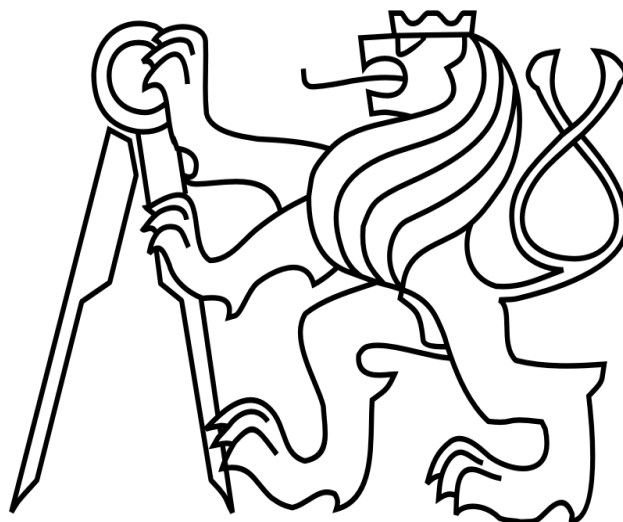


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ, FAKULTA STROJNÍ

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ztráta stability při nafukování hyperelastických trubic

Praha 2019

Julie Kochanová

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kochanová** Jméno: **Julie** Osobní číslo: **466570**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Ztráta stability při nafukování hyperelastických trubíc

Název bakalářské práce anglicky:

Loss of stability in inflation of hyperelastic tubes

Pokyny pro vypracování:

Vysvětlete pojem ztráty stability deformace
Vyložte základní pojmy nutné k popisu nelineárního chování elastických materiálů
Charakterizujte podmínky ztráty stability limitního bodu při nafukování tenkostěnné trubice
z Van der Waalsova materiálu

Seznam doporučené literatury:

Holzapfel G (2000) Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. Wiley and Sons, Chichester.
Plešek J (2015) Nelineární mechanika kontinua s příklady. Dostupné online z <http://mechanika.fs.cvut.cz/predmety/mk/>
Chater E, Hutchinson JW (1984) On the propagation of bulges and buckles. Journal of Applied Mechanics 51 269-277


Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce

doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D., odbor biomechaniky FS


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce

Datum zadání bakalářské práce: **16.04.2019** Termín odevzdání bakalářské práce: **16.08.2019**

Platnost zadání bakalářské práce:


doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Studentka bere na vědomí, že je povinna vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

30.04.2019
Datum převzetí zadání

Kochanová!
Podpis studentky

ANOTAČNÍ LIST

Jméno autora:	Julie Kochanová
Název BP:	Ztráta stability při nafukování hyperelastických trubíc
Anglický název:	Loss of stability in inflation of hyperelastic tubes
Rok:	2018/2019
Studijní program:	Teoretický základ strojního inženýrství
Ústav:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Vedoucí:	doc. Ing. Lukáš Horný Ph. D.
Bibliografické údaje:	počet stran 32 počet obrázků, grafů 19 počet rovnic 89
Klíčová slova:	ztráta stability, hyperelasticita, deformace, nafukování trubice, konstitutivní model, Van der Waalsův model
Keywords:	loss of stability, hyperelasticity, deformation, inflation of a tube, constitutive model, Van der Waals' model
Abstrakt:	Cílem této bakalářské práce je vytvoření matematického modelu, na kterém bude simulováno nafukování uzavřené tenkostěnné trubice. Pomocí numerické simulace budou charakterizovány podmínky vedoucí ke ztrátě stability pro Van der Waalsův materiál.
Abstract:	The goal of this bachelor thesis is creation of a mathematic model which will be used for simulating inflation in the closed, thin-walled tube. With help of a numerical simulation, conditions which lead to a loss of stability in the Van der Waals' material will be characterized.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato bakalářská práce byla vypracována samostatně s výjimkou poskytovaných konzultací a výhradně s použitím citovaných pramenů a literatury.

V Praze 10.06.2019

.....

Julie Kochanová

PODĚKOVÁNÍ

Úvodem bych ráda poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce, panu doc. Ing. Lukáši Hornému, Ph.D., za pomoc při jejím zpracování, za odborné vedení, podnětné rady a připomínky. Dále bych také chtěla poděkovat rodině, která mi byla během celého studia oporou.

OBSAH

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ.....	7
ÚVOD.....	8
Cíle práce	8
1 ZTRÁTA STABILITY.....	9
2 NESTABILITY	11
3 DEFORMACE.....	13
3.1 Deformační gradient \mathbf{F}	13
3.2 Polární rozklad	14
3.3 Pravý Cauchyův – Greenův tenzor deformace \mathbf{C}	14
3.4 Vlastní čísla tenzoru	15
3.5 Spektrální rozklad \mathbf{U} a \mathbf{C}	16
4 NAPJATOST.....	17
4.1 Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$	17
5 NAFUKOVÁNÍ VÁLCOVÉ TRUBICE	18
6 KONSTITUTIVNÍ TEORIE	20
6.1 Hyperelasticita	20
6.2 Hyperelastické modely.....	21
6.3 Neo – Hookeovský model	22
6.4 Rivlinův model.....	22
6.5 Van der Waalsův model	23
7 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ.....	24
7.1 Vytvoření analytického modelu	24
7.2 Závislost bezrozměrného tlaku P_m na strečích $\lambda_{\theta\theta}$ a λ_{zz}	24
7.3 Limitní hodnota λ_m	26
7.4 Kritická hodnota bezrozměrného tlaku P_m	27
8 VÝSLEDKY A DISKUSE	28
8.1 Závislost bezrozměrného tlaku P_m na strečích $\lambda_{\theta\theta}$ a λ_{zz}	28
8.2 Kritická hodnota tlaku P_m	29
ZÁVĚR	30
REFERENCE	32
SEZNAM OBRÁZKŮ	33

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

C	[–]	Pravý Cauchyův – Greenův tenzor deformace
dS, ds	$[m^2]$	Diferenciální element plochy v referenční, resp. průběžné konfiguraci
$d\mathbf{X}, d\mathbf{x}$	[–]	Elementární polohový vektor referenční, resp. průběžné konfigurace
$d\mathbf{f}$	$[N]$	Diferenciální výslednice vnitřních sil
E	$[N \cdot mm^{-2}]$	Modul pružnosti v tahu
F	$[N]$	Síla
F	[–]	Deformační gradient
H, h	$[m]$	Tloušťka stěny trubice v referenční, resp. průběžné konfiguraci
I	[–]	Jednotkový tenzor
I_1, I_2, I_3	[–]	Hlavní invarianty tenzoru
J	[–]	Relativní změna objemu elementu
n	[–]	Vlastní vektor
M		Množina materiálových konstant
p	$[N \cdot mm^{-2}]$	Neurčitý Lagrangeův multiplikátor
P	$[N \cdot mm^{-2}]$	Piola – Kirchhoffův tenzor napětí
r	$[m]$	Poloměr trubice
R, r	$[m]$	Poloměr trubice v referenční, resp. průběžné konfiguraci
R	[–]	Tenzor rotace
t	$[s]$	Čas
t	[–]	Vektor plošné intenzity vnitřních sil
T	[–]	Obecný tenzor
U	[–]	Pravý tenzor strečů
v	[–]	Levý tenzor strečů
W	$[J \cdot m^{-3}]$	Hustota deformační energie
Z, z	$[m]$	Délka trubice v referenční, resp. průběžné konfiguraci
tr		Stopa
μ	$[N \cdot mm^{-2}]$	Smykový modul v oblasti malých deformací
λ_i	[–]	Streče
ψ	$[J \cdot m^{-3}]$	Volná potenciálová energie

Pro lepší orientaci ve značení jsou skalární veličiny označovány kurzívou, vektorové veličiny kurzívou a tučně, tenzory druhého řádu pouze tučně.

ÚVOD

Ve své bakalářské práci se zabývám ztrátou elastické stability, neboť jak u měkkých tkání, tak u válcových trubíc z pryže má velký význam. V obou případech mohou být vlivem zatěžování poškozeny jejich stěny, což v důsledku může způsobit i změnu jejich mechanických vlastností. Jednoduchým příkladem je ztráta stability u měkké tkáně jako je tepna v lidském těle. Pokud dojde ke ztrátě stability, může vzniknout výduť, která se bude dále zvětšovat. V případě, že nebude dostatečně včas léčena, pravděpodobně dojde k její ruptuře, což ve většině případů končí smrtí pacienta.

