on
549 -     plot(V,I1_vektor,'k','DisplayName','I_{1}')
550 -     plot(V,J1_vektor,'r','DisplayName','J_{1}')
551 -     hold off
552 -     xlabel('v [m/s]')
553 -     ylabel('I_{1},J_{1} [1]')
554 -     ylim([-0.3 1.4])
555 -     title('Listové integrály')
556 -     legend('Location','northwest')
557 -     grid
558 -     subplot(3,1,2)
559 -     hold on
560 -     plot(V,I2_vektor,'k','DisplayName','I_{2}')
561 -     plot(V,J2_vektor,'r','DisplayName','J_{2}')
562 -     hold off
563 -     xlabel('v [m/s]')
564 -     ylabel('I_{2},J_{2} [1]')
565 -     ylim([-0.2 0.4])
566 -     legend('Location','northwest')

```

```

567 -     grid
568 -     subplot(3,1,3)
569 -     hold on
570 -     plot(V,I3_vektor,'k','DisplayName','I_{3}')
571 -     plot(V,J3_vektor,'r','DisplayName','J_{3}')
572 -     hold off
573 -     xlabel('v [m/s]')
574 -     ylabel('I_{3},J_{3} [1]')
575 -     ylim([-0.15 0.3])
576 -     legend('Location','west')
577 -     grid
578 - end
579 - %
580 - if aerodynamicke_koef_moment==1
581 -     %
582 -     figure(5)
583 -     hold on
584 -     plot(V,c_mtheta_vektor,'k','DisplayName','c_{m\Theta}')
585 -     plot(V,c_mq_vektor,'r','DisplayName','c_{mq}')
586 -     plot(V,c_ntheta_vektor,'b','DisplayName','c_{n\Theta}')
587 -     plot(V,c_nq_vektor,'g','DisplayName','c_{nq}')
588 -     hold off
589 -     title('Koeficienty aerodynamických momentů')
590 -     xlabel('v [m/s]')
591 -     ylabel('c_{xx} [1]')
592 -     xlim([20 300])
593 -     legend('Location','southeast')
594 -     grid
595 - end
596 - %
597 - if aerodynamicke_koef_sily==1
598 -     %
599 -     figure(6)
600 -     hold on
601 -     plot(V,c_ztheta_vektor,'k','DisplayName','c_{z\Theta}')
602 -     plot(V,c_zq_vektor,'r','DisplayName','c_{zq}')
603 -     plot(V,c_ytheta_vektor,'b','DisplayName','c_{y\Theta}')
604 -     plot(V,c_yq_vektor,'g','DisplayName','c_{yq}')
605 -     hold off
606 -     title('Koeficienty aerodynamických sil')
607 -     xlabel('v [m/s]')
608 -     ylabel('c_{xx} [1]')
609 -     xlim([0 300])
610 -     legend('Location','southwest')
611 -     grid
612 - end

```


Příloha 3: Program *WhirlFlutter2.m*

```

1  %=====
2  %                               W H I R L   F L U T T E R 2                               %
3  %=====
4  %
5  close all
6  clear all
7  clc
8  nazev='Whirl flutter 2';
9  %
10 %=====
11 %                               VSTUPNÍ   PARAMETRY                               %
12 %=====
13 %
14 % Výběr modelu tlumící síly
15 %
16 viskozni_tlumeni=1;           % NASTAV HODNOTU 1 PRO VÝPOČET S VISKÓZNÍM
17 %                               TLUMENÍM (pro hodnotu 0 proběhne výpočet bez
18 %                               vnitřního tlumení)
19 %
20 % Interval vlastních frekvencí izolovaných módů
21 %
22 oo=1;
23 oo=0.01:0.01:15;           % interval vlastních frekvencí izolovaného
24 %                               módu ve směru zatáčení (horizont. rovina)
25 for o=1:numel(oo)
26     f_psi=oo(o);           % !!! OBA INTEVRALY MUSÍ BÝT STEJNÉ !!!
27
28     n=1;
29     nn=0.01:0.01:15;       % interval vlastních frekvencí izolovaného
30 %                               módu ve směru klopení (vertikální rovina)
31 %
32 for n=1:numel(nn)
33     f_theta=nn(n);
34
35     % Parametry proudu vzduchu
36     %
37     H=0;                   % výška letu MSA [m]
38     T=15-0.0065*H;         % teplota vzduchu MSA [°C]
39     ro_0=1.225;           % hustota vzduchu při hladině moře MSA [kg/m3]
40     ro=ro_0*(1-H/44308)^4.2553; % hustota vzduchu MSA [kg/m3]
41     az=(331.57+0.607*T);  % rychlost zvuku v atmosféře v závislosti na
42 %                               teplotě (aproximace pro suchý vzduch v
43 %                               rozsahu teplot -100°C až 100°C) [m/s]
44     v_EAS=137.5;         % rychlost letu na hladině moře MSA [m/s]
45     v=v_EAS*sqrt(ro_0/ro); % true air speed [m/s]
46     Mach=v/az;           % Machovo číslo [1]
47     q=0.5*ro*v^2;       % dynamický tlak [kg/m*s2]
48     %
49     % Parametry vrtule
50     %
51     Nb=4;                 % počet listů vrtule [1]
52     R=1.150;             % poloměr vrtule [m]
53     Dp=2*R;              % průměr vrtule [m]

```

