

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Katedra mechaniky



Stabilitní analýza pružnoplastického prutu

Bakalářská práce

Michal Šmejkal

Vedoucí práce: prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Konzultant: Ing. Martin Horák, Ph.D.

Praha, 2019



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Šmejkal	Jméno: Michal	Osobní číslo: 458848
Zadávací katedra: Katedra mechaniky		
Studijní program: Stavební inženýrství		
Studijní obor: Konstrukce a dopravní stavby		

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce: Stabilitní analýza pružnoplastického prutu

Název bakalářské práce anglicky: Stability analysis of an elastoplastic beam

Pokyny pro vypracování:

Popište chování tlačného prutu s počáteční imperfekcí, vyrobeného z ideálně pružnoplastického materiálu, případně pružnoplastického materiálu se zpevněním. Použijte vhodnou kombinaci analytických a numerických metod. Porovnejte výsledky získané analytickými odhady s řešením nelineární diferenciální rovnice pro prut a s výsledky výpočtu metodou konečných prvků.

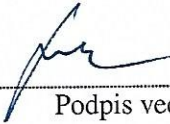
Seznam doporučené literatury:

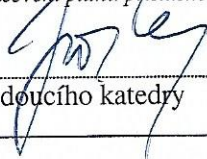
Stability of structures, Bazant, Cedolin
Dokumentace programu OOFEM, www.oofem.org

Jméno vedoucího bakalářské práce: prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Datum zadání bakalářské práce: 1.3.2019

Termín odevzdání bakalářské práce: 26.5.2019
Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku

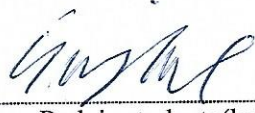
 Podpis vedoucího práce

 Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v bakalářské práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.

1.3.2019

 Podpis studenta(ky)

Datum převzetí zadání

Prohlášení

Tímto prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil pouze uvedené podklady.

Nemám závažný důvod nesouhlasit s použitím této školní práce ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze, 2019

.....
Michal Šmejkal

Poděkování

Chtěl bych poděkovat především vedoucímu práce prof. Ing. Milanu Jiráskovi, DrSc. za výborné rady a vstřícnost, dále mému konzultantovi Ing. Martinu Horákovi, Ph.D. za velkou ochotu a pomoc s programem OOFEM a také Ing. Janu Veseckému za ochotu a poskytnutá data z experimentů. V neposlední řadě patří vděk mým rodičům za skvělé podmínky ke studiu, které díky nim mám.

Michal Šmejkal

Název práce:

Stabilitní analýza pružnoplastického prutu

Autor: Michal Šmejkal

Obor: Konstrukce a dopravní stavby

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Konzultant: Ing. Martin Horák, Ph.D.

Abstrakt:

Práce je zaměřena na stabilitní výpočty tlačného prutu s uvážením pružnoplastického chování materiálu. Řešení příslušné diferenciální rovnice se hledá pomocí numerických metod. Práce se zabývá především metodou střelby a její aplikací na zmíněný problém. Hlavní náplní je vytvoření algoritmu v programu MATLAB, který pro danou úroveň zatížení určí funkci průhybu prutu a dále hodnotu maximálního zatížení, které je prut schopen přenést. Nejprve se zkoumá případ prostě podepřeného tlačného prutu vyrobeného z ideálně pružnoplastického materiálu. Je popsán princip metody a je provedena parametrická studie. Výsledky jsou porovnány s výpočtem metodou konečných prvků. Dále je algoritmus rozšířen i pro materiál s lineárním zpevněním a pro staticky neurčitý případ podepření. V závěru jsou porovnány výsledky výpočtu tlačné trubky se styčnickovými plechy s experimenty.

Klíčová slova: vzpěr, stabilita, plasticita, metoda konečných diferencí, metoda konečných prvků, metoda střelby

Title:

Stability analysis of an elastoplastic beam

Author: Michal Šmejkal

Field of study: Structural and Transportation Engineering

Thesis type: Bachelor Thesis

Supervisor: prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Consultant: Ing. Martin Horák, Ph.D.

Abstract:

The thesis is focused on stability analysis of compressed beams, taking into account elastoplastic material behavior. The solution of the corresponding differential equation is sought by numerical methods. The thesis deals in particular with the shooting method and its application to the considered problem. The main task was to develop an algorithm, which will for a given load level determine the deflection function and the collapse load, and implement this algorithm in MATLAB. Firstly, the case of a simply supported beam and perfectly elastoplastic material is examined. The principle of the method is described and a parametric study is performed. The results are compared with finite element computations. In addition, the algorithm is generalized for materials with linear hardening and for statically indeterminate cases. In conclusion, the results of calculations of a compressed tube with gusset plates are compared with experiments.

Keywords: buckling, stability, plasticity, finite difference method,
finite element method, shooting method

Obsah

1	Úvod do stability pružnoplastického prutu	23
1.1	Stabilitní a zatěžovací křivka	23
1.2	Odhady chování pro obdélníkový průřez	32
2	Řešení problému metodou střelby	37
2.1	Princip řešení	37
2.2	Metoda střelby a diskretizace	38
2.3	Vyjádření ohybového momentu	40
2.4	Algoritmus	49
3	Příklad	53
3.1	Metoda konečných prvků	53
3.2	Výsledky vypočítané metodou střelby	60
3.3	Vliv parametrů	62
4	Model se zpevněním	71
4.1	Vztahy mezi ohybovým momentem a křivostí	71
4.2	Příklad	77
5	Staticky neurčité případy	81
5.1	Diferenciální rovnice a pružné řešení	81
5.2	Úprava vztahů mezi momentem a křivostí	83
5.3	Diskretizace a metoda střelby	85
5.4	Alternativní přístup	90
6	Stabilita styčnickových plechů	93
6.1	Počáteční excentricity a výrobní imperfekce	93
6.2	Úpravy algoritmu	94
6.3	Řešení a výsledky	96

Seznam obrázků

1.1	Pracovní diagram pro ideálně pružnoplastický model	23
1.2	Schéma problému a ideální průřez	24
1.3	Zatěžovací křivka (vztah mezi P/P_{cr} a průhybem uprostřed prutu) a křivky vyjadřující vyčerpání únosnosti materiálu pro prvek s ideálním průřezem.	27
1.4	Zatěžovací křivka prvku s ideálním průřezem vyrobeného z materiálu, který má mez kluzu σ_0 menší než je kritické napětí σ_E (napětí při centrickém působení kritické síly)	30
1.5	Průhyb prutu po jeho délce po vytvoření plastického kloubu.	30
1.6	Stabilitní křivka pro prvek s ideálním průřezem pro různé počáteční excentricity	31
1.7	Interakční diagram pro mezní pružný stav	33
1.8	Interakční diagram pro mezní plastický stav	35
1.9	Graf závislosti $p = P/P_{cr}$ na poměrné štíhlosti Λ	36
2.1	Schéma problému	37
2.2	Diskretizace osy prutu	39
2.3	Deformovaný prut a souřadnicový systém	40
2.4	Rozložení napětí po průřezu v případě pružného chování	41
2.5	Rozložení napětí po průřezu pro případ, kdy plastizují pouze spodní vlákna	42
2.6	Rozložení napětí pro mezní pružný stav, kdy platí: $\kappa = \kappa_{el}$	44
2.7	Rozložení napětí pro stav, kdy tlačaná oblast plastizuje a napětí v tažených vláknech je právě rovno mezi kluzu, platí: $\kappa = \kappa_{ep}$	44
2.8	Rozložení napětí po průřezu pro případ, kdy plastizují jak horní tak spodní vlákna	46
2.9	Vztah ohybového momentu a tlakové síly (interakční diagram) a zanesené křivky pro mezní pružný stav, mezní plastický stav a stav, kdy platí, že $\kappa = \kappa_{ep}$	48
3.1	Schéma s využitím symetrie pro model v programu OOFEM	54
3.2	Porovnání analytického řešení s pružným řešením metodou konečných prvků pro tři různě husté sítě	55

3.3	Detail grafu na Obr. 3.2	55
3.4	Porovnání pružnoplastického řešení MKP pro různé sítě	56
3.5	Pružnoplastické řešení MKP pro síť 3 s význačnými body	57
3.6	Průběh napětí σ_x a naznačení deformovaného tvaru v různých zatěžovacích časech	58
3.7	Vykreslení normy tensoru plastické deformace v různých zatěžovacích časech	59
3.8	Závislost P/P_{cr} na průhybu uprostřed prutu určená metodou střelby	60
3.9	Porovnání pružnoplastického výpočtu podle MKP a metody střelby	61
3.10	Interakční diagram prostředního průřezu v průběhu zatěžování	61
3.11	Detail Obr. 3.9 v oblasti, kdy je dosaženo maximálního zatížení	62
3.12	Porovnání zatěžovacích křivek pro různě vysoké průřezy	63
3.13	Interakční diagram prostředního průřezu pro prvky, které se liší výškou průřezu	64
3.14	Porovnání zatěžovacích křivek pro různě dlouhé pruty	64
3.15	Interakční diagram prostředního průřezu pro prvky, které se liší délkou prutu	65
3.16	Porovnání zatěžovacích křivek pro prvky s různými počátečními výchylkami	65
3.17	Interakční diagram prostředního průřezu pro prvky, které se liší počáteční excentricitou	66
3.18	Závislost P_{max}/P_0 na počáteční excentricitě pro $P_{cr}/P_0 < 1$	67
3.19	Závislost P_{max}/P_0 na počáteční excentricitě pro $P_{cr}/P_0 > 1$	67
3.20	Závislost P_{max}/P_0 na poměrné štíhlosti Λ	68
3.21	Závislost P_{max}/P_{crit} na poměrné štíhlosti Λ a porovnání s odhady ze sekce 1.2	69
4.1	Bilineární pracovní diagram pro model se zpevněním	71
4.2	Rozložení napětí po průřezu pro materiál se zpevněním pro případ, kdy plastizují spodní vlákna	72
4.3	Rozložení napětí po průřezu pro materiál se zpevněním pro případ, kdy plastizují spodní i horní vlákna	74
4.4	Rozložení napětí pro stav, kdy $\kappa = \kappa_{ep}$, tlačaná oblast plastizuje a napětí v tažených vláknech je právě rovno mezi kluzu	75
4.5	Interakční diagram, křivka mezního pružného stavu a křivky pro stav, kdy je $\kappa = \kappa_{ep}$ pro různé E_t	76
4.6	Zatěžovací křivka pro materiál se zpevněním a pro ideálně pružnoplastický materiál	77
4.7	Detail zatěžovací křivky v oblasti maximálního zatížení	78
4.8	Interakční diagram prostředního průřezu pro materiál se zpevněním	79

<i>SEZNAM OBRÁZKŮ</i>	17
5.1 Schéma oboustranně vetknutého prutu	81
5.2 Porovnání pružnoplastického řešení podle metody střelby a MKP pro oboustranně vetknutý prut	92
6.1 Schéma a rozměry prutu, převzato z [1]	93
6.2 Znázornění excentricity vzniklé připojením styčnickového plechu na připojovací plech, převzato z [1]	94
6.3 Počáteční průhyb po délce prutu	95
6.4 Zatěžovací křivka tlačené trubky se styčnickovými plechy s před- pokladem lineárně pružného chování	97
6.5 Tvar vybočení prutu v případě lineárně pružného chování	97
6.6 Porovnání výsledků metody střelby s experimenty	98
6.7 Detail v oblasti dosažení maximálního zatížení	98
6.8 Funkce průhybu $\Delta w(x)$ v bodě dosažení maximálního zatížení P_{max}	99

Seznam tabulek

3.1	Hodnoty parametrů pro konkrétní příklad	53
3.2	Sítě konečných prvků	54
3.3	Konvergence k přesnému řešení	56
3.4	Porovnání výsledků podle programu OOFEM a podle metody střelby	62
4.1	Porovnání výsledků podle programu OOFEM a podle metody střelby pro materiál se zpevněním	78
5.1	Porovnání výsledků podle programu OOFEM a podle metody střelby pro oboustranně vetknutý prut	92
6.1	Materiálové a geometrické charakteristiky styčnickových plechů a trubky	96

Úvod

Kolaps konstrukce může být zapříčiněn mnohými jevy. Může dojít k vyčerpání únosnosti materiálu nebo pro štíhlé tlačené prvky může být kritická ztráta stability, která je ovlivněna geometrií prutu. V mnohých případech může být fatální právě kombinace obou zmíněných příčin. Obecně lze říci, že pro velmi štíhlý prut vyrobený z materiálu s vysokou mezí kluzu nebude mít vliv plasticity příliš velký význam, stabilitní výpočet podle pružnosti bude dostatečně přesný. Na druhou stranu o něco méně štíhlý prut vyrobený z horšího materiálu může vykazovat výrazně odlišné chování.

V dnešní době by se pro praktické účely provedl výpočet metodou konečných prvků (MKP) se zahrnutím geometrické nelinearity a použitím vhodného materiálového modelu. Je to však poměrně náročný výpočet. Aby byly výsledky přesné, je potřeba hustá síť prvků. Pro některé typy úloh je možné použít alternativní přístup, a to metodu konečných diferencí. Efektivitu výpočtu lze zvýšit využitím metody střelby, která převádí okrajovou úlohu na úlohu s počátečními podmínkami. Touto metodou se v práci zabývám, hlavní náplní bylo vytvoření algoritmu pro stabilitní analýzu pružnoplastického prutu. Všechny výpočty jsou současně kontrolovány konečně-prvkovým softwarem OOFEM.

Práce je strukturovaná do šesti kapitol. V první jsou zmíněny základní poznatky k tématu a očekávané změny v chování prvku oproti lineárně pružnému materiálu. Druhá kapitola je věnována popisu použité metody a vytvořeného algoritmu. Třetí kapitola je zaměřena na porovnání výsledků několika případů s řešením metodou konečných prvků a na parametrickou studii, tedy vyhodnocení vlivu různých geometrických parametrů na odezvu prutu. Čtvrtá kapitola se týká zobecnění výpočtu pro materiál s lineárním zpevněním, doposud byl uvažován ideálně pružnoplastický materiálový model. Až do čtvrté kapitoly je práce zaměřena na staticky určité případy podepření, teprve v páté kapitole je metoda rozšířena i pro staticky neurčité konstrukce. Na závěr je vyřešen tlačný prut skládající se z trubky a připojených styčnickových plechů. Výsledky jsou pak porovnány s experimenty, které byly provedeny v rámci diplomové práce Ing. Veseckého [1].

Ke studiu teoretických základů jsem využil zejména literaturu [2].

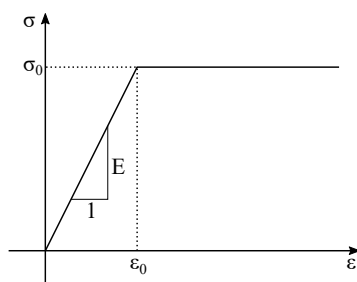
Kapitola 1

Úvod do stability pružnoplastického prutu

V prvních několika kapitolách bude práce zaměřena na případ prostě podepřeného prutu délky L , s počáteční excentricitou o maximální výchylce δ_0 . Tvar výchylky je dán rovnicí:

$$w_0(x) = \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.1)$$

Na konci prutu působí osová zatížení P , které se rovnoměrně zvětšuje. Prut je vyroben z homogenního, ideálně pružnoplastického materiálu s Youngovým modulem pružnosti E a mezí kluzu σ_0 . Pracovní diagram je vyobrazen na Obr. 1.1.

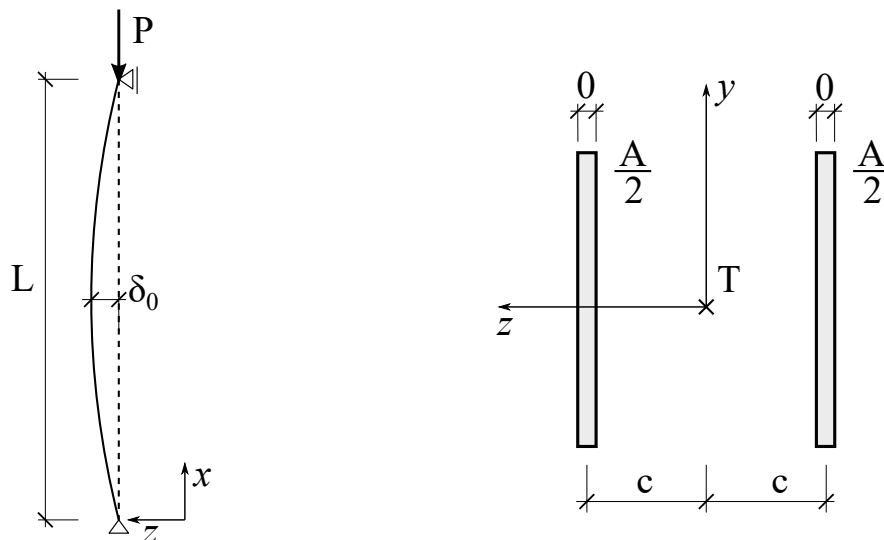


Obr. 1.1: Pracovní diagram pro ideálně pružnoplastický model

1.1 Stabilitní a zatěžovací křivka

Pro představu, jak změna materiálových vlastností ovlivní chování prvku při stabilitní analýze, bude názorně sestrojít odhad závislosti působícího zatížení na příčném posunu nejnamáhanějšího průřezu (zatěžovací křivka) a odhad

stabilitní křivky, neboli závislosti napětí od osového působení maximálního dosaženého zatížení na štíhlosti prutu. Pro jednoduchost budou nejdříve potřebné vztahy odvozeny pro tzv. *ideální průřez*. Schéma prutu a průřezu je znázorněno na Obr. 1.2. Jde vlastně o průřez tvaru I, pro který zanedbáváme příspěvek k vnitřním silám pocházející od napětí ve stojině. Navíc předpokládáme, že jakmile dosáhne napětí v jedné z pásnic meze kluzu σ_0 , tato pásnice okamžitě celá zplastizuje.



Obr. 1.2: Schéma problému a ideální průřez

Zpočátku zatěžování se bude prut chovat lineárně pružně. Diferenciální rovnice pro vzpěr prostě podepřeného prutu s počáteční excentricitou se určí z momentové podmínky rovnováhy. Zatížení působící na rameni daném funkcí průhybu $w(x)$ udává hodnotu externího momentu M_{ext} . Interní moment M_{int} bude pro lineárně pružný materiál přímo úměrný křivosti κ . Za předpokladu malých deformací a posunů a Navier-Bernoulliho hypotézy o zachování kolmosti a rovinnosti průřezu lze celkovou křivost κ_{def} vyjádřit jako

$$\kappa_{def} = -\frac{d^2w(x)}{dx^2}. \quad (1.2)$$

Interní moment bude dán rozdílem celkové křivosti a křivosti κ_0 způsobené počáteční výchylnou. Ta je dána výrazem:

$$\kappa_0 = -\frac{d^2w_0(x)}{dx^2} = \delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.3)$$

Moment M_{int} se pak zapíše následovně:

$$M_{int} = EI \left(-\frac{d^2w(x)}{dx^2} - \kappa_0(x) \right), \quad (1.4)$$

kde I je moment setrvačnosti vzhledem k ose y . Zapsáním rovnováhy momentů a následnými úpravami se získá výsledná diferenciální rovnice

$$M_{ext} = M_{int} \quad (1.5)$$

$$Pw(x) = -EI \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \kappa_0(x) \right) \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI}w(x) = -\kappa_0(x). \quad (1.7)$$

Řešení homogenní diferenciální rovnice

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI}w(x) = 0 \quad (1.8)$$

bude mít tvar

$$w_h(x) = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}x. \quad (1.9)$$

Uplatněním okrajových podmínek $w_h(0) = w_h(L) = 0$ se ukáže, že konstanta $C_2 = 0$. Z okrajové podmínky $w_h(L) = 0$ platí:

$$C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}L = 0. \quad (1.10)$$

Abyste existovalo netriviální řešení, musí platit, že

$$\sin \sqrt{\frac{P}{EI}}L = 0 \quad (1.11)$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi, \quad (1.12)$$

kde $n = 1, 2, 3, \dots$

Vyjádřením síly P z poslední rovnice se získá vzorec

$$P = \frac{nEI\pi^2}{L^2}, \quad (1.13)$$

který určuje hodnoty tlakové síly, pro které dojde k vybočení prutu. Vlastní tvary vybočení mají pak předpis

$$w_h(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (1.14)$$

Eulerovo kritické břemeno bude nejmenší síla, pro kterou prut vybočí, platí tedy, že $n = 1$ a $P_{cr} = EI\pi^2/L^2$. První vlastní tvar vybočení bude dán rovnicí

$$w_h(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.15)$$

C_1 je libovolná konstanta, je tedy určen pouze tvar vybočení, ale maximální výchylka může být jakákoli. Toto řešení je platné pro dokonale rovný prut bez imperfekce.

Pro prut s počáteční imperfekcí je třeba vyřešit i partikulární řešení rovnice (1.7). To bude hledáno ve tvaru

$$w_p(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.16)$$

Dosazením $w_p(x)$ do rovnice (1.7) se získá následující rovnost:

$$A \left(\frac{P}{EI} - \frac{\pi^2}{L^2} \right) \sin \frac{\pi x}{L} = -\delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.17)$$

Musí platit, že

$$A \left(\frac{P}{EI} - \frac{\pi^2}{L^2} \right) = -\delta_0 \frac{\pi^2}{L^2}. \quad (1.18)$$

Konstanta A je tedy dána vztahem

$$A = \delta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}. \quad (1.19)$$

Partikulární řešení se přepíše na

$$w_p(x) = \delta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.20)$$

Funkce $w_p(x)$ splňuje okrajové podmínky, neboť platí $w_p(0) = w_p(L) = 0$, a proto je to i skutečné řešení problému. Průhyb uprostřed prutu bude dán vzorcem:

$$w_p \left(\frac{L}{2} \right) = \delta_0 \frac{1}{1 - p}, \quad (1.21)$$

kde $p = P/P_{cr}$. Průhyb $w_p(L/2)$ bude dále značen jako w .

Vyjádřením napětí v tlačných vláknech stejného průřezu se dostane vztah

$$\sigma_{neg} = -\frac{P}{A} - \frac{M}{W} = -\frac{P}{A} - \frac{Pw}{2c \frac{A}{2}} = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{w}{c} \right), \quad (1.22)$$

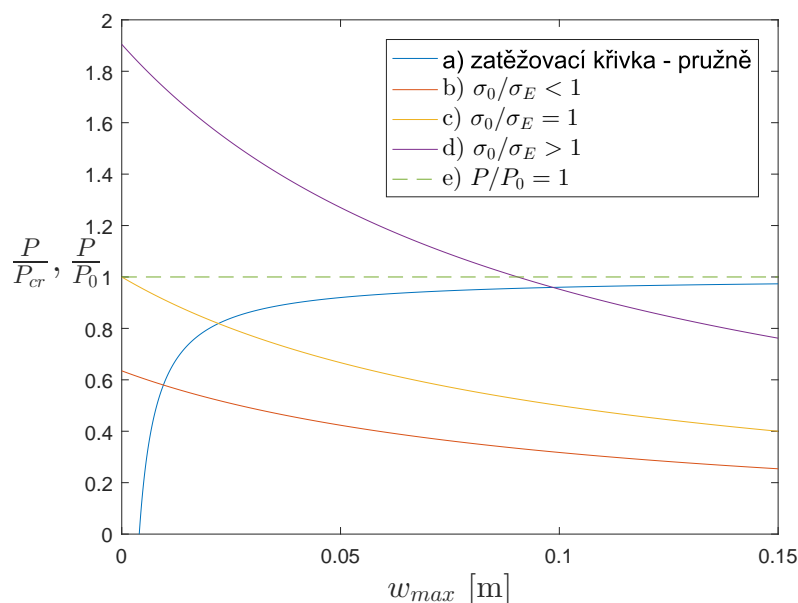
W je plastický průřezový modul, A je plocha průřezu a c je vzdálenost těžiště průřezu od středu pásnice, viz Obr. 1.2. V případě největšího namáhání dosáhne toto napětí meze kluzu v tlaku, platí tedy

$$\sigma_{neg} = -\sigma_0 = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{w}{c} \right). \quad (1.23)$$

Ze vztahu (1.23) lze bezrozměrnou sílu $p_0 = P/\sigma_0 A = P/P_0$ vyjádřit jako

$$p_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{w}{c}\right)}. \quad (1.24)$$

Veličina p_0 vyjadřuje míru namáhaní ve srovnání s průřezem úplně zplastizovaným v osovému tlaku, tedy za osového působení plastické síly $P_0 = \sigma_0 A$. Nyní je názorné sestavit graf ilustrující vztahy (1.21) a (1.24). Na Obr. 1.3 je zob-



Obr. 1.3: Zatěžovací křivka (vztah mezi P/P_{cr} a průhybem uprostřed prutu) a křivky vyjadřující vyčerpání únosnosti materiálu pro prvek s ideálním průřezem.

razena zatěžovací křivka pro pružný materiál a křivky vyjadřující vyčerpání únosnosti materiálu v závislosti na velikosti posunu uprostřed prutu, a to pro tři různé materiály. Ty se liší hodnotou meze kluzu σ_0 . Poměr σ_0/σ_E určuje vliv materiálu na stabilitu prvku. σ_E značí kritické napětí, tedy napětí v průřezu při centrickém působení kritické síly P_{cr} . Z grafu je patrné, že pro materiál typu b) bude mít plasticita velký dopad. Na druhou stranu pro prvek d) je průnik křivek v bodě, kde se zatížení blíží kritické síle, proto lze vliv chování materiálu proti pružnému stavu zanedbat.

Pro ideální průřez by zatěžovací zkouška probíhala následovně: Při zvětšující se síle by průhyb narůstal podle křivky a), dané předpisem (1.21). Jakmile by síla dosáhla hodnoty, kde se křivka protíná s materiálovou křivkou, průhyb by narůstal i za zmenšující se síly a byl by řízen rovnicí (1.24). V bodě, kde se

křivky protínají, průřez okamžitě přejde do mezního plastického stavu a dojde ke vzniku plastického kloubu. Ten bude lokalizovaný pouze do jednoho nejnamáhanějšího průřezu a zbytek prutu bude v pružném stavu. Toto chování by nastalo pouze pro ideální průřez, pro který je mezní pružný stav shodný s mezním plastickým stavem. Pro reálné průřezy bude plastická zóna rozšířena i do okolí nejnamáhanějšího průřezu.

Jakmile prostřední průřez zplastizuje, změní se okrajové podmínky dané diferenciální rovnice. Podmínka $w(0) = 0$ zůstává nezměněná, avšak druhá podmínka bude nyní předepsaný průhyb prostředního průřezu, který je potřeba vyjádřit z rovnice (1.24). Platí tedy

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{p_0} - 1\right) c. \quad (1.25)$$

Partikulární řešení $w_p(x)$ z rovnice (1.20) je stále platné, avšak nyní už nesplňuje okrajové podmínky a skutečné řešení bude součtem partikulárního řešení a řešení homogenní rovnice: $w_c(x) = w_p(x) + w_h(x)$, přitom $w_h(x)$ je v obecném tvaru dané rovnicí (1.9). Celkové řešení má tedy tvar

$$w_c(x) = \delta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \sin \frac{\pi x}{L} + C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x. \quad (1.26)$$

Konstanty C_1 a C_2 se určí z okrajových podmínek. Z okrajové podmínky $w_c(0) = 0$ plyne $C_2 = 0$. Z druhé okrajové podmínky

$$\delta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} + C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \left(\frac{1}{p_0} - 1\right) c \quad (1.27)$$

se vyjádří konstanta C_1 jako

$$C_1 = \frac{\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) c - \delta_0 \frac{1}{1 - p}}{\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}} \quad (1.28)$$

a skutečné řešení problému je:

$$w_c(x) = \delta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) c - \delta_0 \frac{1}{1 - p}}{\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}} \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x. \quad (1.29)$$

Toto řešení je platné pro $x \in \langle 0, L/2 \rangle$, nicméně funkce $w_c(x)$ je symetrická podle osy rovnoběžné s osou z vedené v polovině délky prutu.