Abychom byli takovým situacím schopni předcházet, je nejprve nezbytné pochopit příčiny, které ke ztrátě stability materiálu vedou. Následně lze ve výpočetním programu takovou situaci nasimulovat a potom díky získaným výsledkům uvedené situace předpokládat.

Matematický model hyperelastické tenkostěnné trubice bude v našem případě vytvořen pomocí programu Maple2018, ve kterém bude provedena i její numerická inflace. Pro vytvoření analytického modelu budeme muset přijmout několik předpokladů, jež výpočet podstatně zjednoduší. To však do výpočtů vnese určitou nepřesnost, a tudíž hodnoty získané z numerické simulace budou pouze orientační a při jejich interpretaci bude nutné výsledky zhodnotit, zda jsou reálné či nikoliv.

Cíle práce

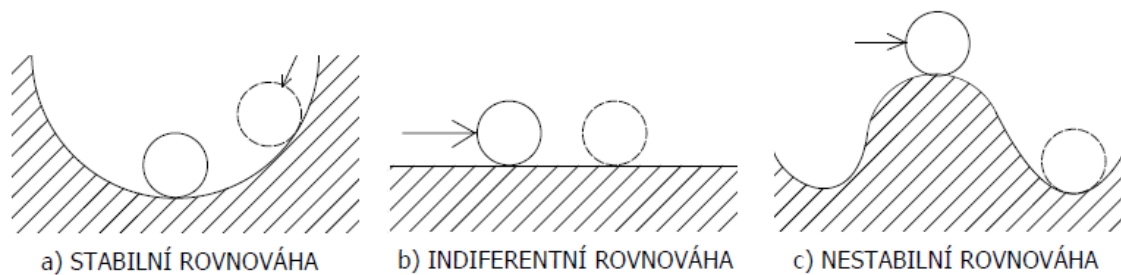
Cílem této bakalářské práce je seznámit čtenáře s pojmem ztráty stability a jejími důsledky. Dále v rámci vysvětlení tohoto pojmu bude nezbytné vyložit a nadefinovat základní pojmy popisující nelineární chování elastických materiálů. Následně bude v programu Maple2018 vytvořen analytický model pro nafukování tenkostěnné trubice a pomocí numerické simulace, kdy bude válcová trubice nafukována, budou charakterizovány podmínky vedoucí ke ztrátě stability.

1 ZTRÁTA STABILITY

Stabilita polohy či stabilita deformace je schopnost vychýlené soustavy zachovat nebo obnovit původní rovnovážný stav (co do polohy, co do deformace). V opačném případě, kdy soustavu považujeme za nestabilní, se do svého původního rovnovážného stavu nevrací.

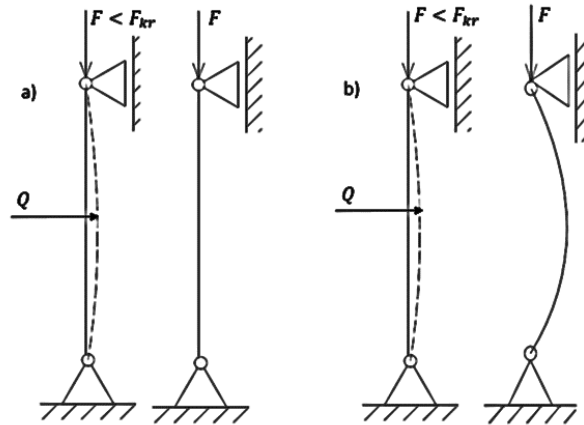
Takovou situaci si můžeme nejjednodušeji představit na příkladu z mechaniky tuhých těles. Uvažovaným tělesem bude kulička, kterou budeme vychylovat z její rovnovážné polohy. Z obr. 1a je patrné, že pokud se těleso nachází ve stabilní poloze, tak po vychýlení se do ní opět vrací. Naopak z obr. 1c je zřejmé, že těleso vychýlené z rovnovážné polohy se do své původní rovnovážné polohy nevrací. Seběmenším impulsem tak můžeme vyvolat samovolný pohyb tělesa, jenž trvá tak dlouho, dokud uvažované těleso nezaujme stabilní polohu na zcela jiném místě. Na obr. 1b je znázorněn stav mezi stabilní a labilní polohou, jenž nazýváme indiferentním stavem. Ten umožňuje kuličce, aby po svém vychýlení zůstala ve vychýlené poloze.

V takovém případě jsou z hlediska rovnic rovnováhy možné dvě zcela odlišné konfigurace – původní poloha se stává nestabilní a nová poloha po vychýlení se stává stabilní. Rozdvojení rovnovážné polohy nazýváme bifurkací a bod, ve kterém k tomu teoreticky dochází, označujeme jako bod bifurkační (Šmiřák, 2013).



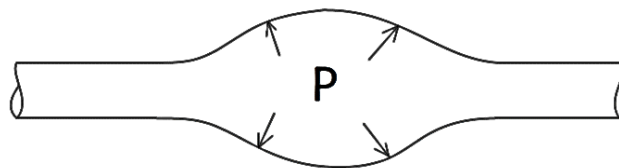
Obrázek 1 Stabilita tuhého tělesa

Obdobné chování lze sledovat i v mechanice poddajných těles. Uvažovaným tělesem je štíhlý prut, který je zatěžován silou působící v ose prutu. Pokud bude prut zatěžován dostatečně malou silou a po vychýlení, které může být způsobeno pomocí dočasně působící síly, se vrátí do svého původního přímého tvaru, jedná se o stabilní deformaci. Ta je zobrazena na obr. 2a. Zvětšujeme-li postupně zatěžovací sílu, stává se návrat prutu do přímé polohy stále pozvolnější a po určité hodnotě, tj. kritické hodnotě síly, již není schopen zaujmout svůj původní tvar. V takovém případě dochází k vybočení prutu ve směru minimální ohybové tuhosti. Stav nazýváme nestabilní deformací a je zobrazen na obr. 2b. (Šmiřák, 2013)



Obrázek 2 Ztráta stability tlačného prutu

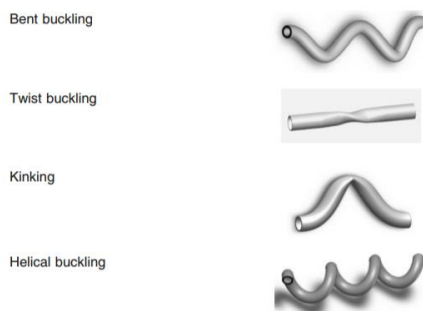
Bakalářská práce se však zaměřuje na ztrátu stability při nafukování tenkostěnné trubice, a proto budeme pro další vysvětlování uvažovat pouze tenkostěnnou trubici. Působením tlaku dojde k vychýlení tenkostěnné trubice z rovnovážné polohy, a tudíž také k její ztrátě stability. Je to chvíle, kdy se výchozí konfigurace stává nestabilní a její přechod do nové konfigurace je doprovázen velkými deformacemi některých částí.



Obrázek 3 Ztráta stability trubice

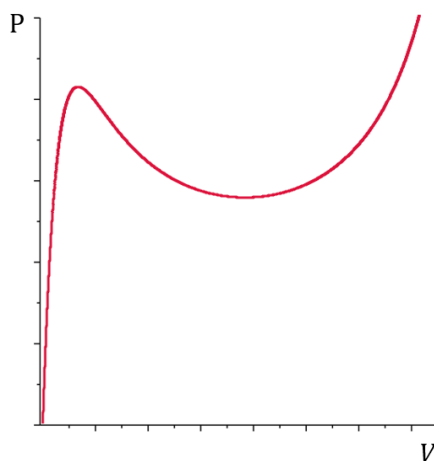
2 NESTABILITY

Při nafukování tenkostěnné trubice vnitřním tlakem prochází materiál velkými elastickými deformacemi. To může mít za následek ztrátu stability. V důsledku ztráty stability může dojít k tvorbě smyček, zvrásnění povrchu či k jeho zprohýbání. Jedná se o stav, který je podstatně ovlivňován faktory, jako jsou materiálové imperfekce, geometrické charakteristiky či počáteční napjatost.



