**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**Fakulta strojní**

---

**Ústav výrobních strojů a zařízení**

# ZAJÍMAVOSTI Z DĚJIN MECHANIKY A SOUČASNÉ ASTRONOMIE

Volitelný předmět 2356028 / 2016

Doc. Ing. Pavel Souček, DrSc.

## Úvodní slovo autora

Motivem ke vzniku tohoto textu byla náplň několika diskusních večerů, kdy jsme s mými mladšími kolegy a bývalými studenty v uvolněné atmosféře u sklenice dobrého nápoje probírali témata a zajímavosti, na které v učebních osnovách oboru stavby výrobních strojů nezbylo místo.

Doufám, že i sebevědomý čtenář a dobrý odborník získá (pokud již nemá) respekt a pokoru před vynalézavostí a myšlenkovými pochody našich předků, kteří s minimálními technickými prostředky dospěli na svou dobu k převratným a dodnes platícím nadčasovým poznatkům, jejichž šíření mnohdy vyžadovalo i osobní odvahu. Čtenář se dozví (pokud to již neví), že např.

- heliocentrický model sluneční soustavy uznávali již antičtí Řekové a jejich metody určování vzdáleností jsou velmi důvtipné; event. chyby jdou na vrub tehdejších omezených pozorovacích možností;
- většina planet (včetně Saturnu) je známa přes 2000 let;
- již sv. Augustin se ptal, co dělal Bůh před stvořením světa a vyslovil domněnku, že čas ještě neexistoval;
- tradičně uváděné tři Newtonovy pohybové zákony jsou vlastně čtyři; často se zapomíná na ten nejdůležitější – gravitační. Naopak první zákon o rovnoměrném přímočarém pohybu tělesa vyjádřil již Galileo Galilei;
- podstata gravitace ale nebyla dodnes uspokojivě vysvětlena;
- hmotnost Země a Slunce určil již Henry Cavendish v r.1798 ve své laboratoři změřením gravitační konstanty;
- průměrnou hustotu Slunce lze spočítat pouze ze znalosti jeho zorného úhlu ze Země a gravitační konstanty;
- konečnou rychlost světla předpokládal a pokoušel se změřit již Galileo;
- dne 20.3.2015 jsme se při zatmění Slunce Měsícem dívali do budoucnosti, neboť skutečný zákryt všech tří nebeských těles nastal až 40 vteřin po našem pozorování;
- kritický (Schwarzschildův) poloměr černé díry spočítal již P.S. de Laplace v r.1798;
- teorie rozpínání vesmíru připouští překročení rychlosti světla;
- na pojmu „síla“ je sice postaveno celé strojní inženýrství, ale její přesné fyzikální vysvětlení neexistuje,

atd.

Autor se omlouvá hlavně profesionálním astrofyzikům a astronomům za některé výklady současných složitých otázek okolo fungování vesmíru zjednodušeným způsobem, který by měl být blízký i strojním inženýrům konstrukčního zaměření. Zároveň je třeba upozornit i na to, že od doby sepsání tohoto textu přibylo mnoho nových poznatků, které nebylo již možno doplnit. Technický popis teleskopů v závěrečném Dodatku je zaměřen hlavně na jejich polohové řízení, které má mnoho společného s řízením tzv. kolébek a otočných stolů u pětiosých NC obráběcích strojů. Bylo by třeba aktualizovat hlavně údaje o projektu a výstavbě největšího světového teleskopu ELT, které ale může čtenář průběžně sledovat na webových stránkách Evropské jižní observatoře (ESO).

Kapitola B o historii matematiky je poněkud „ošizena“ a je v ní uvedeno jen několik zajímavostí vzhledem k tomu, že pro zájemce je na knižním trhu dostatek kvalitních publikací.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivatives 4.0 International License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/ or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

## Obsah

## A. STRUČNĚ Z HISTORIE MECHANIKY A ASTRONOMIE


**A1. NEWTONOVA TEORIE GRAVITACE** ..... 1
1.1 Keplerovy zákony pohybu planet (1609 - 1619) ..... 1
1.1.1 Časové periody ve sluneční soustavě ..... 2
1.2 Setrvačnost a gravitace, Newtonův gravitační zákon (1684) ..... 2
1.3 Centrální pohyb ..... 5
1.4 Centrální gravitační pole ..... 7
1.5 Potenciální energie v centrálním gravitačním poli ..... 8
1.6 Tíhové pole Země ..... 9
1.7 Zachování energie a pohyb tělesa v centrálním gravitačním poli ..... 10
1.8 Metoda efektivního potenciálu ..... 12
1.9 Obecný problém dvou těles ..... 13
1.10 Problém tří těles, Lagrangeovy librační body ..... 14
1.11 Závěrečné poznámky k Newtonově gravitaci ..... 16

**A2. PŘÍKLADY Z ASTRONOMIE** ..... 18
2.1 Gravitační kontrakce, vznik hvězd ..... 20
2.2 Neutronové hvězdy, pulsary, magnetary ..... 23
2.3 Černé díry, Schwarzschildův gravitační poloměr ..... 25

**A3. ROZPÍNÁNÍ VESMÍRU** ..... 27
3.1 Co se vlastně rozpíná a jak? ..... 28
3.1.1 Newtonova mechanika a rozpínání vesmíru ..... 33
3.1.2 Co všechno vesmír obsahuje? ..... 34
3.2 Standartní dynamický model vesmíru (ΛCDM) ..... 35
3.2.1 Expanzní funkce ..... 35
3.2.2 Výpočet zrychleného rozpínání s kosmologickou konstantou ..... 37
3.2.3 Kosmologický rudý posuv a vesmírné vzdálenosti ..... 39
3.2.4 Světočára světla (světelný kužel) ..... 42
3.2.5 Kosmický horizont událostí ..... 44
3.2.6 Závěrečné poznámky k rozpínání vesmíru podle modelu ΛCDM ..... 44
3.3 Je model ΛCDM ten správný? ..... 46
3.3.1 Gravitační aberace ..... 46
3.4 Vesmírné projekty ..... 47
3.5 Jak je to se "Stvořitelem"? ..... 50

**A4. STRUČNÝ NÁSTIN SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY** ..... 51
4.1 Galileova transformace ..... 51
4.2 Michelsonův pokus (1881) ..... 52
4.3 Lorentzova transformace (1904) ..... 52
4.3.1 Dopplerův jev v klasické mechanice ..... 55
4.4 Henri Poincaré (1905) ..... 56
4.5 Speciální teorie relativity (Einstein 1905) ..... 57
4.5.1 Skládání rychlostí ..... 57
4.5.2 Hmotnost roste s rychlostí ..... 58
4.5.3 Ekvivalence hmotnosti a energie ($E=mc^2$) ..... 59
4.5.4 Síla, pohybová rovnice, hybnost a energie („Pythagorova věta“) ..... 60
4.6 Minkowskiho čtyřrozměrný časoprostor ..... 62


## B. STRUČNĚ Z HISTORIE MATEMATIKY


**B1.** Rozdíl mezi matematikou a fyzikou ..... 65
**B2.** Počátky vědy ..... 66
**B3.** Starověké Řecko ..... 67
**B4.** Středověké temno ..... 68
**B5.** Několik jmen novověku ..... 69
**B6.** Novodobá matematika ..... 71
**B7.** Současná diskuze mezi matematiky ..... 72
**B8.** Vyšší matematika v ekonomii ..... 74
**Literatura** ..... 76


## C. DODATEK – velké pozemské dalekohledy

# A1. NEWTONOVA TEORIE GRAVITACE

## 1.1 Keplerovy zákony pohybu planet (1609 - 1619)

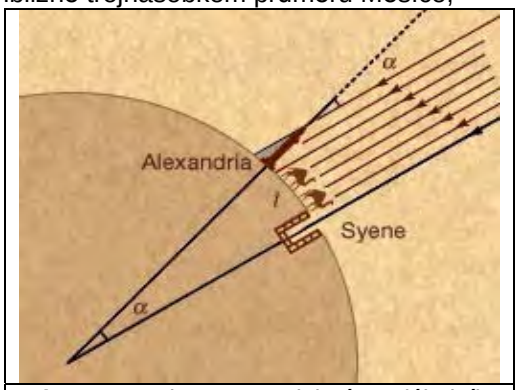
*Mikuláš **Kopernik**: "Uprostřed všech (planet) stojí Slunce. Kdo by v tomto překrásném chrámu postavil tuto lampu na jiné nebo lepší místo než toto, odkud může všechno zároveň osvětlovat?"*

*Steven **Weinberg**: "Úsilí pochopit vesmír zvedá lidský život trochu nad úrovneň frašky a dává mu něco z krásy tragédie."*

*Jak to dopadne, když se hlupáci pletou do fyziky (**právní předpis pro Českou asociaci pojišťoven**): „Pád sněhu je pohyb, způsobený gravitací, který má znaky volného pádu“*

Pohyb nebeských těles inspiroval člověka od nepaměti a jeho zkoumání je zřejmě nejstarší lidskou vědeckou činností. Již v antickém Řecku měli matematici a astronomové vynikající trigonometrické znalosti, které využívali k výpočtům některých rozměrů ve sluneční soustavě. Uvedeme jen dvě jména z mnoha:

- **Aristarchos** ze Samu (zvaný "Kopernik starověku", 3.stol.př.n.l., působil v Alexandrii) je prvním známým zastáncem heliocentrického modelu sluneční soustavy. Z velikostí stínů při zatměních určoval poměrné vzdálenosti i velikosti Země, Měsíce a Slunce a i když jeho pozorování nebyla přesná, logické postupy jsou správné a dodnes vzbuzují respekt. Např. zjistil, že průměr Země je přibližně trojnásobkem průměru Měsíce;
- **Erastothenes** z Kyrény (asi největší geograf antického Řecka, 276 až 194 př.n.l.) určil velmi přesně obvod Země a její poloměr z rozdílu úhlů dopadu slunečních paprsků v Alexandrii a v Syene (dnešní Asuán, který leží na obratníku Raka, takže Slunce při letním slunovratu v zenitu nevrhá stín a jeho paprsky dopadají na dno studny - viz **obr.1**). Vzdálenost obou míst (asi 800km) mu odkrokovaly velbloudí karavany.




***Obr.1** Erastothenovy “podobné“ trojúhelníky při určení poloměru a obvodu Země*

Jako jeden z vrcholů poznání ve starověku se tradičně uvádí geocentrický model nebes (**Ptolemaios**, 70 až 147 n.l.), zapomíná se ale na mnohem starší Aristarchův model heliocentrický. Ptolemaiův geocentrický model "nebeských sfér" obsahoval sféry v pořadí: Měsíc, Venuše, **Slunce**, Mars, Jupiter, Saturn a poslední sféru stálic, která se hodila církvi, neboť za ni mohla umístit nebe a peklo. Středověký diktát církve narušil a zvrat ve tmářském způsobu myšlení přinesl Mikuláš **Kopernik** (1473 až 1543), který navázal na Aristarcha a položil pro pohyb planet počátek souřadného systému do Slunce. Tycho de Brahe (1546 až 1601) tápal mezi názorem geo- a heliocentrickým: podle něj byla středem vesmíru Země, okolo ní obíhá Slunce a okolo něj ostatní planety. Výsledky jeho pozorování využil konečně Johannes **Kepler** (1571 až 1630), který upřesnil Kopernikovu představu o kruhové dráze planet svými třemi zákony, viz **obr.1a,b** (vzhledem k rozměrům nebeských těles vůči jejich vzdálenostem je možno uvažovat jen hmotné body):

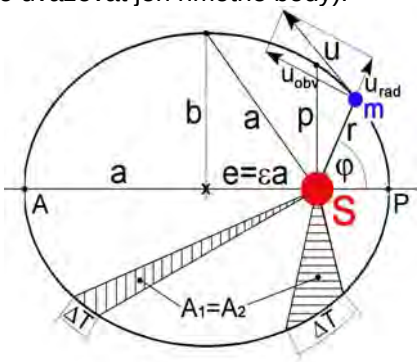
**1. Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách, v jejichž společném ohnisku je Slunce.** Rovnice elipsy v polárních souřadnicích $\varphi, r$ (počátek souřadného systému je v ohnisku $S$):

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \qquad \textbf{(1a)}$$

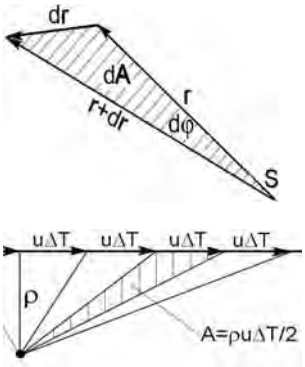
Poměrná excentricita $\varepsilon = e/a$, $a^2 = b^2 + e^2$.