Bude užitečné určit hodnotu zatížení P_{mez} , ve kterém se protíná zatěžovací křivka s materiálovou. To se určí z rovnosti vztahů (1.25) a (1.21)

$$\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) c = \delta_0 \frac{1}{1-p} \quad (1.30)$$

$$P^2 - P \left(P_0 + P_{cr} + \frac{\delta_0}{c} P_{cr} \right) + P_0 P_{cr} = 0 \quad (1.31)$$

$$P_{mez,1,2} = \frac{P_0 + P_{cr} + \frac{\delta_0}{c} P_{cr}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(P_0 + P_{cr} + \frac{\delta_0}{c} P_{cr} \right)^2}{4} - P_0 P_{cr}}. \quad (1.32)$$

Zajímá nás nižší hodnota z těchto dvou kořenů, bude tedy použito znaménko mínus. Nyní je možné kompletně popsat chování prutu v průběhu zatěžování. Pro rostoucí zatížení bude průhyb prutu popsán výrazem

$$\delta_0 \frac{1}{1-p} \sin \frac{\pi x}{L},$$

celý prut se bude chovat lineárně pružně. Jakmile dosáhne síla hodnoty P_{mez} , prostřední průřez okamžitě zplastizuje a vznikne plastický kloub. Průhyb poloviny prutu bude popsán rovnicí (1.29) a bude narůstat za zmenšující se síly. Na Obr. 1.4 je znázorněna zatěžovací křivka prutu, pro který je mez kluzu σ_0 menší než kritické napětí σ_E . Na Obr. 1.5 je pak naznačen průhyb prutu po jeho délce po vzniku plastického kloubu. Je vidět, že když je $P = P_{mez}$, právě vznikl plastický kloub, ale průhyb je stále hladká funkce. Pro větší průhyby a menší síly je v prostředním průřezu dosaženo nekonečné křivosti.

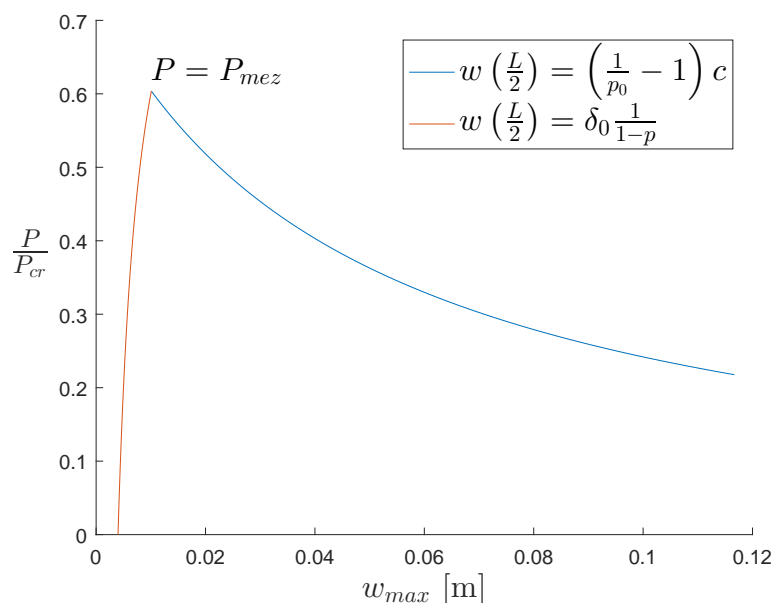
K rozlišení, zda bude mít materiálové chování velký vliv na kolaps prvku, dobře poslouží stabilitní křivka. Ta vyjadřuje závislost mezi napětím při centrickém působení maximálního zatížení a štíhlostí prvku. Z teorie pružnosti je stabilitní křivka pro prostě podepřený prvek popsána vztahem

$$\sigma_E = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{EI\pi^2}{AL^2} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2}, \quad (1.33)$$

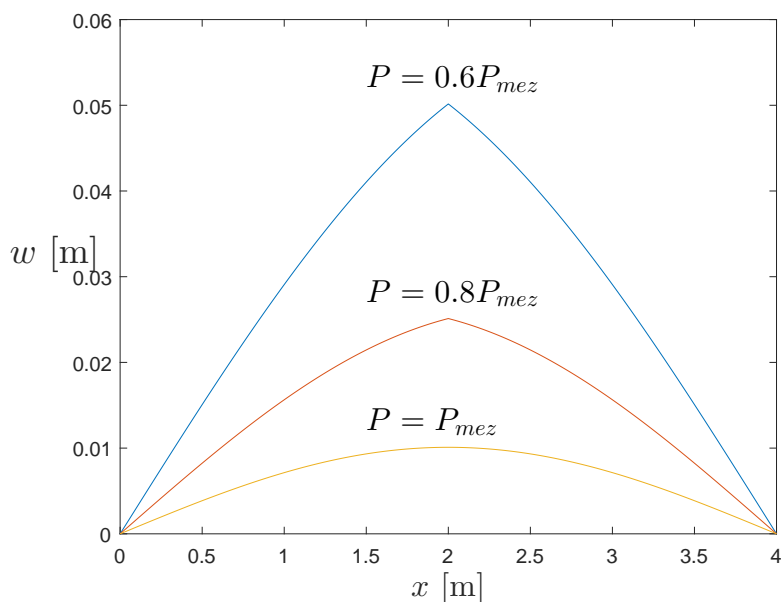
kde

$$\lambda = \frac{L}{d} = \frac{L}{\sqrt{\frac{I}{A}}} \quad (1.34)$$

je štíhlost prutu, tedy poměr mezi vzpěrnou délkou L a poloměrem setrvačnosti průřezu (minimálním). Na Obr. 1.6 jsou vyobrazeny stabilitní křivky pro několik různých prvků. Pro případ lineárně pružného chování by závislost maximálního zatížení na štíhlosti byla podle křivky e). Kdyby se materiál změnil

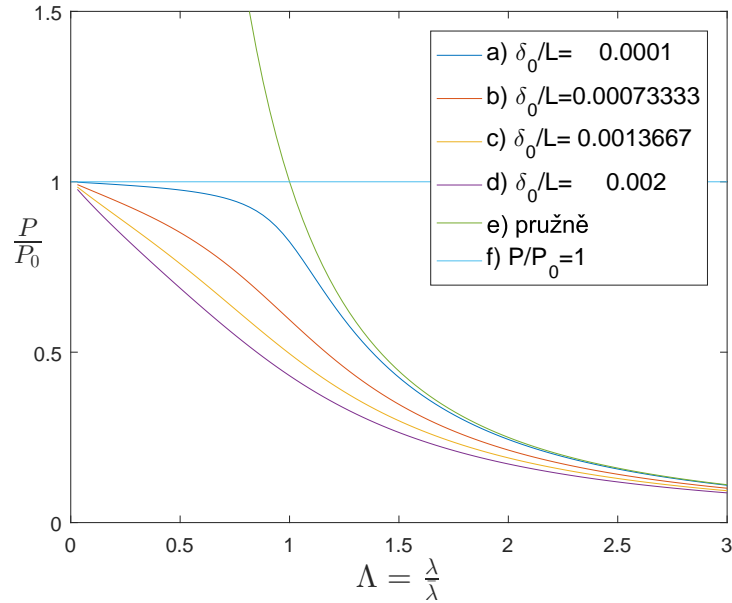


Obr. 1.4: Zatěžovací křivka prvku s ideálním průřezem vyrobeného z materiálu, který má mez kluzu σ_0 menší než je kritické napětí σ_E (napětí při centrickém působení kritické síly)



Obr. 1.5: Průhyb prutu po jeho délce po vytvoření plastického kloubu.

na ideálně pružnoplastický, avšak prvek by byl dokonale přímý bez excentricity, v nízkých štíhlostech by napětí bylo omezeno mezí kluzu a od hodnoty



Obr. 1.6: Stabilitní křivka pro prvek s ideálním průřezem pro různé počáteční excentricity

$\lambda = 0$ až do hodnoty, kde se protínají křivky e) a f), by byl vztah řízen křivkou f). Pro větší štíhlosti by se pak řídil předpisem funkce e). Hodnota štíhlosti, kde se protínají křivky e) a f), se nazývá mezní štíhlost $\bar{\lambda}$. Dopočítá se z rovnosti kritického napětí a meze kluzu, tedy na základě vztahu

$$\sigma_E = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} = \sigma_0 \quad (1.35)$$

z něhož plyne výraz pro mezní štíhlost

$$\bar{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad (1.36)$$

kde $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ je mezní pružná deformace.

Nyní je cílem získat popis stabilitní křivky pro prut s počáteční excentricitou. Budou uplatněny následující vzorce, aby výsledný vztah obsahoval pokud možno pouze bezrozměrné veličiny:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \quad (1.37)$$

$$p_0 = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\sigma}{\sigma_E} \frac{\sigma_E}{\sigma_0} = p \frac{\sigma_E}{\sigma_0} \quad (1.38)$$

$$\frac{\sigma_E}{\sigma_0} = \frac{\frac{E\pi^2}{\lambda^2}}{\frac{E\pi^2}{\bar{\lambda}^2}} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)^2 \quad (1.39)$$

$$p_0 = p \frac{\sigma_E}{\sigma_0} = p \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)^2 = \frac{p}{\Lambda^2}, \quad (1.40)$$

kde Λ je poměrná štíhlost. Vztahy (1.21) a (1.24) se pak prepíší na

$$p_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{w}{c}\right)} \quad (1.41)$$

$$w = \delta_0 \frac{1}{1 - p_0 \Lambda^2}. \quad (1.42)$$

Dosazením rovnice (1.42) do rovnice (1.41) se dostane vztah

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\delta_0}{c} \frac{1}{1 - p_0 \Lambda^2}}. \quad (1.43)$$

Pro případ ideálního průřezu platí $\lambda = L/c$ a užitím vzorce

$$\frac{\delta_0}{c} = \frac{\delta_0 L}{c L} = \lambda \frac{\delta_0}{L} = \Lambda \bar{\lambda} \frac{\delta_0}{L} \quad (1.44)$$

lze napsat výsledný vztah jako

$$p_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_0}{L} \frac{\Lambda \bar{\lambda}}{1 - p_0 \Lambda^2}\right)}. \quad (1.45)$$

Na Obr. 1.6 jsou pak vidět grafy pro různé počáteční excentricity. Jedná se o křivky a), b), c) a d). Je vidět, že bude-li se počáteční excentricita δ_0 blížit nule, průběh stabilitní křivky se bude přibližovat průběhu pro dokonale přímý prut. Z grafu je také patrné, že pro velmi štíhlé prvky se chování plastického prutu oproti pružnému příliš nezmění.

1.2 Odhady chování pro obdélníkový průřez

Prozatím byly pro představu uvedeny výsledky pro ideální průřez. Následující sekce bude už zaměřena na prut obdélníkového průřezu o výšce h a šířce b .

V případě pružnoplastické stabilitní analýzy prutu bude materiál namáhán kombinací ohybu a normálové síly. Využitím interakčních diagramů s uvážením

pružného a pružnoplastického chování je možné získat dolní a horní odhad stavu, v jakém se materiál bude nacházet. Tento odhad může sloužit jako jedna z kontrol později zmíněné metody.

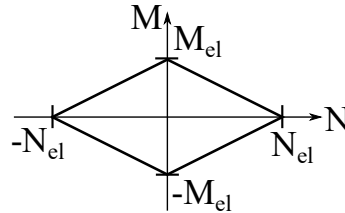
Jako dolní odhad lze využít řešení z teorie pružnosti. Chová-li se materiál ideálně pružnoplasticky, zaručeně povede výpočet podle pružnosti k dolnímu odhadu. Na druhou stranu použitím jakési kombinace pružného a plastického chování lze získat i horní odhad řešení. Skutečné chování materiálu bude někde mezi těmito odhady.

Pružná oblast

Z teorie pružnosti je známý následující vzorec, vyjadřující závislost ohybového a normálového namáhání v mezním pružném stavu, kdy je právě vyčerpána pružná kapacita materiálu.

$$\frac{|M|}{M_{el}} + \frac{|N|}{N_{pl}} = 1, \quad (1.46)$$

kde M je ohybový moment, N je normálová síla, M_{el} je mezní pružný moment a N_{pl} je plastická normálová síla. Na Obr. 1.7 je znázorněn geometrický význam. Bude užitečné vzorec upravit a využít bezrozměrné veličiny, aby výsledný vztah nezávisel na jednotkách. Pro úpravu se využijí vzorce



Obr. 1.7: Interakční diagram pro mezní pružný stav

$$M = Pw, \quad w = \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}, \quad M_{el} = \frac{\sigma_0 hb^2}{6}, \quad N_{pl} = A\sigma_0. \quad (1.47)$$

Následně lze podmínku (1.46) přepsat do tvaru

$$\frac{Pw}{\frac{\sigma_0 hb^2}{6}} + \frac{|-P|}{A\sigma_0} = 1 \quad (1.48)$$

$$P \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \frac{6}{\sigma_0 hb^2} + \frac{P}{A\sigma_0} = 1. \quad (1.49)$$

Oba zlomky se nyní rozšíří výrazem

$$\frac{P_{cr}}{P_{cr}} = \frac{EI\pi^2}{P_{cr}L^2} \quad (1.50)$$

a zlomek P/P_{cr} bude označen p .

$$\frac{P}{P_{cr}} \frac{EI\pi^2}{L^2} \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \frac{6}{\sigma_0 hb^2} + \frac{P}{P_{cr}} \frac{EI\pi^2}{L^2} \frac{1}{A\sigma_0} = 1 \quad (1.51)$$

$$p \frac{\delta_0}{1-p} E\pi^2 \frac{I}{L^2 A} \frac{6}{\sigma_0 b} + p E\pi^2 \frac{I}{L^2 A} \frac{1}{\sigma_0} = 1. \quad (1.52)$$

S využitím vzorců

$$\lambda^2 = \frac{L^2}{\frac{I}{A}}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{I}{A}}}{L} = \frac{\sqrt{\frac{hb^3}{12hb}}}{L} = \frac{b}{\sqrt{12}L} \quad (1.53)$$

je možné rovnici upravit na

$$p \frac{\delta_0}{1-p} E\pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{6}{\sigma_0 b} + p E\pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sigma_0} = 1 \quad (1.54)$$

$$p \frac{\delta_0}{1-p} E\pi^2 \frac{1}{\lambda} \frac{6}{\sqrt{12}\sigma_0 L} + p E\pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sigma_0} = 1 \quad (1.55)$$

$$\sqrt{3}p \frac{1}{1-p} \frac{E}{\sigma_0} \pi^2 \frac{1}{\lambda} \frac{\delta_0}{L} + p \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \sigma_0} = 1. \quad (1.56)$$

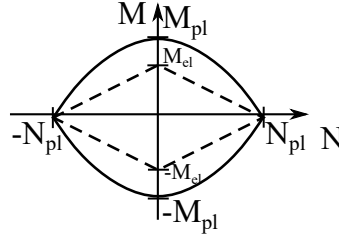
Plastická oblast

V případě, kdy je materiál v mezním plastickém stavu, je vztah mezi normálovou silou a ohybovým momentem vyjádřen rovnicí

$$\frac{|M|}{M_{pl}} + \left(\frac{N}{N_{pl}} \right)^2 = 1, \quad (1.57)$$

kde $M_{pl} = \sigma_0 bh^2/4$ je mezní plastický moment. Na Obr. 1.8 je zobrazen interakční diagram. Nyní budou provedeny obdobné úpravy jako pro pružný případ. Je nutné zmínit, že vztah

$$w = \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (1.58)$$



Obr. 1.8: Interakční diagram pro mezní plastický stav

platí pouze pro lineárně pružné chování. Nicméně při jeho použití i v případě plastického chování výsledný vztah nebude přesný, ale bude horním odhadem přesného řešení.

$$\frac{Pw}{\sigma_0 h b^2} + \left(\frac{-P}{A \sigma_0} \right)^2 = 1 \quad (1.59)$$

$$P \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \frac{4}{\sigma_0 h b^2} + \frac{P^2}{A^2 \sigma_0^2} = 1 \quad (1.60)$$

$$\frac{P}{P_{cr}} \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} E \pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{4}{\sigma_0 b} + \left(\frac{P}{P_{cr}} E \pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sigma_0} \right)^2 = 1. \quad (1.61)$$

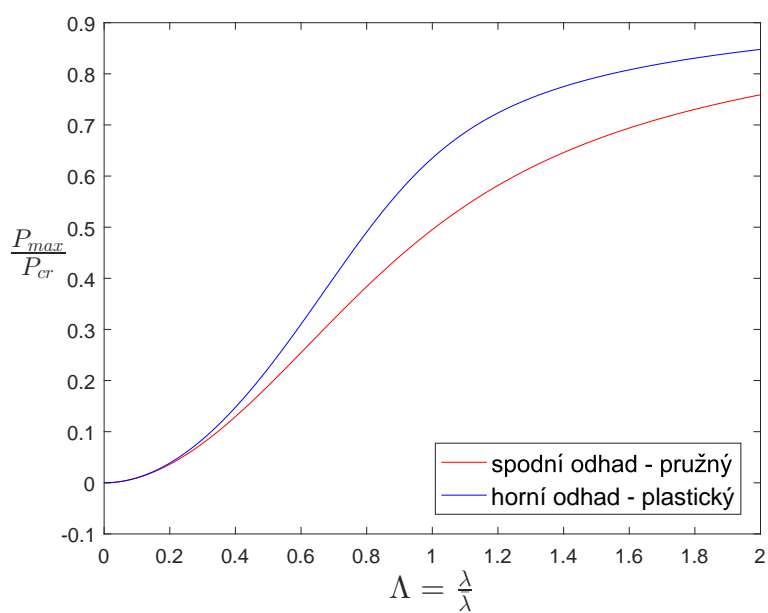
S využitím vzorce

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{I}{A}}}{L} = \frac{\sqrt{\frac{h b^3}{12 h b}}}{L} = \frac{b}{\sqrt{12} L} \quad (1.62)$$

je možné rovnici upravit na

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} p \frac{1}{1-p} \frac{E}{\sigma_0} \pi^2 \frac{1}{\lambda} \frac{\delta_0}{L} + \left(p \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \sigma_0} \right)^2 = 1. \quad (1.63)$$

Může být užitečné ze vztahů (1.56) a (1.63) vyjádřit závislost p na $\Lambda = \lambda/\bar{\lambda}$ a sestavit příslušný graf. Pro parametry $E = 210$ GPa, $\sigma_0 = 235$ MPa a $\delta_0/L = 0.001$ je tento graf vykreslen na Obr. 1.9. Pro každou hodnotu štíhlosti je dán dolní a horní odhad maximálního zatížení, které je prut schopen přenést. Skutečná hodnota bude někde mezi těmito limity.

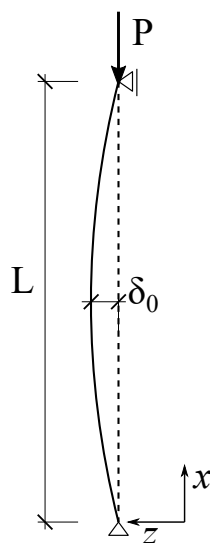


Obr. 1.9: Graf závislosti $p = P/P_{cr}$ na poměrné štíhlosti Λ

Kapitola 2

Řešení problému metodou střelby

V této kapitole bude popsáno řešení pomocí metody střelby a vysvětlen algoritmus vytvořeného programu. Zkoumaný problém je shodný s tím, který je řešen v předchozí kapitole. Místo ideálního průřezu je uvažován obdélníkový průřez šířky b a výšky h . Na Obr. 2.1 je znovu znázorněno schéma prutu.



Obr. 2.1: Schéma problému

Základní neznámou veličinou dané úlohy je funkce průhybu $w(x)$.

2.1 Princip řešení

Jeden z možných přístupů k řešení stabilitních problémů vychází z rovnováhy. V každém bodě x na ose prutu je možné napsat podmínky rovnováhy, tedy

rovnost mezi vnitřními a vnějšími silami. Takové rovnice jsou pro daný případ dvě: silová podmínka rovnováhy ve směru osy prutu a momentová podmínka rovnováhy. Momentová podmínka rovnováhy se zapíše jako

$$M_{ext} = M_{int} \quad (2.1)$$

$$Pw(x) = f(P, \kappa(x)), \quad (2.2)$$

kde f je funkce udávající ohybový moment v závislosti na normálové síle $N = -P$ a křivosti κ . V první kapitole byla odvozena diferenciální rovnice pro prut z pružného materiálu, pro který platí: $f(\kappa) = EI\kappa$.

Křivost κ , která souvisí s ohybovým momentem, je pak dána rozdílem křivosti od deformace a počáteční křivosti od imperfekce. Rovnici (2.2) lze přepsat jako

$$Pw(x) = f\left(P, -\frac{d^2w(x)}{dx^2} - \kappa_0(x)\right). \quad (2.3)$$

Rovnice (2.3) je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu, k jejímu řešení jsou potřeba dvě okrajové podmínky. Pro prostě podepřený prut se použijí podmínky $w(0) = w(L) = 0$. Konkrétní tvar funkce f v rovnici (2.3) závisí na průřezu a na chování materiálu a bude odvozen později. Pro případ pružnoplastického materiálu bude výsledná diferenciální rovnice nelineární a řešení je možné hledat pouze pomocí numerických metod.

2.2 Metoda střelby a diskretizace

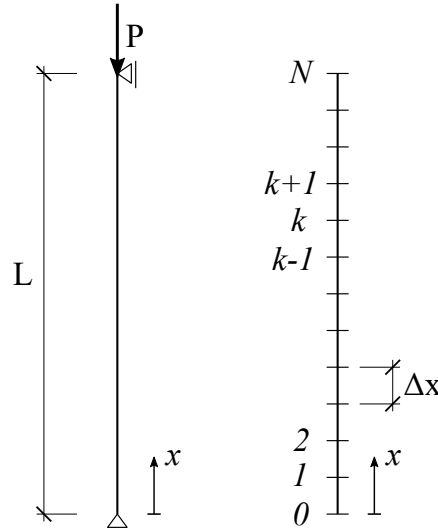
Metoda střelby je numerická metoda pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic, která převádí okrajovou úlohu na úlohu s počátečními podmínkami. Takovou úlohu pak můžeme efektivně řešit metodou konečných diferencí, nejlépe explicitního typu. Prvním krokem je diskretizace dané oblasti. Jelikož se jedná o prutovou úlohu, tedy 1-D, bude osa prutu pokryta dostatečným množstvím bodů. Rozdělení na jednotlivé dílky je znázorněno na Obr. 2.2. Vzdálenost mezi uzly je označena Δx , N označuje počet dílků a k značí číslo uzlu. V našem případě se řeší obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a pro druhou derivaci lze použít diferenční náhradu

$$\frac{d^2(\cdot)_k}{dx^2} = \frac{(\cdot)_{k+1} - 2(\cdot)_k + (\cdot)_{k-1}}{\Delta x^2}. \quad (2.4)$$

V každém bodě se zapíše momentová podmínka rovnováhy, tedy

$$Pw_k = f(P, \kappa_k), \quad (2.5)$$

kde w_k je průhyb v bodě x_k a κ_k je křivost v bodě x_k . Ukáže se, že v každém bodě bude w_k známou veličinou. Rovnice (2.5) bude mít pouze jednu neznámou,



Obr. 2.2: Diskretizace osy prutu

a to křivost κ_k . Jakmile se vyjádří hodnota křivosti, využije se aproximace druhé derivace diferenční náhradou. Platí

$$\kappa_k = -\frac{d^2 w_k}{dx^2} = \kappa_0(x_k) = -\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} - \delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x_k}{L}. \quad (2.6)$$

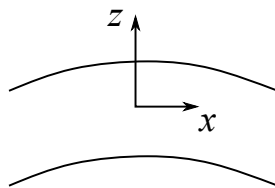
Z této rovnice se vyjádří průhyb w_{k+1} v následujícím bodě dělení, x_{k+1} . Výpočet pro první bod bude trochu odlišný. Zapiše-li se diferenční náhrada pro bod $k = 0$, objeví se ve vzorci kromě předpokládané neznámé w_1 i veličiny w_{-1} a $w_{k=0}$ (pro hodnoty průhybu nebo křivosti v bodě $k = 0$ je v dolním indexu psáno $k = 0$ místo 0, aby nedošlo k záměně s funkcí počátečního průhybu w_0 nebo počáteční křivosti κ_0). Průhyb $w_{k=0}$ je dán okrajovou podmínkou a pro prostě podepřený prut platí $w_{k=0} = 0$. Průhyb w_{-1} však není předepsán, což by znamenalo, že rovnice v prvním bodě by obsahovala dvě neznámé. Tento problém řeší metoda střelby předepsáním fiktivní okrajové podmínky, kterou je potřeba zvolit tak, aby numericky spočítané řešení splnilo skutečnou okrajovou podmínku na opačném konci prutu, tedy $w(L) = 0$. Fiktivní okrajová podmínka předepíše v bodě 0 první derivaci neznámé funkce, tedy v našem případě pootočení levého konce prutu, ϕ_0 . V podmínce $w'(0) = \phi_0$ se derivace nahradí diferenčním schématem, což bude druhá rovnice obsahující neznámé w_{-1} a w_1 . Díky tomu je pak možné rovnici pro bod $k = 0$ vyřešit.

Na začátku výpočtu vyjdeme ze vhodného odhadu pootočení ϕ_0 , například na základě analytického řešení pro pružný prut. Až se výpočet dostane k rovnici pro bod $k = N - 1$, ze které dopočítá průhyb na konci intervalu, tedy w_N , porovná se tato hodnota s okrajovou podmínkou, která má pro daný typ uložení tvar $w_N = 0$. Na základě rozdílu těchto hodnot bude opraven odhad

počátečního úhlu ϕ_0 a výpočet se bude opakovat tak dlouho, dokud rozdíl mezi vypočteným průhybem w_N a předepsanou hodnotou 0 nebude splňovat požadovanou toleranci.

2.3 Vyjádření ohybového momentu

Doposud byl naznačen pouze princip metody, avšak nebylo zmíněno, jak se dostane přesný tvar funkce $f(P, \kappa)$, udávající ohybový moment v závislosti na normálové síle a křivosti. V následující části budou ukázány výpočty ohybových momentů pro tři možné případy rozložení napětí, které mohou nastat. Pro jednoduchost se přitom omezíme na obdélníkový tvar průřezu. Jelikož se při použití metody střelby bude aproximovat křivost κ , je vhodné vyjadřovat průběhy napětí v závislosti právě na křivosti, která spolu s polohou neutrální osy určuje rozložení poměrného protažení, z něž pak lze podle konstitutivního vztahu určit i rozložení napětí. Na Obr. 2.3 je naznačen deformovaný prut se souřadnicovými osami x a z .



Obr. 2.3: Deformovaný prut a souřadnicový systém

Ohybový moment závisí na poloze neutrální osy, tudíž nejdříve je potřeba ze silové podmínky rovnováhy ve směru osy prutu získat polohu neutrální osy, a následně se vyjádří vztah pro ohybový moment.