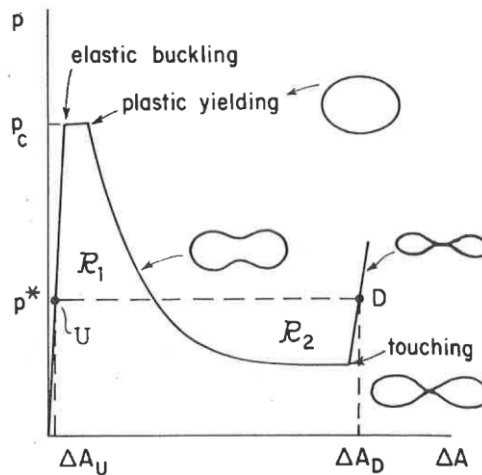
Obrázek 4 Důsledek ztráty stability (Han, 2013)

Trubice z materiálů, jako jsou měkké tkáně nebo pryže, mohou v důsledku velkých deformací vykazovat několik typů nestabilit. Ty lze chápat ze dvou hledisek. (Goriely, 2006) Prvním typem je nestabilita limitního bodu. Jako příklad si lze uvést inflaci pouťových balónků a válcových tenkostěnných trubíc. Charakteristickým znakem je vysoká počáteční odolnost materiálu vůči inflaci. Postupným zvyšováním tlaku roste objem tenkostěnné trubice až do dosažení hodnoty limitního bodu, tj. kritického tlaku. To je hodnota, při které se dále zvyšuje objem, avšak s klesajícím tlakem. (Kanner & Horgan, 2007) Obecná závislost změny objemu na tlaku je znázorněna na obr. 5.



Obrázek 5 Obecná závislost změny objemu V na tlaku P

V druhém případě uvažujeme nestabilitu jako bifurkaci deformačního stavu. To znamená, že kromě uniformě nafouknuté a protažené válcové trubice s kruhovým průřezem, existují i konfigurace, při kterých se kruhový průřez trubice zdeformuje do nekruhového tvaru. Takovým tvarem může být elipsa nebo například osmička, jak je zobrazeno na obr. 6. Mimo jiné může průřez trubice zůstat kruhový, ale trubice se prohne jako zprohýbaný prut nebo se vyduje tak, že poloměr kruhového průřezu bude po délce proměnný. (Horný, 2014)



Obrázek 6 Změna kruhového průřezu (Chater a Hitchinson, 1984)

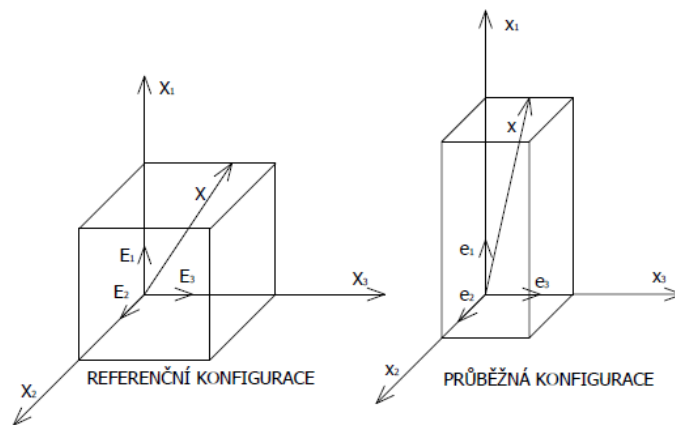
Ve studovaném případě se ztráta stability projevuje jako ztráta jednoznačnosti v závislosti na zatěžovacím tlaku a objemu.

3 DEFORMACE

Těleso je množina materiálových bodů, které v každém okamžiku zaujímají souvislou oblast v eukleidovském prostoru. Nechť je těleso uvedeno do pohybu, pak se mění oblasti, které zaujímají jeho body. Nechť je pohyb vzájemně jednoznačný a spojitý. Pak počáteční oblast, ve které se těleso nachází, nazýváme referenční konfigurací. (Horný, 2014)

V našem případě neuvažujeme pohyb tělesa jako pohyb tuhého celku. Potom tedy u uvažovaného tělesa, které je uvedeno do pohybu, dochází ke změně kvantitativních parametrů, tedy k deformaci. Nejčastěji se jedná o změnu objemu či tvaru tělesa. Deformaci si lze představit jako zobrazení bodů z počáteční neboli referenční konfigurace do bodů konfigurace průběžné, též nazývané konfigurace aktuální.

Pro referenční konfiguraci se používá souřadnicová soustava, jejíž osy jsou označovány velkými písmeny X, Y, Z . Naopak souřadný systém průběžné konfigurace je značen malými písmeny x, y, z . V případě nafukování hyperelastické trubice bude použito popisu lagrangeovského, tj. zobrazení původního stavu na stav zdeformovaný.



Obrázek 7 Zobrazení tělesa v referenční a průběžné konfiguraci

3.1 Deformační gradient \mathbf{F}

Zobrazení polohových vektorů z referenční do průběžné konfigurace vyjádříme pohyb

$$f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}, \quad (1)$$

kde vektor \mathbf{x} v průběžné konfiguraci je funkcí vektoru \mathbf{X} v konfiguraci počáteční, tedy

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (2)$$

Základní mírou deformace je deformační gradient \mathbf{F}

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (3)$$

který vyjadřuje zobrazení diferenciálního vektoru $d\mathbf{X}$ v referenční konfiguraci na diferenciální vektor $d\mathbf{x}$ v konfiguraci průběžné. Pro lepší pochopitelnost deformačního gradientu \mathbf{F} jako zobrazení je možné ho psát ve tvaru

$$dx(X, t) = \mathbf{F}(X, t) dX, \quad (4)$$

a protože se v práci budeme zabývat kvazistatickou formulací tělesa, bude pro nás explicitní závislost na čase nepodstatná, tudíž dostaneme tvar

$$dx = \mathbf{F} dX \quad (5)$$

Vyjádříme-li deformační gradient \mathbf{F} v závislosti na zdeformovaném vektoru dx a referenčním diferenciálním vektoru dX , tak ve složkovém tvaru platí

$$dx_i = F_{iK} dX_K \quad (6)$$

Determinant deformačního gradientu má význam změny objemu elementu kontinua značeného dV před a dv po deformaci, a protože v našem případě považujeme materiál za nestlačitelný, bude platit podmínka nestlačitelnosti

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{dv}{dV} = 1 \quad (7)$$

3.2 Polární rozklad

Deformační gradient \mathbf{F} jakožto tenzor druhého řádu je nesymetrický, a proto je nutné pracovat se všemi jeho devíti složkami, které nesou informace nejen o změně délek, ale i o rotaci. Rotace, coby pohyb celého tělesa nemá žádnou deformační energii, a tak se jí dále nebudeme zabývat. Část deformačního gradientu \mathbf{F} , která vyjadřuje jen deformaci, lze rozepsat pomocí polárního rozkladu, kdy

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{v} \mathbf{R}, \quad (8)$$

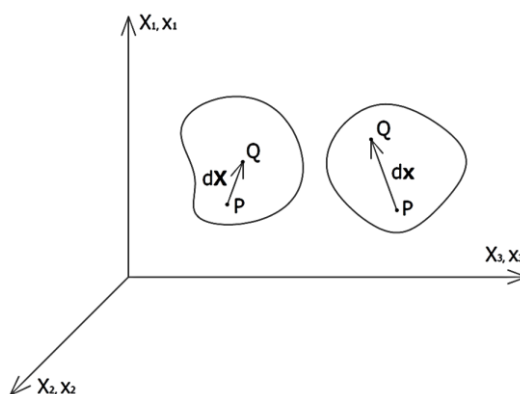
kde \mathbf{R} je ortogonální tenzor, \mathbf{U} je pravý tenzor strečů a \mathbf{v} je levý tenzor strečů. Pro ortogonální matici rotace \mathbf{R} platí

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad (9)$$

kde \mathbf{I} je jednotkový tenzor.

3.3 Pravý Cauchyův – Greenův tenzor deformace C

Běžně se definují další míry přetvoření, které nazýváme tenzory deformace.



Obrázek 8 Definice deformace tělesa

Říká-li se o tělese, že je zdeformované, tak musí existovat alespoň jedna dvojice bodů PQ, pro které bude platit, že

$$|dx| \neq |dX| \quad (10)$$

Vztah (10) umocníme a roznásobíme

$$(dx)^2 \neq (dX)^2 \quad (11)$$

$$dx \cdot dx \neq dX \cdot dX \quad (12)$$

Dosadíme do vztahu (12) za $dx = \mathbf{F} \cdot dX$

$$(\mathbf{F} \cdot dX) \cdot (\mathbf{F} \cdot dX) \neq dX \cdot dX \quad (13)$$

$$(\mathbf{F} \cdot dX) \cdot (\mathbf{F} \cdot dX) - dX \cdot dX \neq 0 \quad (14)$$

Jelikož se jedná o tenzorový zápis, je možné první $\mathbf{F} dX$ transponovat

$$dX \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \cdot dX - dX \cdot dX \neq 0 \quad (15)$$

Získaný výsledný vztah vypadá takto

$$dX \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot dX \neq 0 \quad (16)$$

Z výše uvedeného vyplývá, že těleso je deformováno právě tehdy, když tenzor (16) nebude roven nule

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \neq 0 \quad (17)$$

a z toho vyplývá, že pouze člen $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ závisí na pohybu tělesa. Taková míra deformace je nazývána pravým Cauchyovým – Greenovým tenzorem deformace \mathbf{C} .