```

54 - Fp=pi*R^2; % plocha vrtulového disku [m2]
55 - r0=0.2*R; % radius krytu/začátek profilu vrtule [m]
56 - n_max=2080; % max. otáčky vrtule [1/min]
57 - Big_omega=2*pi*n_max/60; % úhlová rychlost vrtule [rad/s]
58 - my=v/(Big_omega*R); % rychlostní poměr (blade advance ratio) [1]
59 - cr=0.1665; % referenční tětiva profilu (0,75R) [m]
60 - Mrmax=sqrt(v^2+Big_omega*... % maximální lokální machovo číslo [1]
61 - R)/az;
62 - c_y_alpha_max=10; % maximální stoupání nestlačitelné vztlakové
63 - % čáry vrtulového listu
64 - aM=c_y_alpha_max/... % maxiální stoupání vztlakové čáry vrtulového
65 - sqrt(1-Mrmax^2); % listu při transsonických rychlostech [1/rad]
66 - %
67 - r01=r0; % složky vektoru vzdálenosti řezů vrtulového
68 - r02=0.25*R; % listu měřené od středu vrtule počínaje
69 - r03=0.30*R; % vzdáleností r0 za předním krytem až po vnější
70 - r04=0.35*R; % poloměr R (pro řešení aerodynamiky pomocí
71 - r05=0.40*R; % Strip Theory) [m]
72 - r06=0.45*R;
73 - r07=0.50*R;
74 - r08=0.55*R;
75 - r09=0.60*R;
76 - r10=0.65*R;
77 - r11=0.70*R;
78 - r12=0.75*R;
79 - r13=0.80*R;
80 - r14=0.85*R;
81 - r15=0.90*R;
82 - r16=0.95*R;
83 - r17=1.00*R;
84 - %
85 - c01=0.1357; % složky vektoru tětiv jednotlivých řezů
86 - c02=0.1488; % vrtulového listu [m]
87 - c03=0.1580;
88 - c04=0.1679;
89 - c05=0.1732;
90 - c06=0.1741;
91 - c07=0.1732;
92 - c08=0.1725;
93 - c09=0.1709;
94 - c10=0.1697;
95 - c11=0.1686;
96 - c12=cr;
97 - c13=0.1617;
98 - c14=0.1571;
99 - c15=0.1502;
100 - c16=0.1380;
101 - c17=0.1212;
102 - %
103 - a01=4.55; % složky vektoru stoupání vztlakové čáry
104 - a02=5.35; % profilu v jednotlivých řezech listu [1/rad]
105 - a03=6.10;
106 - a04=6.52;
107 - a05=6.60;
108 - a06=6.62;
109 - a07=6.70;
110 - a08=6.90;

```

```

111 - a09=7.00;
112 - a10=7.10;
113 - a11=7.32;
114 - a12=7.60;
115 - a13=8.10;
116 - a14=8.55;
117 - a15=8.85;
118 - a16=9.35;
119 - a17=10.00;
120 - %
121 - %           % příslušné vektory
122 - %
123 - r_vektor=[r01 r02 r03 r04 r05 r06 r07 r08 r09 r10 r11 r12 r13 r14 r15...
124 -           r16 r17];
125 - %
126 - a_vektor=[a01 a02 a03 a04 a05 a06 a07 a08 a09 a10 a11 a12 a13 a14 a15...
127 -           a16 a17];
128 - %
129 - c_vektor=[c01 c02 c03 c04 c05 c06 c07 c08 c09 c10 c11 c12 c13 c14 c15...
130 -           c16 c17];
131 - %
132 - pomerny_c_vektor=c_vektor/cr; % vektor poměrných (bezrozměrných) tětiv [1]
133 - %
134 - eta_vektor=r_vektor/R;      % vektor poměrných (bezrozměrných) poloměrů [1]
135 - %
136 - % Parametry motoru a jeho uložení
137 - %
138 - Jx=20.61;                    % polární moment setrvačnosti samotné vrtule k
139 - %                             jejímu středu (podélná osa x) [kg*m2]
140 - Jy=126.03;                  % moment setrvačnosti celé soustavy k ose y
141 - %                             (vodorovná osa) [kg*m2]
142 - Jz=126.12;                  % moment setrvačnosti celé soustavy k ose z
143 - %                             (svislá osa) [kg*m2]
144 - Omega_theta=2*pi*f_theta;  % vlastní úhlová frekvence klopivého módu [Hz]
145 - Omega_psi=2*pi*f_psi;      % vlastní úhlová frekvence zatáčivého módu [Hz]
146 - %
147 - K_theta=Jy*Omega_theta^2;  % Tuhost klopivé pružiny [N*m/rad]
148 - K_psi=Jz*Omega_psi^2;     % Tuhost zatáčivé pružiny [N*m/rad]
149 - %
150 - gamma_theta=0.02;          % Konstrukční tlumení ve směru klopení [1]
151 - gamma_psi=0.02;           % Konstrukční tlumení ve směru zatáčení [1]
152 - %
153 - ksi_theta=gamma_theta/2;   % Poměrný útlum ve směru klopení (viskózní) [1]
154 - ksi_psi=gamma_psi/2;      % Poměrný útlum ve směru zatáčení (viskózní) [1]
155 - %
156 - b_theta=2*ksi_theta*...    % koeficient viskózního tlumení ve směru
157 -           Jy*Omega_theta;% klopení [N*m*s/rad]
158 - b_psi=2*ksi_psi*Jz*...    % koeficient viskózního tlumení ve směru
159 -           Omega_psi;%     zatáčení [N*m*s/rad]
160 - %
161 - a=1.045;                   % délka vyložení (od středu vrtule k uchycení
162 - %                             motoru) [m]
163 - %
164 - %=====
165 - %                               VÝPOČET AERODYNAMICKÝCH KOEFICIENTŮ                               %
166 - %=====
167 - %

```