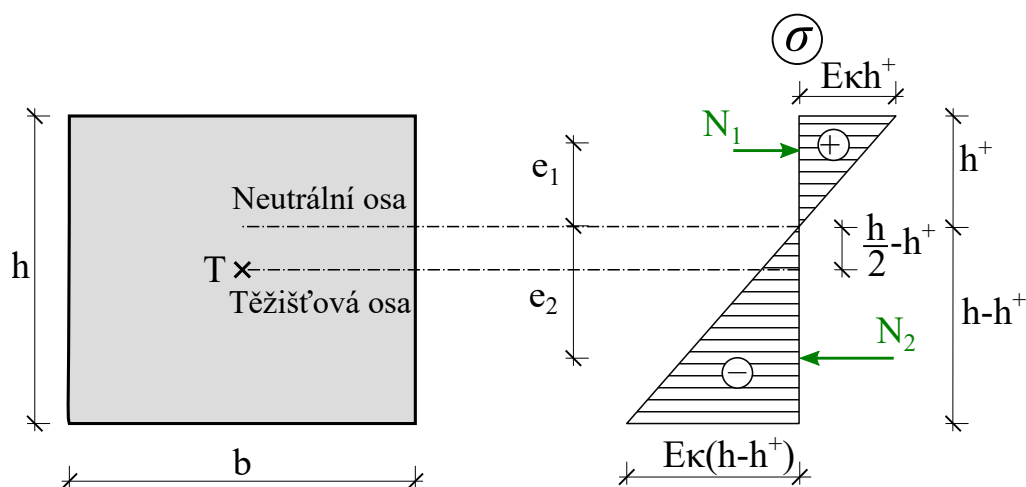
Případ 1: pružné chování

Nejprve bude uvažováno pouze lineárně pružné chování. Na Obr. 2.4 je znázorněno rozložení napětí po průřezu. Normálová síla v průřezu může být vyjádřena jako

$$N = N_1 - N_2 = \frac{1}{2} E \kappa b h^{+2} - \frac{1}{2} E \kappa b (h - h^+)^2 = \frac{1}{2} E \kappa b (-h^2 + 2h h^+) = -P, \quad (2.7)$$

kde E je modul pružnosti, κ křivost, h výška průřezu, b šířka průřezu, h^+ je vzdálenost neutrální osy od horních vláken a P je vnější tlaková osová síla. Z rovnosti (2.7) lze vyjádřit vztah pro vzdálenost neutrální osy od horních vláken

$$h^+ = \left(-\frac{2P}{bE\kappa} + h^2 \right) \frac{1}{2h} = -\frac{P}{hbE\kappa} + \frac{h}{2}. \quad (2.8)$$



Obr. 2.4: Rozložení napětí po průřezu v případě pružného chování

Následně pak lze vyjádřit ohybový moment závisující na poloze neutrální osy. Zde je ohybový moment počítán okolo neutrální osy, nesmí se však opomenout působení tlakové síly P v těžišti průřezu:

$$\begin{aligned} M &= N_1 e_1 + N_2 e_2 - P \left(\frac{h}{2} - h^+ \right) = \\ &= \frac{1}{3} E b \kappa \left(h^{+3} + (h - h^+)^3 \right) - P \left(\frac{h}{2} - h^+ \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dosazením vzdálenosti neutrální osy od horních vláken se výraz upraví na

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3} E b \kappa \left(h^{+3} + h^3 - 3h^2 h^+ + 3h h^{+2} - h^{+3} \right) - \frac{P}{2} \left(h + \frac{2P}{hbE\kappa} - h \right) = \\ &= \frac{1}{3} E b \kappa \left(h^3 + \frac{3hP}{bE\kappa} - \frac{3h^3}{2} + \frac{3P^2}{hb^2 E^2 \kappa^2} + \frac{3h^3}{4} - \frac{3hP}{bE\kappa} \right) - \frac{P^2}{hbE\kappa} = \\ &= \frac{1}{3} E b \kappa \left(\frac{h^3}{4} + \frac{3P^2}{hb^2 E^2 \kappa^2} \right) - \frac{P^2}{hbE\kappa} = \frac{bh^3}{12} E \kappa. \end{aligned} \quad (2.10)$$

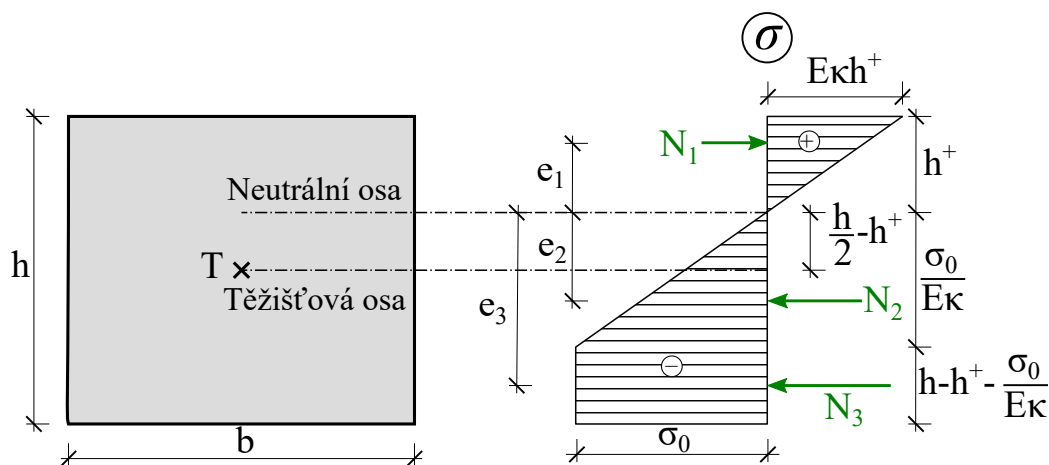
Podle očekávání se výsledný vztah zjednodušil na známý vzorec

$$M = EI \kappa. \quad (2.11)$$

Jak je vidět, v případě pružného chování není vztah mezi momentem a křivostí nijak ovlivněn normálovou silou. Tento vztah lze snadno invertovat a vyjádřit křivost jako $\kappa = M/EI$.

Případ 2: plastické přetváření tlačných vláken

Na Obr. 2.5 je znázorněno rozložení napětí pro případ ideálně pružnoplastického chování. Předpokládá se, že průřez plastizuje v tlaku, avšak v tahu se materiál



Obr. 2.5: Rozložení napětí po průřezu pro případ, kdy plastizují pouze spodní vlákna

chová stále pružně. Normálová síla v daném průřezu se vyjádří jako

$$N = N_1 - N_2 - N_3 = \frac{1}{2}E\kappa bh^{+2} - \frac{1}{2}b\frac{\sigma_0^2}{E\kappa} - \sigma_0\left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa}\right)b = -P. \quad (2.12)$$

Řešením rovnice (2.12) pro h^+ lze dostat dva kořeny

$$h_{1,2}^+ = -\frac{b\sigma_0 \pm \sqrt{-2Eb\kappa(P - bh\sigma_0)}}{Eb\kappa} = -\frac{\sigma_0}{E\kappa} \pm \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}}, \quad (2.13)$$

kde $P_0 = bh\sigma_0$. Ohybový moment je pak možné vyjádřit vztahem

$$\begin{aligned} M = N_1e_1 + N_2e_2 + N_3e_3 - P\left(\frac{h}{2} - h_{1,2}^+\right) &= \frac{1}{3}Eb\kappa h_{1,2}^{+3} + \frac{1}{3}\frac{\sigma_0^3}{E^2\kappa^2}b + \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_0\left(h - h_{1,2}^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa}\right)b\left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} + h - h_{1,2}^+\right) - P\left(\frac{h}{2} - h_{1,2}^+\right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dosažením jednoho ze dvou výrazů pro vzdálenost neutrální osy od horních vláken h_1^+ do rovnice pro moment dostaneme

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{3}Eb\kappa \left(-\frac{\sigma_0}{E\kappa} + \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right)^3 + \frac{1}{3} \frac{\sigma_0^3}{E^2\kappa^2} b + \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_0 b \left((h - h_{1,2}^+)^2 - \left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) - P \left(\frac{h}{2} + \frac{\sigma_0}{E\kappa} - \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right) = \\
&= \frac{1}{3}Eb\kappa \left(-\left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^3 + 3 \left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} - 6\sigma_0 \frac{(P_0 - P)}{E^2b\kappa^2} + \right. \\
&+ \left. \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa} \right) + \frac{1}{3} \frac{\sigma_0^3}{E^2\kappa^2} b + \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_0 b \left(\left(h + \frac{\sigma_0}{E\kappa} - \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) + \\
&- P \left(\frac{h}{2} + \frac{\sigma_0}{E\kappa} - \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Pro druhý kořen budou úpravy obdobné, jediná změna se týká znaménka. Algebraickými úpravami se odvozený výraz pro moment zjednoduší na

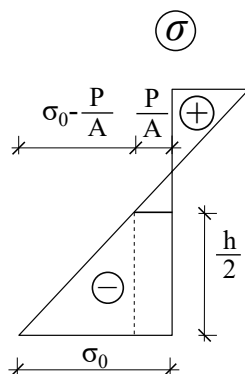
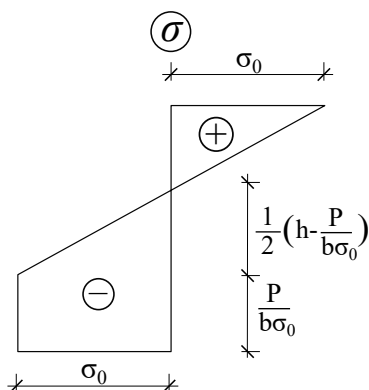
$$M = (P_0 - P) \left(\frac{h}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right). \tag{2.16}$$

Pro lepší představu o názorném významu vzorce (2.16) bude užitečné zavést dvě limitní křivosti. Křivost κ_{el} bude křivost pro takové rozložení napětí, při kterém je materiál stále v pružném stavu, avšak napětí v tlačných vláknech je na mezi kluzu. Odpovídající rozložení napětí je znázorněno na Obr. 2.6. Křivost v mezním pružném stavu se vyjádří jako

$$\kappa_{el} = \frac{\frac{\sigma_0}{E} - \frac{P}{EA}}{\frac{h}{2}} = \frac{2}{Eh} \left(\sigma_0 - \frac{P}{A} \right) = \frac{2\sigma_0}{Eh} \left(1 - \frac{P}{A\sigma_0} \right) = \frac{2\sigma_0}{Eh} (1 - p_0). \tag{2.17}$$

Druhá mezní křivost bude označena κ_{ep} . Bude dosažena v případě, kdy tlačná vlákna již plastizují a napětí v tažených vláknech bude právě rovno σ_0 . Vyjádří se jako

$$\kappa_{ep} = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{2} \left(h - \frac{P}{b\sigma_0} \right) E} = \frac{2\sigma_0}{Eh \left(1 - \frac{P}{bh\sigma_0} \right)} = \frac{2\sigma_0}{Eh} \frac{1}{1 - p_0}. \tag{2.18}$$

Obr. 2.6: Rozložení napětí pro mezní pružný stav, kdy platí: $\kappa = \kappa_{el}$ Obr. 2.7: Rozložení napětí pro stav, kdy tlačená oblast plastizuje a napětí v tažených vláknech je právě rovno mezi kluzu, platí: $\kappa = \kappa_{ep}$

Upravením výrazu pro ohybový moment (2.16) s využitím vzorce (2.17) dostaneme

$$M = (P_0 - P) \left(\frac{h}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right) = (P_0 - P) \left(\frac{h}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\sigma_0(1 - p_0)h^2}{Eh\kappa}} \right) \quad (2.19)$$

$$M = (P_0 - P)h \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \right). \quad (2.20)$$

Nyní bude užitečné zobrazit zmíněné limitní stavy v rovině osové síly P a ohybového momentu M . Bude praktické využít bezrozměrné veličiny $p_0 = P/P_0$ a $m = M/M_{el}$. Nejprve bude prověřen mezní pružný stav, tedy případ, kdy $\kappa = \kappa_{el}$.

$$M = (P_0 - P)h \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa_{el}}} \right) \quad (2.21)$$

$$\frac{M}{P_0 h} = (1 - p_0) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \quad (2.22)$$

$$\frac{M}{\sigma_0 b h^2} = (1 - p_0) \frac{1}{6} \quad (2.23)$$

$$m = (1 - p_0). \quad (2.24)$$

Rovnice (2.24) odpovídá známému vzorci pro vztah normálové síly a ohybového momentu pro mezní pružný stav. Nyní se vyjádří obdobný vztah pro druhý limit, tedy případ, kdy $\kappa = \kappa_{ep}$.

$$M = (P_0 - P)h \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa_{ep}}} \right) \quad (2.25)$$

$$\frac{M}{P_0 h} = (1 - p_0) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{(1 - p_0)^2} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{M}{\frac{\sigma_0 b h^2}{6}} = (1 - p_0) (3 - 2(1 - p_0)) \quad (2.27)$$

$$m = 1 + p_0 - 2p_0^2. \quad (2.28)$$

Tento vzorec vyjadřuje závislost ohybového momentu a tlakové síly pro případ, kdy tlačena vlákna plastizují a napětí v tažených vláknech právě dosáhlo meze kluzu.

Z rovnice (2.20) lze vyjádřit křivost κ pomocí následujících úprav:

$$M = (P_0 - P)h \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \right) \quad (2.29)$$

$$M = \sigma_0 b h^2 \left(1 - \frac{P}{P_0}\right) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \right) \quad (2.30)$$

$$M = \frac{\sigma_0 b h^2}{6} \left(1 - \frac{P}{P_0}\right) \left(3 \pm 2 \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \right) \quad (2.31)$$

$$\frac{M}{M_{el} \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)} - 3 = \pm 2 \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \quad (2.32)$$

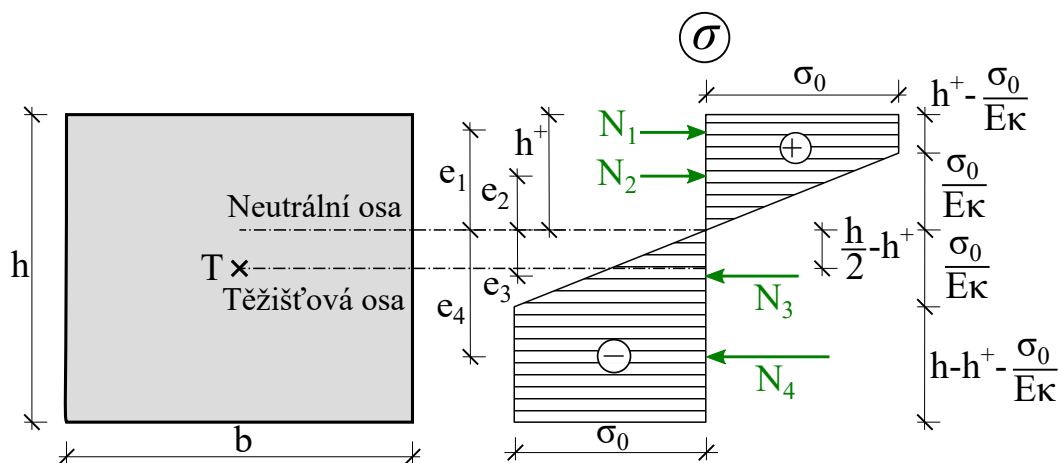
$$4 \frac{\kappa_{el}}{\kappa} = \left(\frac{M}{M_{el} \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)} - 3 \right)^2 \quad (2.33)$$

$$\kappa = \frac{4\kappa_{el}}{\left(\frac{M}{M_{el}\left(1 - \frac{P}{P_0}\right)} - 3\right)^2}. \quad (2.34)$$

Ve výsledném vzorci pro křivost se nakonec umocněním vyřešil problém s dvojím výrazem pro vzdálenost neutrální osy od horních vláken.

Případ 3: plastické přetváření tlačných i tažených vláken

Poslední případ, který může nastat, je ukázán na Obr. 2.8. Dochází k plastizaci



Obr. 2.8: Rozložení napětí po průřezu pro případ, kdy plastizují jak horní tak spodní vlákna

jak v tahu, tak i v tlaku. Obdobně jako pro předešlé případy, normálová síla v průřezu se vyjádří jako

$$N = N_1 + N_2 - N_3 - N_4 = N_1 - N_4 = \left(h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa}\right) \sigma_0 b + \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa}\right) \sigma_0 b = \sigma_0 b (2h^+ - h) = -P. \quad (2.35)$$

V tomto případě má rovnice (2.35) pouze jeden kořen

$$h^+ = \frac{1}{2} \left(-\frac{P}{\sigma_0 b} + h\right) = \frac{P_0 - P}{2\sigma_0 b}. \quad (2.36)$$

Ohybový moment bude následně vyjádřen obdobně předchozím případům jako

$$\begin{aligned}
M &= N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3 + N_4 e_4 - P \left(\frac{h}{2} - h^+ \right) = \\
&= \frac{2\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{1}{2} \left(h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) \sigma_0 b \left(h^+ + \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) \sigma_0 b \left(h - h^+ + \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) - P \left(\frac{h}{2} - h^+ \right). \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Dosazením h^+ do výrazu pro moment dostaneme

$$\begin{aligned}
M &= \frac{2\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{1}{2} \sigma_0 b \left(h^{+2} - \left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \sigma_0 b \left((h - h^+)^2 - \left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) + \\
&\quad - P \left(\frac{h}{2} + \frac{P}{2\sigma_0 b} - \frac{h}{2} \right) = \\
&= \frac{2\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{1}{2} \sigma_0 b \left(\left(-\frac{P}{2\sigma_0 b} + \frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma_0 b \left(\left(\frac{P}{2\sigma_0 b} + \frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) - \frac{P^2}{2\sigma_0 b} = \\
&= \frac{2\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \sigma_0 b \left(\frac{P^2}{4\sigma_0^2 b^2} + \frac{h^2}{4} - \left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) - \frac{P^2}{2\sigma_0 b} = \\
&= -\frac{\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{\sigma_0 b h^2}{4} - \frac{P^2}{4\sigma_0 b} = -\frac{\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{P_0^2 - P^2}{4\sigma_0 b} = \\
&= \left(1 - \frac{P^2}{P_0^2} \right) \frac{\sigma_0 b h^2}{4} - \frac{4\sigma_0^2}{3h^2 E^2 \kappa^2} \frac{\sigma_0 b h^2}{4} = \left(1 - \frac{P^2}{P_0^2} \right) M_{pl} - \frac{4\sigma_0^2}{3h^2 E^2 \kappa^2} M_{pl} = \\
&= \left(1 - \frac{P^2}{P_0^2} \right) M_{pl} - \frac{1}{3} \frac{\kappa_{ep}^2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{P}{P_0} \right)^2 M_{pl}. \quad (2.38)
\end{aligned}$$

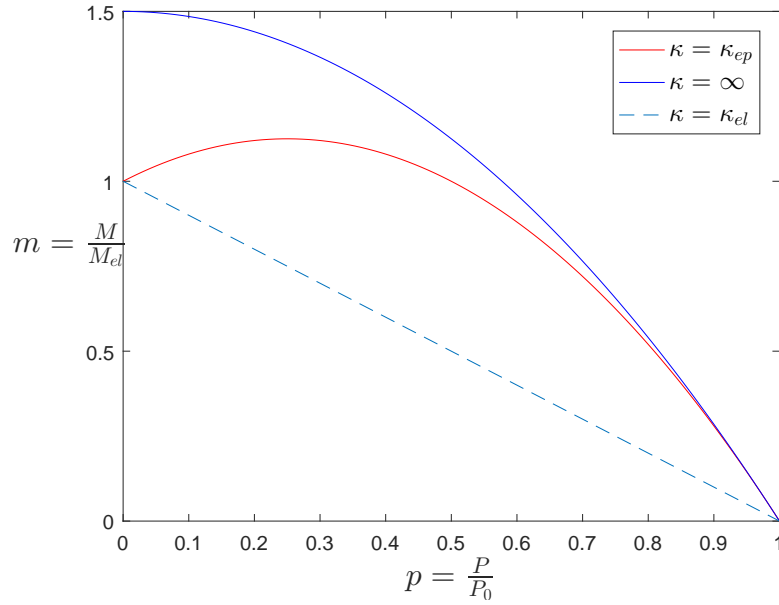
Opět bude názorně prozkoumat limitní varianty vztahu (2.38). V případě úplně zplastizovaného průřezu se bude křivost κ blížit nekonečnu. S použitím bezrozměrných veličin $m = M/M_{el}$, $M_{el} = 2M_{pl}/3$, $p_0 = P/P_0$ se vztah (2.38) přepíše na

$$m = (1 - p_0^2) \frac{3}{2}. \quad (2.39)$$

To je známý vzorec pro vztah normálové síly a ohybového momentu s uvažováním plně zplastizovaného průřezu. Druhým limitem je případ, kdy je křivost rovna mezní křivosti κ_{ep} , z rovnice (2.38) pak plyne

$$m = \frac{3}{2} (1 - p_0^2) - \frac{1}{2} (1 - p_0)^2 \quad (2.40)$$

$$m = 1 + p_0 - 2p_0^2. \quad (2.41)$$



Obr. 2.9: Vztah ohybového momentu a tlakové síly (interakční diagram) a zanesené křivky pro mezní pružný stav, mezní plastický stav a stav, kdy platí, že $\kappa = \kappa_{ep}$

Výsledný výraz je podle očekávání shodný se vzorcem (2.28). Sestrojený graf pro vzorce (2.24), (2.28) a (2.39) je na Obr. 2.9.

Ze vztahu pro ohybový moment (2.38) lze přímo vyjádřit hodnotu křivosti κ pomocí následujících úprav:

$$\frac{M}{M_{pl}} = 1 - p_0^2 - \frac{1}{3} \frac{\kappa_{ep}^2}{\kappa^2} (1 - p_0)^2 \quad (2.42)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{3} \frac{\kappa_{ep}^2 (1 - p_0)^2}{1 - p_0^2 - \frac{M}{M_{pl}}} \quad (2.43)$$

$$\kappa = \pm \frac{\kappa_{ep}}{\sqrt{3}} \frac{1 - p_0}{\sqrt{1 - p_0^2 - \frac{M}{M_{pl}}}}. \quad (2.44)$$

Jelikož platí, že $1 - p_0 > 0$, $\kappa_{ep} > 0$ a křivost κ musí být po celé délce prutu kladná, dvojitě znaménko není třeba uvažovat. Výsledný výraz je tedy

$$\kappa = \frac{\kappa_{ep}}{\sqrt{3}} \frac{1 - p_0}{\sqrt{1 - p_0^2 - \frac{M}{M_{pl}}}}. \quad (2.45)$$

2.4 Algoritmus

Již v sekci 2.2 byl zhruba naznačen algoritmus, který je v kódu naprogramován. V této části bude detailně popsán. Cílem výpočtu je zjistit body zatěžovací křivky a kritickou hodnotu zatížení. Výpočet je řízen zatížením, osová síla P se tedy postupně zvětšuje a v každém zatěžovacím kroku algoritmus spočítá funkci průhybu w .

Základní rovnicí je momentová rovnováha vnějších a vnitřních sil

$$Pw_k = M_{int}(\kappa_k, P), \quad (2.46)$$

kde M_{int} bude jeden ze tří výrazů pro moment odvozených v předchozí části práce. Nakonec se ukázalo, že pro všechny tři případy se výrazy pro moment výrazně zjednodušily. Vždy lze explicitně vyjádřit křivost κ závisící na velikosti tlakové síly P a hodnotě ohybového momentu M . Pro přehlednost jsou připomenuty jednotlivé případy:

Případ 1:

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad (2.47)$$

Případ 2:

$$\kappa = \frac{4\kappa_{el}}{\left(\frac{M}{M_{el}(1 - p_0)} - 3\right)^2} \quad (2.48)$$

Případ 3:

$$\kappa = \frac{\kappa_{ep}}{\sqrt{3}} \frac{1 - p_0}{\sqrt{1 - p_0^2 - \frac{M}{M_{pl}}}}. \quad (2.49)$$

V předchozí části kapitoly byly odvozeny vztahy ohybového momentu a tlakové síly pro různé limitní případy. Díky znalosti těchto hranic lze pro každý zatěžovací krok stanovit hodnotu mezních ohybových momentů.

a) $\kappa = \kappa_{el}$:

$$m_{el} = (1 - p_0) \quad (2.50)$$

b) $\kappa = \kappa_{ep}$:

$$m_{ep} = 1 + p_0 - 2p_0^2 \quad (2.51)$$

c) $\kappa = \infty$:

$$m_{pl} = (1 - p_0^2) \frac{3}{2}, \quad (2.52)$$

kde m_{el} , m_{ep} a m_{pl} jsou normalizované (bezrozměrné) hodnoty momentu v mezním pružném stavu, ve stavu na začátku plastického přetváření v tažených vláknech a v mezním plastickém stavu. Normalizace se zde provádí vydělením hodnotou mezního pružného momentu $M_{el} = \sigma_0 b h^2 / 6$, který odpovídá nulové normálové síle.

Graf je zobrazen na Obr. 2.9. Pro každý dílek na ose x se pak tyto výrazy porovnají s hodnotou působícího ohybového momentu $m_{ext} = M_{ext}/M_{el} = Pw_k/M_{el}$. Pokud je $m_{ext} \leq m_{el}$, zůstává materiál v pružném stavu a hodnota křivosti se určí podle rovnice (2.47). Bude-li externí moment v rozmezí $m_{el} < m_{ext} \leq m_{ep}$, výpočet křivosti se provede podle rovnice (2.48). V případě, že $m_{ep} < m_{ext} \leq m_{pl}$, využije se rovnice (2.49). Hodnota m_{pl} je horní limit, materiál nemůže přenést vyšší namáhání.

Tímto se výpočet výrazně zjednodušil. Algoritmus obsahuje dva hlavní cykly. Cyklus přes zvětšující se sílu a do něj vnořený cyklus přes body na podélné ose x . Číslo bodu dělení osy bude označeno k .