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (18)$$

3.4 Vlastní čísla tenzoru

Tenzor deformace \mathbf{C} je symetrický a pozitivně definitivní. Symetrie zaručuje reálnost vlastních čísel a pozitivní definitnost udává, že všechny existující vlastní čísla jsou kladná. Díky takovým vlastnostem tenzoru deformace \mathbf{C} lze využít spektrálního rozkladu pro získání vlastních čísel, kterými jsou protažení.

Nechť \mathbf{T} je symetrický pozitivně definitní tenzor druhého řádu a λ je nějaké kladné reálné číslo, tak potom pro vlastní vektor \mathbf{n} platí

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n} \quad (19)$$

V takovém případě představuje λ vlastní číslo.

Po úpravě vztahu (19) získáme tvar

$$\mathbf{T}\mathbf{n} - \lambda\mathbf{n} = 0 \quad (20)$$

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = 0 \quad (21)$$

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (22)$$

Dostaneme charakteristickou rovnici \mathbf{T}

$$\lambda^3 - I_1(\mathbf{T})\lambda^2 + I_2(\mathbf{T})\lambda - I_3(\mathbf{T}) = 0 \quad (23)$$

Kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ charakteristické rovnice (23) nazýváme vlastními čísly.

Reálná čísla $I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T})$ a $I_3(\mathbf{T})$ nazýváme hlavními invarianty tenzoru \mathbf{T} , které je možné určit pomocí stopy tr a jednotkového tenzoru \mathbf{I} .

$$I_1(\mathbf{T}) = tr(\mathbf{T}) = \mathbf{T}:\mathbf{I} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (24)$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}(tr^2(\mathbf{T}) - tr(\mathbf{T}^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \quad (25)$$

$$I_3(\mathbf{T}) = det(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (26)$$

V případě, že místo obecného tenzoru \mathbf{T} bude použito pravého Cauchyova – Greenova tenzoru deformace \mathbf{C} , pak budou jeho invarianty vyjádřeny druhými mocninami hlavních strečů

$$I_1^C = tr(\mathbf{C}) = \mathbf{C}:\mathbf{I} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (27)$$

$$I_2^C = \frac{1}{2}(tr^2(\mathbf{C}) - tr(\mathbf{C}^2)) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \quad (28)$$

$$I_3^C = det(\mathbf{C}) = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \quad (29)$$

Třetí invariant I_3^C představuje změnu objemu, která se během deformace nestlačitelných materiálů nemění, tudíž $I_3^C = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 1$.

3.5 Spektrální rozklad \mathbf{U} a \mathbf{C}

Z předpokládaných vlastností tenzorů platí, že pravý Cauchyho – Greenův tenzor deformace \mathbf{C} lze definovat za pomoci pozitivně definitního a symetrického materiálového tenzoru strečů \mathbf{U}

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{U}^2, \quad (30)$$

Tenzor \mathbf{U} lze vyjádřit pomocí hlavních strečů

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

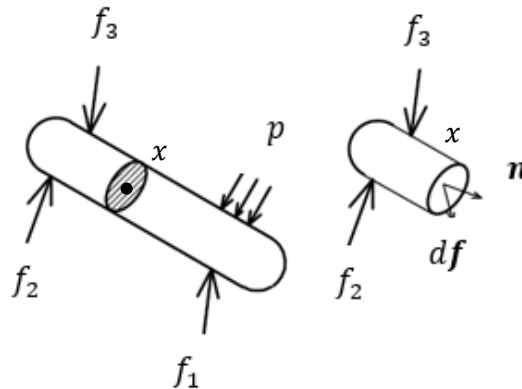
a výsledný tvar pravého Cauchyova-Greenova tenzoru deformace \mathbf{C} vyjádřený pomocí hlavních strečů pak vypadá takto

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \quad (32)$$

4 NAPJATOST

4.1 Tenzor napětí σ

Uvažované těleso je vystaveno vnějšímu silovému působení a setrvává ve statické rovnováze. Tělesem provedeme myšlený řez v bodě x pomocí roviny rozdělující těleso na dvě části. Tím těleso ztratí část silového působení a ztratilo by i rovnováhu, pokud bychom nepřipojili silové působení do plochy řezu tak, aby bylo působení odříznuté části nahrazeno jeho výsledným účinkem.



Obrázek 9 Zavedení vektoru $d\mathbf{f}$

Zvolený bod x roviny řezu má vnější normálový vektor \mathbf{n} . Do bodu x vložíme infinitesimální silovou výslednici vnitřních sil $d\mathbf{f}$ kvůli zajištění statické rovnováhy po myšleném odříznutí jeho části. K silovému vektoru $d\mathbf{f}$ zavedeme vektor intenzity vnitřních sil \mathbf{t} tak, aby k elementární ploše ds myšleného řezu vytvářel staticky ekvivalentní silové působení

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds \quad (33)$$

Tenzor napětí σ je definován jako lineární transformace vektoru normály roviny řezu \mathbf{n} na vektor plošné intenzity vnitřních sil \mathbf{t} . Tenzor skutečného napětí je dán vztahem

$$\mathbf{t} = \sigma^T \mathbf{n} \quad (34)$$

v maticovém tvaru vypadá zápis takto

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Tenzor napětí σ vyjadřuje vztah elementární síly ke skutečné ploše pro zdeformovanou konfiguraci. Takový tenzor napětí označujeme jako Cauchyho tenzor skutečného napětí. (Horný, 2014)

5 NAFUKOVÁNÍ VÁLCOVÉ TRUBICE

Při popisu nafukování válcové trubice využíváme válcových souřadnic namísto kartézských. Pro převod mezi souřadnicemi kartézskými $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ a válcovými $X = (R, \Theta, Z)^T$ používáme rovnice

$$(X_1, X_2, X_3) = (R \cos(\Theta), R \sin(\Theta), Z) \quad (36)$$

$$(R, \Theta, Z) = \left(\sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \arctg\left(\frac{X_2}{X_1}\right), X_3 \right) \quad (37)$$

za podmínek: $R \in \mathbb{R}^+ \quad 0 < \Theta < 2\pi \quad Z \in \mathbb{R}$

Vektory \mathbf{E}_R , \mathbf{E}_Θ a \mathbf{E}_Z budeme uvažovat jako vektory v ortonormální bázi, tudíž pro polohový vektor \mathbf{X} bude platit

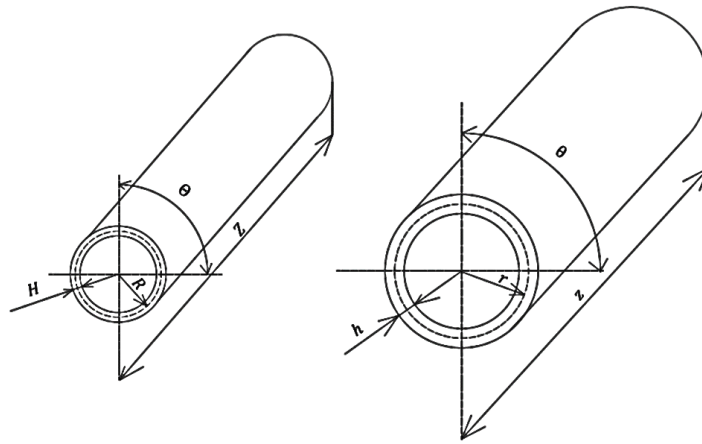
$$\mathbf{X} = R \cos(\Theta) \mathbf{E}_1 + R \sin(\Theta) \mathbf{E}_2 + Z \mathbf{E}_3 = R \mathbf{E}_R(\Theta) + Z \mathbf{E}_Z, \quad (38)$$

kde vztah mezi bázevými vektory je dán

$$\mathbf{E}_R = \cos(\Theta) \mathbf{E}_1 + \sin(\Theta) \mathbf{E}_2 \quad (39)$$

