

# ABSTRAKT

Předkládaná disertační práce se zabývá numerickou analýzou lanoplachtových konstrukcí. Předmětem zájmu je zejména proces form-finding a řešení statické odezvy na působící zatížení. V práci jsou popsány způsoby numerického řešení lanoplachtových konstrukcí, včetně popisu použitých metod a prvků. Větší rozsah je věnován popisu principu metody dynamické relaxace. Celkem jednadvacet různých postupů této metody je následně otestováno na osmi vybraných numerických úlohách a je zkoumán vliv útlumu a dalších fiktivních parametrů na rychlost a konvergenci metody. Předmětem testování je i vlastní autorský postup založený na principu kritického tlumení využívající k odhadu první vlastní frekvence průběh kinetické energie. K testování je použit autorský prototyp řešiče. Relevantnost výpočtů je ověřena na základě porovnání s referenčními výsledky, výsledky z komerčního programu a výsledky z měření na skutečné konstrukci.

**Klíčová slova:** lanoplachtové konstrukce, dynamická relaxace, nelineární analýza

# ABSTRACT

This dissertation focuses on numerical analysis of cable-membrane structures. Especially the form-finding processes and the solution of the static response to the applied load are of the interest. Methods of numerical solution of cable-membrane structures, including description of the used methods and elements, are described in this paper. A larger portion of this study is devoted to the description of the principle of dynamic relaxation method. Subsequently, twenty-one different schemes of this method in total are tested on eight selected numerical cases. Further, the effect of damping and other fictitious parameters on speed and convergence of the method is investigated. An author's own procedure that is based on the critical damping principle and uses the history of kinetic energy to estimate the first fundamental frequency is also subject to the testing. For the testing, an authorial prototype of the cable-membrane design solution is used. The relevance of the calculations is verified by comparison with the reference results, the results from a commercial program and the results from the measurements performed on a real structure.

**Keywords:** cable-membrane structures, dynamic relaxation, non-linear analysis

# PODĚKOVÁNÍ

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu mé disertační práce, Doc. Ing. Petru Fajmanovi, CSc., za odborné konzultace, rady, podněty, připomínky a pomoci při numerickém modelování ve výpočetních programech.

Dále děkuji Prof. Ing. Jiřímu Máčovi, CSc., za poskytnutí odborných konzultací, klíčové literatury a důležitých podkladů.

Hlavně bych však chtěl poděkovat mým rodičům, sestře Terezce, rodině, Františkovi a nejbližším přátelům, kteří mě po celou dobu podporovali. Zvláště bych chtěl poděkovat mé partnerce Silvii, která mi byla oporou v závěru mého doktorského studia, a bez jejíhož zájmu by tato práce nikdy nebyla dotažena do konce.

# OBSAH

1	ÚVOD DO PROBLEMATIKY .....	1
1.1	Úvod.....	1
1.2	Současný stav problematiky.....	3
1.2.1	Form-finding.....	3
1.2.2	Řešení statické odezvy .....	4
1.3	Autorský výzkum .....	5
2	CÍLE A ČLENĚNÍ PRÁCE .....	7
2.1	Cíle práce.....	7
2.2	Členění práce.....	8
3	HISTORIE A SOUČASNÁ PRAXE LANOPLACHTOVÝCH KONSTRUKCÍ .....	10
3.1	Historie.....	13
3.2	Současnost .....	14
3.3	Lana.....	19
3.3.1	Materiál lan .....	19
3.3.2	Měření sil v lanech .....	20
3.4	Membrány .....	21
3.4.1	Materiál membrán .....	21
3.4.2	Měření napětí v textilní membráně .....	23
3.4.3	Testování svařovaných spojů textilních membrán .....	23
3.5	Zatížení konstrukcí .....	25
4	NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ .....	26
4.1	Procesy.....	26
4.1.1	Form-finding.....	26
4.1.2	Statická odezva konstrukce na zatížení.....	35
4.1.3	Stříhové plány .....	36
4.2	Diskretizace konstrukce.....	36
4.2.1	Způsob modelování.....	36
4.2.2	Vytváření sítě prvků.....	36
4.3	Výpočetní prvky.....	37
4.3.1	Prutový prvek pro statickou odezvu .....	37
4.3.2	Prutový prvek pro form-finding .....	39
4.3.3	Lanový prvek pro statickou odezvu .....	39
4.3.4	Trojúhelníkový prvek pro statickou odezvu .....	46
4.3.5	Trojúhelníkový prvek pro form-finding .....	51
4.4	Přehled metod.....	55
4.4.1	Grid method .....	55
4.4.2	Stuttgart-direct approach.....	56

4.4.3	Force density method .....	56
4.4.4	Transient stiffness method.....	56
4.4.5	Update reference strategy .....	56
4.4.6	Gradientní force density method.....	57
4.4.7	Newton-Rapsonova metoda .....	57
4.4.8	Picardova metoda.....	57
4.4.9	Dynamická relaxace .....	57
5	ASPEKTY DYNAMICKÉ RELAXACE .....	65
5.1	Stabilita metody .....	65
5.1.1	Princip .....	65
5.1.2	Určení liniové tuhosti .....	66
5.1.3	Určení uzlových tuhostí .....	67
5.2	Viskózní útlum .....	68
5.2.1	Princip kritického tlumení.....	68
5.2.2	Odhad první vlastní frekvence dle nejdelší doby kmitu .....	71
5.2.3	Odhad první vlastní frekvence dle průběhu kinetické energie .....	72
5.3	Kinetický útlum .....	73
5.3.1	Kinetický útlum s lineární aproximací vrcholu kinetické energie .....	73
5.3.2	Kinetický útlum s parabolickou aproximací vrcholu kinetické energie.....	74
6	POROVNÁNÍ SCHÉMAT DYNAMICKÉ RELAXACE .....	76
6.1	Testovací příklady .....	76
6.1.1	Příklad 1 – jednoduchá lanová soustava .....	77
6.1.2	Příklad 2 – lanová síť.....	78
6.1.3	Příklad 3 – sedlová lanová střecha .....	79
6.1.4	Příklad 4 – membránový přístřešek .....	80
6.1.5	Příklad 5 – dvojnásobná kuželová střecha.....	82
6.2	Schémat s kinetickým útlumem.....	84
6.2.1	Předmět testování .....	84
6.2.2	Definice schémat.....	85
6.2.3	Výsledky testování schémat .....	86
6.2.4	Zhodnocení výsledků schémat DR s kinetickým útlumem.....	95
6.3	Schémat s kritickým útlumem .....	99
6.3.1	Předmět testování .....	99
6.3.2	Definice schémat.....	100
6.3.3	Výsledky testování schémat .....	101
6.3.4	Zhodnocení výsledků schémat DR s kritickým útlumem .....	110
6.3.5	Porovnání kritického a kinetického útlumu .....	112
6.4	Ověření věrohodnosti testovaných schémat .....	114
6.4.1	Shoda vypočtených výsledků s referenčními výsledky.....	114

6.4.2	Shoda vypočtených výsledků s komerčním programem .....	116
6.4.3	Závěry pro ověření věrohodnosti .....	118
6.5	Závěry z testování schémat.....	118
7	AUTORSKÝ SKRIPT .....	120
7.1	Části programu.....	120
7.1.1	Generátor konečných prvků pro FF .....	120
7.1.2	Generátor konečných prvků pro SO .....	121
7.1.3	Interpolátor FF.....	121
7.1.4	Řešiče FF.....	121
7.1.5	Řešiče SO.....	122
7.2	Rozsah úloh .....	122
8	PRAKTICKÉ APLIKACE.....	123
8.1	Zastřešení tramvajové zastávky K Barrandovu v Praze.....	123
8.1.1	Popis konstrukce .....	123
8.1.2	Naměřené sil v kotevních lanech.....	126
8.1.3	Numerické modelování.....	126
8.1.4	Porovnání výsledků .....	129
9	SHRNUTÍ A ZÁVĚR .....	130
	POUŽITÉ ZDROJE .....	134
	SEZNAM OBRÁZKŮ .....	146
	SEZNAM TABULEK .....	149
	SEZNAM ZKRATEK A POUŽITÝCH SYMBOLŮ .....	152

# 1 ÚVOD DO PROBLEMATIKY

## 1.1 Úvod

Počátky statiky textilních membránových konstrukcí v Čechách se datují do devadesátých let dvacátého století, kdy se na našem území začínají objevovat první jednoduché konstrukce. Statické výpočty těchto konstrukcí buďto nebyly provedeny vůbec, anebo byly provedeny pouze zjednodušeně, přičemž se vycházelo z lanových a skořepinových analogií. Až teprve po havárii membránové konstrukce v Českých Budějovicích v roce 1999, viz Obr. 1, se začala statickým výpočtům textilních membránových konstrukcí věnovat větší péče. Svůj podíl na tom jistě má i globální rozvoj informačních a výpočetních technologií, který přinesl statikům a statickým kancelářím cenově dostupné balíčky statických programů, z nichž některé jsou schopny řešit i určité typy membránových a lanoplachtových konstrukcí [1].

Komerční programy využívají k řešení úloh různé numerické postupy, z nichž ne všechny jsou vždy schopné nalézt požadovanou statickou rovnováhu. Numerické postupy založené na maticovém počtu pak, zvláště u složitějších konstrukcí a detailnějších výpočtů, vykazují neúměrně vysoký nárůst výpočetního času, což může do práce statiků přinést řadu dalších problémů. Vývoj efektivních a vysoce stabilních numerických metod pro řešení rozsáhlejších membránových a lanoplachtových konstrukcí tak představuje stěžejní část při analýze chování těchto konstrukcí.



Obr. 1: Membránová konstrukce, u níž došlo v roce 1999 k havárii [1]

Analýza chování lanoplachtových a jim přidružených typů textilních konstrukcí, kdy hlavní část nosné konstrukce tvoří ohybově poddajné prvky, však nepředstavuje snadnou inženýrskou disciplínu. Samotné modelování nově vznikající konstrukce musí projít třemi typickými procesními fázemi:

- a) Hledání počátečního rovnovážného tvaru konstrukce (tzv. form-finding proces), při němž se definují okrajové podmínky, určuje se stupeň předpětí jednotlivých konstrukčních prvků, odlaďuje se typ použitého materiálu a jsou upravovány parametry (např. průvės) budoucího tvaru konstrukce.
- b) Vyšetření statické odezvy konstrukce (dále jen statické odezvy) na působící zatížení (typicky sníh, vítr), a to jak z hlediska celkové stability konstrukce, tak z hlediska použitelnosti. U membránových a lanoplachtových konstrukcí pak specifický problém představují případy zatížení, kdy tvar konstrukce je deformován tak, že se na konstrukci vytvářejí místa s prohlubněmi, v nichž může docházet k nežádoucímu hromadění dešťové vody či sněhu.
- c) Výroba stříhů plachet – tj. vhodné převedení trojrozměrně zakřivené plochy na jednotlivé dvojrozměrné plachtové díly, z nichž je výsledná konstrukce složena.

Velmi často se jedná o iterační proces, kdy překážky a úskalí objevená v jednotlivých fázích znamenají opět návrat o jednu či dvě fáze zpět.

K analýze chování a ověření závěrů z jednotlivých fází procesu se dříve téměř výhradně používaly fyzické měřítkové modely konstrukce nebo její části. Nástup moderních rychlých počítačů a využívání efektivních metod řešení nelineárních úloh znamenal přechod od fyzických modelů k numerickým modelům. U numerických modelů pak lze volit mezi dvěma variantami - použitím spojitých nebo diskretních modelů. Použití spojitých modelů je vhodné pouze pro speciální jednoduché tvary konstrukcí, a tak se v praxi téměř výhradně používají diskretní modely. Lana a membrány jsou při nich aproximovány s pomocí výpočetních prvků, které nemají ohybovou tuhost, a tudíž nepřenášejí žádné ohybové momenty. Při uvažování malých deformací prvků a velkých posunů styčnicků, představuje řešení první i druhé procesní fáze geometricky nelineární úlohu, kterou lze řešit s využitím různých matematických postupů.



Specifika jednotlivých procesních fází a poptávka po rychlém řešení rovnic s velkým počtem neznámých vedla k vývoji různých speciálních sofistikovaných metod, z nichž některé lze použít výhradně pro lanoplachtové konstrukce a některé nalézají širší uplatnění i v jiných oborech. Výpočetní algoritmy současných řešičů lanoplachtových konstrukcí využívají konvenční maticové iterační postupy (Scia), případně umožňují uživateli volbu mezi maticovými a relaxačními metodami (RFEM). Variabilita a různorodost výpočetních algoritmů v současných řešičích dávají tušit, že vývoj na poli výpočetních algoritmů stále není ukončen a je zde prostor pro další výzkum.

## 1.2 Současný stav problematiky

### 1.2.1 Form-finding

Numerická analýza form-finding procesu sice spadá do kategorie geometricky nelineárních úloh, ale má svá specifika - oproti klasickým úlohám například nemusí být definována délka lan, plocha membrán a často také není známa tuhost jednotlivých konstrukčních prvků. Pro řešení této speciální geometricky nelineární úlohy byly během uplynulých let vyvinuty různé unikátní numerické metody.

Historicky první, a také zároveň nejjednodušší, byla „grid method“ [2; 3; 4], (česky známá jako „metoda sítí“) která celou úlohu linearizuje a vychází z předpokladu vyrovnaných vodorovných sil. S pomocí mřížkového dělení se pak dopočítává výšková poloha jednotlivých uzlových bodů konstrukce.

Ve stuttgartském institutu lehkých konstrukcí byla dále vyvinuta metoda „Stuttgart-direct approach“ [5; 6] pojmenovaná dle svého místa vzniku. Při ní se proces řešení lanových sítí převádí na řešení jediné soustavy nelineárních rovnic. Metoda však nemá vyřešena všechna úskalí spojená s nastavením počátečních délek lan (hran membrán) a její praktické uplatnění je tak celkem problematické.

Obtíže „Stuttgart-direct approach“ metody se staly odrazovým můstkem pro vznik velmi sofistikované „force density method“ (česky známé jako „metoda hustoty síly“), jejímž autorem je Schek [7], a která za předpokladu určitých zjednodušení převádí celou úlohu na řešení soustavy lineárních rovnic. Metoda se v devadesátých letech dvacátého století i přes jisté nedostatky stala velmi populární. Volným rozšířením pro řešení konstrukcí s plošnými prvky se pak stala

„surface stress density method“ („metoda hustoty napětí“) vyvinutá Maurinem a Motrem [8].

I metody vycházející z maticových tuhostí nalézají ve form-finding procesu své uplatnění. Jednou z variant je „transient stiffness method“ („metoda přechodných tuhostí“) popsána v pracích Argyrise [9; 10], Sieva [11; 3] a dalších [12]. I přes jistá pozitiva si metoda zachovává jednu z hlavních nevýhod postupů pracujících s maticemi tuhosti, a sice časovou výpočetní náročnost při invertování matice tuhosti, což se, zvláště u úloh s velkým počtem neznámých, negativně projevuje na spotřebovaném výpočetním čase [13].

V současné době je velmi dobře rozšířena „update reference strategy“ (metoda aktualizovaných souřadnic), která byla poprvé popsána Bletzingerem a Rammem [14]. Jedná se o iterační metodu vycházející z metody konečných prvků, při níž se sestavuje matice tuhosti konstrukce v každém iteračním kroku. Odstranění případné singularity se zajišťuje některými speciálními postupy. Právě pro své konečně-prvkové pojetí problému je metoda využívána řadou současných komerčních programů, které jsou vystavěny na metodě konečných prvků a pro něž implementace této metody představuje nejsnazší cestu vývoje softwaru.

Zvláštní kategorii mezi využívanými metodami zaujímá „dynamic relaxation method“ (metoda dynamické relaxace). Metoda je založena na principu fiktivní dynamické analýzy volného kmitání. Jelikož statická rovnováha není závislá na velikosti setrvačných sil ani na velikosti útlumu konstrukce, mohou být parametry hmotnosti a součinitele útlumu s výhodou fiktivní a tím i volně nastavitelné. Metoda se vyvinula z metody konečných diferencí a její počátky lze vysledovat k průkopníkovi v oblasti relaxačních metod Southwellovi [15]. O další vývoj se zasadili zejména Otter [16], Day [17], Buchholdt [18; 19; 20], Barnes [21; 22; 23; 24], Topping a Iványi [25] nebo Lewisová [13; 26]. Hlavní přínos relaxační metody tkví ve skutečnosti, že k řešení úlohy není vůbec potřeba sestavovat matici tuhosti a tím i její inverzi, což je zvláště výhodné u rozsáhlých úloh s mnoha stupni volnosti.

### 1.2.2 Řešení statické odezvy

Při numerickém řešení statické odezvy (druhá procesní fáze návrhu) se vychází z předem definovaného (výrobního) tvaru konstrukce, jsou známy materiálové a

průřezové charakteristiky jednotlivých konstrukčních prvků a jsou definovány velikosti, směry a působiště vnějších zatížení. Jde tak o poměrně typickou geometricky nelineární úlohu a jako řešiče se používají například Newton-Rapsonova metoda, Picardova metoda, metody hustoty síly v kombinaci s Newtonovou metodou [27] anebo již zmíněná metoda dynamické relaxace.

A právě vzhledem k faktu, že metodu dynamické relaxace lze snadno použít pro obě zmíněné fáze analýzy, a také proto, že představuje alternativu k postupům využívajícím matice tuhosti, se překládaná práce detailněji zaměřuje právě na tuto metodu.

### **1.3 Autorský výzkum**

Během autorova doktorského studia bylo téma lanoplachtových konstrukcí postupně rozpracováno, rozvíjeno a jednotlivé dílčí výstupy, z nichž řada je citována v této práci, byly průběžně publikovány v člancích a sbornících z konferencí.

Úvod do analýzy lanoplachtových konstrukcí byl uveden již v autorově diplomové práci [28]. Detailnější popis metody hustoty síly v kombinaci s Newtonovou metodou aplikované na lanové konstrukce byl publikován v časopise *Stavební obzor* [29]. Srovnání metody dynamické relaxace a metody hustoty síly v kombinaci s Newtonovou metodou při analýze lanových soustav bylo uveřejněno v konferenčním článku [30]. V dalších člancích se rozebíral vhodný způsob aproximace lana [31; 32]. Srovnání různých technik metody dynamické relaxace pro analýzu lanových soustav proběhlo v konferenčních člancích [33; 34], pro analýzu plachtových konstrukcí v článku [35], pro analýzu lanových a plachtových konstrukcí v člancích [36; 37] a pro analýzu lanoplachtových konstrukcí v článku [38].

Porovnání výpočetního modelu a skutečně naměřených sil na lanoplachtové konstrukci zastřešení tramvajové zastávky “K Barrandovu” bylo prezentováno ve sborníkovém článku [39]. Srovnání metod dynamické relaxace na lanových konstrukcích a porovnání vypočtených sil s naměřenými silami na skutečné konstrukci bylo uveřejněno v impaktovaném časopise [40].

Srovnání postupů metody dynamické relaxace při form-finding procesu čistě membránových konstrukcí bylo prezentováno ve sborníku [41], lanoplachtových

konstrukcí pak v člancích [42; 43]. Vybrané postupy dynamické relaxace s kinetickým útlumem pro form-finding proces pak byly detailněji porovnávány v článku [44]. Praktické testování svařovaných membránových spojů bylo provedeno v rámci článku [45]. Obtíže při vytváření meshovací sítě numerických modelů membránových konstrukcí pro praktické použití byly prezentovány v člancích [46; 47]. Analogie form-finding procesu s principem hledání minimální délky (plochy) byla uveřejněna v článku [48]. Vliv kinetického útlumu na rychlost konvergence dynamické relaxace byl prezentován v článku [49]. Studie na efektivnost součinitele útlumu u metody dynamické relaxaci se objeví v připravovaném článku [50].

## 2 CÍLE A ČLENĚNÍ PRÁCE

### 2.1 Cíle práce

Předkládaná disertační práce má vytyčeny čtyři hlavní cíle související s problematikou numerické analýzy lanoplachtových konstrukcí, konkrétně jde o následující čtyři body a plánované způsoby jejich naplnění:

*1) Vytvoření odborné rešerše pro návrh a posouzení textilních membránových konstrukcí.*

V rámci naplnění tohoto cíle je podán informativní přehled o historii a současné výstavbě lanoplachtových konstrukcí u nás i ve světě a je uveden základní přehled používaných materiálů. Dále je představena metodika numerického modelování membránových konstrukcí včetně podrobného popisu použitých výpočetních metod.

*2) Zkoumání vlivu součinitele útlumu a dalších fiktivních parametrů na rychlost konvergence metody dynamické relaxace.*

Rychlost konvergence metody dynamické relaxace je závislá na volbě fiktivních parametrů a na typu použitého útlumu (viskózní, kinetický), proto je zajímavé na základě teoretického rozboru metody navrhnout a srovnat několik schémat postupů a diskutovat podmínky jejich použití.

*3) Sestavení prototypu autorského skriptu v programu MATLAB k řešení návrhu a statické odezvy textilních membránových konstrukcí.*

K odzkoušení různých teoretických postupů je v rámci doktorského studia vyvinut autorský prototyp řešiče v programu MATLAB, který umožňuje numerické řešení návrhu a statické odezvy textilních membránových konstrukcí. Skript je připraven do takové podoby, aby bylo možné ho použít k řešení co nejobecnější textilní membránové konstrukce a bylo možné provést jeho srovnání s komerčně používanými programy.

#### 4) Řešení praktických aplikací

Ověření teoretických poznatků analýzy lanoplachtových konstrukcí je provedeno porovnáním numerických modelů a měření in-situ na vybraných praktických stavbách. Pro srovnání je v této práci vybrána lanoplachtová konstrukce zastřešení tramvajové zastávky „K Barrandovu“ v Praze.

## 2.2 Členění práce

Tato disertační práce je členěna do několika kapitol. Po úvodních dvou kapitolách, které se věnují současnému stavu problematiky, cílům a členění práce, následuje kapitola číslo tři, která přibližuje historii a současnou výstavbu lanoplachtových konstrukcí u nás i ve světě. V rámci této kapitoly jsou představeny některé používané materiály hlavních nosných prvků a jsou popsány způsoby jejich testování.

Ve čtvrté kapitole jsou popsány způsoby numerického řešení lanoplachtových konstrukcí, včetně popisu použitých prvků. Následuje seznam a krátký popis numerických metod řešení. Větší rozsah je věnován popisu principu metody dynamické relaxace, která představuje alternativu k maticovým metodám a která je v dalších částech práce detailněji rozebírána.

V páté kapitole jsou představeny aspekty, které ovlivňují rychlost a stabilitu metody dynamické relaxace. Jsou přestaveny postupy s kritickým a kinetickým útlumem a jsou zmíněny faktory, které by bylo vhodné podrobit testování.

Následuje šestá kapitola, která je zaměřena právě na porovnávání a testování různých schémat dynamické relaxace při analýze lanoplachtových konstrukcí. V první části kapitoly jsou představeny příklady, na nichž je testování prováděno. V dalších částech kapitoly jsou pak představena vybraná schémata s kinetickým a kritickým útlumem. Následuje samotné testování a ověření správnosti a relevantnosti získaných výsledků. V závěrečném shrnutí je naznačeno, kde se skrývá potenciál schémat metody dynamické relaxace a kam by se vývoj v této oblasti mohl dále ubírat.

Sedmá kapitola popisuje prototyp autorského skriptu, jenž byl autorem vyvinut během doktorského studia jako pomůcka pro řešení a zkoumání numerických metod při analýze lanoplachtových konstrukcí.

Osmá kapitola se zaměřuje na praktické testování a experimentování, které probíhalo v rámci studia. Podrobné srovnání je provedeno u lanoplachtové konstrukce zastřešení tramvajové zastávky „K Barrandovu“ v Praze, u které je k dispozici geodetické zaměření, původní statický výpočet, numerický model konstrukce a měření sil v lanech in-situ.

V poslední deváté kapitole jsou shrnuty a kriticky posouzeny poznatky z výzkumu během doktorského studia a jsou naznačeny kroky pro budoucí bádání.

### 3 HISTORIE A SOUČASNÁ PRAXE LANOPLACHTOVÝCH KONSTRUKCÍ

Lanové, membránové a lanoplachtové střešní konstrukce se těší stále většímu zájmu stavitelů a architektů, viz např. Obr. 2. Tyto konstrukce představují velmi atraktivní způsob zastřešení velkých ploch bez nutnosti použití dalších svislých konstrukčních prvků, které by narušily celistvost prostoru pod zastřešením. Přitažlivé jsou především pro svou vzdušnost a ladnost křivek, jež svým tvarem přirozeně vytvářejí.

Podstatou těchto typů konstrukcí je skutečnost, že hlavní nosnou část konstrukce tvoří lano, plachta nebo jiný textilní ohybově poddajný prvek. Správně navržená a provedená konstrukce musí být s dostatečnou bezpečností rezistentní vůči očekávanému zatížení a musí umožnit pohodlné využívání vnitřního prostoru. Typický problém, jemuž je potřeba věnovat zvýšenou pozornost a jemuž je potřeba se s dostatečnou pravděpodobností vyhnout, představují velké lokální deformace (vrásky), které se mohou na špatně provedené nebo předepnuté konstrukci vytvořit při přívalech deště nebo při napadnutí většího množství mokrého sněhu.



Obr. 2: Příklad lanoplachtové konstrukce [51]



Uvedené konstrukce se dají členit dle nejrůznějších kritérií. Z hlediska statického působení lze rozeznat tři základní typy konstrukcí:

- a) Samonosná lana nebo lanové sítě, viz Obr. 3, kdy hlavním nosným prvkem je lano nebo větší množství lan a případná použitá membrána má pouze charakter výplně (není předepnutá). Typickým představitelem této kategorie jsou visuté nebo zavěšené mosty, cirkusové stany nebo visuté lanové střechy.



Obr. 3: Lanová síť – hřiště ve Stromovce [52]

- b) Samonosné membránové konstrukce, viz Obr. 4, kdy hlavním nosným prvkem je mechanicky předepnutá membrána, tvarovaná dle principu dvojí protisměrné křivosti, kotvená pomocí ocelových nebo betonových okrajových podpor. Často se používá v kombinaci s lany, které tvoří obvodové ztužení okrajů. Používá se především k zastřešení zastávek, nádraží, odpočívadel, výstavních ploch nebo třeba tribun.



Obr. 4: Zastřešení golfového resortu v Hostivaři [53]

- c) Samonosné pneumatické membrány, viz Obr. 5. Membrány u těchto konstrukcí mají stejnosměrnou křivost a jejich únosnost a tuhost je dána rozdílem tlaků vzduchu na vnitřním a vnějším povrchu. K udržení přetlaku uvnitř konstrukce se nejčastěji používají kompresory a vstupy přes turnikety. Využívají se zejména jako dočasné zastřešení venkovních sportovišť nebo výstavních pavilonů.



Obr. 5: Zastřešení tenisového hřiště [54]

Jelikož u všech výše uvedených typů konstrukcí tloušťka membrány (průměr lana) narůstá se zvětšujícím se rozpětím relativně málo, vynikají tyto konstrukce malou hmotností střechy v poměru k zastřešovanému rozpětí, což značně snižuje náklady na výstavbu. Na druhé straně je nutné podpůrnou konstrukcí zachytávat poměrně velké vodorovné síly, což náklady na výstavbu naopak prodražuje. I přesto však vycházejí náklady na lanoplachtové konstrukce několikanásobně levněji než u konvenčně používaných konstrukcí [55].

Výhodné je také racionální využívání materiálu – membrány a lana jsou namáhány v čistém tahu, kdežto obvodová konstrukce v tlaku. Využití průřezů je tak plné a efektivní a k přenesení sil je možné využívat vysokopevnostní oceli a betony.

### 3.1 Historie

Využívání lana jakožto nosného konstrukčního stavebního prvku je známo již minimálně od pravěku, kdy sloužilo k vytvoření primitivních příbytků anebo k vytvoření přechodu mezi dvěma břehy řeky. Mezi první používané materiály patřily zřejmě větve stromů nebo výhonky dlouhých popínavých rostlin.

První uměle vytvořená lana jsou dochována z doby bronzové, což dokládají vykopávky historických osídlení, během nichž byly objeveny pozůstatky bronzových drátů spletených do sebe. Několik desetiletí před našim letopočtem se, jak prokazují historické nálezy z Pompejí, v římské říši používala lana o délce až 4.5 metru, která byla tvořena spletencem bronzových drátů o průměrech menší než 1 mm. Z dochovaných výkresů stavebních strojů renesančního umělce a vynálezce Leonarda da Vinciho jsou pak známa středověká kovová lana vyrobená z mědi nebo mosazi. Velký rozvoj lana nastal v 19. století se stále se zdokonalující výrobou oceli a tím i ocelových drátů. Již v roce 1850 bylo pro železniční provoz vyrobeno lano dosahující úctyhodné délky 2650 metrů. Ocelové lano se nejprve používalo v lodním, strojírenském, železničním a báňském inženýrství a až poté se v polovině 20. století dostalo i do stavebnictví [55].

Využívání tkaných plachet k zastřešení obydlí má taktéž dalekosáhlou historii. Příbytky kočovných národů na území dnešní Číny, Ameriky, ale i Evropy, se vyznačovaly schopností mobility, k čemuž mají plachty výborné předpoklady. Tribuny římského kolosea byly v době své největší slávy chráněny proti rozmarům

počasí membránovým zastřešením a je tedy jasné, že lidé na počátku našeho letopočtu již uměli vytvářet plachty nebyvalých rozměrů. Využívání textilních membránových konstrukcí pro stavební účely souvisí s rozvojem vzducholodí. Tragické neštěstí lodě Hindenburg v roce 1937 a příchod druhé světové války znamenaly odklad systematického využívání membrán ve stavebnictví až do druhé poloviny 20. století [56].

### 3.2 Současnost

Velkým průkopníkem v oblasti lanoplachtových konstrukcí, a lehkých střech vůbec, byl německý architekt a vizionář Frei Otto, který stál u vzniku zastřešení německého pavilonu na světové výstavě EXPO v roce 1967 v Montrealu (Obr. 6) a zastřešení Olympijského areálu u příležitosti konání letních olympijských her v Mnichově v roce 1972. Na svou dobu zcela unikátní způsob zastřešení se stal odrazovým můstkem v rozvoji těchto typů konstrukcí. Sám Frei Otto k tomuto rozvoji přispěl nejenom architektonickým ztvárněním svých vizí, ale i, společně s Klausem Linkwitzem, založením ústavu zaměřeného na lehké plošné konstrukce na Technické Univerzitě ve Stuttgartu. Tento ústav se především v osmdesátých a devadesátých letech minulého století masivně věnoval experimentování a rozvíjení teorie na poli membránových a lanových konstrukcí a z jejich závěrů těžíme dodnes [25; 13; 56]



Obr. 6: Německý pavilon při EXPO 67' v Montrealu [57]

V Čechách se první membránové konstrukce začínají objevovat až po změně politického systému v 90. letech minulého století. Za zmínku stojí zastřešení tramvajové zastávky v Praze „K Barrandovu“ (Obr. 7), zastřešení autobusového nádraží v Hradci Králové (Obr. 8), zastřešení výstupu z metra stanice Chodov v Praze (Obr. 9), zastřešení nákupního centra a výstaviště v Českých Budějovicích (Obr. 10 a Obr. 11), zastřešení tribuny pro diváky na fotbalovém stadionu v Jihlavě (Obr. 12), stínící membrány objevující se na vodních dílech při splavňování Vltavy mezi Českým Krumlovem a Týnem nad Vltavou (Obr. 13) nebo pohyblivá membrána nad hledištěm kulturní scény ve Vítkovicích (Obr. 14).



Obr. 7: Zastřešení tramvajové zastávky K Barrandovu [58]



Obr. 8: Zastřešení autobusového terminálu v Hradci Králové [59]



Obr. 9: Zastřešení výstupu z metra stanice Chodov [60]



Obr. 10: Zastřešení koridoru výstaviště v Českých Budějovicích [61]



Obr. 11: Zastřešení terminálu autobusů v Českých Budějovicích [62]



Obr. 12: Zastřešení hlediště fotbalového stadionu v Jihlavě [63]



Obr. 13: Membránové stínění velínu v Hněvkovicích [64]



Obr. 14: Zastřešení kulturní scény ve Vítkovicích [65]



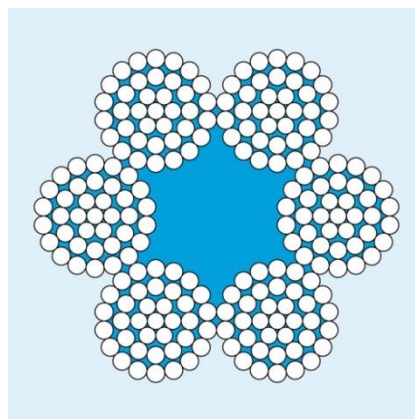
## 3.3 Lana

### 3.3.1 Materiál lan

Materiál konstrukčních lan může být různorodý – od konopných lan, přes ocelová lana až po polypropylenová lana. V současné stavební praxi se však ke konstrukčním účelům používají téměř výhradně ocelová nerezová lana.

Základním stavebním prvkem ocelového lana je drát. Dráty se splétají do pramenů. Dle počtu drátů v jednom prameni rozlišujeme lana 1x19 (19 drátů v jednom prameni), 1x37, 1x61, případně i 6x37, viz Obr. 15. Dle uspořádání drátů v prameni se lana rozdělují na rovnoběžná a vinutá lana. Současné praxi jednoznačně dominují lana vinutá, u nichž se dále rozlišuje směr vinutí (S nebo Z). Dle počtu pramenů pak rozlišujeme lana jednopramenná, či vícepramenná. Vícepramenná mají zpravidla textilní duši. Hmotnost lan je stejná jako u oceli, tedy  $7\,850\text{ kg/m}^3$ . Lana se vyrábějí z vysokopevnostních ocelí, a tak se jejich pevnost pohybuje v rozmezí 1 200 – 2 100 MPa. Samotná únosnost lana závisí na použitém typu lana, způsobu vinutí, použitých upínacích prvcích a dalších faktorech [66; 56; 67].

Modul pružnosti lan je nižší než u analogických profilů z konstrukční oceli, což je způsobeno zejména dotlačováním spirálovitě vinutých lan do duše při osovém zatěžování. Hodnota modulu pružnosti ocelových lan se tak může pohybovat v poměrně širokém rozmezí od 50 do 190 GPa. Další zajímavou vlastností, kterou nelze při návrhu opomenout, je fakt, že se lano při prvním zatížení deformuje více než při dalších fázích zatěžování. Početně to lze vystihnout například snížením modulu pružnosti lana [56; 68].



Obr. 15: Profil ocelového lana 6x37 s textilní duší [69]

### 3.3.2 Měření sil v lanech

Ve stavební praxi je nezdívka kdy nutné změřit aktuální osovou sílu v laně in-situ. Může to být z důvodu ověření pevnostních materiálových charakteristik lana, z důvodu ověření a verifikace numerického modelu konstrukce nebo za účelem porovnání vypočtených sil s těmi skutečně působícími. V neposlední řadě může jít také o pravidelné kontroly sledující dotvarování lan. Namáhaná lana totiž dotvarovávají – jejich protažení s časem roste, aniž roste jejich zatížení. Je to způsobeno hlavně konstrukcí lana, které je spletené z několika pramenů dohromady. Vliv na statiku lanových konstrukcí je v tomto případě podobný jako u konvenčních konstrukcí:

- Pokud se jedná o staticky určitou konstrukci, dojde ke změně tvaru, ale síly se v konstrukci nezmění.
- U komplikovaných staticky neurčitých konstrukcí vlivem povolení některého lana dochází k přerozdělování sil v celé konstrukci [70].

Pro získání osových sil v lanech lze použít přístroj (viz Obr. 16), který je schopen určit osovou sílu v laně na základě velikosti příčné síly  $F_p$  a příčného vychýlení lana  $\Delta w$ . Při měření osově síly se přístroj osadí na sledované lano, jež je pak s pomocí zabudovaného šroubu příčně vychylováno. Blíže se lze o podrobných aspektech měření a praktickém použití dočíst například v článkách [71; 70; 1]. V této práci je uveden pouze základní vzorec společně s původním stručným komentářem z uvedeného článku [70]:

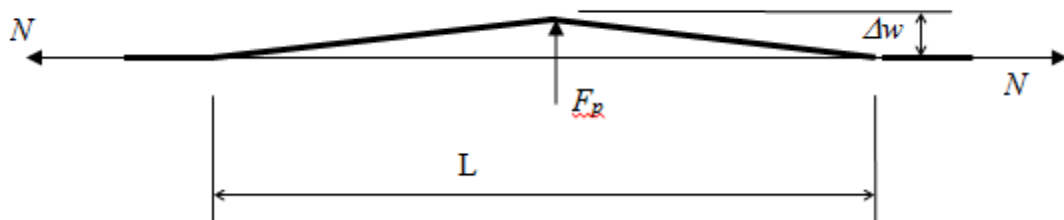


Obr. 16: Měřicí zařízení pro získání sil v laně [71]

„Pokud je zkoušené lano uvažováno jako dokonale ohebné, pak pro výpočet osově síly v lanu  $N$  na základě změřeného příčného vychýlení  $\Delta w$  a příčné síly  $F_p$  lze použít jednoduchý vztah vycházející z teorie druhého řádu“:

$$N = \frac{F_p}{2} \sqrt{\left(\frac{L}{2\Delta w}\right)^2 + 1} \quad (3.1)$$

kde  $L$  je délka vychylované části zkoušeného lana. Význam veličin použitých ve vzorci (3.1) je zřejmý z Obr. 17.“ [70].



Obr. 17: Schéma veličin použitých k určení síly v laně in-situ [71]

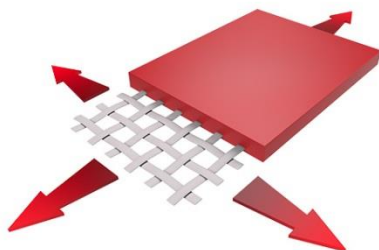
Nevýhodou uvedeného postupu je nutnost zpřístupnění poměrně dlouhého úseku lana, na který je přístroj osazován. Tuto nevýhodu může částečně odstranit moderní měření elastomagnetickou metodou, při níž se osová síla ve feromagnetických materiálech (tedy i v ocelovém laně) určuje na základě změny magnetického pole způsobené mechanickým namáháním lana. Při použití této metody je k získání osově síly v laně zapotřebí zpřístupnění menšího úseku lana než v předchozí metodě. O vývoji a principech elastomagnetické metody se lze dočíst například v [72].

## 3.4 Membrány

### 3.4.1 Materiál membrán

Pro stavební účely se membrány dělí na lehké tkaniny a na fólie. Tkané textilní membrány jsou tvořeny nosnou tkaninou, která poskytuje výslednému produktu požadovanou pevnost a tuhost, a ochrannou vrstvou, která chrání textilii před vlhkostí, UV zářením a dalšími atmosférickými vlivy, viz Obr. 18. Dříve byla tkanina složena z přírodních textilních vláken (například z bavlny, juty nebo třeba hedvábí). S technologickým pokrokem byla přírodní vlákna nahrazena

syntetickými, a tak se dnes téměř výhradně používají polyesterová vlákna, aramidová vlákna nebo skleněná vlákna. Složení ochranné vrstvy záleží na účelu, ke kterému bude membrána sloužit – nejběžněji se používá PVC, PTFE nebo silikonová povrchová úprava. Tkané membrány je možné předpínat pneumaticky i mechanicky [56; 25].



Obr. 18: Schéma tkané membrány [73]

Mechanické vlastnosti tkaných membrán nejsou izotropní, membrány totiž vykazují jiné vlastnosti ve směru osnovy tkaniny a jiné vlastnosti ve směru útku (vlákno kolmé na osnovu). Rozvoj moderních technologií však způsobil, že někteří současní výrobci membrán (např. francouzská firma Serge Ferrari [74]) již dosahují téměř identických mechanických vlastností membrán v obou směrech textilie.

Pevnost ve směru osnovy se u běžně vyráběných membrán pohybuje v rozmezí od 3 kN / 5 cm až po 12 kN / 5 cm. Tkané membrány patří mezi lehké konstrukce a hmotnost 1 m<sup>2</sup> membrány se pohybuje v rozmezí od 0.5 do 3 kg/m<sup>2</sup>. Tloušťka membrán závisí na rozpětí konstrukce, nejčastěji se však pohybuje v rozmezí od 0.5 do 1.5 mm. Modul pružnosti membrány je špatně definovatelný, neboť závisí na stavu napjatosti a na směru testování vzorku. Pro numerické potřeby ho lze postihnout přibližně hodnotou 0.8 až 1 GPa [56].

Fólie nemá na rozdíl od tkané membrány vnitřní strukturu a vyazuje tak izotropní chování. Je tvořena tenkou homogenní vrstvou různého chemického složení (PES, PVC, ETFE nebo PTFE). Pevnost v tahu se pohybuje okolo 40 N / mm. Hmotnost stavebních fólií se pohybuje v rozmezí 175 až 400 g/m<sup>2</sup>. Fólie se s výhodou používají u pneumaticky předpínaných membránových konstrukcí, neboť vykazují velmi dobrou odolnost proti atmosférickým vlivům počasí [56; 25].

### 3.4.2 Měření napětí v textilní membráně

Ověření vlastností textilních membrán se zkouší a prokazuje s pomocí tzv. „biaxiálního testu“, kdy jsou napětí v obou hlavních směrech (osnova a útek) měřena s pomocí tenzometrů a protažení s pomocí velmi přesných snímačů dráhy s rozsahem odpovídající předpokládanému přetvoření [56; 25].

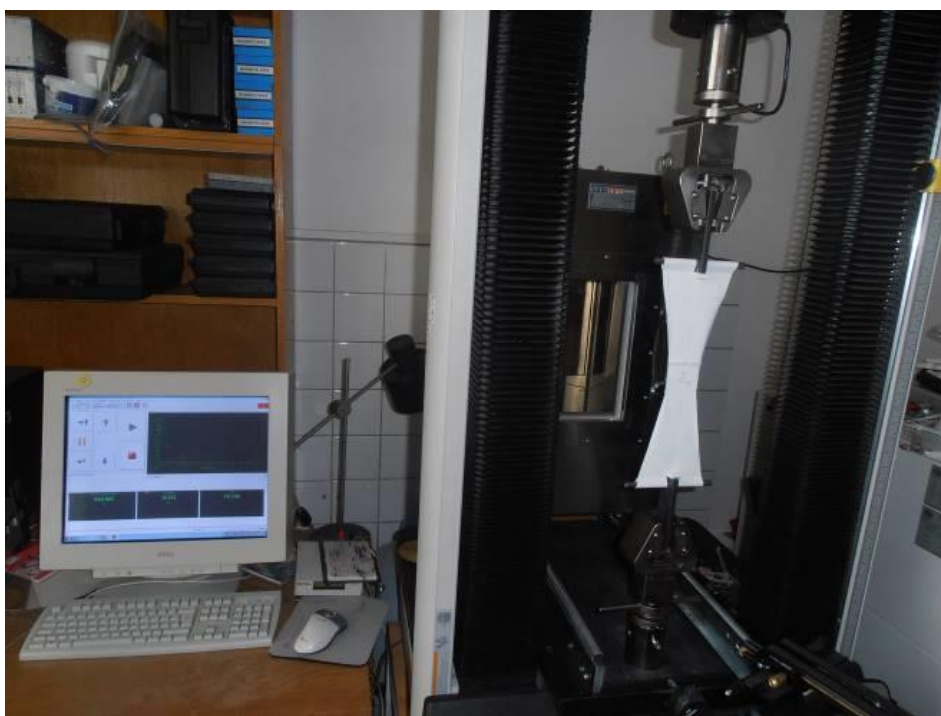
Pro vyhodnocení sil v plachtě in-situ se používá původní metoda vyvinutá na Katedře mechaniky Fakulty stavební ČVUT v Praze. Metoda umožňuje stanovit napjatost plachty v různých směrech. Při měření je vymezena část plachty s jasnými okrajovými podmínkami. Na základě změřené základní vlastní frekvence kmitání plachty je pak stanovena síla v plachtě [1].