V každém zatěžovacím kroku se postupuje následovně: Z okrajové podmínky je dána hodnota průhybu v počátku $w_{k=0} = 0$. Tím jsou určeny vnitřní síly v bodě $k = 0$ a platí $M_{ext,k=0} = Pw_{k=0} = 0$. Ověření podmínky pro rozložení napětí po průřezu pro bod $k = 0$ je zbytečné, vždy bude uvažováno lineární pružné chování, jelikož průřez není ohybově namáhán. Ze vzorce (2.47) je patrné, že $\kappa_{k=0} = 0$. Jakmile je známá křivost, lze dopočítat odhad průhybu v následujícím bodě $k = 1$. Výsledná křivost je dána rozdílem křivosti od deformace a počáteční křivosti dané počáteční imperfekcí. Platí

$$\kappa_k = \kappa_{def,k} - \kappa_{0,k} = -\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} - \delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{k\pi}{L}. \quad (2.53)$$

Přepsáním této rovnice pro bod $k = 0$ a s využitím okrajové podmínky $w_{k=0} = 0$ dostaneme

$$\kappa_{k=0} = \frac{w_1 - 2w_{k=0} + w_{-1}}{\Delta x^2} - \delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{0}{L} = -\frac{w_1 + w_{-1}}{\Delta x^2}. \quad (2.54)$$

Metoda střelby odhaduje počáteční úhel průhybu ϕ_0 , který v případě malých deformací lze zaměnit s derivací průhybové funkce v počátku, platí tedy $w'_{k=0} = \phi_0$. Možné diferenční schéma pro náhradu první derivace v bodě 0 je

$$\phi_0 = w'_{k=0} = \frac{w_1 - w_{-1}}{2\Delta x}. \quad (2.55)$$

Z rovnice (2.55) lze vyjádřit

$$w_{-1} = w_1 - 2\Delta x\phi_0. \quad (2.56)$$

Dobrou volbou úhlu ϕ_0 je derivace v počátku z analytického pružného řešení. Dosazením předešlého výrazu do rovnice (2.54) dostaneme

$$\kappa_{k=0} = -\frac{w_1 + w_{-1} - 2\Delta x\phi_0}{\Delta x^2} = -\frac{2w_1 - 2\Delta x\phi_0}{\Delta x^2}. \quad (2.57)$$

Jedinou neznámou v rovnici (2.57) je w_1 , jelikož počáteční úhel ϕ_0 byl odhadnut. Neznámou w_1 lze snadno explicitně vyjádřit jako

$$w_1 = -\frac{1}{2}\kappa_{k=0}\Delta x^2 + \Delta x\phi_0. \quad (2.58)$$

Tím je výpočet pro bod $k = 1$ hotov a kód může postoupit k dalšímu bodu. Princip bude obdobný, spočítá se $m_{ext} = Pw_k/M_{el}$, tato hodnota se porovná s mezními hodnotami a určí se, o který případ rozložení napětí se jedná. Pak se z příslušného vzorce vypočítá hodnota křivosti. Následně je z rovnice (2.53) vyjádřena jediná neznámá

$$w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} - (\kappa_k + \kappa_{0,k})\Delta x^2. \quad (2.59)$$

Takto se dopočítají hodnoty až k bodu $k = N - 1$, hodnota w_N by měla být podle okrajových podmínek rovna 0. Pokud v zatěžovacím kroku nedošlo k žádné plastizaci, jako počáteční úhel ϕ_0 byla použita derivace v počátku z analytického pružného řešení a bylo použito dostatečně jemné dělení, hodnota w_N by měla být téměř 0. Pokud k plastizaci v daném kroku došlo, hodnota na konci intervalu se od 0 bude lišit. Pomocí vhodné iterativní metody se najde lepší odhad počátečního úhlu ϕ_0 .

Jednou z možných variant je metoda půlení intervalu. Předpokládejme, že v zatěžovacím kroku došlo k plastizaci a dopočítaná hodnota na konci intervalu se od nuly lišila. V případě, že $w_N > 0$, bude počáteční úhel nazván $\phi_{0,A}$. Pokud $w_N < 0$, úhel se pojmenuje $\phi_{0,B}$. Ve stejném zatěžovacím kroku se zopakuje výpočet s použitím jiného počátečního úhlu. Pokud je hodnota průhybu na konci intervalu opačného znaménka než pro první případ, hodnotě se přiřadí název $\phi_{0,A}$ pokud je průhyb kladný, nebo $\phi_{0,B}$ pokud je záporný. Pokud hodnota průhybu má stejné znaménko jako z prvního odhadu, je potřeba krok opakovat, dokud nebude hodnota průhybu na konci opačného znaménka. Jakmile je toho docíleno, kód může začít algoritmus metody. Dopočítá se úhel $\phi_{0,NEW}$ který bude v polovině intervalu mezi úhly $\phi_{0,A}$ a $\phi_{0,B}$, platí $\phi_{0,NEW} = \phi_{0,A} + (\phi_{0,B} - \phi_{0,A})/2$. Následně se s použitím tohoto počátečního úhlu vypočítá nový průhyb $w_{N,NEW}$. Pokud bude kladný, přepíše se na $\phi_{0,A}$.

Pokud bude průhyb $w_{N,NEW}$ záporný, přepíše se na $\phi_{0,B}$. Tímto způsobem se bude zkracovat interval mezi úhly $\phi_{0,A}$ a $\phi_{0,B}$ dokud hodnota $w_{N,NEW}$ nebude dostatečně blízko nule. V tom případě je aktuální zatěžovací krok dopočítán a kód může přejít k dalšímu.

Při výpočtu se ukáže, že od jisté hodnoty zatížení bude mít funkce popisující průhyb na konci prutu v závislosti na odhadu počátečního úhlu dva kořeny. Až budou uvedeny výsledky pro konkrétní případ, bude patrné, že jeden kořen odpovídá vzestupné části zatěžovací křivky a druhý větvi sestupné.

Shrnutí algoritmu:

1. cyklus přes zvětšující se zatížení: *for* $P = P_{start} : P_{konec}$
2. výpočet κ_{el} a κ_{ep}
3. určení počátečního úhlu ϕ_0
 - pokud se jedná o první iteraci
 - ϕ_0 z analytického pružného řešení
 - pokud se nejedná o první iteraci
 - ϕ_0 dopočteno pomocí metody půlení intervalu
4. cyklus přes rozdělení prutu po délce: *for* $k = 0 : (N - 1)$
5. určení m_{ext} a porovnání s m_{el} a m_{ep}
 - ze vzorce pro příslušný případ se dopočte κ
 - pokud $k = 0$

$$w_{k+1} = -\frac{1}{2}\kappa_k\Delta x^2 + \Delta x\phi_0$$
 - pokud $k = 1 : N - 1$

$$w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} - (\kappa_k + \kappa_{0,k})\Delta x^2$$
6. kontrola $w_N = 0$,
 - pokud $w_N \neq 0$
 - vrátit se k bodu 3
 - pokud $w_N = 0$
 - zatěžovací krok dopočítán, přejít k bodu 1

Kapitola 3

Příklad

V následující kapitole budou ukázány výsledky pro konkrétní příklad. Bude se jednat o prostě podepřený prut vyrobený z oceli. Pracovní diagram bude uvažován jako ideálně pružnoplastický s mezí kluzu σ_0 a modulem pružnosti E . Prut bude obdélníkového průřezu o výšce h a šířce b , délka prutu je L s počáteční excentricitou ve tvaru sinusoidy s maximální amplitudou δ_0 . Konkrétní hodnoty jsou zobrazeny v Tab. 3.1.

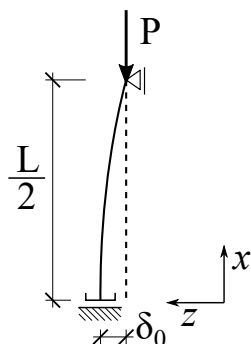
h [m]	b [m]	δ_0 [m]	L [m]	E [Pa]	σ_0 [Pa]
0.1	0.15	0.004	4	$210 \cdot 10^9$	$235 \cdot 10^6$

Tab. 3.1: Hodnoty parametrů pro konkrétní příklad

3.1 Metoda konečných prvků

Ověření správnosti bylo provedeno pomocí konečně-prvkového softwaru OOFEM. Úlohu je možné zjednodušit s využitím symetrie průhybové funkce, lze tedy vymodelovat pouze polovinu prutu a tím zpřesnit a zrychlit řešení. Uprostřed prutu je derivace průhybové funkce rovna nule, tuto podmínku je zapotřebí vynutit vhodnou podporou. Ta musí splňovat nulové natočení průřezu a musí umožňovat příčný posun w . Taková podpora se nazývá posuvné vetknutí. Na Obr. 3.1 je znázorněno statické schéma zjednodušeného problému.

Prut byl vymodelován jako rovinná úloha. Pro výpočet byly použity čtyřuzlové konečné prvky. Všechny prvky mají stejnou šířku. V každém uzlu jsou dva neznámé stupně volnosti, tedy posuny u a w . Uvažuje se bilineární aproximace pole posunutí. Hodnoty napětí se integrují ve čtyřech Gaussových integračních bodech. Při tvorbě modelu pro program OOFEM jsem využil



Obr. 3.1: Schéma s využitím symetrie pro model v programu OOFEM

manuálové příručky [3] a [4].

Okrajové podmínky byly modelovány následovně. Pro kloubové podepření je vynuceno, aby příčný posun prostředního uzlu v krajním průřezu byl nulový. Zbylé krajní uzly se mohou pohybovat libovolně, tak bude umožněna příčná roztažnost materiálu. U posuvného vetknutí je uzlům v krajním průřezu umožněn pouze pohyb v kolmém směru na osu prutu, tedy ve směru posunu w . Zamezením posunu u ve všech krajních uzlech se docílí nulového natočení průřezu.

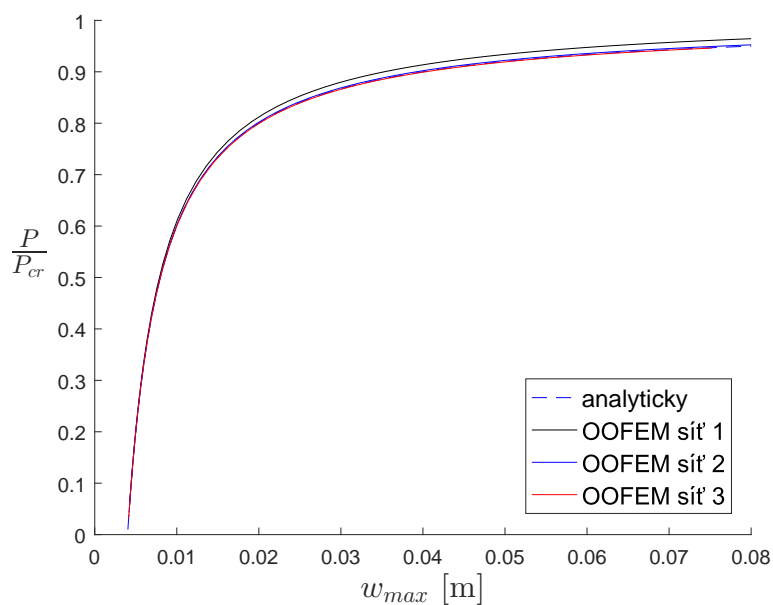
Osové zatížení je modelováno jako bodové zatížení v krajních uzlech. V případě, že je na šířku prutu použito M uzlů, celkové zatížení P bude rozděleno následovně. Síla působící na rohové uzly bude velikosti $P/2M$ a síla předepsaná v ostatních uzlech bude hodnoty P/M . Tímto bude docíleno rovnoměrného rozmístění zatížení po šířce prutu.

Síť a konvergence

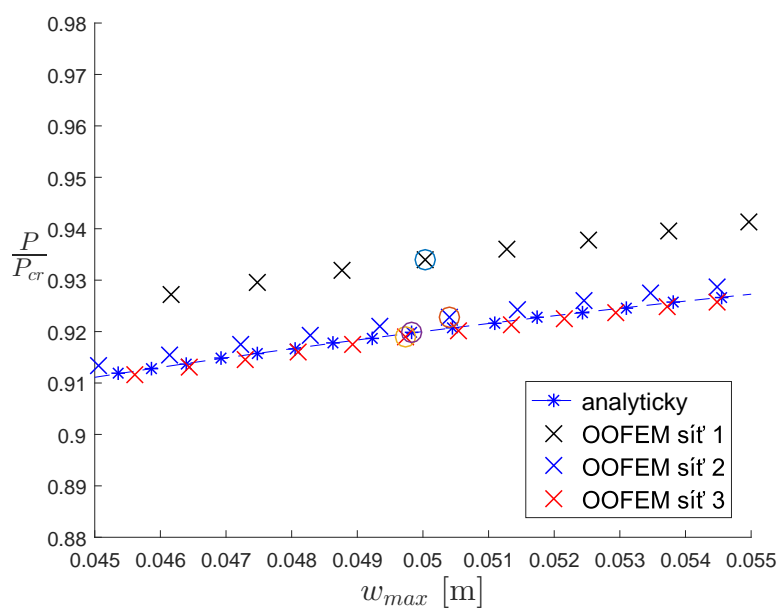
Nejprve byl proveden stabilitní výpočet pro prut s lineárně pružným materiálem. Takto je možné odhadnout, jak hustá síť prvků je potřeba k dostatečně přesnému řešení. Byly použity tři různé husté sítě. V Tab. 3.2 jsou vypsány parametry sítí. Na Obr. 3.2 je vykreslen graf závislosti P/P_{cr} na

	velikost hrany [m]	počet prvků na šířku	počet prvků celkem
Síť 1	0.05	2	80
Síť 2	0.025	4	320
Síť 3	0.0125	8	1280

Tab. 3.2: Síť konečných prvků

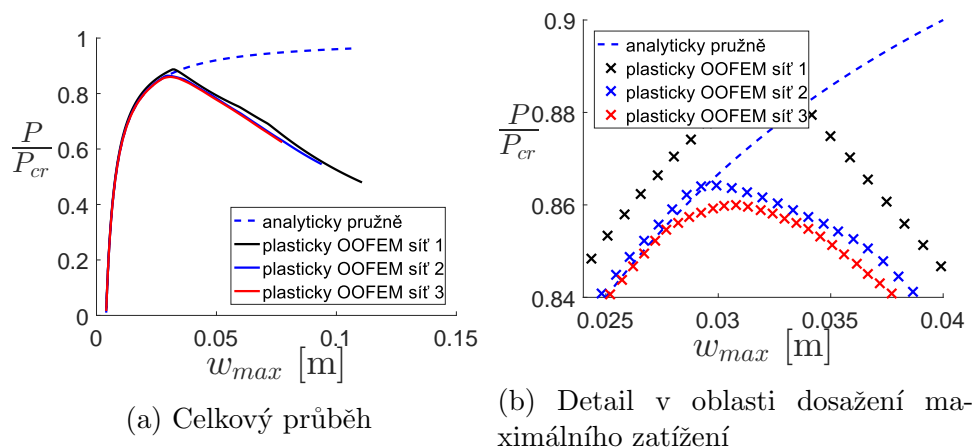


Obr. 3.2: Porovnání analytického řešení s pružným řešením metodou konečných prvků pro tři různě husté sítě



Obr. 3.3: Detail grafu na Obr. 3.2

průhybu uprostřed prutu pro analytické řešení a řešení metodou konečných prvků pro tři zmíněné sítě. Na Obr. 3.3 je zobrazen detail grafu v oblasti, kde se poměr sil P/P_{cr} blíží jedné.



Obr. 3.4: Porovnání pružnoplastického řešení MKP pro různé sítě

V Tab. 3.3 jsou zaznamenány hodnoty P/P_{cr} , P_{an}/P_{cr} (P_{an} je hodnota síly z analytického řešení) a odchylka numerického řešení od analytického řešení v bodech, ve kterých je hodnota průhybu w nejbližší hodnotě 0.05 m. Tyto body jsou na Obr. 3.3 znázorněny kroužkem. Odchylka od přesného řešení pro bod

	$\frac{P}{P_{cr}}$	$\frac{P_{an}}{P_{cr}}$	$\frac{P - P_{an}}{P_{an}} \cdot 100$ [%]
Síť 1	0.9339	0.9197	1.5431
Síť 2	0.9228	0.9197	0.3344
Síť 3	0.9188	0.9197	-0.0980

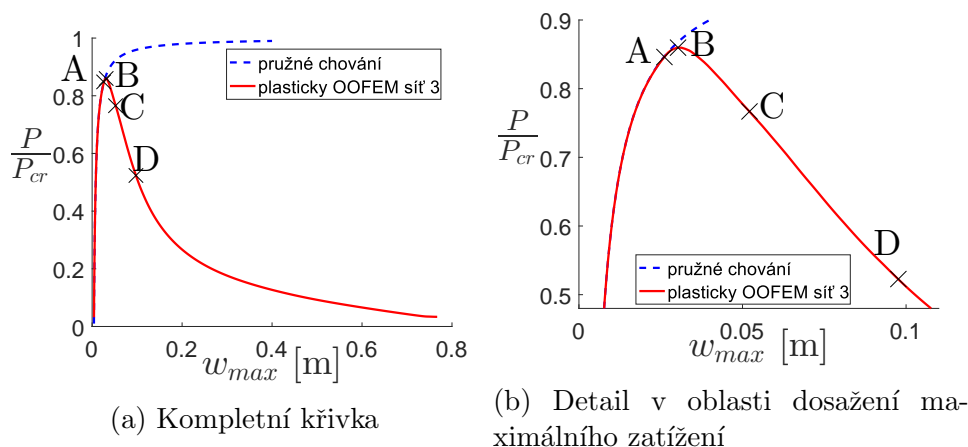
Tab. 3.3: Konvergence k přesnému řešení

sítě 3 je menší než 0.1 %. Taková přesnost je pro účely práce dostačující a síť 3 lze považovat za dostatečně hustou.

Plastický výpočet

Ukázalo se, že výpočet pružného řešení je věrohodný až při použití alespoň 8 konečných prvků na šířku prutu (síť 3). Je jasné, že zkoumat plastický výpočet s hrubší sítí je nesmyslné, nicméně pro informaci jsou výsledky i pro tyto sítě uvedeny v grafu na Obr. 3.4. Na Obr. 3.4 je zobrazena jen část zatěžovací křivky, kompletní křivka s použitím sítě 3 je zobrazena na Obr. 3.5.

Z grafů je vidět, jak se mění průběh zatěžovací křivky oproti pružnému řešení. Ze začátku je řešení shodné s pružným, to je zatížení ještě dostatečně nízké a napětí v žádném průřezu nepřesáhne mez kluzu σ_0 . Pak se začne křivka oddalovat od pružného řešení (bod A). V tomto bodě bylo právě dosaženo

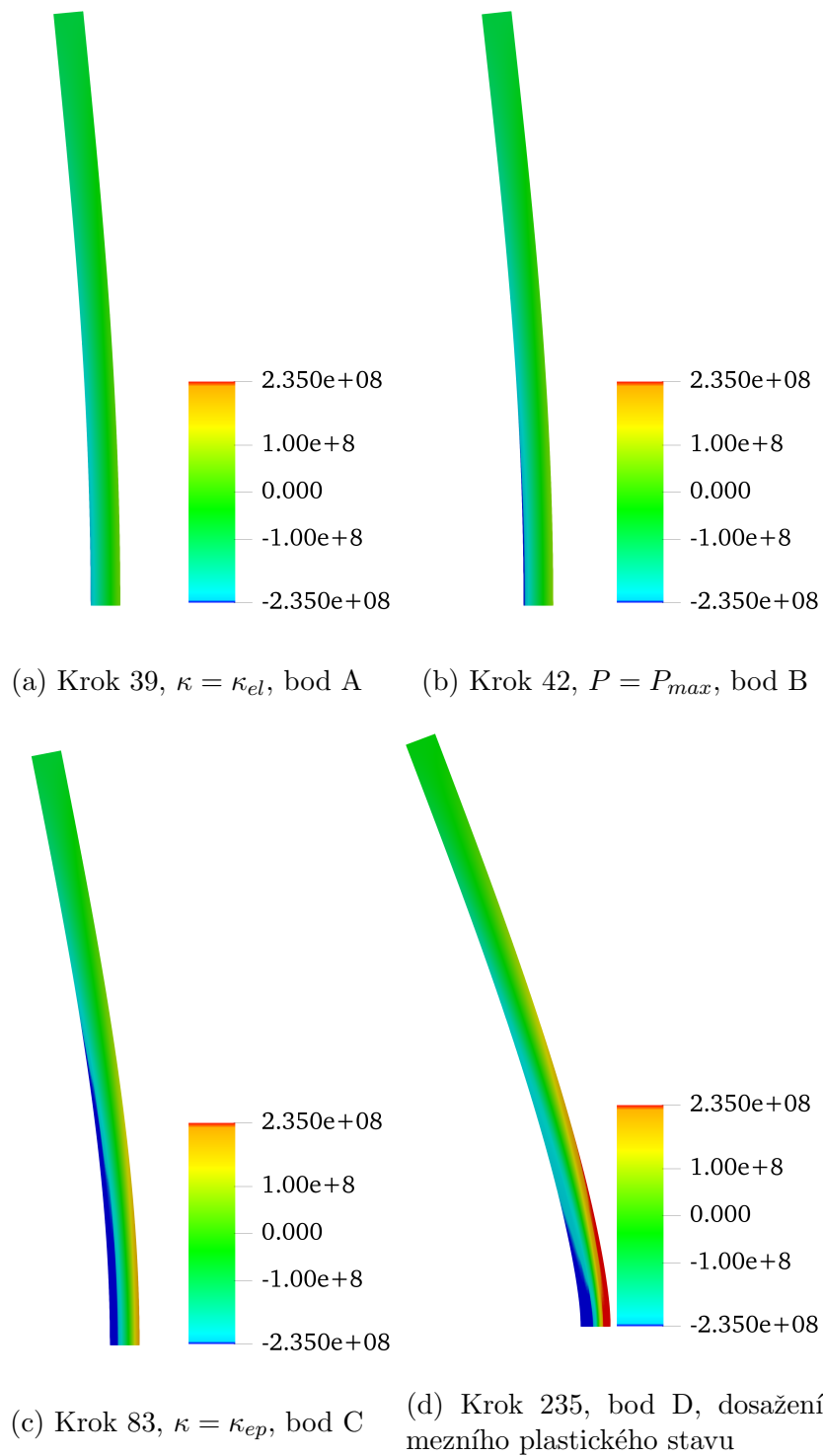


Obr. 3.5: Pružnoplastické řešení MKP pro síť 3 s význačnými body

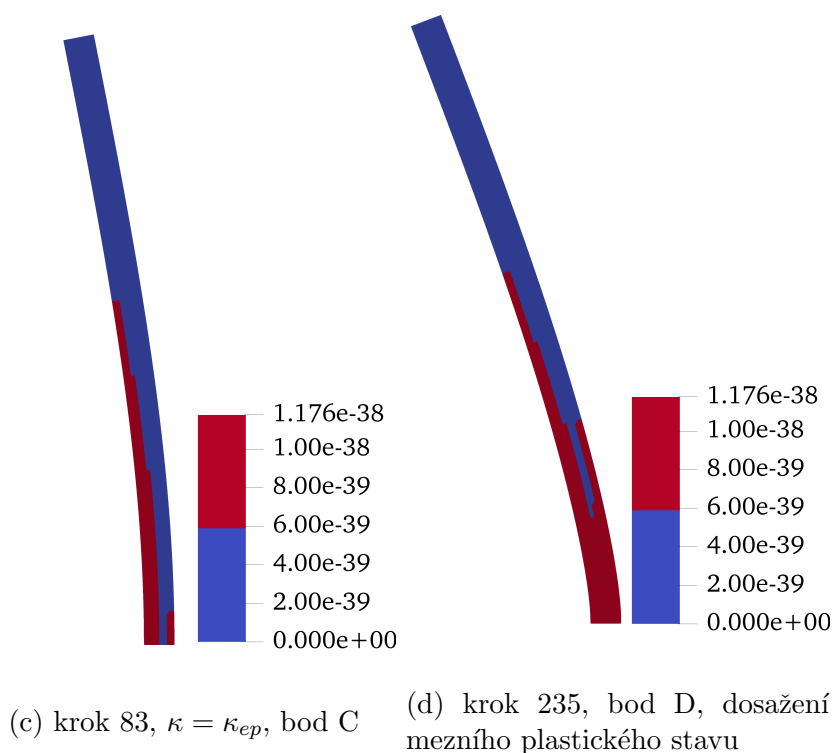
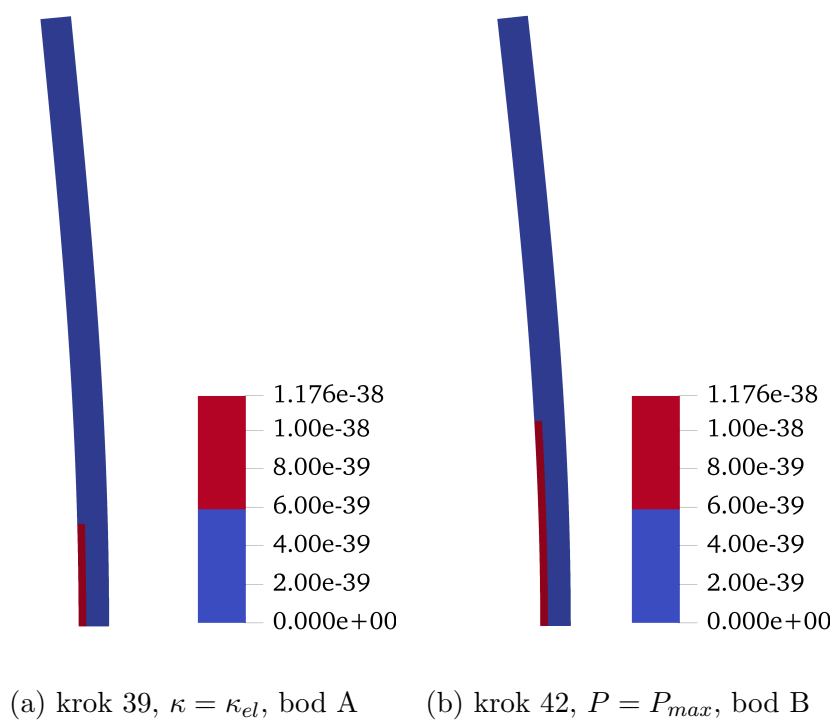
meze kluzu v tlačené části v nejnamáhanějším průřezu, tedy průřezu uprostřed. Následně se bude v průběhu zatěžování plastická zóna zvětšovat a tím klesat tuhost celého systému. V bodě, kdy klesne na nulu, bude dosaženo maximálního zatížení, které dokáže prut přenést (bod B). Poté bude tuhost systému záporná, neboli průhyb bude narůstat i za snižující se tlakové síly. To však ještě neznamená kolaps konstrukce. Ten nastane až v momentě, kdy nejnamáhanější průřez dosáhne mezního plastického stavu (bod D). Někde mezi tímto stavem a bodem, kdy bylo poprvé dosaženo meze kluzu v tlačných krajních vláknech (bod A), nastane situace, kdy i napětí v tažených vláknech bude právě rovno mezi kluzu. Zda se bude tento bod nacházet před dosažením maximálního zatížení, nebo po dosažení maximálního zatížení, záleží na kombinaci geometrických a materiálových parametrů. Pro tento konkrétní případ je dosaženo meze kluzu v tahu až v klesající části křivky (bod C).

Bylo zmíněno, že kolaps konstrukce nastane v bodě D, kdy dojde ke vzniku plastického kloubu. V tomto bodě je v prostředním průřezu poprvé dosaženo mezního plastického stavu, ve kterém bude průřez setrvávat i pro větší průhyby.

Na Obr. 3.6 je vykresleno napětí σ_x [Pa] a deformovaný tvar pro zmíněné význačné body. Na Obr. 3.6a je zatížení na takové úrovni, že právě dochází k plastizaci tlačných vláken. Zbytek prutu je v pružném stavu. Ve stavu zobrazeném na Obr. 3.6b je dosaženo maximálního zatížení. Na Obr. 3.6c je právě dosaženo meze kluzu v tažených vláknech. Na Obr. 3.6d dochází ke kolapsu. Na Obr. 3.7 je vykreslena norma tensoru plastické deformace pro čtyři zmíněné zatěžovací kroky. Je vidět, jak se v průběhu zatěžování plastická zóna rozšiřuje.



