

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ELEKTROTECHNOLOGIE



Simulace šíření tepla na desce plošného spoje u pájení
přetavením

Simulation of heat dissipation on the printed circuit board for
reflow soldering

Bakalářská práce

Michal Sebera

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a management

Studijní obor: Aplikovaná elektrotechnika

Vedoucí práce: Mgr. Jan Zemen, Ph.D.

Konzultant práce: Ing. Tomáš Tichý

Praha 2019

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Sebera** Jméno: **Michal** Osobní číslo: **466374**
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra elektrotechnologie**
Studijní program: **Elektrotechnika, energetika a management**
Studijní obor: **Aplikovaná elektrotechnika**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Simulace šíření tepla na desce plošného spoje u pájení přetavením

Název bakalářské práce anglicky:

Simulation of heat dissipation on the printed circuit board for reflow soldering

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s technologií pájení přetavením a s vybranými materiály, které se zde používají.
- 2) Modelujte šíření tepla mezi pájecími ploškami na desce plošného spoje numerickou metodou konečných prvků (trojrozměrný model pomocí Comsol Multiphysics).
- 3) Porovnejte šíření tepla mezi pájecími ploškami s ohledem na okolní podmínky (uvolňování skupenského tepla v okolních spojích, vodivé cesty mezi ploškami apod.)
- 4) Porovnejte výsledky simulací s dostupnými naměřenými daty a diskutujte vliv aproximací použitých v tepelném modelu.

Seznam doporučené literatury:

- [1] MACH P., SKOČIL V., URBÁNEK J.: Montáž v elektrotechnice, ČVUT Praha, 2001
- [2] Pietriková A., Ďurišín J., Mach P.: Diagnostika a optimalizácia použitia ekologických materiálov pre vodivé spájanie v elektronike, Fakulta elektrotechniky a informatiky Technickej university v Košiciach, Košice 2010, ISBN: 978-80-553-0447-2
- [3] Dušek K., Stancu C., Notingher P.V., Mach P.: Temperature distribution in solder joints during melting and solidification. Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE), 2015 9th International Symposium on 2015 May 7 (pp. 500-506). IEEE.
- [4] Dušek K., Stancu C., Notingher P.V., Mach P., Plaček M.: Experimental and Numerical Analysis of Melting and Solidification of SnAgCu Joints. IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology. 2016 Sep;6(9):1445-55.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Mgr. Jan Zemen, Ph.D., katedra elektrotechnologie FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **07.02.2019**

Termín odevzdání bakalářské práce: **24.05.2019**

Platnost zadání bakalářské práce: **20.09.2020**

Mgr. Jan Zemen, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Prohlášení

„Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně, a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.“

V Praze dne:

.....

Podpis

Poděkování

„Rád bych poděkovat svému vedoucímu práce Mgr. Janu Zemenovi, Ph.D. za odborné vedení, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích. Děkuji také panu Ing. Tomáši Tichému za cenné rady a konzultaci při tvorbě modelů.“

Anotace

Bakalářská práce se zaměřuje na šíření tepla v deskách plošných spojů při pájení přetavením, a na simulaci tohoto děje pomocí programu COMSOL Multiphysics. V práci jsou popsány základy šíření tepla a principy jeho modelování. Také je probráno osazování a pájení. Součástí práce je experiment, při kterém byly změřeny teplotní profily pájecí slitiny Sn37Pb. Pomocí probrané teorie a matematického popisu šíření tepla je vytvořen model za účelem simulace výsledků dosažených při provedeném experimentu. Také jsou názorně ukázány dva různé způsoby simulace uvolňování latentního tepla při změně skupenství látky.

Klíčová slova

šíření tepla, modelování, numerické simulace, Comsol, pájení, latentní teplo, metoda konečných prvků

Annotation

This bachelor's thesis focuses on heat dissipation on the printed circuit board for reflow soldering and simulation of this process by a simulation software COMSOL Multiphysics. The work describes fundamentals of heat transfer and basic principles of its modeling. Also mounting and soldering is discussed. Temperature profiles of solder alloy Sn37Pb were measured within the project. Using the theory and mathematical description of heat transfer, a model is developed to simulate the results obtained in the experiment. Two different ways of simulating the release of latent heat during the phase transition of the material are also be shown.

Keywords

heat transfer, modeling, numerical simulation, Comsol, soldering, latent heat, finite element method

Obsah

1. Úvod	7
1.1. Šíření tepla	8
1.2. Osazování a pájení	9
1.3. Latentní teplo a teplotní profily pájky	10
1.4. Modelování a simulace	12
2. Teorie	13
2.1. Matematický popis šíření tepla	13
2.2. Numerické řešení diferenciálních rovnic	16
2.2.1. Metoda konečných diferencí v 1D	16
2.2.2. Metoda konečných prvků ve 3D	18
3. Aplikace teorie pro modely v 1D a 2D	20
3.1. Šíření tepla v 1D	20
3.1.1. Problém	20
3.1.2. Řešení	20
3.1.3. Výsledky	23
3.2. Stacionární řešení vedení tepla ve 2D	24
3.2.1. Problém	24
3.2.2. Řešení	24
3.2.3. Výsledky	25
4. Experiment	26
4.1. Použité přístroje	26
4.1.1. Vzorek	27
4.2. Průběh experimentu	28
4.3. Výsledky	28
5. Modelování v Comsolu	31
5.1. Vedení tepla po přímce	32
5.1.1. Výsledek a porovnání s Mathematicou	33
5.2. Model z Agrosu	34
5.2.1. Výsledky a porovnání s Agroseem	34
5.3. Modelování experimentu	37
5.3.1. Geometrie, parametry a počáteční podmínky modelu	37
5.3.2. Výsledky a porovnání s experimentem	42
6. Závěr	47
Zdroje	50
Přílohy	52

1. Úvod

Název *Simulace šíření tepla na desce plošného spoje u pájení přetavením* v sobě ukrývá hned tři témata, každé dost obsáhlé na to, aby samotné pokrylo mnoho publikací. Šíření tepla, pájení a simulace. Každému z nich bude v této práci věnováno několik kapitol, kde bude uveden jejich základní popis. Když to bude potřeba, nahlédne se i do větších podrobností. V praktické části práce pak dojde ke spojení teorií jednotlivých témat za účelem řešení problémů převzatých z reálného světa.

Ve úvodní kapitole jsou postupně probrány základy jednotlivých témat – šíření tepla, pájení i modelování a simulace. Je zmíněno také teplo latentní.

Druhá kapitola se zabývá především matematickým popisem šíření tepla. Je v ní rozebráno i řešení diferenciálních rovnic, které tento děj popisují, a se kterými pracují programy použité při simulacích prováděných pro tuto práci.

Aplikacím dosud nabytých matematických znalostí je věnována další kapitola, kde budou ukázány dva jednodušší případy simulace šíření tepla. Jeden z nich je kompletně celý vyřešen pomocí programu napsaného v rámci této práce. Simuluje vedení tepla úsečkou s danou počáteční teplotou. Druhý už využívá existující software pro výpočty a simulace fyzikálních dějů a popisuje šíření tepla na 2D průřezu realistickou geometrií desky plošného spoje.

Ve čtvrté kapitole je popsáno experimentální měření, které bylo provedeno abychom měli reálná data pro porovnání s vytvořenými modely. Jde o měření teplotních profilů pájky při pájení přetavením se zaměřením na její chladnutí a skupenskou přeměnu. Při té se odehrává zajímavý děj, uvolňování latentního tepla, který má zatím ne zcela prozkoumaný vliv na průběh pájení přetavením.

Pátá kapitola je hlavním bodem celé práce. Jsou zde uvedeny modely popisující provedené experimenty s využitím programu Comsol. Pozornost je věnována jak procesu vytváření komplexního 3D modelu, tak i porovnání výsledků simulací s naměřenými daty.

Poslední část se věnuje zhodnocení práce a naměřených výsledků.

1.1 Šíření tepla

Šíření tepla je jedním ze způsobů přenosu energie. Jedná se o termodynamický děj, při kterém dochází k výměně tepla mezi tělesy s různou teplotou. Přičemž podle druhého termodynamického zákona platí, že pokud existuje teplotní rozdíl mezi dvěma objekty, teplejší těleso vždy předává část své vnitřní energie chladnějšímu tělesu. Teplo se nikdy nešíří z chladnějšího objektu na teplejší. Existují tři způsoby šíření tepla – vedení (kondukce), proudění (konvekce) a sálání (záření, radiace). V této kapitole jsou všechny tři způsoby stručně popsány.

Během kondukce nedochází k pohybu látky. Jde o přenos kinetické energie mezi kmitajícími částicemi dvou vzájemně se dotýkajících objektů nebo uvnitř předmětu, jehož části mají rozdílné teploty. Částice látky s vyšší teplotou mají vyšší kinetickou energii a pomocí vzájemných srážek ji předávají částicím látky s nižší teplotou. Tepelná vodivost je schopnost tělesa vést teplo. Popisuje ji tzv. součinitel tepelné vodivosti, který se liší podle uvažovaného materiálu.

Při šíření tepla konvekcí dochází k vzájemnému proudění hmoty s odlišnou teplotou. Jestliže vedení tepla probíhá na mikroskopické úrovni, dochází během proudění k makroskopickému přesunu látky. To je možné výhradně u kapalin a plynů (případně u plazmatu), pevné látky tuto schopnost obvykle nemají. Během samovolného proudění probíhá šíření tepla směrem vzhůru, jelikož ve většině případů hustota tekutin s vyšší teplotou klesá.

Třetím způsobem přenosu tepla je sálání. Sálání se liší od předchozích dvou způsobů tím, že vzájemně působící tělesa nemusí být v těsné blízkosti a tento proces může probíhat i ve vakuu. Není k němu tedy potřeba žádné látkové prostředí. Přenos energie nastává ve formě vyzařování elektromagnetického záření. Toto záření popisuje několik zákonů, např. Planckův vyzařovací zákon, Stefan-Boltzmannův zákon a Kirchhoffův zákon tepelného vyzařování. Množství vyzařené a absorbované energie závisí především na teplotě těles, mezi kterými přenos probíhá, na barvě jejich povrchu a na velikosti jeho obsahu. Teplo nejlépe vyzařuje černé těleso, nejhůře naopak objekt se stříbřitě lesklým povrchem.

Zákony popisující všechny tři způsoby šíření tepla a jejich matematické vyjádření jsou podrobněji rozebrány v kapitole 2.1.

1.2 Osazování a pájení

K osazení desky plošného spoje (DPS) se dnes používají převážně dvě různé technologie. Jednou z nich je osazování součástkami s drátovými vývody (THT – through-hole technology). Vývody těchto součástek se prostrčí otvorem plošného spoje a na opačné straně se zapájí. Tato metoda je starší a v současné době se už při výrobě moderních zařízení téměř nepoužívá.

Novější metodou je technologie SMT (surface mount technology), česky povrchová montáž. Součástky pro povrchovou montáž se označují jako SMD (surface mount device). SMD součástky se osazují přímo na povrch DPS pájením. Tato metoda má mnoho výhod. Součástky jsou menší a lze je osadit z obou stran desky, která tak může být mnohem menší a kompaktnější. Do plošného spoje nemusí být vrtáno tolik děr a jeho výroba je rychlejší a levnější.

Klíčovým krokem při povrchové montáži je pájení. Při pájení dochází k vodivému spojení součástky s obvodem na desce plošného spoje. Pájka je materiál s teplotou tavení nižší než spojované části, která toto spojení zajistí. Podle teploty tavení pájky se pájení dělí na tzv. měkké a tvrdé. Při teplotách do 450°C se pájení označuje jako měkké, nad 450°C jako tvrdé. Mezi měkké pájky patří pájky cínové, případně slitiny cínu s prvky jako zinek nebo antimon. Dříve se používaly pájky s obsahem olova, jehož použití je od roku 2006 omezeno směrnicí Evropské unie 2002/95/ES. K tvrdému pájení se používají převážně různé slitiny kovů s vyšší teplotou tavení, např. stříbro, měď, zlato nebo nikl.

Pájení součástek může být prováděno ručně. To není praktické pro hromadnou nebo sériovou výrobu, jak kvůli zdlouhavosti práce, tak pro nedokonalost provedených spojů, a používá se především při opravách. Při hromadném pájení velkých sérií plošných spojů se používají dvě hlavní metody. Pájení vlnou a pájení přetavením.

Pájení vlnou je starší postup, který se používá již řadu let a je možné ho použít pro montáž i v kombinaci s klasickými součástkami. Nejdříve se na DPS nanese lepidlo a na něj se vsadí součástky SMD. Poté následuje vytvrzení lepidla. Části, které nejsou určeny k aktuálnímu zapájení, jsou pokryty nepájivou ochrannou vrstvou. Takto je deska připravená na

samotné pájení. To se provádí ve dvou krocích, užívá se dvou vln. První je vlna turbulentní, která zajistí dokonalé prohřátí a smáčení všech plošek určených k pájení. Druhá vlna s laminárním prouděním vytvoří dokonalý homogenní spoj. Nakonec deska prochází očištěním od přebytečné pájky a chlazením na teplotu okolí.

Pájení přetavením je jednodušší a v současné době se používá čím dál častěji. Jako první se na desku nanese pájka ve formě pasty (sítotiskem, šablonovým tiskem,...). Na ní se následně osadí součástky, provede se sušení pasty, což odpaří její kapalně složky, a dojde k aktivaci tavidla uvnitř pasty. Nakonec dojde k přetavení pasty při teplotě vyšší, než je bod tání pájky. K ohřevu pasty při přetavení se používá několik různých metod – ohřev vedením tepla, infračervenými zářiči, laserem, horkým plynem nebo kondenzací par. Během přetavení a změny skupenství pájky se z ní uvolní latentní teplo. Latentní teplo je energie, kterou je potřeba dodat, příp. se uvolní, když látka dosáhne teploty tuhnutí, příp. tání, aby změna skupenství skutečně proběhla. Tato energie může zapříčinit nežádoucí jevy během pájení, jako je nedostatečné/ pomalé tuhnutí pájky nebo její opětovné roztavení, což může vést např. k posuvu součástek nebo jejich nadzvednutí. [1][2]

Právě šířením tepla mezi pájecími ploškami na desce plošného spoje při pájení přetavením se bude práce podrobněji zabývat.

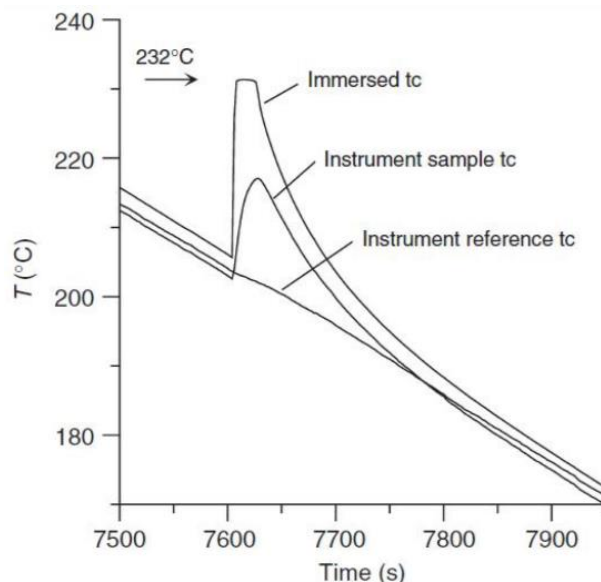
1.3 Latentní teplo a teplotní profil pájky

Latentní teplo je energie, která se uvolní nebo pohltí látkou při změně skupenství. Například pokud se ochlazuje kapalina, její teplota klesá dokud nedosáhne teploty tuhnutí. V tu chvíli se začne uvolňovat latentní teplo. Dokud je látka v kapalném stavu, její částice jsou pohyblivější, mají větší kinetickou energii, a těleso tak má větší vnitřní energii. Jakmile ale začne docházet k tuhnutí, částice svou energii postupně ztrácí, jak se formují do organizovanějších mřížek pevné látky, a ta se uvolňuje ve formě latentního tepla. Těleso se tak na chvíli nachází ve stavu, kdy některé jeho části jsou ještě tekuté, zatímco jiné už tuhé. Jakmile plně přejde do pevného skupenství, latentní teplo se přestane uvolňovat a těleso začne opět

chladnout. Stejný princip funguje i při procesu tání, pouze těleso místo uvolňování latentního tepla tuto energii potřebuje absorbovat, aby ke změně skupenství skutečně došlo.