Parametr $p = a(1-\varepsilon^2) = b^2/a$.

Nejbližší bod **P** (perihélium, přísluní) má souřadnici $r_P = a - e$, nejvzdálenější bod **A** (aphélium, odsluní) $r_A = a + e$. Střední vzdálenost je rovna hlavní poloose $(r_A + r_P)/2 = a$, excentricita $e = (r_A - r_P)/2$ a vedlejší poloosa $b = \sqrt{r_A r_P}$. Plocha celé elipsy je $\pi ab$.




***Obr.1a** Elipsa v ohniskovém souřadném systému*




***Obr.1b** Plošná rychlost*

**2. Plochy opsané spojnicí planety a Slunce za stejný čas $\Delta T$ jsou shodné:**

$A_1 = A_2$ (tzv. **plošná rychlost** $dA/dt$ je konstantní) **(1b)**

**3. Poměr třetích mocnin hlavních poloos oběžných drah dvou planet je stejný jako poměr druhých mocnin oběžných dob:**

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \text{nebo obecněji} \quad \frac{a^3}{T^2} = k \qquad \textbf{(1c)}$$

kde konstanta $k$ je u všech planet stejná.

***Poznámky*: 1)** *Rovnice (1a) platí obecně pro všechny kuželosečky. Rozeznáváme 4 případy (viz též* ***obr.1h****):*

$$\begin{aligned} &e=0,\ \varepsilon=0,\ r=p=a\ .....\ kružnice \\ &e<a,\ 0<\varepsilon<1\ .....\ elipsa \\ &e=a,\ \varepsilon=1\ .....\ parabola \\ &\varepsilon>1\ .....\ hyperbola \end{aligned} \qquad (1d)$$

***2)*** *Pro oběžnou dráhu* ***Země okolo Slunce*** *platí podle dnešních poznatků tyto hodnoty:*
*poměrná excentricita* $\varepsilon=e/a=0{,}01670221$, $r_P=147\ 098\ 074km$, $r_A=152\ 097\ 701km$, *hlavní poloosa (tj. i střední poloměr)*

$$r=149\ 597\ 887{,}5\ km\approx 1au \qquad (1dd)$$

*kde* $1au=149\ 597\ 870\ 700m$ *je tzv.* ***mezinárodní astronomická jednotka****.*

***3)*** *Plošná rychlost je konstantní i při rovnoměrném přímočarém pohybu – viz* ***obr.1b*** *dole.*

***4)*** *Formulace 2. zákona pomocí plošné rychlosti je pozdější, neboť v Keplerově době nebyly ještě známy pojmy "derivace" a "diferenciál". Pozdější je rovněž* ***vysvětlení pomocí vektorů****: průvodič* $\mathbf{r}$ *se za čas* $dt$ *změní na* $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$. *Rychlost je* $\mathbf{u}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, *element plochy* $d\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times d\mathbf{r})$. *Plošná rychlost planety*

$$\mathbf{w}=\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times d\mathbf{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{u})$$

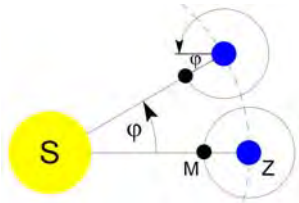
*je kolmá k nákresně a podle Keplera je konstantní,* $\mathbf{w}=konst$, $\frac{d\mathbf{w}}{dt}=0$. *Z horního vztahu po vynásobení hmotností platí* $\mathbf{r}\times m\mathbf{u}=2m\mathbf{w}=konst$, *takže druhý Keplerův zákon je zároveň vyjadřením* ***zákona o zachování momentu hybnosti****, který vyslovil až Newton:*
*- hybnost* $\mathbf{H}=m\mathbf{u}$, *moment hybnosti* $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{H}=\mathbf{r}\times m\mathbf{u}=\mathbf{r}\times m(\mathbf{u}_{\mathbf{obv}}+\mathbf{u}_{\mathbf{rad}})=\mathbf{r}\times m\mathbf{u}_{\mathbf{obv}}=2m\mathbf{w}=konst$.

***5) Plošné zrychlení*** $\frac{d\mathbf{w}}{dt}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{u}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)=\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{a})=0$ *ale* $\mathbf{a}\neq 0$, *takže vektory* $\mathbf{r},\mathbf{a}$ *musí být rovnoběžné. Zrychlení má směr průvodiče planety, takže míří stále do jednoho bodu (Slunce - centra). Odtud název* ***centrální pohyb****. Při centrálním pohybu má hmotný bod konstantní moment hybnosti, z čehož vyplývá, že* ***jeho dráha je rovinnou křivkou****.*

### 1.1.1 Časové periody ve sluneční soustavě

U přesných výpočtů je nutno respektovat vzájemné relativní pohyby nebeských těles a zavést nové pojmy:

- pod pojmem **„den“** chápeme obvykle tzv. **střední sluneční** (též „**synodický**“) **den**, který je odvozen od rotace Země okolo své osy vůči Slunci, tj. přesně 24 hodin. Protože pohyb Slunce po obloze je kvůli mírně eliptické oběžné dráze Země nerovnoměrný, uměle jsme si vytvořili rovnoměrnou časovou stupnici, obsahující $24\times60\times60=86400$ sekund;
- naměřená doba oběhu Země okolo Slunce vzhledem ke vzdáleným stálicím (tzv. **siderický**, nebo též **hvězdný rok**) je $31558149$ sekund, neboli $365{,}2564$ středního slunečního dne;
- tzv. **siderický** (nebo též hvězdný) **den** je doba jedné otáčky Země okolo své osy opět vůči vzdáleným stálicím a činí pouze $23hod\ 56min\ 4{,}1s=86164{,}1$ sekund. Za tuto dobu opíše Země na dráze okolo Slunce úhel $360^0\cdot86164{,}1/31558149=0{,}98292^0$, který musí „dohnat“ k dovršení synodického dne, což se jí podaří za dobu $86400\cdot0{,}98292/360=235{,}9$ sekund. Smysly rotace si čtenář může ujasnit podle **obr.1jjjj**;
- podobně rozlišujeme tzv. siderickou a synodickou periodu Měsíce, jak zjednodušeně ilustruje **obr.1bb** (není uvažován malý odklon roviny dráhy Měsíce (asi $5{,}1^0$) od roviny ekliptiky). **Siderický (hvězdný) měsíc** je doba jednoho oběhu Měsíce okolo Země vztaženého vůči stálicím (neúplná kružnice v obrázku nahoře) a činí $2\ 360\ 595$ sekund, tj. $27{,}32$ středního slunečního dne. **Synodický měsíc** je doba mezi dvěma stejnými fázemi Měsíce, pozorovatelnými ze Země. Je tedy delší o čas, za který Měsíc dožene úhel $\varphi$, který mezitím urazila Země na dráze okolo Slunce. Dlouhodobý průměr je $29{,}53$ středního slunečního dne.



***Obr.1bb***

## 1.2 Setrvačnost a gravitace, Newtonův gravitační zákon (1684)

*Otázka* ***Newtonovi****: "Jak jste dělal své objevy?" Odpověď: "Tak, že jsem na ně stále myslel".*

*Plukovník **Bedřich Kraus** von **Zillergut** (podle Haškových „Osudů dobrého vojáka Švejka“ jeden z nejpitomějších c.k. rakousko-uherských důstojníků):*
*„Dojde-li benzín, musí se automobil zastavit. To jsem také viděl včera. Potom se žvaní o setrvačnosti, pánové. Nejede, stojí, nehne se, nemá benzínu. Není-liž to směšné?“*

V éře **Keplera** se stále jednalo jen o kinematiku pohybů nebeských těles, neboť ve svých úvahách ještě neuměl zohlednit vliv hmotnosti, což učinili až Halley a Newton. K jeho zákonům panovala dlouho všeobecná nedůvěra i u osvícených učenců, kteří odmítali nesmyslná církevní dogmata o uspořádání světa. Všechny tři zákony je možno exaktně odvodit z gravitačního zákona, který byl ale Newtonem objeven až o třičtvrtě století později. Již 50 let před Newtonem vyslovil **Galileo** (1564 až 1642) tvrzení, že těleso, na které nepůsobí vnější síly, se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Mimo jiné také ověřil rovnoměrně zrychlený pád těles na Zemi a naměřil tíhové zrychlení asi $10\,m/s^2$ . Plnohodnotné hledisko dynamiky přinesl až Isaac **Newton** (1643 - 1727) se svými přesně definovanými pojmy "**setrvačnost, síla, akce a reakce**" a vyslovením **zákona o zachování hybnosti a momentu hybnosti**. Předehrou k Newtonovu objevu gravitačního zákona byl výpočet, který podal v r.1683 Edmond **Halley** a nezávisle i Robert **Hooke**, když vyšli ze 3. Keplerova zákona (1c) a z **Platónova** názoru, že Země obíhá okolo Slunce po kružnici úhlovou rychlostí

$$1ot/rok\,.....\omega_S = 2\pi/T\ ,\ T = 1rok$$

Do myšlenkových postupů těchto vynikajících učenců dosadíme dnes známé přesné hodnoty časů a vzdáleností. S použitím siderického roku vychází $\omega_S = \dfrac{2\pi}{31558149} = 1{,}991\cdot 10^{-7}\,rad/s$ .

***Poznámka**: Současná velikost poměrné excentricity zemské dráhy je $\varepsilon = 0{,}0167$ , takže Platón se příliš nemýlil.*

**Halleyův postup:** Střední rychlost Země okolo Slunce je $u = r\omega_S = 149{,}6\cdot 10^6\cdot 1{,}991\cdot 10^{-7} = 29{,}8km/s$

Odstředivá síla působící na Zemi s hmotností $M_Z$ je

$$F_{oZ} = M_Z r\omega_S^2 = M_Z r\frac{4\pi^2}{T^2} = (3.zákon) = M_Z r\frac{4\pi^2 k}{r^3} \qquad (1e)$$

**Přitažlivá síla Slunce $F_{SZ}$ je v rovnováze s odstředivou silou a ubývá se čtvercem vzdálenosti:**

$$F_{SZ} = F_{oZ} = 4\pi^2 k M_Z\cdot\frac{1}{r^2} \qquad (1ee)$$

Číselnou hodnotu konstanty $k$ ve svém 3. zákonu (1c) si Kepler mohl alespoň přibližně ověřit již ze starověkých znalostí pohybu Země okolo Slunce a ze svých pozorování pohybu Marsu. Podle dnes známých přesných hodnot pro **Zemi** je

$$k = 149597887500^3/31558149^2 = 3{,}362\cdot 10^{18}\ m^3s^{-2}$$

Prakticky tutéž hodnotu si může čtenář ověřit z údajů v astronomických tabulkách pro **Mars**: velká poloosa oběžné dráhy Marsu okolo Slunce $a = 227936637km$ , siderický rok $59355072s$ .

Hmotnost Země, tedy i celá konstanta úměrnosti $4\pi^2 kM_Z$ , ale v 17. století ještě známa nebyla. **Newton** aplikoval Halleyův případ **Slunce - Země** na dvojici **Země – Měsíc** :
- střední poloměr oběhu (vzdálenost středů) je $r_M = 384402km$ , hvězdná (siderická) perioda $T = 27{,}32dne$ . Obvodová rychlost na kruhové dráze je $u = 1023m/s$ a dostředivé zrychlení působící na Měsíc $u^2/r_M = 0{,}00272m/s^2$ . Na povrchu Země ($R = 6373km$) by podle Halleye mělo být dostředivé zrychlení $0{,}00272\cdot(r_M/R)^2 = 9{,}9m/s^2$ , což se téměř shoduje s hodnotou tíhového zrychlení, naměřenou Galileem.