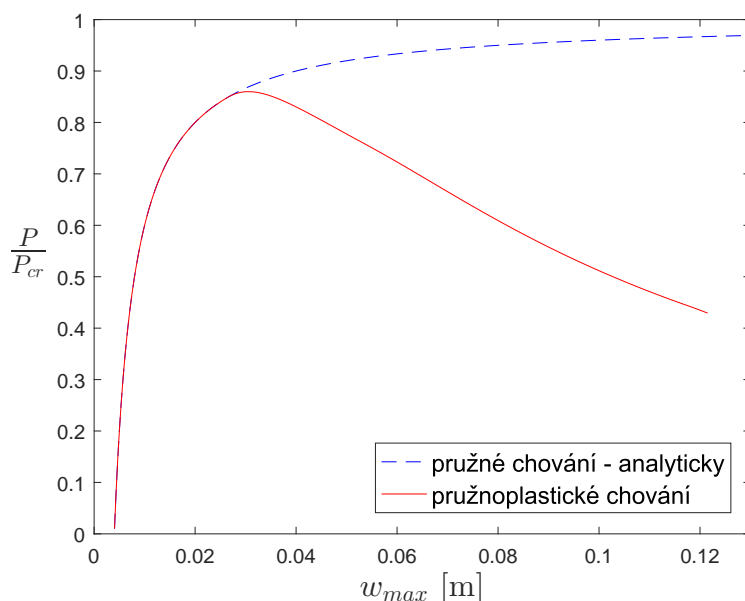
Obr. 3.6: Průběh napětí σ_x a naznačení deformovaného tvaru v různých zatěžovacích časech



Obr. 3.7: Vykreslení normy tensoru plastické deformace v různých zatěžovacích časech

3.2 Výsledky vypočítané metodou střelby

Nyní bude proveden výpočet metodou střelby. Na Obr. 3.8 je zobrazena závislost zatížení na maximálním průhybu uprostřed prutu s uvažováním pružnoplastického chování prutu. Maximální síla, kterou je prut schopen přenést, je rovna

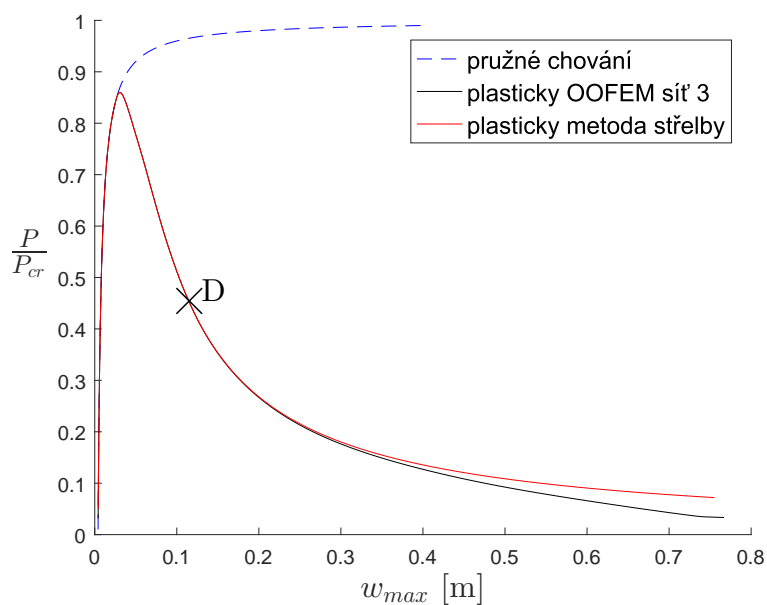


Obr. 3.8: Závislost P/P_{cr} na průhybu uprostřed prutu určená metodou střelby

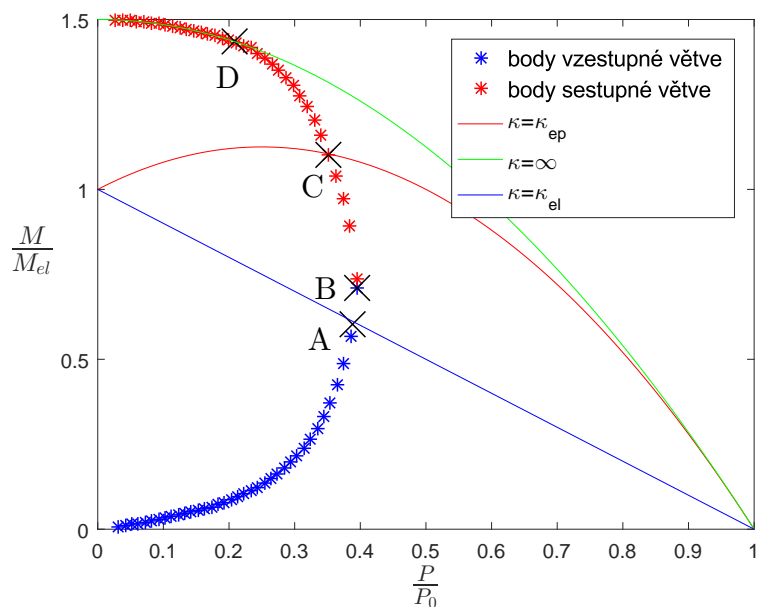
1.3923 MN, poměr maximální síly a kritické síly P_{max}/P_{cr} je roven 0.8599. Průhyb w_u při maximální síle je roven 0.0302 m a maximální průhyb v bodě, kdy se průřez uprostřed dostane do mezního plastického stavu, je roven 0.1215 m.

Na Obr. 3.9 jsou porovnány výsledky metody konečných prvků a výsledky podle metody střelby pro pružnoplastický výpočet. Na grafu je opět znázorněn bod D, ve kterém se prostřední průřez nachází v mezním plastickém stavu. Body křivky, které se nacházejí napravo od tohoto bodu, jsou dopočítané analyticky. Předpokládá-li se, že pro větší průhyby bude nejnamáhanější průřez stále v mezním plastickém stavu, ohybový moment je pro danou normálovou sílu jednoznačně určen. Ze znalosti ohybového momentu a velikosti působícího zatížení je pak znám i průhyb v prostředním průřezu. Ten se vypočítá jako $w(L/2) = M/P$.

Na Obr. 3.10 je vykreslen interakční diagram zmíněného průřezu. V průběhu zatěžování se nejdříve zvětšovala tlaková síla, dokud její hodnota nedosáhla maxima, které je prut schopen přenést. Poté zatížení klesalo. Každé hodnotě síly lze přiřadit ohybový moment, který v daném průřezu působil. Tyto body jsou zobrazeny v interakčním diagramu. Dále jsou do grafu vykresleny zmíněné



Obr. 3.9: Porovnání pružnoplastického výpočtu podle MKP a metody střelby



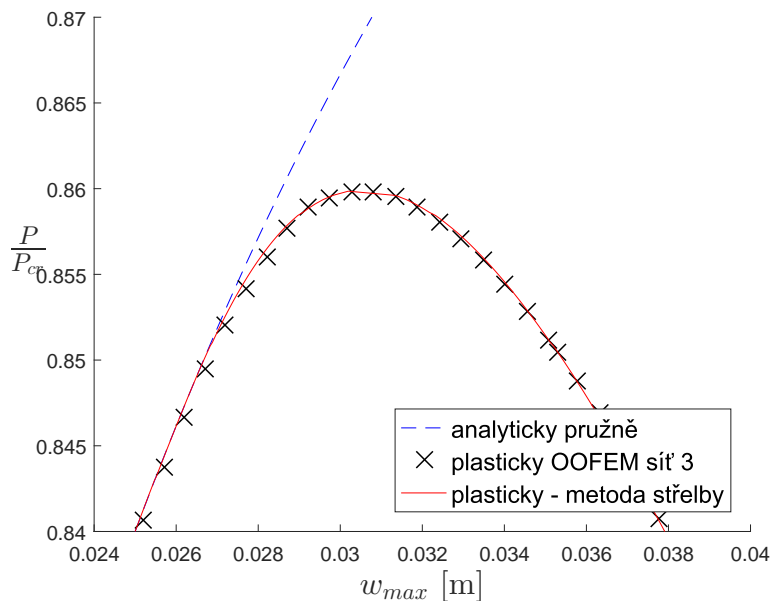
Obr. 3.10: Interakční diagram prostředního průřezu v průběhu zatěžování

body A, B, C a D. Je patrné, že body ležící za bodem D kopírují křivku mezního plastického stavu.

Z Obr. 3.9 je vidět, že výsledky metody střelby a podle MKP se výrazněji liší až v oblasti, kde průhyby dosahují vysokých hodnot. Výpočet metodou střelby

je platný pouze za předpokladu malých deformací, zatímco program OOFEM toto omezení nemá.

Na Obr. 3.11 je zobrazen detail Obr. 3.9 pro oblast, kdy je dosaženo maximální síly. V Tab. 3.4 jsou zobrazeny hodnoty maximální dosažené síly podle metody



Obr. 3.11: Detail Obr. 3.9 v oblasti, kdy je dosaženo maximálního zatížení

konečných prvků a podle metody střelby a jejich odchylka. Z grafu i číselných hodnot je vidět, že výsledky jsou velmi podobné.

	$\frac{P_{max,OOFEM}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{max,matlab}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{max,OOFEM} - P_{max,matlab}}{P_{max,matlab}} \cdot 100$ [%]
Síť 3	0.8598	0.8599	$-5.7459 \cdot 10^{-4}$

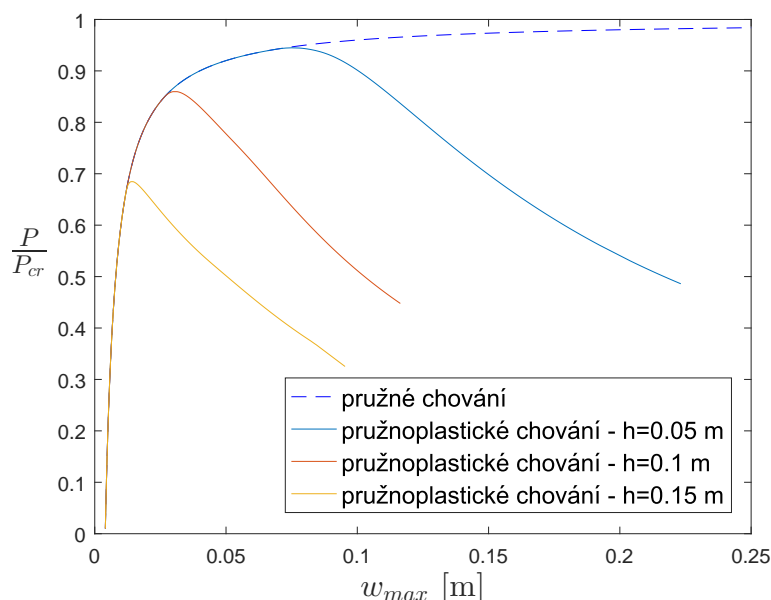
Tab. 3.4: Porovnání výsledků podle programu OOFEM a podle metody střelby

3.3 Vliv parametrů

V této sekci budou provedeny výpočty metodou střelby pro pruty s různými geometrickými charakteristikami a rozměry. Z výsledků bude patrný vliv jednotlivých parametrů na průběh odezvy prutu na dané zatížení.

Na Obr. 3.12 jsou zobrazeny zatěžovací křivky pro tři různě velké průřezy.

Šířka průřezu $b = 0.15\text{m}$ je stále stejná, mění se pouze výška průřezu h . Postupně bude nabývat hodnot 0.05m , 0.1m a 0.15m .



Obr. 3.12: Porovnání zatěžovacích křivek pro různě vysoké průřezy

Na Obr. 3.13 je vyobrazen interakční diagram průřezu uprostřed prutu. Jsou na něm zobrazeny křivky odpovídající meznímu pružnému stavu ($\kappa = \kappa_{el}$), meznímu plastickému stavu ($\kappa = \infty$) a křivka odpovídající přechodnému stavu mezi možnostmi 2 a 3 ($\kappa = \kappa_{ep}$), viz sekce 2.3. Dále jsou do grafů zakresleny kombinace ohybového momentu a normálové síly pro každý zatěžovací krok. V grafu jsou celkem tři sady těchto bodů, každá odpovídající dané výšce prutu. Modré křížky jsou body odpovídající rostoucí části zatěžovací křivky a červené křížky odpovídají části klesající.

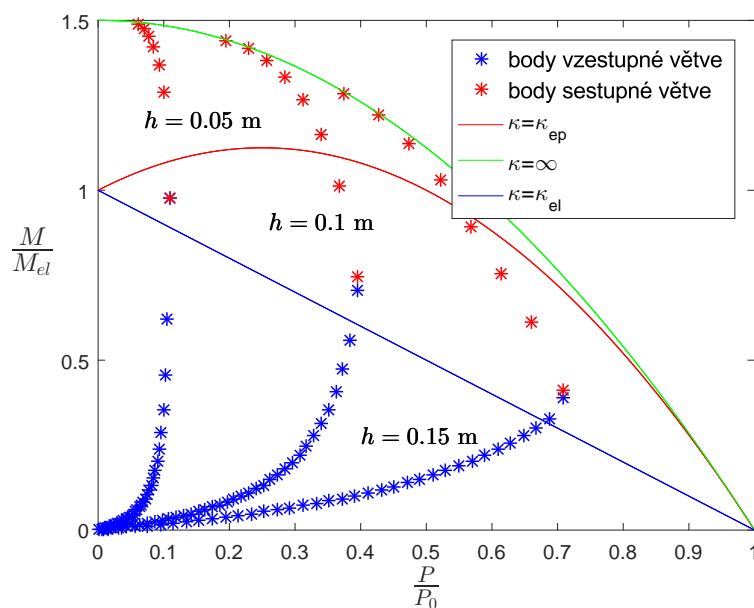
Z grafů je patrné, že čím je výška průřezu větší, tím je prut méně štíhlý a plastické chování materiálu má větší vliv na maximální únosnost prvku.

Na Obr. 3.14 jsou zobrazeny zatěžovací křivky pro měnící se délky průřezu. Rozměry průřezu jsou tentokrát stejné pro všechny křivky, tedy $b = 0.15\text{ m}$ a $h = 0.1\text{ m}$. Délka prutu L bude mít hodnoty 2 m , 3 m a 4 m .

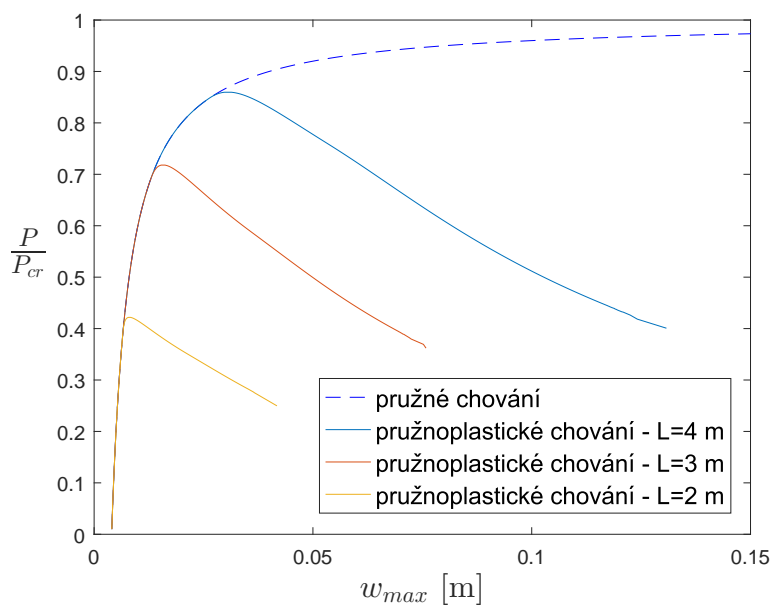
Na Obr. 3.15 jsou pak opět vyobrazeny interakční diagramy průřezu uprostřed prutu pro různě dlouhé prvky.

Opět je vidět, že zkracující se délka prutu a tedy zmenšující se štíhlost výrazně ovlivňuje maximální hodnotu zatížení, které je prut schopen přenést s uvažováním pružnoplastického chování materiálu.

Vliv počáteční excentricity na chování prutu v průběhu zatěžování je ukázán

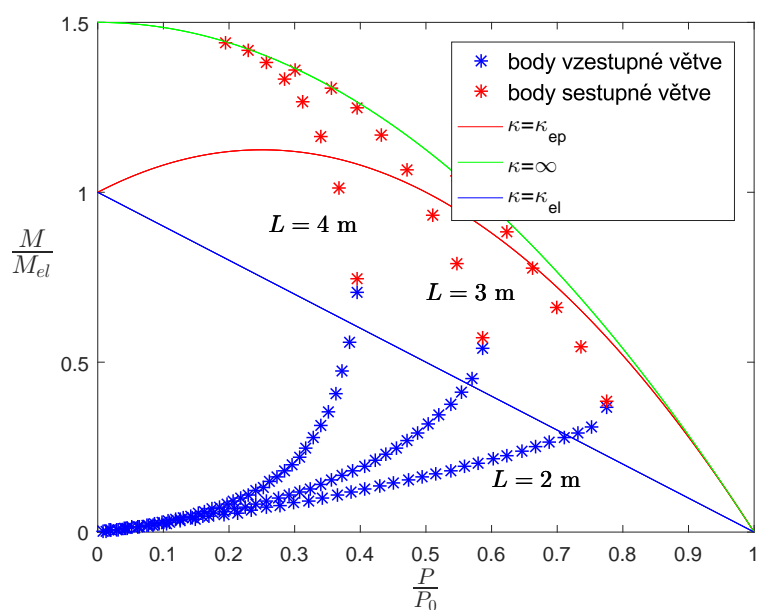


Obr. 3.13: Interakční diagram prostředního průřezu pro prvky, které se liší výškou průřezu

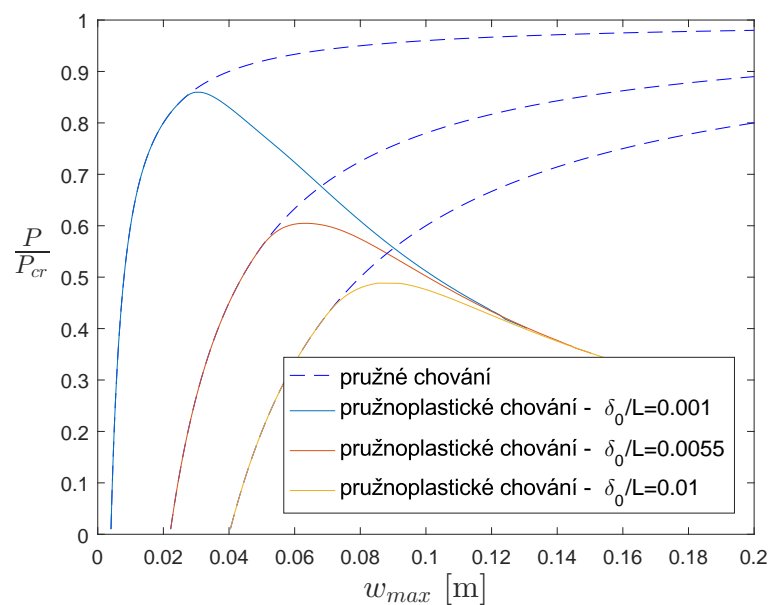


Obr. 3.14: Porovnání zatěžovacích křivek pro různě dlouhé pruty

na Obr. 3.16. Konkrétní hodnoty poměru počáteční excentricity a délky prutu δ_0/L jsou 0.001, 0.0055 a 0.01. Je vidět, že zvětšení počáteční excentricity snižuje maximální únosnost. Na Obr. 3.17 je pak opět zobrazen interakční

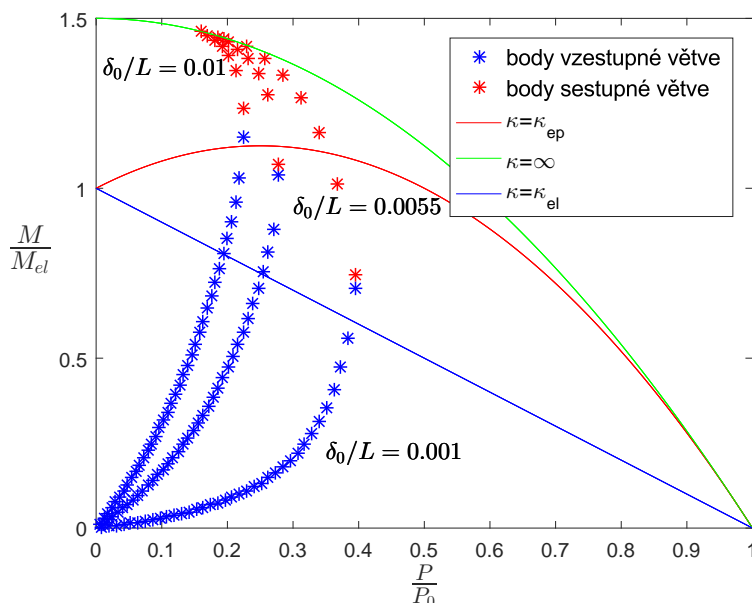


Obr. 3.15: Interakční diagram prostředního průřezu pro prvky, které se liší délkou prutu



Obr. 3.16: Porovnání zatěžovacích křivek pro prvky s různými počátečními výchylkami

diagram prostředního průřezu a zanesené kombinace ohybového momentu a normálové síly pro zvětšující se zatížení a pro různé excentricity.

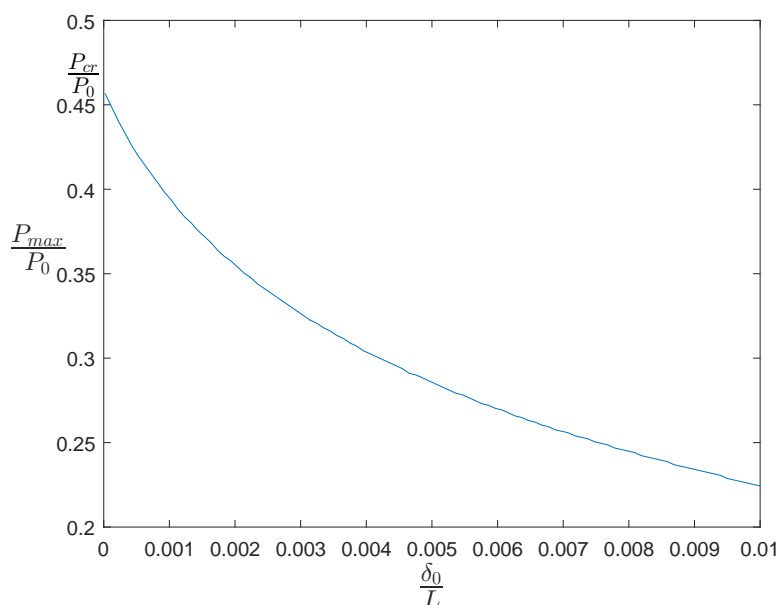
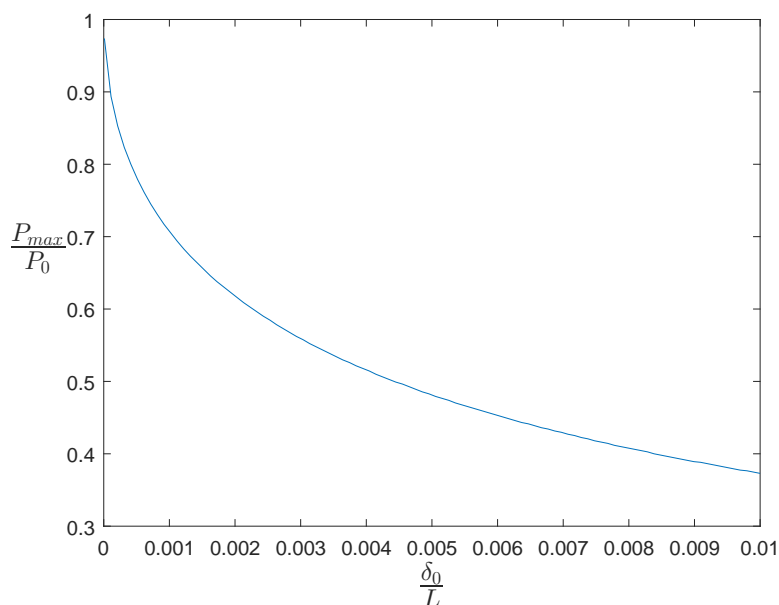


Obr. 3.17: Interakční diagram prostředního průřezu pro prvky, které se liší počáteční excentricitou

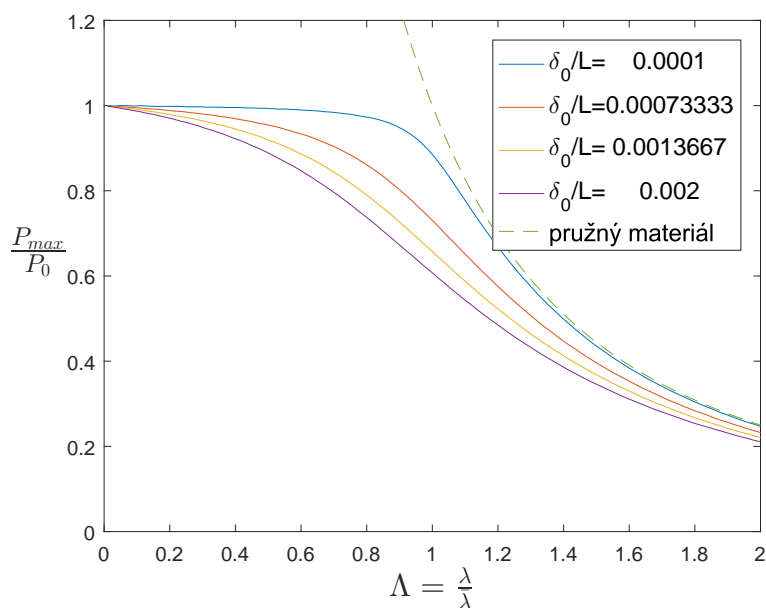
Prozatím bylo ze všech zmíněných interakčních diagramů vidět, že k překročení křivky, pro kterou platí $\kappa = \kappa_{ep}$, došlo až po dosažení maximální síly, tedy v sestupné části zatěžovací křivky. Až pro větší počáteční excentricity dochází k plastizaci v tažené oblasti ještě před dosažením maximální síly, jak je vidět na Obr. 3.17 pro počáteční excentricitu $\delta_0/L = 0.01$.