$$\mathbf{E}_\Theta = -\sin(\Theta) \mathbf{E}_1 + \cos(\Theta) \mathbf{E}_2 \quad (40)$$

$$\mathbf{E}_Z = \mathbf{E}_3 \quad (41)$$



Obrázek 10 Schéma nafukování trubice

Nafukovaná trubice je v referenčním stavu (obr. 10) popsána pomocí proměnných R , H a Z , kde R značí poloměr trubice, H její tloušťku a Z její délku. Pro popis zdeformovaného stavu trubice se používá proměnných r , h a z . Vztahy mezi zdeformovanou a nezdeformovanou trubicí vypadají takto

$$h = \lambda_{rR} R, \quad (42)$$

$$r = \lambda_{\theta\Theta} R, \quad (43)$$

$$z = \lambda_{zZ} Z, \quad (44)$$

kde $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ značí střední poloměr po deformaci, $R = \frac{R_1+R_2}{2}$ střední poloměr před deformací a λ značí streč v příslušném směru. Po dosazení jednotlivých složek do deformačního gradientu \mathbf{F} , získáme jeho tvar pro nafukování trubice. Odvození výsledného tvaru je poněkud složitější, a proto byl tvar deformačního gradientu \mathbf{F} převzat z literatury (Humphrey, 2002)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{rR} & F_{r\Theta} & F_{rZ} \\ F_{\Theta R} & F_{\Theta\Theta} & F_{\Theta Z} \\ F_{zR} & F_{z\Theta} & F_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial R} & r \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Následně také přijmeme předpoklad o střední ploše a uniformitě. Oba uvažované poloměry, resp. R a r budou vztaženy ke střední ploše a vzhledem k tomu, že nafukování trubice považujeme za homogenní, budou se průřezy od sebe jen vzdalovat, popř. přibližovat. Z výše uvedeného vyplývá, že zdeformovaný poloměr r závisí pouze na nezdeformovaném poloměru R a že nedochází ke zkrcování samotné trubice, tedy $\theta = \Theta$. Výsledný tvar deformačního gradientu \mathbf{F} má tvar

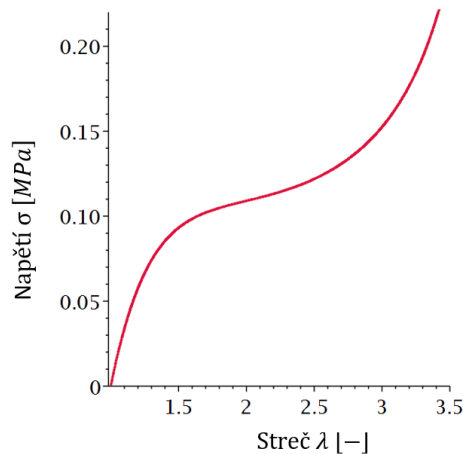
$$F = \begin{pmatrix} F_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & F_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & F_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & r \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{Z} \end{pmatrix} \quad (46)$$

6 KONSTITUTIVNÍ TEORIE

Konstitutivní teorie přináší konstitutivní vztahy, které popisují chování kontinua. To je důležité pro výzkum a další vývoj měkké tkáně. Konstitutivní vztahy jsou také dále nezbytné pro řešení problémů v mechanice kontinua, neboť bez nich je systém matematických rovnic neřešitelný. (Plešek, 2015) Vyjadřují vzájemnou závislost mezi veličinami popisující stav materiálu. V námi uvažovaných případech elastických materiálů se jedná o tenzory deformace a napětí. V konstitutivních rovnicích vystupují parametry, jež v některých případech mohou mít formu funkcí stavových proměnných. Ty je však nutné určit experimentálně. (Horný, 2014)

6.1 Hyperelastická

Hlavním znakem je nelineární závislost napětí na deformaci. Křivka této nelineární závislosti má charakteristický esovitý tvar.



Obrázek 11 Obecná závislost napětí a deformace při zatěžování elastomerů

Greenův přístup vychází z popisu hustoty deformační energie, kterou hledáme ve formě potenciálové funkce pro napětí. Neboť se jedná o čistě mechanické děje, které jsou vratné, tak přírůstek materiálové hustoty volné energie $\Delta\psi$ je dán pouze přírůstkem deformační energie. A protože uvažované děje jsou vratné, tak podle Clausiovy – Planckovy nerovnosti musí platit:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}} \quad (47)$$

kde \mathbf{P} je první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí. (Horný, 2014) Takto uvedený materiál považujeme za hyperelastický, jen místo volné energie ψ používáme deformační energii W .

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial\mathbf{F}} \quad (48)$$

V počáteční konfiguraci uvažujeme

$$W(\mathbf{F} = \mathbf{I}) = 0 \quad (49)$$

Pro determinant deformačního gradientu \mathbf{F} platí, že představuje relativní změnu objemu elementu J

$$\det \mathbf{F} = J, \quad (50)$$

kde pro J platí

$$dv = J dV \quad (51)$$

Objem nestlačitelného materiálu se nemění, tudíž $J = 1$ a potom

$$J = 1 \rightarrow \det \mathbf{F} = J = 1 \quad (52)$$

Z důvodu nestlačitelnosti objemových složek se nekoná práce vnitřních sil, a proto je nutné pro určení složek napětí zavést Lagrangeův multiplikátor, který je určen pomocí okrajových podmínek. Hustotu deformační energie pro nestlačitelný hyperelastický materiál pak vyjádříme vztahem

$$W = W(\mathbf{F}) - p(J - 1), \quad (53)$$

kde $J = 1$ a p je neurčitý Lagrangeův multiplikátor, který pro nestlačitelný materiál vyjadřuje hodnotu hydrostatického tlaku. (Holzapfel, 2000)

Dosažením hustoty deformační energie do (48) získáme tvar pro první Piola – Kirchhoffův tenzor napětí \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}}(J - 1) = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - pJ\mathbf{F}^{-T} \quad (54)$$

Jelikož parametr p je považován během derivování za konstantu, kterou je možné určit z okrajových podmínek, a v případě nestlačitelného materiálu, kdy $J = 1$, dostaneme vztah pro tenzor \mathbf{P} vztah

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-T} \quad (55)$$

Rovnici lze ještě převést na závislost skutečného tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ na deformačním gradientu \mathbf{F}

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p\mathbf{I} \quad (56)$$

6.2 Hyperelastické modely

Hyperelastické modely jsou založeny na definici vztahu pro hustotu deformační energie W . Obecný vztah pro hustotu deformační energie W je ve tvaru

$$W = W(I_1, I_2, I_3, \{M\}) = W(\mathbf{F}, \{M\}) \quad (57)$$

nebo jako funkce prodloužení

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \{M\}) \quad (58)$$

kde I_i jsou invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace, λ_i jsou hlavní streče a $\{M\}$ je množina materiálových konstant.

Pro popis tvaru funkce deformační energie W pro téměř nebo zcela nestlačitelné hyperelastické materiály bylo zavedeno několik modelů. Každý model je vhodnější pro jiný rozsah deformace s menší či větší odchylkou od experimentálních dat. Od modelu funkce deformační energie se očekává schopnost přesně popsat celý esovitý průběh deformace. Matematické vyjádření modelu je co nejjednodušší a počet materiálových parametrů by měl být co nejnižší, aby došlo ke snížení počtu nutných experimentů k jejich stanovení.

6.3 Neo – Hookeovský model

Neo – Hookeovský model je považován za nejjednodušší model popisující nelineární chování závislosti napětí na deformaci, neboť pracuje pouze s jednou materiálovou konstantou. Rovnice hustoty deformační energie tohoto modelu je založena na invariantech

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3), \quad (59)$$

kde první invariant tenzoru \mathbf{C} je $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 3$ a μ je počáteční smykový modul pružnosti

$$\mu = \frac{E}{[2(1 + \nu)]} \quad (60)$$

a kde E je modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo, které je u hyperelastických nestlačitelných materiálů rovno 0,5.

Nevýhodou takto jednoduchého modelu vycházejícího z informací o základní struktuře materiálu je jeho nepřesnost, neboť model odpovídá pozorovanému chování pouze v oblasti malých deformací, a proto byl nahrazen zobecněným Rivlinovým modelem.