Často se uvádí, že během uvolňování latentního tepla musí být konstantní teplota. Není to však úplně přesné vyjádření, neboť teplota může během tuhnutí dále lehce klesat, nebo se dokonce i zvýšit (Obr. 1). Vše záleží na uspořádání systému – jak rychle si dokáže vyměňovat teplo se svým okolím. Pokud předpokládáme izolovaný systém, pak například snížení entropie spojené s tuhnutím (vytvořením pravidelné atomové mřížky) vede nutně ke zvýšení entropie fononů (kmitů atomů kolem rovnovážných poloh), což se projeví zvýšením teploty, tzv. adiabatická změna teploty. Podobného jevu se využívá například při magnetickém chlazení. Naopak, pokud předpokládáme malý systém v dobrém tepelném kontaktu s velkou lázní, pak je konstantní teplota během tuhnutí dobrým přiblížením. [3] [11]

Tento jev lze velmi dobře pozorovat při měření teplotního profilu pájek. Teplotní profil pájky je jednoduše závislost průběhu teploty na čase. Jeho optimální průběh (nejen) pro pájení přetavením je předmětem neustálého zkoumání neboť na něm závisí kvalita vzniklého pájeného spoje.



Obr. 1 – Chladnutí cínu měřené třemi teplotními senzory – uvnitř cínu, na plošce v těsném kontaktu a bez kontaktu (referenční) [4]

1.4 Modelování a simulace

„By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work — that is, correctly to describe phenomena from a reasonably wide area.” John von Neumann [6]

Ve světě přírodních věd je model zjednodušeným znázorněním daného systému nebo děje. Při jeho vytváření se snažíme tento systém popsat co nejpřesněji, přičemž některé jeho vlastnosti můžeme často zanedbat. Ne všechny vlastnosti jsou totiž nezbytné pro účel modelu, a jejich zanedbáním se urychlí prováděné výpočty a simulace. S vývojem výpočetní techniky můžeme vytvářet složitější, komplexnější modely a díky tomu modelování a simulace nabývá čím dál větší důležitosti na poli vědy.

Fyzikální zákony jsou většinou vyjádřeny diferenciálními rovnicemi, které mají ve většině případů analytické nebo numerické řešení. Především ve chvílích, kdy soustavu diferenciálních rovnic nelze vyřešit analyticky (nebo by její řešení bylo příliš složité), přichází na řadu počítačová simulace, která se postará o numerické řešení problému.

Výhodou počítačově vytvořeného modelu je, na rozdíl od skutečného objektu, velmi snadná změna jeho parametrů. To nám umožňuje provádět simulace za různých podmínek. Navíc nejsme při jeho tvorbě limitováni prostorem, materiálem ani dobou, jakou by experiment probíhal v reálném prostředí. Využití počítačových simulací je obvykle také levnější a mnohem praktičtější než skutečné experimenty.

Modelování a simulace má v dnešní době obrovské množství využití. V meteorologii se používá k předpovědím změn klimatu, vzájemných interakcí atmosféry, pevniny, oceánů, energie ze slunce atd. V ekonomice se vytváří modely k výběru nebo zjednodušení obrovského množství dat, stejně tak jako k předvídání ekonomické aktivity, plánování obchodů nebo k efektivnímu risk-managementu. V elektrotechnice, která nás zajímá nejvíce, se klade důraz na vytvoření reálného 3D modelu a využívá se například k analýze menších i větších součástí strojů a pohonů. Díky tomu můžeme zdokonalovat tvar těchto součástek, použít lepší materiály, vhodnější slitiny, což vede k celkovému zvýšení efektivity celého produktu.

Přestože se již nyní využívá počítačových simulací v celé řadě oborů, je velmi pravděpodobné, že se jejich rozšiřování nezastaví ani v blízké budoucnosti. [5]

2. Teorie

2.1 Matematický popis šíření tepla

V kapitole 1.1 jsou popsány jednotlivé typy šíření tepla a jejich základní vlastnosti. V této kapitole zajdeme do větších podrobností a seznámíme se s matematickým popisem tohoto děje.

Vedení tepla

Vedení tepla se dělí na ustálené (stacionární) a neustálené (nestacionární). Pro stacionární vedení platí, že se teplotní rozdíl mezi jednotlivými částmi tělesa nemění. V této práci se pracuje především s neustáleným vedením, tj. v tělese dochází ke změně teploty. Základní principy vedení tepla vychází z Fourierova zákona (1). [7]

$$\mathbf{q} = -\lambda \cdot \nabla T \quad (1)$$

q ... plošná hustota tepelného toku [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$]

λ ... součinitel tepelné vodivosti [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]

∇T ... gradient teploty [$\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$] popisuje velikost změny teploty v daném směru

Z rovnice (1) můžeme vyčíst, že hustota tepelného toku q je úměrná gradientu teploty ∇T . Konstantou úměrnosti je součinitel tepelné vodivosti λ , který je charakteristickou vlastností každého materiálu. V případech s neustálenou teplotou lze vedení tepla popsat rovnicí kontinuity pro objemovou hustotu tepelné energie $du = \rho c_p dT$ (kde ρ [kg/m^3] je hustota a c_p je měrná tepelná kapacita [$\text{J}/\text{kg}/\text{K}$]) [8], která má obecný tvar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2)$$

Po dosazení za u a za q z Fourierova zákona dostáváme:

$$\frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f(x, y, z, t) \quad (3)$$

$\frac{\delta T}{\delta t}$... parciální derivace teploty podle času

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$... Laplaceův operátor uplatněný na teplotní pole a rozepsaný do složek

$f(x,y,z,t)$... odpovídá zdroji tepla ve vyšetřované oblasti, může být roven nule

Každé těleso má také svůj tepelný odpor R_T definovaný rovnicí (4).

$$R_T = \frac{d}{\lambda \cdot S} \quad (4)$$

Tepelný odpor popisuje odpor tělesa proti šíření tepla v závislosti na jeho tloušťce, součiniteli tepelné vodivosti a obsahu plochy, přes kterou teplo proniká. Látek s velkým R_T se využívá například při izolacích budov a jiných aplikacích, kdy je potřeba omezit šíření tepla z jedné oblasti do druhé. [9]

Proudění tepla

Proudění tepla, neboli konvekce, se dělí na dva typy podle jeho příčiny. Volná konvekce probíhá v důsledku rozdílu hustot, který je způsobený rozdílnou teplotou v různých oblastech látky. Části s vyšší teplotou, a tudíž nižší hustotou, samovolně stoupají vzhůru. Nucená konvekce je vyvolána vnějšími silami, jako jsou různé turbíny a čerpadla, která vytváří umělé proudy. Vztahem popisujícím šíření tepla prouděním je rovnice (5). [10]

$$P = h \cdot S \cdot \Delta T \quad (5)$$

P ... tepelný výkon [W] (který lze jinak zapsat jako derivaci tepla Q podle času dQ/dt)

h ... koeficient přestupu tepla [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]

S ... plocha objektu [m^2]

ΔT ... rozdíl teploty těles mezi kterými konvekce probíhá [K]

Tepelné záření

Radiace (neboli sálání, záření) je třetím hlavním způsobem šíření tepla. Popisují ho tyto zákony: Planckův vyzařovací zákon, Kirchhoffův zákon tepelného vyzařování, Wienův posunovací zákon a Stefan-Boltzmannův zákon ((6) a (7)). Studium těchto zákonů je nad rámec práce, proto je zde uveden jen poslední jmenovaný.

$$I = \sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4 \quad (6)$$

$$P = \sigma \cdot \varepsilon \cdot A \cdot T^4 \quad (7)$$

I ... intenzita záření [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$]

P ... vyzářený výkon [W]

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$... Stefan-Boltzmannova konstanta

ε ... emisivita povrchu tělesa

A ... povrch tělesa [m^2]

Rovnice (6) a (7) popisují stejný zákon, (6) pro intenzitu záření a (7) pro vyzářený výkon. Vzájemně jsou k sobě vázány vztahem $P = I \cdot A$. Celková vyzářená energie tělesa Q je dána výkonem P vyzářeným za určitý čas t . Tato energie se při dopadu na jiné těleso dělí na energii pohlcenou, odraženou a energii, která tělesem prochází. V ideálních teoretických případech dojde vždy jen k jednomu z uvedených dějů. Tzv. absolutně černé těleso veškerou energii pohltí a je popsáno emisivitou $\varepsilon=1$. Absolutně bílé těleso všechnu energii odrazí, a absolutně průzračným tělesem energie projde. Obvykle dochází k nějaké kombinaci těchto situací. [12]

Obecně, když mluvíme o tepelném záření, máme na mysli vyzařování celého elektromagnetického spektra. Teplo, které dokážeme cítit skutečně jako hřejivé, je však vyzařováno pouze infračerveným zářením o vlnových délkách 700 – 10000 nm.

2.2 Numerické řešení diferenciálních rovnic

2.2.1 Metoda konečných diferencí v 1D

V této kapitole je rozebráno teoretické řešení Fourierova zákona pro šíření tepla v 1D prostoru. Homogenní tvar Fourierovy rovnice v 1D je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$u(x,t)$... funkce popisující teplotu [K]

t ... čas [s]

x ... je prostorová souřadnice [m]

$\alpha = \lambda / (\rho c_p)$... je součinitel teplotní difuzivity [$m^2 \cdot s^{-1}$]

K nalezení numerického řešení pro rovnici (8), musí být známé počáteční a okrajové podmínky v průběhu celého děje. Počáteční podmínkou je rozložení teploty v počátku času. To označíme funkcí $p(x)$, takže platí $u(x,0) = p(x)$. Okrajové podmínky označíme $u(0,t) = a(t)$ a $u(x_n,t) = b(t)$, kde x_n je okrajová souřadnice objektu.

Prvním krokem řešení je diskretizace prostoru a času. To znamená, že tyto spojité veličiny rozdělíme na konečný počet bodů. Tím vznikne tzv. mesh, neboli síť souřadnic, kdy každá souřadnice ukazuje na určitý bod v prostoru a času.

pro prostor... $x_i = i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N_x$

pro čas... $t_n = n\Delta t, \quad n = 0, \dots, N_t$

u_i^n pak značí hodnotu funkce u v pozici x_i a čase t_n .

Tímto dostáváme rovnici (9).

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_n) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_n) \quad (9)$$

Dalším krokem je nahrazení derivací jejich numerickou aproximací. První časovou derivaci lze nahradit například tzv. Eulerovou dopřednou metodou (10).

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}. \quad (10)$$

Druhou derivaci prostoru pak můžeme diskretizovat následovně:

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_n) = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (11)$$

Z diferenciální rovnice (9) jsme tak získali rovnici algebraickou s jednou neznámou u_i^{n+1} , vyjádřenou pomocí hodnot u_i^n v předchozím časovém kroku:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (12)$$

Kromě Eulerovy dopředné metody, můžeme na řešení rovnice šíření tepla použít numericky přesnější a stabilní Crank-Nicolsonovu metodu. Derivaci času aproximujeme jako průměr dopředné a zpětné Eulerovy metody.

Označíme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x) . \quad (13)$$

Potom platí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} (f^{n+1}(x) + f^n(x)) . \quad (14)$$

Pokud za $f(x)$ dosadíme numerickou aproximaci prostorové derivace, získáme

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right] . \quad (15)$$

V tomto případě získáváme trojici nových neznámých, $u_{i+1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i-1}^{n+1}$. Celý problém, včetně řešení těchto neznámých, lze vyřešit pomocí lineární soustavy rovnic, maticově zapsané jako

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{b} , \quad (16)$$

kde

$$\mathbf{M} = \left(I - \frac{\Delta t}{2} \cdot A \right) \quad (17)$$

$$\mathbf{b} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} \cdot A \right) \cdot \vec{U}_n , \quad (18)$$

přičemž platí

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

a \mathbf{I} je jednotková matice příslušných rozměrů.

Řešením soustavy rovnic (16) je matice \mathbf{U} o N_t řádcích a N_x sloupcích. Každý sloupec reprezentuje rozložení teploty na x -ové souřadnici v určitém čase (označujeme jako vektor \mathbf{U}_n v rovnici (18)) a každý řádek je časový vývoj teploty jednoho bodu. [13] [15]

2.2.2 Metoda konečných prvků ve 3D

Svět, ve kterém žijeme, je z velké části popsán fyzikálními zákony. Popis těchto zákonů, mezi které patří například zákony zachování energie a hmoty, je zprostředkován parciálními diferenciálními rovnicemi (dále PDR). PDR se obvykle řeší analyticky, ale pro většinu problémů z reálného světa není možné tohoto řešení dosáhnout. Proto se rovnice různě diskretizují a řeší se pomocí numeriky. Výsledky jsou potom jen aproximací skutečného řešení PDR. Současné numerické metody jsou však natolik přesné, že je můžeme považovat za více než dostačující. Metoda konečných prvků (Finite Element Method, dále jako FEM) patří mezi tyto numerické metody.

V předchozí kapitole jsme pro diskretizaci použili konstantní krok v prostoru i čase. Jednou z výhod FEM je možnost přizpůsobení diskretizace řešenému problému. Pokud o funkci víme, že je v daném intervalu téměř konstantní, můžeme zvolit menší elementární kroky, a naopak, při očekávaných strmých změnách využijeme drobnější diskretizaci.

Příkladem PDR je rovnice (3) popisující změnu teploty způsobenou tepelným zdrojem $g(T, t)$.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-\lambda \nabla T) = g(T, t, x) \quad (20)$$

ρ ... hustota [kg/m³]

C_p ... tepelná kapacita [J/K]

$\partial T / \partial t$... diferenciál teploty podle času [K/s]

$-\lambda \nabla T = q$... podle rovnice (1)

$\nabla \cdot q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z}$... divergence popisující změnu tepelného toku q podél prostorových souřadnic

Rovnice (20) uvádí, že pokud nastane změna toku q , musí to být způsobeno změnou teploty nebo vyrovnáno/způsobeno tepelným zdrojem g . Vyřešit tuto rovnici tak, abychom dostali jednu analytickou rovnici $T = f(x,t)$ popisující rozložení teploty jak v čase, tak i v prostoru, v závislosti na okrajových a počátečních podmínkách obtížné nebo i nemožné. Proto je mnohem vhodnější použít metodu FEM.

Jednou z možností řešení je použití tzv. *slabé formulace* problému. Zjednodušeně řečeno, slabá formulace slouží k převodu diferenciálních rovnic na integrální. Slabá se jí říká proto, že původní rovnice požadovala aby všechny výrazy PDR byly dobře definovány ve všech bodech, ale při slabé formulaci stačí pouze rovnost v integrálním smyslu. Dalším krokem je diskretizace rovnice a její převedení do numerického tvaru, kde integrály „ \int “ nahradí jednodušší sumace „ \sum “. Diskretizace nám umožňuje hledání aproximovaného řešení jako lineární kombinace sady lokalizovaných bázových funkcí ψ_i :

$$T_h(x) = \sum_i T_i \psi_i(x) \quad (21)$$

Jednou z výhod FEM je, že použití těchto bázových funkcí nám dovoluje volit různé způsoby diskretizace. Na rozdíl od metody konečných diferencí použité v kapitole 2.2.1, kde byl je pevně daný interval mezi jednotlivými body. V 1D to znamená, že bázová funkce může mít proměnlivou hustotu bodů na přímce. Ve 2D a 3D problémech můžou nabývat elementy tzv. *meshe* různých geometrických tvarů, např. trojúhelníky (ve 2D) nebo tetraedr (ve 3D).

Jakmile je provedena diskretizace, můžeme zformulovat soustavu rovnic na podobném principu jako rovnice (16). Tato soustava je za použití daných počátečních podmínek řešitelná. Řešením soustavy rovnic obdržíme aproximaci skutečného řešení PDR. Aproximace je tím přesnější, čím „hustší“ je provedená diskretizace (tvořící *mesh*).

Při numerických řešeních je vždy třeba brát v potaz odhad chyby řešení. Je zřejmé, že jelikož se jedná pouze o aproximaci skutečného stavu, nějaká odchylka se vždy objeví. Chyba $e = u - u_h$ je definovaná jako rozdíl mezi přesným řešením u a řešením numerických rovnic u_h . U jednodušších problémů je možné chybu odhadnout předem. [14]

3. Aplikace teorie pro modely v 1D a 2D

3.1 Šíření tepla v 1D

Úkolem této kapitoly je seznámit se s procesem modelování a simulace šíření tepla. V první části jde o jednoduchý problém šíření tepla v 1D prostoru. K simulaci použijeme počítačový program *Mathematica* od společnosti *Wolfram Research*. *Mathematica* slouží k výpočtům pro nejrůznější vědecké, technické nebo matematické aplikace.

3.1.1 Problém

Úsečka ležící v 1D prostoru na ose x má počáteční rozložení teploty dané funkcí (22).

$$u_0 = 273 \cdot \sin(x) \quad , \text{kde } x \in \langle 0, \pi \rangle \quad (22)$$

Konstanta 273 byla zvolena, aby program popisoval skutečnou teplotu v K. V koncových bodech úsečky je nastavena okrajová podmínka $T = 0$ K. Cílem úkolu je napsat program simulující šíření teploty v úsečce s využitím teorie z kapitoly 2.2.1. Předpokladem je, že díky pevně dané nulové teplotě na okrajích bude úsečka postupně vychlázdat, až dosáhne teploty 0 K. Dosáhnutí absolutní nuly není ve skutečnosti možné, jde jen o ilustrativní příklad.