```

168 % vektor lokálních redukovaných frekvencí jednotlivých řezů listu [1]
169 %
170 kp_vektor=c_vektor./(2*R*sqrt(my^2+eta_vektor.^2));
171 %
172 % vektor složek Theodorsenovy funkce reprezentujících část "ve fázi"
173 % (opět pro každý řez)
174 %
175 F_vektor=(besselj(1,kp_vektor).*(besselj(1,kp_vektor)+...
176     bessely(0,kp_vektor))+bessely(1,kp_vektor).*...
177     (bessely(1,kp_vektor)-besselj(0,kp_vektor))./...
178     (((besselj(1,kp_vektor)+bessely(0,kp_vektor)).^2)+...
179     ((bessely(1,kp_vektor)-besselj(0,kp_vektor)).^2)));
180 %
181 % vektor složek Theodorsenovy funkce reprezentujících část "mimo fázi"
182 % (opět pro každý řez)
183 %
184 G_vektor=-((bessely(1,kp_vektor).*bessely(0,kp_vektor)+...
185     besselj(1,kp_vektor).*besselj(0,kp_vektor))./...
186     (((besselj(1,kp_vektor)+bessely(0,kp_vektor)).^2)+...
187     ((bessely(1,kp_vektor)-besselj(0,kp_vektor)).^2)));
188 %
189 % integrál funkce poměrné šířky [1]
190 %
191 pomocny_integral=trapz(eta_vektor,pomerny_c_vektor);
192 %
193 % štíhlost vrtule [1]
194 %
195 Ar=(R*(1-r0/R)^2)/(cr*pomocny_integral);
196 %
197 % pomocná funkce pro korekci nadzvukového obtékání
198 % (cut-off value of the compressible lift curve slope) [1]
199 %
200 M_fce=(Mach^2)*(1+(eta_vektor.^2)/(my^2));
201 %
202 a_fce=(1-(a_vektor/aM).^2);
203 %
204 for u=1:length(M_fce)
205
206     if M_fce(1,u) >= a_fce(1,u)
207
208         Mfce_final(1,u)=a_fce(1,u);
209
210     else Mfce_final(1,u)=M_fce(1,u);
211
212     end
213 end
214 %
215 % vektor hodnot funkce III1 v jednotlivých řezech
216 % (k integraci po poloměru vrtule)
217 %
218 III1_vektor=(a_vektor.*c_vektor.*F_vektor)./(((my^2)+(eta_vektor.^2)).^...
219     (0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^0.5)));
220 %
221 % vektor hodnot funkce JJ1 v jednotlivých řezech
222 % (k integraci po poloměru vrtule)
223 %
224 JJ1_vektor=(a_vektor.*c_vektor.*G_vektor)./(((my^2)+(eta_vektor.^2)).^...

```