6.4 Rivlinův model

Rivlinův model je další fenomenologický model snažící se popsat chování téměř nestlačitelného materiálu. Původní model měl pouze dva parametry, ale nebyl příliš vhodný pro popsání zpevnění materiálu při velkých deformacích, a proto byly ještě zavedeny modely s 3, 5 a 9 parametry. Hustota deformační energie Rivlinova modelu je funkcí deformačních invariantů I_1 a I_2 a C_{ik} , což je jeho materiálový parametr. (Horný, 2014)

$$W = \sum_{i=1, k=1}^n C_{ik} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^k \quad (61)$$

6.5 Van der Waalsův model

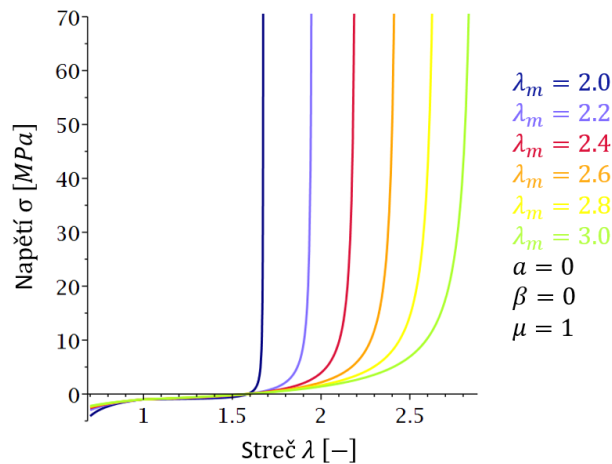
V této práci byl použit Van der Waalsův model, někdy též nazývaná model Kiliánův. Jedná se o jednoduchý izotropní model, jenž interpretuje energetickou rovnováhu elastomerů jako v případě reálného plynu, a který částečně respektuje vnitřní strukturu. Tvar hustoty deformační energie pro Van der Waalsův model byl převzat z literatury (Marckmann & Verron, 2006) a je uveden v (62)

$$W = -(\lambda_m^2 - 3)\mu \ln(1 - \eta) - (\lambda_m^2 - 3)\mu\eta - \mu \frac{\sqrt{2}}{6} a ((1 - \beta)I_1 + \beta I_2 - 3)^{\frac{3}{2}}, \quad (62)$$

kde a , λ_m , η a β jsou materiálové parametry, μ je počáteční smykový modul a I_1 je první invariant tenzoru \mathbf{C} . Při tvorbě analytického modelu bylo v práci uvažováno, že materiálové parametry a a β jsou rovny nule. První invariant tenzoru \mathbf{C} je vyjádřen pomocí strečů vztahem $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 3$ a parametr η je vyjádřen jako

$$\eta = \sqrt{\frac{(1 - \beta)I_1 + \beta I_2 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \quad (63)$$

Na obrázku níže je zobrazen jednoosý tah pro nestlačitelný Van der Waalsův materiálový model v závislosti na materiálovém parametru λ_m .



Obrázek 12 Jednoosý tah pro nestlačitelný materiál

7 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

Cílem analytického řešení bylo odhadnout parametry pro materiálový Van der Waalsův model, při kterých dochází ke ztrátě stability. Analytický model měl simulovat inflaci a extenzi uzavřené válcové trubice a byl vytvořen v programu Maple2018.

7.1 Vytvoření analytického modelu

Abychom mohli provést numerickou simulaci inflace válcové trubice, bylo nutné vytvořit její analytický model. Nejprve byl nadefinován vztah (62) pro hustotu deformační energie W odpovídající Van der Waalsovu materiálovému modelu. Do uvedeného vztahu bylo dosazeno za materiálové parametry α , β , η a invariant I_1 byl vyjádřen pomocí strečů. Výsledný vztah pro materiálový Van der Waalsův model vypadal takto

$$W = -\mu(\lambda_m^2 - 3) \left(\ln \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zz}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \right) - \sqrt{\frac{\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zz}^2 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \right) \quad (64)$$

Z rovnice (56) byly pomocí strečů vyjádřeny jednotlivé složky napětí

$$\sigma_{rr} = \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p \quad (65)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} - p \quad (66)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zz} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zz}} - p \quad (67)$$

7.2 Závislost bezrozměrného tlaku P_m na strečích $\lambda_{\theta\theta}$ a λ_{zz}

Abychom získali výslednou závislost bezrozměrného tlaku P_m na strečích $\lambda_{\theta\theta}$ a λ_{zz} při nafukování tenkostěnné trubice, bylo pro ni nutné přijmout několik předpokladů. Uvažovanou trubicí jsme považovali za uzavřenou a tenkostěnnou, dále byla z homogenního, izotropního a nestlačitelného materiálu.

7.2.1 Silová rovnováha tenkostěnné nádoby

Pro vytvoření analytického modelu trubice jsme předpokládali, že se jedná o uzavřenou tenkostěnnou nádobu, neboť tloušťka stěny h byla několikanásobně menší než poloměr r . Dále jsme uvažovali konstantní velikost zatížení trubice tlakem P . Silová rovnováha v tenkostěnné nádobě je popsána následujícími rovnicemi

$$\sigma_{rr} = 0 \quad (68)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P r}{h} \quad (69)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{P r}{2 h} \quad (70)$$

Do rovnic silové rovnováhy tenkostěnné nádoby byly dosazeny rovnice pro jednotlivé složky napětí, rovnice pak mají tvar

$$\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\lambda_{rR}} - p = 0 \quad (71)$$

$$\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\lambda_{\theta\theta}} - p = \frac{P r}{h} \quad (72)$$

$$\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\lambda_{zZ}} - p = \frac{P r}{2 h} \quad (73)$$

7.2.2 Hydrostatický tlak p

Pro získání Lagrangeova multiplikátoru p bylo použito rovnice (71), ve které bylo radiální napětí nulové, tudíž

$$p = \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\lambda_{rR}} \quad (74)$$

Získaný Lagrangeův multiplikátor p byl následně zpětně dosazen do rovnic (72 a 73).

$$\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\lambda_{\theta\theta}} - \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\lambda_{rR}} = \frac{P r}{h} \quad (75)$$

$$\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\lambda_{zZ}} - \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\lambda_{rR}} = \frac{P r}{2 h} \quad (76)$$

7.2.3 Vyjádření strečů v závislosti na vlastnostech materiálu

Uvažovaná tenkostěnná trubice byla z nestlačitelného materiálu. Objemový poměr J pro nestlačitelné materiály je podle uvedených předpokladů roven jedné, pak tedy

$$J = \lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ} = 1 \quad (77)$$

Tudíž ze vztahu (77) je možné vyjádřit závislost streče λ_{rR} na strečích $\lambda_{\theta\theta}$ a λ_{zZ}

$$\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ}} \quad (78)$$

7.2.4 Zdeformované rozměry tenkostěnné trubice

Zdeformované rozměry tenkostěnné trubice byly vyjádřeny v závislosti na referenčních hodnotách a na strečích v daném směru

$$r = \lambda_{\theta\theta} R \quad (79)$$

$$h = \lambda_{rR} H \quad (80)$$

$$z = \lambda_{zZ} Z \quad (81)$$

Deformační gradient \mathbf{F} pak lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{Z} \end{pmatrix} \quad (82)$$

7.2.5 Soustava rovnic

Vztah pro streč (78) a vztahy pro zdeformované rozměry trubice (79, 80 a 81) byly dosazeny do rovnic (75) a (76), tudíž rovnice lze vyjádřit takto

$$\left[\lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\lambda_{\theta\Theta}} \right]_{\lambda_{rR}=\lambda_{\theta\Theta}^{-1}\lambda_{zZ}^{-1}} - \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR}=\lambda_{\theta\Theta}^{-1}\lambda_{zZ}^{-1}} = \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{P R}{H} \quad (83)$$

$$\left[\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\lambda_{zZ}} \right]_{\lambda_{rR}=\lambda_{\theta\Theta}^{-1}\lambda_{zZ}^{-1}} - \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR}=\lambda_{\theta\Theta}^{-1}\lambda_{zZ}^{-1}} = \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{P R}{2 H} \quad (84)$$

7.2.6 Výsledný tvar soustavy rovnic

Soustavu rovnic (83) a (84) jsme zderivovali a za člen P/μ byl dosazen bezrozměrný tlak P_m a poměr tloušťky stěny H a poloměru R byl nahrazen členem ε . Výsledný tvar soustavy rovnic vypadal takto

$$\frac{\lambda_{\theta\Theta}^2}{1 - \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}} - \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}} \right)} - \frac{P_m \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}}{\varepsilon} = 0 \quad (85)$$

$$\frac{\lambda_{zZ}^2}{1 - \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}} - \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3}} \right)} - \frac{P_m \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ}}{\varepsilon} = 0 \quad (86)$$

Postupným tlakováním byla pomocí výpočetního programu vykreslena závislost bezrozměrného tlaku na strečích $\lambda_{\theta\Theta}$ a λ_{zZ} . Grafy závislostí jsou vykresleny v následující kapitole.