### 3.4.3 Testování svařovaných spojů textilních membrán

Při výstavbě membránových konstrukcí se téměř nikdy nedá obejít bez spojování membrán. Rozlišují se spoje dočasné (nebo-li opakovatelně použitelné) a trvalé spoje. Dočasné spoje se používají především při upínání membrány k vnější nosné konstrukci. Trvalé spoje se používají u větších membránových ploch, kdy je potřeba spojit jednotlivé stříhy plachet, jejichž šířka je mj. limitována šířkou role membrány. Trvalé spoje se obvykle provádějí dílensky a využívá se, buď vysokofrekvenčního svařování, nebo tepelného svařování [1; 56].

Testování spojů je na Katedře mechaniky Fakulty stavební ČVUT v Praze realizováno s pomocí elektromechanického zkušebního stroje MTS Alliance RT30kN, kdy se na vybraných vzorcích testuje pevnost v tahu, viz Obr. 19. Příklad má zkušební rozsah sil tlak/tah +30 / -30 kN a je založen na posuvu příčnicku s rozlišením posuvu 0.001 mm. Zkušební stroj je vybaven extenzometrem pro měření poměrného přetvoření na odměrné dráze 6.5 mm. Pevnost plachet (a tedy potažmo i spojů) se nejčastěji uvádí v síle na 5 cm průřezu. K tomu požadavku je uzpůsoben i tvar vzorků. Vzorky jsou do přístroje upnuty s pomocí podlouhlých ocelových válečků, detail uchycení viz Obr. 20. Vzorky jsou postupně zatěžovány předepsaným protažením vzorků. Během zatěžování každého vzorku je sledována zatěžovací síla a je možné pro každý zkušební vzorek vykreslit pracovní diagram, ze kterého lze odečíst příslušné mechanické vlastnosti [45].

V rámci doktorského studia proběhlo testování spojů membrán několika typů materiálů, výsledky a závěry měření byly publikovány v [45].



Obr. 19: Příklad přístroje pro testování pevnosti membrány v tahu [45]



Obr. 20: Detail uchycení vzorku k přístroji [45]

### **3.5 Zatížení konstrukcí**

Zatížení působící na membránové konstrukce je odlišné od klasických konstrukcí. Vzhledem k nekonvenčnímu tvaru konstrukcí je nutné uvažovat zatížení větrem nejen přítlakem, ale i podfouknutím. Obě uvedené varianty způsobují tahy v konstrukci. Účinek zatížení je tak odlišný od běžných deskotrámových konstrukcí, kde vlivem větru vznikají tahy i tlaky [1].

Současné normy ČSN EN však speciální přístupy při uvažování zatížení lanoplachtových konstrukcí od sněhu či větru neuvažují.

## 4 NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ

### 4.1 Procesy

Z hlediska statického výpočtu je řešení membránových konstrukcí jiné než řešení běžných stavebních prvků a, jak již bylo řečeno v úvodní kapitole, návrh membránových konstrukcí musí projít třemi typickými procesními fázemi:

- Hledání počátečního rovnovážného tvaru konstrukce (tzv. form-finding proces).
- Vyšetření účinků zatížení působících na konstrukci.
- Výroba stříhů plachet – tj. vhodné převedení trojrozměrně zakřivené plochy na jednotlivé dvojrozměrné plachtové díly.

Každá fáze má svá jedinečná specifika. Pokud je daná fáze řešena numericky (alternativou jsou fyzické měřítkové modely), pak i výpočetní předpoklady, modely a postupy mají svá specifika a každá fáze tak představuje samostatnou matematicko-mechanickou disciplínu.

Před popisem jednotlivých procesů je vhodné definovat dva pojmy:

- „hrubý tvar“ - startovací (fiktivní) numerický tvar konstrukce pro form-finding proces,
- „výrobní tvar“ - takový tvar konstrukce, který bude realizován při výrobě konstrukce. Tento tvar nezahrnuje vliv externího zatížení (vítr, sníh), ale může zahrnovat vliv vlastní tíhy konstrukce. Určitě však zahrnuje vliv předpětí.

#### 4.1.1 Form-finding

Form-finding (dále jen FF) proces představuje první krok při návrhu lanoplachtových konstrukcí. Zjednodušeně řečeno se jedná o nalezení „výrobního tvaru“ konstrukce.

Díky chybějící ohybové tuhosti, vlastnímu předpětí a okrajovým podmínkám zaujmou lanoplachtové konstrukce vždy jedinečný „výrobní tvar“, který nelze jednoznačně zvolit při úvodním návrhu a ten tak musí být získán s pomocí numerického výpočtu [1].

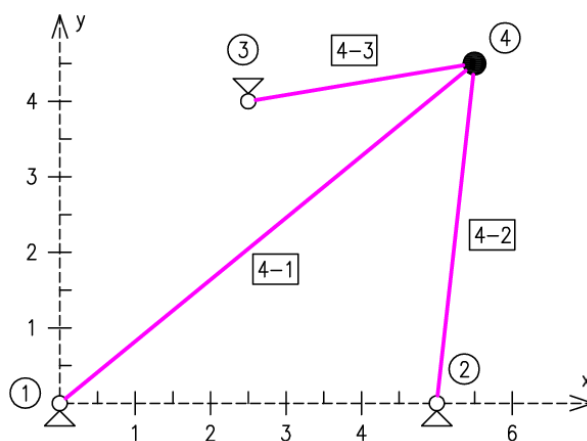


### **Předpoklady**

Pro numerické výpočty musí být jednoznačně definovány okrajové podmínky (poloha a typ podpor), zvoleny výpočetní prvky (prutové nebo plošné prvky), určena propojenost výpočetních prvků a definováno předpětí v jednotlivých částech konstrukce. V některých případech je možné volit doplňující parametry, jako jsou: průvės membrán, délky lan, vnější zatížení (přetlak), tuhost okrajových lan, apod. Před započítím samotného výpočtu musí být zvolen počáteční „hrubý tvar“ konstrukce, ze kterého začne numerický program (řešič) svůj výpočet.

### **Analogie s hledáním minimální délky**

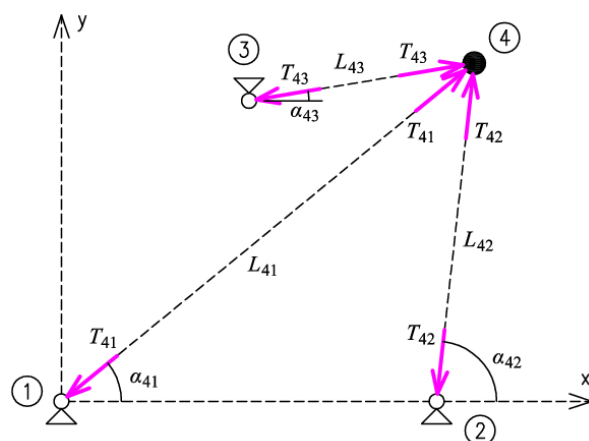
Za jistých předpokladů může FF proces lanových soustav vést k matematickým extrémním úlohám. K vysvětlení základních pojmů pro FF proces je použito ilustračního 2D příkladu vycházejícího z autorského článku [48].



Obr. 21: Jednoduchá lanová soustava – schéma zadání [48]

Uvažujme jednoduchou 2D lanovou konstrukci z Obr. 21. Ta se sestává ze tří lan, tří pevných bodů a jednoho volného uzlu (číslo 4). U lan je možné předepsat buď délku lana, anebo předpínací sílu v laně – vždy lze předepsat pouze jednu z těchto veličin.

Samotný numerický proces FF představuje nalezení takové polohy volného uzlu (v tomto případě uzlu číslo 4), aby byly splněny statické podmínky rovnováhy.



Obr. 22: Jednoduchá lanová soustava – schéma sil [48]

Z Obr. 22, kde  $L_{ij}$  značí délku lana, je zřejmé působení sil. Aby byly zajištěny podmínky rovnováhy v bodě 4, musí platit, že:

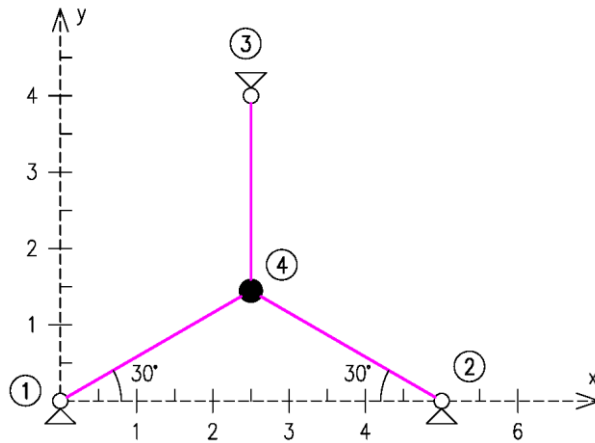
$$\rightarrow : T_{41} \cos \alpha_{41} + T_{42} \cos \alpha_{42} + T_{43} \cos \alpha_{43} = 0, \quad (4.1)$$

$$\uparrow : T_{41} \sin \alpha_{41} + T_{42} \sin \alpha_{42} + T_{43} \sin \alpha_{43} = 0, \quad (4.2)$$

kde  $T_{ij}$  je předpínací síla v laně. Indexy  $i$  a  $j$  značí číslo uzlu, ve kterém lano začíná, respektive končí. Funkce sinus a cosinus z rovnic (4.1), (4.2) jsou funkcí souřadnic uzlu č. 4. Rovnovážnou polohu volného uzlu z rovnic (4.1), (4.2) nelze vyjádřit explicitně a pro nalezení správného řešení je potřeba použít některou z numerických iteračních metod – viz více v kapitole 4.4.

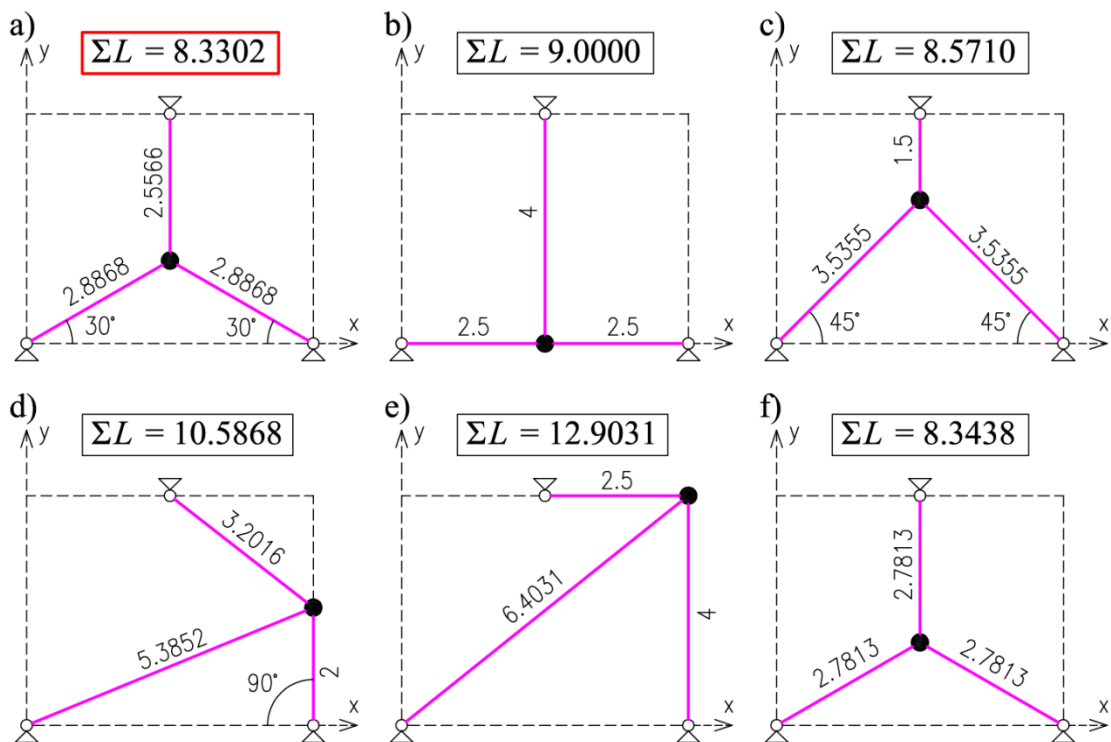
Pokud je ve všech lanech definována předpínací síla a tato síla je navíc ve všech lanech stejná, např. 100 kN, pak jediná rovnovážná poloha konstrukce nastává pro případ uvedený na Obr. 23, přičemž je jedno, v jaké poloze se uzel nacházel na počátku výpočtu.

Z rovnic (4.1) a (4.2) lze vysledovat i další zajímavý fakt – tvar konstrukce je nezávislý na velikosti předpínací síly. Uvedené tvrzení si můžeme ověřit například tak, že budeme sílu ve všech lanech uvažovat rovnou 1 kN, výsledný tvar však i tak zůstane stejný.



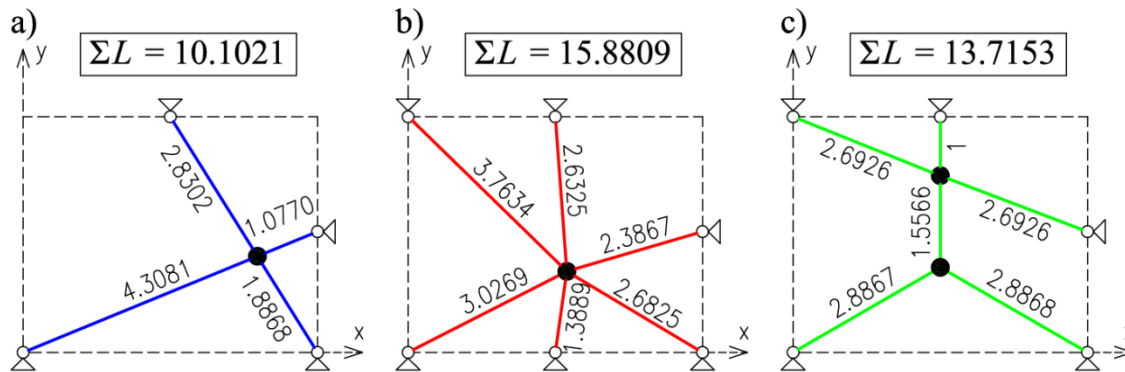
Obr. 23: Jednoduchá lanová soustava – výsledný tvar [48]

Zajímavý je i další fakt. Pokud je, bez ohledu na statickou rovnováhu, hledána poloha volného uzlu taková, aby součet délek všech lan byl co nejmenší, je řešením opět tvar konstrukce z Obr. 23. Na Obr. 24 je pro ilustraci tohoto tvrzení uvedeno šest různých poloh volného uzlu a i z něj je patrné, že celková délka lan je opravdu nejmenší pro první, tj. rovnovážný stav. Lze tedy říci, že hledání rovnovážného tvaru konstrukce se zadanými okrajovými podmínkami, rovnoměrným předpětím v lanech a bez vnějších sil působících na volné uzly vede na úlohu řešení minimální délky spojnic mezi danými uzly.



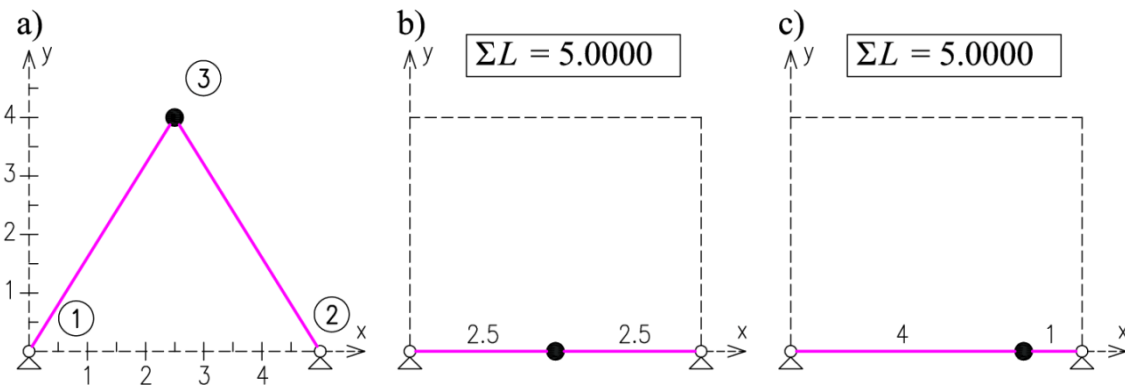
Obr. 24: Srovnání různých tvarů konstrukce – princip minimální délky [48]

Zvýšením počtu lan nebo počtu volných uzlů se pochopitelně změní tvar konstrukce, ovšem princip minimální délky zůstane zachován, viz příklady na Obr. 25. Především z Obr. 25a lze vytušit, že princip minimální délky zůstane zachován, protože volný uzel zaujme pozici v průsečíku spojnic podepřených uzlů.



Obr. 25: Příklady konstrukcí s více lany [48]

Při podepření menším množstvím lan, mohou nastat takové případy, že lze nalézt více řešení. Například u konstrukce ze zadání z Obr. 26a je řešením konstrukce na Obr. 26b. Řešením je také ale i konstrukce z Obr. 26c. Je jasné, že tvar zůstává stejný, ale volný uzel číslo 3 může zaujmout kteroukoliv pozici na spojnici uzlů 1 a 2.

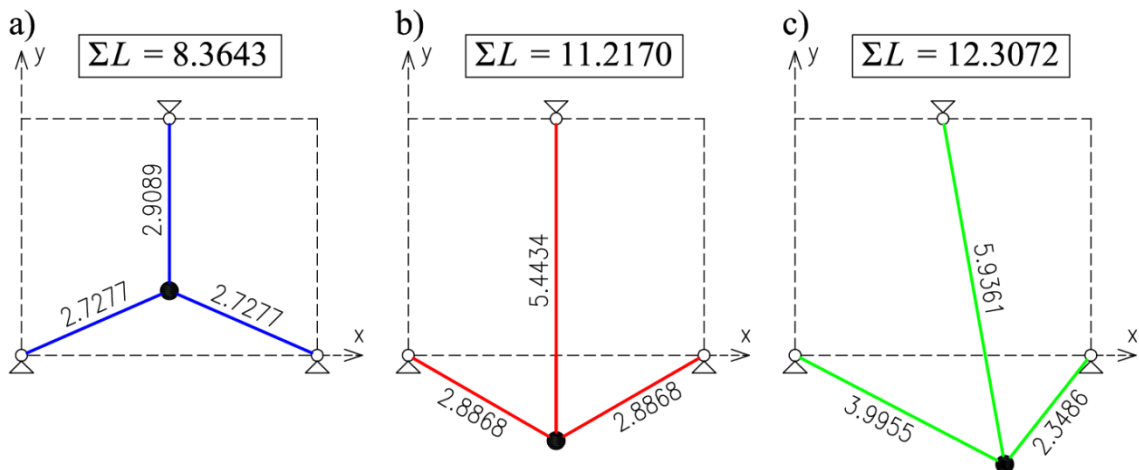


Obr. 26: Příklady vícenásobných řešení [48]

Do FF procesu patří i případy úloh, kdy na konstrukci působí vnější síly, anebo nejsou předpínací síly v lanech totožné. Pak ale již analogie s hledáním minimální délky neplatí. Pokud bude například použito zadání z Obr. 21 a ve styčnicku 4 bude svisle dolů působit síla 20 kN a předpínací síla v lanech bude 100 kN, pak konstrukce zaujme tvar z Obr. 27a. Pokud by působící síla byla větší, např. 200 kN, pak se konstrukce prověsí ještě více, viz Obr. 27b. Pokud bude navíc

předpínací síla v levém laně menší, než v ostatních lanech, např. 50 kN, pak se tvar konstrukce změní ještě více, viz Obr. 27c. Nezáleží při tom na konkrétních hodnotách předpínacích a vnějších sil, ale na jejich vzájemném poměru, viz [13].

V těchto případech tak úloha o hledání rovnovážného tvaru není analogická s hledáním minimální délky. Matematicky se jedná o hledání minimální délky s posunutím (podle poměru působících sil).



Obr. 27: Příklady s externím zatížením [48]

Závěrem této kapitoly lze shrnout, že hledání rovnovážného tvaru konstrukce se zadanými okrajovými podmínkami, rovnoměrným předpětím v lanech a bez vnější síly působící na volné uzly vede na úlohu řešení minimální délky spojnic mezi danými pevnými a volnými uzly. Pro případy nerovnoměrného působení vnějších a vnitřních sil úloha o hledání rovnovážného tvaru není analogická s hledáním minimální délky. Matematicky se jedná o hledání minimální délky s posunutím (podle poměru působících sil).

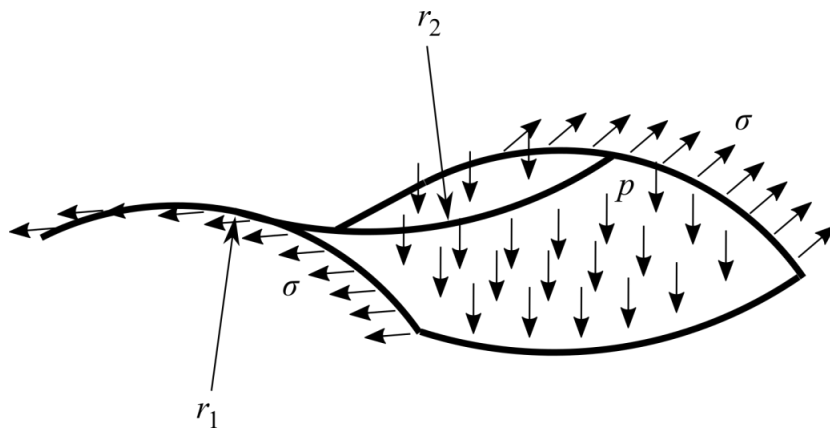
### **Analogie s hledáním minimální plochy**

Tvrzení o minimální délce odvozené v minulé kapitole platí analogicky i pro 3D konstrukce a je známo pod pojmem hledání minimální plochy uzavřené křivky. Touto ryze matematickou disciplínou se poprvé zabýval Euler (1744), na něj pak navázal Lagrange (1761) a mnoho dalších myslitelů. Některé zajímavé poznatky lze najít v [75; 13].

Pro zakřivené plochy je vztah mezi působícím tlakem kolmo na plochu a vlastní křivostí plochy dán vztahem (4.3):

$$p = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (4.3)$$

kde  $p$  je rozdíl tlaků mezi vnitřní a vnější plochou,  $\sigma$  je vnitřní napětí, a  $r_1$  a  $r_2$  jsou poloměry vlastní křivosti, viz Obr. 28.



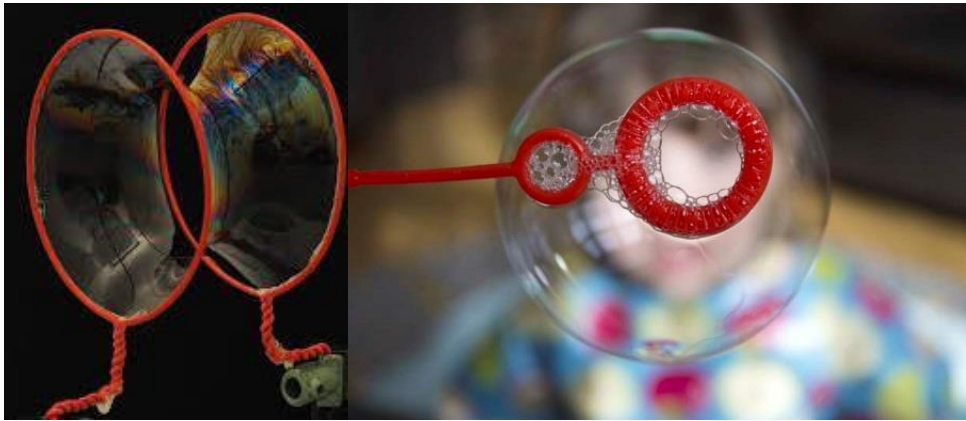
Obr. 28: Schéma značení pro minimální plochu

U případu tenkých mýdlových filmů, které se mj. někdy používají jako fyzické měřítkové modely při FF procesu membránových konstrukcí, je napětí  $\sigma$  uvažováno jako konstantní. Dále se, stejně jako u mechanicky předpínaných membrán, předpokládá, že vnější zatížení  $p$  je rovno nule. Dosazením výše uvedených předpokladů do rovnice (4.3) dostáváme [13]:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0 \quad (4.4)$$

Z rovnice (4.4) vyplývá důležitý vztah pro střední křivost  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ , který zní, že každá minimální plocha uzavřené křivky musí mít v každém svém bodě nulovou střední křivost. Z rovnice (4.4) plyne i další zajímavá skutečnost. Musí totiž platit, že  $r_1 = -r_2$ . Minimální plocha má tak v případech mýdlového filmu antiklastický tvar, viz Obr. 29a.

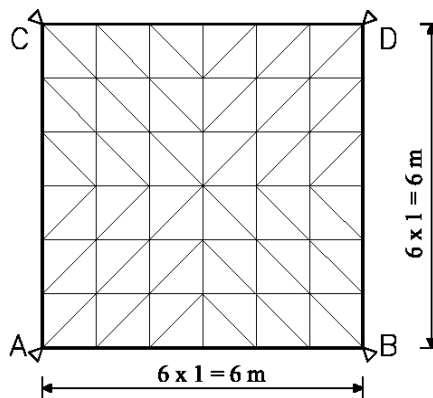
Poznamenejme ještě, že pokud  $p \neq 0$ , pak minimální plocha má synklastický tvar (mýdlová bublina), viz Obr. 29b [13].



Obr. 29: a) Mýdlový film [76]; b) mýdlová bublina [77]

### ***Důležité aspekty FF procesu***

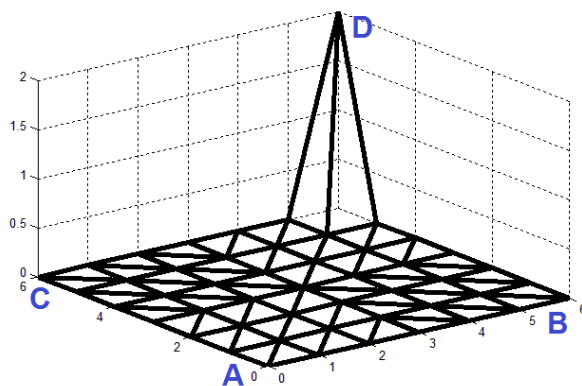
Pokud je algoritmus řešiče FF procesu sestaven správně, pak nalezení „výrobního tvaru“ konstrukce vůbec nezávisí na tom, jak byl zvolen „hrubý tvar“ konstrukce pro start výpočtu (při zachování min. počtu prvků), viz následující ilustrační ukázka:



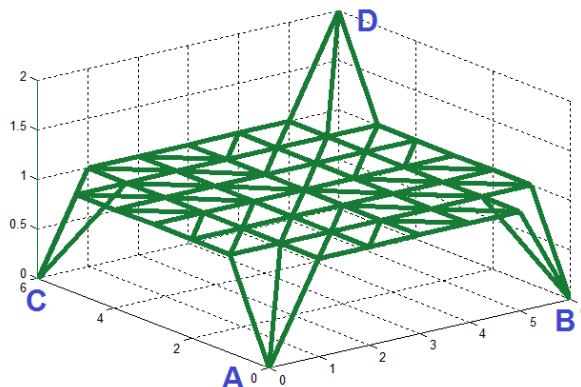
Obr. 30: Půdorysné schéma ukázky pro form-finding proces [1]

Uvažujme konstrukci z Obr. 30. Je na ní zobrazen půdorys membránové konstrukce. Body označené písmeny představují pevné bodové podpory. Tlusté linky po obvodě znázorňují předepnutá lana. Vnitřní trojúhelníková síť představuje předepnutou membránu. Pokud při návrhu zvolíme jednoduchý „hrubý tvar“ konstrukce znázorněný na Obr. 31 černou barvou, pak řešič nalezne pro dané předpětí „výrobní tvar“ znázorněný na Obr. 33 červenou barvou. Pokud bychom však zvolili trochu jiný „hrubý tvar“ konstrukce, např. ten znázorněný na Obr. 32 zelenou barvou, a ponechali stejný stupeň předpětí i okrajové podmínky jako

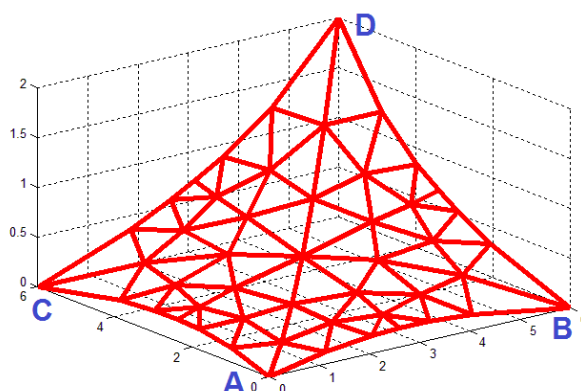
v případě konstrukce s černou barvou, tak i přesto, že se oba „hrubé tvary“ liší, bude výsledný „výrobní tvar“ stejný a bude odpovídat konstrukci s červenou barvou. „Výrobní tvar“ konstrukce je tak nezávislý na volbě „hrubého tvaru“ [1].



Obr. 31: Počáteční nastavení „hrubého tvaru“ konstrukce [1]



Obr. 32: Jiné počáteční nastavení „hrubého tvaru“ konstrukce [1]

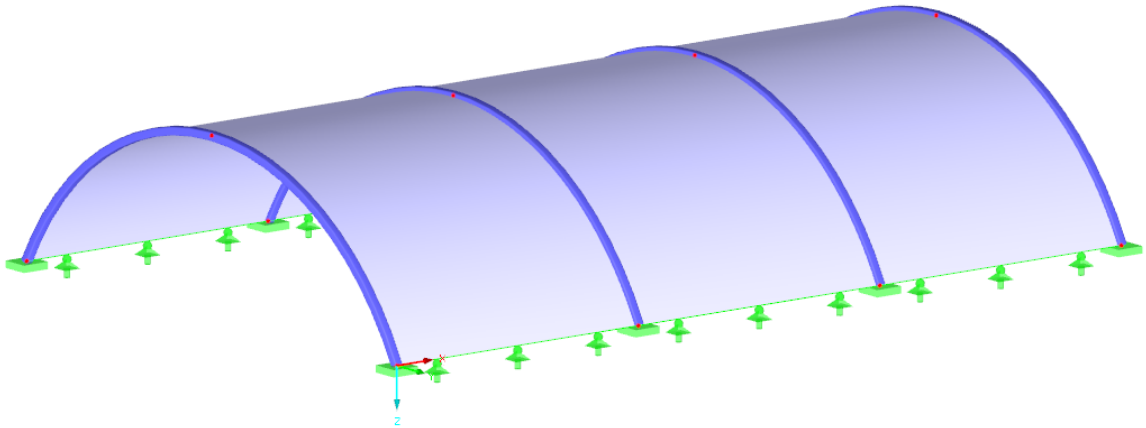


Obr. 33: Konstrukce po proběhnutém výpočtu ve „výrobním tvaru“ [1]

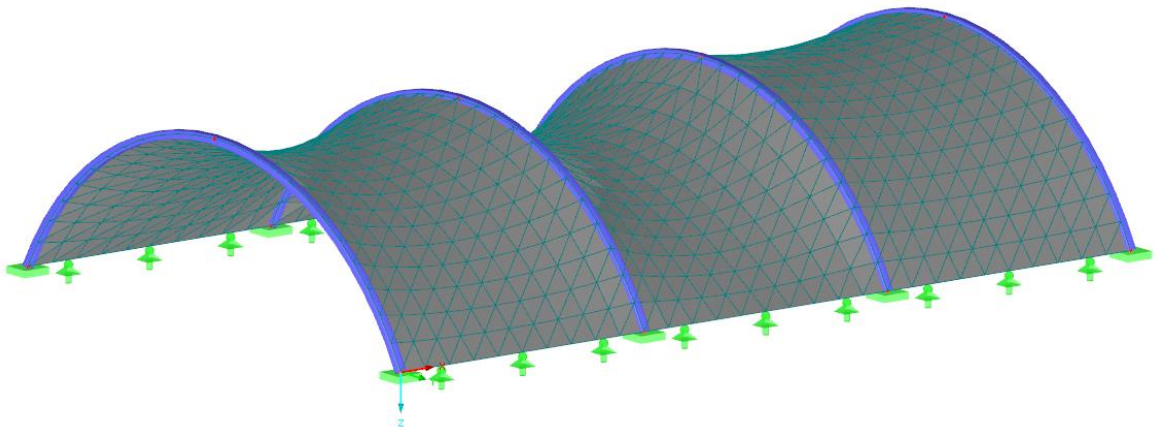
Naopak „výrobní tvar“ konstrukce je závislý na stupni předpětí konstrukce [78]. Viz následující ukázka připravená v manuálu [79] programu RFEM [80] od společnosti Dlubal.



Je uvažován výchozí „hrubý tvar“ konstrukce z Obr. 34 a v každém poli konstrukce je uvažováno jiné předpětí membrány. Výsledkem je pak „výrobní tvar“ konstrukce (viz Obr. 35), ze kterého je patrné, že v každém poli je tvar membrány jiný. Lze tak konstatovat, že „výrobní tvar“ konstrukce je závislý na stupni předpětí membrány.



Obr. 34: Počáteční „hrubý tvar“ konstrukce [79]



Obr. 35: „Výrobní tvar“ konstrukce po proběhnutém FF výpočtu [79]

#### 4.1.2 Statická odezva konstrukce na zatížení

Vyšetření statických účinků od zatížení působících na konstrukci představuje fázi, kdy je znám „výrobní tvar“ konstrukce, je sestaven výpočetní model konstrukce, je určeno zatížení působící na konstrukci, definují se materiálové a průřezové charakteristiky jednotlivých prvků a je řešena odezva konstrukce a to jak z hlediska celkové stability konstrukce, tak z hlediska použitelnosti.

U membránových a lanoplachtových konstrukcí pak specifický problém představují případy zatížení, kdy tvar konstrukce je deformován tak, že se na

konstrukci vytvářejí místa s vrásami, v nichž může docházet k nežádoucímu hromadění dešťové vody či sněhu [1].

Tvar výpočetního modelu konstrukce pro statickou odezvu (dále jen SO) nejčastěji vychází z první fáze (FF proces), může však být také určen z geodetického zaměření konstrukce.

### **Předpoklady**

Pro lanové a plachtové soustavy se předpokládá lineární chování materiálů (což u vysokopevnostních ocelí jistě platí) při velkých styčnickových posunech.

Lanové a plachtové soustavy tak představují geometricky nelineární úlohu, při které se hledá stav rovnováhy na deformované konstrukci. Uvažuje se, že deformace konstrukce nemá žádný vliv na velikost a směr vnějších sil. Dá se však očekávat, že tuhost jednotlivých lan se bude měnit s deformací konstrukce. Vliv změny teploty na tvar konstrukce se neuvažuje [1].

#### **4.1.3 Střihové plány**

Jedná se o vhodné převedení trojrozměrně zakřivené plochy na jednotlivé dvojrozměrné plachtové díly, z nichž je výsledná konstrukce složena.

Podrobnější analýza nebyla předmětem této práce, více lze dočíst v literatuře [25; 56].

## **4.2 Diskretizace konstrukce**

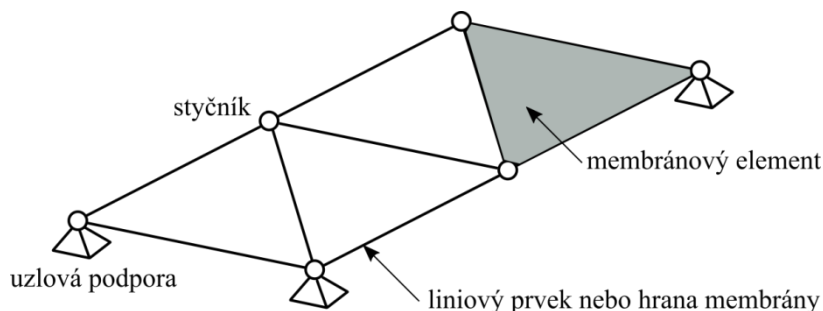
### **4.2.1 Způsob modelování**

Diskretizovaný numerický model konstrukce se sestává ze styčnicků, uzlových podpor a liniových nebo plošných prvků, viz Obr. 36. V žádné části konstrukce nevznikají ohybové momenty, podpory se uvažují jako kloubové. Pokud na linii nějaké části konstrukce vzniká záporná osová síla, je na této linii uvažována nulová osová síla.

### **4.2.2 Vytváření sítě prvků**

K diskretizaci plochy je v této práci použito dělení na trojúhelníkové prvky, konkrétně se využívá Delaunayho triangulace s definovanou maximální velikostí

přepon [81]. Jinými způsoby vytváření sítě prvků se tato práce nezabývá. O jiných způsobech dělení a zahušťování sítě se lze dočíst v [25; 13].



Obr. 36: Diskretizace lanoplachtové konstrukce

### 4.3 Výpočetní prvky

Pro analýzu druhé procesní fáze – řešení SO – jsou použity dva způsoby aproximace lana. V prvním případě je lano aproximováno jako prutový prvek přenášející pouze tah. Ve druhém případě je lano popsáno jako dokonale ohebný prvek (vycházející z článku [27]). Způsob aproximace pomocí lanového prvku je velmi přesný a navíc nenavýšuje počet neznámých posunutí. Nevýhodou však je delší výpočetní čas, protože k vyřešení vnitřní síly v elementu je potřeba iteračního postupu. V obou případech je uvažován homogenní lineárně pružný materiál s konstantní průřezovou plochou po celé délce prvku a bez vlivu změny teploty.

Vzhledem k malým tloušťkám textilních membrán, je pro diskretizaci membránových ploch při analýze statické odezvy použit izoparametrický trojúhelníkový prvek s konstantním napětím po prvku a s tuhostí pouze v rovině prvku. Tento prvek byl původně vyvinut Argyrisem [81], v této práci se však bude pracovat s formulací podle Barnese [23] a Toppinga [25].

Pro popis plochy u FF procesu je použit izoparametrický plošný trojúhelníkový prvek s konstantním rovnoměrným normálovým napětím po prvku s vyloučeným vlivem smyku.

#### 4.3.1 Prutový prvek pro statickou odezvu

##### **Předpoklady**

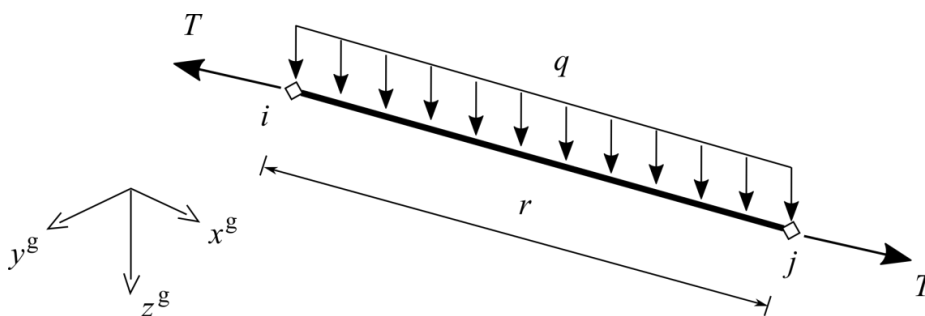
Základním předpokladem pro teorii prutového prvku je, že se lano chová jako tažený prut, přenášející pouze osově síly. Pokud nad prutem působí spojitě rovnoměrné zatížení (například vlastní tíha), uvažuje se, že se do každého

koncového bodu přenáší polovina výsledného svislého zatížení. Průvės lana se v tomto případě zanedbává. S protažením prutu od změny teploty se neuvažuje.

Způsob aproximace jedním prutovým prvem je vhodný pouze pro velmi napnutá lana anebo pro předběžný výpočet, mající za cíl přibližné určení tvaru konstrukce nebo přibližnou velikost sil v prutech bez nároků na větší přesnost. U případu lanoplachtových konstrukcí, kdy jsou prutové a plachtové prvky v interakci, je nutné na úsek jednoho lana použít více prutových prvků, jinak může dojít ke značnému zkreslení výsledků.

### **Analýza elementu**

O analýze prutu se lze dočíst např. v [34; 27]. Značení vychází z článku [27]. Základní geometrie prutového elementu propojující koncové body  $i$  a  $j$  je patrná z Obr. 37:



Obr. 37: Schéma prutového prvku [27]

kde:

- $r$  vyjadřuje novou (aktuální) délku prvku,
- $q$  rovnoměrné spojité svislé zatížení,
- $T$  osovou sílu v prutu.

Vnitřní síla  $T$  má v tomto případě význam normálové síly a dá se spočítat ze známé rovnice (4.5):

$$T = \frac{EA}{s_0}(r - s_0) \quad (4.5)$$

kde:

- $E$  značí Youngův modul pružnosti,

- $A$  je průřezová plocha,
- $s_0$  představuje volnou (výrobní) délku nezatíženého prvku.

Výslednice  $Q$  od spojitého svislého rovnoměrného zatížení působící nad elementem se vypočítá jako:

$$Q = qs_0 \tag{4.6}$$

### **Výpočet výrobní délky při zadané předpínací síle**

Ve spoustě inženýrských úloh s lanovými nebo lanoplachtovými konstrukcemi se v případě analýzy odezvy na zatížení počítá s počátečním přepětím lana. V čase  $t = 0$  tak budeme znát vzdálenost koncových bodů lana  $r^{t=0}$  a sílu v laně  $T^{t=0}$ . Jedním z možných způsobů jak toto předpětí do výpočtu zahrnout je zpětné dopočtení výrobní délky  $s_0$ .

Do výrazu (4.5) dosadíme  $r^{t=0}$  a  $T^{t=0}$  a vyjádříme  $s_0$ :

$$s_0 = \frac{EA r^{t=0}}{EA + T^{t=0}} \tag{4.7}$$

### **4.3.2 Prutový prvek pro form-finding**

Pro aproximaci lan při FF procesu se používá jednoduchý prvek, ve kterém se definuje přímkové propojení dvou koncových bodů  $i$  a  $j$  a je definována požadovaná předpínací osová síla  $T$  v prvku. Tato síla je během celého FF procesu konstantní.

Alternativou k tomuto postupu může být zadání konstantní horizontální předpínací síly nebo konstantní hustoty síly (síla na metr) [13].

### **4.3.3 Lanový prvek pro statickou odezvu**

Pro podrobnější popis chování lana při analýze SO lze použít dokonale ohebný pružný parabolicky zakřivený lanový element. Rozbory v této kapitole vycházejí z práce Kadlčáka, jenž v publikaci [55] sepsal mnoho důležitých a podnětných informací. Další analýzy, související především s implementací prvku do geometricky nelineárních výpočetních postupů, vycházejí z článků [82] a [27].