3.1.2 Řešení

U jednotlivých kroků řešení jsou vždy pro ilustraci uvedeny odpovídající části programu. Prvním krokem je stanovení počátečních podmínek (Obr. 2). Konstanty n , h , t_0 a k popisují diskretizaci času a prostoru. n a t_0 určují v kolika různých časech a bodech prostoru

se bude teplota počítat, h a k popisují délku intervalu mezi těmito body. $u0$ je tabulkou hodnot funkce $\sin(x)$, kde za x jsou dosazovány hodnoty z listu se jménem cas , které určují body intervalu.

```
WOLFRAM MATHEMATICA | STUDENT EDITION Demonstrations | MathWorld  
  
(* space *)  
In[1]:= n = 21; (* steps *)  
        h = 1 / (n - 1); (* interval *)  
  
(* time *)  
In[3]:= t0 = 30; (* steps *)  
        k = 1 / t0; (* interval *)  
  
        cas = Range[0 + Pi / 20, Pi - Pi / 20, Pi / 20];  
  
(* počáteční podmínka *)  
        u0 = Table[273 * Sin[cas[[i]]], {i, 1, Length[cas]};
```

Obr. 2 – Program v Mathematice, část první

Druhým krokem je inicializace matic (Obr. 3), které poslouží k řešení. Jde o matice **A** (viz. (18)), **M** (16) a **Id**, což je jednotková matice o rozměrech $(n-2) \times (n-2)$. S použitím značení z kapitoly 2.2.1 by rozměr matice byl $(N_t-2) \times (N_t-2)$. I ostatní matice mají tento rozměr. Okraje úsečky se nemění, proto se nepočítají pomocí matic, jen se při řešení nastaví na nulu. Do tabulky hodnot s názvem *data* se budou ukládat výsledky. Prozatím jde o seznam, ve kterém jsou uloženy nulové hodnoty po trojicích. Počet trojic je roven počtu časových kroků t_0 . Dvě krajní nuly v trojici značí nulovou okrajovou podmínku v každém kroku. Místo prostřední nuly se budou ukládat výsledky pro zbytek úsečky, takže nakonec vznikne z *data* matice, jejíž řádky budou reprezentovat teploty na úsečce v jednom čase a každý další řádek bude reprezentovat další časový krok.

```

(* matice *)
A =
  (DiagonalMatrix[Table[-2, n - 2]] + DiagonalMatrix[Table[1, n - 3], 1] +
   DiagonalMatrix[Table[1, n - 3], -1]) / h^2;
Id = IdentityMatrix[n - 2];
M = Id -  $\frac{k}{2}$  * A;
data = Table[Table[0, {i, 3}], {i, t0}];

```

Obr. 3 – Program v Mathematice, část druhá

Hlavní částí programu je řešení rovnice (16) samotný (Obr. 4). K jeho provedení je použit cyklus While, který se dokola opakuje dokud platí podmínka $t < t_0$. t je na počátku nastaveno jako rovno 2, protože nepotřebujeme počítat první časový krok. Ten je daný počáteční podmínkou. $data[[1,2]] = u_0$ značí uložení u_0 do prvního řádku na druhou pozici (druhou nulu tak nahradí celý seznam teplot pro jednotlivé body). Jako proměnná nám slouží u , do které nejdřív zadáme u_0 . Poté proběhne výpočet pro $b = (I + \frac{k}{2} \cdot A) \cdot u$, kde u je známá z předešlého časovém kroku (pro první krok = počáteční podmínky). Poté s využitím funkce *LinearSolve* vypočítáme soustavu rovnic a její výsledek uložíme do seznamu *data* a zároveň jím přepíšeme u , které pak poslouží v dalším časovém kroku. Nakonec jednoho cyklu zvýšíme t o jedna.

```

t = 2;
data[[1, 2]] = u0;
u = u0;
While[t < t0,
  b = (Id +  $\frac{k}{2}$  * A) . u;
  u = LinearSolve[M, b];
  data[[t, 2]] = u;
  t = t + 1;
];

```

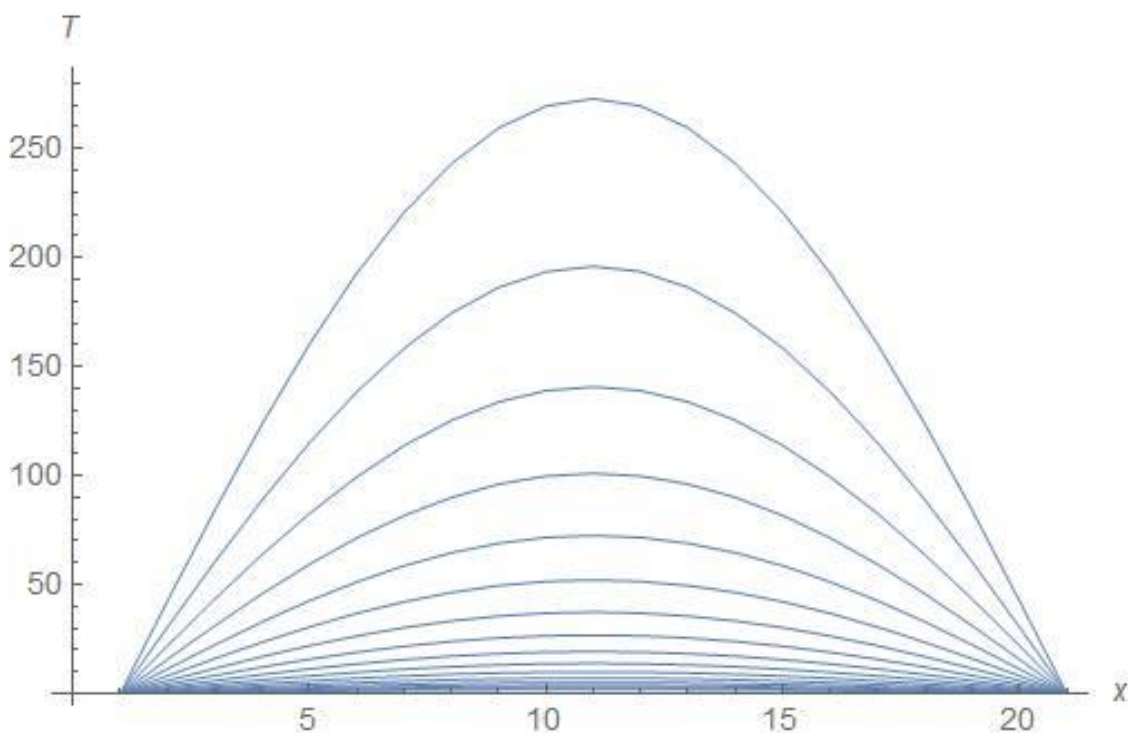
Obr. 4 – Program v Mathematice, část třetí

Pro grafickou podobu výsledků použijeme na seznam *data* funkci *Show* s několika přidanými parametry pro názornější zobrazení (Obr. 5).

```
Show[Table[ListLinePlot[Flatten[data[[a]] // N], PlotRange -> Automatic,  
AxesLabel -> {x, T}, PlotStyle -> Thin], {a, 1, 16, 1}]]
```

Obr. 5 – Program v Mathematice, část čtvrtá

3.1.3 Výsledky



Obr. 6 – Výstup programu z Mathematicy

Výsledky zobrazené v grafu na Obr. 6 ukazují rozložení teploty v každém časovém kroku (každá křivka odpovídá jednomu kroku v čase). Ze začátku se teplota rozplývá relativně rychle. S postupujícím časem vychládání zpomaluje, až se v konečném čase ustálí na nule. Tento průběh odpovídá našim předpokladům.

3.2 Stacionární řešení vedení tepla ve 2D

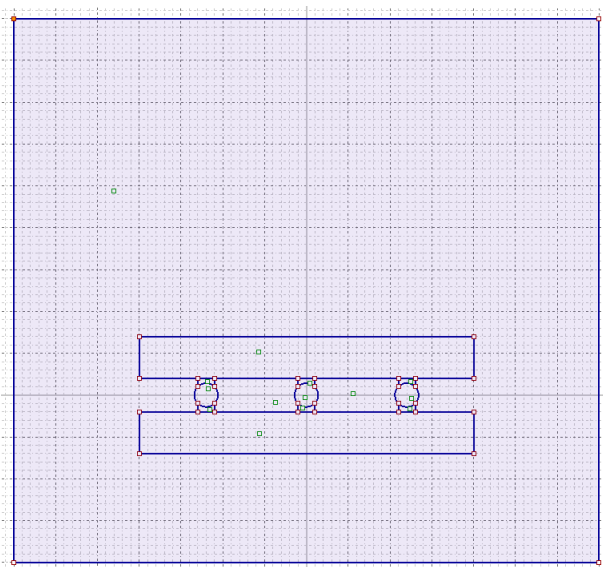
V této kapitole se o kus přiblížíme řešení reálného problému. K simulaci ve 2D prostoru využijeme program Agros2D. Agros2D je aplikace pro numerické řešení fyzikálních problémů, jako je například šíření tepla.

3.2.1 Problém

Úkolem je nasimulovat šíření tepla ve 2D průřezu zjednodušené desky plošného spoje. Geometrie spočívá ve dvou deskách o rozměrech 20 x 2,5 mm. Mezi nimi jsou tři kuličky pájky o průměru $\sqrt{2}$ mm. Z obou stran mezi kuličkou a DPS je měděná ploška o rozměrech 1 x 0,5 mm. Celý předmět je pak uzavřen ve prostoru 35 x 32,5 mm jehož materiálem byl zvolen vzduch. Počáteční podmínky jsou nastaveny tak, že tepelný zdroj je v levé kuličce – 523 K a zbylé části mají pokojovou teplotu 300 K, která je pevně nastavena na okraji vzduchové domény.

3.2.2 Řešení

Vytvořená geometrie je na Obr. 7.



Obr. 7 – průřez deskou plošného spoje

Po zhotovení modelu se každé části přiřadí daný materiál charakterizovaný svou tepelnou vodivostí. Nakonec si Agros sám vytvoří tzv. *mesh*. Elementy *meshe* mají v tomto případě trojúhelníkový tvar. Jako jsme v kapitole 3.1 dělili úsečku na jednotlivé body pro výpočet jejich teploty, zde se o tuto diskretizaci prostoru postará program automaticky. Rovnice popisující vedení tepla ve stacionárním případě, se kterou pracuje Agros, je na Obr. 8. Oproti rovnici (20) postrádá časovou derivaci teploty. Druhý člen popisuje pohyb materiálu konstantní rychlostí \mathbf{v} , která je v našem případě nulová.

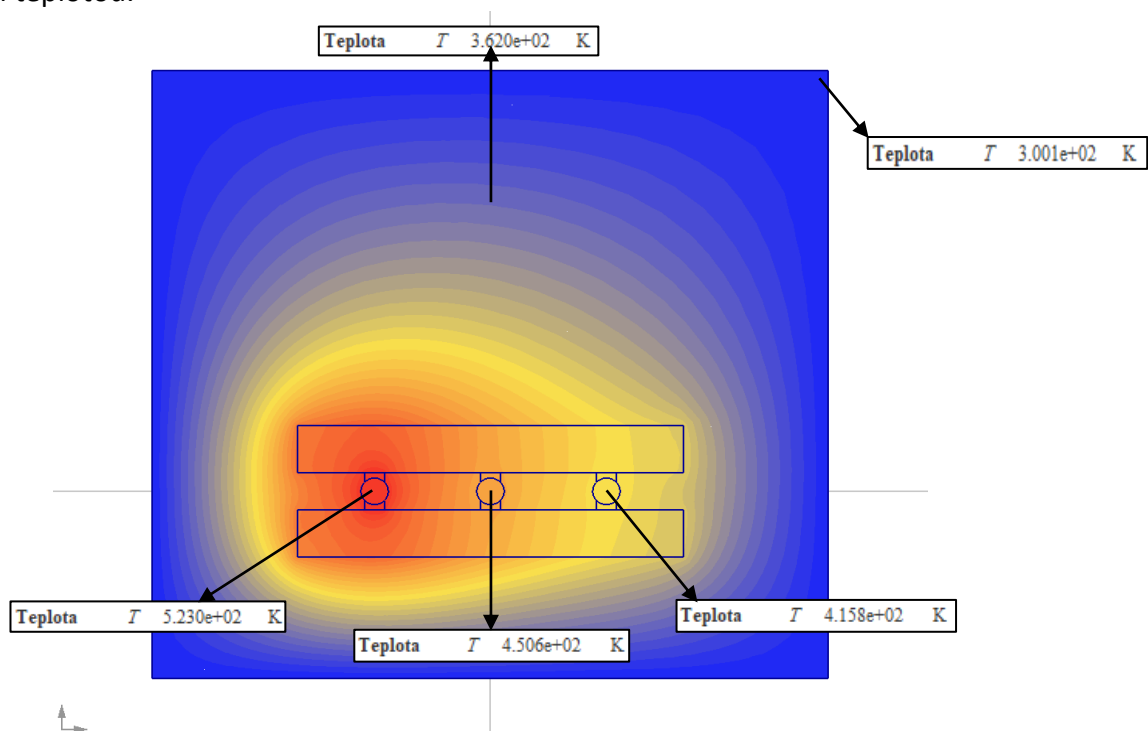
Rovnice

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho c_p (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T) = Q$$

Obr. 8 – rovnice šíření tepla z programu Agros

3.2.3 Výsledky

Zobrazené řešení (Obr. 9) je řešením stacionárním. Ukazuje nám rozložení teploty po ustálení všech změn. Jelikož se v Agrosu u výsledné simulace nezobrazuje legenda vysvětlující, která barva značí jakou teplotu, je do obrázku přidáno pár bodů, určených začátkem šipky s jejich teplotou.



Obr. 9 – stacionární řešení šíření teploty v desce plošného spoje

Podle očekávání na Obr. 9 vidíme, že se teplo lépe šíří skrz měděné části a DPS do vedlejších kuliček pájky, než například směrem vzhůru ve vzduchu. Důvodem je lepší tepelná vodivost. Pro srovnání, tepelná vodivost mědi je nastavena na $400 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, zatímco vzduchu pouze na $0,026 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

4. Experiment

Pro lepší ověření výsledků praktické části práce, tj. modelování *uvolňování latentního tepla/šíření tepla* na DPS, byl proveden jednoduchý experiment. Tento experiment spočíval v měření teplotního profilu pájecí pasty při pájení přetavením, se zaměřením na chladnutí a uvolňování latentního tepla.

4.1 Použité přístroje

K přetavení vzorku jsme použili horkovzdušnou průběžnou pec MISTRAL 260 (Obr. 10). Pec má tři oddělené zóny ohřevu. V každé zóně lze nastavit různou teplotu, přičemž první dvě byly použity k předehřevu, ve třetí potom docházelo k přetavení. Lze také nastavit rychlost pohybu pásu, na který se pokládají vzorky. U výjezdu z pece jsou chladicí ventilátory, které byly během průběhu experimentu zablokovány, protože rychlejší chlazení (a tudíž prudší pokles křivky v teplotním profilu pájky) učiní vliv latentního tepla v grafu hůře rozpoznatelný.



Obr. 10 – horkovzdušná průběžná pec MISTRAL 260 [16]

Údaje pece byly nastaveny následovně:

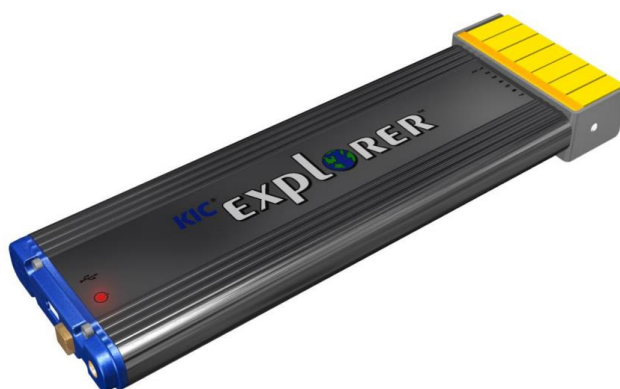
Zóna 1 – 155°C

Zóna 2 – 185°C

Zóna 3 – 250°C

Rychlost pásu – 15cm/min

K měření teplotních profilů byl použit přístroj KIC Explorer (Obr. 11). Tento přístroj může měřit až sedm průběhů teplot najednou, využity byly dvě. KIC Explorer byl připojen k počítači, na kterém program KIC 2000 zpracovával naměřená data.



Obr. 11 – Přístroj KIC Explorer použitý k měření teplotních profilů [17]

4.1.1 Vzorek

Měřeným vzorkem byla část desky plošného spoje (DPS). Na něj pak byly postupně nanášeny dvě dávky pájecí pasty Sn37Pb. Tato slitina byla vybrána, protože databáze materiálů dostupných v naší verzi Comsolu obsahuje pouze pájku typu 60Sn-40Pb. Obsahuje 37 % olova, 63 % cínu a její teplota tání je 183°C [18]. Každá dávka měla hmotnost 20mg s přesností na desetinu miligramu, váženo na laboratorních vahách. Přesnější tvar a rozměry vzorku jsou rozebrány v kapitole 5.3.1.