```

225         (0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^0.5)));
226     %
227     % vektor hodnot funkce II2 v jednotlivých řezech
228     % (k integraci po poloměru vrtule)
229     %
230     II2_vektor=((eta_vektor.^2).*a_vektor.*c_vektor.*F_vektor)./...
231         (((my^2)+(eta_vektor.^2)).^0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^...
232         (0.5)));
233     %
234     % vektor hodnot funkce JJ2 v jednotlivých řezech
235     % (k integraci po poloměru vrtule)
236     %
237     JJ2_vektor=((eta_vektor.^2).*a_vektor.*c_vektor.*G_vektor)./...
238         (((my^2)+(eta_vektor.^2)).^0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^...
239         (0.5)));
240     %
241     % vektor hodnot funkce II3 v jednotlivých řezech
242     % (k integraci po poloměru vrtule)
243     %
244     II3_vektor=((eta_vektor.^4).*a_vektor.*c_vektor.*F_vektor)./...
245         (((my^2)+(eta_vektor.^2)).^0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^...
246         (0.5)));
247     %
248     % vektor hodnot funkce JJ3 v jednotlivých řezech
249     % (k integraci po poloměru vrtule)
250     %
251     JJ3_vektor=((eta_vektor.^4).*a_vektor.*c_vektor.*G_vektor)./...
252         (((my^2)+(eta_vektor.^2)).^0.5)).*(2+Ar*((1-Mfce_final).^...
253         (0.5)));
254     %
255     % integrály hodnot funkcí II1 až JJ3 (metoda trapz)
256     %
257     II1_integral=trapz(eta_vektor,II1_vektor);
258     JJ1_integral=trapz(eta_vektor,JJ1_vektor);
259     II2_integral=trapz(eta_vektor,II2_vektor);
260     JJ2_integral=trapz(eta_vektor,JJ2_vektor);
261     II3_integral=trapz(eta_vektor,II3_vektor);
262     JJ3_integral=trapz(eta_vektor,JJ3_vektor);
263     %
264     % integrály vrtulových listů I1 až J3
265     %
266     I1=(Nb/4)*(1/(2*pi))*(my^2)*Ar*II1_integral/cr;
267     J1=(Nb/4)*(1/(2*pi))*(my^2)*Ar*JJ1_integral/cr;
268     I2=(Nb/4)*(1/(2*pi))*my*Ar*II2_integral/cr;
269     J2=(Nb/4)*(1/(2*pi))*my*Ar*JJ2_integral/cr;
270     I3=(Nb/4)*(1/(2*pi))*Ar*II3_integral/cr;
271     J3=(Nb/4)*(1/(2*pi))*Ar*JJ3_integral/cr;
272     %
273     % hodnoty aerodynamických koeficientů v závislosti na rychlosti letu
274     %
275     c_ztheta=-I1*4*Big_omega*cr/v;
276     c_zq=J2*4*Big_omega*cr/v;
277     c_mtheta=-J2*2*Big_omega*cr/v;
278     c_mq=-I3*2*Big_omega*cr/v;
279     c_ytheta=-J1*4*Big_omega*cr/v;
280     c_yq=-I2*4*Big_omega*cr/v;
281     c_ntheta=-I2*2*Big_omega*cr/v;

```

```

282 - c_nq=-J3*2*Big_omega*cr/v;
283 %
284 %=====
285 %                               VÝPOČET MATIC A ŘEŠENÍ ROVNICE FLUTTERU                               %
286 %=====
287 %
288 - m11=Jy;                               % prvky matice hmotnosti [kg*m2]
289 - m12=0;
290 - m21=0;
291 - m22=Jz;
292 %
293 - M=[m11 m12                               % matice hmotnosti
294     m21 m22];
295 %
296 - g11=0;                               % prvky gyroskopické matice [kg*m2/s]
297 - g12=Jx*Big_omega;
298 - g21=-g12;
299 - g22=0;
300 %
301 - G=[g11 g12                               % gyroskopická matice
302     g21 g22];
303 %
304 - k11=K_theta;                           % prvky matice tuhosti [N*m/rad]
305 - k12=0;
306 - k21=0;
307 - k22=K_psi;
308 %
309 - K=[k11 k12
310     k21 k22];                               % matice tuhosti
311 %
312 %                               % matice tuhosti s implementací
313 %                               konstrukčního tlumení (komplexní
314 %                               forma tuhosti)
315 %
316 - K_s_tlumenim=[(1+li*gamma_theta)*k11 k12
317                k21 (1+li*gamma_psi)*k22];
318 %
319 - d11=b_theta;                           % prvky matice viskózního tlumení
320 - d12=0;%                               [N*m*s/rad]
321 - d21=0;
322 - d22=b_psi;
323 %
324 - D=[d11 d12
325     d21 d22];                               % matice viskózního tlumení
326 %
327 %                               % prvky matice aerodynamického
328 %                               tlumení [1]
329 %
330 - da11=(a/Dp)*c_mtheta-0.5*c_mq-((a^2)/(Dp^2))*c_ztheta+(a/(2*Dp))*c_zq;
331 - da12=-(a/Dp)*c_ntheta+0.5*c_nq-((a^2)/(Dp^2))*c_ytheta+0.5*(a/Dp)*c_yq;
332 - da21=-da12;
333 - da22=da11;
334 %
335 - DA=[da11 da12                               % matice aerodynamického tlumení
336     da21 da22];
337 %
338 %                               % prvky matice aerodynamické tuhosti[1]

```

```

339 %
340 - ka11=(a/Dp)*c_ztheta-c_mtheta;
341 - ka12=c_ntheta+(a/Dp)*c_ytheta;
342 - ka21=-ka12;
343 - ka22=ka11;
344 %
345 - KA=[ka11 ka12 % matice aerodynamické tuhosti
346 - ka21 ka22];
347 %
348 % Převod na náhradní soustavu + výpočet matice vlastních čísel/vlastních
349 % vektorů pro všechny rychlosti letu
350 %
351 - M_vlnka=M; % celková matice hmotnosti
352 %
353 %
354 - DA_roznasobena=q*Fp*((Dp^2)/v)*DA;
355 %
356 - KA_roznasobena=q*Fp*Dp*KA;
357 %
358 - if viskozni_tlumeni==0
359 - %
360 - D_vlnka=G+DA_roznasobena; % celková matice tlumení
361 - %
362 - K_vlnka=K+KA_roznasobena; % celková matice tuhosti
363 - %
364 - elseif viskozni_tlumeni==1
365 - %
366 - D_vlnka=D+G+DA_roznasobena; % celková matice tlumení
367 - %
368 - K_vlnka=K+KA_roznasobena; % celková matice tuhosti
369 - %
370 - else
371 - error('Nastavení modelu tlumení na začátku skriptu je nesprávné.')
372 - end
373 %
374 % % náhradní soustava - matice flutteru
375 %
376 - J=[zeros(2,2) eye(2,2)
377 - M_vlnka\ -K_vlnka M_vlnka\ -D_vlnka];
378 %
379 % % Matice vlastních čísel pro hodnoty
380 % % frekvencí ve vertikálním směru
381 %
382 - EIG_matrix(n,:)=eig(J);
383 %
384 - n=n+1;
385 %
386 - end
387 %
388 - EIG_matrix2=EIG_matrix; % třídění vlastních čísel - vynulování
389 - EIG_matrix2(imag(EIG_matrix2)<=0)=0; % reálných hodnot příslušných statické
390 - cols_with_all_zeros=... % divergenci a fyzikálně nemožným
391 - find(all(EIG_matrix2==0)); % módům)
392 %
393 % % odstranění sloupců po fyzikálně
394 % % nevýznamných módech a seřazení
395 % % dopředného a zpětného módu)

```