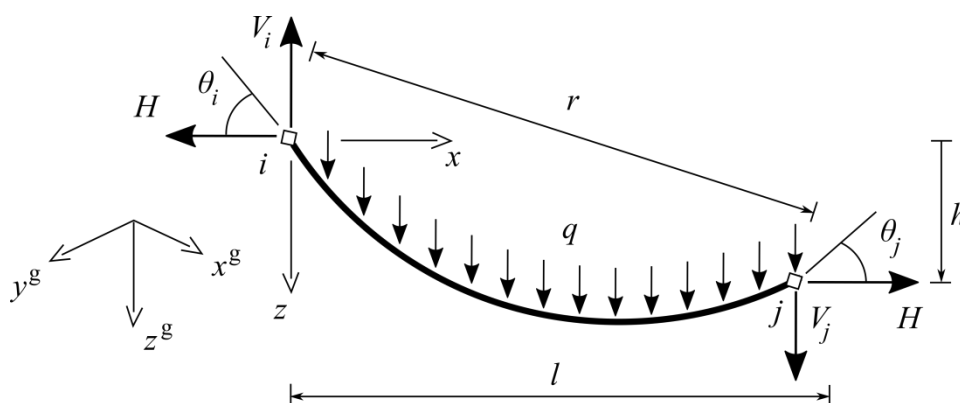
## Předpoklady

Základními předpoklady analýzy dokonale ohebného pružného lana jsou:

- lano je dokonale ohebné a nemá žádnou ohybovou tuhost,
- zatížení  $q$  je svislé rovnoměrně rozdělené po parabolicky zakřiveném laně a vždy se skládá alespoň z vlastní tíhy lana,
- lano je uvažováno jako lineárně pružné s malými deformacemi uvnitř prvku,
- lano je homogenní, s konstantním průřezem po celé délce,
- při pružném přetvoření se body osy lana posouvají pouze ve svislém směru,
- je přípustný pouze malý průvěs lana – maximálně desetina rozpětí.

## Značení veličin

Geometrie jednoho lanového elementu propojujícího koncové body  $i$  a  $j$  je patrná z Obr. 38:



Obr. 38: Schéma lanového prvku [27]

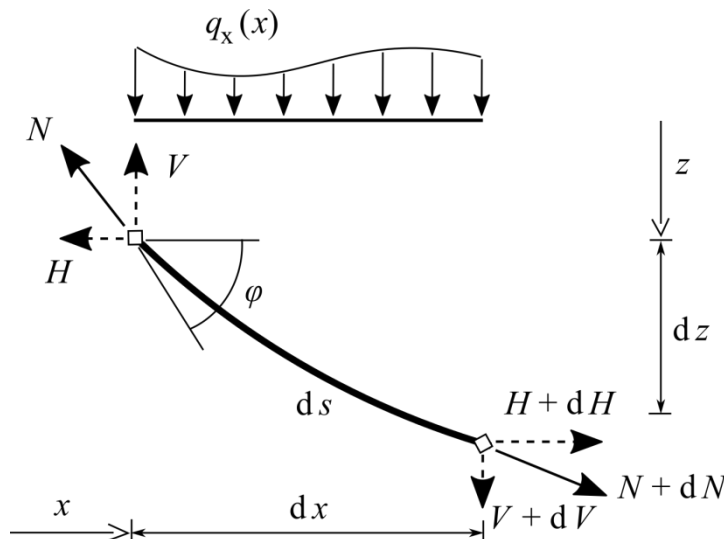
kde:

- $r$  vyjadřuje novou (aktuální) vzdálenost mezi koncovými body,
- $H$  je vodorovná síla v elementu (je po celém prvku konstantní),
- $q$  svislé rovnoměrné zatížení,
- $l$  vodorovná vzdálenost koncových bodů,
- $h$  svislý souřadnicový rozdíl mezi body  $i$  a  $j$  (může být i záporný),
- $V_i$  je posouvající síla v uzlu  $i$ ,
- $V_j$  je posouvající síla v uzlu  $j$ .

Lokální pravoúhlý souřadný systém  $x - z$  lanového elementu je umístěn do počátečního bodu  $i$ , přičemž lokální osa  $z$  je rovnoběžná s globální osou  $z^g$  a lokální osa  $x$  je rovnoběžná s projekcí lana do globální roviny  $x^g - y^g$ .

### Průvšová křivka

K odvození tvaru funkce průvšové křivky  $z(x)$  využijeme statické podmínky rovnováhy na vyjmutém diferenciálním lanovém elementu  $ds$ , jenž je zobrazen na Obr. 39. Pro dokonale ohebné lano platí podmínka nulového momentu v kterémkoliv bodě na konstrukci. Obecné svislé spojité zatížení  $q_x(x)$  se prozatím uvažuje tak, že působí pouze nad horizontálním průmětem lana (takto rozložené zatížení je možné uvažovat pouze u lan s maximálním průvšem rovným desetina rozpětí) a je funkcí souřadnice  $x$ .



Obr. 39: Diferenciální lanový element [55]

Podmínky rovnováhy ve vodorovném a svislém směru lze zapsat jako:

$$\rightarrow: -H + (H + dH) = 0 \Rightarrow dH = 0 \quad (4.8)$$

$$\uparrow: V - (V + dV) - q_x(x)dx = 0 \Rightarrow q_x(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (4.9)$$

Z rovnice (4.9) vyplývá, že:

$$H = \text{konst.} \quad (4.10)$$

U dokonale ohebného lana platí, že osová síla  $N$  má v libovolném místě  $x$  směr tečny k průvšové křivce. Platí tedy vztah:

$$\frac{dz}{dx} = \tan\varphi = \frac{V}{H} \quad (4.11)$$

Derivací vztahu (4.11) podle  $x$  a dosazením do rovnice (4.9) získáme:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dV}{dx} = -\frac{q_x(x)}{H} \quad (4.12)$$

Dále budeme analyzovat případy zatížení, kdy  $q_x(x)$  je konstantní po celé délce lana. Tímto předpokladem a další integrací získáme:

$$z''(x) = -\frac{q_x}{H} \quad (4.13)$$

$$z'(x) = -\frac{q_x}{H}x + c_1 \quad (4.14)$$

$$z(x) = -\frac{q_x}{H} \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 \quad (4.15)$$

Konstanty  $c_1$  a  $c_2$  určíme z okrajových podmínek. Pro lanový element z Obr. 39 platí:

$$z(x=0) = 0 \quad (4.16)$$

$$z(x=l) = h \quad (4.17)$$

a tedy dostaneme:

$$c_2 = 0 \quad (4.18)$$

$$c_1 = \frac{h}{l} + \frac{q_x l}{2H} \quad (4.19)$$

Zpětným dosazením výrazu (4.19) do vztahu (4.15) a následnou úpravou získáme hledanou funkci průvšou křivky lana, kterou lze nalézt např. v [27]:



$$z(x) = \frac{q_x}{2H} x(l-x) + \frac{h}{l} x \quad (4.20)$$

Při známých souřadnicích obou koncových bodů lana (a tedy při známém  $l$  a  $h$ ) a při daném zatížení  $q_x$  je k určení tvaru průvřesové křivky nutné znát ještě jednu doplňkovou podmínku – buď velikost síly  $H$ , anebo hodnotu souřadnic  $x_m$ ,  $z_m$  v bodě  $m$ .

Pro úplnost vyjádřeme ještě funkci pro směrnici tečny k průvřesové křivce lana, kterou získám buď derivací funkce (4.20) nebo dosazením vztahu (4.19) do rovnice (4.14):

$$z'(x) = \frac{q_x}{2H} (l - 2x) + \frac{h}{l} \quad (4.21)$$

### ***Průvřesová křivka pro zatížení vztahené na výrobní délku lana***

Velmi často se v inženýrských výpočtech pracuje s rovnoměrným zatížením vztaheným na výrobní délku lana (typicky vlastní tíha lana). Takovéto zatížení značíme jako  $q$  (viz Obr. 38) a délku nezatíženého lana (výrobní délku lana) označíme  $s_0$ . Pro přepočet zatížení z průmětu na délku pak platí vztah:

$$q_x = \frac{Q}{l} \quad (4.22)$$

kde  $Q = qs_0$ .

Funkce průvřesu křivky lana pak má tvar:

$$z(x) = \frac{Q}{2Hl} x(l-x) + \frac{h}{l} x \quad (4.23)$$

a její derivace:

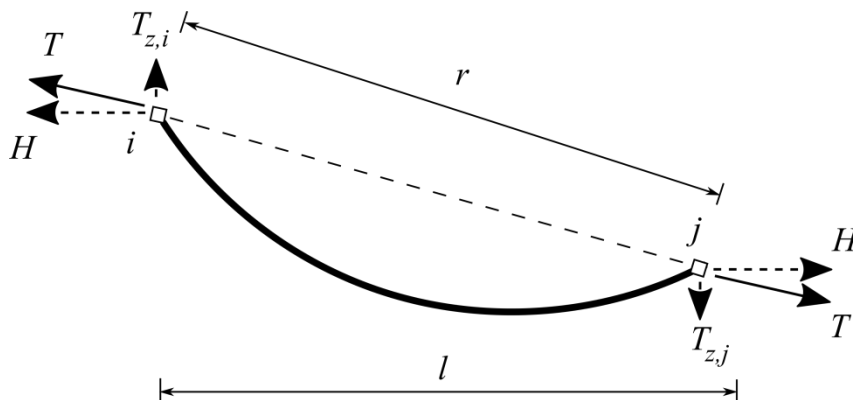
$$z'(x) = \frac{Q}{2Hl} (l - 2x) + \frac{h}{l} \quad (4.24)$$

### Nominální tahová síla

Vzhledem k další analýze a k použití lanového prvku především u metody dynamické relaxace je vhodné namísto vodorovné síly  $H$  zavést do výpočtu tzv. nominální tahovou sílu  $T$ , která je také konstantní pro celý prvek. Její význam je patrný z Obr. 40 a pro přepočítání mezi silami  $H$  a  $T$  platí vztah:

$$T = H \frac{r}{l} \quad (4.25)$$

V další části analýzy prvku se pracuje převážně se silou  $T$ , v případě potřeby je vždy možné se přes vzorec (4.25) vrátit k vyjádření přes sílu  $H$ .



Obr. 40: Nominální tahová síla  $T$  v lanovém elementu [27]

### Výpočet napnuté délky lana

Délka napnutého lana  $s$  je dána vztahem pro délku křivky:

$$s = \int_s ds = \int_0^l \sqrt{dx^2 + dz^2} = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \int_0^l \sqrt{1 + z'^2} dx \quad (4.26)$$

Integrál z rovnice (4.26) lze řešit přibližně, přesně a numericky.

Přibližné řešení odvozuje Kadlčák [55] s použitím binomické věty a s uvažováním prvních dvou členů.

Přesné řešení lze nalézt např. v [27] a jedna z možností jak toto řešení zapsat vypadá následovně:

$$s = \frac{l^2 T}{2rQ} \left[ \ln \left( -\frac{2h}{l} + \frac{rQ}{lT} + \frac{\sqrt{b}}{lT} \right) - \ln \left( -\frac{2h}{l} - \frac{rQ}{lT} + \frac{\sqrt{a}}{lT} \right) \right] + \frac{h}{4rQ} (\sqrt{a} - \sqrt{b}) + \frac{1}{8T} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad (4.27)$$

kde  $a = Q^2 r^2 + 4h^2 T^2 + 4l^2 T^2 + 4hrQT$  a  $b = Q^2 r^2 + 4h^2 T^2 + 4l^2 T^2 - 4hrQT$

S dostatečnou přesností lze řešit rovnici (4.26) i numerickou integrací, např. známou lichoběžníkovou metodou [82].

### **Pružné přetvoření lana**

Pružné prodloužení  $\Delta s_E$  způsobené tahem v lanu se vzhledem k předpokládaným malým deformacím prvku může uvažovat jako:

$$\Delta s_E = \frac{Tl}{EA r} \int_0^l \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx = \frac{Tl}{EA r} \int_0^l (1 + z'^2) dx \quad (4.28)$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti materiálu lana a  $A$  je průřezová plocha. Integrál z rovnice (4.28) lze opět řešit přibližně, přesně anebo numericky [27].

Přibližné řešení odvozuje Kadlčák v publikaci [55].

Přesné řešení získáme dosazením výrazu (4.24) do (4.28) a jeho integrací. Jeden ze způsobů jak toto řešení zapsat vypadá následovně:

$$\Delta s_E = \frac{T}{EA} \left( \frac{l^2}{r} + \frac{h^2}{r} + \frac{Q^2 r}{12T^2} \right) \quad (4.29)$$

S dostatečnou přesností lze řešit rovnici (4.28) taktéž i numerickou integrací, přičemž lze například opět použít známou lichoběžníkovou metodou [82].

**Rovnice spojitosti**

S využitím funkce spojitosti:

$$s = s_0 + \Delta s_E \tag{4.30}$$

a její následnou úpravou získáme rovnici:

$$g(T, r, l, h, q, s_0, EA) = s - s_0 - \Delta s_E = 0 \tag{4.31}$$

Tato rovnice (4.31) tvoří stěžejní část výpočtu lanového prvku, protože upravuje vztahy mezi vnitřní silou  $T$ , vnějším zatížením prvku  $q$ , geometrickými parametry  $r$ ,  $l$  a  $h$ , materiálovými a průřezovými parametry prvku  $E$  a  $A$  a délkou nezatíženého prvku  $s_0$ .

Při známých souřadnicích koncových bodů lana, při známém vnějším zatížení, při známých materiálových a průřezových parametrech a při známé délce nezatíženého prvku  $s_0$  pak v rovnici (4.31) je jedinou neznámou nominální tahová síla  $T$  v laně. Z výrazu (4.31) ji však nelze explicitně vyjádřit a tak je potřeba ji iteračně dohledat, například metodu půlení intervalu [27].

**4.3.4 Trojúhelníkový prvek pro statickou odezvu**

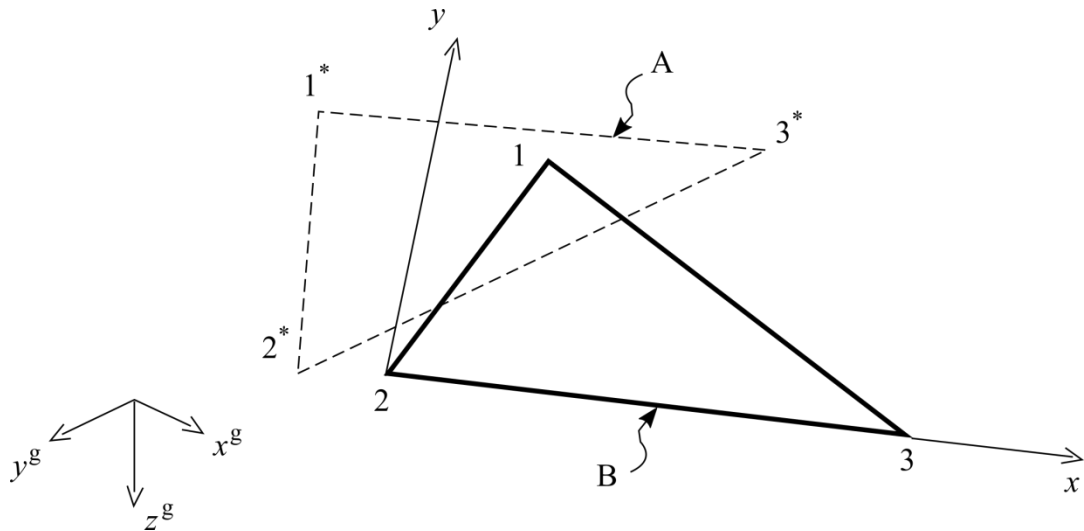
Pro popis chování textilní membrány při analýze SO je použit trojúhelníkový prvek zohledňující pouze membránové účinky – tj. prvek je pouze ve stavu rovinné napjatosti / deformace. Prvek tak nemá žádnou ohybovou tuhost a nepřenáší žádné ohybové momenty.

Trojúhelníkový prvek použitý v této práci vychází z analýz Argyrise [81], Barnese [23] a Toppinga s Iványiem [25] a staví na těchto předpokladech:

- napětí působí pouze v rovině prvku,
- působící napětí má v celé ploše prvku konstantní hodnotu,
- membrána je z homogenního, lineárně pružného materiálu s konstantní tloušťkou po celé ploše prvku,
- materiál membrány se chová izotropně.

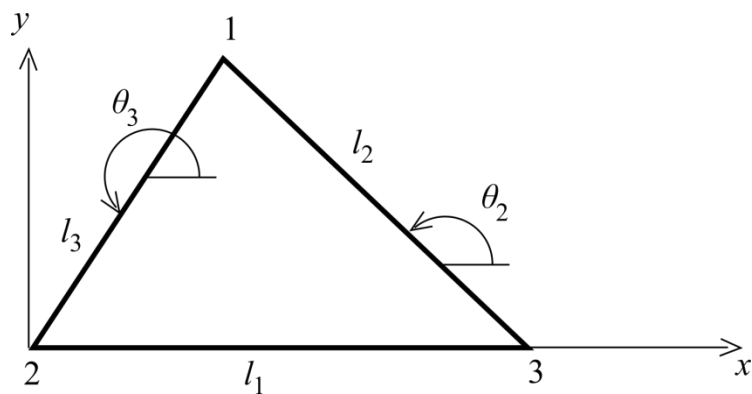
### Lokální souřadný systém

Prvek se může v globálním 3D souřadném systému, určeného osami  $x^g, y^g, z^g$  nacházet v libovolné pozici. Vlivem působení napětí se element dostane z původně nezátíženého stavu  $A$  do napjatého stavu  $B$ , viz Obr. 41.



Obr. 41: Trojúhelníkový prvek v 3D prostoru [23]

Při rozboru vlastností jednotlivého prvku se pracuje s jeho lokálním souřadným systémem  $x, y$ , který leží v rovině prvku, přičemž je výhodné osu  $x$  ztotožnit s hranou číslo 1 a počátek lokálního souřadného systému umístit do vrcholu 2. Značení vrcholů a stran trojúhelníkového elementu odpovídá běžným konvencím – tedy číslo hrany je odvozené od protilehlého vrcholu, viz Obr. 42.



Obr. 42: Geometrie trojúhelníkového prvku [25]

### Hranové síly

Při analýze SO membránových konstrukcí na zatížení s pomocí numerické metody dynamické relaxace je nutné znát vztah mezi protažením hran trojúhelníka a jeho hranovými silami.

Výchozí parametry, které vstupují do výpočtu, jsou:

- $l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3}$  délky hran nezatíženého trojúhelníka,
- $l_1, l_2, l_3$  délky hran trojúhelníka v napjatosti,
- $t$  tloušťka membrány,
- $E$  Youngův modul pružnosti materiálu membrány,
- $\nu$  Poissonův součinitel příčné kontrakce materiálu membrány.

Změna délky hrany číslo 1  $\Delta l_1$  je dána rovnicí:

$$\Delta l_1 = l_1 - l_{0,1} \quad (4.32)$$

a obdobně lze napsat rovnice pro hrany číslo 2 a 3. Pro výpočet deformace hran  $\varepsilon$  pak platí vztah:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/l_{0,1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_{0,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_{0,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

což lze maticově zapsat jako:

$$\{\varepsilon_i\} = [\mathbf{L}_0]^{-1} \{\Delta \mathbf{L}_i\} \quad (4.34)$$

V podmínkách rovinné deformace a s respektováním směrů  $x, y$  zvoleného lokálního systému platí pro deformaci  $\varepsilon_i$  hrany  $i$  vztah [25]:

$$\varepsilon_i = \cos^2 \theta_i \varepsilon_x + \sin^2 \theta_i \varepsilon_y + \cos \theta_i \sin \theta_i \gamma_{xy} \quad (4.35)$$

což lze zapsat také jako:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

kde

$$\begin{aligned} a_i &= \cos^2 \theta_i \\ b_i &= \sin^2 \theta_i \\ c_i &= \cos \theta_i \sin \theta_i \end{aligned} \quad (4.37)$$

a  $\theta_i$  je sklon hrany  $i$  vzhledem k lokální ose  $x$ , viz také Obr. 42. Pro další výpočet je však nutné znát opačný vztah, tedy znát předpis pro deformace ve směrech  $x, y$  v závislosti na hranových silách  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Toho docílíme tak, že provedeme inverzi vztahu (4.36), a tedy platí:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\text{DET}} \begin{bmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ a_3 c_2 - a_2 c_3 & a_1 c_3 - a_3 c_1 & a_2 c_1 - a_1 c_2 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 & a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

kde

$$\text{DET} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (4.39)$$

Uvažujeme-li však prvek, který má hranu číslo 1 stejně orientovanou jako lokální osu  $x$ , pak platí, že:

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= 0 \\ \cos \theta_1 &= 1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

a tedy:

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos^2 \theta_1 = 1 \\ b_1 &= \sin^2 \theta_1 = 0 \\ c_1 &= \cos \theta_1 \sin \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Vztah (4.41) tak lze dále zjednodušit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Q} & \frac{0}{Q} & \frac{0}{Q} \\ \frac{a_3 c_2 - a_2 c_3}{Q} & \frac{c_3}{Q} & \frac{-c_2}{Q} \\ \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{Q} & \frac{-b_3}{Q} & \frac{b_2}{Q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

nebo-li:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}\} = [\mathbf{G}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} \quad (4.43)$$

kde

$$Q = b_2c_3 - b_3c_2 \quad (4.44)$$

Pro prvek ve stavu rovinné napjatosti, kde mj.  $\sigma_z = 0$ , a s vlastnostmi izotropního materiálu lze fyzikální vazbu mezi složkami napětí a deformace zapsat jako:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

nebo-li:

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{xy}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}\} \quad (4.46)$$

Elastické konstanty  $d_{ij}$  z rovnice (4.45) jsou:

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \\ d_{12} &= d_{21} = \nu d_{11} \\ d_{33} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Využitím principu invariantu virtuálních prací dostáváme důležitý vztah pro výpočet hranových napětí  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  ze složek napětí v systému  $x, y$  [25]:

$$\{\boldsymbol{\sigma}_i\} = [\mathbf{G}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_{xy}\} \quad (4.48)$$

nebo-li po složkách:



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_3 c_2 - a_2 c_3}{Q} & \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{Q} \\ 0 & \frac{c_3}{Q} & \frac{-b_3}{Q} \\ 0 & \frac{-c_2}{Q} & \frac{b_2}{Q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

Hranové napětí pak převedeme na hranové síly dle vzorce [25]:

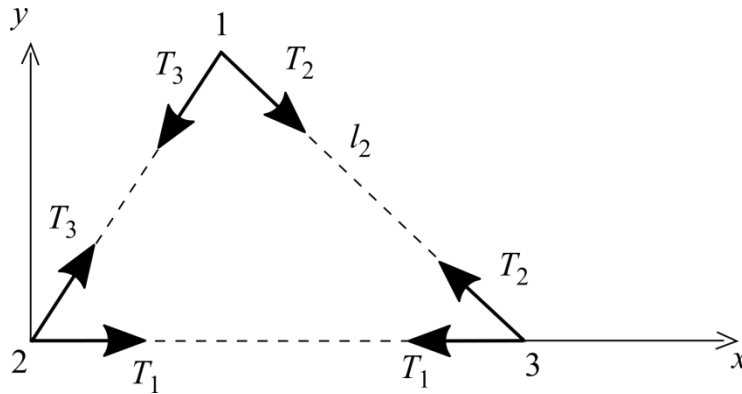
$$\{\mathbf{T}_i\} = At[\mathbf{L}]^{-1}\{\boldsymbol{\sigma}_i\} \quad (4.50)$$

kde  $A$  je plocha prvku (ve stavu napjatosti) a  $[\mathbf{L}]^{-1}$  je diagonální matice převrácených délek hran trojúhelníka sestavená podobně jako  $[\mathbf{L}_0]^{-1}$  jen s tím rozdílem, že obsahuje délky hran  $l_1, l_2, l_3$  trojúhelníka v napjatosti.

Finální vztah mezi hranovými silami  $T_1, T_2, T_3$  a protažením hran trojúhelníka  $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$  lze s využitím rovnic (4.50), (4.48), (4.46), (4.43) a (4.34) kompaktně v maticovém tvaru zapsat jako:

$$\{\mathbf{T}_i\} = At[\mathbf{L}]^{-1}[\mathbf{G}]^T[\mathbf{D}][\mathbf{G}][\mathbf{L}_0]^{-1}\{\Delta\mathbf{L}_i\} \quad (4.51)$$

Význam hranových sil je patrný z Obr. 43.

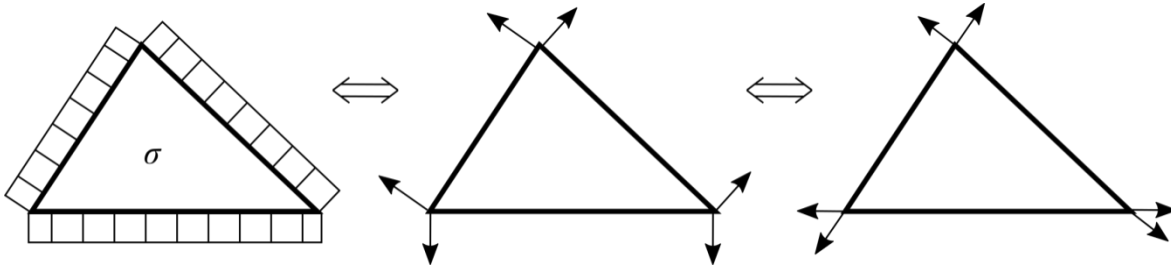


Obr. 43: Hranové síly u trojúhelníkového prvku [13]

### 4.3.5 Trojúhelníkový prvek pro form-finding

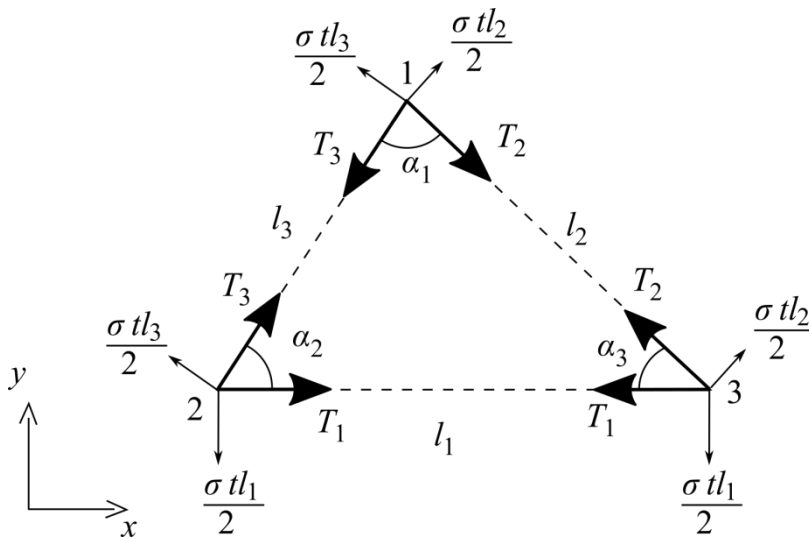
Tím nejjednodušším 2D elementem, který může být použit pro popis chování rovnoměrně předepnuté membrány v procesu FF, je trojúhelníkový prvek, u něhož se předpokládá, že napětí  $\sigma$  je konstantní v celém prvku a smykové napětí  $\tau_{xy}$  je rovno nule.

Při výpočtu FF procesu s pomocí metody dynamické relaxace je nutné znát v trojúhelníkovém prvku vztah mezi působícím napětím  $\sigma$  a hranovými silami  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ . Princip odvození tohoto vztahu vychází z přepočtení rovnoměrného napětí na okrajové síly a následně, s využitím podmínek rovnováhy, přepočtení těchto sil na síly hranové, viz Obr. 44 [25].



Obr. 44: Princip konverze napětí do hranových sil [25]

Pro podrobné odvození je názornější Obr. 45, který zachycuje popis geometrie trojúhelníkové prvku, kde  $\sigma$  je předepsané rovnoměrné působící napětí (v  $\text{N/m}^2$ ),  $t$  je tloušťka membrány  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  jsou délky hran trojúhelníka a  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  jsou vnitřní úhly v trojúhelníku.



Obr. 45: Trojúhelníkový prvek pro form-finding [25]

Sestavením silové podmínky rovnováhy v bodě 3 ve směru hrany 1 dostaneme:

$$T_1 + T_2 \cos \alpha_3 = \sigma t \frac{l_2}{2} \sin \alpha_3 \quad (4.52)$$

Sestavením silové podmínky rovnováhy v témže bodě (tedy v bodě 3), ale v kolmém směru k hraně  $l_1$  dostaneme:

$$T_2 \sin \alpha_3 = \frac{\sigma t}{2} (l_1 - \cos \alpha_3) \quad (4.53)$$

Eliminací proměnné  $T_2$  z rovnic (4.52) a (4.53) a s využitím známého vztahu

$$\sin^2 \alpha_3 + \cos^2 \alpha_3 = 1 \quad (4.54)$$

dostaneme:

$$T_1 \sin \alpha_3 = \frac{\sigma t}{2} (l_2 - l_1 \cos \alpha_3) \quad (4.55)$$

Poznamenejme, že platí:

$$l_2 - l_1 \cos \alpha_3 = -l_3 \cos(180^\circ - \alpha_1) \quad (4.56)$$

a

$$\frac{l_1}{\sin \alpha_1} = \frac{l_3}{\sin \alpha_3} \quad (4.57)$$

Využitím vztahů (4.57), (4.56) a dosazením do (4.55) získáme:

$$T_1 = \frac{\sigma t}{2} l_1 \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} \quad (4.58)$$

nebo-li:

$$T_1 = \frac{\sigma t}{2} l_1 \cot \alpha_1 \quad (4.59)$$

Z důvodu symetrie lze vztah (4.59) zobecnit pro všechny hranové síly  $T_i$ . Platí tak obecný vztah, že

$$T_i = \frac{\sigma t}{2} l_i \cot \alpha_i \quad (4.60)$$

Vztah (4.60) obsahující kotangentu úhlu  $\alpha_i$  je výhodnější, než jeho alternativa s tangentou úhlu  $\alpha_i$  a to z toho důvodu, že pro  $\alpha_i$  rovné  $90^\circ$  by u vztahu s tangentou nebyly hranové síly vůbec definovány, což by vedlo ke kolapsu výpočtu. Naproti tomu vztah s kotangentou úhlu  $\alpha_i$  nemá síly definovány pro  $\alpha_i$  rovné  $0^\circ$ , takový trojúhelníkový prvek však není možný.

Ke vztahu (4.60) lze dojít i jinou cestou. Použijeme-li trojúhelníkový prvek z předchozí kapitoly a uvažujeme-li, že  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  a zároveň  $\tau_{xy} = 0$  pak vektor  $\sigma_{xy}$  má tvar:

$$\{\sigma_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

Vztah (4.51) tak lze v tomto případě zapsat jako:

$$\{\mathbf{T}_i\} = At[\mathbf{L}]^{-1}[\mathbf{G}]^T\{\sigma_{xy}\} \quad (4.62)$$

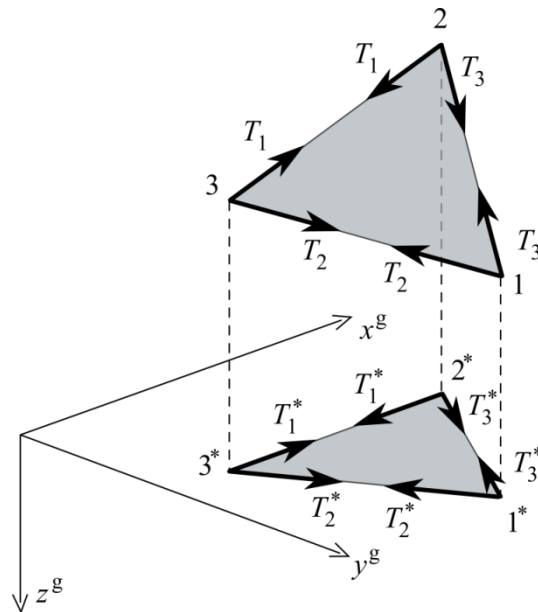
Dosazením (4.61) do (4.62) a postupným upravováním bychom se opět dostali až ke vztahu (4.60).

### ***Napětí ve vodorovné rovině***

Nutno poznamenat, že předchozí úvahy a odvození se týkaly případů, kdy je definováno napětí v rovině daného trojúhelníkového elementu. Pro FF proces jsou však běžnější takové případy, kdy je předepsáno počáteční napětí v rámci globální vodorovné roviny. Pro přepočítání hranových sil se pak dá využít vzorce:

$$\{\mathbf{T}_i\} = \frac{l_i}{l_i^*} \{\mathbf{T}_i^*\} \quad (4.63)$$

kde hvězdička značí hodnoty získané z trojúhelníkového elementu promítnutého do půdorysné roviny, viz Obr. 46 [25].



Obr. 46: Projekce hranových sil do pŕodorysné roviny

#### 4.4 Pŕehled metod

Numerická řešení prvních dvou procesních fází návrhu membránových konstrukcí (FF a SO) představují z matematického hlediska geometricky nelineární úlohu. Každá fáze má však svá specifika a staví na trochu jiných předpokladech, proto se pro každou fázi používají jiné řešící postupy, avšak existují i postupy, které jsou použitelné pro řešení obou fází návrhu (např. metoda dynamické relaxace).

V průběhu let bylo vyvinuto hned několik řešících algoritmů, výčet těch nevýznamnějších je uveden v následujících podkapitolách. A vzhledem k faktu, že metodu dynamické relaxace lze snadno použít pro obě zmíněné fáze analýzy, a také proto, že představuje alternativu k postupům využívajícím matice tuhosti, bude v této práci popsána podrobněji.

##### 4.4.1 Grid method

Historicky první metodou pro řešení FF procesu membránových konstrukcí, a také tou zároveň nejjednodušší, byla „grid method“ [2; 3; 4], (česky známá jako „metoda sítí“), která celou úlohu linearizuje a vychází z předpokladu vyrovnaných vodorovných sil. S pomocí mřížkového dělení se pak dopočítává výšková poloha jednotlivých styčníků.

#### 4.4.2 Stuttgart-direct approach

Ve stuttgartském institutu lehkých konstrukcí byla dále vyvinuta metoda „Stuttgart-direct approach“ [5; 6] pojmenovaná dle svého místa vzniku. Jejím autorem je Linkwitz a metoda při uvážení několika předpokladů převádí celý FF proces na řešení jediné soustavy nelineárních rovnic. Tuto soustavu pak lze řešit například Newton-Raphsonovy iterací. Na druhé straně nemá metoda vyřešena všechna úskalí spojená s nastavením počátečních délek lan (hran membrán) a její praktické uplatnění je obtížné.

#### 4.4.3 Force density method

Obtíže „Stuttgart-direct approach“ metody se staly odrazovým můstkem pro vznik velmi sofistikované „force density method“ (česky známé jako „metoda hustoty síly“), jejímž autorem je Schek [7], a která opět za předpokladu určitých zjednodušení převádí celou úlohu na řešení soustavy lineárních rovnic. Metoda se ve své době (90. léta 20. století) i přes jisté nedostatky stala velmi populární a hlavně v oblasti návrhu lanových sítí se dočkala řady vylepšení a praktického uplatnění. Volným rozšířením pro řešení konstrukcí s plošnými prvky se pak stala „surface stress density method“ („metoda hustoty napětí“) vyvinutá Maurinem a Motrem [8].

#### 4.4.4 Transient stiffness method

I metody vycházející z maticových tuhostí nalézají ve FF procesu své uplatnění. Jednou z variant je „transient stiffness method“ („metoda přechodných tuhostí“) popsána v pracích Argyrise [9; 10], Sieva [11; 3] a dalších [12]. I přes jistá pozitiva si metoda zachovává jednu z hlavních nevýhod postupů pracujících s maticemi tuhosti, a sice časovou výpočetní náročnost při invertování matice tuhosti, což se, zvláště u úloh s velkým počtem neznámých, negativně projevuje na spotřebovaném výpočetním čase [13].

#### 4.4.5 Update reference strategy

V současné době je velmi dobře rozšířena „update reference strategy“ (metoda aktualizovaných souřadnic), která byla poprvé popsána Bletzingerem a Rammem [14]. Jedná se o iterační metodu, která využívá metody konečných prvků a která sestavuje matici tuhosti konstrukce v každém aktuálním iteračním kroku. Odstranění případné singularity se zajišťuje některými speciálními postupy. Právě

pro své konečně-prvkové pojetí problému je metoda využívána řadou současných komerčních programů, které jsou vystavěny na metodě konečných prvků a pro něž implementace této metody představuje nejsnazší cestu vývoje softwaru v procesu FF.

#### **4.4.6 Gradientní force density method**

Metoda se využívá v SO procesu a vychází z principu virtuálních posunutí, konkrétně z principu minima potenciální energie. Základní rovnice tvoří uzlové (styčnickové) podmínky rovnováhy. Základními neznámými jsou uzlové posuny v nepodepřených uzlech. Hledá se takový stav neznámých uzlových posunutí, aby všechny vnitřní síly vstupující do uzlu byly v rovnováze s vnějšími uzlovými silami [27].

Výhodou metody je její snadná algoritmizace a poměrně velká numerická stabilita. Zároveň se během výpočtu velmi dobře kontroluje průběh iterace. Nevýhodou je, že v každém iteračním kroku se musí invertovat matice tuhosti, což je hlavně u velkých soustav časově náročné. Další nevýhodou je nutnost definování maximálního kroku, který je pro každou konstrukci a způsob zatěžování různý.

Podrobnější článek pojednávající o gradientní metodě využité k analýze lanových soustav byl uveřejněn v časopise Stavební obzor [29].

#### **4.4.7 Newton-Rapsonova metoda**

Newton-Rapsonovu metodu lze použít při procesu SO. Při hledání odezvy se využívá řízeného přírůstku zatížení. Metodu je mj. implementovaná i v programu RFEM [79; 80].

#### **4.4.8 Picardova metoda**

Taktéž Picardovu metodu založenou na postupných aproximacích lze použít při procesu SO u lanoplachtových konstrukcí. I tuto metodu využívá ve svém řešiči komerční program RFEM [79; 80].

#### **4.4.9 Dynamická relaxace**

Zvláštní kategorii mezi využívanými metodami zaujímá „dynamic relaxation method“ (metoda dynamické relaxace). Metoda je založena na principu fiktivní dynamické analýzy volného kmitání. Při volném tlumeném kmitání (uvažuje se

viskózní útlum) totiž konstrukce dospěje do stavu statické rovnováhy, a jelikož statická rovnováha není závislá na velikosti setrvačných sil a ani na velikosti útlumu konstrukce, mohou být parametry hmotnosti a součinitele útlumu s výhodou fiktivní a tím i volně nastavitelné.

Hlavní přínos relaxační metody tkví ve skutečnosti, že k řešení úlohy není vůbec potřeba sestavovat matice tuhosti a tím i její inverzi, což je zvláště výhodné u rozsáhlých úloh s mnoha stupni volnosti.

### **Historie**

Metoda se vyvinula z metody konečných diferencí a její počátky lze vysledovat k průkopníkovi v oblasti relaxačních metod Southwellovi [15]. O další vývoj se zasadili zejména Otter [16], Day [17], Buchholdt [18; 19; 20], Barnes [21; 22; 23; 24], Topping a Iványi [25], Lewisová [13; 26], Kmeť [83] nebo Rezaiee-Pajand [84]

Speciální odnoží je pak metoda dynamické relaxace s kinetickým útlumem vyvinutá Cundallem [85], kdy součinitel útlumu je volen nulový a konvergence metody pak funguje na principu disipace kinetické energie, což je zcela jiný přístup než v případě viskózního útlumu.

### **Princip**

Metoda dynamické relaxace (dále jen DR) vychází z Newtonova druhého pohybového zákona a slouží ke zjištění statického rovnovážného stavu skutečné konstrukce na základě umělé dynamické analýzy s fiktivními veličinami (hmotnost, útlum, časový krok).

Metoda se s výhodou používá pro řešení nelineárních úloh – patří mezi tzv. explicitní metody, které pracují pouze s residuálními silami (pod pojmem reziduální síla se myslí rozdíl mezi vnějšími a vnitřními silami) v jednotlivých styčnicích, a tak není potřeba sestavovat globální matici tuhosti. Obecnou nevýhodou tohoto výpočetního postupu je podmíněná stabilita, která závisí na volbě fiktivních veličin.

Základní neznámé tvoří uzlové rychlosti, z nichž se vypočítávají uzlové posuny. Rychlost řešení je závislá na vhodném rozložení hmotnosti konstrukce do jednotlivých uzlů.



### Základní rovnice

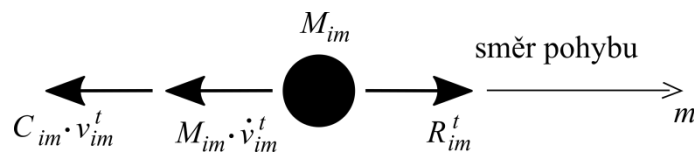
Druhý pohybový zákon se projeví v rovnici, která popisuje vztah mezi reziduálními a fiktivními setrvačnými silami.

Základní pohybovou rovnicí pro fiktivní pohyb styčnicku  $i$ , ve směru  $m$  (kde  $m$  odpovídá osám  $x$ ,  $y$  a  $z$ ), viz Obr. 47, lze v čase  $t$  zapsat následovně [25]:

$$R_{im}^t = M_{im}\dot{v}_{im}^t + C_{im}v_{im}^t \quad (4.64)$$

kde:

- $R_{im}^t$  je reziduální (tj. nevyrovnaná) síla v uzlu  $i$ , směru  $m$  a v čase  $t$ ,
- $M_{im}$  je fiktivní hmotnost v uzlu  $i$  a směru  $m$ ,
- $C_{im}$  je fiktivní součinitel útlumu konstrukce v uzlu  $i$  a směru  $m$ ,
- $v_{im}^t$  je rychlost uzlu  $i$ , ve směru  $m$  a čase  $t$ ,
- $\dot{v}_{im}^t$  je zrychlení uzlu  $i$ , ve směru  $m$  a čase  $t$ .



Obr. 47: Schéma veličin pro základní pohybovou rovnici ve směru  $m$

### Řešení rovnic

Pro fiktivní pohyb konstrukce se provede diskretizace časové osy s časovým krokem  $\Delta t$ , který bude v této práci uvažován jako konstantní během celého výpočtu. Během kroku  $\Delta t$ , se předpokládá lineární změna rychlosti. Zrychlení během kroku  $\Delta t$  se tak uvažuje konstantní.

Z toho důvodu je pak možné zapsat průměrnou rychlost během kroku pro uzel  $i$ , směr  $m$  v čase  $t$  jako:

$$v_{im}^t = \left[ v_{im}^{(t+\Delta t/2)} + v_{im}^{(t-\Delta t/2)} \right] / 2 \quad (4.65)$$

Zrychlení je uvažováno jako konstantní během celého kroku  $\Delta t$ , a tedy:

$$\dot{v}_{im}^t = \left[ v_{im}^{(t+\Delta t/2)} - v_{im}^{(t-\Delta t/2)} \right] / \Delta t \quad (4.66)$$

Dosažením výrazů pro  $v$  a  $\dot{v}$  z rovnic (4.65) a (4.66) do rovnice (4.64) dostaneme:

$$R_{im}^t = \frac{M_{im}}{\Delta t} \left[ v_{im}^{(t+\Delta t/2)} - v_{im}^{(t-\Delta t/2)} \right] + \frac{C_{im}}{2} \left[ v_{im}^{(t+\Delta t/2)} + v_{im}^{(t-\Delta t/2)} \right] \quad (4.67)$$

Upravíme rovnici (4.67) a vyjádříme rychlost v novém časovém kroku  $(t + \Delta t/2)$  v závislosti na rychlosti v předchozím časovém kroku  $(t - \Delta t/2)$ .

$$v_{im}^{(t+\Delta t/2)} = v_{im}^{(t-\Delta t/2)} \left[ \frac{\frac{M_{im}}{\Delta t} - \frac{C_{im}}{2}}{\frac{M_{im}}{\Delta t} + \frac{C_{im}}{2}} \right] + R_{im}^t \left[ \frac{1}{\frac{M_{im}}{\Delta t} + \frac{C_{im}}{2}} \right] \quad (4.68)$$

s využitím rovnice (4.68) získáme vztah pro posunutí uzlu  $i$  ve směru  $x$ :

$$\Delta x_i^{(t+\Delta t)} = \Delta t \cdot v_{im}^{(t+\Delta t/2)} \quad (4.69)$$

Novou souřadnici  $x$  v čase  $(t + \Delta t/2)$  tak můžeme vyjádřit jako:

$$x_i^{(t+\Delta t)} = x_i^t + \Delta t \cdot v_{im}^{(t+\Delta t/2)} \quad (4.70)$$

Rovnice (4.69) a (4.70) lze obdobně aplikovat i pro souřadnice  $y$  a  $z$  [25].