***Poznámka**: Newton samozřejmě neznal vzdálenost Měsíce od Země (střed - střed) na milimetry přesně jako my dnes, kdy jsme dokonce schopni změřit, že roste pravidelně o 38mm za rok. Vzdálenost je pečlivě kontrolována pomocí pěti koutových odražečů, které na Měsíc dopravily mise **Apollo** a **Luna**. Unikátní počin se astronomům podařil v r.2010, když objevili pátý odražeč, který se v r.1971 na Měsíci ztratil se sovětským vozítkem Lunochod1. Poměrná excentricita dráhy Měsíce je $\varepsilon = e/a = 0{,}0549$ , světlo od něj k nám letí asi 1,3 s.*

**Newtonův geniální závěr**: zemská tíže a síla, udržující Měsíc na oběžné dráze, jsou jedno a totéž. Tím je řečeno, že **setrvačná a tíhová (gravitační) hmotnost jsou jedno a totéž**. Toto na první pohled samozřejmé tvrzení bylo ale experimentálně potvrzeno (s chybou $10^{-9}$) až v r. 1909 Lorándem **Eötvösem**, jehož první pokusy s torzními vahami se datují od r.1889. Exaktní vysvětlení ekvivalence setrvačnosti a gravitace podala až Einsteinova **obecná teorie relativity**. Newton dále pokračoval v Halleyových úvahách použitím svého **zákona o akci a reakci**: Země musí přitahovat Slunce stejnou silou jako Slunce Zemi a lze použít (1ee), ale s hmotností Slunce $M_S$ a jinou konstantou $k_S$ :

$$F_{SZ} = F_{ZS} = 4\pi^2 kM_Z\cdot\frac{1}{r^2} = 4\pi^2 k_S M_S\cdot\frac{1}{r^2}$$ a po úpravě vychází konstantní poměr

$$\frac{4\pi^2 k}{M_S} = \frac{4\pi^2 k_S}{M_Z} = \kappa \qquad (1f)$$

Konstanta $k$ ve třetím Keplerově zákonu (1c) je tedy

$$k = \frac{\kappa M_S}{4\pi^2} \qquad (1g)$$

Dosazením do (1ee) vychází vzájemná přitažlivá síla mezi Zemí a Sluncem

$$F = \kappa \frac{M_S M_Z}{r^2} \qquad (2a)$$

Úhlová rychlost obíhání Země okolo Slunce (zjednodušeně při kruhové dráze) je $\omega_S = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{r^3}}$ (2aa)

Nakonec Newton zobecnil vztah (2a) na libovolné dva hmotné body. Jeho geniální objev - **gravitační zákon** zní:

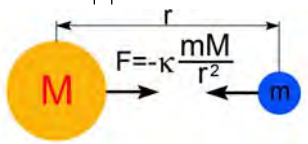
**Vzájemná přitažlivá síla mezi dvěma hmotnými body s hmotnostmi $m, M$ je**

$$\mathbf{F} = -\kappa \frac{mM}{r^2} \cdot \mathbf{r^0} = -\kappa \frac{mM}{r^3} \cdot \mathbf{r} \qquad (2b)$$

$\kappa$ .....univerzální **gravitační konstanta**; její fyzikální rozměr je $[Nm^2kg^{-2}] = [kg^{-1}m^3s^{-2}]$;

$\mathbf{r} = r \cdot \mathbf{r^0}$ .... vektor vzdálenosti hmotných bodů, $\mathbf{r^0}$ ... jednotkový vektor, absolutní hodnota $|\mathbf{r}| = r$ .

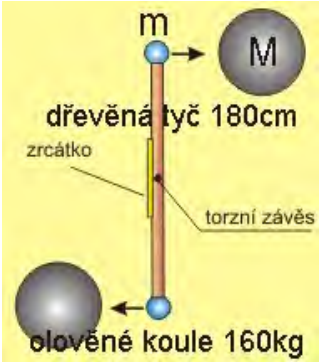
Vektorový zápis respektuje směr síly i vzdálenosti. Záporným znaménkem je vystižena úmluva, že vektor $\mathbf{r}$ směřuje od hmoty $M$ k hmotě $m$ a síla $\mathbf{F}$, působící na hmotu $m$, má směr opačný.




**Obr.1c** *Newtonův gravitační zákon*

***Poznámky*: 1)** *Dnes přijímáme jako samozřejmost, že Newtonův zákon (2b) platí (při zachování hmotností) stejně tak pro dvě koule se středově symetrickým rozložením hustoty jako pro dva hmotné body v jejich středech (tzv. "sféričnost"). Sám Newton ale řadu let o tomto faktu pochyboval. Problémem sféričnosti se zabýval obecně* ***Pierre Simon*** *de* ***Laplace*** *a dospěl k obecnějšímu vztahu, který je analogický k rovnici rozpínání vesmíru (4i).*

***2)*** *Newton sice odvodil obecný vztah (1g) pro konstantu úměrnosti v Keplerově 3. zákonu, ale až do přelomu 18. a 19. století byla známa jen velikost součinu $\kappa M_S = 4\pi^2 k$ a ze vztahu (3a) součin $\kappa M_Z = a_G R^2$ (poloměr Země $R$ znali již antičtí Řekové a velikost gravitačního zrychlení $a_G$ zjišťoval Galileo, který však ještě nerozlišoval zrychlení gravitační od tíhového). Traduje se (není ale potvrzeno), že Galileo spouštěl kameny z věže v Pise. Prokazatelně však zjistil, že čas koulení různě hmotných koulí po stejně dlouhé spádnici nakloněné roviny je stejný. Je známý jeho dotaz, který mu přitížil při církevním procesu a kterým zpochybnil Aristotelovo tvrzení, že těžší kámen padá rychleji než lehký: "Když svážu těžký a lehký kámen dohromady, budou společně padat ještě rychleji, nebo ten lehký bude pád těžšího brzdit?"*




**Obr.1cc** *Cavendishovy torzní váhy v půdorysu*

***3)*** *Gravitační konstantu $\kappa$ určil až Henry* ***Cavendish****, který v r. 1798 provedl první seriózní experimenty se svými torzními vahami - viz* ***obr.1cc****. Pozoroval vychýlení světelného paprsku odraženého zrcátkem a ze známé tuhosti torzního závěsu určil moment (a následně přitažlivou sílu) mezi nehybnými olověnými koulemi a menšími koulemi na dřevěné tyči. Zjištěním hodnoty $\kappa$ tedy mohl Cavendish určit $M_S$ i $M_Z$, takže tvrzení, že ve své laboratoři zvážil Zemi i Slunce, není jen obrazné. Podle současných údajů je gravitační konstanta $\kappa = 6{,}67384 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$, hmotnost Slunce $M_S = 1{,}9891 \cdot 10^{30} kg$ a hmotnost Země $M_Z = 5{,}9736 \cdot 10^{24} kg$ (dobře se pamatuje poměr $M_S / M_Z \approx 333000$). Průměrná hustota Slunce při jeho poloměru $R_S = 696000 km$ je tedy $\rho_S = 1400 kg/m^3$ (podle počtu atomů se udává složení asi z 92% vodíku a 8% helia) a Slunce tak představuje 99,8% hmotnosti celé sluneční soustavy. Průměrná hustota Země při jejím středním poloměru $R_Z = 6373\ km$ je $\rho_Z = 5510 kg/m^3$ (1,2krát více než u kovu titanu) a poloměry jsou v poměru $R_S / R_Z \approx 109$. Gravitační konstanta je oproti jiným fyzikálním konstantám změřena poměrně nepřesně a zobecnění její platnosti z ideálního případu dvou hmotných bodů na koule není také na první pohled samozřejmé.*

***4)*** *Objev univerzálního gravitačního zákona rozpoutal diskuse o hranicích vesmíru, neboť pokud by byl statický a konečný (což se podle církevních dogmat předpokládalo), všechny hvězdy by měly nakonec spadnout do jednoho místa. Možným vysvětlením, že se tak neděje, je předpoklad nekonečného vesmíru s nekonečným počtem hvězd, jejichž gravitační účinky se ve všech směrech navzájem vyruší. Odpůrci nekonečného rozměru vesmíru ale žádali vysvětlení, proč celá obloha nezáří i v noci, když celé zorné pole by mělo být hustě vyplněno*

*nekonečným počtem hvězd (tzv. **Olbers - Keplerův paradox**). Již spisovatel **Edgar Allan Poe** (1809-1849) vyslovil názor, důstojný klasika fantastické literatury, že světlo vzdálených hvězd k nám ještě nedorazilo. Na základě novodobých poznatků o **rozpínání vesmíru** se Olbers - Keplerův paradox vysvětluje spektrálním **rudým posuvem** (růstem vlnových délek námi pozorovaného záření vzdálených hvězd, které se od nás při rozpínání vesmíru vzdalují: od určité vlnové délky se záření dostane mimo viditelnou oblast). Kromě toho hvězdy nezáří věčně a postupně vyhasínají. Toto vysvětlení je přijatelné pro hypotézu konečného i nekonečného vesmíru, o čemž mezi astronomy stále probíhají diskuse. Noční tma je tedy nejsrozumitelnějším důkazem toho, že se vesmír vyvíjí a netrvá věčně.*

***5)** Historie objevu gravitačního zákona paradoxně začala ve vesmíru na případech Slunce-Země, Země-Měsíc a teprve po více než 100 letech skončila pozemským Cavendishovým pokusem.*

***Příklad:** Výpočet průměrné hustoty Slunce z pouhé znalosti jeho zorného úhlu a gravitační konstanty: v **obr.1bbb** je*

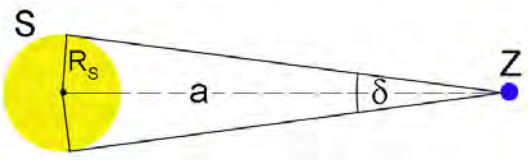
$$\sin\delta/2 = R_S/a \approx \delta/2, \quad \delta = 32' = 0{,}0093 rad$$

*S použitím (1g) a 3. Keplerova zákona je průměrná hustota*

$$\rho_S = \frac{M_S}{4\pi R_S^3/3} = \frac{4\pi^2 k/\kappa}{4\pi R_S^3/3} = \frac{3\pi k}{\kappa R_S^3} = \frac{3\pi k}{\kappa a^3 \sin^3\delta/2} \approx \frac{3\pi k}{\kappa k T^2 (\delta/2)^3}$$

*a po úpravě*

$$\rho_S \approx \frac{24\pi}{\kappa T^2 \delta^3}$$ *(kde $T = 31558149 s$ .... siderický rok).*



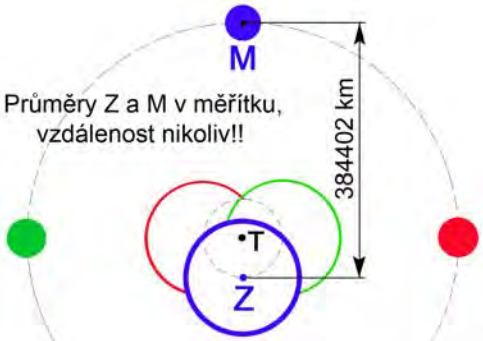

**Obr.1bbb** *Zorný úhel Slunce ze Země*

## 1.3 Centrální pohyb

Tato tzv. **zjednodušená Keplerova úloha** se zabývá velmi častým případem, kdy jedna z obou hmot je výrazně větší než druhá, takže její silové ovlivňování menší hmotou a následný pohyb lze zanedbat (např. dvojice Slunce - Země, Země - umělá družice).

***Poznámky**: **1)** Toto neplatí pro dvojici Země - Měsíc: **hmotnost Země je jen 81krát větší než hmotnost Měsíce**, což je mezi planetami a jejich měsíci ve Sluneční soustavě výjimečně málo, takže se někdy hovoří o "**dvojplanetě Země - Měsíc**". Země v této soustavě koná nezanedbatelný pohyb: obíhá okolo společného těžiště (tzv. „barycentra"), které neleží v jejím středu, ale asi 1700km pod jejím povrchem, po téměř kruhové elipse. Střední poloměr oběhu je tedy asi 4700km. Střední poloměr Měsíce je $R_M = 1737 km$, viz **obr.1ccc**.*

***2)** Měsíc je podroben přitažlivé síle Země i Slunce. Jednoduchým výpočtem podle gravitačního zákona zjistíme, že **přitažlivá síla Slunce je 2,2krát větší**!! Eventuální námitku, proč tedy Měsíc nepadá k Slunci, vyvrací klasická mechanika přítomností odstředivé síly, dané rotací celé soustavy Země – Měsíc okolo Slunce.*




**Obr.1ccc** *Společné těžiště Země a Měsíce*

Keplerova úloha tedy řeší pohyb dvou těles, působících na sebe navzájem přitažlivou silou podle (2b), z nichž jedno je nehybné. Jde o tzv. **centrální pohyb** okolo **centra gravitace**. Bylo již dříve řečeno, že se jedná o pohyb v rovině. Její exaktní matematické řešení podal až Newton pomocí gravitačního zákona (mj. i díky svým znalostem diferenciálního a integrálního počtu) a tím **zpětně dokázal všechny tři Keplerovy zákony** (1a,b,c). Pojmy "diferenciál, integrál", nutné pro tento důkaz, nebyly v Keplerově době ještě známy.