```

396 %
397 EIG_matrix2(:,cols_with_all_zeros)=[];
398 EIG_matrix_final=sort(EIG_matrix2,2,'descend');
399 %
400 % (vymazání stabilního - dopředného -
401 % módu)
402 %
403 cols_with_all_real_negative=find(all(real(EIG_matrix_final)<0));
404 EIG_matrix_final(:,cols_with_all_real_negative)=[];
405 %
406 % Celková matice vlastních čísel
407 % odpovídajících zpětnému módu. Sloupce
408 % matice odpovídají vlastním
409 % frekvencím z intervalu psi
410 % řádky pak z intervalu theta.
411 %
412 EIG_matrix_all_psi_theta(:,o)=EIG_matrix_final;
413 %
414 o=o+1;
415 %
416 end
417 %
418 =====
419 % VYŠETŘENÍ STABILITNÍ MEZE %
420 =====
421 %
422 EIG_real=real(EIG_matrix_all_psi_theta);
423 %
424 reseni_psi=[];
425 reseni_theta=[];
426 %
427 for j=1:size(EIG_real,2)
428     for i=2:size(EIG_real,1)
429         if EIG_real(i,j) < 0 && EIG_real(i-1,j) > 0
430             reseni_theta = [reseni_theta,nn(i)];
431             reseni_psi = [reseni_psi,oo(j)];
432         end
433     end
434 end
435 %
436 reseni_psi2=[];
437 reseni_theta2=[];
438 %
439 for i=1:size(EIG_real,1)
440     for j=2:size(EIG_real,2)
441         if EIG_real(i,j) < 0 && EIG_real(i,j-1) > 0
442             reseni_theta2 = [reseni_theta2,nn(i)];
443             reseni_psi2 = [reseni_psi2,oo(j)];
444         end
445     end
446 end
447 %
448 % =====
449 % GRAF STABILITNÍ MEZE %
450 =====
451 %
452 %

```



```

453 %
454 - figure(1)
455 - hold on
456 - plot(reseni_psi,reseni_theta,'k')
457 - plot(reseni_psi2,reseni_theta2,'k')
458 - hold off
459 - axis equal
460 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
461 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
462 - xlim([0,15])
463 - ylim([0,15])
464 - txt = {'FLUTTER'};
465 - text(2,4,txt);
466 - txt = {'STABILITY'};
467 - text(7.5,9,txt);
468 %
469 % save('PomocnySoubor.mat','reseni_psi','reseni_theta','reseni_psi2',...
470 %      'reseni_theta2','-append')

```

Příloha 4: Program *PomocnyProgram.m*

```

1  %=====
2  %                               P O M O C N Ý   P R O G R A M                               %
3  %=====
4  %
5  close all
6  clear all
7  clc
8  nazev='Pomocný program';
9  %
10 %=====
11 %                               G R A F Y   S T A B I L I T N Í C H   M E Z Í   P R O   V A R I A C I   V S T U P N Í C H   P A R A M E T R U                               %
12 %=====
13 %
14 % Nejprve je třeba nahrát data získaná programem WhirlFlutter2.m
15 %
16 load('PomocnySoubor.mat');
17 %
18 %=====
19 %                               N A S T A V E N Í   V Ý S T U P U                               %
20 %=====
21 %
22 %                               % VŽDY JEN JEDNA HODNOTA MUŽE BÝT 1 (konflikt
23 %                               % proměnných)
24 %
25 mez_tlumeni=0;           % Nastav 1 pro závislost soustavy na vnitřním tlumení
26 %
27 mez_nesym_tlumeni=0;    % Nastav 1 pro závislost při nesymetrickém tlumení
28 %
29 mez_rychlost=0;        % Nastav 1 pro závislost soustavy na rychlosti letu
30 %
31 mez_otacky=0;          % Nastav 1 pro závislost soustavy na otáčkách vrtule
32 %
33 mez_gyroskop=0;        % Nastav 1 pro závislost soustavy na polárním momentu
34 %
35 mez_mom_setrvac_yz=0;% Nastav 1 pro závislost při nesymetrických mom. Jy,z
36 %
37 mez_nesym_mom_setr=0;% Nastav 1 pro závislost soustavy na Jy,z (setr. mom.)
38 %
39 mez_delka_vyloz=0;     % Nastav 1 pro závislost soustavy na délce vyložení
40 %
41 mez_vyska_letu=0;     % Nastav 1 pro závislost soustavy na výšce letu
42 %
43 mez_vztlak_cara=0;    % Nastav 1 pro závislost soustavy na  $c_y^{\alpha}$ 
44 %
45 %=====
46 %                               S T A B I L I T N Í   M E Z   T L U M E N Á   V S . N E T L U M E N Á   S O U S T A V A                               %
47 %=====
48 %
49 if mez_tlumeni==1
50 x=5:0.1:9.7;
51 y=x;
52 figure(1)
53 hold on

```