Z nerovnováhy mezi vnějšími a vnitřními silami v uzlu  $i$  můžeme v čase  $t$  určit reziduální  $R_{im}^t$  síly ( $m = x, y, z$ ) následovně:

$$R_{ix}^t = P_{ix} - \sum_k T_k^t \frac{x_i^t - x_j^t}{r_k^t} \quad (4.71)$$

$$R_{iy}^t = P_{iy} - \sum_k T_k^t \frac{y_i^t - y_j^t}{r_k^t} \quad (4.72)$$

$$R_{iz}^t = P_{iz} + \sum_k \frac{Q_k}{2} - \sum_k T_k^t \frac{z_i^t - z_j^t}{r_k^t} \quad (4.73)$$

kde:

- $k$  je index linii připojené k uzlu  $i$ ,
- $j$  je druhý bod linie  $k$ ,
- $P_{ix}$  je vnější bodové zatížení působící v uzlu  $i$  a směru  $x$ ,
- $P_{iy}$  je vnější bodové zatížení působící v uzlu  $i$  a směru  $y$ ,
- $P_{iz}$  je vnější bodové zatížení působící v uzlu  $i$  a směru  $z$ ,
- $Q_k$  je výslednice rovnoměrného zatížení, působící na linii  $k$ ,
- $x^t, y^t, z^t$  jsou aktuální souřadnice uzlu  $i$ ,
- $r_k^t$  je vzdálenost koncových bodů  $i$  a  $j$  linie  $k$  v čase  $t$ ,
- $T_k^t$  je vnitřní tahová síla na linii  $k$  v čase  $t$ .

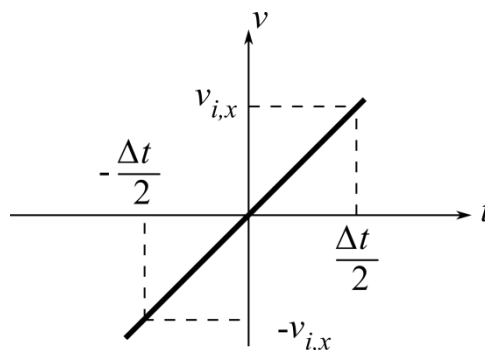
Vnitřní síla  $T_k^t$  se určí jako součet dílčích tahových sil ze všech prvků a hran membrán nacházející se na linii  $k$ . Pokud vyjde síla  $T_k^t$  záporná, pak se, vzhledem k chybějící normálové tuhosti v tlaku, uvažuje jako rovna nule. Dílčí tahové síly jsou buď definovány přímo v zadání, anebo se pro prutový prvek u procesu SO určí z rovnice (4.5), pro lanový prvek z rovnice (4.31), pro hranu membránového prvku u FF procesu z rovnice (4.51) nebo pro hranu membránového prvku u řešení SO z rovnice (4.60).

### Počáteční podmínka

Aby mohl výpočet začít, je potřeba ještě určit rychlost v čase  $\Delta t/2$ . S využitím počátečních podmínek pro čas  $t = 0$ , kdy  $v_{im}^{t=0} = 0$ , získáme vztah:

$$v_{im}^{(\Delta t/2)} = -v_{im}^{(-\Delta t/2)} \quad (4.74)$$

Význam vztahu z rovnice (4.74) je dobře patrný z Obr. 48



Obr. 48: Odvození počáteční rychlosti [25]

Dále, přepíšeme rovnici (4.68) pro čas  $\Delta t/2$ .

$$v_{im}^{(\Delta t/2)} \left[ \frac{M_{im}}{\Delta t} + \frac{C_{im}}{2} \right] = v_{im}^{(-\Delta t/2)} \left[ \frac{M_{im}}{\Delta t} - \frac{C_{im}}{2} \right] + R_{im}^{t=0} \quad (4.75)$$

Do rovnice (4.75) dosadíme vztah (4.74) a úpravou získáme explicitní vyjádření výrazu pro rychlost v čase  $\Delta t/2$  [25]:

$$v_{im}^{(\Delta t/2)} = \frac{\Delta t}{2M_{im}} R_{im}^{t=0} \quad (4.76)$$

### **Kinetická energie**

Známe-li rychlosti styčníků, lze v každém časovém kroku ( $t + \Delta t/2$ ) spočítat kinetickou energii celého systému  $U_{\text{kin}}^{(t+\Delta t/2)} = 0$ , a to následovně:

$$U_{\text{kin}}^{(t+\Delta t/2)} = \sum_i^n \sum_m^p M_{im} \left[ v_{im}^{(t+\Delta t/2)} \right]^2 \quad (4.77)$$

Kde  $n$  je počet uzlů a  $p$  je dimenze prostoru (3D nebo 2D) [25].

### **Styčnickové podepření**

Vliv podpor se v metodě DR může zavést pomocí různých podmínek, např.:

- Rovnice pro podepřené uzly nesestavujeme (použito v této práci).
- Reziduálním silám v podepřených uzlech  $i$  a směrech  $m$  nastavíme striktně v každém časovém kroku hodnotu nula (což je velmi podobné předcházející podmínce).
- V každém podepřeném uzlu  $i$  a směru  $m$  můžeme předepsat mnohonásobně větší fiktivní hmotnost než v ostatních uzlech [25].

### **Řídící podmínka**

Abychom mohli celý výpočet zalgoritmovat, je potřeba zvolit řídicí podmínku, podle které poznáme, že se již nacházíme v blízkosti rovnovážného stavu. V zásadě máme dvě možnosti jak zvolit řídicí podmínku. Iterační proces může být ukončen pokud:

- Absolutní hodnoty reziduálních sil v uzlech  $i$  a směrech  $m$  jsou menší než předem definovaná limitní hodnota  $R_{lim}$ .
- Kinetická energie celé soustavy klesla pod předem definovanou limitní hodnotu  $U_{lim}$ .

Při volbě limitních hodnot  $U_{lim}$  a  $R_{lim}$  je potřeba vzít v úvahu i zaokrouhlovací chyby výpočetních programů, a tak není vhodné nastavit limitní hodnoty příliš přísně, proces by pak nemusel správně dokonvergovat [25].

### **Iterační algoritmus**

Na základě předchozí analýzy můžeme zformulovat iterační algoritmus, s pomocí kterého získáme rovnovážnou polohu zadané lanoplachtové konstrukce a to jak pro FF proces tak i pro proces SO.

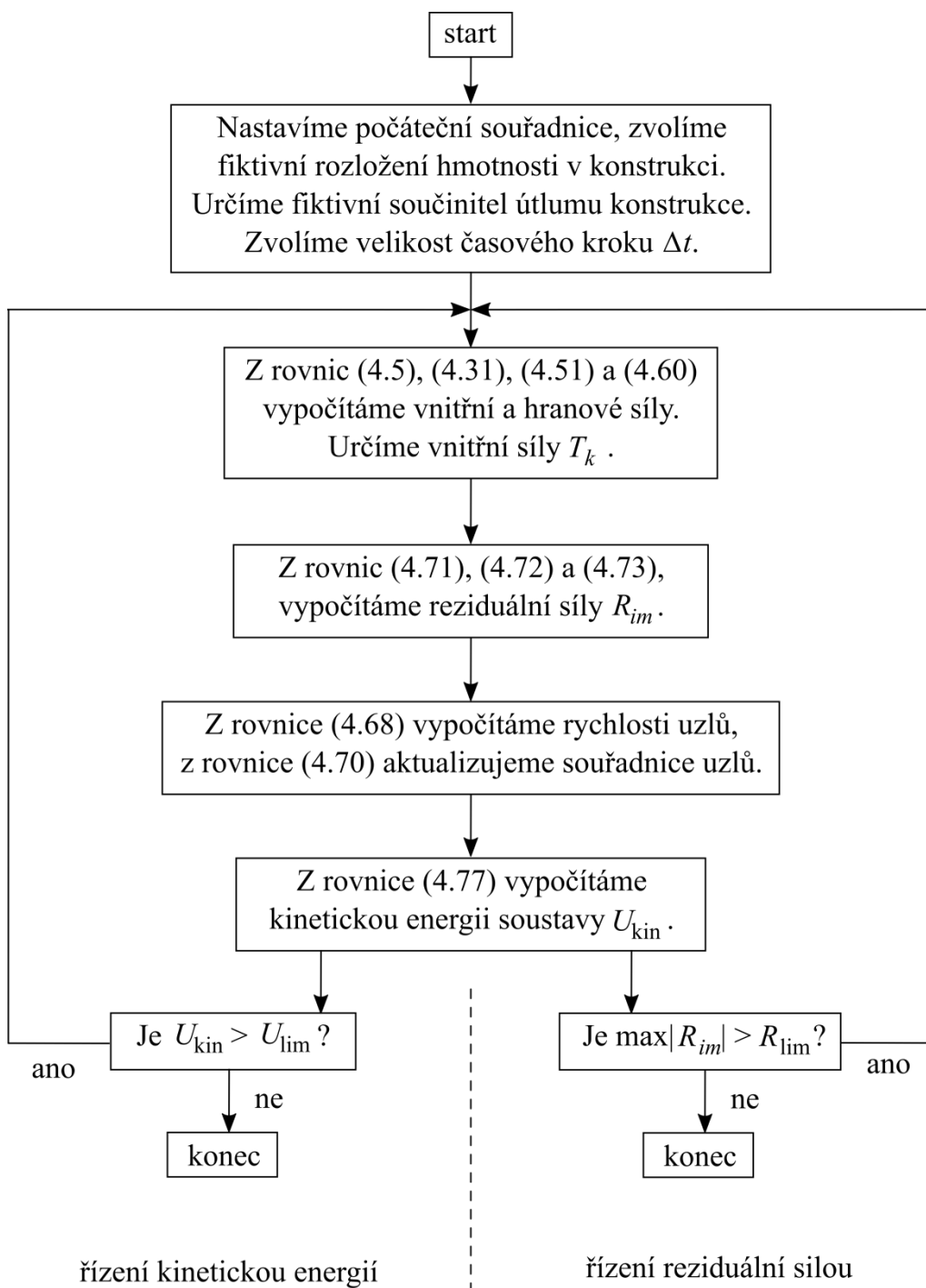
Na začátku úlohy známe topologii konstrukce (tvar konstrukce, propojení prutů, umístění podpor a kloubů), parametry lan, membrán, vnější zatížení a případné předpětí v jednotlivých prvcích. Určíme počáteční souřadnice nepodepřených uzlů a nastavíme hodnoty fiktivní hmotnosti a součinitele útlumu pro jednotlivé uzly. Zvolíme délku časového kroku  $\Delta t$ . Kinetická energie je na začátku procesu nulová.

Pokud známe souřadnice uzlů, můžeme pro každý prvek vypočítat z rovnic (4.5), (4.31) vnitřní síly a z rovnic (4.51), (4.60) hranové síly. Na základě těchto dílčích vnitřních sil jednotlivých prvků můžeme pro každou linii  $k$  určit vnitřní tahové síly  $T_k$ .

Poté z rovnic (4.71), (4.72) a (4.73) vypočítáme reziduální síly v jednotlivých uzlech.

V těchto uzlech také z rovnice (4.68) vypočítáme aktuální rychlosti a také s využitím rovnice (4.70) aktualizujeme souřadnice uzlů. Aktuální kinetickou energii celé soustavy následně dopočítáme z rovnice (4.77). Na základě řídicí podmínky pak určíme, zda máme z nově vypočtených souřadnic opět počítat vnitřní síly a vrátit se tak v iteračním cyklu o několik kroků zpět, anebo zda naposledy spočtené souřadnice lze prohlásit za rovnovážný stav a tedy i za hledané řešení.

Celé základní iterační schéma algoritmu metody DR je přehledně zobrazeno na Obr. 49.



Obr. 49: Základní iterační schéma metody dynamické relaxace

## 5 ASPEKTY DYNAMICKÉ RELAXACE

### 5.1 Stabilita metody

#### 5.1.1 Princip

Na stabilitu metody dynamické relaxace (dále jen DR) má vliv:

- rozložení fiktivní hmotnosti konstrukce do uzlů,
- použitý fiktivní součinitel útlumu,
- volba časového kroku  $\Delta t$ .

Podle [25] bývá často délka časového kroku fixní a ostatní parametry výpočtu se ladí, dokud není dosažena požadovaná přesnost a stabilita výpočtu. Pokud je délka časového kroku velká nebo hmotnost příliš malá, může dojít k nestabilitě iteračního procesu a analýza konstrukce nespěje do rovnovážné polohy. Tento nedostatek se dá obecně odstranit zmenšením délky časového kroku nebo zvýšením fiktivní hmotnosti. Stabilitu metody může taktéž ovlivnit použitý součinitel útlumu.

Barnes [23] ukázal, že pro zvolený časový krok  $\Delta t$  je výhodné nastavit hmotnost v uzlech úměrně tuhosti a odvodil následující vztah:

$$M_{im} = \frac{\Delta t^2}{2} S_{im} \tag{5.1}$$

kde  $S_{im}$  je uzlová tuhost styčnicku  $i$  ve směru osy  $m$ .

Pro geometricky nelineární systémy je vhodné v rámci zachování stability počítat tuhost pro celý styčnick dohromady. Vztah (5.1) tak lze upravit na vztah

$$M_i = \frac{\Delta t^2}{2} S_i \tag{5.2}$$

kde  $S_i$  je uzlová tuhost styčnicku  $i$ . K výpočtu uzlové tuhosti  $S_i$  existuje několik přístupů, z nichž některé jsou popsány v [25; 13]. V zásadě je lze rozdělit do dvou skupin – ty které vyžadují počáteční sestavení matice tuhosti a ty které využívají výpočtu liniové tuhosti a obejdou se bez sestavování matice tuhosti. Tato práce se zaměřuje výhradně na DR s využitím liniových tuhostí.

### 5.1.2 Určení liniové tuhosti

Tuhost  $S_k$  každé linie  $k$ , jdoucího do uzlu  $i$ , je dle [25; 13] výsledkem součtu dvou složek – elastické tuhosti  $S_k^E$  a geometrické tuhosti  $S_k^G$ :

$$S_k = S_k^E + S_k^G \quad (5.3)$$

Elastická tuhost  $S_k^E$  má dominantní význam u řešení statické odezvy a určí se na základě součtu dílčích elastických tuhostí z jednotlivých prvků a hran membrán jdoucích do linie  $k$ . Geometrická  $S_k^G$  má naproti tomu dominantní význam u form-finding procesu a pro linii  $k$  se určí jako:

$$S_k^G = \frac{T_k}{r_k} \quad (5.4)$$

kde  $T_k$  je vnitřní síla v linii  $k$  a  $r_k$  je aktuální délka této linie [25].

#### **Elastická tuhost prutového a lanového prvku**

Elastická tuhost prutového a lanového prvku potřebná pro určení elastické tuhosti linie  $k$  v rovnici (5.3) se vypočte ze vztahu [25; 13]:

$$S_k^E = \frac{EA}{s_0} \quad (5.5)$$

kde:

- $E$  značí Youngův modul pružnosti,
- $A$  je průřezová plocha,
- $s_0$  představuje volnou (výrobní) délku nezatíženého prvku.

#### **Elastická tuhost hrany membránového prvku**

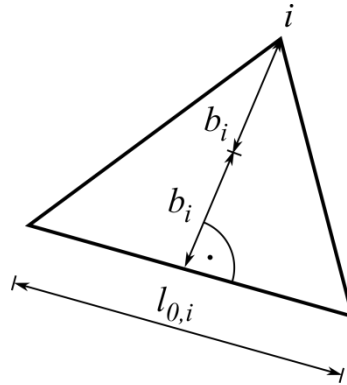
Elastická tuhost  $i$ -hrany membránového prvku potřebná pro určení elastické tuhosti linie  $k$  v rovnici (5.3) se vypočte ze vztahu [25]:

$$S_i^E = \frac{3}{2} \left( \frac{Etb}{l_{0,i}} \right) \quad (5.6)$$



kde parametry, které vstupují do výpočtu, jsou:

- $l_{0,i}$  délky hran  $i$  nezatíženého trojúhelníkového prvku,
- $t$  tloušťka membrány,
- $E$  Youngův modul pružnosti materiálu membrány,
- $b_i$  polovina výšky  $i$  uvnitř trojúhelníkového prvku, viz Obr. 50.



Obr. 50: Význam veličin v trojúhelníkovém prvku

### 5.1.3 Určení uzlových tuhostí

Pro přechod od liniových tuhostí z rovnice (5.3) k uzlovým tuhostem potřebných v rovnici (5.2) lze opět využít několika rozličných přístupů [25]. V této práci jsou podrobněji popsány (a v kapitole 6 i testovány) následující dva postupy, kdy uzlová tuhost je:

- součtem liniové tuhosti všech linií jdoucích do styčnicku  $i$ ,
- součtem absolutních hodnot liniových tuhostí z jednotlivých směrů pro styčnick  $i$ .

#### **Součet liniové tuhosti všech prvků**

V rámci tohoto postupu se uzlová tuhost získá ze vztahu:

$$S_i = \sum_k S_k \tag{5.7}$$

kde  $S_k$  jsou liniové tuhosti linií  $k$  jdoucích do uzlů  $i$ . Liniové tuhosti se vypočtou z rovnice (5.3).

### Součet absolutních hodnot liniových tuhostí z jednotlivých směrů

Úvaha vychází z podoby Gerschgoringova teorému a pro podmínky DR byla rozebrána Underwoodem [86] a Papadrakakisem [87]. V rámci tohoto postupu se uzlová tuhost získá ze vztahu:

$$S_i = |S_{ix}| + |S_{iy}| + |S_{iz}| \quad (5.8)$$

přičemž dílčí uzlové tuhosti  $S_{ix}$ ,  $S_{iy}$  a  $S_{iz}$  pro jednotlivé směry  $x$ ,  $y$ , a  $z$  se vypočtou dle vzorce:

$$S_{im} = \sum_k S_{k,m} \quad (5.9)$$

kde  $S_{k,m}$  představuje tuhost  $S_k$  z rovnice (5.3) rozloženou do směru  $m$ . Suma v rovnici (5.9) značí součet přes všechny linie  $k$  jdoucích do uzlu  $i$ .

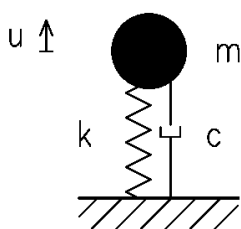
## 5.2 Viskózní útlum

### 5.2.1 Princip kritického tlumení

Volbou fiktivního součinitele útlumu z rovnice (4.64) lze částečně ovlivnit stabilitu metody DR, ale hlavně lze vhodnou volbou významně ovlivnit rychlost její konvergence.

### Jednoduchý systém

Demonstrace vybraných základních pojmů týkajících se volby součinitele útlumu bude provedena na jednoduchém lineárním systému s jedním stupněm volnosti, který si lze představit např. jako systém z Obr. 51 [49].



Obr. 51: Schéma lineárního systému s jedním stupněm volnosti [49]

U takto jednoduché soustavy je možné při daných parametrech  $m$  (hmotnost) a  $k$  (tuhost) stanovit tzv. kritický útlum konstrukce  $c_{\text{crit}}$ , pro který platí známý vzorec:

$$c_{\text{crit}} = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_0 \quad (5.10)$$

kde  $\omega_0$  je vlastní kruhová frekvence netlumeného systému.

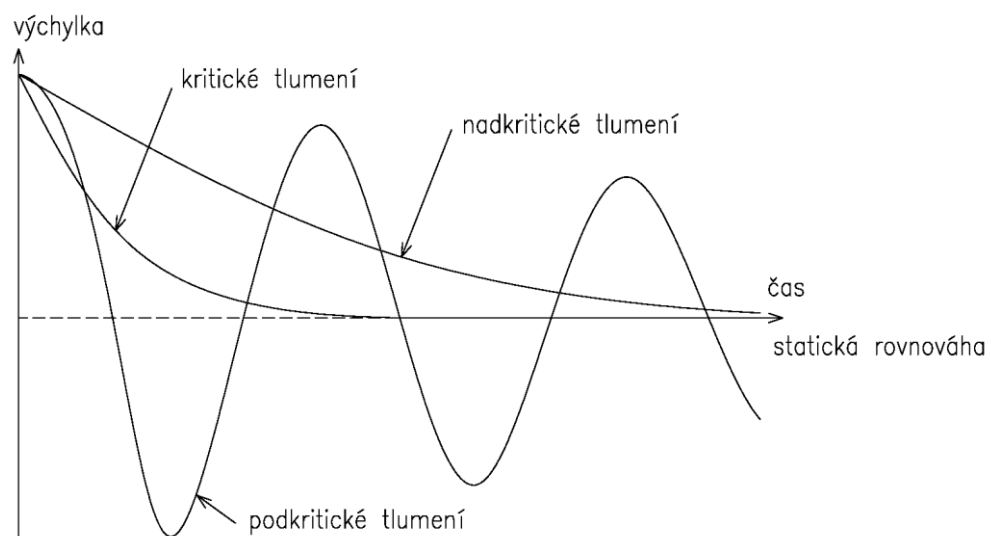
Pro hodnotu součinitele útlumu  $c$  mohou v zásadě nastat tři případy chování:

- podkritický útlum:  $c < c_{\text{crit}}$ ,
- kritický útlum:  $c = c_{\text{crit}}$ ,
- nadkritický útlum:  $c > c_{\text{crit}}$ .

Rozdílné chování systému pro všechny tři výše uvedené případy je znázorněno na Obr. 52 a mj. z něj vyplývají dvě zajímavé skutečnosti:

- Všechny tři případy spějí v nekonečném čase ke statickému řešení.
- Nejrychleji se ke statickému řešení přibližuje případ kritického tlumení.

A právě skutečnosti, že v případě kritického tlumení se přibližuje dynamický systém ke statickému řešení nejrychleji, se využívá u metody DR s viskózním útlumem. Nastavením fiktivního součinitele útlumu z rovnice (4.64) blízkého kritickému útlumu konstrukce lze nalézt požadovaný stav statické rovnováhy za co nejmenší počet iteračních kroků.



Obr. 52: Průběh výchylky v závislosti na případu tlumení [13]

**Rozšíření pro dynamickou relaxaci**

Při aplikaci kritického útlumu u metody DR však narazíme hned na několik problémů.

Metoda DR je navržena zejména pro řešení rozsáhlejších soustav s mnohonásobně větším počtem stupňů volnosti, než jak tomu bylo v případě předchozího systému s jedním stupněm volnosti. Pro přesné určení kritického útlumu systému s více stupni volnosti by tak bylo nutné využít některou ze sofistikovaných metod, např. Caugheyho útlum [88], což by vedlo k výpočtu plné matice útlumu. Avšak pro efektivní využití metody DR se musí rovnice (4.64) rozpadnout na jednotlivé nezávislé rovnice, a tak i matice fiktivního útlumu konstrukce musí být nutně diagonální, což je v příkrém rozporu s předchozí větou. Pro metodu DR tak vlastně přesné určení kritického tlumení ani není žádoucí. Avšak platí-li alespoň, že matice útlumu je úměrná matici hmotnosti, což lze v podmínkách metody DR zapsat jako:

$$C_i = \alpha M_i \tag{5.11}$$

kde  $\alpha$  je násobek styčnickové hmotnosti, pak lze si vybrat jednu frekvenci, kterou lze tlumit. S využitím rovnic (5.10) a (5.11) pak platí:

$$C_i = 4\pi f M_i \tag{5.12}$$

Na základě několika rozborů [13; 49] se jeví jako výhodné, použít pro tlumení první vlastní frekvenci ( $f_{0,1}$ ). Úpravou rovnice (5.12) tak získáme základní podmínku (5.13) pro určení součinitele kritického tlumení metod DR:

$$C_i = 4\pi f_{0,1} M_i \tag{5.13}$$

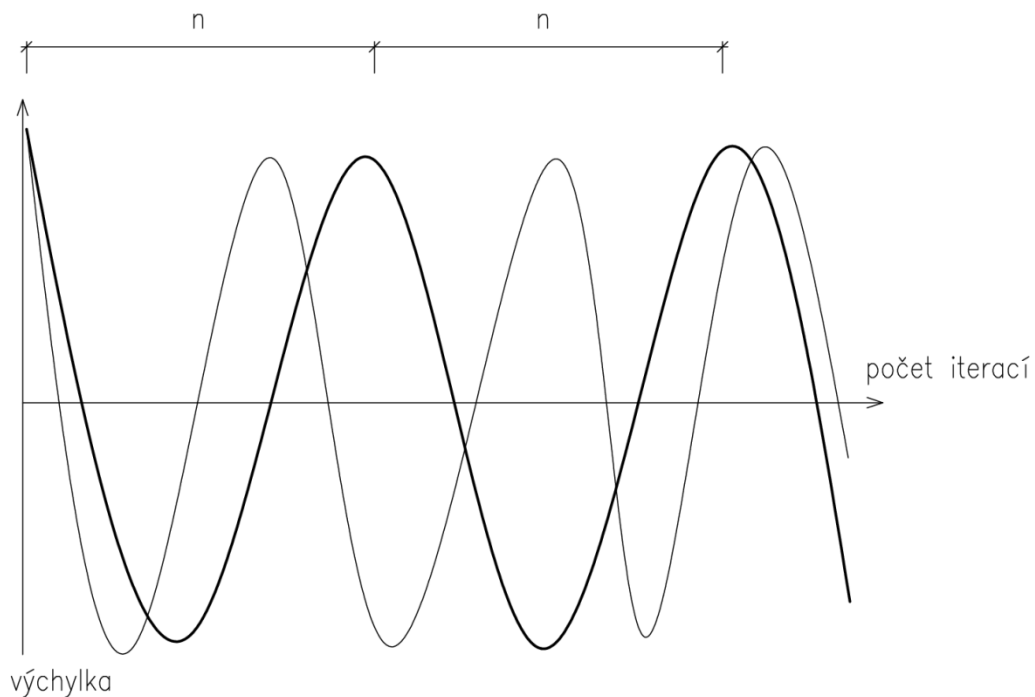
DR se ale využívá hlavně pro řešení geometricky nelineárních systémů, u kterých se tuhost mění s časem. Navíc u některých silně nelineárních systémů nemusí být pro určitá propojení styčnicků tuhost vůbec předepsána (např. u výpadku tuhosti tažených prutů v tlaku). První vlastní frekvenci tak nelze určit přímo a musí být na začátku výpočtu odhadnuta.

### 5.2.2 Odhad první vlastní frekvence dle nejdelší doby kmitu

K odhadu první vlastní frekvence lze použít předvýpočet, při kterém se konstrukce nachází v netlumeném módu kmitání (kdy  $C_i = 0$ ). Metoda odhadu první vlastní frekvence je založena na sledování výchylek jednotlivých stupňů volnosti. U stupně volnosti s nejdelší dobou kmitu se provede odhad nejnižší první vlastní frekvence dle následujícího vzorce [13]:

$$f_{0,1} \approx \frac{1}{n \cdot \Delta t} \quad (5.14)$$

kde  $n$  je počet proběhnutých iterací pro nejdelší kmit, viz Obr. 53. Pro plné zautomatizování numerického řešiče se nejdelší doba kmitu vyhodnocuje na základě změny znaménka přírůstku sledovaných souřadnic.

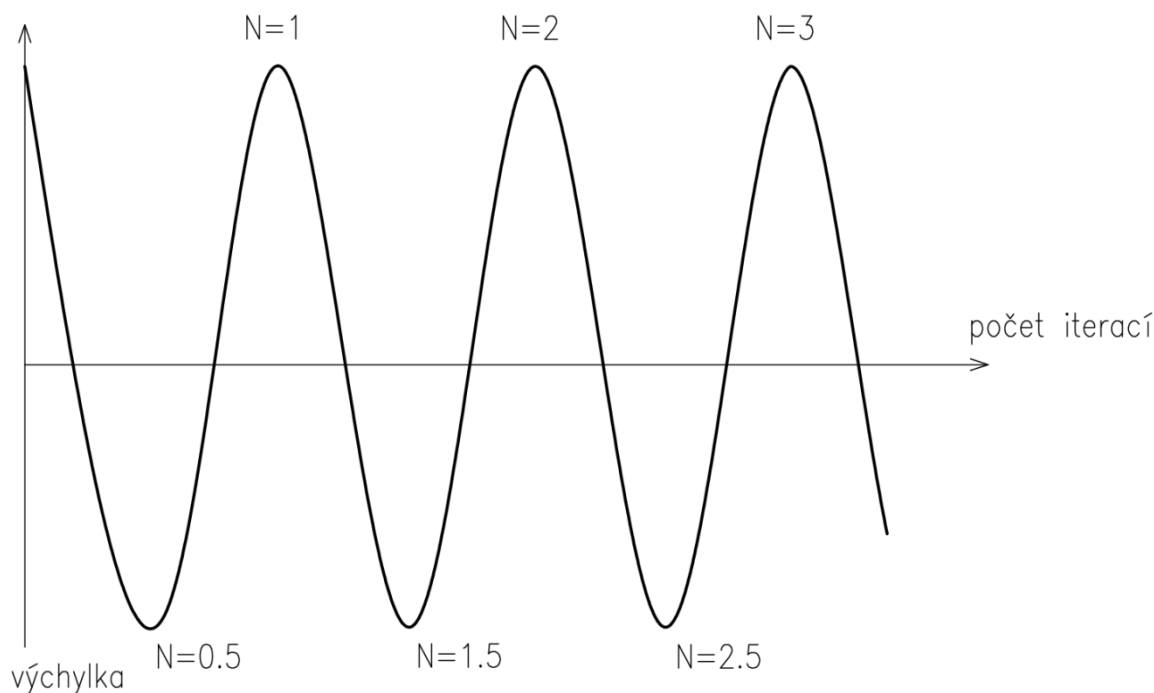


Obr. 53: Odhad první vlastní frekvence dle nejdelší doby kmitu stupně volnosti [13]

Pro přesnější odhad první vlastní frekvence je možné u souřadnice s nejdelší dobou kmitu sledovat delší historii kmitání s větším počtem oscilací. Úpravou vzorce (5.14) pak dostaneme:

$$f_{0,1} \approx \frac{N}{n \cdot \Delta t} \quad (5.15)$$

kde  $N$  je počet proběhnutých oscilací, viz Obr. 54.



Obr. 54: Odhad první vlastní frekvence – počet oscilací

### 5.2.3 Odhad první vlastní frekvence dle průběhu kinetické energie

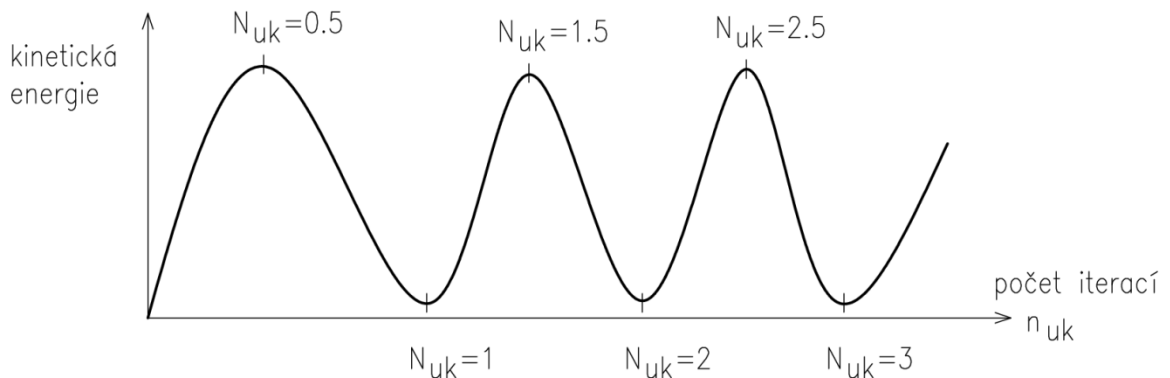
Jistá časová náročnost předchozího postupu, kdy je nutné v rámci předvýpočtu absolvovat mnoho iteračních kroků potřebných k obsáhnutí největší doby kmitu, vedla autora této práce k úvaze o určení první vlastní frekvence pouze na základě sledování kinetické energie. Ze změny tendence průběhu kinetické energie se totiž s jistou dávkou nejistoty dá taktéž odhadnout první vlastní frekvence.

Nově navržený autorský postup tak taktéž pracuje s předvýpočtem v netlumeném módu systému, ale zaznamenává se pouze historie průběhu kinetické energie, nikoliv výchylky všech souřadnic. Z počtu proběhnutých oscilací kinetické energie se pak dá odhadnout nejdelší doba kmitu dle následujícího vzorce:

$$f_{0,1} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{N_{uk}}{n_{uk} \cdot \Delta t} \right) \quad (5.16)$$

kde  $n_{uk}$  je počet proběhnutých iterací a  $N_{uk}$  je počet proběhnutých oscilací kinetické energie, viz Obr. 55.

Dá se očekávat, že počet proběhnutých iterací se v rámci předvýpočtu sníží minimálně o polovinu a nebude nutné sledovat výchytky všech souřadnic. Zhoršený odhad nejnižší frekvence však může vést k celkovému zvýšenému počtu iterací. To, zda je tento autorský postup výhodnější, než předchozí postup založený na odhadu frekvence z nejdelší doby kmitu, se určí na základě porovnání v rámci kapitoly 6.



Obr. 55: Odhad první vlastní frekvence dle průběhu kinetické energie

## 5.3 Kinetický útlum

### 5.3.1 Kinetický útlum s lineární aproximací vrcholu kinetické energie

Zcela jiný pohled na problematiku rychlé konvergence řešení přináší technika kinetického útlumu, která byla poprvé popsána v publikaci [85] a následně rozvinuta v [25; 13] odkud byla převzata i do této práce.

Při DR využívající kinetický útlum se pracuje s nulovým fiktivním součinitelem útlumu. Při zaznamenání poklesu celkové kinetické energie systému se na základě hodnoty předchozích rychlostí zpětně dopočte vrchol kinetické energie. V místě odhadovaného vrcholu kinetické energie pak začíná další krok iterace a rychlosti se uvažují jako nulové. V podstatě tak dojde k restartu výpočtu z nového místa. Místo vrcholu kinetické energie by v ideálním případě mělo být velice blízko místu statické rovnováhy systému. Geometricky nelineární systémy však nepředstavují ideální stav, a tak je potřeba ve výpočtu pokračovat dále, než bude splněna některá ze zvolených řídicích podmínek, viz kapitola 4.4.9. I tak se však dá očekávat, že restartováním výpočtu se dostaneme blíže hledanému stavu a celkově by tak mělo dojít k poklesu počtu iterací. Celý postup hledání vrcholu kinetické energie a jeho následného restartu je navíc možné několikrát zopakovat.

Schéma výpočtu DR s kinetickým útlumem jak tak stejné, jako u běžné metody DR, viz Obr. 49, postup je však navíc potřeba doplnit o následující body.

Během výpočtu DR s kinetickým útlumem je ověřována podmínka:

$$U_{\text{kin}}^{(t-\Delta t/2)} > U_{\text{kin}}^{(t+\Delta t/2)} \quad (5.17)$$

Pokud je tato podmínka během výpočtu splněna, je zjištěn stav poklesu kinetické energie a zjednodušeně se předpokládá, že k vrcholu kinetické energie došlo v polovině předešlého kroku  $\Delta t$ . Souřadnici vrcholu kinetické energie  $x_i^{(t-\Delta t/2)}$  tak lze spočítat následovně:

$$x_i^{(t-\Delta t/2)} = x_i^t - \frac{\Delta t}{2} v_{ix}^{(t-\Delta t/2)} \quad (5.18)$$

a obdobně i souřadnice  $y_i^{(t-\Delta t/2)}$  a  $z_i^{(t-\Delta t/2)}$ .

Po restartu kinetické energie je potřeba vynulovat všechny rychlosti. Rychlost v prvním půlkroku se pak určí následovně:

$$v_{ix}^{(t+\Delta t/2)} = \frac{\Delta t}{2M_{ix}} R_{ix}^t \quad (5.19)$$

kde residuální síly  $R_{ix}^t$  jsou určeny z posunutých souřadnic  $x_i^{(t-\Delta t/2)}$ . Výpočet pak pokračuje běžným způsobem. Celý proces se opakuje až do okamžiku, kdy dojde ke splnění některé řídicí podmínky, viz kapitola 4.4.9., čímž dojde k nalezení rovnovážného stavu konstrukce.

### 5.3.2 Kinetický útlum s parabolickou aproximací vrcholu kinetické energie

Dá se také uvažovat, že vrchol kinetické energie nemusí být nutně uprostřed časového kroku. Jednou z možností je použít parabolickou aproximaci vrcholu kinetické energie tak, jak uvádí Lewisová [13]. Během výpočtu s nulovým součinitelem útlumu se opět kontroluje podmínka poklesu kinetické energie systému z rovnice (5.17). Pokud je tato podmínka splněna, jsou následně určeny souřadnice vrcholu kinetické energie  $x_i^{(t-\beta\Delta t)}$  jako:



$$x_i^{(t-\beta\Delta t)} = x_i^t - \beta\Delta t \cdot v_{ix}^{(t-\Delta t/2)} \quad (5.20)$$

kde

$$\beta = \frac{KE_3 - KE_2}{KE_3 - 2KE_2 + KE_1} \quad (5.21)$$

přičemž  $KE_3 = U_{\text{kin}}^{(t+\Delta t/2)}$  je kinetická energie v čase  $(t + \Delta t/2)$ . Podobně pak  $KE_2 = U_{\text{kin}}^{(t-\Delta t/2)}$  a  $KE_1 = U_{\text{kin}}^{(t-3\Delta t/2)}$ . Po restartu kinetické energie je potřeba vynulovat všechny rychlosti a rychlost v prvním půlkroku určit z rovnice (5.19), kde reziduální síly  $R_{ix}^t$  jsou určeny z posunutých souřadnic  $x_i^{(t-\beta\Delta t)}$ .

## 6 POROVNÁNÍ SCHÉMAT DYNAMICKÉ RELAXACE

Základní princip metody dynamické relaxace (dále jen DR) byl představen v kapitole 4. Jak bylo uvedeno v kapitole 5, je možné volbou fiktivních parametrů ovlivnit rychlost a stabilitu výpočtu. Pro další (např. komerční) využívání metody a z důvodu automatizace výpočtu je však žádoucí, aby fiktivních parametrů bylo co nejméně – ideálně, aby se výpočet obešel bez jakéhokoliv zásahu uživatele při zachování dostatečné stability a rychlosti výpočtu.

V kapitole 5 bylo naznačeno, že DR se může dále členit a vyvíjet do různých výpočetních schémat (např. způsobem tlumení, způsobem volby fiktivní hmotnosti), z nichž každé může mít své přednosti a nedostatky. Cílem této kapitoly je vybrat několik běžných i méně běžných automatických výpočetních postupů DR a porovnat jejich stabilitu a rychlost konvergence pro řešení lanoplachtových konstrukcí. Zvláště zajímavé je porovnání autorského postupu kritického útlumu z kapitoly 5.2.3 s ostatními schématy DR.

Rozmanitost testovacích příkladů je záměrně zvolena co nejširší, tak aby bylo možné prokázat vysokou univerzálnost testovaných metod. Schémata, která prokáží vysokou stabilitu a rychlou konvergenci oproti ostatním metodám, mohou být dále implementovány do vyvíjených řešičů či komerčních programů.

### 6.1 Testovací příklady

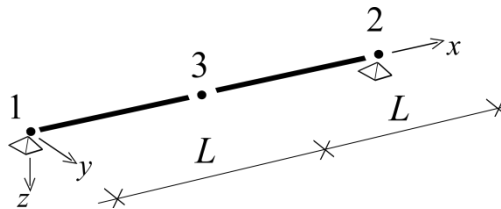
Pro účely testování je využito dohromady pěti různých konstrukcí, na nichž je provedeno celkem osm numerických úloh. Typ a tvar konstrukcí je volen tak, aby testování probíhalo na jednoduchých i složitějších konstrukcích, což má prokázat použitelnost schémat na co nejširším spektru úloh. V úlohách je zastoupen jak form-finding proces (dále jen proces FF), tak i proces řešení statické odezvy konstrukce na působící zatížení (dále jen proces SO).

Všechny dále uvedené výpočty probíhaly v prototypu autorského skriptu CAME (blíže viz kapitola 7) v programu MATLAB [89]. Přesnost výsledků byla u všech řešených úloh nastavena na  $R_{lim} = 0.0001$  kN. Výpočty probíhaly na počítači

ASUS (CPU: AMD Brazos Dual Core E450 1.65 GHz; Memory: 4GB); OS: Windows 7 Premium.

### 6.1.1 Příklad 1 – jednoduchá lanová soustava

Pro účely základního testování je zvolna jednoduchá lanová soustava složená ze dvou lan zatížených uprostřed (v uzlu číslo 3) svislou osamělou silou. Schéma konstrukce, viz Obr. 56. Konstrukce má rozpětí  $L = 5$  metrů, svislé osamělé břemeno uprostřed rozpětí  $P_{3,z}$  má velikost 4 kN. Lana jsou předpnutá horizontální osovou silou o velikosti 100 kN, průřezová plocha lan  $A = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  a Youngův modul pružnosti  $E = 150 \text{ GPa}$ .

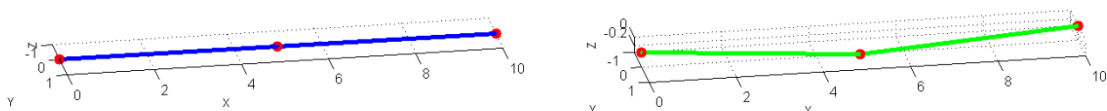


Obr. 56: Perspektivní schéma zadání jednoduché lanové soustavy

#### Numerická úloha číslo 1

Předmětem úlohy je vyřešení procesu SO jednoduché lanové soustavy. Každé z obou lan je v této úloze aproximováno s pomocí jednoho prutového prvku. Konstrukce tak má celkem tři stupně volnosti.

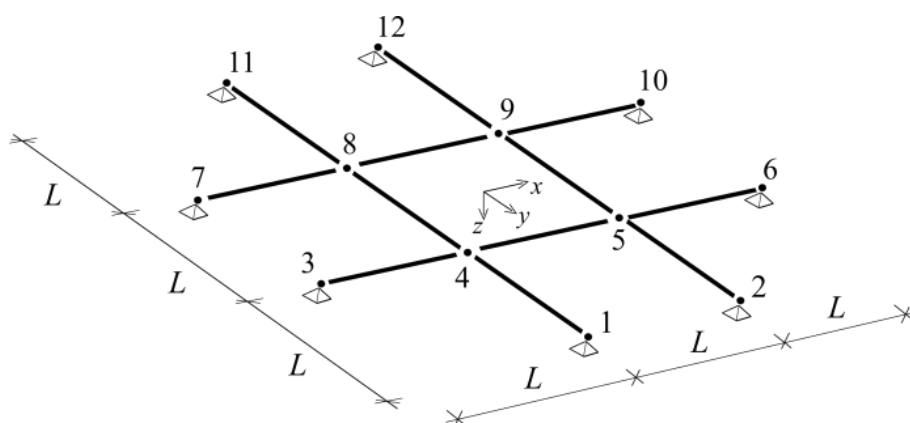
Zadání numerické úlohy číslo 1 – konečně-prvkový model jednoduché lanové soustavy procesu SO je zobrazen na Obr. 57a – finální stav výpočtu pak na Obr. 57b.