Zatím bylo na několika případech ukázáno, že zvětšující se excentricita a štíhlost prutu snižují maximální únosnost prvku. Bude názorné vykreslit si tyto závislosti do grafů. Na Obr. 3.18 je vykreslen vztah mezi maximálním zatížením a počáteční excentricitou. Blíží-li se počáteční excentricita k 0, maximální tlaková síla se bude přibližovat k hodnotě kritické síly P_{cr} . To však není obecným pravidlem, záleží na poměru kritické síly a plastické síly $P_0 = bh\sigma_0$. Bude-li $P_{cr}/P_0 < 1$ a počáteční excentricita blízká 0, bude platit $P_{max}/P_0 = P_{cr}/P_0$. Pro případ $P_{cr}/P_0 > 1$ platí $P_{max}/P_0 = 1$ pro $\delta_0 \rightarrow 0$. Například zvětší-li se výška průřezu h na 0.15 m, pak platí, že $P_{cr}/P_0 > 1$. Odpovídající graf závislosti P_{max}/P_0 na počáteční excentricitě je zobrazen na Obr. 3.19

Dalším názorným grafem je vykreslení závislosti maximální síly na štíhlosti, tedy stabilitní křivky. V sekci 1.1 byl odvozen tento vztah pro ideální průřez. Na Obr. 3.20 jsou vykresleny stabilitní křivky pro čtyři různé počáteční excentricity. Pro malé δ_0 je v oblastech $\Lambda > 1$ chování prutu velice podobné pružnému prvku. Až pro štíhlosti λ blízké se $\bar{\lambda}$, tedy $\Lambda \rightarrow 1$, se náhle začne

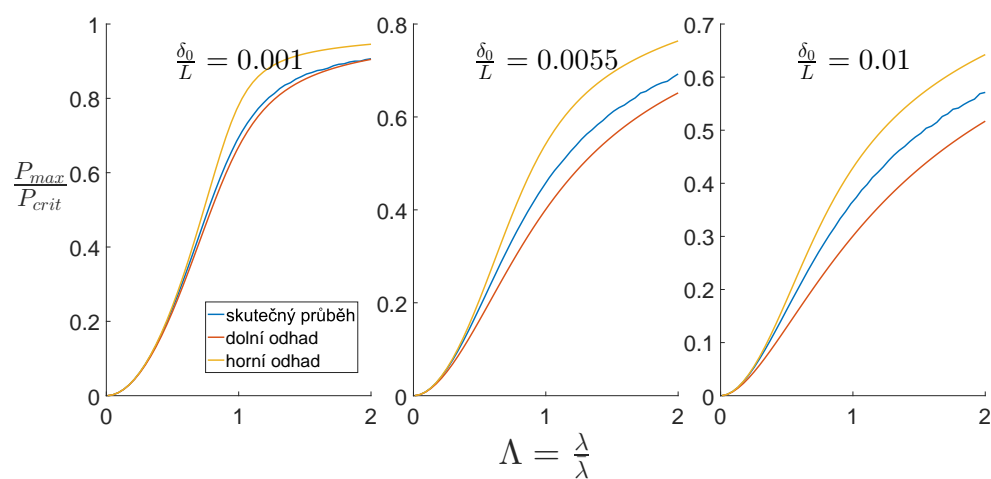
Obr. 3.18: Závislost P_{max}/P_0 na počáteční excentricitě pro $P_{cr}/P_0 < 1$ Obr. 3.19: Závislost P_{max}/P_0 na počáteční excentricitě pro $P_{cr}/P_0 > 1$

projevovat vliv plasticity. U prutů s větší počáteční excentricitou ovlivní plastické chování materiálu zatěžovací proces i při větších štíhlostech a ve větší míře. Výsledky numerického řešení tedy potvrzují odhad průběhu, který byl odvozen pro ideální průřez.



Obr. 3.20: Závislost P_{max}/P_0 na poměrné štíhlosti Λ

V sekci 1.2 byly sestrojeny odhady závislosti poměru P_{max}/P_{crit} na štíhlosti. Konkrétně byl sestrojen dolní odhad, ve kterém se uvažovalo, že průřez je v mezním pružném stavu. Horní odhad uvažoval s mezním plastickým stavem, nicméně vztah mezi průhybem w a zatížením P , který byl při odvození využit, neplatí pro případ pružnoplastického materiálu. Na Obr. 3.21 jsou znázorněny výše zmíněné odhady a skutečný průběh podle numerického výpočtu pro pruty se třemi různými počátečními excentricitami, konkrétně $\delta_0/L = 0.001$, $\delta_0/L = 0.0055$ a $\delta_0/L = 0.01$. Podle očekávání se křivka skutečného průběhu nachází mezi dolním a horním odhadem. Z grafů je vidět, že pro malé štíhlosti se křivka přimyká k hornímu plastickému odhadu. Dále je možné usoudit, že pro počáteční excentricity blíží se nule bude křivka téměř shodná s dolním pružným odhadem.

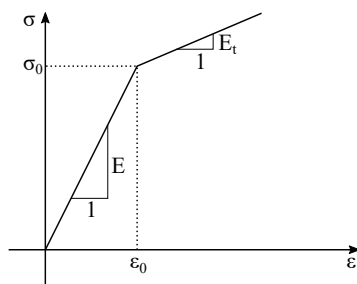


Obr. 3.21: Závislost P_{max}/P_{crit} na poměrné štíhlosti Λ a porovnání s odhady ze sekce 1.2

Kapitola 4

Model se zpevněním

Možné zobecnění výpočtu se nabízí v úpravě materiálového modelu. V této sekci bude uvažován materiál s lineárním zpevněním. Na Obr. 4.1 je zobrazen pracovní diagram. Materiál se bude ze začátku chovat lineárně pružně,



Obr. 4.1: Bilineární pracovní diagram pro model se zpevněním

ale jakmile napětí dosáhne meze kluzu, změní se konstanta úměrnosti mezi přírůstkem napětí a deformace – modul pružnosti E bude nahrazen tečným pružnostním modulem E_t . Při zatěžování v plastickém stavu bude vztah mezi přírůstkem napětí a deformace dán vzorcem $\Delta\sigma = E_t \Delta\varepsilon$.

4.1 Vztahy mezi ohybovým momentem a křivostí

Princip výpočtu bude obdobný jako pro ideálně pružnoplastický materiál. V rovnici

$$M_{ext} = M_{int}(P, \kappa) \quad (4.1)$$

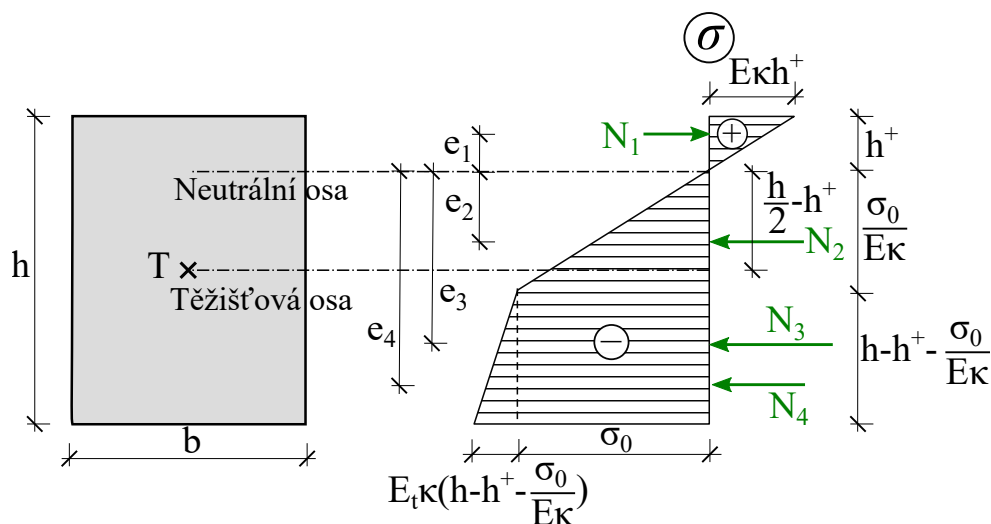
je potřeba upravit funkci M_{int} .

Pro případ pružného chování se nic nemění, známý vztah mezi křivostí a ohy-

bovým momentem $M = EI\kappa$ samozřejmě platí. Avšak u dalších dvou případeů změny nastanou.

Případ 2 pro materiál se zpevněním

Rozložení napětí pro případ 2 je znázorněno na Obr. 4.2. Tlačená vlákna plastizují a napětí v tažených vláknech je menší než mez kluzu σ_0 . Osová podmínka



Obr. 4.2: Rozložení napětí po průřezu pro materiál se zpevněním pro případ, kdy plastizují spodní vlákna

rovnováhy pro daný průřez se zapíše následovně:

$$N = N_1 - N_2 - N_3 - N_4 = \frac{1}{2} E_k b h^{+2} - \frac{1}{2} b \frac{\sigma_0^2}{E_k} - \sigma_0 \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E_k} \right) b + \frac{1}{2} \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E_k} \right)^2 E_t \kappa b = -P. \quad (4.2)$$

Řešením rovnice (4.2) pro h^+ lze dostat dva kořeny

$$h_{1,2}^+ = -\frac{\sigma_0}{E_k} - h \frac{E_t}{E - E_t} \pm \sqrt{\frac{2}{E b \kappa} (P_0 - P) \left(\frac{E_t}{E - E_t} + 1 \right) + h^2 \frac{E_t}{E - E_t} \left(\frac{E_t}{E - E_t} + 1 \right)}. \quad (4.3)$$

S využitím vztahu pro křivost v mezním pružném stavu

$$\kappa_{el} = \frac{2}{E b h^2} (P_0 - P) \quad (4.4)$$

a označením poměru

$$\frac{E_t}{E - E_t}$$

jako materiálový koeficient m se výraz přepíše na

$$h_{1,2}^+ = -\frac{\sigma_0}{E\kappa} - hm \pm h\sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}(m+1) + m(m+1)}. \quad (4.5)$$

Částečné ověření správnosti může být případ, kdy $E_t = 0$, tedy případ ideálně pružnoplastického chování. Koeficient m bude roven nule a rovnice se zjednoduší na

$$h_{1,2}^+ = -\frac{\sigma_0}{E\kappa} \pm h\sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} = -\frac{\sigma_0}{E\kappa} \pm \sqrt{\frac{2}{Eb\kappa}(P_0 - P)}, \quad (4.6)$$

což je shodný vzorec jako rovnice (2.13) odvozená pro ideálně pružnoplastický materiál.

Ohybový moment je pak možné vyjádřit následujícím vztahem

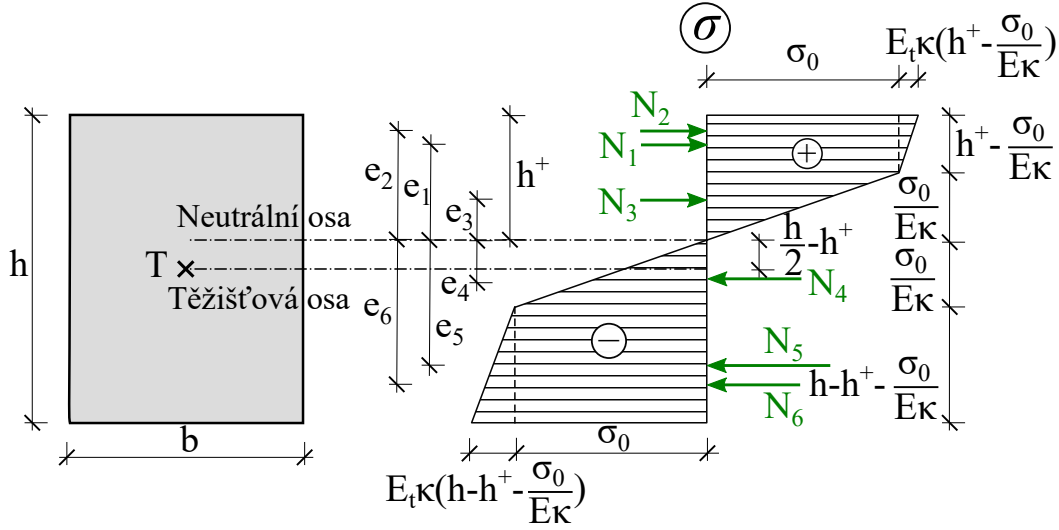
$$\begin{aligned} M = N_1e_1 + N_2e_2 + N_3e_3 + N_4e_4 - P \left(\frac{h}{2} - h_{1,2}^+ \right) &= \frac{1}{3}Eb\kappa h_{1,2}^+{}^3 + \frac{1}{3}\frac{\sigma_0^3}{E^2\kappa^2}b + \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_0 \left(h - h_{1,2}^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) b \left(\frac{\sigma_0}{E\kappa} + h - h_{1,2}^+ \right) + \\ &+ \frac{1}{6}E_t\kappa b \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \left(2h - 2h^+ + \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) - P \left(\frac{h}{2} - h_{1,2}^+ \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Po dosazení vztahu (4.5) do rovnice (4.7) je vzorec pro ohybový moment poměrně složitý a vyjádřit z něj křivost κ explicitně nelze. Je potřeba numericky řešit implicitní rovnici $f(\kappa) = 0$. K tomu byla využita Newtonova metoda.

Případ 3 pro materiál se zpevněním

Rozložení napětí pro případ, kdy plastizují tlačena i tažená vlákna, je vykresleno na Obr. 4.3. Pro výpočet vzdálenosti neutrální osy od horních vláken h^+ se využije silová podmínka rovnováhy

$$\begin{aligned} N = N_1 + N_2 + N_3 - N_4 - N_5 - N_6 &= \left(h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) \sigma_0 b + \frac{1}{2} \left(h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 E_t\kappa b + \\ &+ \frac{1}{2}b\frac{\sigma_0^2}{E\kappa} - \frac{1}{2}b\frac{\sigma_0^2}{E\kappa} - \sigma_0 \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) b + \\ &- \frac{1}{2} \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 E_t\kappa b = -P. \end{aligned} \quad (4.8)$$



Obr. 4.3: Rozložení napětí po průřezu pro materiál se zpevněním pro případ, kdy plastizují spodní i horní vlákna

Z té se vyjádří

$$h^+ = \frac{P_0 \left(1 - \frac{E_t}{E}\right) + \frac{1}{2}bh^2\kappa E_t - P}{2\sigma_0 b \left(1 - \frac{E_t}{E}\right) + E_t\kappa bh}. \quad (4.9)$$

Opět lze ověřit limitní případ, kdy $E_t = 0$ a rovnice (4.9) se zjednoduší na

$$h^+ = \frac{P_0 - P}{2\sigma_0 b}. \quad (4.10)$$

Tento vzorec je shodný se vztahem (2.36).

Obdobně jako pro předchozí případy se vyjádří ohybový moment

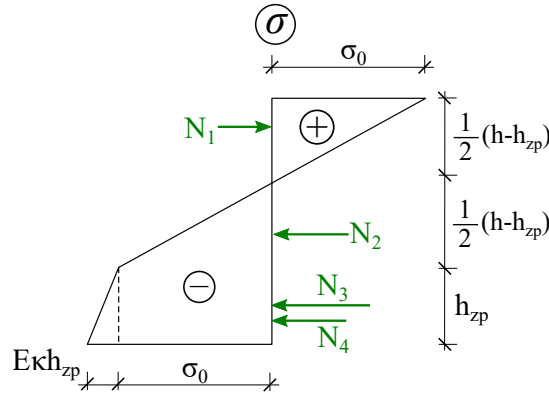
$$\begin{aligned} M &= N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3 + N_4 e_4 + N_5 e_5 + N_6 e_6 - P \left(\frac{h}{2} - h_{1,2}^+ \right) = \\ &= \frac{1}{2}\sigma_0 b \left(h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) \left(h^+ + \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) + \frac{1}{6}E_t\kappa b \left(h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \left(2h^+ + \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) + \\ &+ \frac{2}{3}b \frac{\sigma_0^3}{E^2\kappa^2} + \frac{1}{2}\sigma_0 b \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) \left(h - h^+ + \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) + \\ &+ \frac{1}{6}E_t\kappa b \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \left(2h - 2h^+ + \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) - P \left(\frac{h}{2} - h_{1,2}^+ \right). \quad (4.11) \end{aligned}$$

Mezní křivost κ_{ep}

Pro ideálně pružnoplastický materiál byly odvozeny mezní křivosti κ_{el} a κ_{ep} , které oddělovaly jednotlivé varianty rozložení napětí. Vztah

$$\kappa_{el} = \frac{2\sigma_0}{Eh} (1 - p_0) \quad (4.12)$$

pro křivost oddělující mezní pružný stav od stavu, kdy plastizují tlačena vlákna, je stále platný i pro materiál se zpevněním. Rovnici pro mezní křivost κ_{ep} je potřeba odvodit znovu. Na Obr. 4.4 je ukázáno rozložení napětí v tomto stavu. Vzdálenost h_{zp} se určí ze silové podmínky rovnováhy. Musí platit rovnost



Obr. 4.4: Rozložení napětí pro stav, kdy $\kappa = \kappa_{ep}$, tlačena oblast plastizuje a napětí v tažených vláknech je právě rovno mezi kluzu

$$\sum_i N_i = -P \quad (4.13)$$

$$\sigma_0 b h_{zp} + \frac{1}{2} \kappa_{ep} E_t h_{zp}^2 = P. \quad (4.14)$$

Z rovnice (4.14) se vyjádří vzdálenost h_{zp} jako

$$h_{zp,1,2} = -\frac{\sigma_0}{E_t \kappa_{ep}} \pm \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{E_t^2 \kappa_{ep}^2} + \frac{2P}{E_t \kappa_{ep} b}}. \quad (4.15)$$

Křivost κ_{ep} je tedy dána rovnicí

$$\kappa_{ep} = \frac{2\sigma_0}{E(h - h_{zp})} = \frac{2\sigma_0}{E \left(h + \frac{\sigma_0}{E_t \kappa_{ep}} \pm \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{E_t^2 \kappa_{ep}^2} + \frac{2P}{E_t \kappa_{ep} b}} \right)}. \quad (4.16)$$

Rovnice je v implicitním tvaru a k určení hodnoty κ_{ep} se využije opět Newtonova metoda.

Ohybový moment pro toto rozdělení napětí se určí jako

$$M_{ep} = N_1 \frac{1}{3} (h - h_{zp}) + N_2 \frac{1}{3} (h - h_{zp}) + N_3 \frac{h}{2} + N_4 \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{6} h_{zp} \right), \quad (4.17)$$

kde

$$N_1 = \frac{1}{4} \sigma_0 (h - h_{zp}) b \quad (4.18)$$

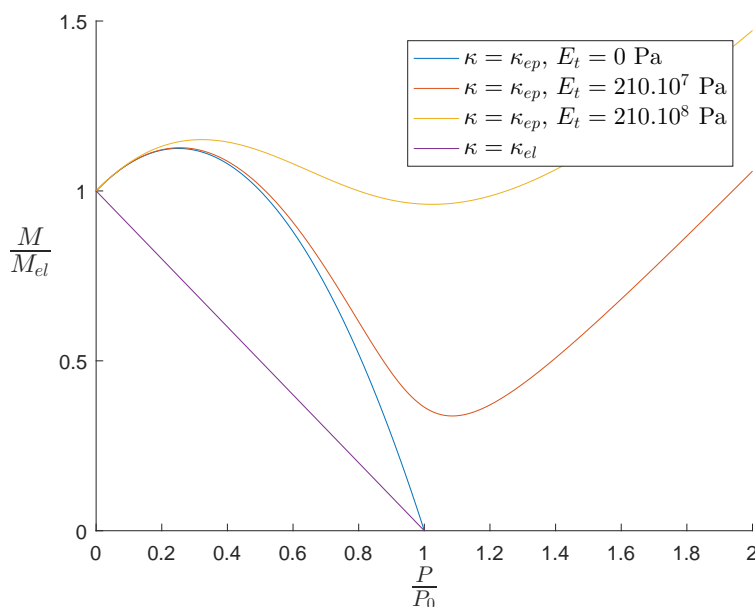
$$N_2 = \frac{1}{4} \sigma_0 (h - h_{zp}) b \quad (4.19)$$

$$N_3 = \sigma_0 h_{zp} b \quad (4.20)$$

$$N_4 = \frac{1}{2} E \kappa h_{zp}^2 b. \quad (4.21)$$

Do vzorce (4.17) se za h_{zp} dosadí rovnice (4.15), ve které se κ_{ep} vyjádří podle (4.16).

Na Obr. 4.5 je vykreslena závislost poměru M/M_{el} na P/P_0 , tedy interakční



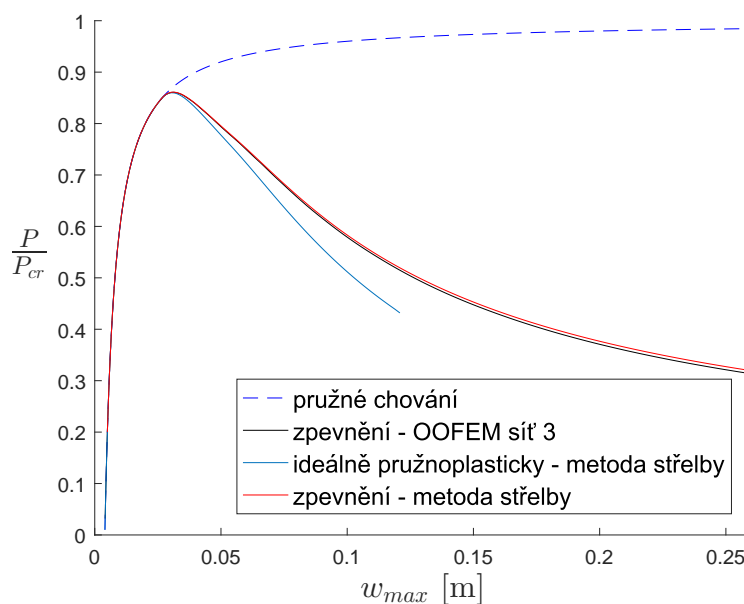
Obr. 4.5: Interakční diagram, křivka mezního pružného stavu a křivky pro stav, kdy je $\kappa = \kappa_{ep}$ pro různé E_t

diagram. Do něj je zanesena křivka odpovídající M_{ep} pro tři různé pružnoplastické moduly E_t , konkrétně $E_t = 0$ Pa, $E_t = 210 \cdot 10^7$ Pa a $E_t = 210 \cdot 10^8$ Pa. Dále je vykreslena křivka odpovídající momentu v mezním pružném stavu.

Z grafu je vidět rozdíl chování ideálně pružnoplastického materiálu a materiálu se zpevněním. Zatímco maximální zatížení pro ideálně pružnoplastický materiál je rovno síle P_0 , které odpovídá nulový ohybový moment, pro materiál se zpevněním může být zatížení nekonečně velké, ohybový moment bude se zvětšující silou růst do nekonečna. To platí pouze pro teoretické řešení uvažující neomezenou duktilitu. Pro reálný materiál nemohou plastické deformace nabývat libovolně velkých hodnot, ale pro určité deformace dojde k porušení. Tím je tedy limitována i maximální síla.

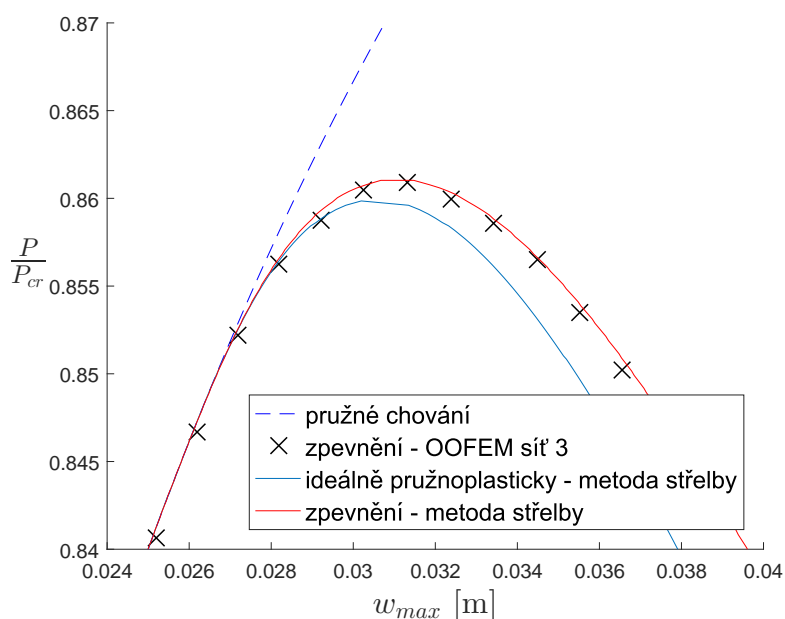
4.2 Příklad

V následující sekci budou ukázány výsledky stejného příkladu jako v kapitole 3, jen bude uvažován materiál s lineárním zpevněním s tečným elastoplastickým modulem $E_t = 210 \cdot 10^8$ Pa. Na Obr. 4.6 jsou porovnány čtyři zatěžovací křivky, tedy pro pružný materiál, pro ideálně pružnoplastický, dále výsledky pro materiál se zpevněním vypočítané metodou střelby a pak výsledky podle MKP. Na Obr. 4.7 je pak detail v oblasti, kde je dosaženo maximálního zatížení. Podle



Obr. 4.6: Zatěžovací křivka pro materiál se zpevněním a pro ideálně pružnoplastický materiál

očekávání je maximální zatížení o trochu větší než pro ideálně pružnoplastický materiál. Výsledky vypočítané metodou střelby se nepatrně liší od výpočtu metodou konečných prvků, avšak rozdíl je zanedbatelný. V Tab. 4.1 je numerické porovnání obou metod pro hodnotu maximálního zatížení. Jejich rozdíl



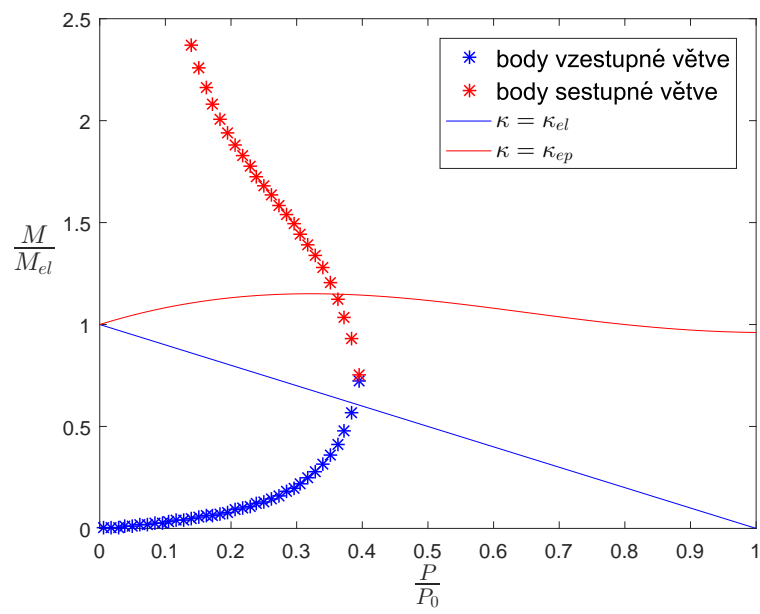
Obr. 4.7: Detail zatěžovací křivky v oblasti maximálního zatížení

$\frac{P_{max, OOFEM}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{max, matlab}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{max, OOFEM} - P_{max, matlab}}{P_{max, matlab}} \cdot 100$ [%]
0.8609	0.8610	$-1.88 \cdot 10^{-2}$

Tab. 4.1: Porovnání výsledků podle programu OOFEM a podle metody střelby pro materiál se zpevněním

je menší než 0.02%.

Na Obr. 4.8 je zakreslen interakční diagram prostředního průřezu. Dále jsou vykresleny křivky odpovídající mezním křivostem κ_{el} a κ_{ep} . Oproti výsledkům pro ideálně pružnoplastický materiál není momentová únosnost omezena.



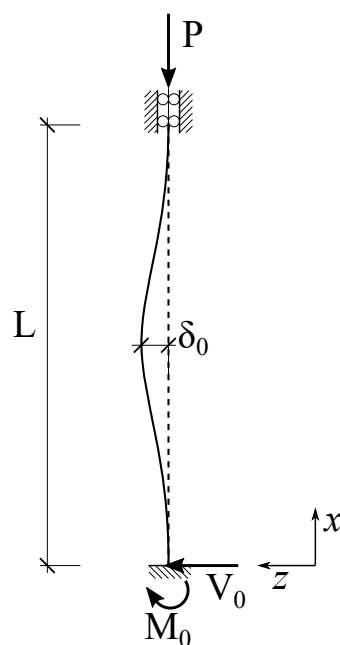
Obr. 4.8: Interakční diagram prostředního průřezu pro materiál se zpevněním

Kapitola 5

Staticky neurčité případy

5.1 Diferenciální rovnice a pružné řešení

Prozatím byla v práci věnována pozornost pouze prostě podepřenému prutu. Následující kapitola bude zaměřena na zobecnění algoritmu i pro staticky neurčité případy podpor. Odvození potřebných rovnic bude provedeno pro oboustranně vetknutý prut, avšak pro ostatní kombinace okrajových podmínek bude postup analogický. Schéma je ukázáno na Obr. 5.1.