```

54 - p1=plot(reseni_psi_a,reseni_theta_a,'k','LineWidth',1);
55 - p2=plot(reseni_psi_2a,reseni_theta_2a,'k','LineWidth',1);
56 - p3=plot(reseni_psi_b,reseni_theta_b,'r','LineWidth',1);
57 - p4=plot(reseni_psi_2b,reseni_theta_2b,'r','LineWidth',1);
58 - p5=plot(reseni_psi_c,reseni_theta_c,'b','LineWidth',1);
59 - p6=plot(reseni_psi_2c,reseni_theta_2c,'b','LineWidth',1);
60 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
61 - hold off
62 - axis equal
63 - title('Vliv symetrického vnitřního tlumení')
64 - legend([p1 p3 p5],{'\xi_{\Theta,\Psi}=0.00 [1]',...
65 -                 '\xi_{\Theta,\Psi}=0.01 [1]',...
66 -                 '\xi_{\Theta,\Psi}=0.02 [1]',...
67 -                 'Location','northeast'})
68 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
69 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
70 - xlim([0,15])
71 - ylim([0,15])
72 - txt = {'FLUTTER'};
73 - text(2,3.5,txt);
74 - txt = {'STABILITY'};
75 - text(8.5,10.5,txt);
76 - end
77 - %
78 - %=====
79 - %                STABILITNÍ MEZ NESYMETRICKÉ TLUMENÍ
80 - %=====
81 - %
82 - if mez_nesym_tlumeni==1
83 - x=5.5:0.1:7.8;
84 - y=x;
85 - figure(1)
86 - hold on
87 - p1=plot(reseni_psi_q,reseni_theta_q,'k','LineWidth',1);
88 - p2=plot(reseni_psi_2q,reseni_theta_2q,'k','LineWidth',1);
89 - p3=plot(reseni_psi_b,reseni_theta_b,'r','LineWidth',1);
90 - p4=plot(reseni_psi_2b,reseni_theta_2b,'r','LineWidth',1);
91 - p5=plot(reseni_psi_r,reseni_theta_r,'b','LineWidth',1);
92 - p6=plot(reseni_psi_2r,reseni_theta_2r,'b','LineWidth',1);
93 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
94 - hold off
95 - axis equal
96 - title('Vliv nesymetrického vnitřního tlumení')
97 - legend([p1 p3 p5],{'\xi_{\Theta}=0.00 \xi_{\Psi}=0.02 [1]',...
98 -                 '\xi_{\Theta}=0.01 \xi_{\Psi}=0.01 [1]',...
99 -                 '\xi_{\Theta}=0.02 \xi_{\Psi}=0.00 [1]',...
100 -                 'Location','northeast'})
101 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
102 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
103 - xlim([0,15])
104 - ylim([0,15])
105 - txt = {'FLUTTER'};
106 - text(2,3.5,txt);
107 - txt = {'STABILITY'};
108 - text(7.5,9,txt);
109 - end
110 - %

```

```

111 %=====
112 %                               STABILITNÍ MEZ PROMĚNNÁ RYCHLOST LETU                               %
113 %=====
114 %
115 - if mez_rychlost==1
116 - x=3.5:0.1:8.8;
117 - y=x;
118 - figure(2)
119 - hold on
120 - p1=plot(reseni_psid,reseni_thetad,'k','LineWidth',1);
121 - p2=plot(reseni_psi2d,reseni_theta2d,'k','LineWidth',1);
122 - p3=plot(reseni_psi2b,reseni_theta2b,'r','LineWidth',1);
123 - p4=plot(reseni_psi2e,reseni_theta2e,'b','LineWidth',1);
124 - p5=plot(reseni_psi2f,reseni_theta2f,'k','LineWidth',1);
125 - p6=plot(reseni_psi2g,reseni_theta2g,'b','LineWidth',1);
126 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
127 - hold off
128 - axis equal
129 - title('Vliv rychlosti letu')
130 - legend([p1 p3 p5],{'v_\infty=200 [m/s]','v_\infty=137.5 [m/s]',...
131 -                 'v_\infty=75 [m/s]','Location','northeast'})
132 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
133 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
134 - xlim([0,15])
135 - ylim([0,15])
136 - txt = {'FLUTTER'};
137 - text(1.3,2.3,txt);
138 - txt = {'STABILITY'};
139 - text(9,10,txt);
140 - end
141 %
142 %=====
143 %                               STABILITNÍ MEZ PROMĚNNÉ OTÁČKY VRTULE                               %
144 %=====
145 %
146 - if mez_otacky==1
147 - x=4.3:0.1:8.3;
148 - y=x;
149 - figure(3)
150 - hold on
151 - p1=plot(reseni_psi2f,reseni_theta2f,'k','LineWidth',1);
152 - p2=plot(reseni_psi2g,reseni_theta2g,'b','LineWidth',1);
153 - p3=plot(reseni_psi2h,reseni_theta2h,'r','LineWidth',1);
154 - p4=plot(reseni_psi2i,reseni_theta2i,'b','LineWidth',1);
155 - p5=plot(reseni_psi2j,reseni_theta2j,'k','LineWidth',1);
156 - p6=plot(reseni_psi2k,reseni_theta2k,'b','LineWidth',1);
157 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
158 - hold off
159 - axis equal
160 - title('Vliv otáček vrtule')
161 - legend([p1 p3 p5],{'n=3000 [ot/min]','n=2080 [ot/min]',...
162 -                 'n=1160 [ot/min]','Location','northeast'})
163 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
164 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
165 - xlim([0,15])
166 - ylim([0,15])
167 - txt = {'FLUTTER'};

```