Obr. 57: Numerická úloha číslo 1 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo)

### 6.1.2 Příklad 2 – lanová síť

Konstrukce lanové sítě, jejíž perspektivní schéma je zobrazeno na Obr. 58, je převzata z [27]. Dílčí rozpětí  $L = 30.48$  metru. Všechna lana mají průřezovou plochu  $A = 1.4645 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  a Youngův modul pružnosti  $E = 8.2737 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ . Výrobní délka čtyř vnitřních lan  $s_0 = 30.419$  metrů, výrobní délka ostatních lan je 31.76 metru. V každém ze čtyř vnitřních uzlů (4, 5, 8 a 9) působí svislé osamělé břemeno o velikosti 35.56 kN. Každé z lan je navíc zatíženo svou vlastní vahou, která činí  $1.46 \times 10^{-3} \text{ kN/m}$ .

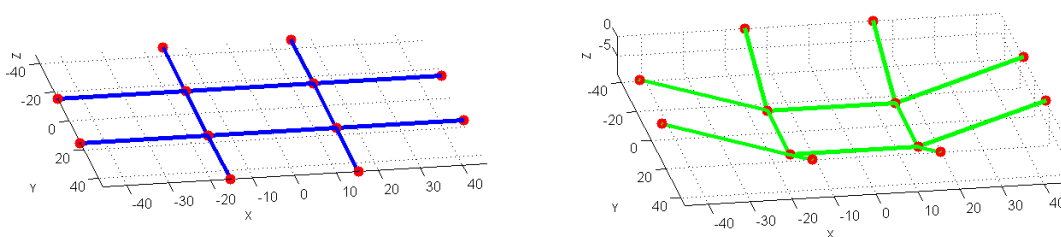


Obr. 58: Perspektivní schéma zadání lanové sítě [27]

#### Numerická úloha číslo 2

Předmětem výpočtu je proces SO lanové sítě. Lana jsou v numerickém výpočtu modelována s pomocí lanových elementů, uvažovaný model konstrukce tak má celkem 12 stupňů volnosti.

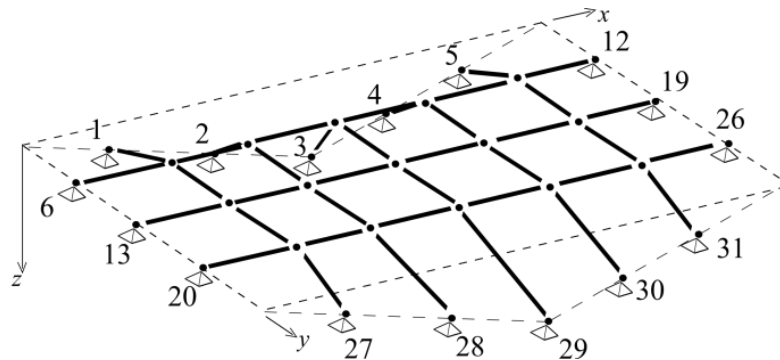
Zadání numerické úlohy číslo 2 – konečně-prvkového modelu lanové sítě procesu SO je zobrazen na Obr. 59a – finální stav výpočtu pak na Obr. 59b.



Obr. 59: Numerická úloha číslo 2 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo)

### 6.1.3 Příklad 3 – sedlová lanová střecha

Třetí konstrukce je převzata od Lewisové [13]. Počáteční schéma konstrukce (před započítáním FF procesu) je znázorněna na Obr. 60. Konstrukce se skládá celkem z 38 lan. Lana jsou po obvodě bodově podepřena. Z Obr. 60 je mimo jiné patrné, že konstrukce je v bodě 16 osově symetrická podle os  $x$  a  $y$ . Souřadnice uzlu 29 jsou  $x = 12$  m,  $y = 16$  m a  $z = 3$  m. Předmětem výpočtu je jak FF proces, tak i následný proces SO.

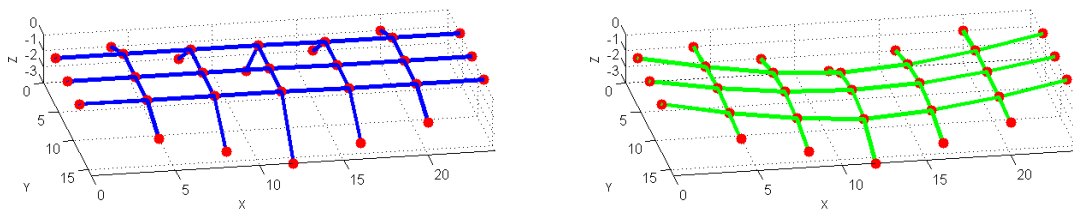


Obr. 60: Perspektivní schéma zadání sedlové lanové střechy [13]

#### Numerická úloha číslo 3

Při FF procesu sedlové lanové střechy se v lanech uvažuje horizontální předpínací síla 90 kN ve směru osy  $x$  (vyjma středového lana, kde je uvažováno 120 kN) a 30 kN ve směru osy  $y$ . V každém nepodepřeném uzlu je konstrukce navíc zatížena svislým osamělým břemenem o velikosti 4.8 kN. Pro modelování lan jsou použity prutové prvky, numerický model konstrukce tak má celkem 45 stupňů volnosti.

Zadání numerické úlohy číslo 3 – konečně-prvkový model sedlové lanové střechy (proces FF) je zobrazen na Obr. 61a – finální stav výpočtu pak na Obr. 61b.

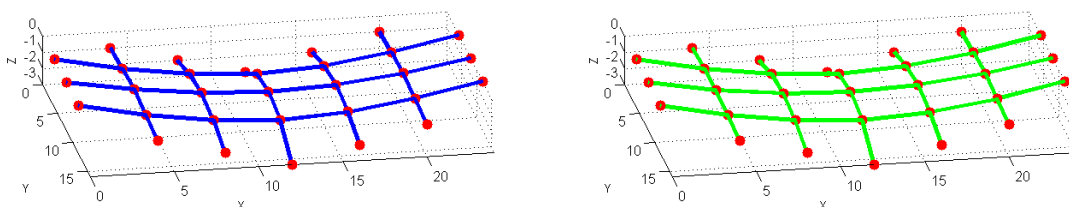


Obr. 61: Numerická úloha číslo 3 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo)

### Numerická úloha číslo 4

Při SO procesu sedlové lanové střechy se vychází z tvaru konstrukce získaného z FF procesu. Všechna lana ve směru  $x$  mají průřezovou plochu rovnou  $350 \text{ mm}^2$  a lana ve směru  $y$  mají průřezovou plochu rovnou  $120 \text{ mm}^2$ . Modul pružnosti všech lan je roven  $160 \text{ kN/mm}^2$ . V každém nepodepřeném uzlu konstrukce je uvažováno s dalším svislým přitížením o velikosti  $2 \text{ kN}$  (včetně FF procesu tak v každém uzlu působí svislá síla o velikosti  $6.8 \text{ kN}$ ).

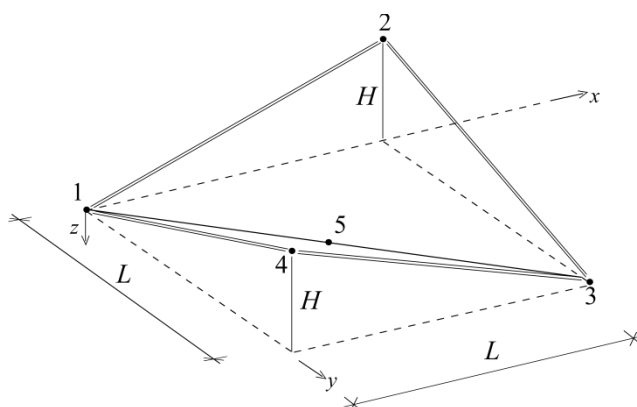
Zadání numerické úlohy číslo 4 – konečně-prvkový modelu sedlové lanové střechy (proces SO) je zobrazen na Obr. 62a – finální stav výpočtu pak na Obr. 62b.



Obr. 62: Numerická úloha číslo 4 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo)

#### 6.1.4 Příklad 4 – membránový přístřešek

Čtvrtá konstrukce je fiktivní, ale podobný tvar konstrukce nachází často uplatnění v praxi, např. při zastřešení posezení, vstupů, apod. Perspektivní schéma konstrukce je zobrazeno na Obr. 63. Jde o čistě membránovou konstrukci po obvodě kloubově podepřenou. Základní rozměry konstrukce jsou  $L = 8 \text{ m}$ ,  $H = 3$ . Předmětem výpočtu je FF proces i následný proces SO.

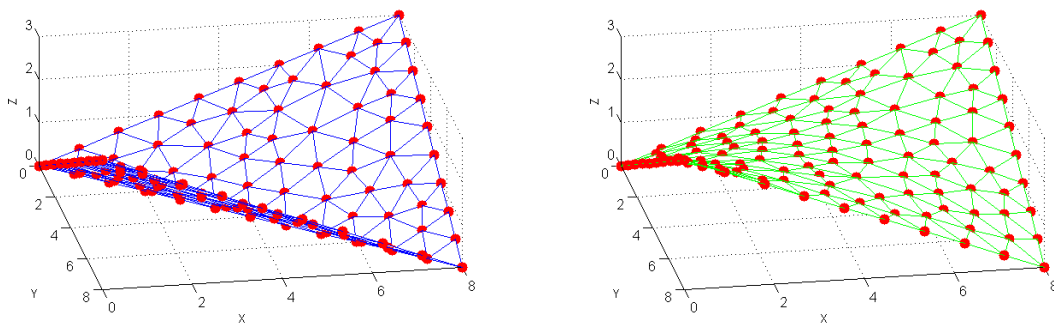


Obr. 63: Perspektivní schéma zadání membránového přístřešku [50]

### Numerická úloha číslo 5

Při FF procesu membránového přístřešku se uvažuje s horizontálním všesměrným předpětím membrány  $\sigma = 1\,500 \text{ kN/m}^2$  a s tloušťkou membrány 0.001 metru. Při diskretizaci plochy na trojúhelníkové prvky s maximální velikostí hrany 1 metr vznikne numerický model konstrukce s celkem 246 stupni volnosti.

Zadání numerické úlohy číslo 5 – konečně-prvkový modelu membránového přístřešku (proces FF) je zobrazen na Obr. 64a – finální stav výpočtu pak na Obr. 64b.

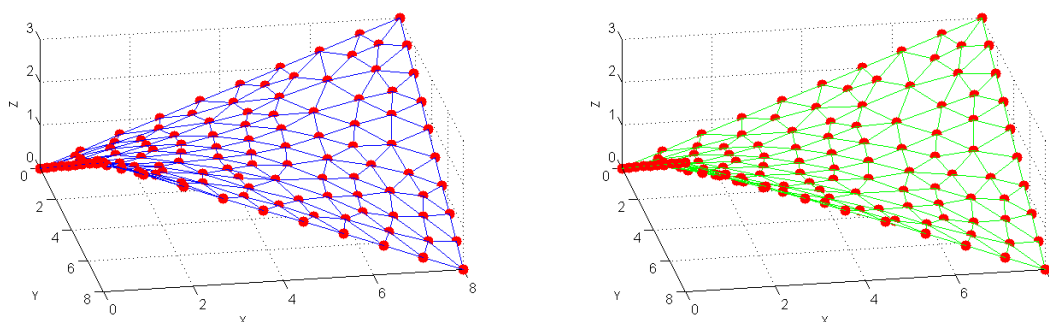


Obr. 64: Numerická úloha číslo 5 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo)

### Numerická úloha číslo 6

Při analýze SO procesu membránového přístřešku se vychází z tvaru získaného při předchozím FF procesu. Modul pružnosti membrány se uvažuje  $30 \text{ N/mm}^2$  a Poissonův součinitel příčné roztažnosti je roven hodnotě 0.2. Celá konstrukce je zatížena svislým rovnoměrným zatížením  $200 \text{ N/m}^2$  vztaženým na půdorysný průmět konstrukce.

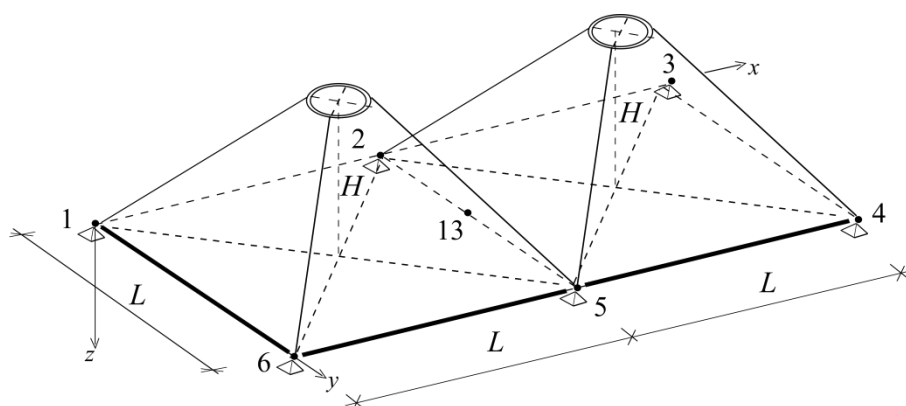
Zadání numerické úlohy číslo 6 – konečně-prvkový modelu membránového přístřešku (proces SO) je zobrazen na Obr. 65a – finální stav výpočtu pak na Obr. 65b.



Obr. 65: Numerická úloha číslo 6 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo)

### 6.1.5 Příklad 5 – dvojnásobná kuželová střecha

Pátá testovaná konstrukce je taktéž fiktivní. Jedná se o lanoplachtovou konstrukci ve tvaru připomínající dvojic spojených kuželů. Schéma konstrukce je znázorněno na Obr. 66. Konstrukce je bodově podepřena v uzlech 1 až 6 a ve vrchních prstencích. Při spodním okraji je konstrukce po obvodě ztužena lany. Rozměry konstrukce jsou  $L = 8$  m,  $H = 3$ . Poloměr vrchního prstence je 1 metr. Předmětem výpočtu je FF proces i následný proces SO.



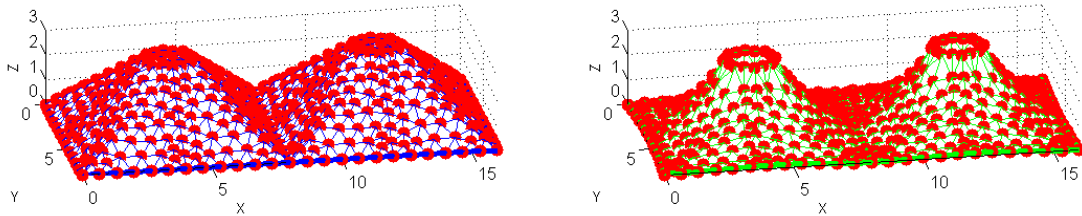
Obr. 66: Perspektivní schéma zadání dvojnásobné kuželové střechy [50]

### Numerická úloha číslo 7

Při FF procesu dvojnásobné kuželové střechy se uvažuje s horizontálním všesměrným předpětím membrány  $\sigma = 1\,000$  kN/m<sup>2</sup> a s vodorovným předpětím lan 50 kN. Tloušťka membrány je 0.001 metru. Při diskretizaci plochy na trojúhelníkové prvky s maximální velikostí hrany 0.7 metru vznikne numerický model konstrukce s celkem 1623 stupni volnosti.



Zadání numerické úlohy číslo 7 – konečně-prvkový modelu dvojnásobné kuželové střechy (proces FF) je zobrazen na Obr. 67a – finální stav výpočtu pak na Obr. 67b.

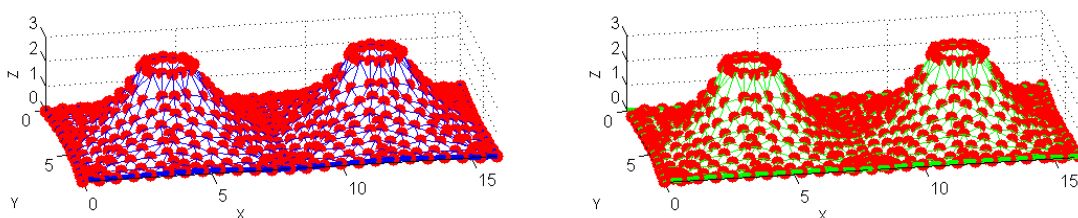


Obr. 67: Numerická úloha číslo 7 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo)

### **Numerická úloha číslo 8**

Při procesu SO dvojnásobné kuželové střechy se vychází ze tvaru získaného při předchozím FF procesu. Modul pružnosti membrány se uvažuje  $30 \text{ N/mm}^2$  a Poissonův součinitel příčné roztažnosti je roven hodnotě 0.2. Všechna lana mají průřezovou plochu rovnou  $350 \text{ mm}^2$ , modul pružnosti lan je roven  $160 \text{ kN/mm}^2$ . Celá konstrukce je zatížena svislým rovnoměrným zatížením  $500 \text{ N/m}^2$  vztaženým na půdorysný průmět konstrukce.

Zadání numerické úlohy číslo 8 – konečně-prvkový modelu dvojnásobné kuželové střechy (proces SO) je zobrazen na Obr. 68a – finální stav výpočtu pak na Obr. 68b.



Obr. 68: Numerická úloha číslo 8 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo)

## 6.2 Schémata s kinetickým útlumem

### 6.2.1 Předmět testování

Cílem této kapitoly bude porovnat na osmi dříve uvedených numerických úlohách (kapitola 6.1) jednotlivé postupy DR s kinetickým útlumem. Sledovat se bude zejména počet iterací a výpočetní CPU čas počítače jednotlivých schémat.

Testován bude zejména vliv:

- způsobu výpočtu uzlových tuhostí,
- rozložení fiktivní hmotnosti po konstrukci,
- přepočtu hmotnosti po restartu kinetické energie,
- způsobu aproximace vrcholu kinetické energie.

#### ***Způsob výpočtu uzlových tuhostí***

Z hlediska rychlosti konvergence je zajímavé sledovat, zda jsou za jinak stejných podmínek účinnější přístupy s výpočtem uzlových tuhostí vycházejících ze součtu liniových tuhostí všech prvků (viz kapitola 5.1.2, rovnice (5.7)), anebo přístupy s výpočtem uzlových tuhostí vycházející ze součtu absolutních hodnot liniových tuhostí z jednotlivých směrů (viz kapitola 5.1.2, rovnice (5.8) a (5.9)).

#### ***Rozložení fiktivní hmotnosti po konstrukci***

Je zajímavé též srovnat, zda z hlediska stability a rychlosti výpočtu není výhodnější uvažovat ve všech uzlech konstrukce jednotnou fiktivní hmotnost, která by byla odvozena od nejtužšího uzlu konstrukce (první přístup), na rozdíl od výpočtu fiktivní hmotnosti pro každý uzel zvlášť (druhý přístup).

První přístup tak vychází ze vzorce:

$$M = \frac{\Delta t^2}{2} \max(S_i) \tag{6.1}$$

kde  $M$  je jednotná fiktivní hmotnost v každém uzlu a směru konstrukce a  $S_i$  je styčnicková tuhost ve všech uzlech konstrukce, vypočtená pro každý uzel  $i$  dle způsobu výpočtu tuhosti vztahu (5.7) nebo (5.8).

Druhý přístup vychází z postupu uvedeného v kapitole 5.1.1, konkrétně ze vztahu (5.2), kdy je fiktivní hmotnost vypočtena pro každý uzel  $i$  zvlášť.

### ***Přepoččet hmotnosti po restartu kinetické energie***

Dále je zajímavé zjistit, zda zásadní vliv na rychlost a stabilitu výpočtu může mít přepoččet fiktivní hmotnosti během výpočtu. Přepočítávání hmotnosti v každém iteračním kroku by zřejmě zabralo příliš mnoho výpočetního času, ale přepočtení (aktualizace) hmotnosti po restartu kinetické energie by mohlo urychlit nalezení potřebné rovnováhy.

V jedné polovině typů výpočetních schémat tak bude uvažováno s přepočtem hmotností po restartu kinetické energie, v druhé polovině schémat se přepoččet hmotnosti provádět nebude.

### ***Způsobu aproximace vrcholu kinetické energie***

V kapitole 5.3.1 a 5.3.2 byly představeny dva způsoby určení vrcholu kinetické energie (lineární aproximace a parabolická aproximace). To, zda je některý z postupů výrazně výhodnější než druhý, bude taktéž předmětem testování v této práci.

## **6.2.2 Definice schémat**

Vzájemnou kombinací čtyř vlivů uvedených v kapitole 6.2.1 vzniká celkem šestnáct různých výpočetních schémat DR s kinetickým útlumem.

Přehled testovaných schémat je uveden v Tab. 1, kde:

- „Ss“ značí uzlovou tuhost získanou jako součet z linií z rovnice (5.7); (lichá čísla schémat).
- „Sa“ značí uzlovou tuhost získanou jako součet z absolutních hodnot z rovnice (5.9); (sudá čísla schémat).
- „Mc“ značí, že bylo uvažováno s jednotnou hmotností ve všech uzlech, viz rovnice (6.1); (schémata 1-2, 5-6, 9-10, 13-14).
- „Mi“ značí, že hmotnost byla vypočtena pro každý uzel zvlášť, viz rovnice vztahu (5.2); (schémata 3-4, 7-8, 11-12, 15-16).
- „ne“ značí, že hmotnost nebyla přepočtena po restartu kinetické energie; (schémata 1-4, 9-12).
- „ano“ značí, že hmotnost byla přepočtena po restartu kinetické energie; (schémata 5-8, 13-16).

- „L“ značí, že bylo použito lineární aproximace vrcholu kinetické energie dle vztahu (5.18); (schémata 1-8)
- „P“ značí, že bylo použito parabolické aproximace vrcholu kinetické energie dle vztahu (5.20); (schémata 9-16)

Autor si je vědom, že výběr metod není v žádném případě vyčerpávající, protože při detailním rozboru dynamické relaxace lze najít celou škálu metod, jejichž popis a zkoumání by mnohonásobně překonalo kapacitu této práce. O některých jiných alternativních metodách se lze dočíst např. zde [84].

Tab. 1: Přehled schémat DR s kinetickým útlumem

číslo schéma	tuhost		hmotnost		restart M		aproximace	
	Ss <i>z linií</i>	Sa <i>abs. hod.</i>	Mc <i>konstantní</i>	Mi <i>úměrná</i>	ne	ano	L <i>lineární</i>	P <i>parabolická</i>
1	•		•		•		•	
2		•	•		•		•	
3	•			•	•		•	
4		•		•	•		•	
5	•		•			•	•	
6		•	•			•	•	
7	•			•		•	•	
8		•		•		•	•	
9	•		•		•			•
10		•	•		•			•
11	•			•	•			•
12		•		•	•			•
13	•		•			•		•
14		•	•			•		•
15	•			•		•		•
16		•		•		•		•

### 6.2.3 Výsledky testování schémat

V Tab. 2 až Tab. 9 jsou postupně k dohledání záznamy o všech proběhnutých výpočtech DR s kinetickým útlumem (schémata 1-16) na jednotlivých numerických úlohách. V tabulkách jsou použity následující zkratky:

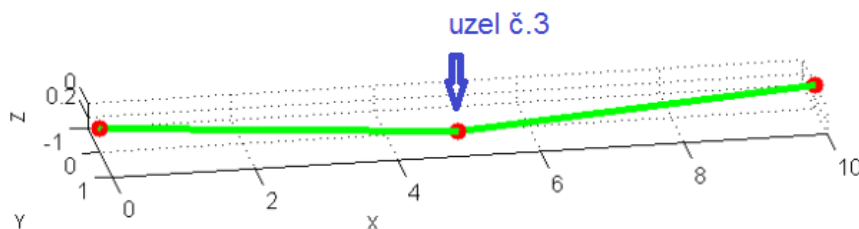
- „sche“ značí číslo schématu dynamické relaxace,
- „it“ značí počet iterací potřebný k nalezení požadované rovnováhy,
- „CPU“ značí spotřebovaný výpočetní CPU čas počítače (v sekundách)
- „ $z_i$ “ značí  $z$ -souřadnici vybraného uzlu  $i$  (v metrech)

### Výsledky numerické úlohy číslo 1

Pro srovnání byla u všech výpočtů uložena  $z$ -souřadnice uzlu číslo 3. Tvar konstrukce po výpočtu je na Obr. 69. Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem jsou zobrazeny v Tab. 2.

Tab. 2: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 1 (jednoduchá lanová soustava – proces SO)

úloha 1: lanová soustava (SO)			
sche	it	CPU [s]	$z_3$ [m]
1	44	0.4	0.3587
2	44	0.7	0.3587
3	44	0.4	0.3587
4	44	0.2	0.3587
5	44	0.2	0.3587
6	43	0.2	0.3587
7	44	0.3	0.3587
8	43	0.3	0.3587
9	24	0.1	0.3587
10	24	0.1	0.3587
11	24	0.1	0.3587
12	24	0.1	0.3587
13	24	0.1	0.3587
14	24	0.3	0.3587
15	24	0.2	0.3587
16	24	0.3	0.3587



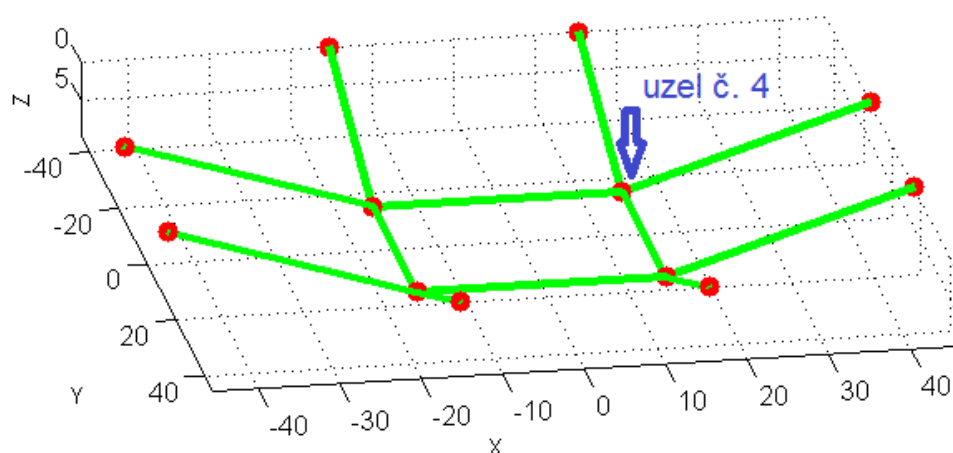
Obr. 69: Rovnovážný stav numerické úlohy číslo 1 po proběhnutém výpočtu

### Výsledky numerické úlohy číslo 2

Jako referenční souřadnice byla vybrána  $z$ -souřadnice uzlu číslo 4. Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem jsou zobrazeny v Tab. 3. Konstrukce po proběhnutém výpočtu je zobrazena na Obr. 70.

Tab. 3: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 2  
(lanová síť – proces SO)

úloha 2: lanová síť (SO)			
sche	it	CPU [s]	$z_4$ [m]
1	82	6.0	9.5963
2	82	5.6	9.5963
3	82	5.4	9.5963
4	82	5.3	9.5963
5	82	5.3	9.5963
6	54	3.9	9.5963
7	82	5.6	9.5963
8	54	4.0	9.5963
9	73	5.7	9.5963
10	73	4.9	9.5963
11	73	5.1	9.5963
12	73	4.9	9.5963
13	76	5.2	9.5963
14	57	3.8	9.5963
15	76	5.7	9.5963
16	57	3.8	9.5963



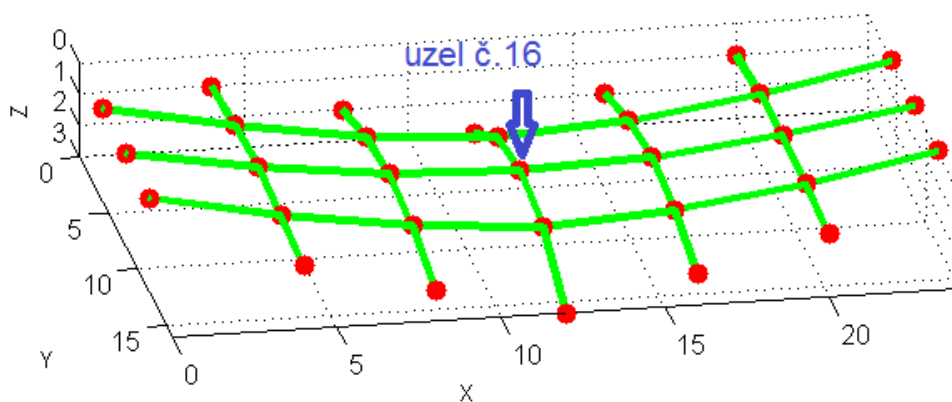
Obr. 70: Rovnovážný stav numerické úlohy číslo 2 po proběhnutém výpočtu

### Výsledky numerické úlohy číslo 3

Pro možnost dalšího porovnávání byla jako referenční vybrána z-souřadnice uzlu číslo 16. Konstrukce ve stavu po proběhnutém výpočtu je na Obr. 71. Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem jsou zobrazeny v Tab. 4.

Tab. 4: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 3 (sedlová lanová střeška – proces FF)

úloha 3: lanová střeška (FF)			
sche	it	CPU [s]	$z_{16}$ [m]
1	40	1.0	1.3176
2	40	1.4	1.3176
3	36	1.2	1.3176
4	40	1.0	1.3176
5	40	1.3	1.3176
6	45	1.1	1.3176
7	36	1.4	1.3176
8	39	1.1	1.3176
9	30	1.0	1.3176
10	30	0.8	1.3176
11	31	0.8	1.3176
12	28	1.1	1.3176
13	30	1.1	1.3176
14	28	0.7	1.3176
15	31	0.9	1.3176
16	30	0.7	1.3176



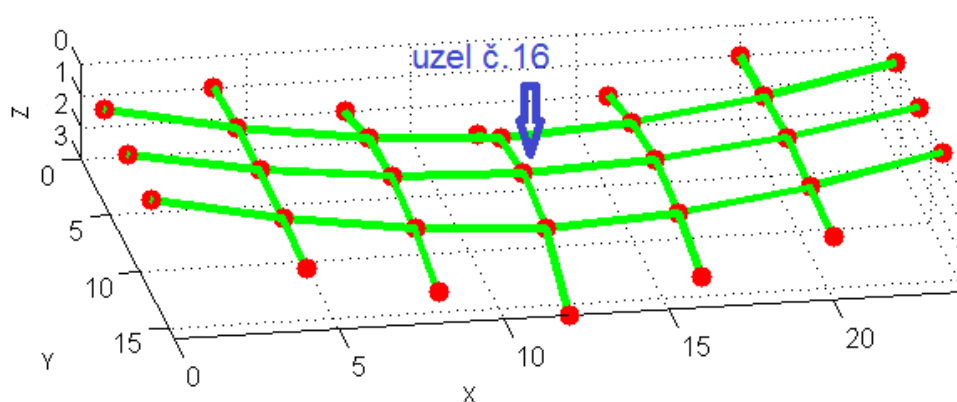
Obr. 71: Rovnovážný stav numerické úlohy číslo 3 po proběhnutém výpočtu

### Výsledky numerické úlohy číslo 4

I zde byla u všech výpočtů sledována z-souřadnice uzlu číslo 16. Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem jsou zobrazeny v Tab. 5. Tvar konstrukce po proběhnutém výpočtu je na Obr. 72.

Tab. 5: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 4  
(sedlová lanová střecha – proces SO)

úloha 4: lanová střecha (SO)			
sche	it	CPU [s]	$z_{16}$ [m]
1	211	4.9	1.3331
2	201	4.1	1.3331
3	176	3.5	1.3331
4	204	4.1	1.3331
5	211	4.5	1.3331
6	206	4.9	1.3331
7	176	3.7	1.3331
8	186	3.8	1.3331
9	196	3.9	1.3331
10	200	4.0	1.3331
11	194	3.9	1.3331
12	187	3.8	1.3331
13	196	4.0	1.3331
14	200	4.3	1.3331
15	194	4.1	1.3331
16	201	4.6	1.3331



Obr. 72: Rovnovážný stav numerické úlohy číslo 4 po proběhnutém výpočtu

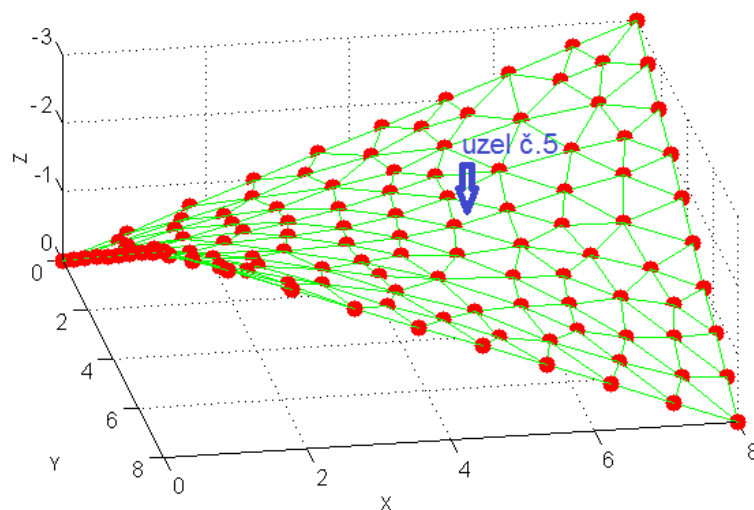


### Výsledky numerické úlohy číslo 5

Pro srovnání byla u všech výpočtů uložena z-souřadnice uzlu číslo 5. Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem jsou zobrazeny v Tab. 6. Konstrukce po proběhnutém výpočtu je zobrazena na Obr. 73.

Tab. 6: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 5 (membránový přístřešek – proces FF)

úloha 5: membránový přístřešek (FF)			
sche	it	CPU [s]	$z_5$ [m]
1	53	8.2	-1.5000
2	59	8.5	-1.5002
3	47	6.9	-1.4999
4	52	7.4	-1.5000
5	53	8.9	-1.5000
6	59	8.7	-1.5002
7	47	8.2	-1.4999
8	53	8.9	-1.5001
9	46	6.6	-1.5001
10	53	7.7	-1.5002
11	53	7.5	-1.5001
12	52	7.4	-1.5000
13	46	7.8	-1.5001
14	53	7.8	-1.5002
15	53	8.8	-1.5001
16	50	9.0	-1.5001



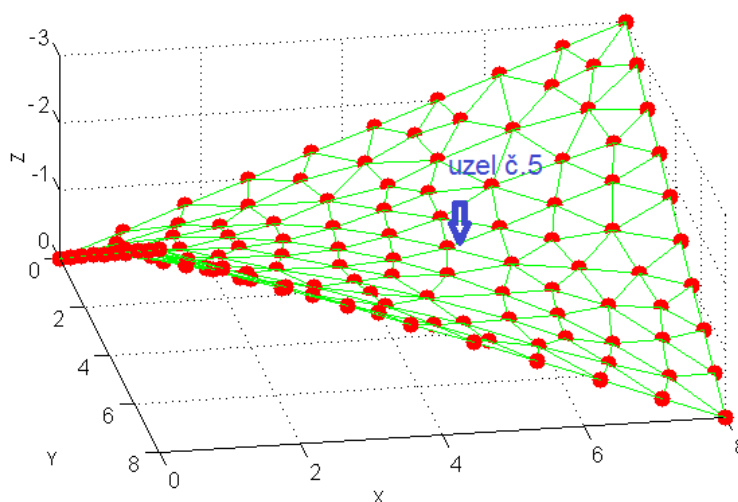
Obr. 73: Rovnovážný stav numerické úlohy číslo 5 po proběhnutém výpočtu

### Výsledky numerické úlohy číslo 6

Jako referenční souřadnice byla vybrána  $z$ -souřadnice uzlu číslo 5. Konstrukce po proběhnutém výpočtu je zobrazena na Obr. 74. Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem jsou zobrazeny v Tab. 7.

Tab. 7: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 6  
(membránový přístřešek – proces SO)

úloha 6: membránový přístřešek (SO)			
sche	it	CPU [s]	$z_5$ [m]
1	236	32.4	-1.1497
2	296	41.1	-1.1496
3	221	30.2	-1.1496
4	251	35.0	-1.1497
5	236	33.3	-1.1497
6	312	42.9	-1.1496
7	221	31.5	-1.1496
8	260	37.5	-1.1497
9	231	32.9	-1.1498
10	315	45.7	-1.1496
11	235	35.0	-1.1497
12	237	33.8	-1.1498
13	257	39.4	-1.1496
14	294	42.1	-1.1498
15	233	35.6	-1.1496
16	242	34.8	-1.1498



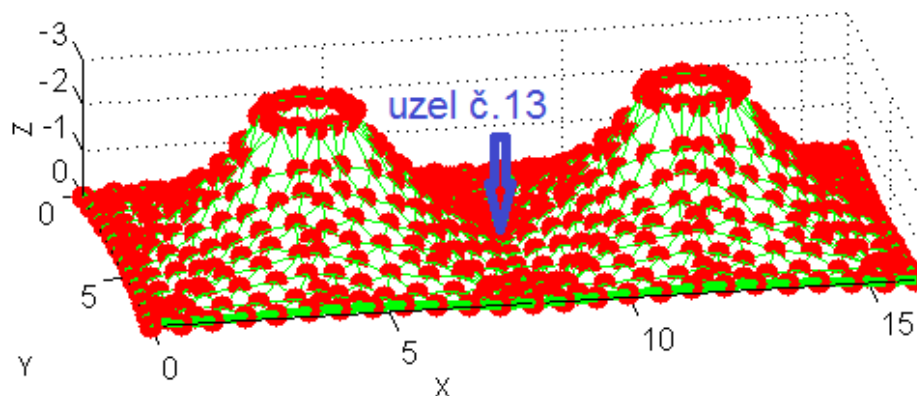
Obr. 74: Rovnovážný stav numerické úlohy číslo 6 po proběhnutém výpočtu

### Výsledky numerické úlohy číslo 7

Pro možnost dalšího porovnávání byla jako referenční vybrána  $z$ -souřadnice uzlu číslo 13. Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem jsou zobrazeny v Tab. 8. Konstrukce ve stavu po proběhnutém výpočtu je na Obr. 75.

Tab. 8: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 7  
(dvojitá kuželová střecha – proces FF)

úloha 7: dvojitá kuželová střecha (FF)			
sche	it	CPU [s]	$z_{13}$ [m]
1	224	177.7	-0.1490
2	233	185.2	-0.1491
3	64	56.8	-0.1491
4	69	59.9	-0.1491
5	224	187.4	-0.1490
6	251	203.1	-0.1491
7	59	59.4	-0.1491
8	71	61.7	-0.1491
9	231	184.5	-0.1491
10	243	192.8	-0.1491
11	62	53.4	-0.1491
12	61	51.8	-0.1491
13	231	190.1	-0.1491
14	260	200.8	-0.1491
15	56	54.6	-0.1491
16	65	55.0	-0.1491



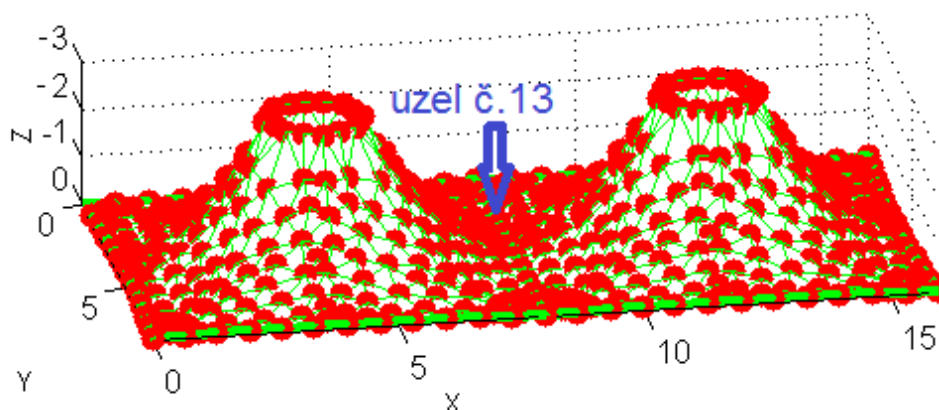
Obr. 75: Rovnovážný stav numerické úlohy číslo 7 po proběhnutém výpočtu

**Výsledky numerické úlohy číslo 8**

I zde byla u všech výpočtů sledována z-souřadnice uzlu číslo 13. Tvar konstrukce po proběhnutém výpočtu je na Obr. 76. Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem jsou zobrazeny v Tab. 9.

Tab. 9: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 8  
(dvojitá kuželová střecha – proces SO)

úloha 8: dvojitá kuželová střecha (SO)			
sche	it	CPU [s]	$z_{13}$ [m]
1	3991	3201.8	-0.0556
2	4176	3341.4	-0.0555
3	1582	1246.2	-0.0555
4	1708	1351.1	-0.0556
5	3991	3151.5	-0.0556
6	4133	3266.2	-0.0556
7	1602	1278.4	-0.0555
8	1671	1316.0	-0.0555
9	4001	3148.8	-0.0555
10	4179	3293.6	-0.0555
11	1804	1448.5	-0.0556
12	1616	1317.9	-0.0555
13	4000	3274.8	-0.0555
14	4142	3354.4	-0.0555
15	1715	1428.1	-0.0555
16	1639	1342.6	-0.0555



Obr. 76: Rovnovážný stav numerické úlohy číslo 8 po proběhnutém výpočtu

### 6.2.4 Zhodnocení výsledků schémat DR s kinetickým útlumem

Výběr nejefektivnějšího schématu DR probíhal v několika krocích. Nejprve bylo určeno pořadí jednotlivých kategorií ve třech zkoumaných hlediskách:

- celkový počet iterací,
- procentuální odchylky počtu iterací,
- celkový spotřebovaný čas CPU.

Na základě součtu pořadí z těchto tří zkoumaných hledisek bylo sestaveno výsledné pořadí, které určilo nejefektivnější výpočetní schéma DR s kinetickým útlumem pro lanoplachtové konstrukce.

#### **Celkový počet iterací**

V rámci tohoto hlediska byly pro jednotlivá schémata sečteny počty iterací napříč všemi provedenými úlohami.

Celkový počet iterací je zaznamenán v Tab. 10, kde je také určeno pořadí jednotlivých schémat. Nejefektivnějším schématem z tohoto hlediska je schéma 3.

Tab. 10: Přehled celkového počtu iterací jednotlivých schémat s kinetickým útlumem

	př.1	př.2	př.3	př.3	př.4	př.4	př.5	př.5		
sche	SO	SO	FF	SO	FF	SO	FF	SO	$\Sigma$ it	pořadí
1	44	82	40	211	53	236	224	3991	4881	11.
2	44	82	40	201	59	296	233	4176	5131	16.
3	44	82	36	176	47	221	64	1582	2252	1.
4	44	82	40	204	52	251	69	1708	2450	7.
5	44	82	40	211	53	236	224	3991	4881	11.
6	43	54	45	206	59	312	251	4133	5103	14.
7	44	82	36	176	47	221	59	1602	2267	2.
8	43	54	39	186	53	260	71	1671	2377	5.
9	24	73	30	196	46	231	231	4001	4832	9.
10	24	73	30	200	53	315	243	4179	5117	15.
11	24	73	31	194	53	235	62	1804	2476	8.
12	24	73	28	187	52	237	61	1616	2278	3.
13	24	76	30	196	46	257	231	4000	4860	10.
14	24	57	28	200	53	294	260	4142	5058	13.
15	24	76	31	194	53	233	56	1715	2382	6.
16	24	57	30	201	50	242	65	1639	2308	4.