7.3 Limitní hodnota λ_m

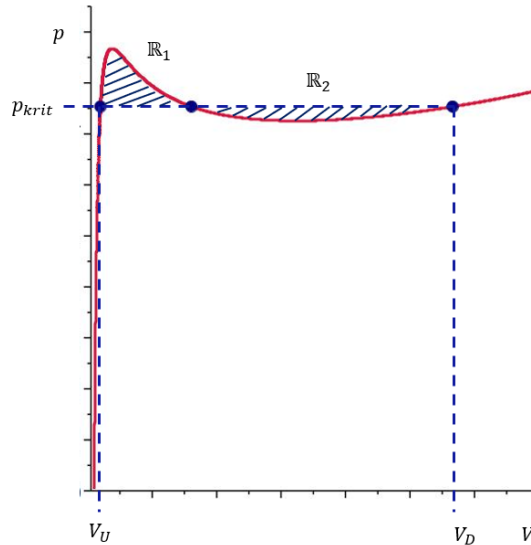
Za limitní hodnotu parametru λ_m považujeme takovou hodnotu, při které začne docházet ke ztrátě stability. Její přesná hodnoty byla v práci určena numerickými výpočty. Bylo využito předpokladu, že pro mezní hodnotu, při které ke ztrátě stability bude docházet, platí, že derivace funkce je v nějakém bodě nulová a zároveň je i v některých bodech záporná.

7.4 Kritická hodnota bezrozměrného tlaku P_m

V literatuře (Chater a Hitchinson, 1984) byla uvedena Maxwellova podmínka pro dvě koexistující fáze.

$$p_{krit}(V_D - V_U) = \int_{V_U}^{V_D} p dV \quad (87)$$

Podmínka definuje rovnost obdélníkové plochy s plochou pod křivkou, resp. nad křivkou, a to v případě, že plochy pod křivkou, resp. nad křivkou si jsou rovny.



Obrázek 13 Závislost tlaku na změně objemu

Pro plochy \mathbb{R}_1 a \mathbb{R}_2 pak platí

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2 \quad (88)$$

Závislost tlaku P_m na strečích $\lambda_{\theta\theta}$ a λ_{zz} byla převedena na závislost tlaku P_m na relativním objemu v/V pomocí vztahu

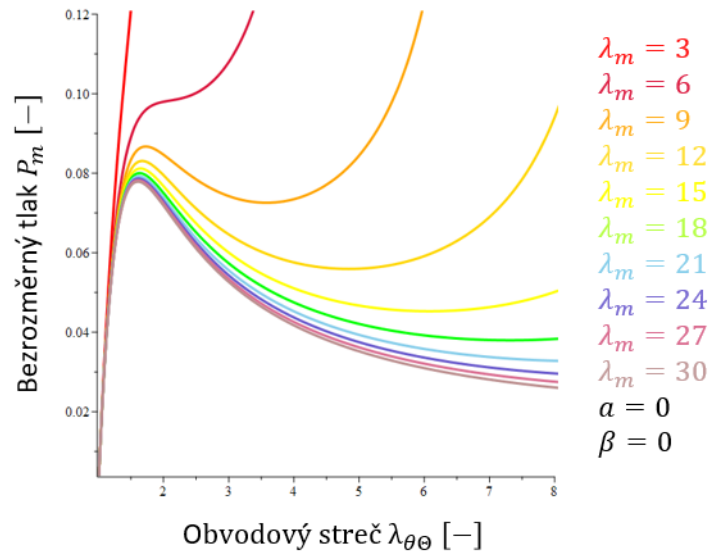
$$\frac{v}{V} = \frac{\pi r^2 z}{\pi R^2 Z} = \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zz} \quad (89)$$

Dále bylo nezbytné nalézt maximum a minimum funkce, díky kterým jsme získali i odpovídající hodnoty relativního objemu v/V . Tím jsme si vymezili interval, na kterém se kritický tlak P_m nacházel. Použitím definice Riemannova integrálu byla zjištěna poloha bodů, které měly stejnou hodnotu tlaku a které protínaly křivku tak, že vzniklé obsahy plochy nad křivkou a pod křivkou si byly rovny. Získané hodnoty kritických tlaků byly vykresleny do grafu uvedených v následující kapitole.

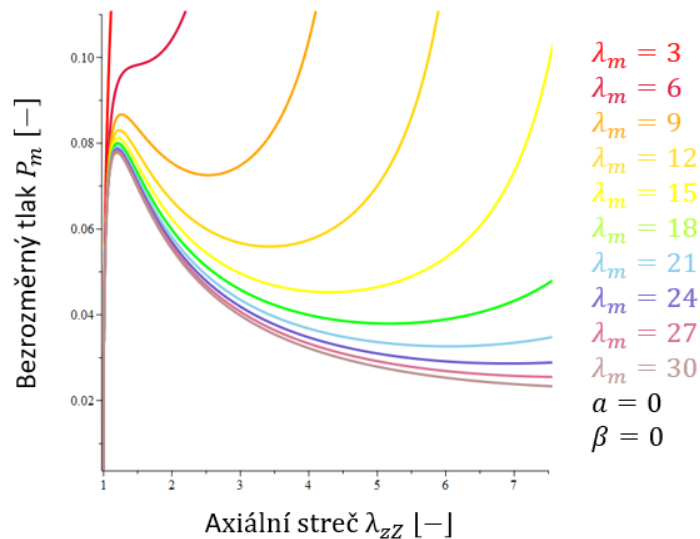
8 VÝSLEDKY A DISKUSE

8.1 Závislost bezrozměrného tlaku P_m na strečích $\lambda_{\theta\theta}$ a λ_{zz}

Z numerické simulace nafukování tenkostěnné trubice byla získána závislost obvodové, resp. axiální deformace na bezrozměrném tlaku P_m . Závislost je pro jednotlivé hodnoty λ_m vykreslena na obr. 14 a 15, ze kterých je zřejmé, že závislost je nelineární.



Obrázek 14 Závislost bezrozměrného tlaku P_m na streči I_2



Obrázek 15 Závislost bezrozměrného tlaku P_m na streči I_3

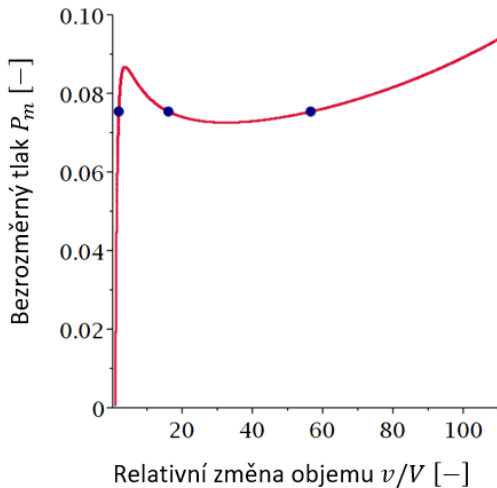
Z výsledných grafů numerické simulace pro rozdílné hodnoty λ_m je patrné, že pro nižší hodnoty λ_m je pro vznik nestability potřeba vyššího tlaku a také, že pro některé hodnoty λ_m ke ztrátě stability vůbec nedochází. Přesná hodnota na desetinné číslo byla vypočtena pomocí programu a její hodnota je $\lambda_m = 6,3$. Z toho vyplývá, že pro některé hodnoty λ_m ke ztrátě stability nedochází.

Výsledky, které jsme získali numerickou simulací (obr. 14 a 15), je nezbytné považovat pouze za odhady chování skutečného materiálu. Neboť lze očekávat, že při experimentálním ověření inflace trubice, mohou vzniknout lokální deformace způsobené vlivem materiálové či tvarové imperfekce.