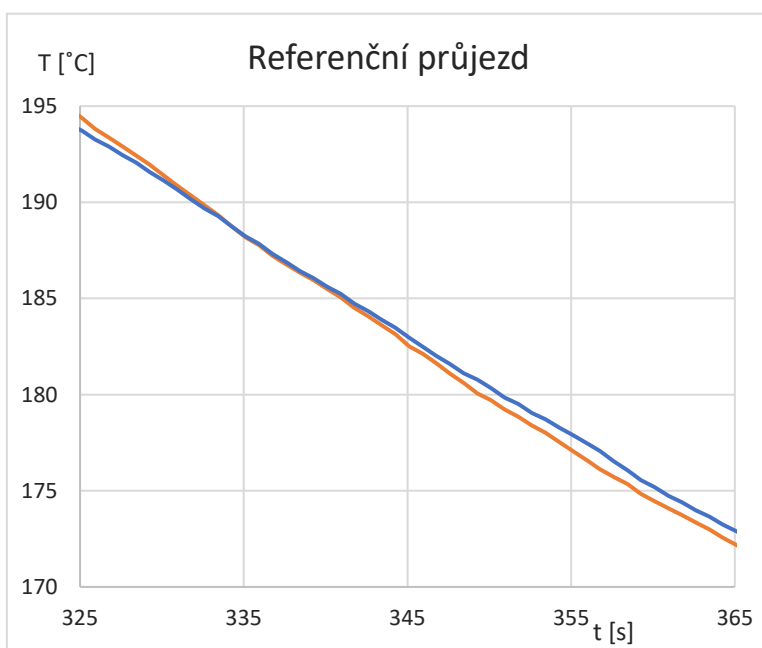
4.2 Průběh experimentu

Pro korektní měření teploty musí být zajištěn správný kontakt tepelného čidla s pájecí pastou. Ze spodní strany desky byla proto navrtána díra až k měděné plošce, na které je pájka nanášena, a teplotní čidlo bylo pomocí silikonu k této plošce připevněno. Po nakontaktování byl vzorek položen na pohyblivý pás a bylo provedeno referenční měření bez pasty pro ověření dostatečného dotyku čidla a plošky. Druhý průjezd proběhl po nanášení pájky na jednu z plošek. Po něm byla nanášena pájka i na druhou a proběhly další tři průjezdy.

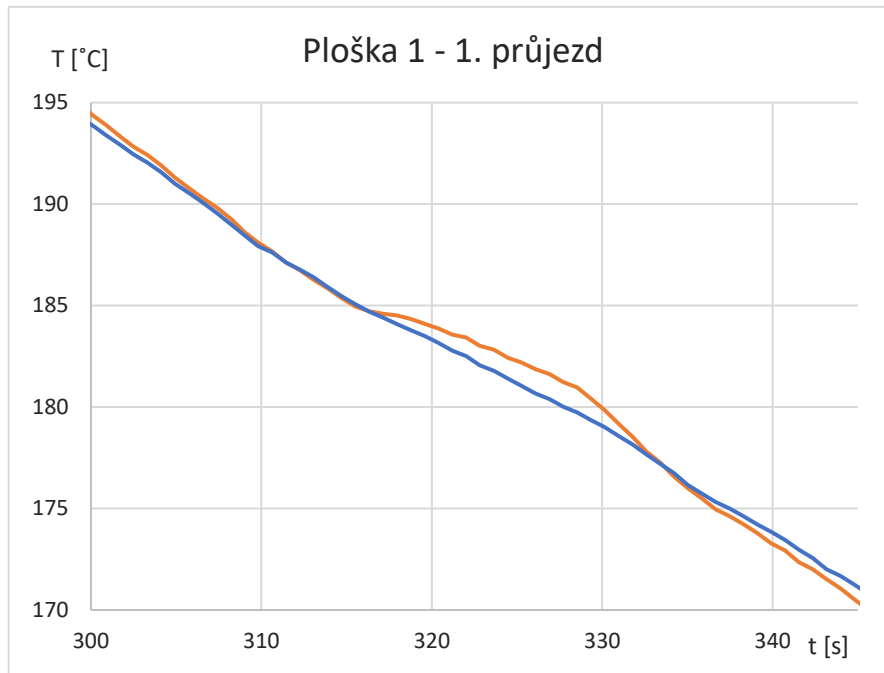
4.3 Výsledky

Grafy na obrázcích 12 - 16 ukazují výřezy z naměřených výsledků, zaměřených na chladnutí okolo bodu tuhnutí pájky. Zobrazeny jsou vždy dva průběhy – oranžový bude označován jako ploška 1 a modrý jako ploška 2. Název grafu značí, na které plošce je pájka, případně kolikátý je to průjezd s daným počtem plošek s pájkou.

Referenční průjezd (Obr. 12) zachycuje průběh teploty u vzorku bez pájky, tudíž jde jen o chladnutí měděných plošek. Na Obr. 13 už vidíme skutečně naměřené uvolnění latentního tepla během změny skupenství pájky. V tomto případě byla pájka nanášena na plošku 1. Uvolňování tepla začalo při teplotě 184 °C a probíhalo po dobu zhruba 20 vteřin až do teploty 177 °C. Je vidět, i když velmi nepatrně, že byla lehce ovlivněna i teplota plošky 2.

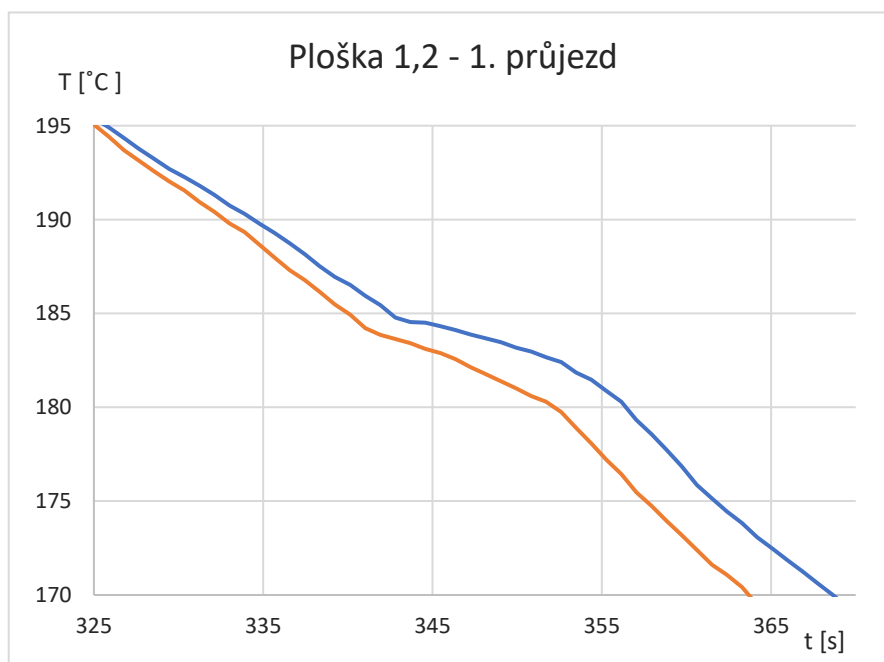


Obr. 12 – Referenční průjezd pecí



Obr. 13 Pájka na první plošce, první průjezd

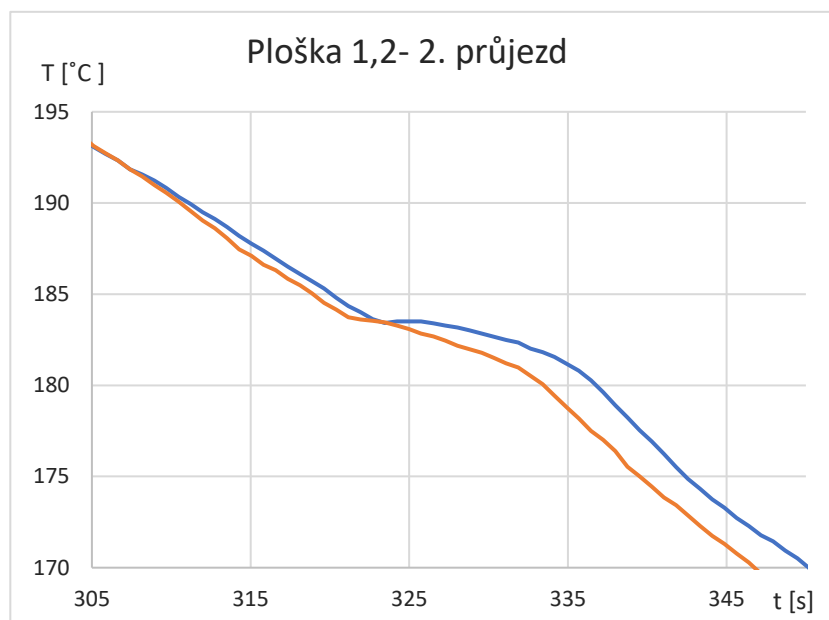
Teplotní profily pro případ, kdy byly na DPS naneseny obě dávky pájecí pasty jsou na Obr. 14-16. Při prvním průjezdu (Obr. 14) se od sebe průběhy částečně oddalují. To může být tím, že pro pájku na plošce 1 jde ve skutečnosti už o druhý průjezd, což může ovlivnit její vlastnosti. První ploška začíná měnit skupenství opět při teplotě 184 °C, druhá při 185 °C.



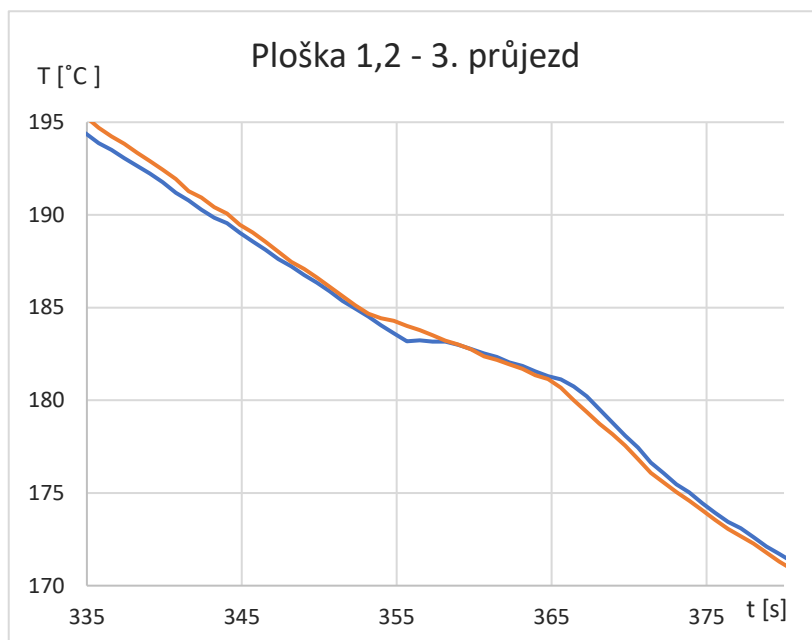
Obr. 14 – Pájka na obou ploškách, první průjezd

Obr. 15 a 16 zobrazují druhý a třetí průjezd DPS pecí po nanesení pájky na druhou plošku. Můžeme vidět, že průběhy už se neoddalují tolik jako při prvním průjezdu. Při druhém je pořád ještě zpoždění ztuhnutí tři vteřiny, přičemž třetí průjezd se liší spíše v teplotě, při které se latentní teplo začalo uvolňovat. Ploška 1 uvolňuje teplo už při 184,4 °C, zatímco ploška 2 při 183,8°C. To také může být způsobeno počtem průjezdů první plošky. S každým dalším průjezdem se vytváří větší vrstva intermetalické sloučeniny mezi pájkou a měděnou ploškou, která je tvořena difúzí cínu do plošky, čímž se postupně mění složení pájky. To by také mělo mít vliv na velikost uvolněného latentního tepla a potenciálně způsobit i nárůst v teplotě, jako je popsáno v práci *Sledování chování pájecích slitin prostřednictvím měření latentního tepla*. [19]

Srovnáme-li rychlost chladnutí během uvolňování latentního tepla, zjistíme že rychlost chladnutí plošky 1 během prvního průjezdu je 0,4 K/s, zatímco při posledním je 0,33 K/s. Pomalejší chladnutí je způsobeno právě změnou složení pájky vlivem tvorby intermetalické sloučeniny.



Obr. 15 – Pájka na obou ploškách, druhý průjezd



Obr. 16 – Pájka na obou ploškách, třetí průjezd

5. Modelování v Comsolu

COMSOL Multiphysics[®] (dále „Comsol“) je software pro modelování a simulace různých zařízení, systémů a dějů. Může být použit v mnoha odvětvích výzkumu a výroby. Díky různým rozšířením (tzv. moduly) lze numericky řešit širokou škálu parciálních diferenciálních rovnic od přenosu tepla přes elektromagnetické pole a mechaniku pevných látek až po chování tekutin a akustiku.

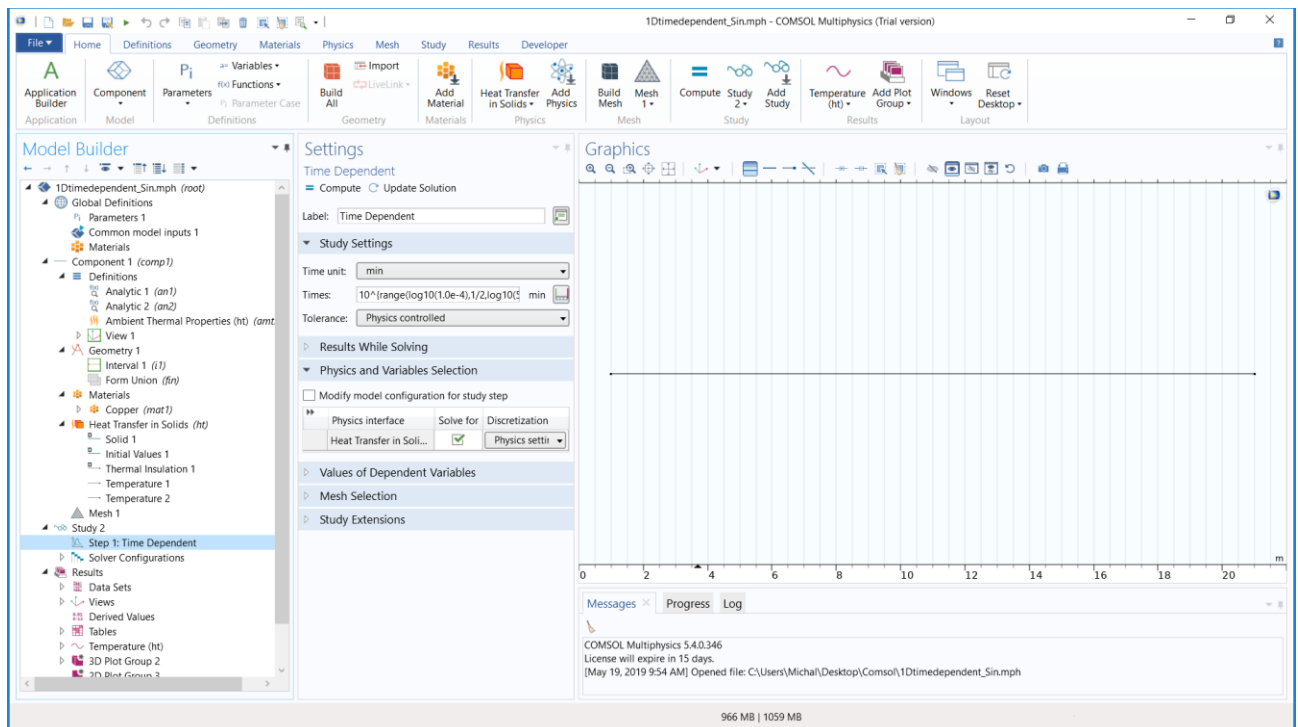
V této práci použijeme Comsol k simulování a zrekonstruování výsledků experimentů provedených v předchozích kapitolách. Na úvod bude provedena simulace vedení tepla v úsečce podle programu v Mathematice, šíření tepla v DPS podle modelu v Agrosu, a nakonec uvolnění latentního tepla v pájce při pájení přetavením podle naměřených dat.

Vytvoření modelu v Comsolu spočívá v několika krocích. Při vytvoření projektu se určí s jakým typem fyzikálních dějů se bude pracovat, a jestli nám půjde o řešení stacionární nebo časově závislé. Jako první se potom vytvoří požadovaný tvar modelu nazývaný geometrie. Části této geometrie (stěny kvádrů, hrany krychle) jsou samostatné a nazývají se domény. Každé doméně se musí přiřadit materiál, ze kterého je a podmínky na začátku simulovaného procesu, tzv. počáteční podmínky. Tou může být cokoliv, od konstantní teploty po proměnlivou hustotu

materiálu analyticky zadanou funkcí. Pokud jde o časově závislé řešení, musí se nastavit také časový rozsah výpočtu a krok s jakým chceme jednotlivá řešení počítat.