**Procentuální odchylky počtu iterací**

V rámci tohoto hlediska byly určeny procentuální odchylky počtu iterací pro jednotlivé řešené numerické úlohy. Stanovení odchylky probíhalo tak, že počet iterací pro danou úlohu a pro dané schéma byl vydělen nejmenším počtem iterací pro danou úlohu a přenásoben stem (aby bylo získáno procentuální vyjádření). Například v první zkoumané úloze je nejmenší počet iterací 24, schéma 1 dosáhlo na 44 iterací, výsledná procentuální odchylka tak bude:  $44 / 24 \times 100 \approx 183\%$ .

Přehled všech takto určených odchylek je zaznamenán v Tab. 11. Na základě celkového součtu odchylek přes všech osm zkoumaných úloh je sestaveno pořadí schémat dle procentuální odchylky počtu iterací. Nejefektivnějším schématem z tohoto hlediska je schéma 16.

Tab. 11: Přehled procentuálních odchylek [%] jednotlivých schémat DR s kinetickým útlumem

	př.1	př.2	př.3	př.3	př.4	př.4	př.5	př.5		
sche	SO	SO	FF	SO	FF	SO	FF	SO	$\Sigma\%it$	pořadí
1	183	152	143	120	115	107	400	252	1472	13.
2	183	152	143	114	128	134	416	264	1534	15.
3	183	152	129	100	102	100	114	100	980	6.
4	183	152	143	116	113	114	123	108	1052	8.
5	183	152	143	120	115	107	400	252	1472	13.
6	179	100	161	117	128	141	448	261	1536	16.
7	183	152	129	100	102	100	105	101	973	5.
8	179	100	139	106	115	118	127	106	989	7.
9	100	135	107	111	100	105	413	253	1324	9.
10	100	135	107	114	115	143	434	264	1412	12.
11	100	135	111	110	115	106	111	114	902	4.
12	100	135	100	106	113	107	109	102	873	2.
13	100	141	107	111	100	116	413	253	1341	10.
14	100	106	100	114	115	133	464	262	1394	11.
15	100	141	111	110	115	105	100	108	891	3.
16	100	106	107	114	109	110	116	104	865	1.

**Celkový spotřebovaný CPU čas**

V rámci tohoto hlediska byly pro jednotlivá schémata sečteny spotřebované CPU časy napříč všemi provedenými úlohami.

Celkový počet spotřebovaného CPU času je zaznamenán v Tab. 12, kde je také určeno pořadí jednotlivých schémat. Nejefektivnějším schématem z tohoto hlediska je schéma 3.

Tab. 12: Přehled celkového spotřebovaného CPU času [s] jednotlivých schémat s kinetickým útlumem

	př.1	př.2	př.3	př.3	př.4	př.4	př.5	př.5		
sche	SO	SO	FF	SO	FF	SO	FF	SO	$\Sigma$ CPU	pořadí
1	0.4	6.0	1.0	4.9	8.2	32.4	177.7	3201.8	3432.5	11.
2	0.7	5.6	1.4	4.1	8.5	41.1	185.2	3341.4	3588.1	15.
3	0.4	5.4	1.2	3.5	6.9	30.2	56.8	1246.2	1350.6	1.
4	0.2	5.3	1.0	4.1	7.4	35.0	59.9	1351.1	1463.8	6.
5	0.2	5.3	1.3	4.5	8.9	33.3	187.4	3151.5	3392.4	10.
6	0.2	3.9	1.1	4.9	8.7	42.9	203.1	3266.2	3531.0	13.
7	0.3	5.6	1.4	3.7	8.2	31.5	59.4	1278.4	1388.5	2.
8	0.3	4.0	1.1	3.8	8.9	37.5	61.7	1316.0	1433.3	4.
9	0.1	5.7	1.0	3.9	6.6	32.9	184.5	3148.8	3383.5	9.
10	0.1	4.9	0.8	4.0	7.7	45.7	192.8	3293.6	3549.7	14.
11	0.1	5.1	0.8	3.9	7.5	35.0	53.4	1448.5	1554.3	8.
12	0.1	4.9	1.1	3.8	7.4	33.8	51.8	1317.9	1420.8	3.
13	0.1	5.2	1.1	4.0	7.8	39.4	190.1	3274.8	3522.4	12.
14	0.3	3.8	0.7	4.3	7.8	42.1	200.8	3354.4	3614.2	16.
15	0.2	5.7	0.9	4.1	8.8	35.6	54.6	1428.1	1537.9	7.
16	0.3	3.8	0.7	4.6	9.0	34.8	55.0	1342.6	1450.7	5.

**Nejefektivnější schéma**

Na základě součtu pořadí ze tří zkoumaných hledisek bylo určeno výsledné pořadí, které je zaznamenáno v Tab. 13. Z tohoto hlediska se nejefektivnějším výpočetním schématem dynamické relaxace pro lanoplachtové konstrukce stalo schéma 12.

Při bližším zkoumání Tab. 13 lze dojít k zajímavému závěru, že schémata mající fiktivní hmotnost rozloženou úměrně tuhostem jednotlivých uzlů (schémata 1-2, 5-6, 9-10 a 13-14) vykazují rychlejší a stabilnější konvergenci než ostatní schémata. Příliš při tom nezáleží, zda je uzlová tuhost počítána jako součet absolutních hodnot jednotlivých složek nebo jako součet líniových tuhostí z elementů připojených do uzlů. Roli také nehraje to, zda je hmotnost přepočtena po restartu kinetické energie, či nikoliv, ani se nejeví zásadní to, zda je použito lineární, či parabolické, aproximace vrcholu kinetické energie.

K obecnějším závěrům by bylo nutné schémata otestovat na několika dalších desítkách příkladů, což přesahuje kapacitu této práce.

Tab. 13: Přehled celkového vyhodnocení jednotlivých schémat DR s kinetickým útlumem

sche	it	%it	CPU	$\Sigma$	pořadí
1	11	13	11	35	12.
2	16	15	15	46	16.
<b>3</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>1.-2.</b>
4	7	8	6	21	8.
5	11	13	10	34	11.
6	14	16	13	43	15.
7	2	5	2	9	3.
8	5	7	4	16	5.-6.
9	9	9	9	27	9.
10	15	12	14	41	14.
11	8	4	8	20	7.
<b>12</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>1.-2.</b>
13	10	10	12	32	10.
14	13	11	16	40	13.
15	6	3	7	16	5.-6.
16	4	1	5	10	4.



## 6.3 Schémata s kritickým útlumem

### 6.3.1 Předmět testování

Cílem této kapitoly bude otestovat schémata s kritickým útlumem. Předmětem testování budou zejména tyto aspekty:

- Efektivita kritického útlumu s odhadem frekvence dle nejdelší doby kmitu
- Efektivita kritického útlumu s odhadem frekvence dle průběhu kinetické energie
- Vliv počtu oscilací v předvýpočtu na přesnost odhadu první vlastní frekvence
- Vzájemné porovnání postupů s kritickým útlumem
- Vzájemné porovnání postupů s kritickým a kinetickým útlumem

#### **Postup**

Pro zjištění efektivity obou postupů s kritickým útlumem proběhne u každé z osmi numerických úloh výpočet součinitele útlumu dle rovnice (5.13). V případě odhadu frekvence dle nejdelší doby kmitu se bude pro určení první vlastní frekvence vycházet ze vzorce (5.15), v případě autorského postupu odhadu frekvence dle průběhu kinetické energie se bude pro určení první vlastní frekvence vycházet ze vzorce (5.16). U všech osmi úloh také zároveň dojde k „pásmové“ analýze, kdy bude součinitel útlumu vypočten z rovnice (5.11), přičemž koeficient  $\alpha$  bude postupně volen v určitém rozsahu hodnot tak, aby bylo možné vyhodnotit, zda výpočet dle postupů s kritickým tlumením opravdu představuje nejrychlejší konvergenci k řešení.

U jednotlivých postupů s kritickým útlumem bude také zkoumán vliv, jak je volbou počtu nutných oscilací v předvýpočtu ovlivněna přesnost odhadu první vlastní frekvence. U postupů s odhadem frekvence dle nejdelší doby kmitu bude testován počet oscilací z rovnice (5.15) v rozsahu hodnot  $N$  rovno 0.5, 1 a 5 oscilací. Zjednodušeně se tak dá říci, že bude testováno, zda k určení první vlastní frekvence postačí znát „půlplnu“ kmitu souřadnice, nebo je potřeba frekvenci určit na základě „celé vlny“, případně pěti „vln“. Podobně pak u postupů s odhadem frekvence dle průběhu kinetické energie bude testován počet oscilací z rovnice (5.16) v rozsahu hodnot  $N_{uk}$  rovno 0.5 a 1 oscilace.

Vzhledem k závěrům uvedeným v předchozí kapitole 6.2.4 budou pro účely testování parametrů kritického útlumu vybrána pouze schémata DR mající fiktivní hmotnost rozloženou úměrně tuhostem jednotlivých uzlů. Vliv způsobu výpočtu styčnickové tuhosti je dle stejných závěrů z kapitoly 6.2.4 marginální, a tak bude pro účely testování kritického útlumu vybrán postup dle absolutních hodnot z rovnic (5.8) a (5.9).

### 6.3.2 Definice schémat

Vzájemnou kombinací vlivů uvedených v předchozí kapitole 6.3.1 vzniká celkem pět různých výpočetních schémat DR s kritickým útlumem.

Přehled testovaných schémat je uveden v Tab. 14, kde:

- „S“ značí určení první vlastní frekvence dle nejdelší doby kmitu souřadnice, dle vzorce (5.15); (schémata 21-23).
- „ $U_k$ “ značí určení první vlastní frekvence dle průběhu kinetické energie, dle vzorců (5.16) a (5.15); (schémata 24-25).
- „N“ značí počet oscilací souřadnice z rovnice (5.15) nutných k určení první vlastní frekvence ; (schémata 21-23).
- „ $N_{U_k}$ “ značí počet oscilací kinetické energie z rovnice (5.16) nutných k určení první vlastní frekvence ; (schémata 24-25).

Tab. 14: Přehled schémat DR s kritickým útlumem

číslo schéma	odhad frekvence		počet oscilací	
	S <i>souřadnice</i>	$U_k$ <i>kinetická energie</i>	N <i>souřadnice</i>	$N_{U_k}$ <i>kinetická energie</i>
21	•		0.5	
22	•		1	
23	•		5	
24		•		0.5
25		•		1

### 6.3.3 Výsledky testování schémat

V Tab. 15 až Tab. 30 jsou postupně k dohledání záznamy o všech proběhnutých výpočtech DR s kritickým útlumem (schémata 21-25) a pásmových analýz na jednotlivých numerických úlohách – v tabulkách s lichým označením jsou zaznamenány výpočty DR s kritickým útlumem (schémata 21-25), v tabulkách se sudým označením jsou zaznamenány výpočty z pásmových analýz.

V Tab. 15 až Tab. 30 jsou použity následující zkratky:

- „ $f_1$ “ značí hodnotu odhadu první vlastní frekvence [Hz],
- „ $\alpha$ “ značí velikost koeficientu  $\alpha$ , přičemž  $\alpha = 4\pi f_1$  (pro odhad  $f_1$ )
- „itp“ značí počet iterací předvýpočtu,
- „itv“ značí počet iterací výpočtu (nejsou zahrnuty iterace předvýpočtu),
- „it“ značí celkový počet iterací daného schématu (itp + itv),
- „CPU“ značí spotřebovaný výpočetní CPU čas počítače (v sekundách),
- „ $Z_i$ “ značí  $z$ -souřadnici vybraného uzlu  $i$  (v metrech).

Na Obr. 77 až Obr. 84. jsou pro každou numerickou úlohu zobrazeny na svislé ose výsledky s údajem o počtu iterací z pásmové analýzy (značka modré kolečko), o počtu iterací výpočtu pro schémata s kritickým útlumem založené na odhadu první vlastní frekvence dle nejdelší doby kmitu souřadnice (červený čtvereček) a dle historie kinetické energie (tmavě zelený čtvereček). Na vodorovné ose jsou zobrazeny odpovídající hodnoty koeficientu  $\alpha$ .

Na Obr. 77 až Obr. 84 jsou všemi získanými daty a pro každou numerickou úlohu proloženy po částech kubické Hermitovské interpolační funkce [90] (v grafech značeno modrou plnou čarou). S využitím těchto interpolací bylo následně určeno očekávané teoretické minimum počtu iterací (v grafech označeno fialovou barvou) pro metody s kritickým útlumem. Toto teoretické minimum je dále v kapitole 6.3.5 využito k určení potenciálu metod DR s kritickým útlumem v porovnání s kinetickým útlumem.

### Numerická úloha číslo 1

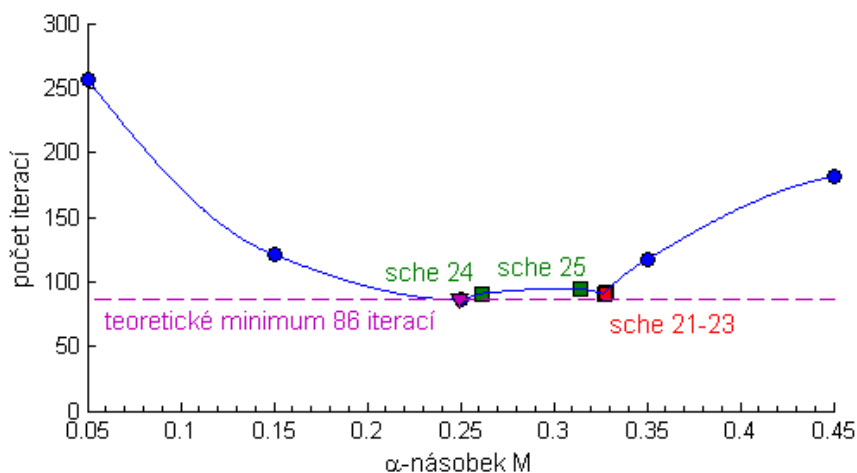
Výpočty schémat s kritickým útlumem pro úlohu 1 jsou zaznamenány v Tab. 15. Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  v rozsahu 0.05 až 0.45 s krokem 0.1 jsou zaznamenány v Tab. 16. Porovnání počtu iterací výpočtu je na Obr. 77. Teoretické minimum počtu iterací pro výpočty s kritickým útlumem je na úrovni 86 iterací.

Tab. 15: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 1 (jednoduchá lanová soustava – proces SO)

schéma	$f_1$	$\alpha$	itp	itv	it	CPU [s]	$z_3$ [m]
21 ( $N=0.5$ )	0.0260	0.3272	97	91	188	1.2	0.3587
22 ( $N=1.0$ )	0.0261	0.3278	116	92	208	0.9	0.3587
23 ( $N=5.0$ )	0.0260	0.3270	270	91	361	1.2	0.3587
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	0.0208	0.2618	13	91	104	0.4	0.3587
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	0.0250	0.3142	21	95	116	0.4	0.3587

Tab. 16: Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  pro numerickou úlohu číslo 1

$\alpha$	itv	CPU [s]	$z_3$ [m]
0.05	257	0.7	0.3587
0.15	121	0.4	0.3587
0.25	86	0.3	0.3587
0.35	117	0.4	0.3587
0.45	181	0.8	0.3587



Obr. 77: Průběh počtu iterací úlohy číslo 1 v závislosti na volbě součinitele útlumu

### Numerická úloha číslo 2

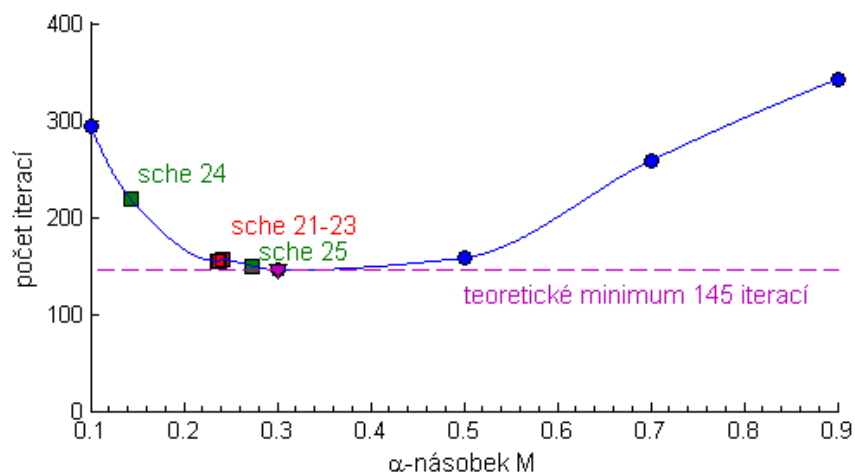
Výpočty schémat s kritickým útlumem pro úlohu 2 jsou zaznamenány v Tab. 17. Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  v rozsahu 0.1 až 0.9 s krokem 0.2 jsou zaznamenány v Tab. 18. Porovnání počtu iterací výpočtu je na Obr. 78. Teoretické minimum počtu iterací pro výpočty s kritickým útlumem je na úrovni 145 iterací.

Tab. 17: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 2 (lanová síť – proces SO)

schéma	$f_1$	$\alpha$	itp	itv	it	CPU [s]	$z_4$ [m]
21 ( $N=0.5$ )	0.0192	0.2417	27	156	183	14.5	9.5963
22 ( $N=1.0$ )	0.0189	0.2371	54	155	209	15.3	9.5963
23 ( $N=5.0$ )	0.0187	0.2353	268	155	423	30.5	9.5963
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	0.0114	0.1428	23	219	242	16.2	9.5963
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	0.0217	0.2732	24	150	174	12.0	9.5963

Tab. 18: Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  pro numerickou úlohu číslo 2

$\alpha$	itv	CPU [s]	$z_4$ [m]
0.10	293	21.2	9.5963
0.30	145	11.2	9.5963
0.50	158	11.3	9.5963
0.70	258	16.8	9.5963
0.90	342	21.6	9.5963



Obr. 78: Průběh počtu iterací úlohy číslo 2 v závislosti na volbě součinitele útlumu

### Numerická úloha číslo 3

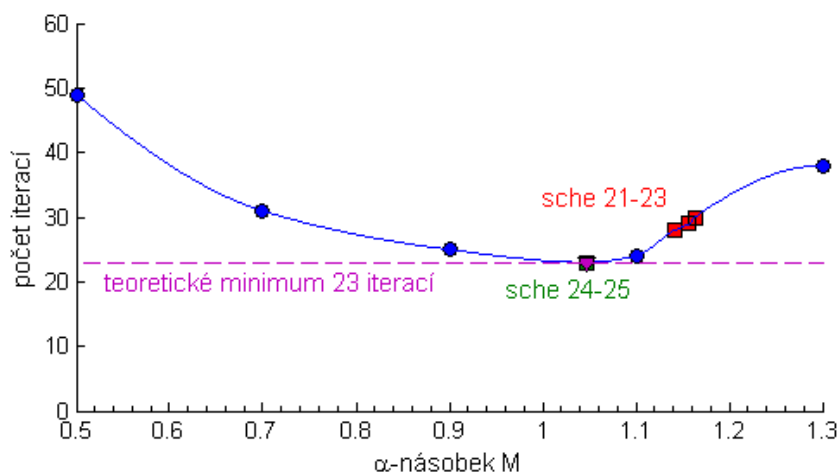
Výpočty schémat s kritickým útlumem pro úlohu 3 jsou zaznamenány v Tab. 19. Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  v rozsahu 0.5 až 1.3 s krokem 0.2 jsou zaznamenány v Tab. 20. Porovnání počtu iterací výpočtu je na Obr. 79. Teoretické minimum počtu iterací pro výpočty s kritickým útlumem je na úrovni 23 iterací.

Tab. 19: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 3 (sedlová lanová střecha – proces FF)

schéma	$f_1$	$\alpha$	itp	itv	it	CPU [s]	$z_{16}$ [m]
21 ( $N=0.5$ )	0.0926	1.1636	28	30	58	1.9	1.3176
22 ( $N=1.0$ )	0.0909	1.1424	34	28	62	1.5	1.3176
23 ( $N=5.0$ )	0.0921	1.1574	77	29	106	2.7	1.3176
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	0.0833	1.0472	4	23	27	0.8	1.3176
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	0.0833	1.0472	7	23	30	0.8	1.3176

Tab. 20: Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  pro numerickou úlohu číslo 3

$\alpha$	itv	CPU [s]	$z_{16}$ [m]
0.50	49	1.4	1.3176
0.70	31	0.7	1.3176
0.90	25	0.6	1.3176
1.10	24	0.6	1.3176
1.30	38	0.9	1.3176



Obr. 79: Průběh počtu iterací úlohy číslo 3 v závislosti na volbě součinitele útlumu

### Numerická úloha číslo 4

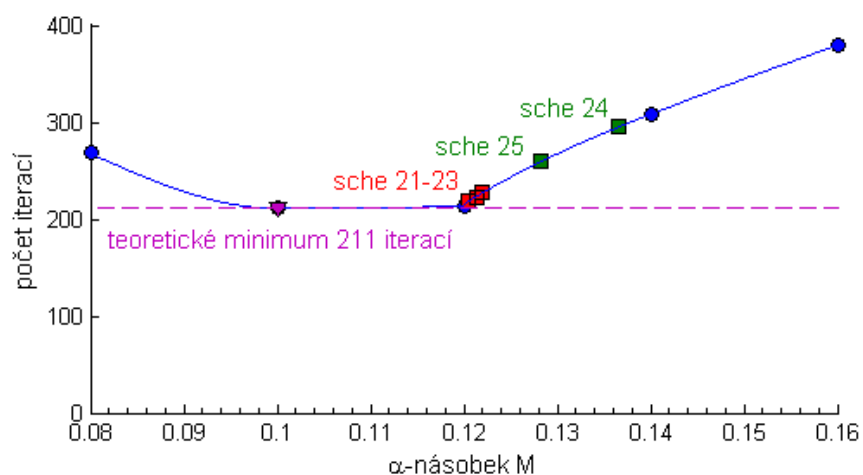
Výpočty schémat s kritickým útlumem pro úlohu 4 jsou zaznamenány v Tab. 21. Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  v rozsahu 0.08 až 0.16 s krokem 0.02 jsou zaznamenány v Tab. 22. Porovnání počtu iterací výpočtů je na Obr. 80. Teoretické minimum počtu iterací pro výpočty s kritickým útlumem je na úrovni 211 iterací.

Tab. 21: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 4 (sedlová lanová střecha – proces SO)

schéma	$f_1$	$\alpha$	itp	itv	it	CPU [s]	$z_{16}$ [m]
21 ( $N=0.5$ )	0.0097	0.1213	261	223	484	11.1	1.3331
22 ( $N=1.0$ )	0.0097	0.1220	310	227	537	12.4	1.3331
23 ( $N=5.0$ )	0.0096	0.1205	731	218	949	20.8	1.3331
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	0.0109	0.1366	24	295	319	7.2	1.3331
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	0.0102	0.1282	50	259	309	7.0	1.3331

Tab. 22: Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  pro numerickou úlohu číslo 4

$\alpha$	itv	CPU [s]	$z_{16}$ [m]
0.08	268	5.3	1.3331
0.10	211	4.3	1.3331
0.12	214	4.2	1.3331
0.14	308	5.9	1.3331
0.16	379	7.4	1.3331



Obr. 80: Průběh počtu iterací úlohy číslo 4 v závislosti na volbě součinitele útlumu

### Numerická úloha číslo 5

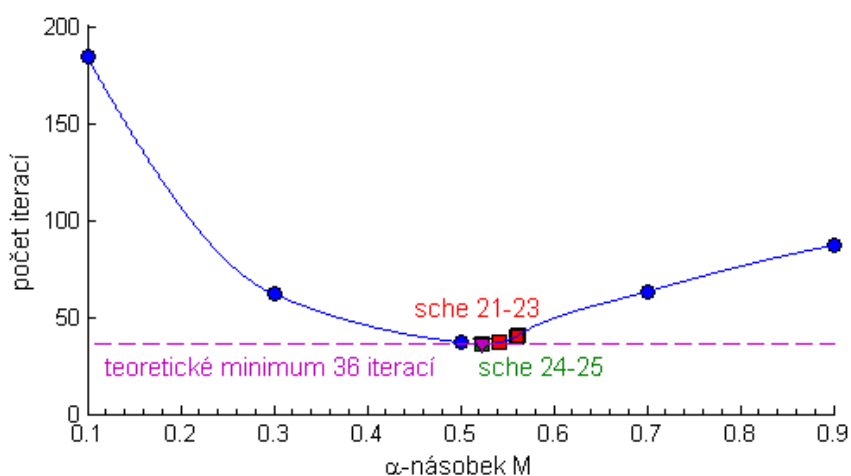
Výpočty schémat s kritickým útlumem pro úlohu 5 jsou zaznamenány v Tab. 23. Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  v rozsahu 0.1 až 0.2 s krokem 0.9 jsou zaznamenány v Tab. 24. Porovnání počtu iterací výpočtů je na Obr. 81. Teoretické minimum počtu iterací pro výpočty s kritickým útlumem je na úrovni 36 iterací.

Tab. 23: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 5 (membránový přístřešek – proces FF)

schéma	$f_1$	$\alpha$	itp	itv	it	CPU [s]	$z_5$ [m]
21 ( $N=0.5$ )	0.0431	0.5417	59	37	96	14.9	-1.5000
22 ( $N=1.0$ )	0.0448	0.5627	69	41	110	17.8	-1.4999
23 ( $N=5.0$ )	0.0446	0.5603	159	40	199	29.9	-1.4998
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	0.0417	0.5236	7	36	43	7.0	-1.5002
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	0.0417	0.5236	13	36	49	8.0	-1.5002

Tab. 24: Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  pro numerickou úlohu číslo 5

$\alpha$	itv	CPU [s]	$z_5$ [m]
0.10	184	25.1	-1.5000
0.30	62	8.8	-1.5001
0.50	37	5.7	-1.5004
0.70	63	9.2	-1.4999
0.90	87	11.8	-1.4998



Obr. 81: Průběh počtu iterací úlohy číslo 5 v závislosti na volbě součinitele útlumu



### Numerická úloha číslo 6

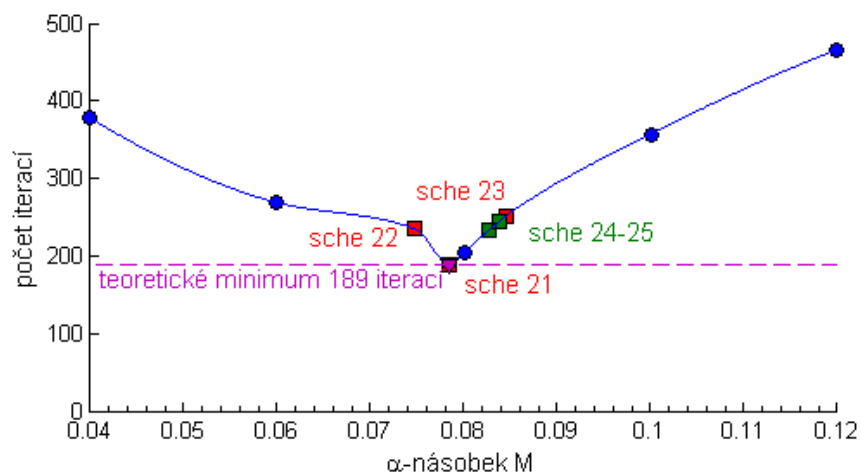
Výpočty schémat s kritickým útlumem pro úlohu 6 jsou zaznamenány v Tab. 25. Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  v rozsahu 0.04 až 0.12 s krokem 0.02 jsou zaznamenány v Tab. 26. Porovnání počtu iterací výpočtů je na Obr. 82. Teoretické minimum počtu iterací pro výpočty s kritickým útlumem je na úrovni 189 iterací.

Tab. 25: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 6 (membránový přístřešek – proces SO)

schéma	$f_1$	$\alpha$	itp	itv	it	CPU [s]	$z_5$ [m]
21 ( $N=0.5$ )	0.0063	0.0785	82	189	271	38.0	-1.1498
22 ( $N=1.0$ )	0.0060	0.0748	169	235	404	54.0	-1.1495
23 ( $N=5.0$ )	0.0067	0.0846	744	252	996	136.1	-1.1499
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	0.0066	0.0827	39	233	272	37.1	-1.1499
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	0.0067	0.0838	76	244	320	43.3	-1.1499

Tab. 26: Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  pro numerickou úlohu číslo 6

$\alpha$	itv	CPU [s]	$z_5$ [m]
0.04	378	51.6	-1.1497
0.06	269	36.3	-1.1497
0.08	204	28.1	-1.1497
0.10	357	48.5	-1.1498
0.12	466	63.3	-1.1498



Obr. 82: Průběh počtu iterací úlohy číslo 6 v závislosti na volbě součinitele útlumu

### Numerická úloha číslo 7

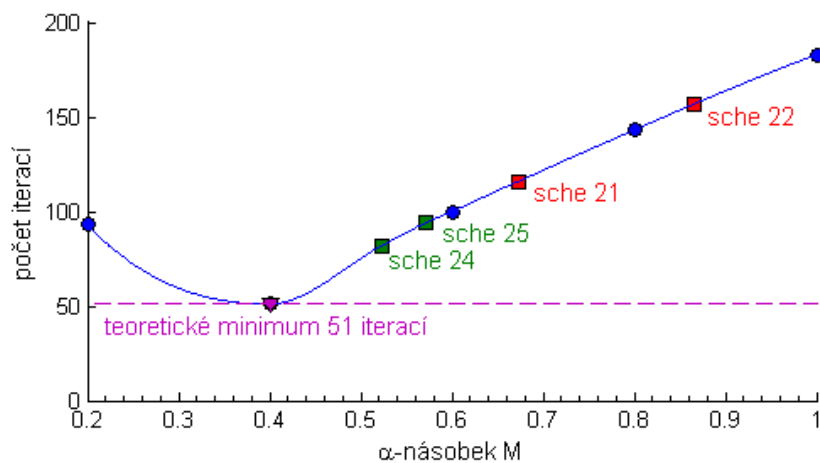
Výpočty schémat s kritickým útlumem pro úlohu 7 jsou zaznamenány v Tab. 27. Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  v rozsahu 0.2 až 1.0 s krokem 0.2 jsou zaznamenány v Tab. 28. Porovnání počtu iterací výpočtů je na Obr. 83. V případě schématu 23 spěly, zřejmě z důvodu nízkých hodnot hmotností, výchyly v předvýpočtu k nekonečnu, výpočet tak zkolaboval. Teoretické minimum počtu iterací pro výpočty s kritickým útlumem je na úrovni 51 iterací.

Tab. 27: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 7 (dvojitá kuželová střecha – proces FF)

schéma	$f_1$	$\alpha$	itp	itv	it	CPU [s]	$z_{13}$ [m]
21 ( $N=0.5$ )	0.0536	0.6732	29	116	145	123.9	-0.1491
22 ( $N=1.0$ )	0.0690	0.8666	30	157	187	158.0	-0.1491
23 ( $N=5.0$ )	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	0.0417	0.5236	7	82	89	76.5	-0.1491
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	0.0455	0.5712	12	94	106	97.0	-0.1491

Tab. 28: Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  pro numerickou úlohu číslo 7

$\alpha$	itv	CPU [s]	$z_{13}$ [m]
0.20	93	72.0	-0.1491
0.40	51	40.3	-0.1490
0.60	100	77.5	-0.1491
0.80	143	110.4	-0.1491
1.00	183	144.7	-0.1491



Obr. 83: Průběh počtu iterací úlohy číslo 7 v závislosti na volbě součinitele útlumu

### Numerická úloha číslo 8

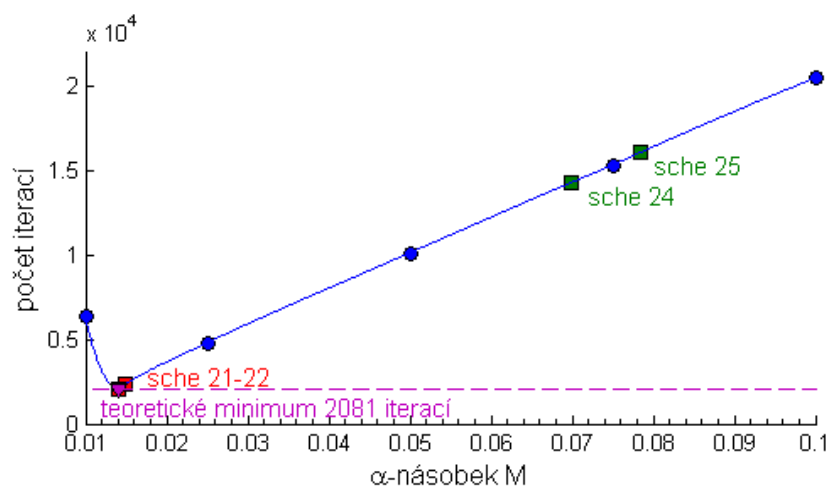
Výpočty schémat s kritickým útlumem pro úlohu 8 jsou zaznamenány v Tab. 29. Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  v rozsahu 0.01 až 0.1 s krokem 0.025 jsou zaznamenány v Tab. 30. Porovnání počtu iterací výpočtů je na Obr. 84. V případě schématu 23 šly výchyly v předvýpočtu k nekonečnu, výpočet tak zkolaboval. Teoretické minimum počtu iterací pro výpočty s kritickým útlumem je na úrovni 2081 iterací.

Tab. 29: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 8 (dvojitá kuželová střecha – proces SO)

schéma	$f_1$	$\alpha$	itp	itv	it	CPU [s]	$z_{13}$ [m]
21 ( $N=0.5$ )	0.0011	0.0141	448	2081	2529	2037.8	-0.0556
22 ( $N=1.0$ )	0.0012	0.0148	852	2313	3165	2534.9	-0.0556
23 ( $N=5.0$ )	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx	xxx
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	0.0056	0.0698	46	14242	14288	12905.3	-0.0556
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	0.0063	0.0785	81	16049	16130	14769.4	-0.0556

Tab. 30: Výsledky pásmové analýzy koeficientu  $\alpha$  pro numerickou úlohu číslo 8

$\alpha$	itv	CPU [s]	$z_{13}$ [m]
0.010	6327	4886.3	-0.0555
0.025	4789	3730.7	-0.0556
0.050	10099	8054.9	-0.0556
0.075	15284	12207.0	-0.0556
0.100	20440	16061.8	-0.0556



Obr. 84: Průběh počtu iterací úlohy číslo 8 v závislosti na volbě součinitele útlumu

### 6.3.4 Zhodnocení výsledků schémat DR s kritickým útlumem

Schémat DR s kritickým útlumem budou vzájemně porovnána na základě dvou hledisek:

- celkový počet iterací,
- odchylka od teoretického minima počtu iterací,

přičemž se bude rozlišovat, zda se jednalo o úlohy procesu FF nebo SO. Výpočetní schéma číslo 23 bude z porovnání vyřazeno, protože u úlohy 7 a 8 zkolabovalo a neprokázala tak svou univerzálnost použití.

#### **Porovnání z hlediska celkového počtu iterací**

V Tab. 31 jsou zaznamenány celkové počty iterací výpočtu schémat 21-22 s odhadem první vlastní frekvence dle nejdelší doby kmitu souřadnice a schémat 24-25 s odhadem nejdelší doby kmitu dle průběhu kinetické energie pro úlohy s procesy SO.

Z Tab. 31 je možné vysledovat, že v součtu všech pěti úloh zaměřených na SO se jako efektivnější jeví postupy založené na odhadu nejnižší frekvence dle nejdelší doby kmitu souřadnice. Autorský postup s odhadem nejnižší frekvence dle historie kinetické energie se jeví jako méně efektivní hlavně u příkladu s větším počtem neznámých.

Z Tab. 31 lze ještě dále vysledovat, že postupy využívající k odhadu první vlastní frekvence pouze polovinu oscilace (schémata 21 a 24) spotřebují menší počet iterací než postupy využívající větší počet oscilací.

Tab. 31: Přehled celkového počtu iterací jednotlivých schémat s kritickým útlumem pro procesy SO

	př.1	př.2	př.3	př.4	př.5		
schéma	SO	SO	SO	SO	SO	$\Sigma$ it	pořadí
21 ( $N=0.5$ )	188	183	484	271	2529	3655	1.
22 ( $N=1.0$ )	208	209	537	404	3165	4523	2.
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	104	242	319	272	14288	15225	3.
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	116	174	309	320	16130	17049	4.

V Tab. 32 jsou zaznamenány celkové počty iterací výpočtu schémat 21-22 s odhadem první vlastní frekvence dle nejdelší doby kmitu souřadnice a schémat 24-25 s odhadem nejdelší doby kmitu dle průběhu kinetické energie pro úlohy s procesy FF.

Z Tab. 32 je možné vysledovat, že v součtu všech tří úloh zaměřených na FF se jako efektivnější jeví autorský postup s odhadem nejnižší frekvence dle historie kinetické energie.

I u těchto úloh lze z Tab. 32 vysledovat, že postupy využívající k odhadu první vlastní frekvence pouze polovinu oscilace (schémata 21 a 24) spotřebují menší počet iterací než postupy využívající větší počet oscilací. Je tedy možné vyvodit obecnější závěry, že k urychlení postupů DR s kritickým útlumem se jeví výhodné odhadovat první vlastní frekvenci pouze na základě poloviny oscilace průběhu nejdelší doby kmitu souřadnice nebo historie kinetické energie.

Tab. 32: Přehled celkového počtu iterací jednotlivých schémat s kritickým útlumem pro procesy FF

	př.3	př.4	př.5		
schéma	FF	FF	FF	$\sum$ it	pořadí
21 ( $N=0.5$ )	58	96	145	299	3.
22 ( $N=1.0$ )	62	110	187	359	4.
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	27	43	89	159	1.
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	30	49	106	185	2.

### ***Porovnání z hlediska odchylky od teoretického minima počtu iterací***

Teoretické minimum počtu iterací bylo u jednotlivých úloh odhadnuto na základě proložení získaných dat o celkovém počtu iterací Hermitovskou interpolační funkcí, viz str. 101. Porovnáním počtu iterací výpočtu u jednotlivých schémat s takto určeným teoretickým minimem můžeme získat informaci o tom, jak jsou jednotlivé postupy vzdálené od „ideálního“ řešení.

V Tab. 33 a Tab. 34 je provedeno toto porovnání, přičemž jsou opět odlišeny úlohy s procesy SO a úlohy s procesy FF. Stanovení odchylky v Tab. 33 a Tab. 34 probíhalo tak, že počet iterací pro danou úlohu a pro dané schéma byl vydělen teoretickým minimem počtem iterací pro danou úlohu a přenásoben stem (aby

bylo získáno procentuální vyjádření). Například v první zkoumané úloze je teoretické minimum na úrovni 86 iterací, schéma 21 však dosáhlo „jen“ na 91 iterací, výsledná procentuální odchylka tak bude:  $91 / 86 \times 100 \approx 106 \%$ .

V předposledním sloupci Tab. 33 a Tab. 34 je pro dané schéma proveden součet ze všech řešených úloh a vydělen počtem úloh, čímž získáme průměrnou odchylku na jednu úlohu. Dle této zprůměrované odchylky je vidět, že v případě procesů SO se postupy s kritickým útlumem využívající k odhadu první vlastní frekvence nejdelší dobu kmitu velmi těsně blíží teoretickému minimu. U procesů FF se naopak velmi blízko teoretickému minimu blíží postupy s kritickým útlumem využívající k odhadu první vlastní frekvence historii kinetické energie.

Tab. 33: Přehled procentuálních odchylek [%] počtu iterací jednotlivých schémat s kritickým útlumem od teoretického minima pro procesy SO

	př.1	př.2	př.3	př.4	př.5		
schéma	SO	SO	SO	SO	SO	průměr	pořadí
21 ( $N=0.5$ )	106	108	106	100	100	104	1.
22 ( $N=1.0$ )	107	107	108	124	111	111	2.
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	106	151	140	123	684	241	3.
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	110	103	123	129	771	247	4.

Tab. 34: Přehled procentuálních odchylek [%] počtu iterací jednotlivých schémat s kritickým útlumem od teoretického minima pro procesy FF

	př.3	př.4	př.5		
schéma	FF	FF	FF	průměr	pořadí
21 ( $N=0.5$ )	130	103	227	154	3.
22 ( $N=1.0$ )	122	114	308	181	4.
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	100	100	161	120	1.
25 ( $N_{uk}=1.0$ )	100	100	184	128	2.

### 6.3.5 Porovnání kritického a kinetického útlumu

Schémat 21 a 24 s kritickým útlumem z kapitoly 6.3.4 budou porovnána se schémata s kinetickým útlumem, konkrétně s nejefektivnějším schématem z kapitoly 6.2.4, což je schéma 12, které má stejné parametry výpočtu tuhosti a rozložení fiktivní hmotnosti po konstrukci, jako schémata s kritickým útlumem.

**Porovnání dle celkového počtu iterací**

V Tab. 35 a Tab. 36 je provedeno srovnání schémat z hlediska celkového počtu iterací zvlášť pro procesy SO a FF.

Z Tab. 35 se dá vyvodit závěr, že pro procesy SO je efektivnější používat postupy s kinetickým útlumem. Naproti tomu z Tab. 36 vyplývá, že pro procesy FF je autorský postup s kritickým útlumem využívající k odhadu první vlastní frekvence historii kinetické energie srovnatelný s postupem s kinetickým útlumem.

Tab. 35: Porovnání celkového počtu iterací schémat DR s kritickým a kinetickým útlumem pro procesy SO

	př.1	př.2	př.3	př.4	př.5		
schéma	SO	SO	SO	SO	SO	$\sum$ it	pořadí
12 (kinetický)	44	82	176	221	1582	2105	1.
21 ( $N=0.5$ )	188	183	484	271	2529	3655	2.
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	104	242	319	272	14288	15225	3.

Tab. 36: Porovnání celkového počtu iterací schémat DR s kritickým a kinetickým útlumem pro procesy FF

	př.3	př.4	př.5		
schéma	FF	FF	FF	$\sum$ it	pořadí
12 (kinetický)	36	47	64	147	1.
21 ( $N=0.5$ )	58	96	145	299	3.
24 ( $N_{uk}=0.5$ )	27	43	89	159	2.

**Potenciál metod s kritickým útlumem**

Zajímavé je provést ještě jedno srovnání. Porovnáme-li počty iterací výpočtu schématu s kinetickým útlumem a teoretického minima počtu iterací schémat s kritickým útlumem, můžeme zjistit, zda se vůbec mohou postupy s kritickým útlumem teoreticky vyrovnat (nebo je dokonce předčít) postupům s kinetickým útlumem, či nikoliv.

Porovnání pro procesy SO a FF je provedeno v Tab. 37 a Tab. 38. Z těchto tabulek vyplývá, že pro procesy SO je pro postupy s kritickým útlumem téměř nemožné dosáhnout menšího počtu iterací, než u postupů s kinetickým útlumem.

U procesů FF je situace odlišná. Při správném a rychlém odhadu nejnižší vlastní frekvence je teoreticky možné, aby postupy s kritickým útlumem spotřebovaly menší počet iterací než postupy s kinetickým útlumem.

Doporučení pro budoucí bádání je, že odhad první vlastní frekvence by měl spotřebovat co nejméně kroků v rámci předvýpočtu. Jednou z možností je využít historii kinetické energie.