```

168 - text(1.5,3,txt);
169 - txt = {'STABILITY'};
170 - text(8.5,10,txt);
171 - end
172 - %
173 - %=====
174 - % STABILITNÍ MEZ GYROSKOPICKÉ MOMENTY (PROMĚNNÝ POLÁRNÍ MOMENT VRTULE Jx) %
175 - %=====
176 - %
177 - if mez_gyroskop==1
178 - x=5:0.1:8;
179 - y=x;
180 - figure(4)
181 - hold on
182 - p1=plot(reseni_psih,reseni_thetah,'k','LineWidth',1);
183 - p2=plot(reseni_psi2h,reseni_theta2h,'k','LineWidth',1);
184 - p3=plot(reseni_psiib,reseni_thetaib,'r','LineWidth',1);
185 - p4=plot(reseni_psi2ib,reseni_theta2ib,'r','LineWidth',1);
186 - p5=plot(reseni_psiii,reseni_thetaiii,'b','LineWidth',1);
187 - p6=plot(reseni_psi2iii,reseni_theta2iii,'b','LineWidth',1);
188 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
189 - hold off
190 - axis equal
191 - title('Vliv polárního momentu vrtule')
192 - legend([p1 p3 p5],{'J_x=25.5 [kgm^2]','J_x=20.5 [kgm^2]',...
193 -                 'J_x=15.5 [kgm^2]'},'Location','northeast')
194 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
195 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
196 - xlim([0,15])
197 - ylim([0,15])
198 - txt = {'FLUTTER'};
199 - text(2,3.5,txt);
200 - txt = {'STABILITY'};
201 - text(7,9,txt);
202 - end
203 - %
204 - %=====
205 - % STABILITNÍ MEZ MOMENTY SETRVAČNOSTI CELÉ SOUSTAVY (Jy,Jz) %
206 - %=====
207 - %
208 - if mez_mom_setrvac_yz==1
209 - x=5:0.1:8.3;
210 - y=x;
211 - figure(5)
212 - hold on
213 - p1=plot(reseni_psiij,reseni_thetaij,'k','LineWidth',1);
214 - p2=plot(reseni_psi2ij,reseni_theta2ij,'k','LineWidth',1);
215 - p3=plot(reseni_psiib,reseni_thetaib,'r','LineWidth',1);
216 - p4=plot(reseni_psi2ib,reseni_theta2ib,'r','LineWidth',1);
217 - p5=plot(reseni_psiik,reseni_thetaik,'b','LineWidth',1);
218 - p6=plot(reseni_psi2ik,reseni_theta2ik,'b','LineWidth',1);
219 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
220 - hold off
221 - axis equal
222 - title('Vliv momentů setrvačnosti celé soustavy')
223 - legend([p1 p3 p5],{'J_y=J_z=157 [kgm^2]','J_y=J_z=126 [kgm^2]',...
224 -                 'J_y=J_z=94 [kgm^2]'},'Location','northeast')

```