Existuje zde mnohem více různých typů nastavení, která ale nejsou pro tuto práci důležitá a proto není potřeba se o nich zmiňovat.

Ukázka pracovní prostředí Comsolu na Obr. 17.



Obr. 17 – Pracovní prostředí programu Comsol

5.1 Vedení tepla po přímce

Prvním krokem v modelování v Comsolu je ověření správnosti programu v Mathematice popsaného v kapitole 3.1. Tato kontrola by měla být jednoduchá. Geometrií je úsečka s danými okrajovými body (Obr. 18). Do těchto bodů se jako počáteční podmínka nastaví nulová teplota, aby docházelo k postupnému vychládání. Počáteční podmínka zbytku úsečky je $f(x) = 273 \cdot \sin(x)$. Materiálem úsečky byla vybrána měď.

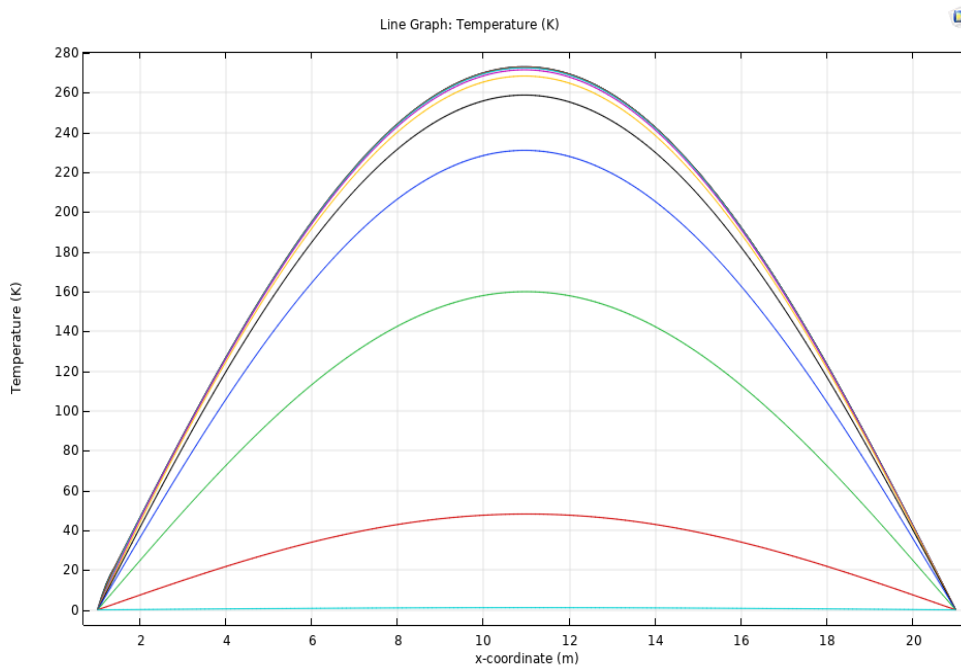


Obr. 18 – Úsečka v programu Comsol

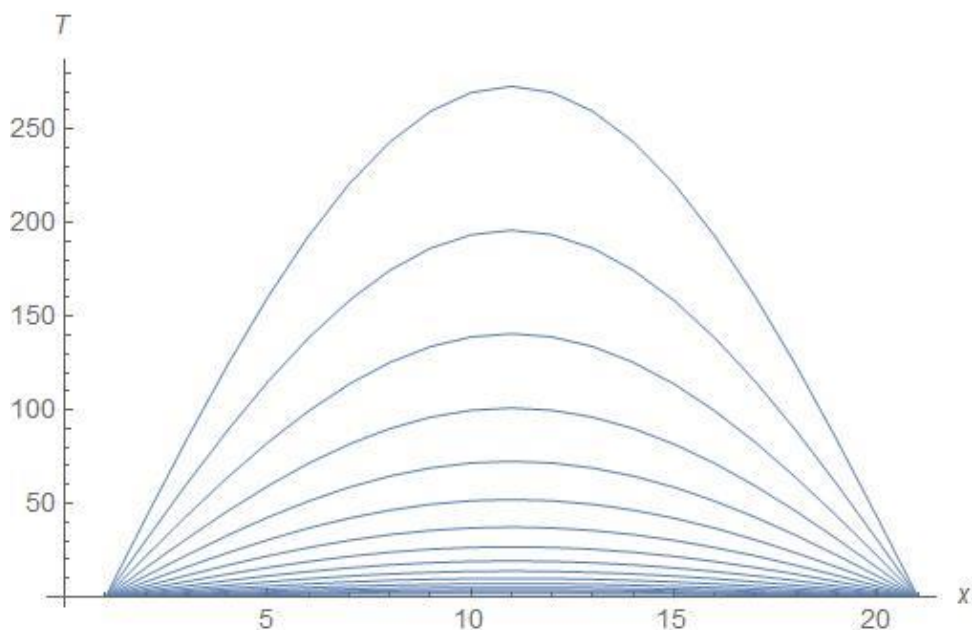
Předpokládáme, že průběh vychládání bude stejný jako v Mathematice. Jediný rozdíl je způsobený již zmíněným materiálem, který má určitou tepelnou vodivost. Ta ovlivní rychlost vychládání tělesa a na rozdíl od předešlého programu, kde jsme materiál popsali jednotkovou termální difuzivitou (vodivost/hustota/kapacita=1), bude tedy úsečka vychládát pomaleji.

5.1.1 Výsledek a porovnání s Mathematicou

Výsledkem simulace je Obr. 19. Pod ním je pro porovnání znovu uveden výstupní graf Mathematicy (Obr. 20). Vidíme, že tvar i způsob vychládání jsou navzájem stejné a odpovídají i našim teoretickým předpokladům.



Obr. 19 – Výsledek simulace z Comsolu



Obr. 20 – Výsledek simulace z Matematiky

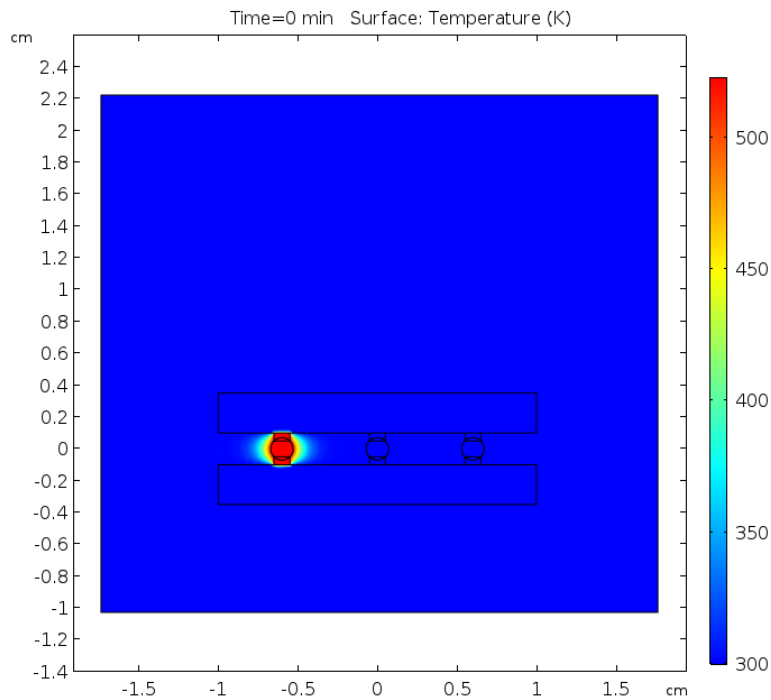
5.2 Model z Agrosu

Další částí práce je ověření simulace z programu Agros. Problém, jeho geometrie a parametry jsou již popsány v kapitole 3.2.1. Na rozdíl od předešlého případu, v Agrosu jsme již pracovali s reálným materiálem a konečný výsledek by tedy měl být naprosto shodný. Comsol navíc oproti Agrosu pracuje i s časovými závislostmi, můžeme se tedy podívat, jak se teplo postupně šíří skrz modelovaný předmět.

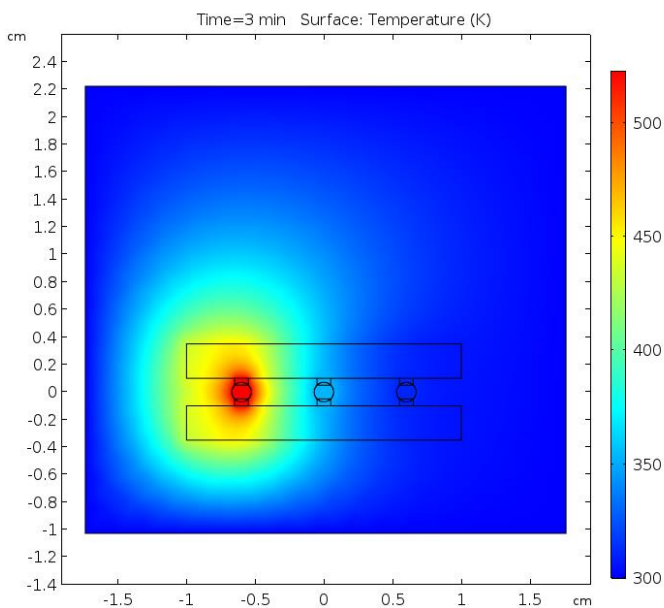
5.2.1 Výsledky a porovnání s Agrosem

Na Obr. 21 je model v čase $t = 0$ min. Kulička pájky je zahřátá na 523 K, všechno ostatní má pokojovou teplotu 300 K. S ubíhajícím časem pozorujeme šíření tepla, které ze začátku probíhá relativně rychle, viz Obr.22 (kde $t = 3$ min). Na dalším obrázku č. 23 je rozložení teploty po 10 minutách, kdy se začíná teplota postupně ustalovat. Poslední dva obrázky na další straně ukazují ustálený stav tělesa. Vlevo Obr. 24 v čase $t = 40$ min, po kterém se již teplota mění jen zanedbatelně. Vedle něj je znovu uveden stacionární model Agrosu (Obr. 25).

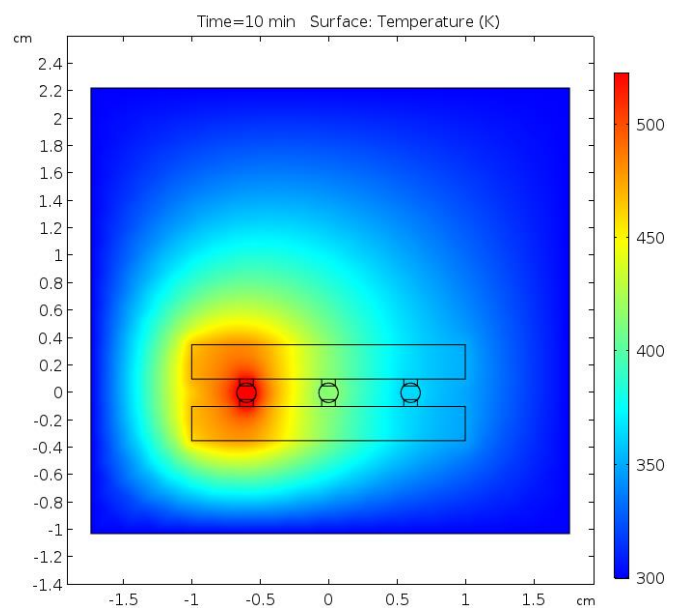
Pro porovnání výsledků byl vybrán bod uprostřed pravé krajní kuličky pájky. Teplota tohoto bodu v Agrosu je 415,8 K zatímco v Comsolu je 416,63 K. Rozdíl 0,83 K je velmi malý a vypovídá o rozdílu mezi časovou sekvencí řešení v Comsolu, která by po dostatečně dlouhém čase dokonvergovala ke stacionárnímu řešení v Agrosu.



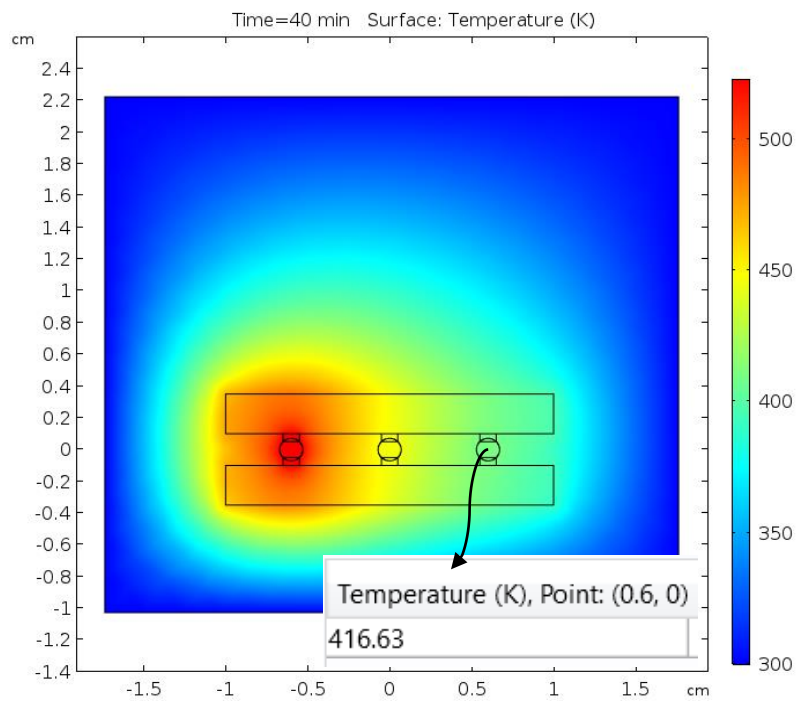
Obr. 21 – Rozložení tepla v čase $t = 0$ min



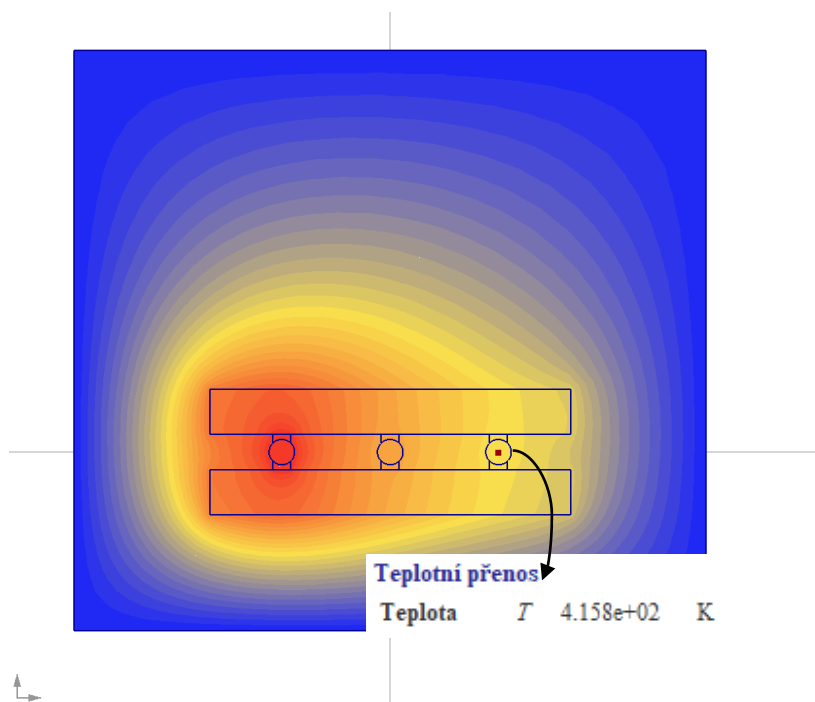
Obr. 22 - Rozložení tepla v čase $t = 3$ min



Obr. 23 - Rozložení tepla v čase $t = 10$ min



Obr. 24 - Rozložení tepla v čase $t = 40$ min



Obr. 25 – Ustálené rozložení tepla podle programu Agros

5.3 Modelování experimentu

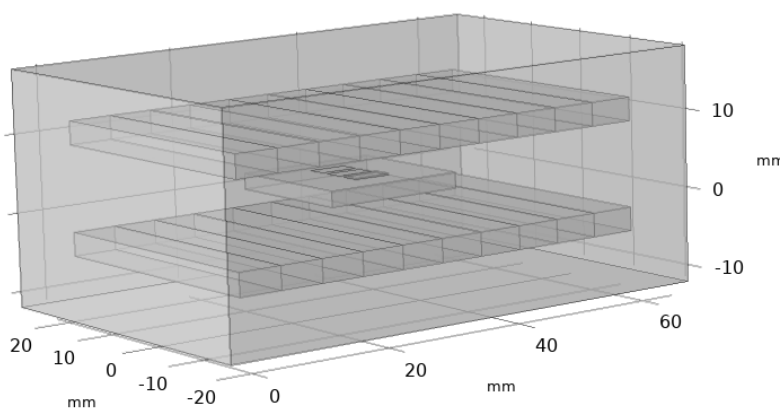
V této kapitole je popsána simulace experimentu uvedeného v kapitole 4. Budou zde otestovány dva různé způsoby modelování uvolňování latentního tepla, zjistíme který z nich více odpovídá realitě a pokusíme se dosáhnout co nejuvěrohodnějších výsledků, které se shodují s provedeným měřením. Navržená geometrie simuluje postupné vyjždění vzorku z pece a jeho následné chladnutí při pokojové teplotě. To znamená, že na začátku je pájka v tekuté formě a hlavním bodem zájmu bude její chladnutí a chování v průběhu změny skupenství.