Dále uvedeme ještě **pozdější důkaz pomocí komplexních čísel**, který ale není Newtonův, neboť úplný početní aparát s komplexními čísly a funkcemi dokončili až Leonhard **Euler** (1707 až 1783) a Augustin Louis **Cauchy** (1789 až 1857). Střed souřadného systému položíme do těžiště větší hmoty $M$ a radiusvektor $\mathbf{r}$ vyjádříme jako **komplexní funkci času** polárním způsobem:

$\mathbf{r}(t) = r(t)e^{j\varphi(t)}$, první derivace $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}e^{j\varphi} + jre^{j\varphi}\dot{\varphi} = (\dot{r} + jr\dot{\varphi})e^{j\varphi}$ (2c)

Druhá derivace $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} + j\dot{r}\dot{\varphi} + jr\ddot{\varphi})e^{j\varphi} + j(\dot{r} + jr\dot{\varphi})e^{j\varphi}\dot{\varphi} = \left(\ddot{r} + 2j\dot{r}\dot{\varphi} + jr\ddot{\varphi} - r(\dot{\varphi})^2\right)e^{j\varphi}$

Silová rovnováha (setrvačná síla = přitažlivá síla): $m\ddot{\mathbf{r}} + \kappa\frac{mM}{r^3}\cdot\mathbf{r} = 0 \;\Big|\; : m$ tj. $\ddot{\mathbf{r}} + \kappa\frac{M}{r^3}\cdot\mathbf{r} = 0$ (2d)

Dosazení za $\mathbf{r}$ a $\ddot{\mathbf{r}}$:

$$\left(\ddot{r} + 2j\dot{r}\dot{\varphi} + jr\ddot{\varphi} - r(\dot{\varphi})^2\right)e^{j\varphi} + \kappa\frac{M}{r^2}\cdot e^{j\varphi} = 0 \;\Big|\; : e^{j\varphi}$$

$$\ddot{r} + 2j\dot{r}\dot{\varphi} + jr\ddot{\varphi} - r(\dot{\varphi})^2 + \kappa\frac{M}{r^2} = 0$$

Reálná i imaginární část na levé straně musí být nulové: imaginární část $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \;\Big|\; \cdot r$

$$r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0 \text{ a po integraci}$$

$$r^2\dot{\varphi} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = C_1 \quad \text{nebo také} \quad r\dot{\varphi} = \frac{C_1}{r} \quad (C_1 \neq 0 \text{ ..... integrační konstanta}) \tag{2e}$$

**Důkaz 2. Keplerova zákona**

V **obr.1b** platí $dr = rd\varphi$, $dA = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$, plocha $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dA = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$

a dosazením z (2e) za $r^2 d\varphi = C_1 dt$ je $A = \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2} C_1 dt = \frac{1}{2}C_1\Delta T$ (2f)

Opsaná plocha $A$ tedy roste lineárně s časem, plošná rychlost $w = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}C_1$ je konstantní.

**Důkaz 1. Keplerova zákona**

Dosazení (2e) do (2d): $\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa\frac{M}{r^3}re^{j\varphi} = -\kappa\frac{M}{r^2}e^{j\varphi} = -\kappa\frac{M}{C_1}\dot{\varphi}e^{j\varphi} = -\kappa\frac{M}{jC_1}\frac{d}{dt}\left(e^{j\varphi}\right) = j\kappa\frac{M}{C_1}\frac{d}{dt}\left(e^{j\varphi}\right)$

Integrace se zavedením integrační konstanty ve tvaru $jC_2$, porovnání s (2c):

$$\dot{\mathbf{r}} = j\kappa\frac{M}{C_1}e^{j\varphi} + jC_2 = \left(\dot{r} + jr\dot{\varphi}\right)e^{j\varphi} \quad \Big| : e^{j\varphi}$$

Dosazení z (2e): $$j\kappa\frac{M}{C_1} + jC_2e^{-j\varphi} = \dot{r} + jr\dot{\varphi} = \dot{r} + j\frac{C_1}{r}$$

Eulerův vztah pro $e^{-j\varphi}$: $$j\kappa\frac{M}{C_1} + jC_2\left(\cos\varphi - j\sin\varphi\right) = \dot{r} + j\frac{C_1}{r}$$

Imaginární části se musejí rovnat: $\kappa\frac{M}{C_1} + C_2\cos\varphi = \frac{C_1}{r}$ a po úpravě vychází rovnice elipsy ve tvaru (1a):

$$r = \frac{C_1^2}{\kappa M + C_1C_2\cos\varphi} \tag{2g}$$

**Důkaz 3. Keplerova zákona**

Koeficienty ve (2g) a (1a) jsou sobě úměrné přes libovolně zvolenou konstantu $k_1$:

$$\begin{aligned} k_1\kappa M &= a \\ k_1C_1C_2 &= e \\ k_1C_1^2 &= a^2 - e^2 = k_1^2\left(\kappa M\right)^2 - k_1^2\left(C_1C_2\right)^2 \end{aligned} \tag{2h}$$

Po zavedení další konstanty $\xi = \frac{1}{\left(\kappa M\right)^2 - \left(C_1C_2\right)^2}$ vychází $k_1 = \frac{C_1^2}{\left(\kappa M\right)^2 - \left(C_1C_2\right)^2} = \xi C_1^2$

Rozměry elipsy jsou tedy
$$\begin{aligned} a &= \xi C_1^2\kappa M \\ e &= \xi C_1^3 C_2 \\ b &= \sqrt{a^2 - e^2} = \xi C_1^2\sqrt{\left(\kappa M\right)^2 - \left(C_1C_2\right)^2} = \sqrt{\xi}C_1^2 \end{aligned}$$

Je-li $T$ doba oběhu celé elipsy, platí podle (1a) a (2f) pro její plochu

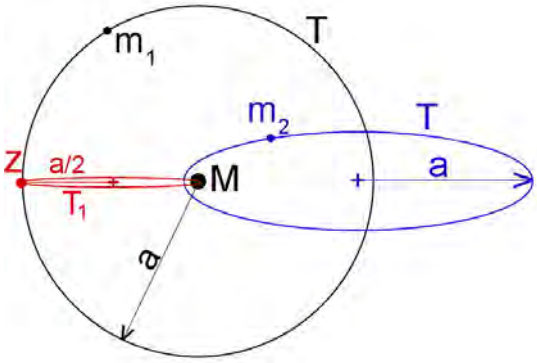
$\pi ab = \frac{1}{2}\int_0^T C_1 dt = \frac{1}{2}C_1T$, takže $T = \frac{2\pi ab}{C_1}$ a po dosazení za $a,b$ je $T = 2\pi\xi^{3/2}C_1^3\kappa M$ .

Pro hlavní poloosu platí z horního vztahu $\xi^{3/2}C_1^3 = \left(\frac{a}{\kappa M}\right)^{3/2}$, takže po dosazení vychází 3.zákon ve tvaru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\kappa M}} \text{ ..... srovnej s (2aa) nebo po umocnění na druhou s (1c)} \tag{2j}$$

**Doba oběhu tedy závisí jen na velikosti velké poloosy elipsy**. Doby oběhu dvou těles $m_1, m_2$ okolo centra $M$ po různých drahách se stejnými hlavními poloosami podle **obr.1cccc** jsou stejné pro kružnici i pro elipsu bez ohledu na její štíhlost. Hmotnosti obíhajících těles dobu oběhu neovlivňují !!

***Příklad:*** *Země oběhne Slunce po téměř kruhové dráze o poloměru $a$ za dobu $T = 1 rok$. Kdyby se na své oběžné dráze zastavila, padala by ke Slunci po úsečce, kterou si v* ***obr.1cccc*** *můžeme představit jako nekonečně štíhlou elipsu s hlavní poloosou (a tedy i excentricitou) o délce $a/2$. I při takto extrémním tvaru se stále jedná o centrální „keplerovský" pohyb, jehož aphéliem je výchozí bod pádu, kde jsme Zemi zastavili. Pomocí rovnice (3jj) si snadno ověříme, že v mezním případě rovnosti hlavní poloosy a excentricity je rychlost v aphéliu nulová. Celá doba oběhu by podle (2j) byla $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{(a/2)^3}{\kappa M_S}} = \frac{T}{\sqrt{8}}$, takže Slunce by Zemi pohltilo za dobu $\frac{T_1}{2} = \frac{T\sqrt{2}}{8} = 5{,}578 \cdot 10^6 s = 0{,}1768$ roku (tj. 64,74 siderického dne). Stejnou úvahou lze zjistit, že Měsíc by spadl na Zemi za $419254$ $s$ (tj. za 116,5 hodin).*



***Obr.1cccc***

## 1.4 Centrální gravitační pole

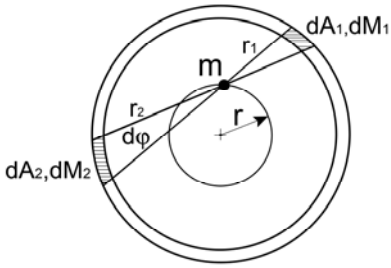
Osamocený hmotný bod o hmotnosti $M$ (**centrum**) vytváří okolo sebe středově souměrné **centrální gravitační pole**, ve kterém jsou okolní tělesa přitahována gravitační silou podle vztahu (2b). Charakteristickou veličinou pole je jeho **intenzita** (síla přitahující cizí těleso s hmotností $m = 1kg$ do středu - centra):

$$\mathbf{K}(r) = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\kappa\frac{M}{r^2}\cdot\mathbf{r^0} = -\kappa\frac{M}{r^3}\cdot\mathbf{r} \quad [N/kg] \tag{3}$$

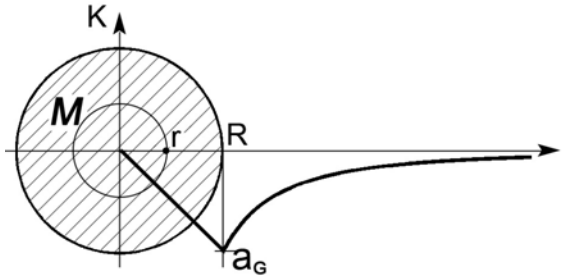
Intenzita závisí na hmotnosti centra $M$ a nezávisí na hmotnosti $m$ přitahovaného tělesa!! Platí, že pro $r \to \infty$ je $\mathbf{K} = 0$. Jednoduchými integračními postupy (např. v **[12]**) je možno odvodit logický výsledek, že **centrem může být nejen hmotný bod, ale i kulové těleso se středově souměrným rozložením hustoty a vzdálenost $r$ potom měříme od jeho středu – těžiště (tzv. 1.Newtonova věta)**. Dále platí **2. Newtonova věta**, podle které **intenzita gravitačního pole uvnitř hmotné kulové slupky je nulová** (tzv. "gravitační klec", ale pozor: analogie s Faradayovou klecí zde neplatí, neboť těleso uvnitř slupky není chráněno před gravitačním působením jiných těles, nalézajících se vně slupky; **gravitaci nelze odstínit!!**). Uvedeme pouze zjednodušené zdůvodnění 2.Newtonovy věty podle **obr.1d** vlevo:

- leží-li hmota $m$ ve špičce kužele s vrcholovým prostorovým úhlem $d\varphi$, potom se silová působení plošných elementů kulové slupky $dA_1$, $dA_2$ s hmotnostmi $dM_1$, $dM_2$ navzájem vyruší, neboť jejich plochy (a tím i hmotnosti) rostou s kvadrátem vzdáleností $r_1$, $r_2$. V gravitačním zákonu (2b) se tedy druhé mocniny poloměrů v čitateli i jmenovateli vykrátí a rozšířením této úvahy na celý povrch slupky s prostorovým úhlem $2\pi$ znovu získáme nulu. To má další důsledek:
- je-li centrálním tělesem homogenní hmotná koule o poloměru $R$ a hustotě $\rho$ podle **obr.1d** vpravo, platí vztah (2b) a (3) jen pro těleso, ležící na poloměru $r \geq R$. Při $r < R$ **intenzita klesá směrem ke středu koule lineárně do nuly**, neboť gravitační působení všech vnějších "slupek" s poloměrem větším než $r$ je nulové a působí pouze slupky vnitřní, které v souhrnu vytvoří homogenní kouli o poloměru $r$ s hmotností $\rho\frac{4}{3}\pi r^3$. Podle (3) tedy bude pro intenzitu uvnitř slupky platit lineární závislost

$$\mathbf{K} = -\kappa\rho\frac{4\pi r^3}{3r^2}\cdot\mathbf{r^0} = -\kappa\rho\frac{4\pi\mathbf{r}}{3}$$



*Intenzita gravitačního pole uvnitř homogenní slupky*



*Intenzita gravitačního pole vně a uvnitř homogenní koule*

***Obr.1d***

Ve středu koule ($r = 0$) vychází $\mathbf{K} = 0$. Názorně to lze vysvětlit i tak, že přitažlivé síly všech okolních hmotných elementů zde působí středově souměrně a navzájem se všechny vyruší.