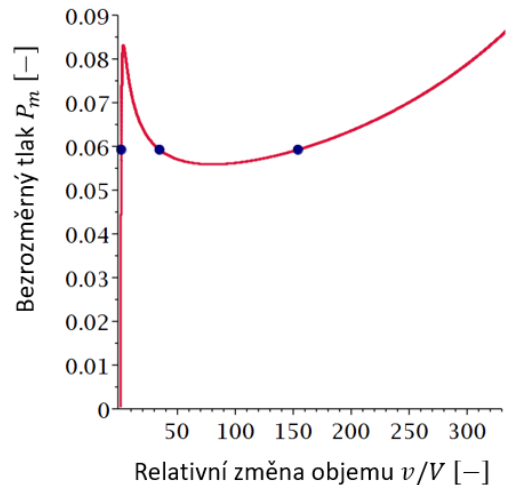
8.2 Kritická hodnota tlaku P_m

Na obrázcích níže je zobrazena závislost bezrozměrného tlaku P_m na relativní změně objemu v/V . V každém grafu jsou vyznačeny polohy bodů, které mají stejnou hodnotu tlaku (tzv. kritickou hodnotu tlaku P_m). Tyto body zároveň vymezují obsahy ploch nad a pod křivkou a to tak, že obsahy těchto dvou ploch si jsou rovny.

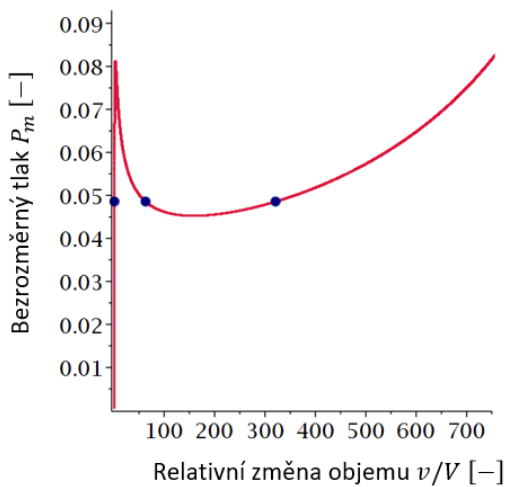
Výsledná křivka také dokazuje, že se dále zvyšuje objem, a to i s klesajícím tlakem, jak již bylo dříve v práci uvedeno. Z níže uvedených grafů je také zřejmé, že se se zvyšující hodnotou materiálového parametru λ_m snižuje hodnota propagační tlaku.



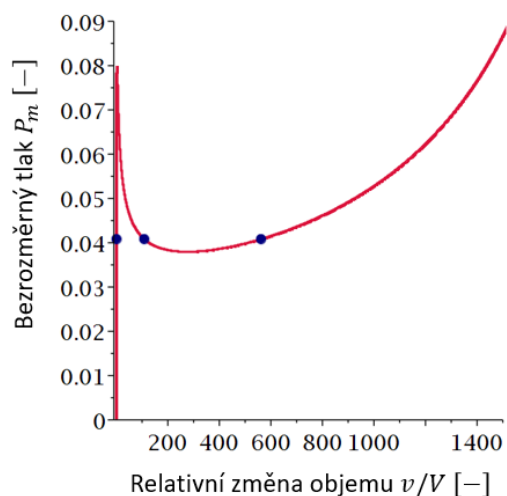
Obrázek 16 Kritická hodnota tlaku P_m pro $\lambda_m = 9$



Obrázek 187 Kritická hodnota tlaku P_m pro $\lambda_m = 12$



Obrázek 178 Kritická hodnota tlaku P_m pro $\lambda_m = 15$



Obrázek 19 Kritická hodnota tlaku P_m pro $\lambda_m = 18$

ZÁVĚR

V této bakalářské práci jsme si na základě rovnic popisujících vlastnosti materiálu a pomocí rovnic rovnováhy, odvodili vztahy v tenkostěnné uzavřené trubici pro Van der Waalsův model. Díky tomu bylo možné vytvořit v programu Maple2018 jeho numerický model. Z analytického modelu jsme postupným tlakováním získali závislost napětí na deformaci. Zjištěná závislost mezi nimi byla nelineární. Dále bylo zjištěno, že průběh závislosti bezrozměrného tlaku na deformaci jak obvodové, tak axiální se příliš neliší. V této části analytického řešení byla také určena minimální hodnota pro parametr λ_m , při které začalo docházet ke ztrátě stability ($\lambda_m = 6,3$). Pro některé hodnoty materiálového parametru λ_m tedy ke ztrátě stability vůbec nedochází.

V další části analytického řešení byla určena kritická hodnota bezrozměrného tlaku P_m , pro kterou si byly plochy inflačně – deflační a deflačně – inflační rovny. Díky získané výsledné křivce bylo zjištěno, že se se zvyšující hodnotou materiálového parametru λ_m snižuje hodnota propagačního tlaku.

Analytický model je možné dále využít pro ověření experimentálně naměřených hodnot nebo může být zpřesňován postupným odstraňováním jednotlivých zjednodušení, jenž bylo v práci použito.

V bakalářské práci byly uvedeny pojmy související se ztrátou stability a zároveň s nimi byly vyloženy a nadefinovány pojmy popisující nelineární chování elastických materiálů. V programu Maple2018 byl vytvořen analytický model, který simuloval nafukování tenkostěnné válcové trubice a díky provedené numerické simulaci byly charakterizovány podmínky vedoucí ke ztrátě stability. Byly tak splněny všechny úkoly, které byly v rámci bakalářské práce zadány.

REFERENCE

- GENT, A.N. Elastic instabilities in rubber. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40. 2005, 165-175.
- GORIELY, A., M. DESTRADE a M. Ben AMAR. Instabilities in elastomers and in soft tissues. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2006, 59(4), 615-630.
- HAN, Hai-Chao & Chesnutt, Jennifer & Garcia, Justin & Liu, Qin & Wen, Qi. (2013). Artery Buckling: New Phenotypes, Models, and Applications. *Annals of biomedical engineering*. 41. 1399-410. 10.1007/s10439-012-0707-0.
- HOLZAPFEL, Gerhard A. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. New York: John Wiley&Sons, 2000. ISBN 04-718-2319-8.
- HORNÝ, Lukáš. Effect of axial prestretch on inflation instability in finitely extensible thin-walled tube. *Bulletin of applied Mechanics*. 2014, 10(36), 5-10.
- HORNÝ, Lukáš. *Patobiomechanika srdečněcévního systému: I. díl*. 1. Praha: České vysoké učení technické, 2014. ISBN 978-80-01-05473-4.
- HUMPHREY, Jay D. *Cardiovascular Solid Mechanics: Cells, Tissues, and Organs*. 1. New York: Springer-Verlag New York, 2002. ISBN 978-0-387-21576-1.
- CHATER, E. a HITCHINSON J.W. (1984) On the propagation of bulges and buckles. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2), 269-277.
- KANNER, Landon M. a Cornelius O. HORGAN. Elastic instabilities for strain-stiffening rubber-like spherical and cylindrical thin shells under inflation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017, 204-215.
- MARCKMANN G., VERRON E.: Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chem. Technol.* 79, 835–858 (2006)
- ŠMIRÁK, Svatopluk. *Pružnost a plasticita I*. 3. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2006, 2013 s. ISBN 80-7204-468-0
- PLEŠEK, J. (2015) *Nelineární mechanika kontinua s příklady*. Dostupné online: <http://mechanika.fs.cvut.cz/content/files/MK/MK2015.pdf>

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 Stabilita tuhého tělesa	9
Obrázek 2 Ztráta stability tlačného prutu	10
Obrázek 3 Ztráta stability trubice.....	10
Obrázek 4 Důsledek ztráty stability (Han, 2013).....	11
Obrázek 5 Obecná závislost změny relativního objem v/V na tlaku P	11
Obrázek 6 Změna kruhového průřezu (Chater a Hitchinson, 1984)	12
Obrázek 7 Zobrazení tělesa v referenční a průběžné konfiguraci.....	13
Obrázek 8 Definice deformace tělesa	14
Obrázek 9 Zavedení vektoru $d\mathbf{f}$	17
Obrázek 10 Schéma nafukování trubice	18
Obrázek 11 Obecná závislost napětí a deformace při zatěžování elastomerů	20
Obrázek 12 Jednoosý tah pro nestlačitelný materiál.....	23
Obrázek 13 Závislost tlaku na změně objemu	27
Obrázek 14 Závislost bezrozměrného tlaku P_m na streči I_2	28
Obrázek 15 Závislost bezrozměrného tlaku P_m na streči I_3	28
Obrázek 16 Kritická hodnota tlaku P_m pro $\lambda_m = 9$	29
Obrázek 17 Kritická hodnota tlaku P_m pro $\lambda_m = 12$	29
Obrázek 18 Kritická hodnota tlaku P_m pro $\lambda_m = 15$	29
Obrázek 19 Kritická hodnota tlaku P_m pro $\lambda_m = 18$	29