```

225 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
226 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
227 - xlim([0,15])
228 - ylim([0,15])
229 - txt = {'FLUTTER'};
230 - text(2,3.5,txt);
231 - txt = {'STABILITY'};
232 - text(7,9.5,txt);
233 - end
234 - %
235 - %=====
236 - %           STABILITNÍ MEZ NESYMETRICKÉ MOMENTY SETRVAČNOSTI (Jy,Jz)           %
237 - %=====
238 - %
239 - if mez_nesym_mom_setr==1
240 - x=5:0.1:8.3;
241 - y=x;
242 - figure(5)
243 - hold on
244 - p1=plot(reseni_psis,reseni_thetas,'k','LineWidth',1);
245 - p2=plot(reseni_psi2s,reseni_theta2s,'k','LineWidth',1);
246 - p3=plot(reseni_psi2b,reseni_theta2b,'r','LineWidth',1);
247 - p4=plot(reseni_psi2b,reseni_theta2b,'r','LineWidth',1);
248 - p5=plot(reseni_psi2t,reseni_theta2t,'b','LineWidth',1);
249 - p6=plot(reseni_psi2t,reseni_theta2t,'b','LineWidth',1);
250 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
251 - hold off
252 - axis equal
253 - title('Vliv nesymetrických momentů setrvačnosti')
254 - legend([p1 p3 p5],{'Jy=157 Jz=94 [kgm2}','Jy=126 Jz=126 [kgm2'],'...
255 -           'Jy=94 Jz=157 [kgm2'],'Location','northeast')
256 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
257 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
258 - xlim([0,15])
259 - ylim([0,15])
260 - txt = {'FLUTTER'};
261 - text(2,3.5,txt);
262 - txt = {'STABILITY'};
263 - text(7,9.5,txt);
264 - end
265 - %
266 - %=====
267 - %           STABILITNÍ MEZ PROMĚNNÁ DÉLKA VYLOŽENÍ (a)           %
268 - %=====
269 - %
270 - if mez_delka_vyloz==1
271 - x=5:0.1:8.3;
272 - y=x;
273 - figure(6)
274 - hold on
275 - p1=plot(reseni_psi1,reseni_theta1,'k','LineWidth',1);
276 - p2=plot(reseni_psi2l,reseni_theta2l,'k','LineWidth',1);
277 - p3=plot(reseni_psi2b,reseni_theta2b,'r','LineWidth',1);
278 - p4=plot(reseni_psi2b,reseni_theta2b,'r','LineWidth',1);
279 - p5=plot(reseni_psi2m,reseni_theta2m,'b','LineWidth',1);
280 - p6=plot(reseni_psi2m,reseni_theta2m,'b','LineWidth',1);
281 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);

```

```

281 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
282 - hold off
283 - axis equal
284 - title('Vliv délky vyložení')
285 - legend([p1 p3 p5],{'a=1.3 [m]','a=1.05 [m]',...
286 - 'a=0.8 [m]'},'Location','northeast')
287 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
288 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
289 - xlim([0,15])
290 - ylim([0,15])
291 - txt = {'FLUTTER'};
292 - text(2,3.5,txt);
293 - txt = {'STABILITY'};
294 - text(8.5,10,txt);
295 - end
296 - %
297 - %=====
298 - % STABILITNÍ MEZ PROMĚNNÁ VÝŠKA LETU %
299 - %=====
300 - %
301 - if mez_vyska_letu==1
302 - x=4.5:0.1:7.5;
303 - y=x;
304 - figure(7)
305 - hold on
306 - p1=plot(reseni_psin,reseni_thetan,'k','LineWidth',1);
307 - p2=plot(reseni_psi2n,reseni_theta2n,'k','LineWidth',1);
308 - p3=plot(reseni_psi2b,reseni_theta2b,'r','LineWidth',1);
309 - p4=plot(reseni_psi2b,reseni_theta2b,'r','LineWidth',1);
310 - p5=plot(reseni_psi2o,reseni_theta2o,'b','LineWidth',1);
311 - p6=plot(reseni_psi2o,reseni_theta2o,'b','LineWidth',1);
312 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
313 - hold off
314 - axis equal
315 - title('Vliv výšky letu')
316 - legend([p3 p1 p5],{'H=0 [m]','H=4000 [m]',...
317 - 'H=8000 [m]'},'Location','northeast')
318 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
319 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
320 - xlim([0,15])
321 - ylim([0,15])
322 - txt = {'FLUTTER'};
323 - text(1.9,3.5,txt);
324 - txt = {'STABILITY'};
325 - text(8.5,10,txt);
326 - end
327 - %
328 - %=====
329 - % STABILITNÍ MEZ PRO STOUPÁNÍ VZTLAKOVÉ ČÁRY 2pí %
330 - %=====
331 - %
332 - if mez_vztlak_cara==1
333 - x=5.5:0.1:7.5;
334 - y=x;
335 - figure(8)
336 - hold on
337 - p1=plot(reseni_psi2p,reseni_theta2p,'k','LineWidth',1);
338 - p2=plot(reseni_psi2p,reseni_theta2p,'k','LineWidth',1);

```

```

339 - p3=plot(reseni_psib,reseni_thetab,'r','LineWidth',1);
340 - p4=plot(reseni_psi2b,reseni_theta2b,'r','LineWidth',1);
341 - p7=plot(x,y,'--','Color',[0.80 0.80 0.80],'LineWidth',0.5);
342 - hold off
343 - axis equal
344 - title('Vliv stoupání vztlakové čáry')
345 - legend([p1 p3],{'c_y^{\alpha}=2\pi [1/rad]',...
346 -               'c_y^{\alpha}=c_y^{\alpha} real [1/rad]'},...
347 -               'Location','northeast')
348 - xlabel('f_{\Psi} [Hz]')
349 - ylabel('f_{\Theta} [Hz]')
350 - xlim([0,15])
351 - ylim([0,15])
352 - txt = {'FLUTTER'};
353 - text(2.2,3.7,txt);
354 - txt = {'STABILITY'};
355 - text(8.5,10,txt);
356 - end
357 - %
358
359

```