**Intenzity gravitačních polí více center se vektorově sčítají** a směr výsledného vektoru v každém bodě prostoru je možno znázornit pomocí **siločar**, směřujících radiálně do zdrojů gravitace, viz rovinné vyobrazení na **obr.1e**. Na povrchu obou těles je intenzita (hustota siločar) největší, v bodě **A** je nulová.

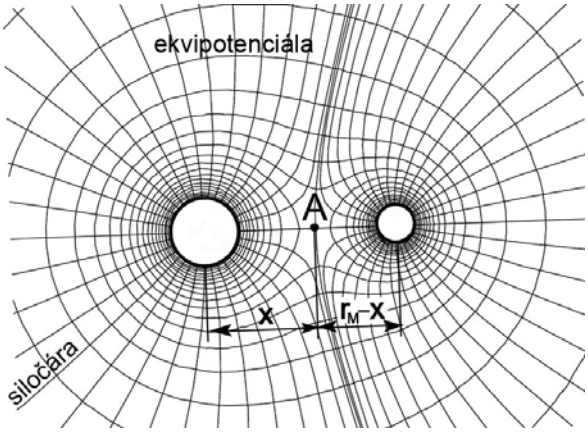
**Ve většině dalších úvah bude centrálním tělesem míněna Země se svou hmotností** $M_Z = M = 5{,}9736 \cdot 10^{24} kg$ **a středním poloměrem** $R_Z = R = 6373 km$**.** Intenzita jejího gravitačního pole (tzv. **gravitační zrychlení**, označované symbolem $\mathbf{a_G}$) je

$$\mathbf{a_G} = -\kappa \frac{M}{r^2} \cdot \mathbf{r^0} \quad \text{(na povrchu Země je třeba dosadit } r = R\text{)} \qquad (3a)$$

***Poznámka:*** *V případě rovnoběžnosti vektorů není nutný vektorový zápis a v (3a) se i vynechává záporné znaménko, neboť to, že vektor gravitačního zrychlení směřuje do středu Země (tedy proti směru růstu poloměru), předpokládáme automaticky.*

***Příklad 1:*** *Střední vzdálenost Země-Měsíc je* $r_M = 384402 km$*, hmotnost Měsíce je 81-krát menší než Země. Výsledná intenzita bude nulová (tj. gravitační pole obou těles se vzájemně vyruší) na spojnici jejich středů ve vzdálenosti* $x$ *od středu Země. Platí tedy*

$K_Z = -\kappa \frac{M}{x^2} = K_M = -\kappa \frac{M/81}{(r_M - x)^2}$ *a řešením kvadratické rovnice* $x^2 = 81(r_M - x)^2$ *vychází jeden relevantní kořen* $x = 0{,}9 r_M = 345960 km$*, viz bod **A** v **obr.1e** (není zakreslen v přesném měřítku!!). **Zanedbali jsme gravitační pole jiných těles (hlavně Slunce a ostatních planet).** Zde je třeba poznamenat, že v bodě **A** nepanuje "beztížný stav":*
*- gravitační pole obou těles se v něm sice vyrušila, ale na družici zde umístěnou působí ještě odstředivá síla, příslušející rotaci bodu **A** okolo společného těžiště soustavy Měsíc – Země. Podrobněji viz **kap.1.10** (**Lagrangeovy librační body**).*

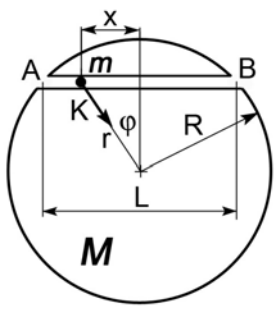


***Obr.1e*** *Siločáry a ekvipotenciální hladiny při interakci dvou gravitačních polí (převzato z **[12]**)*

***Příklad 2 (gravitační expres):***
*Mezi místy **A**,**B** na povrchu kulového homogenního tělesa o hmotnosti* $M$ *(např. Země) je vyvrtán přímý otvor (tunel), do kterého je v bodě **A** volně a bez pasivních odporů spuštěno těleso (např. vagon na kolejích) o hmotnosti* $m$ *(viz **obr.1f**). Určete čas, za který se těleso přemístí do bodu **B**.*

***Řešení:*** *Intenzita gravitačního pole zdroje* $M$ *klesá od povrchu s poloměrem* $R$ *ke středu lineárně do nuly, tj.* $K = -\kappa \frac{M}{R^2} \cdot \frac{r}{R} = -\kappa \rho \frac{4\pi r}{3}$*. Na těleso* $m$ *působí složka gravitačního zrychlení* $\ddot{x} = K \sin\varphi = -\frac{\kappa M r}{R^3} \sin\varphi$*,* $\sin\varphi = \frac{x}{r}$*. Pohybová rovnice je tedy* $\ddot{x} + \frac{\kappa M}{R^3} x = 0$*. Jde o rovnici harmonických kmitů s kmitočtem* $\Omega = \sqrt{\kappa M / R^3}$ *a s řešením* $x = \frac{L}{2} \cos\Omega t$*. Doba přemístění (polovina periody) je* $T/2 = \pi/\Omega = \pi\sqrt{R^3/\kappa M}$ *bez ohledu na vzdálenost* $L$ *obou bodů. Kdyby byla Země homogenní koulí, čas jízdy vagonu v tunelu by byl* $T/2 = 42{,}2 min$ *při jakékoliv poloze obou nádraží na jejím povrchu (je ale zanedbáno tření a vliv rotace Země okolo vlastní osy!!). Vagon se rozjede z bodu **A**, v bodě **B** se zastaví a dojede zpět do **A** bez spotřeby energie. V polovině délky tunelu (při* $x = 0$*) dosáhne maximální rychlosti* $u_{max} = \frac{L\Omega}{2}$*. Vedl-li by tunel středem Země (tj.* $L = 2R$*), byla by maximální rychlost* $u_{max} = R\Omega = \sqrt{\kappa M / R} = 7{,}9 km/s$*.*

*Ukážeme později, že doba periody* $T = 84{,}4 min$ *je rovna době oběhu družice Země po kruhové dráze první kosmickou rychlostí, což je právě rychlost* $u_{\max}$*. Současný rychlostní rekord vlaku, který se pohybuje na magnetickém závěsu (JR-MAGLEV, Jamanaši, Japonsko), je* $580 km/hod$*. Připustíme-li tuto rychlost jako maximální možnou, tunel by nesměl být delší než* $L_{max} = \frac{u_{max} T}{\pi} = 260 km$ *(přibližně Praha-Vídeň) a jeho maximální hloubka pod povrchem Země by byla asi* $1300 m$*.*



***Obr.1f*** *Pohyb uvnitř zdroje gravitace*

## 1.5 Potenciální energie v centrálním gravitačním poli

Při posunutí tělesa $m$ o radiální přírůstek $d\mathbf{r}$ směrem od středu centra musí působící síla překonávat gravitační sílu $\mathbf{F}$, takže podle (2b) vykoná práci

$dW = -\mathbf{F}d\mathbf{r} = \kappa\frac{mM}{r^3}\mathbf{r}d\mathbf{r}$ a těleso změní svoji potenciální energii o $dU = \kappa\frac{mM}{r^2}dr$. Po integraci je $U = \int dU = \kappa mM\int\frac{dr}{r^2} + C = \frac{-\kappa mM}{r} + C$.

Těleso nekonečně vzdálené od centra není jeho gravitačním polem nijak silově ovlivněno (intenzita pole je nulová). Integrační konstantu $C$ tedy určíme z podmínky, že pro $r \to \infty$ je $U = 0$, tj. $C = 0$, neboli

**gravitační potenciální energie tělesa s hmotností $m$ je** $U(r) = \int_r^\infty \mathbf{F}d\mathbf{r} = -\kappa\frac{mM}{r}\ [J]$ (3b)

**Potenciální energie tělesa v gravitačním poli centra je záporná!!** Vztah (3b) platí vně centra, na jehož povrchu je

$$U_0 = -\kappa\frac{mM}{R} \qquad (3c)$$

Potenciální energie tělesa $m$ v gravitačním poli více těles s hmotnostmi $M_i$ je součtem dílčích energií, tj.

$$U(r) = \sum_i U_i = -\kappa m\sum_i\frac{M_i}{r_i} \qquad (3cc)$$

**Gravitační potenciál** je hodnota potenciální energie tělesa s hmotností $m = 1kg$:

$$\chi(r) = -\kappa\sum_i\frac{M_i}{r_i}\ [J/kg] \qquad (3d)$$

Obecně platí, že **síla je záporně vzatým gradientem potenciální energie**:

$\mathbf{F} = -\nabla(U) = -\frac{dU}{dr}\mathbf{r^0}$ a podobně platí pro intenzitu a potenciál $\mathbf{K} = -\nabla(\chi) = -\frac{d\chi}{dr}\mathbf{r^0}$ (3dd)

($\mathbf{r^0}$.... jednotkový vektor). Síla má opačný smysl než vektor poloměru a hladiny stejného potenciálu (ekvipotenciální plochy) jsou kolmé k siločarám, viz **obr.1e**. Gravitační potenciální energie nekonečně vzdáleného tělesa nabývá svého maxima, tj nulové hodnoty. S potenciálem je výhodné pracovat v případě interakce gravitačních polí více těles, protože jejich potenciály se dají skalárně sčítat (na rozdíl od intenzit, které je nutno sčítat vektorově!!).

***Příklad 2a**: U kruhových pohybů hvězd je potřeba kromě gravitačního pole počítat i s odstředivými silami $\mathbf{F} = m\omega^2\mathbf{r}$. Pro sílu a potenciální energii tzv. „**odstředivého pole**“ opět platí $m\omega^2\mathbf{r} = -\nabla(U) = -\frac{dU}{d\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr}\mathbf{r^0}$,*

*takže je možno položit $\mathbf{r} = r$, $\mathbf{r^0} = 1$ a po integraci vychází* $U(r) = \int_0^r dU = -m\omega^2\int_0^r r dr = -\frac{mr^2\omega^2}{2}$ (3ddd)

*To je též záporně vzatá kinetická energie tělesa, obíhajícího po kruhové dráze s poloměrem $r$ obvodovou rychlostí $u_{obv} = r\omega$. Odstředivý potenciál je $-r^2\omega^2/2$ a při vyšetřování pohybu kosmických těles je nutno jej přidat k potenciálu pole gravitačního (3d), což ukážeme dále při určování tzv.Lagrangeových libračních bodů.*

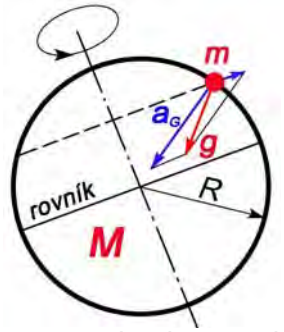
## 1.6 Tíhové pole Země

Na zemském povrchu je třeba do vztahu pro gravitační zrychlení (3a) dosadit $r = R$, ale $R$ není přesnou konstantou (Země má spíše tvar elipsoidu a v okolí pólů je zploštělá) a dále je třeba zohlednit její rotaci okolo vlastní osy. Na těleso rotující se Zemí působí v blízkosti jejího povrchu kromě gravitační síly $F = \kappa\frac{mM}{R^2}$ i síla setrvačná (odstředivá), která se mění s poloměrem rotace, tedy se zeměpisnou šířkou. Jejich výsledným vektorovým součtem je **tíhová síla** a podobně i **tíhové zrychlení**, které je označováno písmenem $g$ (tíhová síla vztažená na 1kg), viz **obr.1g**. Zanedbáváme gravitační pole vzdálenějších těles (např. Slunce).