5.3.1 Geometrie, parametry a počáteční podmínky modelu

Geometrie

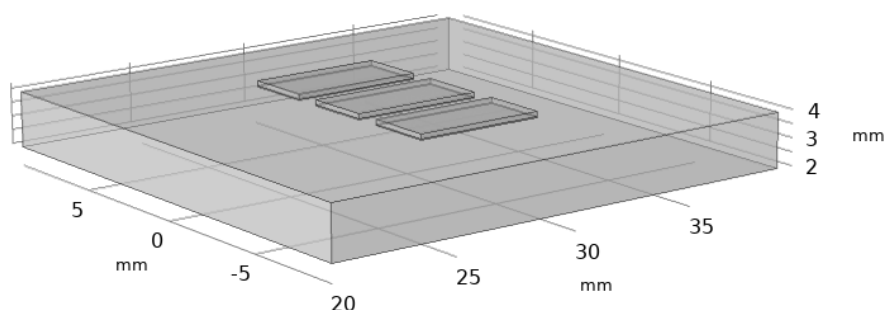
Vytvořená geometrie modelu je na Obr. 26. Vnější kvádr slouží jako okolní prostředí. Jeho rozměry 70x46x30 mm jsou vybrány tak, aby obepínal celý zbytek geometrie a zároveň nebyl zbytečně velký, což by zpomalovalo výpočty a prodlužovalo prováděné simulace. Materiálem tohoto kvádru byl zvolen vzduch.

Dvě řady menších kvádrů nad a pod vzorkem simulují prostředí průběžné pece a postupné vyjždění DPS z ní. Jejich materiálem byl opět zvolen vzduch, aby po výjezdu, který je zde simulován náhlým snížením teploty jednoho kvádru za druhým, byl vzorek skutečně obklopen vzduchem, jak tomu bylo při experimentu, a ne jiným prostředím. Z tohoto důvodu jsou také kvádry blíže k DPS, než byly okraje pece.



Obr. 26 – Celá geometrie vytvořená v programu Comsol

Model měřeného vzorku (Obr. 27) je tvořen částí desky plošného spoje, na které jsou plošky mědi a na nich bloky pájky. Tyto plošky byly vytvořeny pomocí funkce „Pole“, takže lze jednoduše měnit jejich počet změnou jednoho parametru. Na obrázcích jsou pro ukázkou plošky tři, při provedených simulacích byla však na DPS vždy jen jedna, příp. dvě. Rozměry měděné plošky jsou 3x1,8x0,035 mm. Blok pájky má stejně velkou základnu, ale její výšku bylo potřeba dopočítat, aby její objem odpovídal skutečnému množství použité pájecí pasty, tj. 20 mg (viz. kapitola 4.1.1). Výška kvádrů $c = 0,178$ mm vyšla po dosazení do rovnice $m = V \cdot \rho$, kde $\rho = 9000 \text{ kg/m}^3$ (zjištěno z materiálových vlastností pájky v Comsolu) a $V = a \cdot b \cdot c$. Použitá pájka je typu 60Sn-40Pb.



Obr. 27 – Model měřeného vzorku

Mezi parametry, které musely být nastaveny, patří kromě materiálů jednotlivých domén také jejich počáteční podmínky. Jedním z cílů práce je nastavit model tak, aby průběh chlazení pájky co nejvíce odpovídal naměřenému teplotnímu profilu při experimentu. To si vyžádalo spoustu změn, a „ladění“ parametrů pájky, jejichž přesné hodnoty nejsou známy, bylo vzhledem k době trvání simulace, jednou z časově nejnáročnějších částí práce.

Modelování latentního tepla

V této práci používáme dva způsoby modelování uvolňování latentního tepla. První vychází z návodu jak modelovat fázový přechod v Comsolu pomocí funkce entalpie závislé na teplotě (Obr. 28) [20]. V Comsolu je tato funkce popsána rovnicí (23).

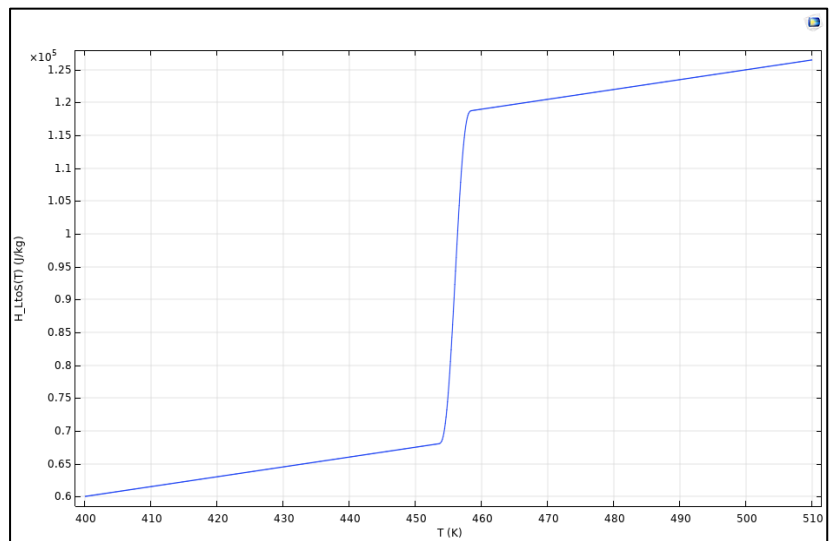
$$H(T) = C_{p0} \cdot T + LH \cdot \text{step1}(T - T_{\text{freeze}}) \quad (23)$$

$C_{p0} = 150 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$... je tepelná kapacita pájky za konstantního tlaku

LH ... latentní teplo

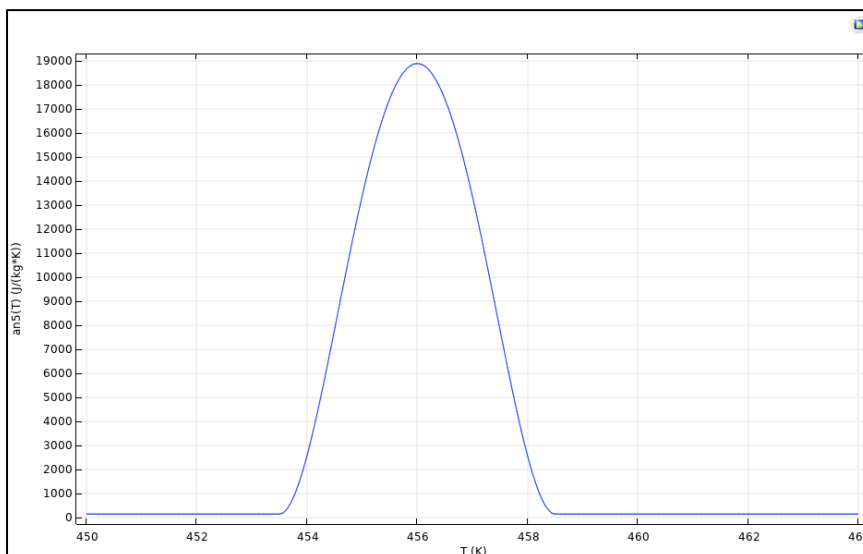
step1 ... funkce jednotkového skoku posunutá na teplotu tuhnutí T_{freeze} , v této funkci je zahrnut parametr dT , který je popsán později

Za předpokladu nestlačitelného materiálu závisí entalpie daného tělesa pouze na jeho teplotě. Při změně skupenství dojde ke skokovému zvýšení (tání) nebo snížení (tuhnutí) entalpie. Její derivací podle teploty získáme tepelnou kapacitu materiálu (Obr. 29), která je po většinu času přibližně konstantní, ale během změny skupenství se několikanásobně zvětší (resp. zmenší) a tím ovlivní rychlost této změny.



Obr. 28 – Funkce entalpie pájky v závislosti na teplotě

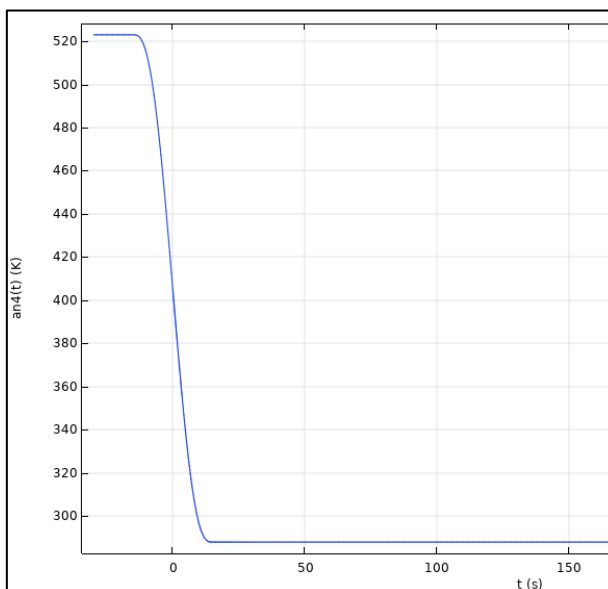
Druhým způsobem modelování fázového přechodu tuhnutí je přidáním nezávislého tepelného zdroje do bloku pájky, který po dobu změny skupenství uvolňuje latentní teplo.



Obr. 29 – Derivace entalpie pájky podle teploty

Nastavení parametrů a počátečních podmínek

Okrajovou podmínkou pro teplotu topných kvádrů kolem DPS je skoková funkce (Obr. 30), pomocí níž simulujeme vyjíždění vzorku z pece. Horní hodnotou funkce je 523 K, což je teplota nastavená ve třetí zóně pece sloužící k přetavení pájky. V čase určujícím dobu výjezdu dojde k poklesu teploty na 288 K. Každý kvádr má toto „vypnutí vyhřívání“ nastavený na jiný čas tak, aby se vypínaly postupně za sebou stejnou rychlostí, jako je rychlost průjezdu vzorku pecí.



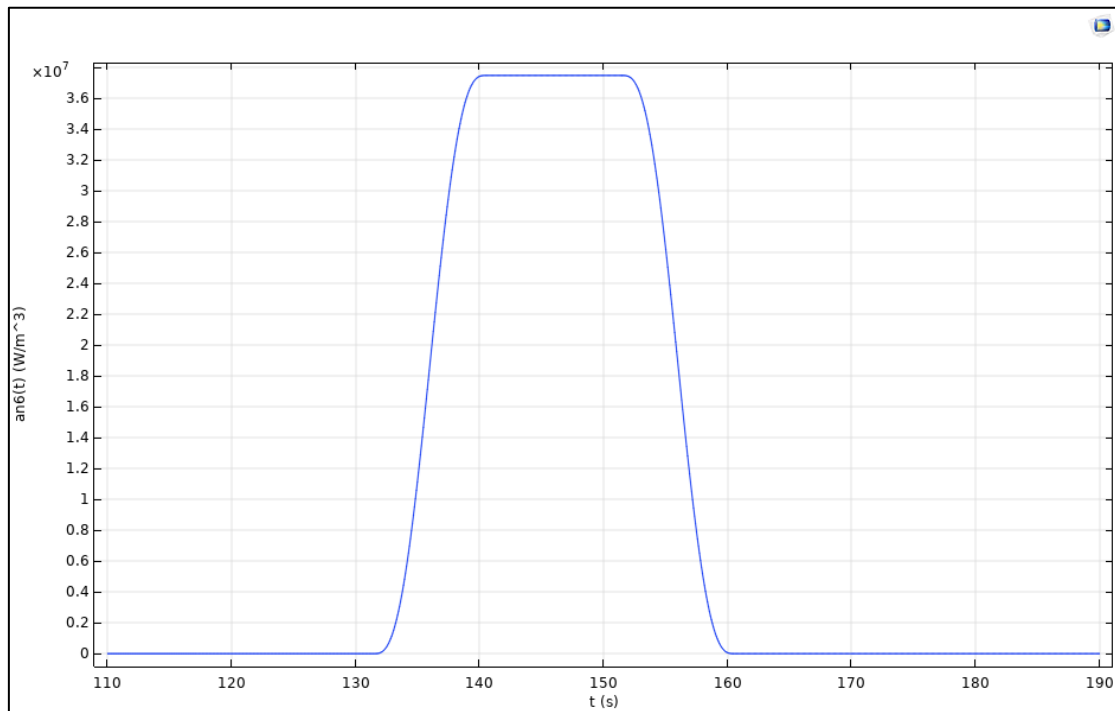
Obr. 30 – Funkce teploty závislá na čase

Počáteční teplota bloků plošného spoje, mědi a pájky byla pokusy určena na 472 K. V modelu není celá délka pece, jen její výjezd, a z této hodnoty se vzorek před vypnutím topných kvádrů zahřál přesně na stejnou teplotu (484 K) jako při měření. Parametry popsané v těchto dvou odstavcích jsou stejné pro oba zmíněné způsoby modelování latentního tepla.

Pro model pracující s derivací entalpie změním tepelnou kapacitu bloku pájky z možnosti *From material* (která brala tepelnou kapacitu přímo z vlastností materiálu přiřazenému tomuto bloku) na *User defined*, kam vyplníme $d(H(T),T)$ – tj. derivaci funkce (23) podle teploty (Obr. 29). Tvar této funkce ovlivňují dva parametry pojmenované LH a dT. LH (zkratka od *latent heat* neboli *skupenské teplo*) ovlivňuje velikost skoku. Čím větší LH, o to víc se entalpie při změně skupenství zvýší a naopak. dT má vliv na „dobu trvání“ této změny. Ve skutečnosti nejde o čas, ale o teplotu, o kolik stupňů se musí látka ochladit aby dosáhla pevného skupenství.

Pro typ pracující s nezávislým zdrojem tepla necháme tepelnou kapacitu jako *From Material*, čímž zanedbáme rozdíl mezi tepelnou kapacitou pevné a roztavené pájky, a přidáme k modelu tzv. *Heat source*. Zdrojem určíme blok pájky, a do jeho popisu zadáme obdélníkovou funkci (24)(Obr. 31), která zajistí uvolňování určitého množství tepla za daný čas. Tuto funkci

také ovlivňují dva parametry. Jedním z nich je opět LH, který zde logicky reprezentuje velikost uvolněného latentního tepla. Druhým je převodní konstanta k . LH se udává v J/kg, přičemž



Obr. 31 – Funkce popisující zdroj tepla

funkce zadávaná do Heat source musí být ve W/m^3 . K převodu mezi těmito jednotkami potřebujeme LH vynásobit hustotou ρ ($J/kg \rightarrow J/m^3$) a podělit časem t_{sol} ($J/m^3 \rightarrow W/m^3$), během kterého k uvolňování tepla dochází. Tudiž musí platit $k = \rho/t_{sol}$.