Tab. 37: Porovnání celkového počtu iterací schéma DR s kinetickým útlumem a teoretického minima počtu iterací schéma s kritickým útlumem pro procesy SO

	př.1	př.2	př.3	př.4	př.5
schéma	SO	SO	SO	SO	SO
12 (kinetický)	44	82	176	221	1582
teoretické minimum	86	145	211	189	2081

Tab. 38: Porovnání celkového počtu iterací schéma DR s kinetickým útlumem a teoretického minima počtu iterací schéma s kritickým útlumem pro procesy FF

	př.3	př.4	př.5
schéma	FF	FF	FF
12 (kinetický)	36	47	64
teoretické minimum	23	36	51

## 6.4 Ověření věrohodnosti testovaných schémat

Zatímco v předchozích kapitolách 6.2 a 6.3 byly zkoumány otázky ohledně efektivity jednotlivých zkoumaných schémat, tato kapitola by měla prokázat, zda zkoumaná schémata dospěla k relevantním výsledkům.

### 6.4.1 Shoda vypočtených výsledků s referenčními výsledky

Testované příklady číslo 2 (kapitola 6.1.2) a 3 (kapitola 6.1.3) byly převzaty z kvalifikovaných publikací právě s ohledem na to, aby bylo možné porovnat vlastní vypočtené výsledky s ověřenými výsledky.

Příklad číslo 2 (lanová síť) byl již dříve numericky testován v [27]. Při referenčním výpočtu byly taktéž použity lanové elementy (stejně jako při testech



v této práci), jen namísto DR byl použita gradientní „force density method“ (viz kapitola 4.4.6), výsledky je navíc možné ověřit i s daty získanými od jiných autorů.

Srovnání souřadnic uzlů číslo 4 vypočtených v rámci této práce, v rámci práce Denga [27] a v rámci prací jiných autorů je uvedeno v Tab. 39. Je patrné, že souřadnice vypočtené metodou dynamické relaxace mají velmi dobrou shodu s ostatními výpočty, odchylka je v jednotkách milimetrů.

Tab. 39: Srovnání výsledků dynamické relaxace pro příklad 2 s jinými autory

zdroj	souřadnice uzlu číslo 5 [metry]		
	x	y	z
aktuální výsledky – lanový element, schéma 12	15.2804	15.2804	-9.5963
Deng [27] – lanový element, gradientní force density method	15.2805	15.2805	-9.5945
West a Kar [91] – nosníkový element	15.2804	15.2804	-9.5920
Jayaraman a Knudson [92] – řetězovkový element	15.2796	15.2802	-9.5873
Jayaraman a Knudson [92] – nosníkový element	15.2802	15.2802	-9.5922

Numerické výsledky příkladu číslo 3 (pro procesy FF i SO) je možné srovnat s výsledky numerických výpočtů Lewisové uvedených v [13]. Z Tab. 40 a Tab. 41 vyplývá, že shoda výsledků je při dané přesnosti téměř dokonalá, lze tak usuzovat, že navržené algoritmy DR pro konstrukce s lanovými a prutovými prvky fungují pro FF i SO velmi dobře a dosažené výsledky jsou relevantní.

Tab. 40: Srovnání výsledků dynamické relaxace pro příklad 3 (FF) s jinými autory

příklad číslo 3 (proces FF)						
uzel	aktuální výsledky			Lewisová [13]		
	x [m]	y [m]	z [m]	x [m]	y [m]	z [m]
7	4.0000	4.0000	0.8195	4.0000	4.0000	0.8195
8	8.0000	4.0000	1.4096	8.0000	4.0000	1.4096
9	12.0000	4.0000	1.6769	12.0000	4.0000	1.6769
14	4.0000	8.0000	0.6870	4.0000	8.0000	0.6870
15	8.0000	8.0000	1.1478	8.0000	8.0000	1.1478
16	12.0000	8.0000	1.3176	12.0000	8.0000	1.3176

Tab. 41: Srovnání výsledků dynamické relaxace pro příklad 3 (SO) s jinými autory

příklad číslo 3 (proces SO)						
	aktuální výsledky			Lewisová [13]		
uzel	x [m]	y [m]	z [m]	x [m]	y [m]	z [m]
7	3.9957	4.0006	0.8457	3.9957	4.0006	0.8457
8	7.9979	4.0012	1.4276	7.9979	4.0012	1.4276
9	12.0000	3.9997	1.6790	12.0000	3.9997	1.6790
14	3.9970	8.0000	0.7107	3.9971	8.0000	0.7107
15	7.9987	8.0000	1.1673	7.9987	8.0000	1.1674
16	12.0000	8.0000	1.3331	12.0000	8.0000	1.3331

#### 6.4.2 Shoda vypočtených výsledků s komerčním programem

Geometrie testovacího příkladu číslo 4 membránové konstrukce byla volena tak, aby bylo možné velmi snadno ověřit relevantnost výsledků v rámci FF procesu. Ze základní geometrie totiž vyplývá, že, bez ohledu na zvolený stupeň předpětí nebo velikost dělení konečných prvků, by uzel ve středu konstrukce (uzel číslo 5) měl mít  $z$ -souřadnici rovnou polovině výšky konstrukce  $H$ . Pro výšku konstrukce  $H = 3$  metry by tak  $z$ -souřadnice uzlu měla být rovna 1.5 metru, což dle Tab. 42 (poslední sloupec) platí. Vypočtené odchylky se pohybují v řádech desetin milimetru, což je pro dané parametry konstrukce a výpočtu naprosto dostačující.

Pro ověření výsledků příkladu číslo 4 při řešení odezvy na statické zatížení bylo použito komerčního programu RFEM [80]. V programu byla vymodelovaná stejná konstrukce jako v příkladu číslo 4. Dělení konstrukce na konečné prvky bylo nastaveno tak, aby počet stupňů volnosti v komerčním programu přibližně odpovídal počtu stupňů volnosti v autorském programu CAME (viz kapitola 7).

Srovnání výsledků je uvedeno v Tab. 42. Odchylka výsledků je přibližně jeden milimetr, což je při daných rozměrech konstrukce naprosto dostačující shoda.

Tab. 42: Srovnání výsledků pro příklad 4 (SO) dosažených programy CAME a RFEM

příklad číslo 4 (SO) – model s přibližně 250 stupni volnosti		
	z- souřadnice uzlu 5 [m]	
zatížení	CAME	RFEM [80]
$f_z = 0.2 \text{ kN/m}^2$	-1.1497	-1.1488

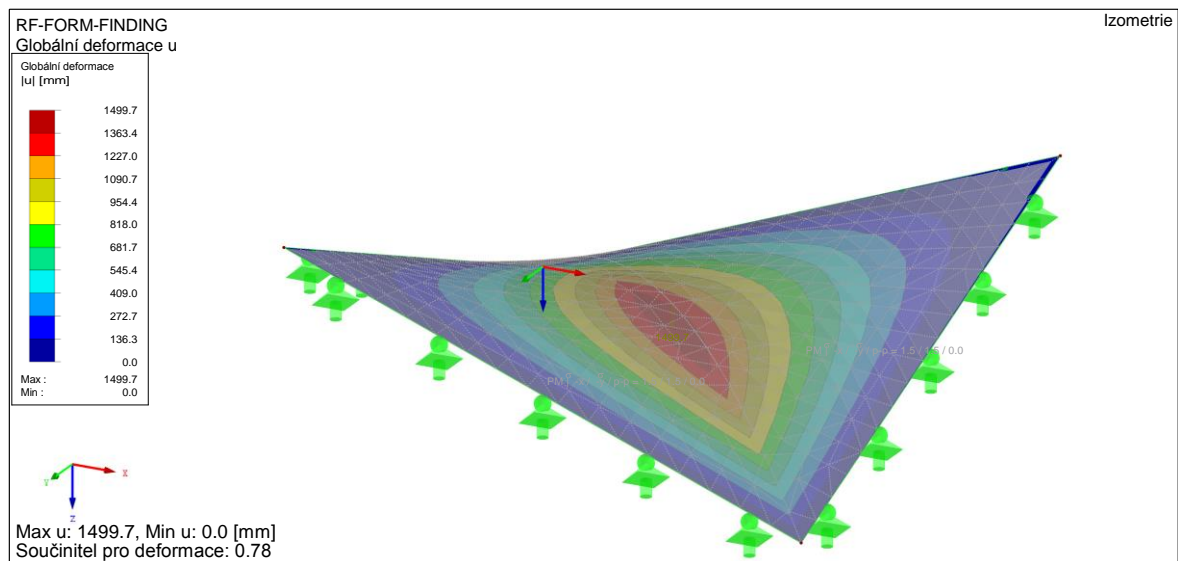
Dále bylo v obou programech provedeno zhuštění sítě konečných prvků tak, aby počet stupňů volnosti byl přibližně kolem 1000. Tento numerický model byl dále zatížen v třech zatěžovacích stavech s plošným zatížením  $f_z = 0.2 \text{ kN/m}^2$ ,  $0.5 \text{ kN/m}^2$  a  $0.8 \text{ kN/m}^2$ .

Zaznamenané průhyby konstrukce ( $z$ -souřadnice uzlu 4) jsou pro všechny zatěžovací stavy uvedeny v Tab. 43. I zde jsou maximální odchylky v řádech jednotek milimetrů, což je pro geometricky nelineární úlohy s velkými posuny dostatečná přesnost.

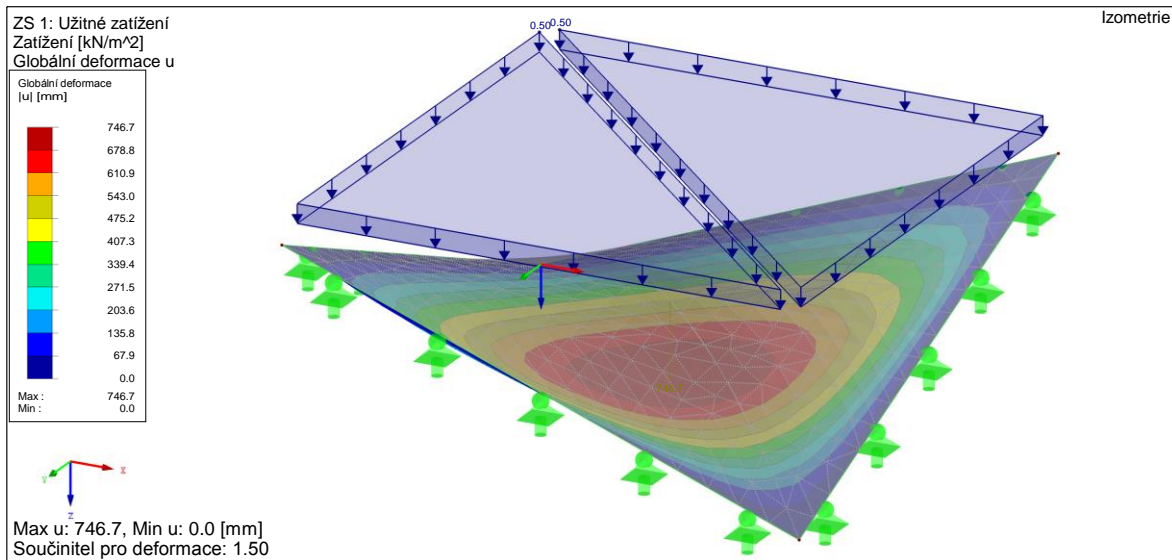
Výsledky pro model RFEM pro proces SO a pro zatížení  $f_z = 0.5 \text{ kN/m}^2$  je k vidění na Obr. 85, respektive Obr. 86.

Tab. 43: Srovnání výsledků pro příklad 4 (SO) pro podrobnější dělení konstrukce a různými velikostmi uvažovaného plošného zatížení

příklad číslo 4 (SO) – model s přibližně 1000 stupni volnosti		
	z - souřadnice uzlu 4 [m]	
zatížení	CAME	RFEM [80]
$f_z = 0.2 \text{ kN/m}^2$	-1.1528	-1.1511
$f_z = 0.5 \text{ kN/m}^2$	-0.7541	-0.7536
$f_z = 0.8 \text{ kN/m}^2$	-0.4750	-0.4687



Obr. 85: Výsledky FF procesu pro příklad 4 s dělením přibližně na 1000 stupňů volnosti v programu RFEM [80]



Obr. 86: Výsledky tytéž konstrukce v programu RFEM při svislém zatížení 0.5 kN/m<sup>2</sup> [80]

### 6.4.3 Závěry pro ověření věrohodnosti

Na základě srovnání výsledků lanových konstrukcí s referenčními výsledky a membránových konstrukcí s komerčním programem lze zřejmě konstatovat, že výsledky získané postupy metodou DR a zapracované do prototypu autorského skriptu jsou dostatečně relevantní a přesné a mohou být použity pro řešení rozsáhlejších lanoplachtových konstrukcí.

### 6.5 Závěry z testování schémat

Na základě testů schémat DR provedených na osmi vybraných různorodých numerických úlohách pro lanoplachtové konstrukce lze konstatovat, že:

- Schémata s kinetickým útlumem mající fiktivní hmotnost rozloženou úměrně tuhostem jednotlivých uzlů vykazují rychlejší a stabilnější konvergenci než ostatní schémata. Příliš při tom nezáleží, zda je uzlová tuhost počítána jako součet absolutních hodnot jednotlivých složek nebo jako součet liniových tuhostí z elementů připojených do uzlů. Roli také nehraje to, zda je, nebo není, hmotnost přepočtena po restartu kinetické energie, ani se nejeví zásadní to, zda je použito lineární či parabolické aproximace vrcholu kinetické energie.
- Pro procesy SO je pro postupy s kritickým útlumem téměř nemožné dosáhnout menšího počtu iterací, než u postupů s kinetickým útlumem.

- U procesů FF je situace odlišná. Při správném a rychlém odhadu nejnižší vlastní frekvence je teoreticky možné, aby postupy s kritickým útlumem spotřebovaly menší počet iterací než postupy s kinetickým útlumem. Odhad první vlastní frekvence by však měl v rámci předvýpočtu spotřebovat co nejméně iteračních kroků. Jako velmi zdařilé se jeví použití autorského postupu využívající k odhadu nejnižší vlastní frekvence historii kinetické energie. Pro tento postup se jeví jako nejvýhodnější odhadovat první vlastní frekvenci na základě poloviny oscilace historie kinetické energie.
- Na základě srovnání výsledků lanových konstrukcí s referenčními výsledky a membránových konstrukcí s komerčním programem lze zřejmě konstatovat, že výsledky získané postupy metodou DR a zapracované do prototypu autorského skriptu jsou dostatečně relevantní a přesné a mohou být použity pro řešení rozsáhlejších lanoplachtových konstrukcí.
- K obecnějším závěrům by bylo nutné schémata ověřit na několika dalších desítkách příkladů, což přesahuje kapacitu této práce.

## 7 AUTORSKÝ SKRIPT

Pro účely testování jednotlivých metod a pro řešení jednodušších i rozsáhlejších 3D úloh lanoplachtových konstrukcí byl autorem během doktorského studia vyvinut prototyp programu (skript) v prostředí MATLAB [89], který nese název CAME (zkratka z anglického názvu „cable-membrane“ pro lanoplachtové konstrukce) a který je s pomocí konečně-prvkové diskretizace a s využitím výše uvedených popsaných numerických metod schopen řešit rovnováhu lanoplachtové konstrukce.

Program umožňuje řešení form-finding (FF) procesu analýzy lanoplachtové konstrukce a řešení statické odezvy (SO) lanoplachtové konstrukce. Program dále umožňuje variabilně volit různá schémata dynamické relaxace (DR) a díky vlastnímu zabudovanému generátoru konečných prvků je možné ovlivňovat způsob diskretizace konstrukce volbou maximální velikosti konečných prvků.

Program CAME využívá prostředí programu MATLAB a některých jeho zabudovaných funkcí. Řada další přidružených funkcí byla vytvořena autorem. Vstupy do programu se zadávají pomocí textových souborů. Výstupy z programu jsou taktéž v podobě textových souborů a lze je zobrazit s pomocí grafických nástrojů programu MATLAB nebo s pomocí jiných grafických programů.

### 7.1 Části programu

Samotný program je tvořen několika ucelenými částmi (generátor konečných prvků pro FF, interpolátor pro FF, řešič FF, generátor konečných prvků pro SO, řešič SO). Program lze využít pro samostatné řešení FF procesu lanoplachtových konstrukcí, pro řešení SO lanoplachtové konstrukce anebo pro řešení obou fází současně.

Následuje stručný popis jednotlivých částí programu. Podrobnější manuál k programu je nachází na přiloženém CD nosiči.

#### 7.1.1 Generátor konečných prvků pro FF

Diskretizace konstrukce probíhá ve dvou fázích. V první fázi je „kostra“ konstrukce (lana a hrany membrány) rovnoměrně rozdělena na požadovaný počet konečných prvků nebo na díly s požadovanou velikostí konečných prvků. V druhé fázi je pak

„výplň“ konstrukce (rovinná plocha membrány) rozdělena na trojúhelníkové konečné prvky s maximální požadovanou délkou hran. K triangulaci se využívá zabudované funkce „initmesh“ v programu MATLAB založené na Delaunayho triangulaci [81] s definovanou maximální velikostí přepon.

Dle rozsahu zadání přiřadí generátor jednotlivým konečným prvkům parametry buď pouze pro FF, anebo pro FF a zároveň pro SO.

### **7.1.2 Generátor konečných prvků pro SO**

Je vystaven na stejných základech, jako generátor pro FF, popsáný v kapitole 7.1.1. Dle zadání přiřadí generátor jednotlivým prvkům parametry pro SO.

### **7.1.3 Interpolátor FF**

Vložená pomůcka, která může být využita pro FF proces. Umožňuje u vygenerovaného konečně-prvkového zadání pro FF ještě před samotným řešením úlohy upravit  $z$ -souřadnici uzlů nepodepřených ve svislém směru. Stejnou konstrukci je tak možné řešit z různých počátečních poloh zadání, a testovat tak např. správnost použitého řešiče, aniž by bylo nutné nově generovat konečné prvky.

### **7.1.4 Řešiče FF**

Program v současné době umožňuje řešení FF procesu s pomocí metody DR, u níž je možné volit z široké palety různých výpočetních schémat.

Je možné přepínat mezi kritickým a kinetickým útlumem. Je možné ručně zadat velikost fiktivních parametrů (časový krok, hmotnost, součinitel útlumu) anebo použít algoritmu pro automatické nastavení fiktivní hmotnosti, případně součinitele útlumu, dle zadaných kritérií. Je možné automatické nastavení hmotnosti pro celou konstrukci stejně, anebo odlišně pro jednotlivé uzly (případně i stupně volnosti).

U schémat s kritickým útlumem se pro automatizaci využívá předvýpočtu pro určení nejnižší frekvence, na jejímž základě je možné stanovit odhad kritického útlumu konstrukce. Je možné vybírat mezi odhadem nejnižší frekvence na základě nejdelší doby kmitu souřadnice nebo na základě autorského postupu dle historie kinetické energie. U schématu s kinetickým útlumem je možné volit mezi lineární a

parabolickou aproximací vrcholu kinetické energie a je možné zadat, zda se má fiktivní hmotnost po restartu kinetické energie znovu přepočíst, či nikoliv.

### 7.1.5 Řešiče SO

Program v současné době umožňuje řešení SO procesu s pomocí metody DR a je možné nastavení stejných parametrů výpočtu jako u řešiče FF, viz kapitola 7.1.4.

## 7.2 Rozsah úloh

Program umožňuje řešení 3D konstrukce sestávající se z lan (1D prvky) a plachet (2D prvky), přičemž lano může být zároveň součástí hrany membrány. Program využívá konečných prvků blíže popsanych v kapitole 4.3.

Program pracuje s kartézským souřadným systémem a umožňuje zadávání bodového, liniového a plošného zatížení rozloženého do jednotlivých globálních směrů  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Dále je možné jednotlivým uzlům a liniím přiřadit pevné podepření pro vybrané směry  $x$ ,  $y$  a  $z$ .

Předpětí lanových elementů u FF procesu je možné definovat za pomoci požadované konstantní síly v laně, jejího konstantního horizontálního nebo vertikálního průmětu, anebo předepsanou konstantní hustotou síly. Předpětí plošných prvků u FF procesu je možné pro jednotlivé hrany trojúhelníkových konečných prvků definovat obdobně jako u samotných lan (méně obvyklá varianta), anebo zadaným konstantním rovnoměrným napětím na celé membráně, případně jeho konstantním horizontálním průmětem (obvyklá varianta).

Počáteční předpětí (tzn. předpětí na začátku výpočtu) u procesu SO je možné zavést buď tak, jak bylo popsáno pro FF proces, anebo s pomocí výrobních délek lan, respektive hran trojúhelníkových konečných prvků membrán.



## 8 PRAKTICKÉ APLIKACE

K ověření teoretických poznatků analýzy lanoplachtových konstrukcí z předchozích kapitol je vhodné použíté numerické postupy otestovat a porovnat s některými vybranými praktickými konstrukcemi.

Pro srovnání je v této práci vybrána lanoplachtová konstrukce zastřešení tramvajové zastávky „K Barrandovu“ v Praze [93], u které je k dispozici geodetické zaměření, původní (i když nepříliš podrobný) statický výpočet a měření sil v lanech in-situ.

### 8.1 Zastřešení tramvajové zastávky K Barrandovu v Praze

#### 8.1.1 Popis konstrukce

Popis konstrukce vychází z článku [70]:

*„Jednou z nejsložitějších membránových konstrukcí u nás je zastřešení tramvajové stanice „K Barrandovu“ v Praze 5. Podoba konstrukce a její umístění v katastru Prahy 5 je zřejmé z Obr. 7 a Obr. 87. Nosná konstrukce zastřešení stanice je složena ze tří konstrukčních částí:*

- *překlenutí jízdní dráhy pomocí ocelových oblouků s částečným pevným zasklením,*
- *přemostění zavěšenou lávkou na ocelových trubkových obloucích,*
- *zastřešení vstupních částí a perónu membránovými konstrukcemi.*

*Tramvajová zastávka Barrandov byla navržena v roce 2003. Zastřešení bylo zajímavě architektonicky řešeno s využitím membránových konstrukcí, které umožnily vytvořit zborcené plochy. Statický výpočet [94] odpovídal době, kdy u nás s podobnými konstrukcemi nebyly žádné zkušenosti. Síly formující tvar nebyly uvedené, lze dohledat pouze síly od zatížení sněhem  $s = 0,75 \text{ kN/m}^2$  a sání větrem  $w = 1 \text{ kN/m}^2$ . Největší síla v kotevním lanu byla vyčíslena na  $N_f = 146 \text{ kN}$ , při únosnosti  $N_d = 280 \text{ kN}$ .*

*Konstrukce membránového zastřešení vstupních částí je provedena firmou KONTIS Praha s.r.o. z membrán, které jsou napínány ocelovými lany do ocelových příhradových sloupů (viz Obr. 87). Sloupy jsou kotveny lany*

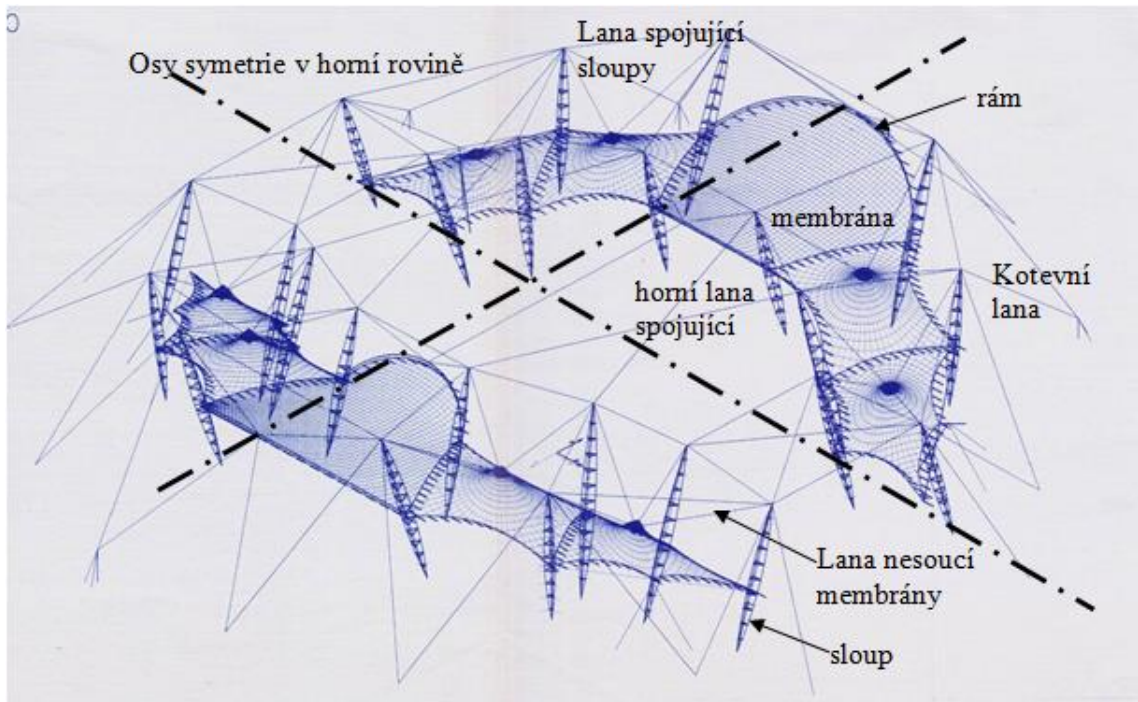
k základovým patkám. Pletená ocelová lana jsou tedy jedním z hlavních nosných prvků stavby.

Konstrukce zastřešení je téměř dvouose symetrická se čtyřmi ocelovými rámy nesoucími dvě největší membrány na ose symetrie (viz Obr. 88 a Obr. 89). Jednotlivé nosné prvky jsou následující - 10 plachet Precontraint - Serge Ferrari, 24 ocelových příhradových sloupů, 4 ocelové rámy a 110 lan.

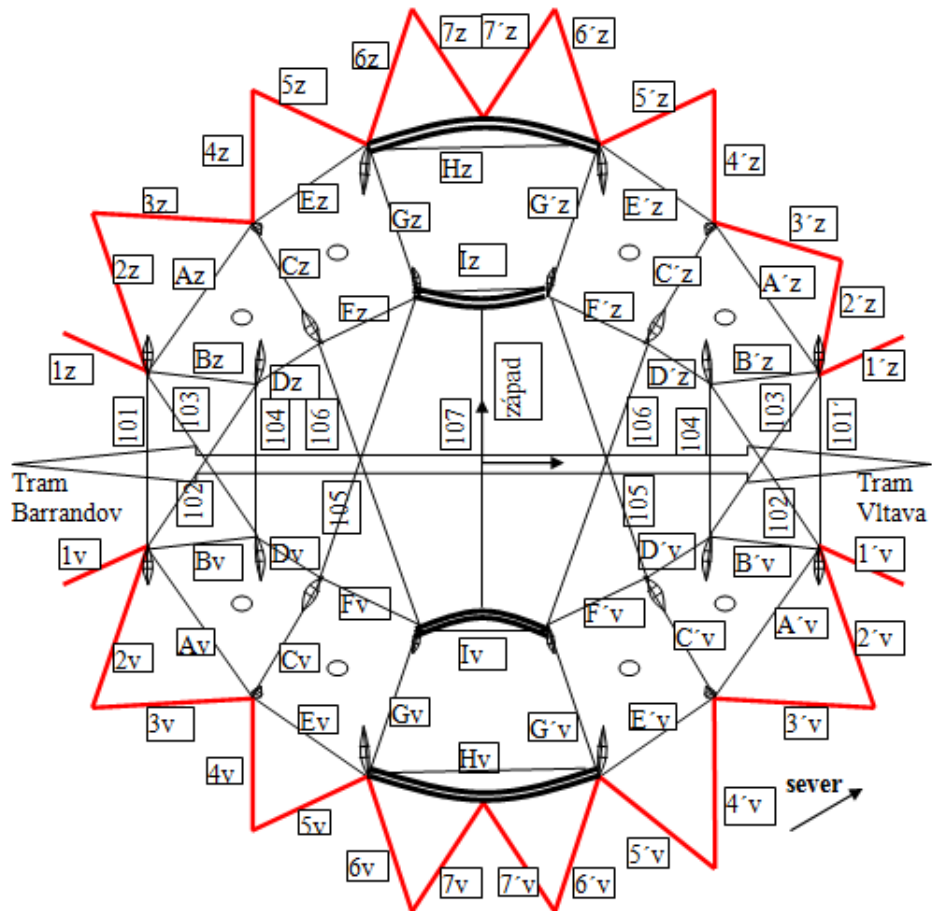
Lana jsou z oceli dle ČSN 024311 a jsou rozdělena na 28 vnějších kotevních lan ( $\varnothing 23,6\text{mm}$ ), 16 horních lan ( $\varnothing 21,2\text{mm}$ ) spojujících dvě části, 32 lan ( $\varnothing 21,2\text{mm}$ ) spojujících sloupy v jednotlivých částech, 32 lan ( $\varnothing 21,2\text{mm}$ ) nesoucích membrány.“



Obr. 87: Boční (jižní) pohled na zkoušenou konstrukci [70]



Obr. 88: Prostorové schéma konstrukce [95; 70]



Obr. 89: Označení měřených lan v půdoryse [96; 70]

### 8.1.2 Naměřené sil v kotevních lanech

Na konci července roku 2013, konkrétně ve dnech 25. a 26. 7. 2013, byla kotevní obvodová lana konstrukce vzhledem k zjištěné nedostatečné úrovni předeprnutí znovu předeprnuta.

Pro získání sil v lanech in-situ byl použit přístroj a postup z kapitoly 3.3.2. Naměřené síly v lanech mají hodnoty uvedené v Tab. 44 [71; 70].

Tab. 44: Síly v lanech získané z měření in-situ [71; 70]

Síly v lanech [kN]						
$T_{1v}$	$T_{2v}$	$T_{3v}$	$T_{4v}$	$T_{5v}$	$T_{6v}$	$T_{7v}$
24.4	11.1	11.8	15.1	10.0	5.6	5.8

### 8.1.3 Numerické modelování

Na základě geodetického zaměření z října roku 2013 [97], byl připraven numerický model této konstrukce. Vzhledem k dvouosové symetrii konstrukce byla modelována pouze  $\frac{1}{4}$  zastřešení.

Kotvení obvodových lan do kotevních bloků je modelováno jako pevná kloubová podpora. Uzel, kde jsou lana připnuta ke svislým ocelovým pylonům, je modelován jako svislá posuvná podpora (vyvíjený řešič zatím neumí pracovat s nosníkovými elementy). Membrány jsou modelovány s pomocí trojúhelníkových elementů, viz Obr. 91.

Schéma numerického modelu je na Obr. 90. V Tab. 45 jsou zaznamenány souřadnice uzlů na počátku výpočtu (tučně zvýrazněná čísla jsou předmětem výpočtu). V Tab. 46 jsou pak zaznamenány výrobní délky jednotlivých obvodových lan.

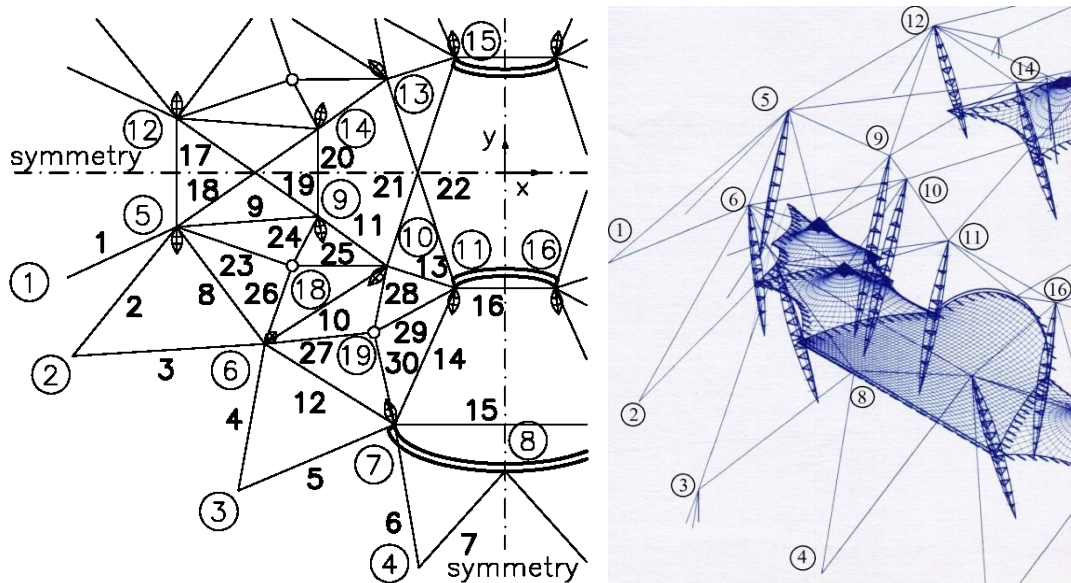
Výpočetní parametry lan jsou následující:

- lana 1 – 7:  $E = 160 \text{ GPa}$ ,  $\varnothing 23.6 \text{ mm}$ ,  $A = 230 \text{ mm}^2$ ,  $q = 0.021 \text{ kN/m}$
- lana 8 – 30:  $E = 160 \text{ GPa}$ ,  $\varnothing 21.2 \text{ mm}$ ,  $A = 180 \text{ mm}^2$ ,  $q = 0.017 \text{ kN/m}$
- lana 31 – 37:  $E = 160 \text{ GPa}$ ,  $\varnothing 21.2 \text{ mm}$ ,  $A = 180 \text{ mm}^2$ ,  $q = 0.017 \text{ kN/m}$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti,  $\varnothing$  je průměr lana,  $A$  je průřezová plocha lana a  $q$  je svislé liniové zatížení lana od vlastní tíhy.

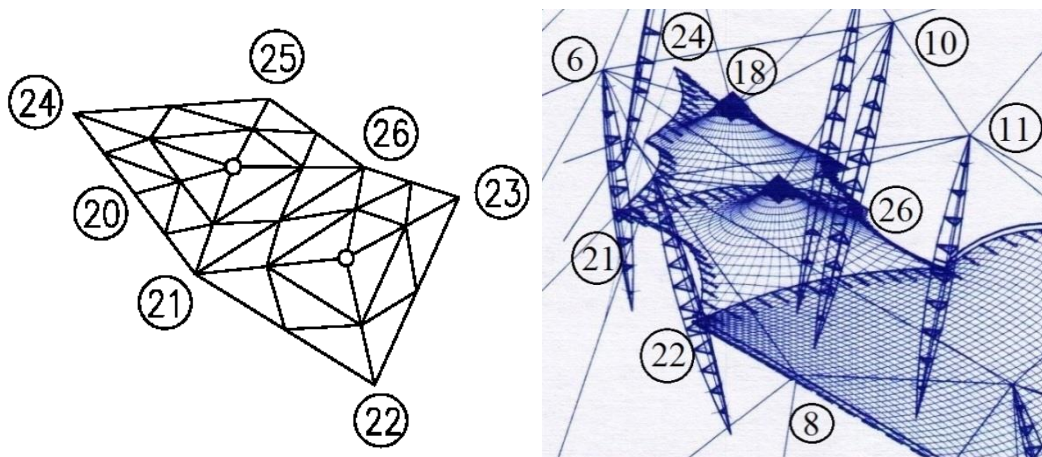
Výpočetní parametry membrán jsou: modul pružnosti  $E = 700 \text{ N/mm}^2$ , tloušťka membrány  $t = 2 \text{ mm}$ , Poissonův součinitel příčné roztažnosti  $\nu = 0.2$ , plošné svislé rovnoměrné zatížení  $f_z = 0.01 \text{ kN/m}^2$ .

Přesnost výpočtu řešiče DR byla nastavena na  $R_{lim} = 0.1 \text{ kN}$ . Větší přesnost nebyla vzhledem k přesnosti geodetického měření ( $\pm 0.01 \text{ metru}$ ) nutná.



Obr. 90: Schéma numerického modelu – půdorys (vlevo) a perspektivní pohled (vpravo)

[39]



Obr. 91: Schéma uzlů 18 až 26 půdorys (vlevo) a perspektivní pohled (vpravo) [39]

Tab. 45: Uzlové souřadnice modelu na začátku výpočtu. Tučně zvýrazněné souřadnice jsou předmětem výpočtu.

	souřadnice [m]				souřadnice [m]		
uzel	x	y	z	uzel	x	y	z
1	-28.600	-8.475	-3.148	14	-15.330	5.040	-12.430
2	-26.500	-16.900	-5.100	15	-4.400	11.070	-14.970
3	-15.600	-25.300	-5.000	16	4.450	-11.340	-14.990
4	-5.000	-31.000	-7.030	17	7.880	-21.810	-16.780
5	<b>-24.000</b>	<b>-6.000</b>	-12.330	18	<b>-15.000</b>	<b>-10.000</b>	<b>-10.000</b>
6	<b>-15.000</b>	<b>-15.000</b>	-14.290	19	<b>-12.000</b>	<b>-15.000</b>	<b>-11.500</b>
7	<b>-8.000</b>	<b>-18.000</b>	-16.690	20	-18.810	-11.200	-7.520
8	-0.390	-23.530	-14.050	21	-15.300	-15.760	-8.830
9	<b>-15.000</b>	<b>-8.000</b>	-12.410	22	-7.950	-19.740	-10.510
10	<b>-12.000</b>	<b>-10.000</b>	-14.400	23	-4.540	-12.190	-10.400
11	<b>-4.000</b>	<b>-13.000</b>	-14.920	24	-22.590	-7.370	-7.250
12	-22.710	5.860	-12.430	25	-15.190	-6.820	-6.020
13	-10.990	8.050	-14.350	26	-11.790	-9.300	-7.730

Tab. 46: Přehled délek jednotlivých lan

lano	délka [m]	lano	délka [m]	lano	délka [m]
1	11.221	14	11.040	27	6.680
2	13.618	15	15.710	28	6.790
3	14.342	16	8.880	29	6.950
4	13.024	17	11.880	30	9.260
5	14.535	18	13.260	31	5.388
6	13.831	19	13.220	32	5.902
7	11.238	20	10.110	33	8.526
8	12.540	21	20.350	34	8.285
9	7.340	22	20.350	35	8.249
10	9.150	23	8.020	36	4.543
11	5.450	24	5.550	37	7.522
12	9.670	25	7.050		
13	7.510	26	8.000		

### 8.1.4 Porovnání výsledků

V Tab. 47 jsou zaznamenány a porovnány vypočtené síly z numerického modelu konstrukce se silami získaných ze zaměření konstrukce. K ověření správnosti výsledků je dále srovnána  $z$ -souřadnice uzlů 18 a 19, která je porovnána s geodetickým zaměřením [97].

Z porovnání vyplývá, že výsledky numerického výpočtu dávají velmi dobrou shodu s experimentálním měřením.

Tab. 47: Porovnání vypočtených sil numerického modelu konstrukce „K Barrandovu“ s naměřenými silami in-situ a geodetickým zaměřením souřadnic

model	síly v lanech [kN]							souřadnice [m]	
	$T_{1v}$	$T_{2v}$	$T_{3v}$	$T_{4v}$	$T_{5v}$	$T_{6v}$	$T_{7v}$	$Z_{18}$	$Z_{19}$
měření in-situ [71; 70], zaměření [97]	24.4	11.1	11.8	15.1	10.0	5.6	5.8	9.60	11.66
numerický model	17.8	10.5	5.7	11.5	9.9	4.1	7.0	9.54	11.55

## 9 SHRNUTÍ A ZÁVĚR

V rámci této práce byl podán informativní přehled o historii a současné výstavbě lanoplachtových konstrukcí u nás i ve světě a byl uveden základní přehled používaných materiálů. Podrobněji se práce zabývala numerickým modelováním procesů form-finding a řešení statické odezvy na působící zatížení. Byla představena metodika numerického modelování včetně přehledu používaných výpočetních metod a podrobného popisu použitých výpočetních elementů.

Stěžejní část práce představoval podrobný rozbor metody dynamické relaxace, která patří do skupiny iteračních metod a zvláště u lanoplachtových a jim přidružených typů konstrukcí představuje zajímavou alternativu k maticovým metodám. Rychlost a konvergence metody dynamické relaxace je závislá na volbě fiktivních parametrů a na typu použitého útlumu. Na základě teoretického rozboru metody bylo navrženo a otestováno jednadvacet schémat postupů, které byly v rámci této práce vzájemně porovnány a to zejména z hlediska rychlosti a stability výpočtu.

Testovaná schémata se lišila způsobem použitého útlumu (kritický x kinetický), způsobem určení tuhosti styčnicků (součet liniové tuhosti všech prvků x součet absolutních hodnot liniových tuhostí z jednotlivých směrů) a způsobem rozložení fiktivní hmotnosti po konstrukci (jednotná hmotnost ve všech uzlech konstrukce x hmotnost určená pro každý uzel zvlášť).

U schémat s kinetickým útlumem bylo pak dále zkoumáno to, zda má na rychlost a stabilitu výpočtu vliv přepočtení hmotnosti po restartu kinetické energie, či nikoliv, a zda způsob aproximace vrcholu kinetické energie (lineární x parabolický) dokáže výpočet urychlit, či nikoliv.

U schémat s kritickým útlumem bylo navrženo vlastní schéma postupu založené na odhadu nejnižší vlastní frekvence na základě průběhu kinetické energie. Toto autorské schéma bylo porovnáno s používaným odhadem frekvence dle nejdelší doby kmitu souřadnice a byl také zkoumán vliv volby počtu nutných oscilací v předvýpočtu na přesnost odhadu první vlastní frekvence.

Pro účely testování bylo provedeno dohromady osm numerických úloh, k čemuž bylo využito dohromady pěti různých konstrukcí. Typ a tvar konstrukcí a



rozsah úloh byl volen tak, aby testování probíhalo na jednoduchých i složitějších konstrukcích, což mělo za cíl prokázat použitelnost schémat na co nejširším spektru úloh. Na základě provedených testů lze konstatovat, že:

- Schémata s kinetickým útlumem mající fiktivní hmotnost rozloženou úměrně tuhostem jednotlivých uzlů vykazují rychlejší a stabilnější konvergenci než ostatní schémata. Příliš při tom nezáleží, zda je uzlová tuhost počítána jako součet absolutních hodnot jednotlivých složek nebo jako součet liniových tuhostí z elementů připojených do uzlů. Roli také nehraje to, zda je, nebo není, hmotnost přepočtena po restartu kinetické energie, ani se nejeví zásadní to, zda je použito lineární či parabolické aproximace vrcholu kinetické energie.
- Pro procesy řešení statické odezvy je u postupů s kritickým útlumem téměř nemožné dosáhnout menšího počtu iterací, než u postupů s kinetickým útlumem.
- U procesů form-finding je situace odlišná. Při správném a rychlém odhadu nejnižší vlastní frekvence je teoreticky možné, aby postupy s kritickým útlumem spotřebovaly menší počet iterací než postupy s kinetickým útlumem. Odhad první vlastní frekvence by však měl v rámci předvýpočtu spotřebovat co nejméně iteračních kroků. Jako velmi zdařilé se jeví použití autorského postupu využívající k odhadu nejnižší vlastní frekvence historii kinetické energie. Pro tento postup se jeví jako nejvýhodnější odhadovat první vlastní frekvenci na základě poloviny oscilace historie kinetické energie.

Zároveň si je však autor vědom, že k vyvození obecnějších závěrů by bylo nutné schémata ověřit na několika dalších desítkách příkladů, což přesahuje kapacitu této práce.

Pro účely testování jednotlivých metod a pro řešení jednodušších i rozsáhlejších 3D úloh lanoplachtových konstrukcí byl autorem během doktorského studia vyvinut prototyp programu (skript) v prostředí MATLAB, který nese název CAME. Program je s pomocí konečně-prvkové diskretizace a s využitím metody dynamické relaxace schopen řešit procesy form-finding a řešení statické odezvy. Díky vlastnímu zabudovanému generátoru konečných prvků je možné ovlivňovat způsob diskretizace konstrukce volbou maximální velikosti

konečných prvků. Vstupy do programu se zadávají pomocí textových souborů. Výstupy z programu jsou taktéž v podobě textových souborů a lze je zobrazit s pomocí grafických nástrojů programu MATLAB anebo s pomocí jiných grafických programů.