***Příklad 3**: Tíhové zrychlení na pólu a na rovníku*

*Hmotnost Země $M = 5{,}9736\cdot10^{24}kg$, poloměr na pólu $R_P = 6358km$, na rovníku $R_R = 6378km$. Doba jedné otáčky Země (vůči stálicím, tj. **siderický den**) je $T_Z = 23hod\ 56min\ 4{,}1s = 86164{,}1s$.*

***Pól:** Tíhová síla na zemském pólu je rovna síle gravitační: $mg_P = \kappa\frac{mM}{R_P^2}$, tíhové zrychlení na pólu vychází teoreticky $g_P = \kappa\frac{M}{R_P^2} = 9{,}86\ m/s^2$. Experimentálně ověřená hodnota je ale $g_P = 9{,}83\ m/s^2$, neboť Země není zcela souměrným elipsoidem a její hustota je rozložena nesymetricky.*




**Obr.1g** *Tíhové zrychlení*

***Rovník:*** *Úhlová rychlost Země* $\omega_Z = \frac{2\pi}{T_Z} = 7{,}292 \cdot 10^{-5}\, rad/s$. *Tíhová síla na rovníku = gravitační síla - odstředivá síla:* $mg_R = \kappa \frac{mM}{R_R^2} - mR_R\omega_Z^2$. *Tíhové zrychlení na rovníku je teoreticky*

$g_R = \kappa \frac{M}{R_R^2} - R_R\omega_Z^2 = 9{,}77\ \ m/s^2$, *udává se* $g_R = 9{,}78\ \ m/s^2$ *(podíl odstředivého zrychlení je necelé 4 promile).*

*Při stanovení tíhového zrychlení v obecném místě povrchu Země je nutno sčítat vektor zrychlení gravitačního (směřující radiálně do jejího středu) a vektor zrychlení odstředivého, který protíná kolmo zemskou osu v rovině příslušné rovnoběžky. Tíhové zrychlení tedy není kolmé k zemskému povrchu, i když odchylka od kolmosti je velmi malá. V zeměpisném středním pásmu (okolo 45-té rovnoběžky) je* $g = 9{,}81\ \ m/s^2$.

***Srovnání:*** *použitím (3a) vychází gravitační zrychlení na povrchu Slunce asi* $28g$, *na povrchu Měsíce* $\frac{1}{6}g$.

***Poznámky: 1)*** *Správněji bychom měli postupovat podle obecné rovnice (3dd):*

*- např. v rovině rovníku je na obecném poloměru* $r$ *gravitační potenciál* $-\kappa\frac{M}{r}$, *odstředivý potenciál* $\frac{-r^2\omega^2}{2}$ *a intenzita výsledného pole* $\mathbf{K} = -\nabla(\chi) = -\frac{d}{dr}\left(-\kappa\frac{M}{r} - \frac{r^2\omega^2}{2}\right)\mathbf{r^0}$. *Po derivaci vychází*

$$\mathbf{K} = \left(-\kappa\frac{M}{r^2} + r\omega^2\right)\mathbf{r^0}$$

*V závorce jsou oproti* ***příkladu 3*** *opačná znaménka, neboť vektory intenzity a poloměru mají opačný smysl.*

***2)*** *Při technických výpočtech jevů v blízkosti povrchu Země stačí uvažovat pouze* ***homogenní tíhové pole****, což je zjednodušený případ pole centrálního, je-li intenzita konstantní a siločáry rovnoběžné. V omezené oblasti zemského povrchu s poloměrem* $R$ *je*

$$g = \kappa\frac{M}{R^2}, \quad U = \int dU = \int mgdr = mgr + C$$

*Nulová hodnota potenciální energie se klade na povrch Země, takže* $C = -mgR$. *Potenciální energie ve výšce* $H$ *nad ním je*

$$U = mg(r - R) = mgH \qquad (3e)$$

***3)*** *Většina živočichů i rostlin rozpoznává gravitaci. Často se zapomíná, že člověk má kromě pěti základních smyslů (zrak, sluch, čich, chuť, hmat) ještě šestý smysl pro rovnováhu, umístěný ve středním uchu, který je schopen měřit směr vektoru tíhového zrychlení.*

## 1.7 Zachování energie a pohyb tělesa v centrálním gravitačním poli

Při zanedbání silového působení ostatních kosmických těles (Měsíc, planety, Slunce) se jedná opět o Keplerovu úlohu centrálního pohybu v rovině a centrem v **obr.1a** je nyní Země. Nebude uvažován brzdný vliv atmosféry, takže výpočty jsou stejné jako v případě Slunce - Země. Historicky nejstarší postup výpočtu drah (Newtonův) využívá zákon o zachování hybnosti a momentu hybnosti, následuje Eulerův (pomocí komplexních čísel, viz výše). Dále použijeme třetí, ještě novější způsob, vycházející ze zákona o zachování součtu kinetické a potenciální energie (přesně jej formuloval Hermann **Helmholtz** teprve v r. 1847).

Celková mechanická energie hmotného bodu s hmotností $m$ v gravitačním poli centra (Země) s hmotností $M$ je konstantní a je součtem energie kinetické a potenciální:

$$E = E_K + U = \frac{1}{2}m\left(u_{rad}^2 + u_{obv}^2\right) - \kappa\frac{mM}{r} = konst \qquad (3f)$$

Z možných čtyř trajektorií podle (1d) vyšetříme jen první tři, tj. kružnici, elipsu a parabolu.

**1. Kružnice (**$u_{rad} = 0,\ u_{obv} = u_1$**):** při tzv. **kruhové rychlosti** $u_1$ je gravitační síla v rovnováze se silou odstředivou:

$\kappa\frac{mM}{r^2} = mr\omega^2 = \frac{mu_1^2}{r}$, úhlová rychlost je $\omega = \sqrt{\frac{\kappa M}{r^3}}$ (srovnej s (2aa) a s kmitočtem $\Omega$ „gravitačního expresu“ v ***příkladu 2***). Kruhová rychlost bývá též nazývána jako **„keplerovská“**: $u_1 = r\omega = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}}$ (3g)

V těsné blízkosti povrchu Země ($r = R$) je $u_1 = 7{,}9 km/s$ (tzv. **první kosmická rychlost**). Pro srovnání: při rotaci Země je obvodová rychlost jejího povrchu na rovníku $2\pi \cdot 6378/86164{,}1 = 0{,}465 km/s$. Při vypouštění raket na rovníku ve směru rotace Země tato rychlost pomáhá uspořit palivo.

Doba oběhu družice okolo Země je $T = \frac{2\pi R}{u_1} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}} \approx 84{,}4\,\mathrm{min}$ a je stejná, jako doba jízdy ideálního vlaku na **obr.1f**. Dosazením za hmotnost Země $M = \rho_Z \frac{4}{3}\pi R^3$ vychází $T = \sqrt{\frac{3\pi}{\kappa\rho_Z}}$, takže doba oběhu družice závisí pouze na průměrné hustotě planety $\rho_Z$, nikoliv na velikosti planety. Kdyby byla doba jedné otáčky Země právě rovna $T \approx 84{,}4\,min$ (tj. asi 17 otáček za den!!), obvodová rychlost na rovníku by byla rovna právě první kosmické rychlosti a předměty ležící na povrchu by se vlivem odstředivé síly začaly vznášet.

Celková mechanická energie podle (3f) vychází $E = -\kappa\frac{mM}{2r}$ (3h)

***Příklad 4*: Stacionární kruhová dráha (např dráha geostacionární družice, „zavěšené“ nad rovníkem):**

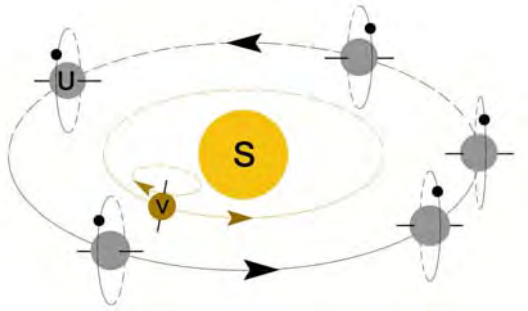
*Vzdálenost družice od středu Země je $r_D$, její kruhová rychlost musí být rovna úhlové rychlosti rotace Země:*

$$\omega_Z = \sqrt{\kappa M / r_D^3}\text{, takže } r_D = \sqrt[3]{\kappa M/\omega_Z^2} = 4{,}2167\cdot 10^7\,m = 42167\,km$$

*Výška geostacionární družice nad povrchem Země na rovníku je* $H = r_D - R = 42167 - 6378 = 35789\,km$.

*Stejný výsledek obdržíme ze 3. Keplerova zákona, aplikovaného na kruhovou dráhu, když do (2j) dosadíme $r_D = a$ a $\omega_Z = 2\pi/T_Z$. Z geostacionární družice je vidět přes 40% zemského povrchu.*

*Po téměř stacionární dráze obíhají např. okolo planety **Uran** jeho měsíčky **Pertida a Puck**. Uran má ještě jednu zvláštnost - viz **obr.1gg**: osa rotace leží téměř v rovině jeho oběžné dráhy okolo Slunce (s úhlovou odchylkou osm stupňů), takže ve fázi, kdy míří ke Slunci, se Uran po rovině dráhy „koulí“ a prstenec jeho měsíců rovněž. Rovina oběžné dráhy je stejně jako u ostatních planet téměř shodná s rovinou dráhy Země (ekliptikou). V obrázku je pro informaci zakreslena (nikoliv ale v měřítku!) další anomálie, kterou je ve sluneční soustavě **Venuše**: jako jediná z planet je tzv. **retrográdní** (rotuje okolo své osy v opačném smyslu, než je smysl jejího obíhání Slunce). U Uranu se často zaměňuje severní a jižní pól, takže není možno říci, je-li retrográdní či nikoliv.*




***Obr.1gg*** *Oběžná dráha Uranu*

**2. Elipsa**: v perigeu i apogeu (viz **obr.1a**) musí být celková energie shodná:

$$\frac{1}{2}mu_P^2 - \kappa\frac{mM}{r_P} = \frac{1}{2}mu_A^2 - \kappa\frac{mM}{r_A} \quad \text{kde} \quad r_A = a+e,\ r_P = a-e \qquad (3j)$$

Ze zákona o zachování momentu hybnosti platí $r_A u_A = r_P u_P$, takže $\frac{r_P}{r_A} = \frac{u_A}{u_P} = \frac{a-e}{a+e}$ a dosazením do (3j) po úpravách vychází rychlost v perigeu, apogeu a rychlost střední

$$u_P = \sqrt{\frac{\kappa M}{a}\left(\frac{a+e}{a-e}\right)} \qquad u_A = \sqrt{\frac{\kappa M}{a}\left(\frac{a-e}{a+e}\right)} \qquad u_{str} = \frac{u_P + u_A}{2} = \sqrt{\frac{\kappa M a}{a^2 - e^2}} \qquad (3jj)$$

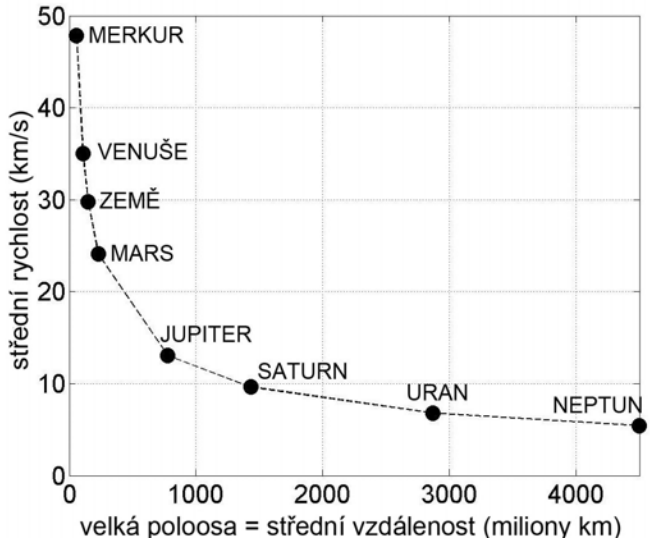
***Poznámka*:** *Oběžné dráhy planet okolo Slunce jsou téměř kruhové s maximální poměrnou excentricitou 21% (Merkur), 9% (Mars) a u ostatních planet 5% a méně. Pro přibližný výpočet jejich rychlosti je proto možno použít vztah pro kruhovou rychlost (3g), položíme-li $r = a$. Vztah (3jj) pro střední rychlost dává téměř shodné výsledky (maximální odchylka pro Merkur je 2%). Kruhové dráhy, splňující vztah (3g), se nazývají **keplerovské**.*

Celková mechanická energie např. v perigeu (tedy i v libovolném bodě elipsy) závisí na velké poloose:

$$E = \frac{1}{2}mu_P^2 - \kappa\frac{mM}{r_P} = -\kappa\frac{mM}{2a} \qquad (3k)$$

(srovnej s (3h)). Dosazením do levé strany v (3f) vychází rychlost v libovolném bodě elipsy

$$u = \sqrt{\kappa M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \qquad (3m)$$




***Obr.1ggg*** *Střední rychlosti a vzdálenosti planet*

Dobu oběhu elipsy $T$ získáme z podílu její plochy $\pi ab = \pi a\sqrt{a^2 - e^2}$ a plošné rychlosti, kterou výhodně zjistíme např. v perigeu, kde platí $w = \frac{1}{2} r_P u_P = \frac{1}{2}(a-e)\sqrt{\frac{\kappa M}{a}\left(\frac{a+e}{a-e}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\kappa M}{a}(a^2 - e^2)}$. Platí tedy $T = \frac{\pi ab}{w}$ a po dosazení a úpravách znovu obdržíme 3.Keplerův zákon ve tvaru (2j). Srovnáním obou způsobů výpočtu (pomocí komplexních čísel a z energetických úvah) vidíme, že druhý způsob je snadnější.