Obr. 5.1: Schéma oboustranně vetknutého prutu

Počáteční excentricita je uvažována ve tvaru

$$w_0(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) \quad (5.1)$$

a materiálový model je ideálně pružnoplastický. Zapiše-li se momentová podmínka rovnováhy v bodě na ose prutu

$$M_{ext} = M_{int} \quad (5.2)$$

$$Pw(x) - M_0 - V_0x = M_{int}(P, \kappa(x)), \quad (5.3)$$

je patrné, že se v ní vyskytují dvě neznámé konstanty M_0 a V_0 , neboli ohybový moment ve vetknutí a posouvající síla v podpoře. Neznámé statické veličiny lze odstranit dvojnásobným derivováním. Tím se rovnice změní na

$$Pw''(x) = (M_{int}(P, \kappa(x)))'' \quad (5.4)$$

$$Pw''(x) = f(P, w''(x), w'''(x), w^{IV}(x)). \quad (5.5)$$

Jedná se o nelineární diferenciální rovnici čtvrtého řádu. K jejímu řešení jsou potřeba dvě okrajové podmínky na každém konci prutu. Pro oboustranné vetknutí jsou všechny podmínky kinematického typu, konkrétně $w(0) = w(L) = w'(0) = w'(L) = 0$.

Pro případ pružného materiálu je výsledná rovnice lineární a má tvar

$$w^{IV}(x) + \frac{P}{EI}w''(x) = -\kappa_0''(x), \quad (5.6)$$

kde

$$\kappa_0''(x) = -w_0^{IV}(x) = \frac{\delta_0}{2} \frac{16\pi^4}{L^4} \cos \frac{2\pi x}{L}. \quad (5.7)$$

Řešením homogenní rovnice s uvážením okrajových podmínek se získá hodnota Eulerova kritického břemene

$$P_{cr} = \frac{4EI\pi^2}{L^2} \quad (5.8)$$

a tvar vybočení jako funkce

$$w(x) = C_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right), \quad (5.9)$$

kde C_1 je libovolná konstanta.

Partikulární řešení prutu s počáteční excentricitou bude hledáno ve tvaru

$$w_p(x) = A \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right). \quad (5.10)$$

Dosazením do rovnice (5.6) se ukáže, že

$$A = \frac{\delta_0}{2} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}, \quad (5.11)$$

a tedy

$$w_p(x) = \frac{\delta_0}{2} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right). \quad (5.12)$$

Partikulární řešení splňuje okrajové podmínky, neboť platí $w_p(0) = w_p(L) = w_p'(0) = w_p'(L) = 0$. Proto je to i skutečné řešení uvažovaného problému (obecně by se přidávaly libovolné násobky funkcí, které řeší homogenní rovnici).

5.2 Úprava vztahů mezi momentem a křivostí

V kapitole 2 byly integrací napětí σ_x násobeného souřadnicí z určeny vztahy pro výpočet ohybového momentu M_{int} v závislosti na křivosti κ a zatížení P pro tři případy rozložení napětí. Tyto vzorce jsou stále platné, avšak pro dosazení do rovnice (5.5) je potřeba vyjádřit druhou derivaci funkce M_{int} podle prostorové souřadnice. Přitom M_{int} je popsáno jako funkce P a κ , kde P na prostorové souřadnici nezávisí. Funkci $M_{int}(\kappa(x))$ derivujeme jako složenou funkci:

$$\frac{dM_{int}}{dx} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{dx} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa} \kappa'. \quad (5.13)$$

Při výpočtu druhé derivace se využije také pravidlo o derivaci součinu:

$$\frac{d^2 M_{int}}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{dx} \right) = \frac{\partial^2 M_{int}}{\partial \kappa^2} \frac{d\kappa}{dx} \frac{d\kappa}{dx} + \frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa} \frac{d^2 \kappa}{dx^2} = \frac{\partial^2 M_{int}}{\partial \kappa^2} \kappa'^2 + \frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa} \kappa''. \quad (5.14)$$

Pak tedy pro každý dílčí případ rozložení napětí stačí vyjádřit první a druhou derivaci M_{int} podle κ a dosadit. Na závěr je potřeba křivost κ nahradit rozdílem $\kappa_{def} - \kappa_0$.

Případ 1 pro staticky neurčitý prut

Pro stav, kdy se materiál chová lineárně pružně, je moment vyjádřen obvyklým vztahem

$$M_{int} = EI\kappa. \quad (5.15)$$

První a druhá derivace M_{int} podle křivosti κ jsou:

$$\frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa} = EI, \quad \frac{\partial^2 M_{int}}{\partial \kappa^2} = 0. \quad (5.16)$$

Dosazením do vzorce (5.14) se určí M_{int}''

$$\frac{d^2 M_{int}}{dx^2} = \frac{\partial^2 M_{int}}{\partial \kappa^2} \kappa'^2 + \frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa} \kappa'' = EI \kappa'' \quad (5.17)$$

$$\frac{d^2 M_{int}}{dx^2} = EI (\kappa''_{def} - \kappa''_0). \quad (5.18)$$

Případ 2 pro staticky neurčitý prut

V případě, kdy plastizují tlačena vlákna, zatímco tažená oblast je v pružném stavu, je moment dán vztahem:

$$M_{int} = (P_0 - P)h \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \right). \quad (5.19)$$

První a druhá derivace M_{int} podle křivosti κ jsou:

$$\frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa} = \frac{1}{6} (P_0 - P) h \sqrt{\kappa_{el}} \frac{1}{\sqrt{\kappa}^3} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial^2 M_{int}}{\partial \kappa^2} = -\frac{1}{4} (P_0 - P) h \sqrt{\kappa_{el}} \frac{1}{\sqrt{\kappa}^5}. \quad (5.21)$$

Dosazením do vzorce (5.14) se určí M_{int}''

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_{int}}{dx^2} &= -\frac{1}{4} (P_0 - P) h \sqrt{\kappa_{el}} \frac{\kappa'^2}{\sqrt{\kappa}^5} + \frac{1}{6} (P_0 - P) h \sqrt{\kappa_{el}} \frac{\kappa''}{\sqrt{\kappa}^3} = \\ &= \frac{1}{6} (P_0 - P) h \sqrt{\kappa_{el}} \left(\frac{\kappa''}{\sqrt{\kappa}^3} - \frac{3}{2} \frac{\kappa'^2}{\sqrt{\kappa}^5} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\frac{d^2 M_{int}}{dx^2} = \frac{1}{6} (P_0 - P) h \sqrt{\kappa_{el}} \left(\frac{\kappa''_{def} - \kappa''_0}{\sqrt{\kappa_{def} - \kappa_0}^3} - \frac{3}{2} \frac{(\kappa'_{def} - \kappa'_0)^2}{\sqrt{\kappa_{def} - \kappa_0}^5} \right). \quad (5.23)$$

Případ 3 pro staticky neurčitý prut

Plastizují-li tlačena i tažená vlákna, moment M_{int} se určí následovně:

$$M_{int} = \left(1 - \frac{P^2}{P_0^2} \right) M_{pl} - \frac{1}{3} \frac{\kappa_{ep}^2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{P}{P_0} \right)^2 M_{pl}. \quad (5.24)$$

Analogicky předchozím případům se určí potřebné derivace a následně se dosadí do vzorce (5.14):

$$\frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa} = \frac{2}{3} \kappa_{ep}^2 \left(1 - \frac{P}{P_0} \right)^2 M_{pl} \frac{1}{\kappa^3} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial^2 M_{int}}{\partial \kappa^2} = -2\kappa_{ep}^2 \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)^2 M_{pl} \frac{1}{\kappa^4} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_{int}}{dx^2} &= -2\kappa_{ep}^2 \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)^2 M_{pl} \frac{\kappa'^2}{\kappa^4} + \frac{2}{3}\kappa_{ep}^2 \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)^2 M_{pl} \frac{\kappa''}{\kappa^3} = \\ &= \frac{2}{3}\kappa_{ep}^2 \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)^2 M_{pl} \frac{\kappa\kappa'' - 3\kappa'^2}{\kappa^4} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\frac{d^2 M_{int}}{dx^2} = \frac{2}{3}\kappa_{ep}^2 \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)^2 M_{pl} \frac{(\kappa_{def}'' - \kappa_0'')(\kappa_{def}' - \kappa_0') - 3(\kappa_{def}' - \kappa_0')^2}{(\kappa_{def} - \kappa_0)^4}. \quad (5.28)$$

5.3 Diskretizace a metoda střelby

Jelikož se jedná o diferenciální rovnici čtvrtého řádu, diferenční schémata třetí a čtvrté derivace budou [5, Kapitola 27]

$$(\cdot)_k^{IV} = \frac{(\cdot)_{k-2} - 4(\cdot)_{k-1} + 6(\cdot)_k - 4(\cdot)_{k+1} + (\cdot)_{k+2}}{\Delta x^4} \quad (5.29)$$

$$(\cdot)_k''' = \frac{-(\cdot)_{k-2} + 2(\cdot)_{k-1} - 2(\cdot)_{k+1} + (\cdot)_{k+2}}{2\Delta x^2}. \quad (5.30)$$

Při použití metody střelby bude tentokrát nezbytné odhadovat dvě veličiny. Pro oboustranně vetknutý prut již nemá smysl odhadovat derivaci v počátku, jelikož ta je dána okrajovou podmínkou. Místo toho se budou odhadovat fiktivní průhyby w_{-2} a w_{-1} . Zapiše-li se diferenční náhrada pro čtvrtou derivaci průhybu v počátku (tedy pro $k = 0$)

$$w_{k=0}^{IV} = \frac{w_{-2} - 4w_{-1} + 6w_{k=0} - 4w_1 + w_2}{\Delta x^4}, \quad (5.31)$$

vystupuje v ní jediná neznámá w_2 . Hodnoty w_{-2} a w_{-1} budou odhadnuty, průhyb $w_{k=0}$ je dán okrajovou podmínkou. Aproximací okrajové podmínky pro nulovou derivaci v počátku diferenční náhradou

$$w'(0) = \frac{w_1 - w_{-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (5.32)$$

je dán vztah $w_1 = w_{-1}$.

Nyní by bylo možné zapsat v každém bodě x_k dvakrát zderivovanou podmínku rovnováhy podle vztahů odvozených v předchozí části práce. Následně by se křivosti $\kappa_{def,k}$ přepsaly jako $-w_k''$. Derivace by se nahradily diferenčními náhradami a z této rovnosti by se pak vyjádřila neznámá w_{k+2} . Tu bude možné

vyjádřit explicitně jako kořen kvadratické rovnice. Částečně se vztahy zjednoduší, když se na místo třetí a čtvrté derivace funkce w bude aproximovat první a druhá derivace funkce κ_{def} . Diferenční náhrady budou

$$\kappa'_{def,k} = \frac{\kappa_{def,k+1} - \kappa_{def,k-1}}{2\Delta x} \quad (5.33)$$

$$\kappa''_{def,k} = \frac{\kappa_{def,k+1} - 2\kappa_{def,k} + \kappa_{def,k-1}}{\Delta x^2}. \quad (5.34)$$

Neznámá w_{k+2} bude obsažena pouze v křivosti $\kappa_{def,k+1}$. Nejdříve se tedy do vztahů (5.18), (5.23) nebo (5.28) dosadí diferenční náhrady za první a druhou derivaci křivostí a následně se vyjádří křivost $\kappa_{def,k+1}$. Ta bude záviset na křivostech $\kappa_{def,k}$, $\kappa_{def,k-1}$ a na známé funkci počáteční křivosti a jejích derivacích. Jakmile bude $\kappa_{def,k+1}$ známa, určí se z ní průhyb v dalším bodě,

$$w_{k+2} = -\Delta x^2 \kappa_{def,k+1} + 2w_{k+1} - w_k. \quad (5.35)$$

Úpravy odhadů

Pro staticky neurčité případy bude nezbytné odhadovat dvě veličiny, aby bylo možné v každém bodě řešit jednu rovnici o jedné neznámé. K jejich opravě již nebude možné využít metodu půlení intervalu, ale bude potřeba implementovat složitější iterační metodu. Vhodnou volbou je například Newtonova-Raphsonova metoda. K tomu je však potřeba určit derivace funkcí, které popisují závislost koncových hodnot na počátečních odhadech. Pro oboustranné vetknutí je potřeba splnit nulový průhyb a derivaci na konci prutu. Jedna funkce bude tedy udávat závislost průhybu v koncovém bodě w_N na hodnotách w_{-2} a w_{-1} a druhá funkce bude udávat závislost rozdílu $w_{N+1} - w_{N-1}$ na w_{-2} a w_{-1} . Z těchto funkcí je pak potřeba určit derivace:

$$\frac{\partial w_N}{\partial w_{-2}}, \quad \frac{\partial w_N}{\partial w_{-1}}, \quad \frac{\partial(w_{N+1} - w_{N-1})}{\partial w_{-2}}, \quad \frac{\partial(w_{N+1} - w_{N-1})}{\partial w_{-1}}.$$

Pro představu bude výpočet naznačen na derivaci

$$\frac{\partial w_N}{\partial w_{-2}},$$

pro zbylé by probíhal obdobně. V každém bodě k se bude zkoumat derivace

$$\frac{\partial w_{k+2}}{\partial w_{-2}}.$$

S využitím pravidla o derivování složené funkce

$$w_{k+2} = g(w_{k+1}, w_k, \kappa_{def,k+1}) \quad (5.36)$$

se derivace přepíše jako

$$\frac{\partial w_{k+2}}{\partial w_{-2}} = \frac{\partial w_{k+2}}{\partial w_{k+1}} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial w_{-2}} + \frac{\partial w_{k+2}}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial w_{-2}} + \frac{\partial w_{k+2}}{\partial \kappa_{def,k+1}} \frac{\partial \kappa_{def,k+1}}{\partial w_{-2}}. \quad (5.37)$$

Funkce w_{k+2} je dána vztahem (5.35). Lze tedy psát

$$\frac{\partial w_{k+2}}{\partial w_{-2}} = 2 \frac{\partial w_{k+1}}{\partial w_{-2}} - \frac{\partial w_k}{\partial w_{-2}} - \Delta x^2 \frac{\partial \kappa_{def,k+1}}{\partial w_{-2}}. \quad (5.38)$$

Pro lepší představu bude uveden vztah pro pružné chování. Funkce $\kappa_{def,k+1}$ se vyjádří ze vztahu (5.18) následujícím postupem:

$$-P\kappa_{def}(x) = EI(\kappa_{def}'' - \kappa_0'') \quad (5.39)$$

$$-P\kappa_{def,k} = EI \left(\frac{\kappa_{def,k+1} - 2\kappa_{def,k} + \kappa_{def,k-1}}{\Delta x^2} - \kappa_0'' \right) \quad (5.40)$$

$$\kappa_{def,k+1} = \left(-\frac{P}{EI} \kappa_{def,k} + \kappa_0'' \right) \Delta x^2 + 2\kappa_{def,k} - \kappa_{def,k-1}. \quad (5.41)$$

Nyní se vyjádří derivace

$$\frac{\partial \kappa_{def,k+1}}{\partial w_{-2}} = \left(-\frac{P}{EI} \Delta x^2 + 2 \right) \frac{\partial \kappa_{def,k}}{\partial w_{-2}} - \frac{\partial \kappa_{def,k-1}}{\partial w_{-2}} \quad (5.42)$$

a dosadí se do vztahu (5.38):

$$\frac{\partial w_{k+2}}{\partial w_{-2}} = 2 \frac{\partial w_{k+1}}{\partial w_{-2}} - \frac{\partial w_k}{\partial w_{-2}} - \Delta x^2 \left(\left(-\frac{P}{EI} \Delta x^2 + 2 \right) \frac{\partial \kappa_{def,k}}{\partial w_{-2}} - \frac{\partial \kappa_{def,k-1}}{\partial w_{-2}} \right). \quad (5.43)$$

Poslední rovnice je rekurzivní vzorec pro výpočet derivace průhybu v následujícím dílku podle zvoleného odhadu w_{-2} .

Aby mohl výpočet pro bod $k = 0$ proběhnout, musí se vyjádřit potřebné počáteční hodnoty

$$\frac{\partial \kappa_{def,-1}}{\partial w_{-2}} = \frac{\partial}{\partial w_{-2}} \left(-\frac{w_{-2} - 2w_{-1} + w_{k=0}}{\Delta x^2} \right) = -\frac{1}{\Delta x^2} \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \kappa_{def,0}}{\partial w_{-2}} = \frac{\partial}{\partial w_{-2}} \left(-\frac{w_{-1} - 2w_{k=0} + w_1}{\Delta x^2} \right) = 0 \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial w_{-2}} = 0 \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial w_{k=0}}{\partial w_{-2}} = 0. \quad (5.47)$$

Následným dosazením do vzorce (5.43) se určí potřebná derivace

$$\frac{\partial w_2}{\partial w_{-2}} = -1. \quad (5.48)$$

Také se bude hodit zapsat derivaci funkce $\kappa_{def,1}$ podle vzorce (5.42), tedy

$$\frac{\partial \kappa_{def,1}}{\partial w_{-2}} = \frac{1}{\Delta x^2}. \quad (5.49)$$

Pro následující body bude výpočet postupovat analogicky. Až dojde algoritmus do bodu $k = N - 2$, určí hodnoty w_N a derivaci

$$\frac{\partial w_N}{\partial w_{-2}}.$$

Obdobným způsobem se určí i ostatní potřebné derivace. Následně se sestaví matice

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_N}{\partial w_{-2}} & \frac{\partial w_N}{\partial w_{-1}} \\ \frac{\partial(w_{N+1} - w_{N-1})}{\partial w_{-2}} & \frac{\partial(w_{N+1} - w_{N-1})}{\partial w_{-1}} \end{bmatrix}.$$

Pro pružnoplastický materiál bude jediná změna ve vzorci (5.42), který bude mít složitější tvar. Nicméně postup bude obdobný.

Princip Newtonovy-Raphsonovy metody spočívá v linearizaci funkce

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{x}) \quad (5.50)$$

definované jako rozdíl předepsaných hodnot \mathbf{F}_{ext} a vypočítaných hodnot $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{x})$. Pro tento konkrétní případ je

$$\mathbf{F}_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{int} = \begin{bmatrix} w_N \\ w_{N+1} - w_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} w_{-2} \\ w_{-1} \end{bmatrix}.$$

Rozepsáním funkce $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ do Taylorova rozvoje v blízkosti bodu \mathbf{x}_i (vektor odhadovaného řešení) a ponecháním pouze lineární části se dostane

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x}_i) + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (5.51)$$

Reziduum \mathbf{R} má být rovno nulovému vektoru, a tedy platí

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{x}_i) - \left[\frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}, \quad (5.52)$$

kde

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_i). \quad (5.53)$$

Hodnoty vektoru \mathbf{F}_{ext} jsou předepsány, a tím pádem nejsou funkcí \mathbf{x} a při derivování zmizí.

Vyjádří-li se z rovnice (5.52) vektor \mathbf{x} a označí se jako nový odhad řešení \mathbf{x}_{i+1} , dostane se následující vzorec (výraz \mathbf{F}_{ext} se v našem případě může vynechat, protože je roven nulovému vektoru):

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_i) \mathbf{F}_{int}(\mathbf{x}_i). \quad (5.54)$$

Inverzní matice \mathbf{J}^{-1} se snadno vyjádří jako

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial(w_{N+1} - w_{N-1})}{\partial w_{-1}} & -\frac{\partial w_N}{\partial w_{-1}} \\ -\frac{\partial(w_{N+1} - w_{N-1})}{\partial w_{-2}} & \frac{\partial w_N}{\partial w_{-2}} \end{bmatrix}.$$

Postup řešení je následovný. Zvolí se počáteční odhad hodnot w_{-2} a w_{-1} . Výše popsaným algoritmem se určí hodnoty w_N , w_{N-1} a potřebné derivace. Hodnoty průhybů na konci prutu se porovnají s předepsanými okrajovými podmínkami. Pokud nejsou dostatečně blízké, opraví se počáteční odhady využitím vzorce (5.54). Takto bude iterace probíhat, dokud rozdíl vypočítaných a předepsaných hodnot nebude splňovat danou toleranci.

Při výpočtu pro konkrétní případ se ukázalo, že funkce popisující hodnoty průhybů w_N a $w_{N+1} - w_{N-1}$ v závislosti na počátečních odhadech w_{-2} a w_{-1} , tedy funkce $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{x})$, není spojitou funkcí, což by být měla. Možná příčina může být v předpokladu spojitosti první a druhé derivace křivosti κ (resp. třetí a čtvrté derivace průhybu w). To jistě platí pro lineárně pružné chování, ale pro pružnoplastický materiál může nastat skok v průřezu, kde dochází k přechodu mezi případy 1 a 2 nebo případy 2 a 3. V těchto průřezích zmíněné derivace nemusí existovat. Ověření lze provést výpočtem derivací

$$\frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa}, \quad \frac{\partial^2 M_{int}}{\partial \kappa^2}$$

v bodech, kde je křivost rovna příslušné mezní křivosti. Následně se pak porovnají derivace vyhodnocené podle příslušných rovnic. Bude se porovnávat

$$\frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa}(\kappa = \kappa_{el}), \quad \frac{\partial^2 M_{int}}{\partial \kappa^2}(\kappa = \kappa_{el})$$

podle vzorce pro případ 1 a případ 2 a

$$\frac{\partial M_{int}}{\partial \kappa}(\kappa = \kappa_{ep}), \quad \frac{\partial^2 M_{int}}{\partial \kappa^2}(\kappa = \kappa_{ep})$$

podle vzorce pro případ 2 a případ 3. Ukáže se, že první derivace shodné budou, ale druhé už nikoli.

Předpokládejme, že mezi body k a $k + 1$ nastane změna z pružného chování na pružnoplastické. Algoritmus by využil druhou derivace křivosti určenou v bodě k k výpočtu průhybu v bodě $k + 2$. Avšak druhá derivace křivosti v bodě $k + 1$ může být zcela odlišná. Tato skoková změna může způsobit zmíněnou nespojitost v numerickém řešení.

5.4 Alternativní přístup

Pro výpočet staticky neurčitých konstrukcí z pružnoplastického materiálu lze však využít alternativní přístup. Pro numerické řešení je vhodnější ponechat diferenciální rovnici druhého řádu (viz (5.3)) a odhadovat neznámé veličiny M_0 a V_0 . Tím bude výpočet velice podobný jako pro staticky určité konstrukce.

Vzorec pro moment od zatížení $M_{ext,k}$ se změní na

$$M_{ext,k} = Pw_k - M_0 - V_0x_k, \quad (5.55)$$

kde M_0 a V_0 budou odhadnuty. Další změna bude při výpočtu pro bod $k = 0$. Diferenční náhrada se napíše jako:

$$\kappa_{k=0} = -\frac{w_{-1} - 2w_{k=0} + w_1}{\Delta x^2} - \kappa_{0,k=0}. \quad (5.56)$$

Z okrajové podmínky je dáno, že $w(0) = 0$, a tudíž $w_{k=0} = 0$. Druhá okrajová podmínka předepisuje nulovou derivaci v počátku, což znamená, že $w_1 = w_{-1}$. Změna ve vzorci (2.58) bude pouze v tom, že počáteční úhel ϕ_0 bude roven nule, vzorec se pak přepíše na:

$$w_1 = -\frac{1}{2}(\kappa_{k=0} + \kappa_{0,k=0})\Delta x^2. \quad (5.57)$$

V případě prostě podepřeného prutu byly ohybový moment a křivost kladné po celé délce prutu. Při výpočtu byly uvažovány hodnoty mezního elastického momentu M_{el} , mezního plastického momentu M_{pl} a mezních křivostí κ_{el} a κ_{ep} za kladné veličiny. Pro oboustranně vetknutý prut budou moment i křivost ve vetknutí záporné, v tomto případě je potřeba před vzorce pro M_{el} , M_{pl} , κ_{el} a κ_{ep} dát znaménko mínus:

$$M_{el} = -\frac{\sigma_0bh^2}{6}, \quad M_{pl} = -\frac{\sigma_0bh^2}{4}, \quad \kappa_{el} = -\frac{2\sigma_0}{Eh}(1 - p_0), \quad \kappa_{ep} = -\frac{2\sigma_0}{Eh} \frac{1}{1 - p_0}. \quad (5.58)$$

Dále proběhne výpočet stejně, jako pro staticky určité případy.

Úprava počátečních odhadů M_0 a V_0 bude provedena pomocí Newtonovy-Raphsonovy metody obdobně, jako bylo popsáno v předchozí sekci. Bude se hledat minimum funkce

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{x}), \quad (5.59)$$

kde

$$\mathbf{F}_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{int} = \begin{bmatrix} w_N \\ w_{N+1} - w_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} M_0 \\ V_0 \end{bmatrix}.$$

Opět je potřeba sestavit potřebné derivace funkce \mathbf{F}_{int} podle momentu ve vetknutí M_0 a silové reakce V_0 . Výsledná Jacobiho matice bude vypadat následovně:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_N}{\partial M_0} & \frac{\partial w_N}{\partial V_0} \\ \frac{\partial(w_{N+1} - w_{N-1})}{\partial M_0} & \frac{\partial(w_{N+1} - w_{N-1})}{\partial V_0} \end{bmatrix}.$$

Vzorec pro nový odhad vektoru počátečních hodnot je

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_i)\mathbf{F}_{int}(\mathbf{x}_i). \quad (5.60)$$

Od jisté hodnoty zatížení budou existovat dvě funkce průhybu splňující okrajové podmínky. Tato dvě řešení odpovídají rostoucí resp. klesající části na zatěžovací křivce. Pro staticky určité konstrukce bylo snadné najít oba kořeny – pro nalezení řešení na klesající části stačilo zvětšovat počáteční úhel, dokud se průhyb na konci prutu nezačal znovu přibližovat k nule. V případě staticky neurčitých konstrukcí, kdy se odhadují dvě veličiny a iteruje se pomocí Newtonovy-Raphsonovy metody, konverguje výpočet pouze k řešení na rostoucí části. Nicméně nejzásadnější údaj je hodnota maximálního zatížení, které je prut schopen přenést, a to zmíněnou metodou nalezeno bude.

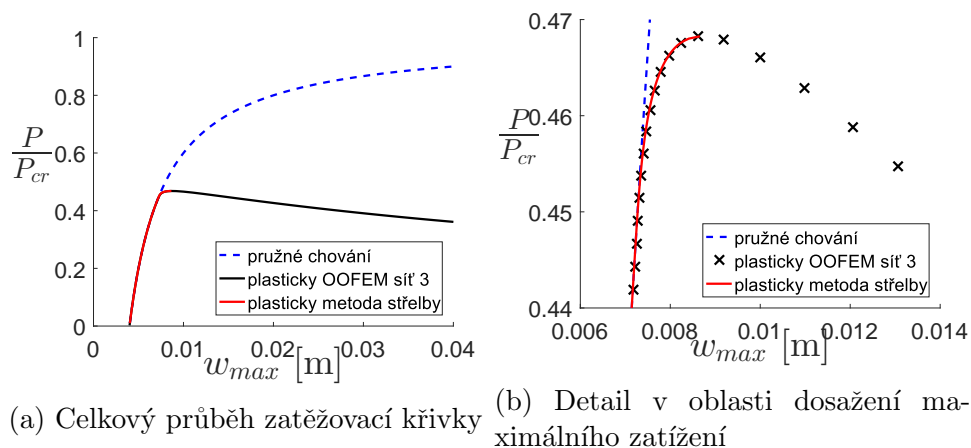
Příklad - oboustranně vetknutý nosník

Pro ukázkou byl proveden výpočet pro obdobný případ jako v kapitole 3. Všechny hodnoty zadání jsou stejné, změna je v podepření prutu a ve funkci počáteční excentricity, která má předpis

$$w_0(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right). \quad (5.61)$$

Schéma je zobrazeno na Obr. 5.1.