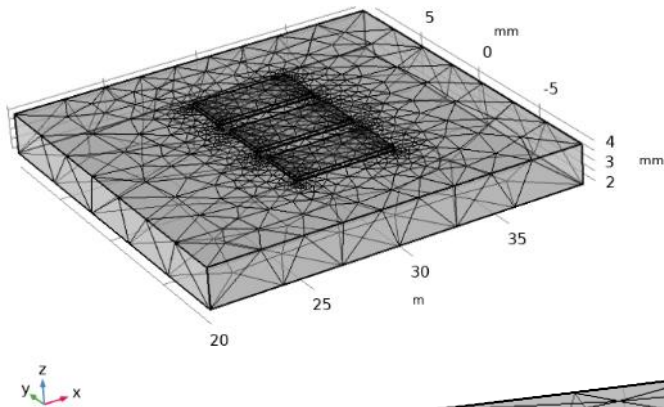
$$\text{Heat_Source}(t) = LH \cdot \text{rect1}(t) \cdot k \quad (24)$$

rect1 ... jednotková obdélníková funkce o šířce t_{sol} s nastaveným časovým posunem

Mesh

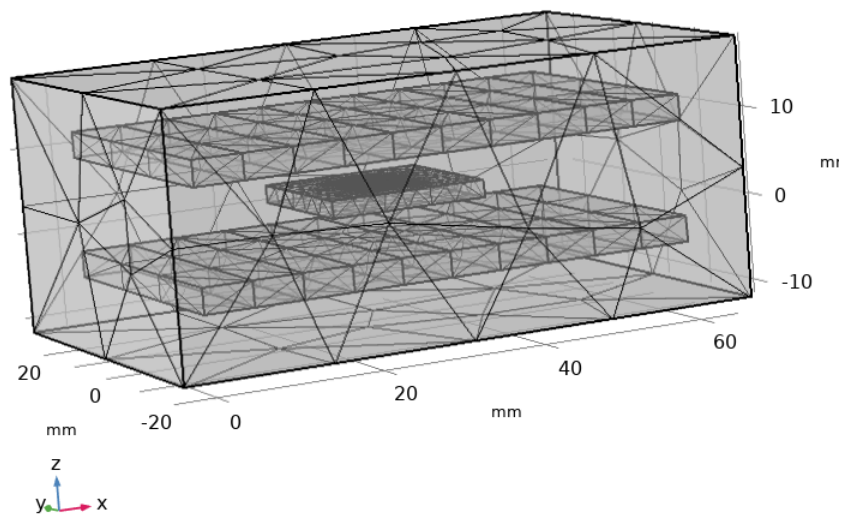
Po zadání celé geometrie, parametrů a počátečních podmínek je potřeba vytvořit tzv. *mesh*. Jde o rozdělení všech domén v modelu na jednotlivé dostatečně malinké oblasti. Program pak řeší rovnici vedení tepla na dané síti bodů postupně pro každý časový krok. V případě jednodušší geometrie, jako je ta naše, si program tvoří tetraedrický mesh automaticky sám, my pouze zadáme jeho požadovanou hustotu. Čím hustší síť, tím podrobnější a přesnější model bude, avšak za cenu časové náročnosti simulace. V našem

modelu byla zvolena hustota *Fine* pro vzorek DPS s pájkou (Obr. 32) a *Extra Coarse* pro zbytek geometrie (Obr. 33).



Obr. 32 – Mesh DPS s pájkou

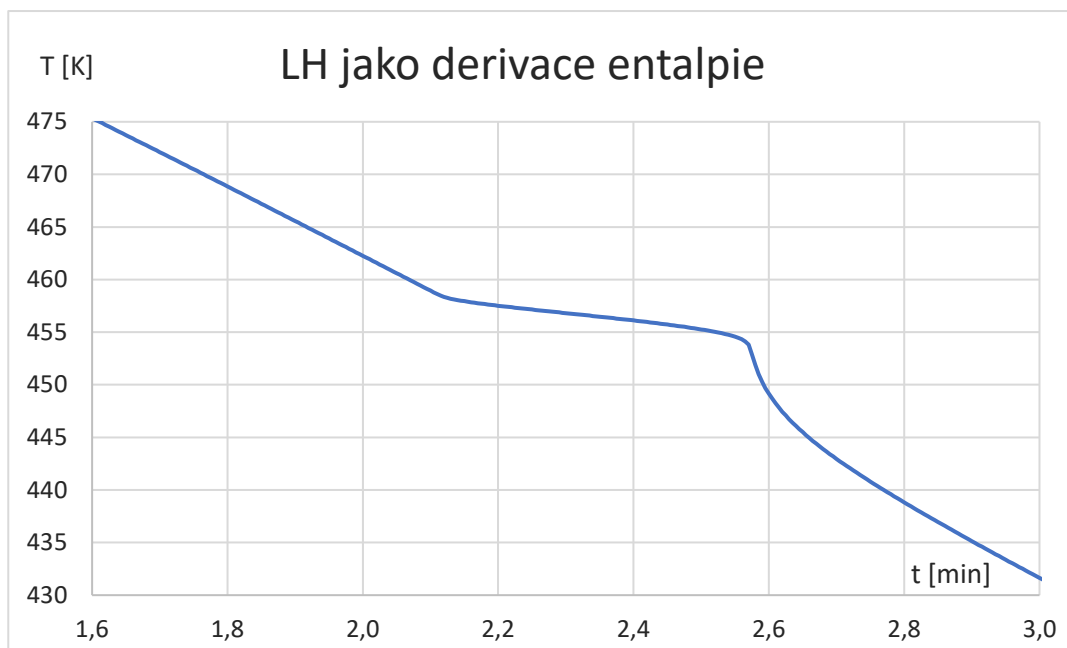
Obr. 33 – Mesh celé geometrie



5.3.2 Výsledky a porovnání s experimentem

Uvolnění latentního tepla pomocí derivace entalpie

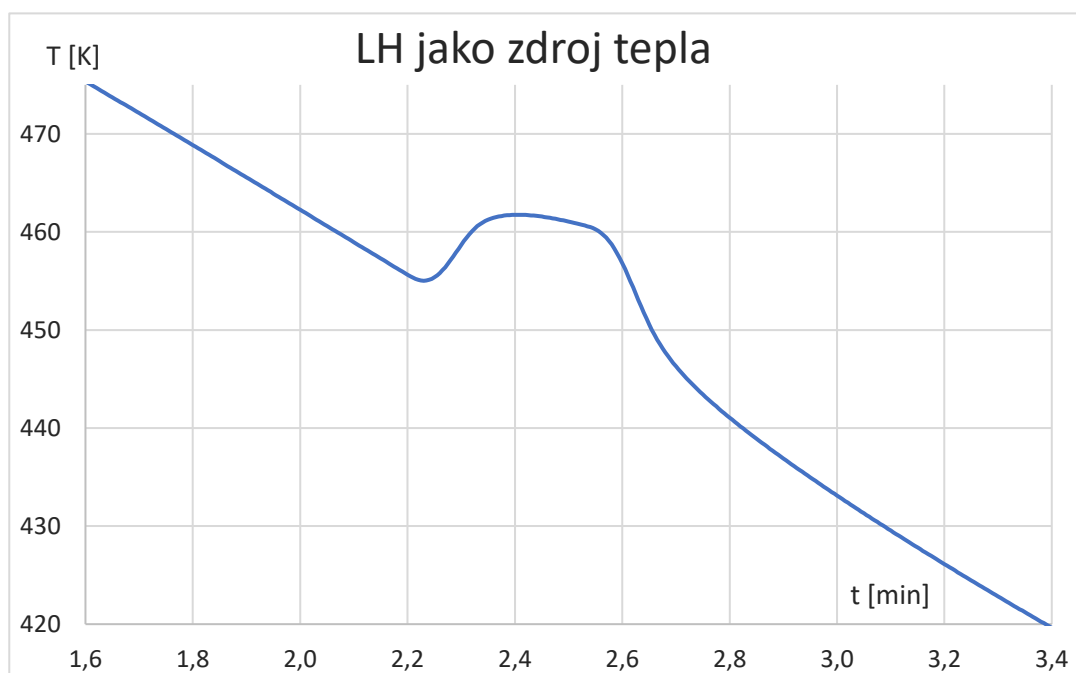
Tepelný průběh vychládání pájky po výjezdu z pece, konkrétně detail na změnu skupenství popsanou derivací entalpie je na Obr. 34. Model obsahuje jednu plochu s pájkou. Parametry byly nastaveny následovně: $LH = 50000 \text{ J/kg}$, $dT = 5$. Hodnoty jsou převzaty z práce *Thermal properties of Sn-based solder alloys*. [21] Okolo 2,1 minuty začíná docházet k uvolňování latentního tepla. To má na svědomí zpomalení vychládání pájky, ale nedochází k žádnému okamžitému nárůstu teploty. Při dalších pokusech bylo zjištěno, že zvýšení teploty nelze pomocí této metody dosáhnout, a to při žádných hodnotách parametru LH (a z definice ani dT). Při zvyšování LH dochází pouze k prodloužení části křivky s nižším sklonem, tzn. trvá déle než dojde k úplnému ztuhnutí materiálu.



Obr. 34 – Uvolnění latentního tepla při změně skupenství pájky simulované derivací entalpie

Latentní teplo jako přidaný zdroj

Na obr. 35 vidíme průběh uvolnění latentního tepla simulovaný pomocí přidaného tepelného zdroje. LH je opět rovno 50000 J/kg, převodní konstanta $k = \rho / t_{sol} = 9000/20 = 450$. Hustota ρ je převzatá z vlastností materiálu uvedených v Comsolu, zatímco doba $t_{sol} = 20s$, po kterou se uvolňuje dané teplo, je odečtená z výsledků měření.

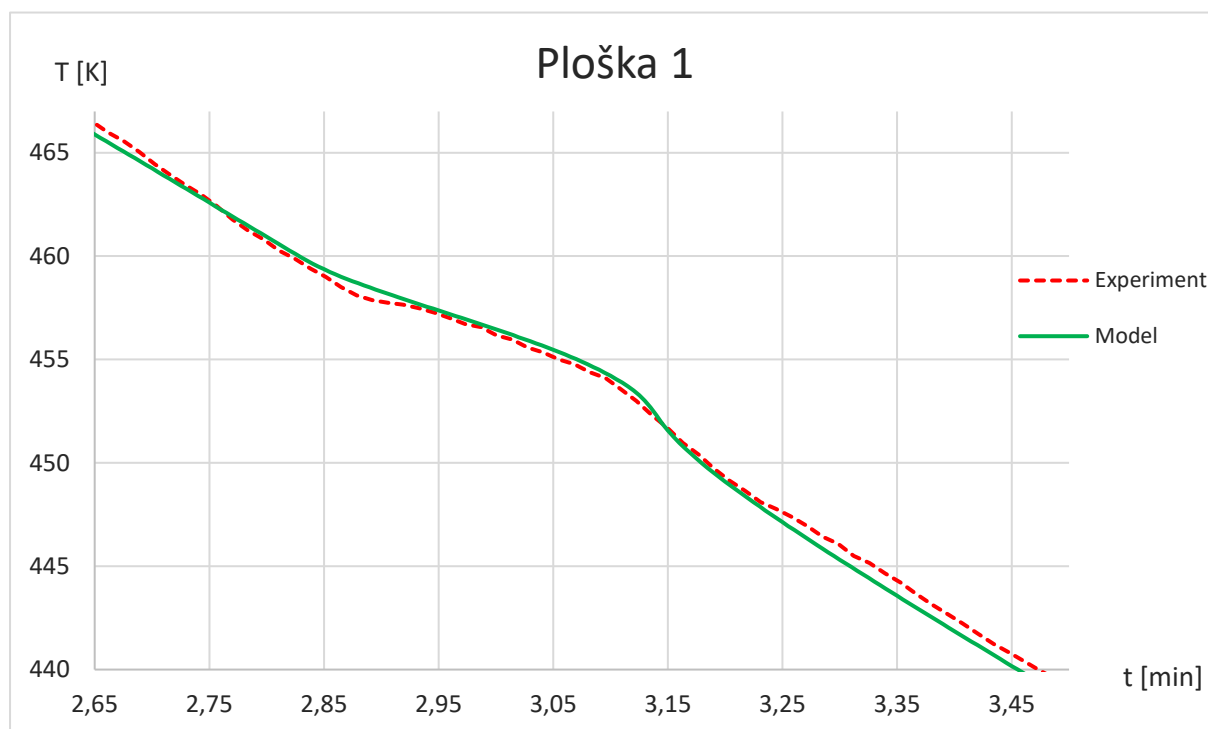


Obr. 35 – Uvolnění latentního tepla při změně skupenství pájky simulované zdroje tepla

Čas, ve kterém dojde k uvolnění tepla, zde zatím není důležitý, nicméně bude potřeba ho znát k následujícím modelům. Byl určen podle průběhu simulace v závislosti na teplotě tak, aby došlo k uvolnění ve chvíli, kdy pájka dosáhne teploty tuhnutí. Z průběhů měření v kapitole 4.3 vyčteme teplotu tuhnutí $T = 457 \text{ K}$. Nárůst teploty při změně skupenství je zde zřejmý a očekávaný a dosahuje hodnoty 6 K .

Simulace experimentu – LH jako derivace entalpie

Při pokusech co nejpřesněji zreprodukovat výsledky měření bylo zjištěno, že hodnota latentního tepla převzatá z výše zmíněné práce je příliš velká. Po úpravě má parametr hodnotu $LH = 12000 \text{ J/kg}$. Průběhy pro nové hodnoty parametrů a jeho srovnání s měřením jsou na následujících obrázcích.

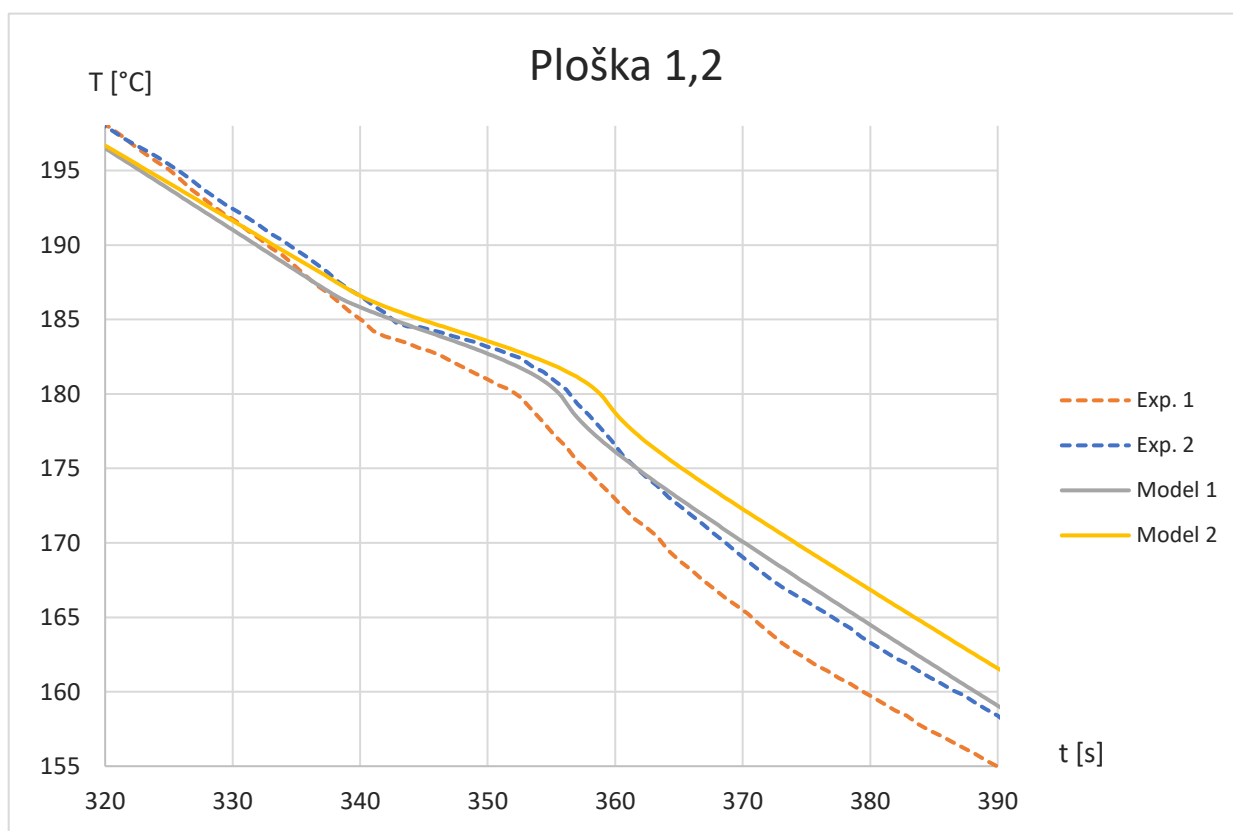


Obr. 36 – Porovnání simulace s měřením, pájka na Plošce 1

Srovnání výsledků měření a simulace pro případ s jednou ploškou pájky (Obr. 36) ukazuje velmi dobrou shodu v oblasti procesu tuhnutí, při uvolnění latentního tepla. Průběhy se lehce liší před a po tomto ději. Strmější sklon přímky experimentálního měření před

začátkem tuhnutí naznačuje rychlejší vychládání vzorku. To je pravděpodobně způsobené nedokonalostí modelu, neboť při měření byla DPS v peci v kontaktu s podkladem. Tepelná vodivost podkladu způsobuje rychlejší odvod tepla ze vzorku. Byla provedena kompenzace pomalejšího chladnutí modelu snížením teploty okolního vzduchu po výjezdu (na zmíněných 288 K), nicméně změna je nepatrná. Tento jev se bude vyskytovat i při dalších srovnáních.

Obr. 37 srovnává model a experiment v případě, že je pájka na obou ploškách. Výsledky simulace potvrzují změřený vzájemný zpoždění chladnutí plošek, kdy jedna pájka začne uvolňovat latentní teplo dříve. Během tohoto procesu se od sebe průběhy oddálí a vznikne větší zpoždění, nicméně rychlost chladnutí obou plošek po ztuhnutí je stejná. Opět se zde ukazuje, že v simulaci vzorek vychládá rychleji.