**3. Parabola:** podle (1d) je $e = a$, takže z rovnice (1a) je $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$, kde parametr $p$ je vzdálenost ohniska od řídicí přímky. Pro $\varphi = \pi$ je $r \to \infty$. Vznik paraboly je možno si představit jako prodlužování hlavní poloosy elipsy nade všechny meze až k jejímu "roztržení", takže limitním přechodem $a \to \infty$ v (3m) vychází

$$u_2 = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}} = u_1\sqrt{2} \qquad (3n)$$

(tzv. **parabolická**, nebo též **úniková** rychlost). Celkovou mechanickou energii určíme výhodně v perigeu, kde je rychlost $u_P = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r_P}}$. Podle (3f) tedy platí

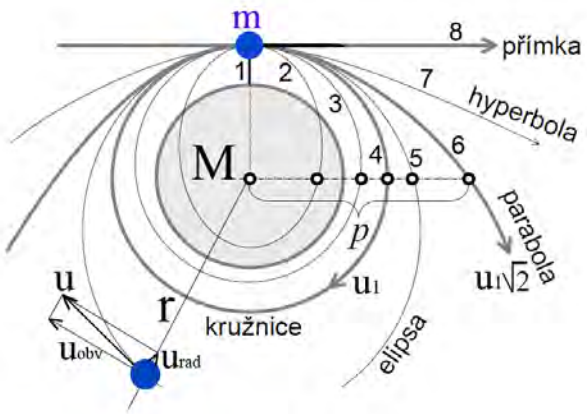
$$E = \frac{1}{2} m u_P^2 - \kappa \frac{mM}{r_P} = 0 \qquad (3p)$$

Na povrchu Země ($r = R$) je $u_2 = 11{,}2 km/s$ (**druhá kosmická rychlost**). To je rovněž nejnižší možná počáteční rychlost, udělená tělesu $m$ **kolmo** k povrchu centra $M$, aby se vymanilo z jeho gravitačního vlivu. Zjednodušeně řečeno jde o svislý vrh vzhůru, při kterém těleso $m$ dosáhne nekonečné výšky a zastaví se, takže jeho kinetická i potenciální energie budou nulové: $E_{K\infty} = 0,\ U_\infty = 0,\ E = E_{K\infty} + U_\infty = 0$. Podmínka zachování nulové celkové energie $E = 0$ musí platit v každé fázi pohybu, tedy i v okamžiku startu z povrchu centra, kde je potenciální energie dána vztahem (3c). Udělená kinetická energie při startovní rychlosti $u_2$ je

$$E_{K0} = \frac{1}{2} m u_2^2, \text{ takže } \frac{1}{2} m u_2^2 - \kappa \frac{mM}{R} = 0$$

a po úpravě vychází pro $u_2$ opět vztah (3n) při $r = R$.

Možné případy trajektorií v centrálním gravitačním poli Země při vodorovném vrhu jsou znázorněny na **obr.1h**:
**1**...volný pád, **2**...eliptický oblouk, **3**...elipsa s apogeem v bodě $m$, **4**...kružnice, **5**... elipsa s perigeem v bodě $m$, **6**...parabola, **7**...hyperbola, **8**...přímka (vodorovný vrh teoreticky nekonečnou rychlostí). V případech **1** až **5** je celková mechanická energie tělesa $m$ záporná, v případech **7,8** kladná. Stále platí rovnice (1a).




***Obr.1h*** *Možné dráhy v centrálním gravitačním poli* ***([12])***

***Poznámka:*** *V případě **2** se nejedná o parabolu, jak je někdy mylně uváděno, ale o část elipsy s ohniskem ve středu Země. Parabolická dráha by nastala v homogenním gravitačním poli. V omezené oblasti zemského povrchu (při malé počáteční rychlosti a malé vzdálenosti vrhu) lze ale centrální pole považovat za homogenní a parabola i elipsa téměř splynou.*

## 1.8 Metoda efektivního potenciálu

Pohyb tělesa v gravitačním poli centra $M$ vysvětlíme pomocí **zákonů zachování energie a momentu hybnosti** ještě obecněji. Celková energie tělesa $m$ v **obr.1h** je dána vztahem (3f), kde

$$u_{obv} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi},\ u_{rad} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \text{ takže } E = \frac{1}{2} m\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right) - \kappa\frac{mM}{r} = konst.$$

U zákona zachování momentu hybnosti se uplatní jen obvodová rychlost $u_{obv}$, takže jej lze psát skalárně:

$$L = m u_{obv} r = m r^2 \dot{\varphi} = konst \quad \text{neboli} \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$$

Spojením obou zákonů vychází energie $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \kappa\frac{mM}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r)$

kde veličina $U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \kappa\frac{mM}{r}$ ($L = konst$) (3pp)

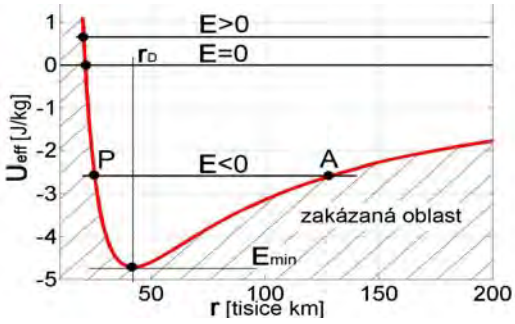
je tzv. **efektivní potenciální energie**, která se mění se vzdáleností a zahrnuje energii gravitačního pole a energii tečného pohybu $\frac{1}{2}mu_{obv}^2 = \frac{L^2}{2mr^2}$. V nekonečné vzdálenosti od centra se $U_{eff}$ blíží k nule. Radiální vzdálenost (a následně i úhlovou rychlost a úhel) můžeme vypočítat z nelineární diferenciální rovnice

$$u_{rad} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]} \qquad \text{(3ppp)}$$

kde energie $E$ a moment hybnosti $L$ jsou zadanými konstantami. Protože $u_{rad}$ musí být reálné číslo, pod odmocninou je nutně číslo kladné. Platí tedy obecný závěr, že **pohyb v centrálním poli je možný jen pro takové hodnoty $r$, kde platí** $U_{eff}(r) \le E$. Trajektorií $r = r(\varphi)$ je vždy kuželosečka (kružnice, elipsa, parabola, hyperbola) a o jejím typu rozhoduje velikost energie.

Postup vysvětlíme na případu stacionární družice Země, která má hmotnost $m = 1kg$, viz předchozí ***příklad 4***.

Hodnota momentu hybnosti $L$ je tedy určena poloměrem kruhové dráhy $r_D = 42243km$ a úhlovou rychlostí $\omega_Z$ …1ot/den. Průběh efektivní potenciální energie (pro $m = 1kg$ tedy přesněji „**efektivního potenciálu**“) podle (3pp) je na **obr.1hh**. Pro danou zápornou hodnotu energie $E < 0$ existují dva průsečíky, ve kterých je $E = U_{eff}$ a tedy rychlost přibližování (vzdalování) $u_{rad} = 0$. Vzdálenost družice od centra kolísá mezi těmito dvěma body obratu (**P**… perigeum, **A**… apogeum) a trajektorií je elipsa.




***Obr.1hh*** *Efektivní potenciál stacionární družice*

Pokud velikost energie klesne na hodnotu $E_{\min} = U_{eff\,\min}$, oba body splývají do jednoho bodu dotyku a trajektorie je kruhová s poloměrem $r_D$, což je právě případ naší stacionární družice. S rostoucí hodnotou energie $E$ se body **P**,**A** od sebe vzdalují (eliptická dráha se natahuje) až nakonec zůstane jenom jeden průsečík (perigeum) a dráha je parabolická ($E = 0$) nebo hyperbolická ($E > 0$).

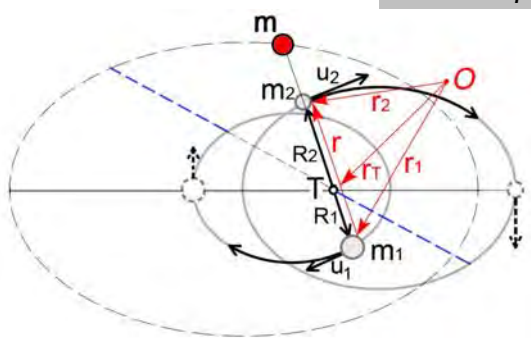
## 1.9 Obecný problém dvou těles

Zjednodušenou Keplerovu úlohu (centrální pohyb) zobecníme na případ, kdy se pohybují obě hmoty. Omezíme se na případ eliptického pohybu (viz **obr.1i** vlevo). Vzdálenost hmot v souřadném systému s obecně položeným počátkem $O$ je $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ a podle gravitačního zákona (2b) jsou jejich pohybové rovnice (pozor na znaménka!!)

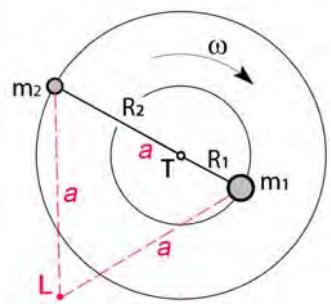
$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F_2} = -\kappa\frac{m_1 m_2}{r^3}\cdot\mathbf{r}\,,\quad m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F_1} = +\kappa\frac{m_1 m_2}{r^3}\cdot\mathbf{r} \qquad \text{(3q)}$$

Úpravou a odečtením obou rovnic vychází pro vzájemné zrychlení $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$ vztah

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa\frac{m_1 + m_2}{r^3}\cdot\mathbf{r} \qquad \text{(3r)}$$




*Eliptický pohyb, centrum $M$ náhradní soustavy je položeno do těžiště $T$*




*Kruhový pohyb okolo společného těžiště konstantní úhlovou rychlostí*
*(červeně je vyznačen jeden librační bod)*

***Obr.1i*** *Problém dvou těles*

Jejich sečtením si ověříme zákon o zachování hybnosti, neboť společné těžiště má nulové zrychlení, takže je v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 = (m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{r}}_T \quad \text{tj.} \quad \ddot{\mathbf{r}}_T = 0$$

Je proto možné zvolit tzv. těžišťový inerciální souřadný systém, tj. přesunout bod $O$ do těžiště $T$, takže

$$\mathbf{r_T} = 0\,,\quad \mathbf{r_1} = \mathbf{R_1} = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}\,,\quad \mathbf{r_2} = \mathbf{R_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}\,,\quad \frac{|\mathbf{R_1}|}{|\mathbf{R_2}|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Rychlosti $\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}$ jsou nyní vztaženy k těžišti a platí pro ně vztah $m_1\mathbf{u_1} + m_2\mathbf{u_2} = 0$, takže jsou stále rovnoběžné. Na rovnici (3r) je možno pohlížet tak, že **opět popisuje centrální pohyb okolo nehybného centra s hmotností** $M = m_1 + m_2$. Aby ale zůstala zachována přitažlivá síla podle (3q) (tedy součin $m_1m_2$ v čitateli), musí obíhající hmota mít velikost $m = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ (tzv. "redukovaná hmotnost"). Tak vzniká **náhradní soustava**, ve které platí, stejně jako u dříve řešeného centrálního pohybu, rovnice (2d). Pohyb redukované hmoty $m$ okolo centra $M$ se v **obr.1i** vlevo děje po velké čárkované elipse a platí vztahy (2j), (3j,k,m).