K prokázání relevantnosti získaných výsledků metodou dynamické relaxace u lanoplachtových konstrukcí bylo provedeno porovnání numerických výsledků s referenčními výsledky a s výsledky získanými komerčním programem. Na základě srovnání bylo konstatováno, že výsledky získané postupy metodou dynamické relaxace a zapracované do prototypu autorského skriptu CAME jsou dostatečně relevantní a přesné a mohou být použity pro řešení rozsáhlejších lanoplachtových konstrukcí.

K ověření teoretických poznatků analýzy lanoplachtových konstrukcí byly použité numerické postupy porovnány s výsledky měření konstrukce zastřešení tramvajové zastávky „K Barrandovu“ v Praze, u které bylo k dispozici geodetické zaměření, původní statický výpočet a měření sil v lanech in-situ. Bylo prokázáno, že výsledky numerického výpočtu dávají velmi dobrou shodu s experimentálním měřením.

Vytyčené cíle z úvodu práce se tak podařilo ve velké míře naplnit. Z pohledu autora jsou hlavními přínosy práce:

- vytvoření prototypu řešiče lanoplachtových konstrukcí,
- otestování různých postupů dynamické relaxace a zodpovězení otázek ohledně jejich efektivity,
- navržení a prokázání využitelnosti nového postupu dynamické relaxace s kritickým útlumem při form-finding procesu.

Protože práce prokázala, že použití dynamické relaxace pro řešení lanoplachtových konstrukcí má své opodstatnění, chtěl by se autor v budoucnu zaměřit na další testování metody dynamické relaxace a vývoj prototypu řešiče. Bylo by vhodné, aby řešič uměl pracovat i s tlačnými a ohýbanými prvky, čímž by bylo možné řešit ještě daleko větší spektrum úloh. Vhodné by bylo také rozšíření řešiče o možnost řešení návrhu střihu plachet a umožnění nerovnoměrného předepnutí plachet.



## POUŽITÉ ZDROJE

- [1] FAJMAN, P., J. MÁČA a M. HÜTTNER. Statika membránových konstrukcí v Čechách. In: *Dynamická architektura s membránovými konstrukcemi*. Praha, 2016, s. 16.
- [2] LEVY, R. a W.R. SPILLERS. Nonlinear analysis of membranes. LEVY, R. a W.R. SPILLERS. *Analysis of geometrically nonlinear structures*. New York: Chapman & Hall, 1995, s. 105-128. ISBN 0412996014.
- [3] SIEV, A. a J. EIDELMAN. Stress Analysis of Prestressed Suspended Roofs. *Journal of the Structural Division*. New York: American Society of Civil Engineers, 1972, **98**(3), 103-122. ISSN 0044-8001.
- [4] SZABÓ, J., L. KOLLÁR a M. PAVLOVIC. *Structural design of cable-suspended roofs*. New York: Halsted Press, 1984. ISBN 978-0853122227.
- [5] LINKWITZ, K. New methods for the determination of cutting pattern of prestressed cable nets and their application to the Olympic roof Munich. In: *The Proceedings IASS Symposium*. 1971, s. 76-80.
- [6] LINKWITZ, K. About formfinding of double-curved structures. *Engineering Structures* [online]. 1999, **21**(8), 709-718 [cit. 2018-11-22]. DOI: 10.1016/S0141-0296(98)00025-X. ISSN 01410296. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S014102969800025X>
- [7] SCHEK, H.-J. The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1974, **3**(1), 115-134. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90045-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90045-0). ISSN 0045-7825. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782574900450>
- [8] MAURIN, B. a R. MOTRO. The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. *Engineering Structures*. 1998, **20**(8), 712-719. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(97\)00108-9](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(97)00108-9). ISSN 0141-0296.

- Dostupné také z:  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029697001089>
- [9] ARGYRIS, J.H. Large Deflection Analysis of Prestressed Networks. *Journal of the Structural Division*. New York: American Society of Civil Engineers, 1972, **98**(3), 633-654. ISSN 0044-8001.
- [10] ARGYRIS, J.H., T. ANGELOPOULOS a B. BICHAT. A general method for the shape finding of lightweight tension structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1974, **3**(1), 135-149. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90046-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90046-2). ISSN 0045-7825. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782574900462>
- [11] SIEV, A. A general analysis of prestressed nets. *IABSE publications*. 1963, **23**(1), 283-292. DOI: 10.5169/seals-19407.
- [12] BROUGHTON, P. a P. NDUMBARO. *The analysis of cable and catenary structures*. 1. London: Thomas Telford, 1994. ISBN 0-7277-2008-2.
- [13] LEWIS, W.J. *Tension structures: form and behaviour*. 1. London: Thomas Telford, 2003. ISBN 07-277-3236-6.
- [14] BLETZINGER, K.-U. a E. RAMM. A General Finite Element Approach to the form Finding of Tensile Structures by the Updated Reference Strategy. *International Journal of Space Structures*. SAGE Publications Ltd STM, 1999, **14**(2), 131-145. DOI: 10.1260/0266351991494759. ISSN 0266-3511. Dostupné také z: <https://doi.org/10.1260/0266351991494759>
- [15] SOUTHWELL, R.V. *Relaxation methods in engineering science a treatise on approximate computation*. 2. Oxford: Oxford University Press, 1951.
- [16] OTTER, J.R.H. Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation. *Nuclear Structural Engineering*. 1965, **1**(1), 61-75. DOI: [https://doi.org/10.1016/0369-5816\(65\)90097-9](https://doi.org/10.1016/0369-5816(65)90097-9). ISSN 0369-5816. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0369581665900979>
- [17] DAY, A.S. An introduction to dynamic relaxation. *The Engineer*. 1965, **219**,

218-221.

- [18] BUCHHOLDT, H.A., M. DAVIES a M.J.L. HUSSEY. The analysis of cable nets. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1968, **4**(4), 339-358. ISSN 0272-4960. Dostupné také z: <http://dx.doi.org/10.1093/imamat/4.4.339>
- [19] BUCHHOLDT, H.A. Tension Structures. *The Structural Engineer*. 1970, **48**(2), 45-54.
- [20] BUCHHOLDT, H.A. *An introduction to cable roof structures*. 2nd ed. Reston, VA: ASCE Press [distributor], 1999. ISBN 07-277-2624-2.
- [21] BARNES, M.R. Applications of dynamic relaxation to the topological design and analysis of cable, membrane and pneumatic structures. In: *Second international conference on space structures*. Guilford, 1975, s. 211-219.
- [22] BARNES, M.R. Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes. *Computers & Structures*. 1988, **30**(3), 685-695. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90304-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90304-5). ISSN 0045-7949. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794988903045>
- [23] BARNES, M.R. Form stress engineering of tension structures. *Structural engineering review*. 1994, **6**(3-4), 175-202.
- [24] BARNES, M.R. Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation. *International Journal of Space Structures*. SAGE Publications Ltd STM, 1999, **14**(2), 89-104. DOI: [10.1260/0266351991494722](https://doi.org/10.1260/0266351991494722). ISSN 0266-3511. Dostupné také z: <https://doi.org/10.1260/0266351991494722>
- [25] TOPPING, B.H.V a P. IVÁNYI. *Computer aided design of cable membrane structures*. 1. Kippen, Stirlingshire, Scotland: Saxe-Coburg Publications, 2007. ISBN 978-187-4672-111.
- [26] LEWIS, W.J. Form-Finding: An Alternative to Structural Optimisation?. *Computational Technology Reviews*. 2015, **11**, 121-149. DOI: [10.4203/ctr.11.5](http://dx.doi.org/10.4203/ctr.11.5). ISSN 2044-8430. Dostupné také z: <http://www.ctresources.info/ctr/paper.html?id=67>

- [27] DENG, H., Q.F. JIANG a A.S.K. KWAN. Shape finding of incomplete cable-strut assemblies containing slack and prestressed elements. *Computers & Structures*. 2005, **83**(21), 1767-1779. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.02.022>. ISSN 0045-7949. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794905001112>
- [28] HÜTTNER, M. *Analýza lanoplachotvé konstrukce*. Praha, 2012. Diplomová práce. ČVUT v Praze, fakulta stavební. Vedoucí práce Fajman P.
- [29] HÜTTNER, M. a P. FAJMAN. Statická analýza lanových konstrukcí deformační metodou. *Stavební obzor*. 2012, **21**(9), 259-265. ISSN 1210-4027.
- [30] HÜTTNER, M., J. MÁČA a P. FAJMAN. Numerical Analysis of Cable Structures. In: TOPPING, B.H.V. *Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology* [online]. Kippen, Stirlingshire: Civil-Comp Press, 2012, s. - [cit. 2018-11-28]. DOI: 10.4203/ccp.99.240. ISBN 978-1-905088-54-6. ISSN 1759-3433. Dostupné z: <http://www.ctresources.info/ccp/paper.html?id=7082>
- [31] HÜTTNER, M. a J. MÁČA. Cable structures - numerical analysis. In: *Proceedings of the 3rd conference: NMM 2012 Nano & Macro mechanics*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2012, s. 81-88. ISBN 978-80-01-05205-1.
- [32] HÜTTNER, M. a P. FAJMAN. Aproximace lana při analýze lanových soustav. In: *10th International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings*. Bratislava: Slovak society of mechanics SAS, 2012, s. 265-266. ISBN 978-80-227-3786-9.
- [33] HÜTTNER, M., J. MÁČA a P. FAJMAN. Analysis of Cable Structures using the Dynamic Relaxation Method. In: TOPPING, B.H.V. a P. IVÁNYI. *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*. Kippen: Civil-Comp Press, 2013, s. 1-16. DOI: [doi:10.4203/ccp.102.145](https://doi.org/10.4203/ccp.102.145). ISBN 978-1-905088-57-7. ISSN 1759-3433.

- [34] HÜTTNER, M., J. MÁCA a P. FAJMAN. Efektivita postupů metody dynamické relaxace při analýze lanových soustav. In: *11th International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Building Conference Proceedings*. Bratislava: Slovak society of mechanics SAS, 2013, s. 71-72. ISBN 978-80-227-4040-1.
- [35] HÜTTNER, M. a J. MÁCA. Membrane structures - dynamic relaxation. In: *Proceedings of the 4th Conference Nano & Macro Mechanics*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2013, s. 75-82. ISBN 978-80-01-05332-4.
- [36] HÜTTNER, M., J. MÁCA a P. FAJMAN. Analysis of cable and membrane structures: dynamic relaxation method. In: *Proceedings of the 6th International Scientific Conference on Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering, DYN-WIND'2014*. Donovaly: EDIS publishing house University of Zilina, 2014, s. 55-62. ISBN 978-80-554-0844-6.
- [37] HÜTTNER, M., J. MÁCA a P. FAJMAN. The Efficiency of Dynamic Relaxation Methods in Static Analysis of Cable-Membrane Structures. *Applied Mechanics and Materials*. Trans Tech Publications, 2014, **617**, 124-129. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.617.124. ISSN 1662-7482. Dostupné také z: <https://www.scientific.net/AMM.617.124>
- [38] HÜTTNER, M., J. MÁCA a P. FAJMAN. Analysis of cable-membrane structures using the dynamic relaxation method. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2014*. Porot, 2014, s. 1919-1926. ISBN 978-972-752-165-4. ISSN 2311-9020.
- [39] HÜTTNER, M., J. MÁCA a P. FAJMAN. Analysis of Cable-Membrane Structures: Dynamic Relaxation Method. In: *Proceedings of the Twelfth International Conference on Computational Structures Technology*. Stirling: Civil-Comp Press, 2014, s. 1-12. DOI: 10.4203/ccp.106.257. ISBN 978-1-905088-61-4. ISSN 1759-3433. Dostupné také z: <http://www.ctresources.info/ccp/paper.html?id=8400>
- [40] HÜTTNER, M., J. MÁCA a P. FAJMAN. The efficiency of dynamic relaxation methods in static analysis of cable structures. *Advances in Engineering*



- Software*. 2015, **89**, 28-35. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2015.06.009>. ISSN 0965-9978. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997815000952>
- [41] HÜTTNER, M., J. MÁČA a P. FAJMAN. Form-finding of membrane structures - comparison of schemas of dynamic relaxation. In: *Proceedings of the 5th Conference NMM2014, Nano and Macro Mechanics*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2014, s. 53-60. ISBN 978-80-01-05570-0.
- [42] HÜTTNER, M., J. MÁČA a P. FAJMAN. Srovnání metod dynamické relaxace při hledání rovnovážného tvaru lanoplachtových konstrukcí. In: *Proceedings of the 12th International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings*. Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava, 2014, s. 146-153. ISBN 978-80-227-4259-7.
- [43] HÜTTNER, M., J. MÁČA a P. FAJMAN. Efficiency of Dynamic Relaxation Method in Form-Finding Process of Cable-Membrane Structures. *Applied Mechanics and Materials*. Trans Tech Publications, 2015, **769**, 260-263. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.769.260. ISSN 1662-7482. Dostupné také z: <https://www.scientific.net/AMM.769.260>
- [44] HÜTTNER, M., J. MÁČA a P. FAJMAN. Form Finding of Cable-Membrane Structures: Dynamic Relaxation with Kinetic Damping. In: KRUIS, J., Y. TSOMPANAKIS a B.H.V. TOPPING. *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*. Stirlingshire: Civil-Comp Press, 2015, s. 1-13. DOI: 10.4203/ccp.108.245. ISBN 978-1-905088-63-8. ISSN 1759-3433. Dostupné také z: <http://www.ctresources.info/ccp/paper.html?id=8803>
- [45] HÜTTNER, M. a P. FAJMAN. Carrying Capacity Testing of Membrane Connection. *Applied Mechanics and Materials*. Trans Tech Publications, 2016, **825**, 15-18. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.825.15. ISSN 1662-7482. Dostupné také z: <https://www.scientific.net/AMM.825.15>

- [46] HÜTTNER, M., J. MÁČA a P. FAJMAN. Lanoplachtová konstrukce - numerická analýza a praktická aplikace. In: *Proceedings of the 13th International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings*. Bratislava, Slovensko: Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2015, s. 1-6. ISBN 978-80-227-4463-8.
- [47] HÜTTNER, M., J. MÁČA a P. FAJMAN. Cable-Membrane Structures - Numerical Analysis and Practical Application. *Applied Mechanics and Materials*. Trans Tech Publications, 2016, **837**, 99-102. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.837.99. ISSN 1662-7482. Dostupné také z: <https://www.scientific.net/AMM.837.99>
- [48] HÜTTNER, M., P. FAJMAN a J. MÁČA. Membrane Structures - Aspects of Form-Finding Process. *Advanced Materials Research*. Trans Tech Publications, 2017, **1144**, 28-33. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1144.28. ISSN 1662-8985. Dostupné také z: <https://www.scientific.net/AMR.1144.28>
- [49] HÜTTNER, M., P. FAJMAN a J. MÁČA. Dynamická relaxace - kritický útlum u membránových konstrukcí. In: *14th International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings*. Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava, 2016, s. 332-340. ISBN 978-80-227-4613-7.
- [50] HÜTTNER, M. a P. FAJMAN. *Effect of viscous damping in numerical calculation of cable-membrane structures by the method of dynamic relaxation*. Acta Polytechnica CTU Proceedings, 2019.
- [51] *Příklad lanoplachtové konstrukce* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: <http://www.carlstahl.cz/reference/tanzbrunnen/tanzbrunnen-nerezove-komponenty-od-firmy-carl-stahl-185.jpg>
- [52] *Lanová síť - hřiště ve Stromovce* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: <http://www.hristepraha.cz/hriste/mapa/stromovka-hriste-u-male-ricky>
- [53] *Zastřešení golfového resortu v Hostivaři* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: <http://www.archtex.cz/vip/golf.jpg>

- [54] *Zastřešení tenisového hřiště* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: <http://www.tenisrepy.cz/wp-content/uploads/2014/11/slide1.jpg>
- [55] KADLČÁK, J. *Statika nosných lan visutých střech*. 1. Praha: Academia, 1990. Studie ČSAV. ISBN 80-200-0251-0.
- [56] KOPŘIVA, M., M. NETUŠIL, H. ACHTEN a Z. HIRNŠAL. *Membránová architektura*. 1. vydání. V Praze: České vysoké učení technické, 2015. ISBN 978-80-01-05693-6.
- [57] *Německý pavilon při EXPO 67' v Montrealu* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: [https://images.worldarchitecture.org/FreiOtto\\_Montreal.121905.jpg](https://images.worldarchitecture.org/FreiOtto_Montreal.121905.jpg)
- [58] *Zastřešení tramvajové zastávky K Barrandovu* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/Prague\\_Barrandov\\_Tram\\_Stop2.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/Prague_Barrandov_Tram_Stop2.jpg)
- [59] *Zastřešení autobusového terminálu v Hradci Králové* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: [http://www.kontispraha.cz/files/8214/2494/1105/Hradec\\_09.jpg](http://www.kontispraha.cz/files/8214/2494/1105/Hradec_09.jpg)
- [60] *Zastřešení výstupu z metra stanice Chodov* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: <https://www.archiweb.cz/Image/katalogy/archtex/atex1.jpg>
- [61] *Zastřešení koridoru výstaviště v Českých Budějovicích* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: <https://ceskacenazaarchitekturu.cz/projekty/2016/pavilon-t/>
- [62] *Zastřešení terminálu autobusů v Českých Budějovicích* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: [https://www.asb-portal.cz/wp-content/uploads/images/ilustracne/autobusy\\_na\\_strese.jpg](https://www.asb-portal.cz/wp-content/uploads/images/ilustracne/autobusy_na_strese.jpg)
- [63] *Zastřešení hlediště fotbalového stadionu v Jihlavě* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: <http://www.archtex.cz/vip/jihlava.jpg>
- [64] *Membránové stínění velínů v Hněvkovicích* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z:

<https://stavbaweb.dumabyt.cz/35/architectobjectfile/05/43/34/13.jpg>

- [65] *Zastřešení kulturní scény ve Vítkovcích* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-10]. Dostupné z: <http://www.archtex.cz/reference/vitkovice2.jpg>
- [66] SPAL, L. *Ocelová lana ve stavebních konstrukcích*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1971. Řada stavební literatury.
- [67] *Pecko - katalog ocelových lan* [online]. b.r. [cit. 2018-12-11]. Dostupné z: [http://www.lana-pecko.cz/download/ocelova\\_lana\\_katalog\\_2011.pdf](http://www.lana-pecko.cz/download/ocelova_lana_katalog_2011.pdf)
- [68] STUDNIČKA, J. *Ocelové konstrukce 1*. 1. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2011. ISBN 978-80-01-04800-9.
- [69] *Profil ocelového lana 6x37 s textilní duší* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-11]. Dostupné z: [http://ocelovalana.cz/assets/produkt\\_images/187606x37-FC.jpg](http://ocelovalana.cz/assets/produkt_images/187606x37-FC.jpg)
- [70] FAJMAN, P. a M. POLÁK. Dopínání lan nosné konstrukce zastávky Barrandov. *Konstrukce*. 2014, **13**(1). ISSN 1803-8433.
- [71] FAJMAN, P. a M. POLÁK. *Zpráva o zkoušce: Měření sil v lanech a dopnutí lan konstrukce zastřešení tramvajové zastávky "K Barrandovu" v Praze 5*. 1. Praha: ČVUT v Praze, fakulta stavební, 2013.
- [72] KLIER, T. a M. POLÁK. Moderní metody pro měření osových sil v prvcích stavebních konstrukcí. In: *TZB info* [online]. b.r. [cit. 2018-12-11]. Dostupné z: <https://stavba.tzb-info.cz/hruba-stavba/16685-moderni-metody-pro-mereni-osovych-sil-v-prvcich-stavebnich-konstrukci>
- [73] *Schéma tkané membrány* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-11]. Dostupné z: <https://www.sergeferrari.com/sites/default/files/inline-images/SERGE-FERRARI-PRECONSTRAINT.jpg>
- [74] *Serge Ferrari - products* [online]. b.r. [cit. 2018-12-11]. Dostupné z: <https://www.sergeferrari.com/our-products>
- [75] ČÁPOVÁ, J. *Modelování membránových konstrukcí*. Praha, 2011. Diplomová práce. ČVUT v Praze, fakulta stavební. Vedoucí práce Kočandřlová M.
- [76] *Mýdlový film* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-26]. Dostupné z:

[https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQXKocWNVb7njKYz8CKuYgSPHWkG5SvkY4nnHJSS1or\\_tRQPO25](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQXKocWNVb7njKYz8CKuYgSPHWkG5SvkY4nnHJSS1or_tRQPO25)

- [77] *Mýdlová bublina* [online]. In: . b.r. [cit. 2018-12-26]. Dostupné z: <https://learning-center.homesciencetools.com/wp-content/uploads/super-soap-bubble-solution-thumbnail.jpg>
- [78] LANG, R., I. NĚMEC a J. MARTINÁSEK. Specific Aspects of Tensile Structures. *Applied Mechanics and Materials*. Trans Tech Publications, 2015, **769**, 19-24. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.769.19. ISSN 1662-7482. Dostupné také z: <https://www.scientific.net/AMM.769.19>
- [79] *Manuálu programu RFEM: (RF-FORMFINDUNG, Programmbeschreibung) od společnosti Dlubal*. b.r.
- [80] *Program RFEM®: verze 5.12.02*. <https://www.dlubal.com>: Dlubal Software s.r.o., b.r.
- [81] ARGYRIS, J.H. Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis. *Progress in Aeronautical Sciences*. London: Pergamon Press, 1964. ISSN 0376-0421.
- [82] FAJMAN, P. Řešení lana s přihlédnutím k jeho deformaci. *Stavební obzor*. Praha: ČVUT fakulta stavební, 2012, **20**(4), 105-107. ISSN 1210-4027.
- [83] KMEŤ, S. a M. MOJDIS. Time-dependent analysis of cable domes using a modified dynamic relaxation method and creep theory. *Computers & Structures*. 2013, **125**, 11-22. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.04.019>. ISSN 0045-7949. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794913001491>
- [84] REZAIEE-PAJAND, M., S.R. SARAFRAZI a H. REZAIEE. Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures. *Computers & Structures*. 2012, **112-113**, 295-310. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.08.007>. ISSN 0045-7949. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794912002076>

- [85] CUNDALL, P. Explicit finite-difference methods in geomechanics. *Numerical Methods in Engineering, Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Blacksburg*. 1976, **1**, 132-150. Dostupné také z: <https://eurekamag.com/research/018/897/018897598.php>
- [86] UNDERWOOD, P. Chapter 5: Dynamic Relaxation. BELYTCHKO, T., T.J.R. HUGHES a P. BURGERS. *Computational Method for Transient Analysis*. 1985, **52**, s. 245-265, 984 s.
- [87] PAPADRAKAKIS, M. A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1981, **25**(1), 35-48. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(81\)90066-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(81)90066-9). ISSN 0045-7825. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782581900669>
- [88] BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. 3. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1996. ISBN 0-13-301458-4.
- [89] *Program MATLAB®: verze R2012a*. <https://www.mathworks.com/>: MathWorks®, b.r.
- [90] NOVÁK, J., I. PULTAROVÁ a P. NOVÁK. *Základy informatiky: počítačové modelování v Matlabu*. Vyd. 1. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2005. ISBN 80-01-03308-2.
- [91] WEST, H.H. a A.K. KAR. Discretized initial-value analysis of cable nets. *International Journal of Solids and Structures*. 1973, **9**(11), 1403-1420. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(73\)90048-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90048-6). ISSN 0020-7683. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768373900486>
- [92] JAYARAMAN, H.B. a W.C. KNUDSON. A curved element for the analysis of cable structures. *Computers & Structures*. 1981, **14**(3), 325-333. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90016-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90016-X). ISSN 0045-7949. Dostupné také z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004579498190016X>
- [93] SILBERNÁGL, a KAŠTÁNEK. *SO2003 Zastřešení zastávky ateliéry - základy membránové střechy*. Metroprojekt Praha a.s., 2002.

- [94] PRACHAŘ, a PŘIKRYL. *Statický výpočet – SO2003 Zastřešení zastávky ateliéry OK pro kotvení plachet*. JP statika, 2003.
- [95] PRACHAŘ, a PŘIKRYL. *Axonometrie*. JP statika, 2003.
- [96] PRACHAŘ, a PŘIKRYL. *Lanový plán*. JP statika, 2003.
- [97] KOREL, O. *Geodetické metody pro určení souřadnic nepřístupných bodů na ocelové konstrukci*. Praha, 2014. Bakalářská práce. ČVUT v Praze, fakulta stavební. Vedoucí práce Křemen T.

# SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Membránová konstrukce, u níž došlo v roce 1999 k havárii [1].....	1
Obr. 2: Příklad lanoplachtové konstrukce [51] .....	10
Obr. 3: Lanová síť – hřiště ve Stromovce [52] .....	11
Obr. 4: Zastřešení golfového resortu v Hostivaři [53] .....	12
Obr. 5: Zastřešení tenisového hřiště [54] .....	12
Obr. 6: Německý pavilon při EXPO 67' v Montrealu [57] .....	14
Obr. 7: Zastřešení tramvajové zastávky K Barrandovu [58].....	15
Obr. 8: Zastřešení autobusového terminálu v Hradci Králové [59].....	15
Obr. 9: Zastřešení výstupu z metra stanice Chodov [60].....	16
Obr. 10: Zastřešení koridoru výstaviště v Českých Budějovicích [61].....	16
Obr. 11: Zastřešení terminálu autobusů v Českých Budějovicích [62] .....	17
Obr. 12: Zastřešení hlediště fotbalového stadionu v Jihlavě [63].....	17
Obr. 13: Membránové stínění velínu v Hněvkovicích [64].....	18
Obr. 14: Zastřešení kulturní scény ve Vítkovicích [65].....	18
Obr. 15: Profil ocelového lana 6x37 s textilní duší [69].....	19
Obr. 16: Měřicí zařízení pro získání sil v laně [71].....	20
Obr. 17: Schéma veličin použitých k určení síly v laně in-situ [71].....	21
Obr. 18: Schéma tkané membrány [73].....	22
Obr. 19: Přístroj pro testování pevnosti membrány v tahu [45].....	24
Obr. 20: Detail uchycení vzorku k přístroji [45] .....	24
Obr. 21: Jednoduchá lanová soustava – schéma zadání [48] .....	27
Obr. 22: Jednoduchá lanová soustava – schéma sil [48].....	28
Obr. 23: Jednoduchá lanová soustava – výsledný tvar [48].....	29
Obr. 24: Srovnání různých tvarů konstrukce – princip minimální délky [48] .....	29
Obr. 25: Příklady konstrukcí s více lany [48] .....	30
Obr. 26: Příklady vícenásobných řešení [48].....	30
Obr. 27: Příklady s externím zatížením [48] .....	31
Obr. 28: Schéma značení pro minimální plochu .....	32
Obr. 29: a) Mýdlový film [76]; b) mýdlová bublina [77].....	33
Obr. 30: Půdorysné schéma ukázky pro form-finding proces [1] .....	33
Obr. 31: Počáteční nastavení „hrubého tvaru“ konstrukce [1].....	34
Obr. 32: Jiné počáteční nastavení „hrubého tvaru“ konstrukce [1].....	34
Obr. 33: Konstrukce po proběhnutém výpočtu ve „výrobním tvaru“ [1].....	34
Obr. 34: Počáteční „hrubý tvar“ konstrukce [79] .....	35



---

Obr. 35: „Výrobní tvar“ konstrukce po proběhnutém FF výpočtu [79].....	35
Obr. 36: Diskretizace lanoplachtové konstrukce .....	37
Obr. 37: Schéma prutového prvku [27].....	38
Obr. 38: Schéma lanového prvku [27] .....	40
Obr. 39: Diferenciální lanový element [55].....	41
Obr. 40: Nominální tahová síla $T$ v lanovém elementu [27] .....	44
Obr. 41: Trojúhelníkový prvek v 3D prostoru [23] .....	47
Obr. 42: Geometrie trojúhelníkového prvku [25] .....	47
Obr. 43: Hranové síly u trojúhelníkového prvku [13] .....	51
Obr. 44: Princip konverze napětí do hranových sil [25].....	52
Obr. 45: Trojúhelníkový prvek pro form-finding [25].....	52
Obr. 46: Projekce hranových sil do půdorysné roviny .....	55
Obr. 47: Schéma veličin pro základní pohybovou rovnici ve směru $m$ .....	59
Obr. 48: Odvození počáteční rychlosti [25].....	61
Obr. 49: Základní iterační schéma metody dynamické relaxace .....	64
Obr. 50: Význam veličin v trojúhelníkovém prvku .....	67
Obr. 51: Schéma lineárního systému s jedním stupněm volnosti [49].....	68
Obr. 52: Průběh výchytky v závislosti na případu tlumení [13] .....	69
Obr. 53: Odhad první vlastní frekvence dle nejdelší doby kmitu stupně volnosti [13] .....	71
Obr. 54: Odhad první vlastní frekvence – počet oscilací .....	72
Obr. 55: Odhad první vlastní frekvence dle průběhu kinetické energie .....	73
Obr. 56: Perspektivní schéma zadání jednoduché lanové soustavy .....	77
Obr. 57: Numerická úloha číslo 1 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo).....	77
Obr. 58: Perspektivní schéma zadání lanové sítě [27].....	78
Obr. 59: Numerická úloha číslo 2 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo).....	78
Obr. 60: Perspektivní schéma zadání sedlové lanové střechy [13].....	79
Obr. 61: Numerická úloha číslo 3 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo).....	79
Obr. 62: Numerická úloha číslo 4 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo).....	80
Obr. 63: Perspektivní schéma zadání membránového přístřešku [50].....	80
Obr. 64: Numerická úloha číslo 5 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo).....	81
Obr. 65: Numerická úloha číslo 6 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo).....	82

Obr. 66: Perspektivní schéma zadání dvojnásobné kuželové střechy [50] .....	82
Obr. 67: Numerická úloha číslo 7 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo) .....	83
Obr. 68: Numerická úloha číslo 8 – a) stav na začátku výpočtu (vlevo), b) stav na konci výpočtu (vpravo) .....	83
Obr. 69: Rovnovážený stav numerické úlohy číslo 1 po proběhnutém výpočtu .....	87
Obr. 70: Rovnovážený stav numerické úlohy číslo 2 po proběhnutém výpočtu .....	88
Obr. 71: Rovnovážený stav numerické úlohy číslo 3 po proběhnutém výpočtu .....	89
Obr. 72: Rovnovážený stav numerické úlohy číslo 4 po proběhnutém výpočtu .....	90
Obr. 73: Rovnovážený stav numerické úlohy číslo 5 po proběhnutém výpočtu .....	91
Obr. 74: Rovnovážený stav numerické úlohy číslo 6 po proběhnutém výpočtu .....	92
Obr. 75: Rovnovážený stav numerické úlohy číslo 7 po proběhnutém výpočtu .....	93
Obr. 76: Rovnovážený stav numerické úlohy číslo 8 po proběhnutém výpočtu .....	94
Obr. 77: Průběh počtu iterací úlohy číslo 1 v závislosti na volbě součinitele útlumu .....	102
Obr. 78: Průběh počtu iterací úlohy číslo 2 v závislosti na volbě součinitele útlumu .....	103
Obr. 79: Průběh počtu iterací úlohy číslo 3 v závislosti na volbě součinitele útlumu .....	104
Obr. 80: Průběh počtu iterací úlohy číslo 4 v závislosti na volbě součinitele útlumu .....	105
Obr. 81: Průběh počtu iterací úlohy číslo 5 v závislosti na volbě součinitele útlumu .....	106
Obr. 82: Průběh počtu iterací úlohy číslo 6 v závislosti na volbě součinitele útlumu .....	107
Obr. 83: Průběh počtu iterací úlohy číslo 7 v závislosti na volbě součinitele útlumu .....	108
Obr. 84: Průběh počtu iterací úlohy číslo 8 v závislosti na volbě součinitele útlumu .....	109
Obr. 85: Výsledky FF procesu pro příklad 4 s dělením přibližně na 1000 stupňů volnosti v programu RFEM [80].....	117
Obr. 86: Výsledky tytéž konstrukce v programu RFEM při svislém zatížení $0.5 \text{ kN/m}^2$ [80] .....	118
Obr. 87: Boční (jižní) pohled na zkoušenou konstrukci [70].....	124
Obr. 88: Prostorové schéma konstrukce [95; 70].....	125
Obr. 89: Označení měřených lan v půdoryse [96; 70] .....	125
Obr. 90: Schéma numerického modelu – půdorys (vlevo) a perspektivní pohled (vpravo) [39] .....	127
Obr. 91: Schéma uzlů 18 až 26 půdorys (vlevo) a perspektivní pohled (vpravo) [39] ....	127

## SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Přehled schémat DR s kinetickým útlumem.....	86
Tab. 2: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 1 (jednoduchá lanová soustava – proces SO) .....	87
Tab. 3: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 2 (lanová síť – proces SO) .....	88
Tab. 4: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 3 (sedlová lanová střecha – proces FF) .....	89
Tab. 5: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 4 (sedlová lanová střecha – proces SO).....	90
Tab. 6: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 5 (membránový přístřešek – proces FF).....	91
Tab. 7: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 6 (membránový přístřešek – proces SO).....	92
Tab. 8: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 7 (dvojitá kuželová střecha – proces FF).....	93
Tab. 9: Výsledky výpočtů schémat DR s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 8 (dvojitá kuželová střecha – proces SO) .....	94
Tab. 10: Přehled celkového počtu iterací jednotlivých schémat s kinetickým útlumem ....	95
Tab. 11: Přehled procentuálních odchylek [%] jednotlivých schémat DR s kinetickým útlumem .....	96
Tab. 12: Přehled celkového spotřebovaného CPU času [s] jednotlivých schémat s kinetickým útlumem .....	97
Tab. 13: Přehled celkového vyhodnocení jednotlivých schémat DR s kinetickým útlumem .....	98
Tab. 14: Přehled schémat DR s kritickým útlumem .....	100
Tab. 15: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 1 (jednoduchá lanová soustava – proces SO) .....	102
Tab. 16: Výsledky pásmové analýzy koeficientu $\alpha$ pro numerickou úlohu číslo 1 .....	102
Tab. 17: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 2 (lanová síť – proces SO).....	103
Tab. 18: Výsledky pásmové analýzy koeficientu $\alpha$ pro numerickou úlohu číslo 2 .....	103
Tab. 19: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 3 (sedlová lanová střecha – proces FF) .....	104
Tab. 20: Výsledky pásmové analýzy koeficientu $\alpha$ pro numerickou úlohu číslo 3 .....	104

Tab. 21: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 4 (sedlová lanová střecha – proces SO) .....	105
Tab. 22: Výsledky pásmové analýzy koeficientu $\alpha$ pro numerickou úlohu číslo 4 .....	105
Tab. 23: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 5 (membránový přístřešek – proces FF) .....	106
Tab. 24: Výsledky pásmové analýzy koeficientu $\alpha$ pro numerickou úlohu číslo 5 .....	106
Tab. 25: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 6 (membránový přístřešek – proces SO).....	107
Tab. 26: Výsledky pásmové analýzy koeficientu $\alpha$ pro numerickou úlohu číslo 6 .....	107
Tab. 27: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 7 (dvojitá kuželová střecha – proces FF).....	108
Tab. 28: Výsledky pásmové analýzy koeficientu $\alpha$ pro numerickou úlohu číslo 7 .....	108
Tab. 29: Výsledky výpočtů schémat s kinetickým útlumem numerické úlohy číslo 8 (dvojitá kuželová střecha – proces SO).....	109
Tab. 30: Výsledky pásmové analýzy koeficientu $\alpha$ pro numerickou úlohu číslo 8 .....	109
Tab. 31: Přehled celkového počtu iterací jednotlivých schémat s kritickým útlumem pro procesy SO .....	110
Tab. 32: Přehled celkového počtu iterací jednotlivých schémat s kritickým útlumem pro procesy FF .....	111
Tab. 33: Přehled procentuálních odchylek [%] počtu iterací jednotlivých schémat s kritickým útlumem od teoretického minima pro procesy SO.....	112
Tab. 34: Přehled procentuálních odchylek [%] počtu iterací jednotlivých schémat s kritickým útlumem od teoretického minima pro procesy FF .....	112
Tab. 35: Porovnání celkového počtu iterací schémat DR s kritickým a kinetickým útlumem pro procesy SO .....	113
Tab. 36: Porovnání celkového počtu iterací schémat DR s kritickým a kinetickým útlumem pro procesy FF.....	113
Tab. 37: Porovnání celkového počtu iterací schéma DR s kinetickým útlumem a teoretického minima počtu iterací schéma s kritickým útlumem pro procesy SO .....	114
Tab. 38: Porovnání celkového počtu iterací schéma DR s kinetickým útlumem a teoretického minima počtu iterací schéma s kritickým útlumem pro procesy FF.....	114
Tab. 39: Srovnání výsledků dynamické relaxace pro příklad 2 s jinými autory .....	115
Tab. 40: Srovnání výsledků dynamické relaxace pro příklad 3 (FF) s jinými autory.....	115
Tab. 41: Srovnání výsledků dynamické relaxace pro příklad 3 (SO) s jinými autory .....	116
Tab. 42: Srovnání výsledků pro příklad 4 (SO) dosažených programy CAME a RFEM. ....	116
Tab. 43: Srovnání výsledků pro příklad 4 (SO) pro podrobnější dělení konstrukce a různými velikostmi uvažovaného plošného zatížení .....	117

Tab. 44: Síly v lanech získané z měření in-situ [71; 70].....	126
Tab. 45: Uzlové souřadnice modelu na začátku výpočtu. Tučně zvýrazněné souřadnice jsou předmětem výpočtu. ....	128
Tab. 46: Přehled délek jednotlivých lan .....	128
Tab. 47: Porovnání vypočtených sil numerického modelu konstrukce „K Barrandovu“ s naměřenými silami in-situ a geodetickým zaměřením souřadnic .....	129

# SEZNAM ZKRATEK A POUŽITÝCH SYMBOLŮ

- $c$  součinitel útlumu
- $c_{\text{crit}}$  kritický útlum konstrukce
- $ds$  protažení lana; diferenciál lanového elementu
- $f$  frekvence
- $f_{0,1}$  odhad první vlastní frekvence
- $h$  svislý souřadnicový rozdíl mezi body  $i$  a  $j$
- $i, j$  index označení uzlů
- $k$  index linie připojené k uzlu  $i$ ; tuhost
- $l$  vodorovná vzdálenost koncových bodů,
- $l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3}$  délky hran nezatíženého trojúhelníka,
- $l_1, l_2, l_3$  délky hran trojúhelníka
- $l_1^*, l_2^*, l_3^*$  délky hran trojúhelníka promítnuté do vodorovné roviny
- $m$  obecný směr  $(x, y, z)$ ; hmotnost
- $n$  počet uzlů; počet proběhnutých iterací
- $n_{uk}$  počet proběhnutých iterací dle historie kinetické energie
- $p$  rozdíl tlaků mezi vnitřní a vnější plochou; dimenze prostoru
- $q$  rovnoměrné spojitě svislé zatížení
- $r$  aktuální délka prvku
- $r_1, r_2$  poloměry vlastní křivosti
- $s$  délka napnutého lana
- $s_0$  volná (výrobní) délka nezatíženého prvku
- $t$  čas; tloušťka membrány
- $v_{im}^t$  rychlost uzlu  $i$ , ve směru  $m$  a čase  $t$
- $\dot{v}_{im}^t$  zrychlení uzlu  $i$ , ve směru  $m$  a čase  $t$
- $x, y, z$  obecný souřadný systém; lokální souřadný systém
- $x_i, y_i, z_i$  souřadnice uzlu  $i$
- $x^g, y^g, z^g$  globální souřadný systém
- $z(x)$  průvšová křivka lana
- $\dot{z}(x)$  směrnice tečny k průvšové křivce lana
- $A$  průřezová plocha; plocha trojúhelníka

- $C_i$  fiktivní součinitel útlumu konstrukce v uzlu  $i$
- $C_{im}$  fiktivní součinitel útlumu konstrukce v uzlu  $i$  a směru  $m$
- $E$  Youngův modul pružnosti
- $H$  je vodorovná síla v elementu; výška konstrukce
- $L$  délka; délka lana; rozpětí konstrukce
- $M_i$  fiktivní hmotnost v uzlu  $i$
- $M_{im}$  fiktivní hmotnost v uzlu  $i$  a směru  $m$
- $N$  normálová síla; počet proběhnutých oscilací
- $N_{uk}$  proběhnutých oscilací dle historie kinetické energie
- $P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}$  vnější bodové zatížení působící v uzlu  $i$  a směru  $x, y, z$
- $Q$  výslednice od spojitého svislého rovnoměrného zatížení
- $R_{im}^t$  reziduální síla v uzlu  $i$ , směru  $m$  a v čase  $t$
- $R_{lim}$  limitní hodnota reziduálních sil pro metodu DR
- $S_i$  uzlová tuhost uzlu  $i$
- $S_{im}$  uzlová tuhost uzlu  $i$  ve směru  $m$
- $S_k$  tuhost linie  $k$ , jdoucího do uzlu  $i$
- $S_{k,m}$  liniová tuhost linie  $k$  rozložená do směru  $m$
- $S_k^E$  elastická tuhost linie  $k$
- $S_i^E$  elastická tuhost  $i$ -hrany membránového prvku
- $S_k^G$  geometrická tuhost linie  $k$
- $T$  nominální osová síla v prutu
- $U_{kin}$  kinetická energie systému
- $U_{lim}$  limitní hodnota kinetické energie pro metodu DR
- $V$  posouvající síla
- $\alpha$  úhel v trojúhelníku; úhel lan; násobek styčnickové hmotnosti
- $\varepsilon_i$  deformace hrany  $i$  trojúhelníkového prvku
- $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  složky deformace v l.s.s.
- $\theta_i$  sklon hrany  $i$  trojúhelníkového prvku
- $\sigma$  vnitřní rovnoměrné napětí v membráně
- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  složky napětí v l.s.s.
- $\nu$  Poissonův součinitel příčné kontrakce
- $\varphi$  úhel v trojúhelníku; úhel lan

- $\omega_0$  vlastní kruhová frekvence netlumeného systému
  - $\Delta l_i$  změna délky hrany  $i$  trojúhelníkového prvku
  - $\Delta s_E$  pružné prodloužení lana
  - $\Delta t$  přírůstek času; časový krok
  - $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$  přírůstek souřadnic uzlu  $i$
- 
- **[D]** materiálová matice trojúhelníkového prvku
  - **[G]** matice geometrie trojúhelníkového prvku
  - **[L]** matice aktuálních délek hran trojúhelníkového prvku
  - **[L<sub>0</sub>]** matice počátečních délek hran trojúhelníkového prvku
  - **{ $\Delta \mathbf{L}_i$ }** vektor protažení hran trojúhelníkového prvku
  - **{ $\mathbf{T}_i$ }** vektor hranových sil trojúhelníkového prvku
  - **{ $\mathbf{T}_i^*$ }** vektor hranových sil promítnutých do vodorovné roviny
  - **{ $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ }** vektor složek deformací hran  $i$  trojúhelníkového prvku
  - **{ $\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}$ }** vektor složek deformací trojúhelníkového prvku v l.s.s
  - **{ $\boldsymbol{\sigma}_i$ }** vektor složek hranových napětí trojúhelníkového prvku
  - **{ $\boldsymbol{\sigma}_{xy}$ }** vektor složek napětí trojúhelníkového prvku v l.s.s
- 
- DR dynamická relaxace
  - FF form-finding
  - SO statická odezva
  - CPU výpočetní čas počítače
  - l.s.s lokální souřadný systém