Na Obr. 5.2a je zobrazena rostoucí část zatěžovací křivky a na Obr. 5.2b je pak detail v oblasti maximálního zatížení. V Tab. 5.1 jsou porovnány hodnoty maximálních zatížení vypočítané metodou střelby a programem OOFEM. Výsledky obou metod se téměř shodují.



Obr. 5.2: Porovnání pružnoplastického řešení podle metody střelby a MKP pro oboustranně vetknutý prut

	$\frac{P_{max, OOFEM}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{max, matlab}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{max, OOFEM} - P_{max, matlab}}{P_{max, matlab}} \cdot 100$ [%]
Sít' 3	0.46827	0.46826	$2.703 \cdot 10^{-3}$

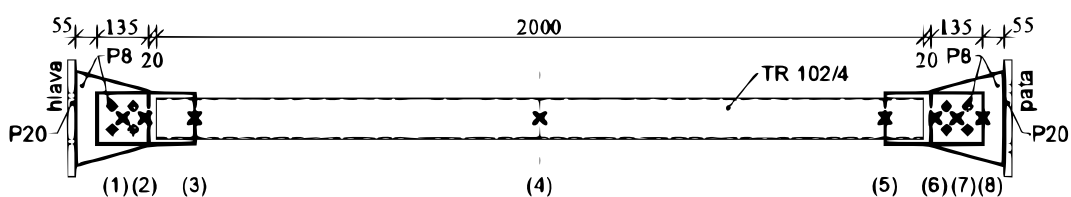
Tab. 5.1: Porovnání výsledků podle programu OOFEM a podle metody střelby pro oboustranně vetknutý prut

Kapitola 6

Stabilita styčnickových plechů

Jedním z hojně využívaných prvků v oboru ocelových konstrukcí je přípoj pomocí styčnickových plechů. Kvůli veliké štíhlosti bude oblast styčnickového plechu náchylná na vybočení. V diplomové práci Ing. Jana Veseckého [1] je taková problematika detailně zkoumána. K práci bylo provedeno několik experimentů, které byly následně ověřovány výpočtem pomocí MKP. V následující kapitole bude proveden výpočet jednoho tlačného prutu a následně budou výsledky porovnány s hodnotami z experimentů a podle MKP, které jsou ve zmíněné diplomové práci ukázány.

Tlačný prvek je složený z trubky TR 102/4, ke které jsou na obou koncích připojeny styčnickové plechy. Napojení styčnickového plechu na připojovací plech je provedeno pomocí šroubového spoje o čtyřech šroubech. Připojovací plech je k trubce přivařený. Ukotvení styčnickových plechů je uvažováno jako vetknutí, resp. posuvné vetknutí. Schéma a rozměry prvku jsou naznačeny na Obr. 6.1.

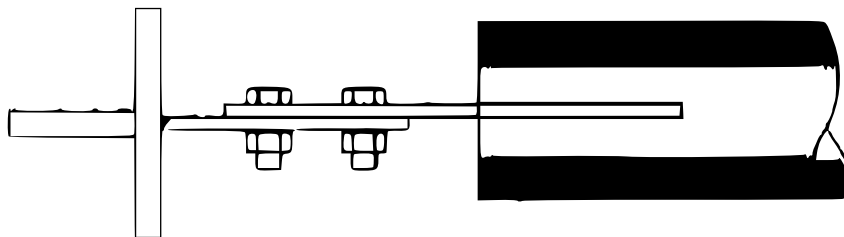


Obr. 6.1: Schéma a rozměry prutu, převzato z [1]

6.1 Počáteční excentricity a výrobní imperfekce

V místě šroubového spoje, kde je styčnickový plech napojen k připojovacímu plechu, vzniká excentricita dosahující hodnoty tloušťky plechu, tedy 8 mm. Z

tohoto důvodu je v oblasti styčnickového plechu riziko kolapsu vlivem plasticity. Na Obr. 6.2 je znázorněna vzniklá výchylka.



Obr. 6.2: Znázornění excentricity vzniklé připojením styčnickového plechu na připojovací plech, převzato z [1]

Kromě excentricity dané napojením plechů je potřeba uvažovat i výrobní imperfekce. V diplomové práci [1] jsou pro numerický výpočet počáteční imperfekce modelovány dvěma způsoby. Jednak jsou použita naměřená data metodou snímání těles pomocí digitální korelace obrazu DIC a jako druhá možnost jsou uvažovány imperfekce podle normy. Při jejich porovnání se ukázalo, že imperfekce podle normy jsou značně nadhodnocené, a proto zde bude využita první varianta. Výsledky snímání naznačují, že styčnickový plech byl prohnutý přibližně ve tvaru paraboly. Do pružnoplastického výpočtu je imperfekce zavedena v podobě násobku normovaného vlastního tvaru vybočení pro případ lineárně pružného chování. Amplituda v bodě napojení plechu na trubku je dána rozdílem maximální a minimální naměřené hodnoty podle DIC, což je 0.56 mm.

Další nedokonalost byla zjištěna v napojení připojovacího plechu na trubku, kde vznikla imperfekce hodnoty 1.4 mm.

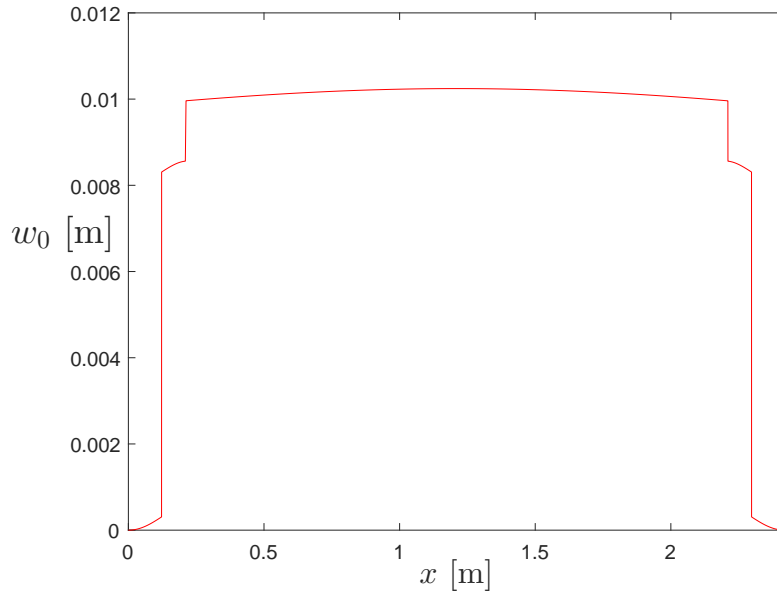
Počáteční výchylka prutu má tedy tvar vybočení prutu vyrobeného z pružného materiálu a v místě šroubového spoje a připojení plechu na trubku bude náhlá změna. Na Obr. 6.3 je znázorněn počáteční průhyb po délce prutu. Pro výpočet normovaného vlastního tvaru vybočení pružného prutu budou zavedeny pouze excentricity dané napojením obou plechů a napojením připojovacího plechu na trubku.

6.2 Úpravy algoritmu

Pro případ, kdy není počáteční výchylka hladkou funkcí, je potřeba algoritmus pozměnit. Bude výhodnější hledat funkci popisující rozdíl celkového průhybu a počátečního průhybu,

$$\Delta w(x) = w(x) - w_0(x). \quad (6.1)$$

Funkce výsledného průhybu $w(x)$ by nebyla spojitě diferencovatelná, avšak funkce Δw bude hladká vždy. Momentová rovnice rovnováhy se přepíše pomocí



Obr. 6.3: Počáteční průhyb po délce prutu

následujících úprav:

$$M_{ext}(x) = M_{int}(x) \quad (6.2)$$

$$Pw(x) - M_0 - V_0x = M_{int}((-w'' + w_0''), P) \quad (6.3)$$

$$P(\Delta w(x) + w_0(x)) - M_0 - V_0x = M_{int}(-\Delta w'', P) \quad (6.4)$$

$$P\Delta w(x) + Pw_0(x) - M_0 - V_0x = M_{int}(-\Delta w'', P). \quad (6.5)$$

Ve výpočtu externího momentu $M_{ext,k}$ je jen potřeba přidat výraz $Pw_{0,k}$ a ve funkci $M_{int,k}$ bude vystupovat pouze záporně vzatá druhá derivace funkce Δw_k , již se tedy nebude opravovat o hodnotu počáteční křivosti. Takto se určí změna výsledného průhybu a počáteční výchylky způsobená zatížením.

Pro výpočet metodou střelby je styčnickový plech vymodelován jako tlačný prut obdélníkového průřezu s proměnnými rozměry. Rozšíření algoritmu pro takové úlohy je přímočaré. Na začátku výpočtu se sestaví vektor šířek průřezů \mathbf{b} a vektor výšek průřezů \mathbf{h} . V každém bodě x_k na ose prutu budou využity rozměry příslušící danému bodu.

Z výsledků diplomové práce [1] je patrné, že se plastická zóna rozšířila pouze v jednom styčnickovém plechu, proto budou trubka a druhý plech uvažovány jako lineárně pružný materiál.

V Tab. 6.1 jsou vypsány materiálové a geometrické charakteristiky styčnickových plechů a trubky. Hodnoty E a σ_0 byly experimentálně změřeny. b_v je šířka

	styčnickové plechy	trubka
E [Pa]	$199.9 \cdot 10^9$	$201.1 \cdot 10^9$
σ_0 [Pa]	$405 \cdot 10^6$	$358.2 \cdot 10^6$
I [m ⁴]		$1.48 \cdot 10^{-6}$ ($1.3324 \cdot 10^{-6}$)
b_v [m]	0.242 (0.239)	
b_{s1} [m]	0.14	
b_{s2} [m]	0.13	
t_{sp} [m]	0.008	
t_{pp} [m]	0.008 (0.0081)	

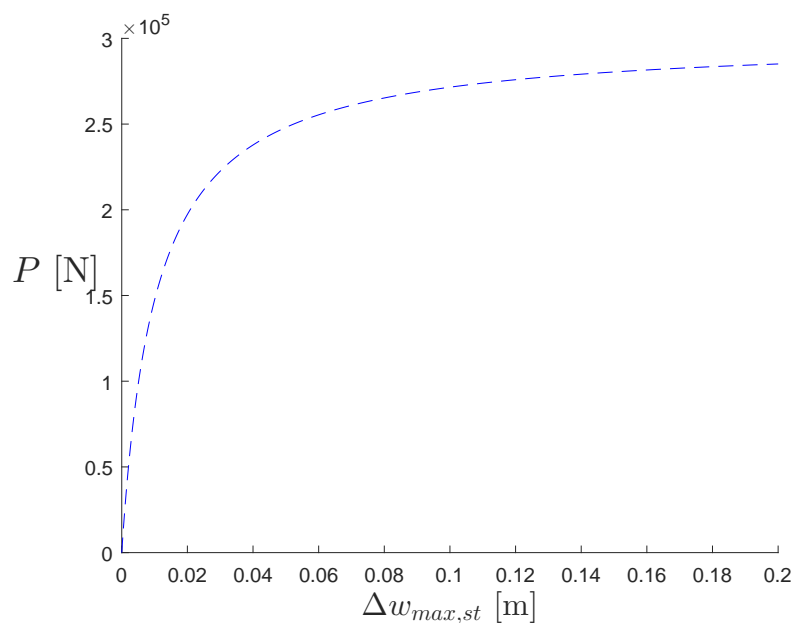
Tab. 6.1: Materiálové a geometrické charakteristiky styčnickových plechů a trubky

styčnickového plechu ve vetknutí, b_{s1} je šířka styčnickového plechu na straně u připojovacího plechu, b_{s2} je šířka připojovacího plechu, t_{sp} je tloušťka styčnickového plechu, t_{pp} je tloušťka připojovacího plechu a I je moment setrvačnosti. Pro výpočet byly použity naměřené skutečné rozměry. V případě, kdy se lišily od výrobních rozměrů, jsou v tabulce uvedeny v závorce.

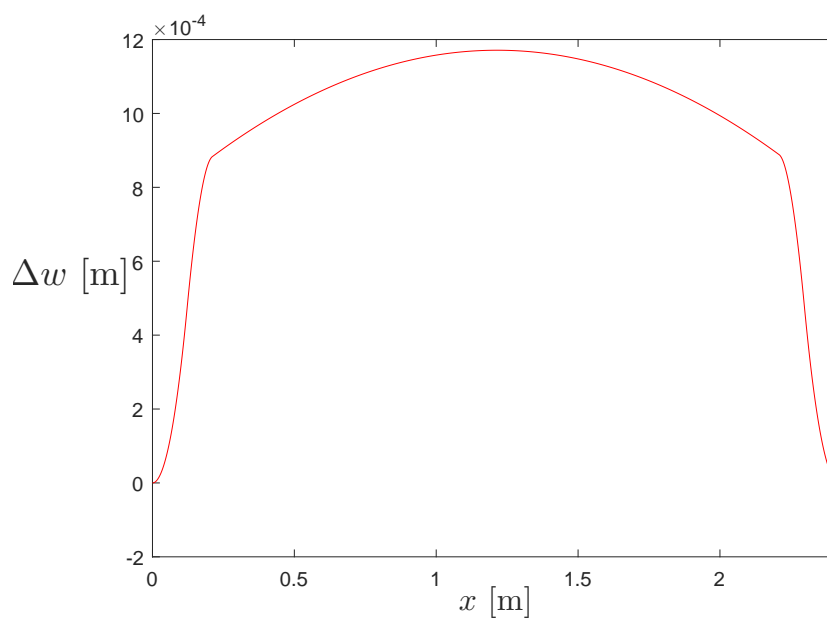
6.3 Řešení a výsledky

V prvním kroku řešení se nejdříve určí hodnota kritického zatížení za předpokladu lineárně pružného chování. Doposud byla hodnota kritické síly pro jednoduché případy známa z analytického řešení, avšak pro prut s proměnným průřezem je potřeba najít toto zatížení numericky. Takový výpočet bude obdobný jako při pružnoplastické analýze, jenom bude uváženo předpoklad pružného chování pro jakoukoli hodnotu ohybového momentu. Na Obr. 6.4 je zobrazena zatěžovací křivka pro pružný prut. Průhyb $\Delta w_{max,st}$ značí změnu průhybu oproti počátečnímu průhybu a je brán v bodě (5), zobrazeném na Obr. 6.1, ve kterém bylo umístěno čidlo. Hodnota kritické síly je $P_{cr} = 299.67$ kN. Na Obr. 6.5 je naznačen tvar vybočení prutu, opět se jedná o změnu průhybu Δw . V práci [1] bylo určeno kritické zatížení pomocí konečně-prvkového softwaru. Jeho hodnota je $P_{cr,JV} = 277.5$ kN. Model pro MKP byl zpracován velmi detailně, byl modelován ze čtyř dílců – styčnickové plechy, připojovací plechy, šrouby a trubka. Na druhou stranu model pro výpočet metodou střelby je mnohem jednodušší, což může být příčinou rozdílu výsledných hodnot.

Následně je proveden pružnoplastický výpočet, jehož výsledky jsou porovnány s experimenty. Bude se opět porovnávat vztah zatížení a změny průhybu v



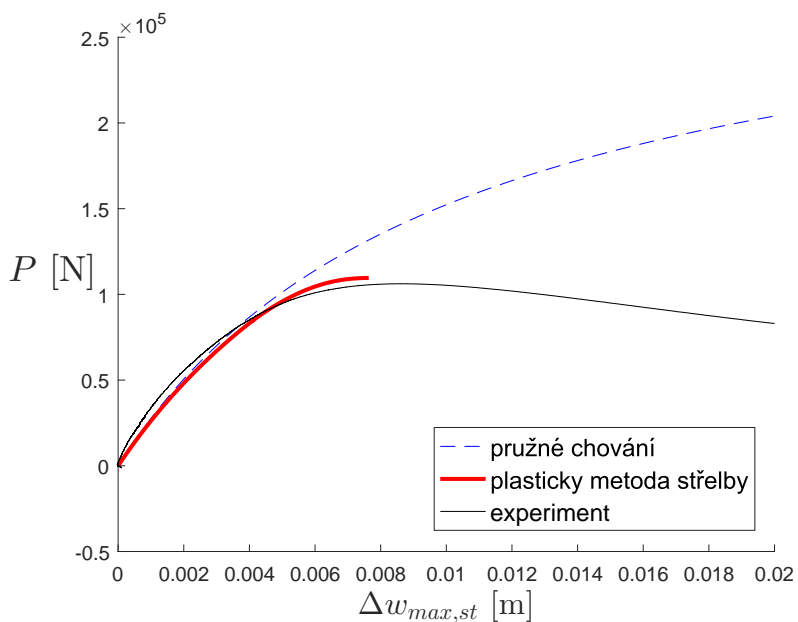
Obr. 6.4: Zatěžovací křivka tlačené trubky se styčnickovými plechy s předpokladem lineárně pružného chování



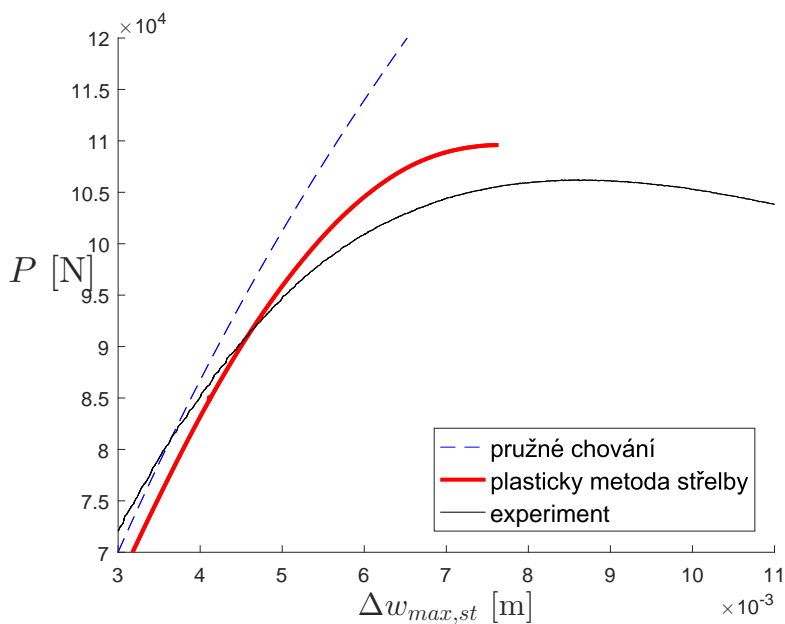
Obr. 6.5: Tvar vybočení prutu v případě lineárně pružného chování

bodě (5) naznačeném na Obr. 6.1. Na Obr. 6.6 je znázorněna zatěžovací křivka určená metodou střelby pro lineárně pružný materiál, křivka podle metody střelby s uvážením pružnoplasticity a data z experimentů. Na Obr. 6.7 je de-

tail v oblasti dosažení maximálního zatížení. Hodnoty maximálního zatížení jsou velice podobné, při experimentu bylo dosaženo hodnoty 106.22 kN a při výpočtu metodou střelby 109.54 kN, což se od sebe liší pouze o 3.12%. Když



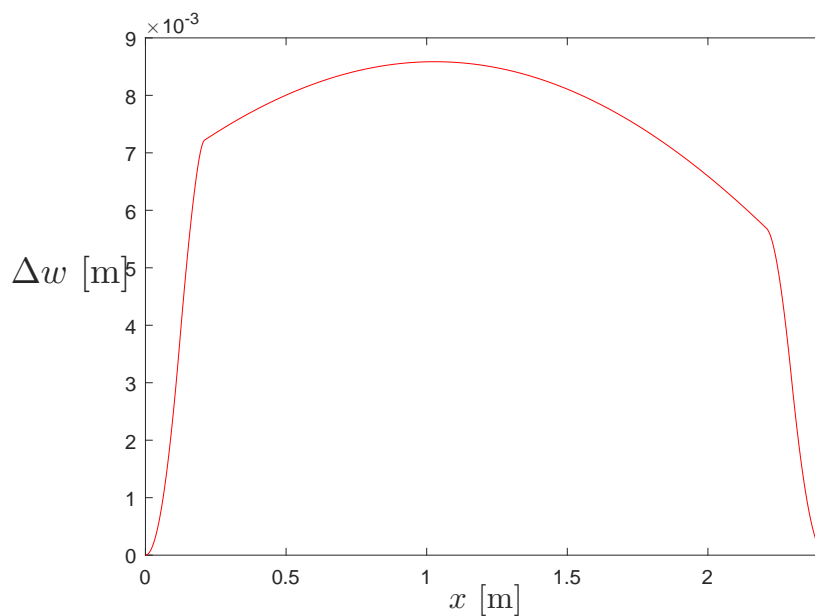
Obr. 6.6: Porovnání výsledků metody střelby s experimenty



Obr. 6.7: Detail v oblasti dosažení maximálního zatížení

byl prut počítán MKP s uvážením stejných počátečních imperfekcí, maximální únosnost byla 119 kN. Průhyb ve zkoumaném bodě při dosažení maximální síly určený podle metody střelby je 7.8 mm a podle experimentu 8.6 mm.

Na Obr. 6.8 je naznačen tvar vybočení prutu v bodě, kdy je dosaženo maximálního zatížení. Nesymetričnost je dána zamezením plastického chování v jednom ze styčnickových plechů.



Obr. 6.8: Funkce průhybu $\Delta w(x)$ v bodě dosažení maximálního zatížení P_{max}

Závěr

V první části práce je popsána problematika vlivu plastického chování na stabilitu tlačенého prvku. Pro jednoduchost jsou nejdříve odvozeny vztahy pro ideální průřez. Pro ten je možné určit průběh stabilitní křivky prutu s imperfekcí analyticky. Dále je první kapitola zaměřená na sestavení odhadů chování tlačенého prvku obdélníkového průřezu. Pro dolní odhad se předpokládá, že při maximálním zatížení bude prostřední nejnamáhanější průřez v mezním pružném stavu. Naopak pro horní odhad se předpokládá, že průřez je v mezním plastickém stavu. S využitím vztahů ohybového momentu a normálové síly ve zmíněných mezních stavech lze sestavit průběh závislosti maximální přenesené síly na štíhlosti.

Ve druhé kapitole je detailně popsán výpočet metodou střelby a algoritmus, podle kterého vytvořený program funguje. Ten je založen na principu rovnováhy vnějších a vnitřních sil. V každém bodě prutu musí být splněna momentová a silová podmínka rovnováhy. S využitím obou podmínek lze v každém průřezu vyjádřit hodnotu neznámé křivosti κ . Diskretizuje-li se osa prutu na konečné dílky a aproximuje-li se křivost diferenční náhradou pro druhou derivaci průhybu, je možné určit hodnotu průhybu v každém diskretizovaném bodě. Zopakováním výpočtu pro zvyšující se zatížení se získají body zatěžovací křivky a hodnota maximálního zatížení.

Třetí kapitola je věnována ukázkám výpočtu na konkrétním příkladu a porovnání výsledků s metodou konečných prvků. Ukáže se, že výsledky vychází velice podobně. Dále je v této sekci proveden rozbor výsledků pro měnící se geometrické parametry, přesněji pro různé šířky průřezu, délky prutu a počáteční excentricity. Na závěr jsou porovnány vypočítané hodnoty s odhady, které byly sestaveny v první kapitole. Podle očekávání se skutečná hodnota nachází mezi horním a dolním odhadem.

Ve čtvrté kapitole je algoritmus zobecněn i pro materiálový model s lineárním zpevněním. Toho je docíleno úpravou vztahů mezi momentem a křivostí, které jsou dány integrací součinu napětí a souřadnice z po průřezu. Na rozdíl od ideálně pružnoplastického materiálu nemá vztah mezi momentem a normálovou

silou žádné maximální omezení, mezní plastický stav neexistuje. Je proveden výpočet příkladu ze třetí kapitoly s uvážením zpevnění, podle očekávání je maximální zatížení o něco větší než pro ideálně pružnoplastický materiál. Výsledky jsou velmi podobné těm podle MKP.

V páté kapitole je ukázáno rozšíření metody pro staticky neurčité konstrukce. V teorii pružnosti je analytické řešení staticky neurčitých prutů hledáno jako řešení diferenciální rovnice čtvrtého řádu. Pro numerické řešení prutu z pružnoplastického materiálu se ukáže jako výhodnější vycházet z rovnice druhého řádu. Bude však nezbytné odhadovat dvě veličiny, například pro případ oboustranně vetknutého prutu to bude moment a posouvající síla ve vetknutí. K úpravě odhadů je využita Newtonova-Raphsonova metoda. K tomu je potřeba sestavit derivaci funkce popisující okrajovou podmínku na konci prutu v závislosti na počátečních odhadech. Výsledky příkladu ukazují velice dobrou shodu s řešením pomocí MKP.

V závěru práce je provedena analýza komplexnějšího stavebního prvku. V rámci diplomové práce Ing. Veseckého [1] byly provedeny experimenty zaměřené na sledování vzpěrné únosnosti přípojů pomocí styčnickových plechů. Ve své práci jsem řešil daný problém metodou střelby a následně porovnal výsledky s experimenty. Hodnoty maximálního zatížení byly velice podobné.

Největší výhoda metody spočívá v její jednoduchosti. Oproti MKP je snížena dimenze problému. Je potřeba diskretizovat pouze osu prutu a díky tomu je i výpočetní náročnost mnohem nižší. V některých ohledech je i přesnost výpočtu vyšší ve srovnání s MKP. Například v práci jsou vztahy mezi momentem a křivostí vyjádřeny přesně, kdežto v případě MKP je napětí integrováno numericky. Použití metody konečných diferencí na řešení úlohy s okrajovými podmínkami by vedlo ke vzniku soustavy nelineárních rovnic, jejichž řešení by bylo opět náročné, co se výpočetního času týče. Metoda střelby je elegantní alternativou.

V budoucnu by bylo možné rozšířit výpočet pro obecný tvar průřezu. Vztah mezi momentem a křivostí by byl získán numerickou integrací součinu napětí a souřadnice z . Bylo by rovněž vhodné zavést vliv obecného zatížení na výpočet externího momentu. Dále by bylo zajímavé zobecnit algoritmus pro stabilitní výpočet prutových konstrukcí. Odhadované veličiny by byly reakce v některých podpórách a kontrolovalo by se splnění předepsaných posunů a pootočení ve zbylých podpórách a dodržení kompatibility v místech, kde se stýkají části konstrukce. Následně by se iterovalo s použitím Newtonovy-Raphsonovy metody. Takový postup v podstatě odpovídá zobecnění silové metody.

Bibliografie

- [1] Jan Vesecký. “Vzpěrná únosnost styčnickových plechů”. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze, 2019.
- [2] Zdeněk Bažant a Luigi Cedolin. *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. Singapore: World Scientific, 2010. ISBN: 9789814317030.
- [3] Bořek Patzák. “Oofem element library manual”. In: (2018). URL: <http://www.oofem.org/resources/doc/elementlibmanual/html/elementlibmanual.html>.
- [4] Bořek Patzák. “Material model library manual”. In: (2019). URL: <http://www.oofem.org/resources/doc/matlibmanual/html/matlibmanual.html>.
- [5] Karel Rektorys. *Survey of applicable mathematics*. Sv. 280. Springer, 2013. ISBN: 0792306791.