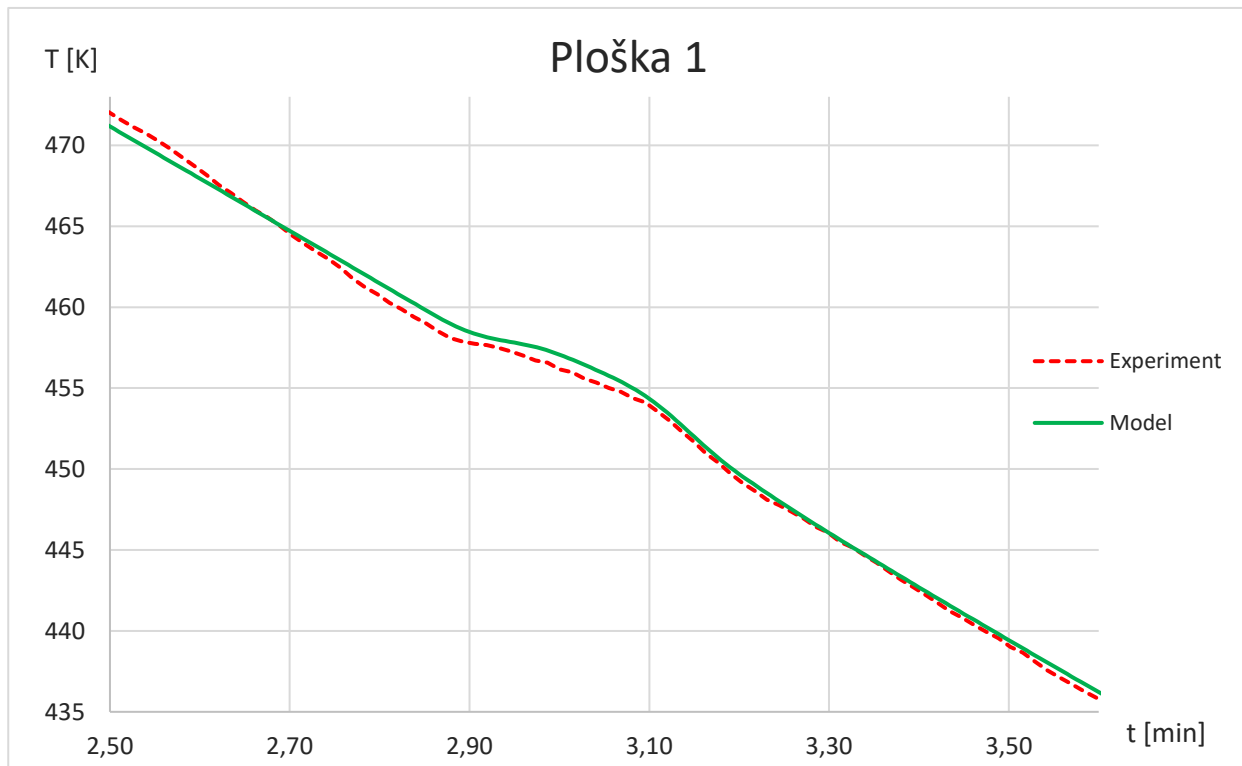


Obr. 37 - Porovnání simulace s měřením, pájka na obou ploškách

Simulace experimentu – LH jako zdroj tepla

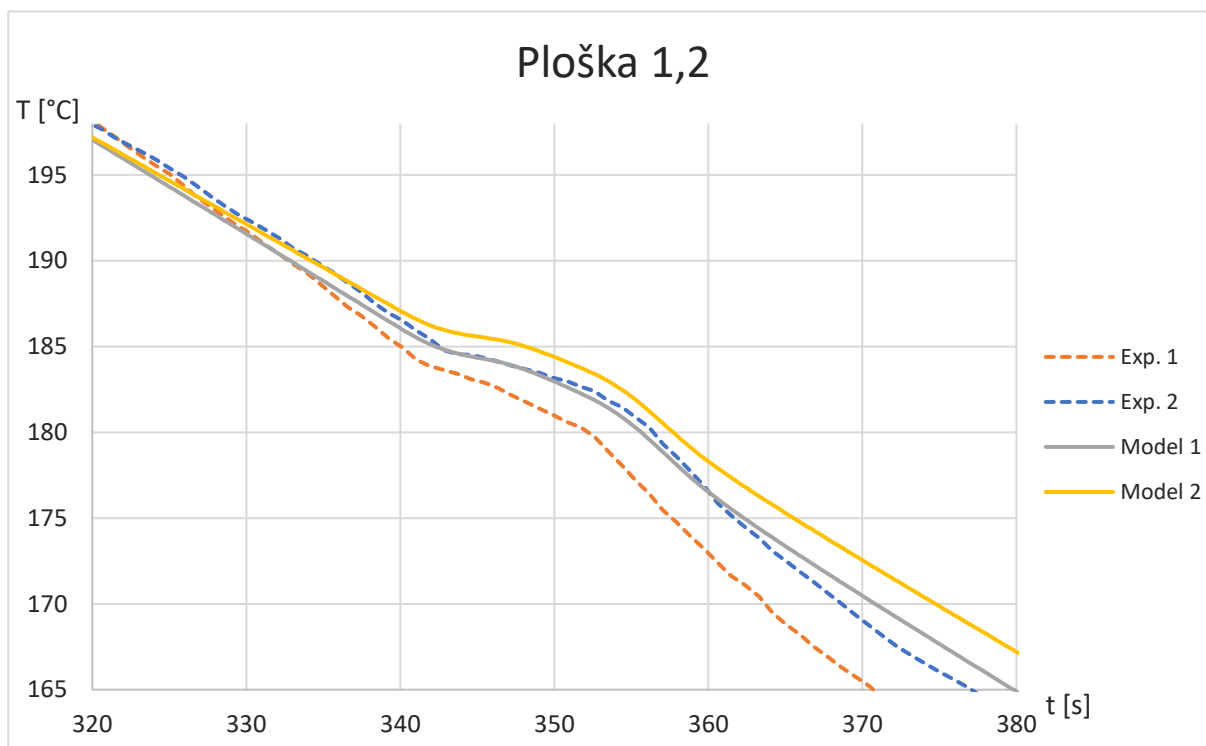
Pro zrekonstruování výsledků měření pomocí přidaného zdroje tepla musel být parametr LH snížen ještě více, konkrétně na 7000 J/kg. Převodní konstanta k se nemění, protože jde jen o převod jednotek. Srovnání pro jednu plošku s pájkou (Obr. 38) opět ukazuje

dobrou shodu ve velikosti a době trvání uvolňování latentního tepla a stejný problém s rychlejším chladnutím před tímto dějem. Příklady se liší v části po ztuhnutí, kdy na rozdíl od minulého příkladu nedojde k okamžitému navrácení na původní rychlost chladnutí a průběh více kopíruje naměřená data. To je způsobeno navíc uvolněným teplem, které se ze vzorku musí také postupně odvést.



Obr. 38 - Porovnání simulace s měřením, pájka na Plošce 1 se zdrojem tepla

Porovnání dvou plošek s pájkou na Obr. 39 je velmi podobné tomu z Obr. 37. Opět se zde více projevuje rychlejší chladnutí modelu. Zpočátku jsou průběhy obou plošek velmi podobné, ale cca 20 vteřin předtím než dojde k uvolnění tepla se začnou oddalovat, což se poté ještě zvýrazní.



Obr. 39 - Porovnání simulace s měřením, pájka obou ploškách se zdrojem tepla

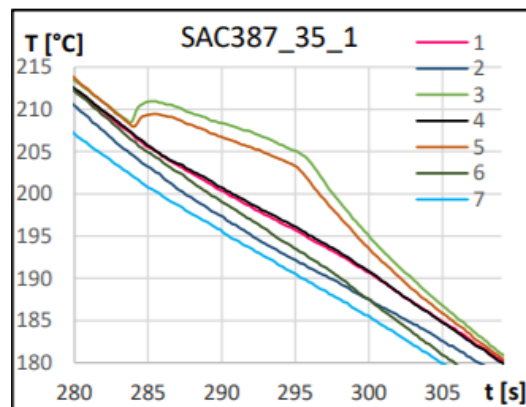
6. Závěr

V této práci jsme se seznámili se třemi typy šíření tepla a jejich matematickým popisem. Popsán byl i jev uvolňování latentního tepla. Několik stránek bylo věnováno osazování a pájení v elektrotechnice a také tématu modelování a simulace. Modelování uvolnění latentního tepla při pájení přetavením je středobodem této práce. Obecně se dá říct, že simulace fyzikálních dějů se stává čím dál tím důležitější částí vědeckého výzkumu, i technické výroby. Proto se snad dá říci, že jedním z přínosů této práce je seznámení se se základy modelování a průběhu vytváření realistických modelů a simulací.

Dále je stručně popsáno řešení Fourierova zákona v 1D prostoru a řešení parciálních diferenciálních rovnic pomocí numerické metody konečných prvků FEM, která je jednou z nejvíce používaných metod pro řešení PDR různými programy pro modelování (včetně Comsolu).

Ve třetí kapitole jsou uvedeny dva různé problémy šíření tepla a jejich způsoby řešení. Základní matematické postupy vysvětlené ve druhé kapitole jsou zde aplikovány na vyřešení jednoduchého 1D problému pomocí programu v Mathematice. To přispívá k lepší představě o tom, jak řešení těchto problémů funguje.

Z měření popsaného ve čtvrté kapitole jsme získali teplotní profily pájky Sn37Pb při pájení přetavením. Při změně skupenství této pájky je pozorováno uvolňování latentního tepla, které způsobuje zpomalení rychlosti vychládání, nedochází při něm však ke krátkodobému zvýšení teploty. Toto pozorování se shoduje s výsledky práce *Sledování chování pájecích slitin prostřednictvím měření latentního tepla* [19]. Tam k nárůstu teploty po uvolnění latentního tepla docházelo pouze u jiných typů pájek (Obr. 40). U typu Sn37Pb se tento jev objevil až po vícero průjezdech pecí, když začala vznikat tzv. intermetalická sloučenina.



Obr. 40 – Nárůst teploty při tuhnutí pájky způsobené uvolněním latentního tepla

Pomocí modelování v programu Comsol byly nejdříve potvrzeny výsledky simulací z programu v Mathematice a Agrosu. Poté byly ukázány dva způsoby modelování uvolnění latentního tepla. Zjistili jsme, že pomocí obou jdou poměrně dobře zrekonstruovat výsledky experimentálního měření. Ale to bylo pravděpodobně možné jen díky použitému typu pájky. Metoda využívající derivaci entalpie podle teploty totiž nedokáže popsat nárůst teploty. Pokud bychom tedy chtěli použít jiný typ pájky, například SAC387 z Obr. 40, museli bychom použít druhou metodu s přidáním zdrojem tepla.

Na chování pájky při tuhnutí má také vliv míra „adiabatičnosti“ procesu. Při adiabatickém ději nedochází k výměně tepla mezi látkou a jeho okolím. Pokud by uvolnění

latentního tepla bylo dostatečně rychlé, aby k této výměně nedošlo, musela by teplota pájky vzrůst. [22]

Pozorovaný vzájemný vliv dvou plošek s pájkami je při takto navržené geometrii nepatrný.

Pokud by se v práci pokračovalo dále, určitě by stálo za to prozkoumat možnost modelování uvolnění latentního tepla kombinací obou zmíněných metod. Metoda s přidaným zdrojem tepla se zdá být lepší, ale také nepopisuje přesný průběh děje, jelikož pracuje s konstantní tepelnou kapacitou. Když pájka změní skupenství, změní se i její tepelná kapacita, která má vliv na přenos tepla a tudíž na rychlost vychládání. Vytvoření komplexnější a podrobnější geometrie by naopak pomohlo při sledování toho, jak se jednotlivé části DPS ovlivňují navzájem.

„All models are wrong, but some are useful.“ George Box [23]

Zdroje

- [1] Šavel, Josef: „Pájení vlnou“. ElektriKa.cz [online]. [cit. 25. 1. 2019]. Dostupné z: <https://elektriKa.cz/terminolog/eterminolog2definition.2006-04-22.1202871364>
- [2] Reflow soldering [online]. [cit. 26. 1. 2019]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Reflow_soldering
- [3] Augustyn, Adam: „Latent Heat“. Encyclopaedia Britannica [online]. [cit. 26. 1. 2019]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/latent-heat>
- [4] Zhan, J.-C.: Methods for Phase Diagram Determination, Elsevier Ltd. 2007, eBook ISBN 9780080549965
- [5] Schwarzmeier, Jakub: „How to start with galaxy dynamics computer simulations“. Západočeská univerzita v Plzni [online]. [cit. 10. 5. 2019]. Dostupné z: https://kof.zcu.cz/st/dis/schwarzmeier/models_simulations.html
- [6] von Neumann, J: „Method in the Physical Sciences“ v The Unity of Knowledge, ed. L. Leary (1955), Online ISBN 978-1-4020-4040-5
- [7] Vedení tepla [online]. [cit. 27.4. 2019]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Veden%C3%AD_tepla
- [8] Rovnice kontinuity [online]. [cit. 12. 5. 2019]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Rovnice_kontinuity
- [9] Tepelný odpor R [online]. TZB-info.cz [cit. 12. 5. 2019]. Dostupné z: <https://stavba.tzb-info.cz/prostup-tepla-stavebni-konstrukci/312-tepelny-odpor-r>
- [10] Volf Ivo, Jarešová Miroslava, Ouhřabka Miroslav: „Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku“. Fyzikální olympiáda [online]. [cit. 12. 5. 2019]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/texttz.pdf>
- [11] Pecharsky, Vitalij K., Karl A. Gschneidner Jr.: "Magnetocaloric effect and magnetic refrigeration." Journal of Magnetism and Magnetic Materials 200.1-3 (1999): 44-56.
- [12] Králová, Magda: „Tepelné záření – Sálání“. Eduportál [online]. [cit. 27. 4. 2019]. Dostupné z: <https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/struktura-latek/vnitri-energie/tepelne-zareni-salani>

- [13] Langtangen, Hans Peter: „The 1D diffusion equation“ v Finite difference methods for diffusion processes. [online]. [cit. 28. 1. 2019]. Dostupné z: <http://hplgit.github.io/num-methods-for-PDEs/doc/pub/diffu/sphinx/index.html>
- [14] „The Finite Element Method (FEM)“. comsol.com [online]. COMSOL Multiphysics. [cit. 19. 5. 2019]. Dostupné z: <https://www.comsol.com/multiphysics/finite-element-method>
- [15] Wiens Jeffrey: „Finite Difference Heat Equation using NumPy“. jkwiens.com [online]. [cit. 15. 5. 2019]. Dostupné z: <http://jkwiens.com/2010/01/02/finite-difference-heat-equation-using-numpy/>
- [16] Průběžná pec Mistral 260. Katedry Elektrotechnologie ČVUT [online]. [cit. 10. 5. 2019]. Dostupné z: <https://technology.fel.cvut.cz/laboratore/prototypove-pracoviste/>
- [17] KIC Explorer 7. amtest-smt.com [online]. Amtest. [cit. 10. 5. 2019]. Dostupné z: <http://www.amtest-smt.com/files/File/protected/KIC%20Products%202012.pdf>
- [18] Drápala Jaromír, Urbaníková Žaneta, Zlatohlávek Petr, Vřešťál Jan: Materiály pro bezolovnaté pájky [online] Metal. Technická Univerzita Ostrava, FMMI, katedra neželezných kovů, rafinace a recyklace, 2005. [cit. 17. 5. 2019]. Dostupné z: http://metal2012.tanger.cz/files/proceedings/metal_05/papers/164.pdf
- [19] Zahradník, Vít: Sledování chování pájecích slitin prostřednictvím měření latentního tepla, Praha, 2017. Diplomová práce. ČVUT v Praze.
- [20] Frei, Walter: „Thermal Modeling of Phase-Change Materials with Hysteresis“. comsol.com [online]. COMSOL Multiphysics, 2016. [cit. 27. 4. 2019]. Dostupné z: <https://www.comsol.com/blogs/thermal-modeling-of-phase-change-materials-with-hysteresis/>
- [21] Morando Carina, Fornano Osvaldo, Garbellini Olga, Palacio Hugo: Thermal properties of Sn-based solder alloys [online]. Springer Science+Business Media, New York, 2014. [cit. 19. 5. 2019]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/262829031_Thermal_Properties_of_Sn-based_Solder_Alloys
- [22] Lee Tae-kyu, Bieler Thomas R., Kim Choong-Un, Ma Hongtao: Fundamentals of Lead-Free Solder Interconnect Technology. Springer, 2015. ISBN-13: 978-1461492658.
- [23] Box, George Edward Pelham: „Robustness in the strategy of scientific model building“, Robustness in Statistics, strany 201-236, Academic Press, 1979. ISBN 978-0-12-438150-6

Přílohy

V přiloženém CD jsou následující dokumenty:

- Program napsaný autorem této práce v Mathematice
- Soubor Agros
- Soubory Comsol
- Tabulka Excel s naměřenými a nasimulovanými daty