Vzdálenost $r$ obou hmot $m_1,m_2$ se stále rozděluje na úseky $R_1,R_2$ v konstantním poměru $m_2/m_1$, takže i jejich oběžné dráhy okolo těžiště $T$ jsou sdruženými elipsami a těžiště je jejich společným ohniskem.
Spojnice obou hmot i vektor jejich vzájemného zrychlení jím stále procházejí, takže jejich doby oběhu musí být stejné jako u náhradní soustavy a podle (2j) platí

$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\kappa(m_1+m_2)}} \tag{4}$$

kde $a$ je poloosa velké čárkované elipsy: $a = a_1 + a_2\,,\ \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{m_1}{m_2}\,,\ a_1 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}a\,,\ a_2 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}a\,.$

***Poznámka:*** *Velmi často (např. u dvojhvězd) jsou dráhy obou hmot $m_1,m_2$ téměř kruhové, takže ohniska splynou ve společném středu obou kružnic, který je těžištěm, viz **obr.1i** vpravo. Vzdálenost obou hmot je nyní konstantní ($r = a = R_1 + R_2$) a ze (4) je možno vyjádřit i konstantní úhlovou rychlost*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\kappa\frac{m_1+m_2}{a^3}} \tag{4a}$$

*Tímto vztahem jsou potvrzeny i dřívější výpočty pro dvojice těles, u nichž hmotnost druhého lze oproti prvnímu zanedbat a jde o kruhový centrální pohyb (Slunce-Země, Země-družice), srovnej např. s (2aa) pro $m_1 = M_S$ nebo (3g) pro $m_1 = M$ a vždy $m_2 \to 0$.*
*Červeně je vyznačen jeden tzv. Lagrangeův librační bod - viz další kapitola.*

***Příklad 4a:*** *Ze čtyř známých silových interakcí (gravitační, elektromagnetická, silná a slabá jaderná) je gravitační ta nejslabší. Její účinnost ilustruje následující příklad:*
*- světový rekord ve vrhu koulí (hmotnost $m = 7{,}257kg$) je asi $L = 23m$. Za jak dlouho se k sobě v prázdném prostoru přitáhnou dvě stejné vrhačské koule z počátečního klidu a vzdálenosti $L$?*
*Pohybové rovnice koulí mají obtížně řešitelný tvar, který vychází z (2d), takže ukážeme schůdnější postup: jediný rozměr elipsy, na němž závisí oběžná doba, je podle (2j) nebo (4) délka její velké poloosy $a$. Vzájemné přibližování obou koulí je možno si představit jako jejich pohyb po dvou stejných extrémně protáhlých elipsách, jejichž excentricity jsou téměř rovny hlavním poloosám a vedlejší poloosy se zkracují v limitě k nule. Startovní rychlosti koulí v apogeích u takto štíhlých elips jsou v souladu se zadáním nulové, jak zjistíme např. z (3m) po dosazení $r = a + e \approx 2a$. Hledaná doba přiblížení je polovinou oběžné doby a vyjde řešením rovnice (4) po dosazení $m_1 = m_2 = m$, $a = L/2$:*

$$t = \frac{T_1}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2L^3}{16m\kappa}} = 3{,}94\cdot10^6\,s \quad \textit{(necelých 46 dní).}$$

*Přitom jsme obě koule uvažovali jako hmotné body, takže ve skutečnosti nastane srážka nepatrně dříve. Průměr vrhačské koule je $D = 0{,}13m$, takže v okamžiku vzájemého dotyku se budou přitahovat silou*

$F = m^2\kappa/D^2 = 2{,}1\cdot10^{-7}\,N$. *Startovní přitažlivá síla byla* $F = m^2\kappa/L^2 = 6{,}64\cdot10^{-12}\,N$.

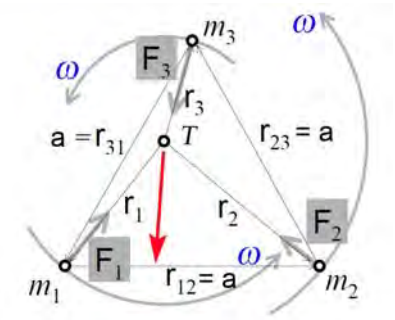
## 1.10 Problém tří těles, Lagrangeovy librační body

Rovinný problém tří těles je již exaktně neřešitelný a naznačíme pouze jeho speciální případ z **obr.1ii**. Loseph Louis **Lagrange** v r.1772 dokázal (viz též **[12]**), že mají-li tři tělesa $m_1,m_2,m_3$ udržovat od sebe neměnné vzdálenosti $r_{12},r_{23},r_{31}$, musí ležet ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka se stranami $a = r_{12} = r_{23} = r_{31}$ a obíhat po soustředných kružnicích se středem ve společném těžišti $T$ konstantní úhlovou rychlostí

$$\omega = \sqrt{\kappa\frac{m_1+m_2+m_3}{a^3}}$$ (tzv. **Lagrangeův pohyb**).

Vztah pro úhlovou rychlost je analogický k (4a) a **obr.1i** vpravo, kde šlo o případ dvou těles. Výslednice gravitačních sil, působících na každé těleso, procházejí těžištěm (v obrázku jsou označeny $F_1, F_2, F_3$) a jsou v rovnováze se silami odstředivými.

Úvahu dále zúžíme na tzv. **Lagrangeův omezený problém tří těles**, kdy jedno těleso (např. $m_3$) má vůči ostatním dvěma zanedbatelnou hmotnost a gravitačně je neovlivní, takže společné těžiště se přesune na spojnici $m_1, m_2$ (červená šipka v **obr.1ii**). Lagrange dokázal, že potom existuje celkem pět tzv. **libračních bodů L1 ÷ L5**, ve kterých se na hmotě $m_3$ vyruší přitažlivé síly hmot $m_1, m_2$ se silou odstředivou, vyvolanou rotací celé trojice okolo těžiště a vzdálenosti hmot opět zůstanou neměnné. Všechny body leží v rovině rotace hmot.




***Obr.1ii*** *Lagrangeův pohyb tří těles*

Pro názornou ilustraci vyřešíme případ fiktivní soustavy **Slunce**($m_1 = M_S$) - **„obří planeta“**($m_2 = 0{,}2M_S$) – **družice** ($m_3 = 1kg$). Vzdálenost hmot $m_1, m_2$ je $a = 150$ milionů km, souřadný systém s osou $x$ v jejich spojnici rotuje úhlovou rychlostí $\omega = \sqrt{\kappa \frac{m_1 + m_2}{a^3}}$ okolo společného těžiště $T$. Celkový potenciál hmoty $m_3$ je součtem gravitačních potenciálů hmot $m_1, m_2$ a odstředivého potenciálu na obecném poloměru $r$:

$$\chi(r, r_1, r_2) = \frac{-r^2\omega^2}{2} - \kappa\frac{m_1}{r_1} - \kappa\frac{m_2}{r_2} \tag{4aa}$$

Průběh potenciálu a jeho vrstevnic (ekvipotenciálních křivek) je na **obr.1j**.

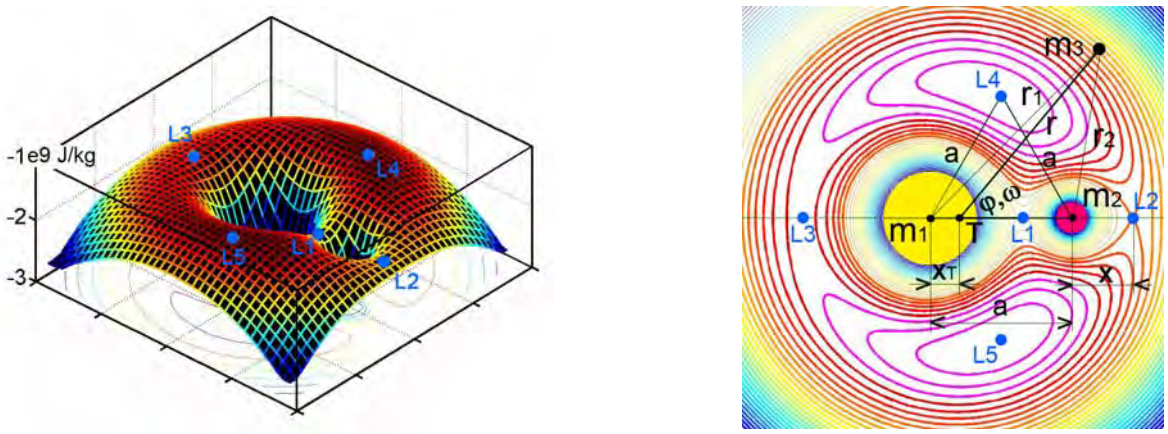
Transformací do kartézských souřadnic $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$ vyjádříme potenciál ve tvaru $\chi = \chi(x, y)$ pomocí dvou kosinových vět pro poloměry $r_1, r_2$, za které dosadíme do (4aa):

$$r_1 = \sqrt{x_T^2 + r^2 - 2x_T r\cos(\pi - \varphi)} = \sqrt{x_T^2 + x^2 + y^2 + 2xx_T}$$

$$r_2 = \sqrt{(a - x_T)^2 + r^2 - 2(a - x_T)r\cos\varphi} = \sqrt{(a - x_T)^2 + x^2 + y^2 - 2x(a - x_T)}$$

Výsledná síla na hmotě $m_3 = 1kg$ je gradientem potenciálu (4aa):

$$\frac{\mathbf{F}}{m_3} = \mathbf{K} = -\nabla(\chi) = -\left(\frac{d\chi}{dr}\mathbf{r^0} + \frac{d\chi}{dr_1}\mathbf{r_1^0} + \frac{d\chi}{dr_2}\mathbf{r_2^0}\right) = r\omega^2\mathbf{r^0} + \kappa\frac{m_1}{r_1^2}\mathbf{r_1^0} + \kappa\frac{m_2}{r_2^2}\mathbf{r_2^0} \tag{4aaa}$$

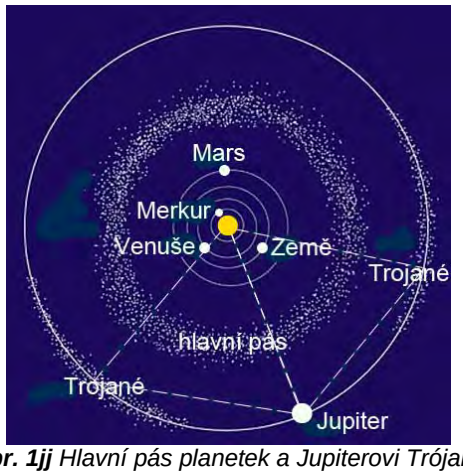



***Obr.1j*** *Průběh potenciálu a Lagrangeovy librační body soustavy* $m_1 = M_S$, $m_2 = 0{,}2M_S$, $a = 150 \cdot 10^6 km$

Takto jsme získali ve vektorovém tvaru pohybovou rovnici hmoty $m_3$ pro případ, kdy je fixována na neměnném poloměru $r$ (nevyskytuje se v ní Coriolisovo zrychlení !!). První sčítanec je odstředivé zrychlení, další dva představují gravitační zrychlení od hmot $m_1, m_2$. Dosazením za $\mathbf{K} = 0$ je možno určit polohu hledaných pěti Lagrangeových libračních bodů, ve kterých je na hmotě $m_3$ silová rovnováha. Lze snadno dokázat, že dva body **L4**,**L5** leží ve vrcholech výše zmíněných rovnostranných trojúhelníků a zbývající tři na spojnici Slunce - planeta. Librační body **L4**,**L5** jsou tzv. lokálně stabilní, neboť leží uvnitř uzavřených ekvipotenciál, uprostřed nichž je mělké minimum. Nestabilní body **L1**,**L2**,**L3** leží v místech, kde plocha potenciálu tvoří sedla a žádné těleso se v nich trvale neudrží.

***Poznámka:*** *Na oběžných drahách okolo Slunce bylo doposud identifikováno asi půl milionu tzv. planetek, což jsou objekty o rozměrech od stovek metrů do téměř jednoho tisíce kilometrů (podle nejnovější dohody astronomů byl mezi ně přeřazen i **Pluto**). Nejvíce planetek je mezi **Marsem** a **Jupiterem** v tzv. hlavním pásu*

*(viz **obr.1jj**) a velké množství (pod názvem „Trójané“) se soustřeďuje i v okolí libračních bodů **L4**,**L5** dvojice Slunce – Jupiter. Jupiter je asi tisíckrát lehčí než Slunce, takže společné těžiště leží blízko středu Slunce a Trójané kopírují Jupiterovu dráhu. Vzhledem k jejich velkému počtu a koncentraci dochází mezi nimi pravděpodobně k častým srážkám a existuje riziko, že některý úlomek bude vyvržen ze stabilního okolí libračního bodu.*



***Obr. 1jj** Hlavní pás planetek a Jupiterovi Trójané*

Nakonec uvedeme zjednodušený výpočet polohy bodu **L2** pro dvojici **Slunce – Země**, který je sice nestabilní, ale v astronomii je často využíván. Země v něm téměř zastíní Slunce (viz **obr.1jjj**), takže je výhodný pro dlouhodobé pozorování vzdáleného vesmíru. Stabilitu družice v něm je ale třeba udržovat občasnými korekčními zásahy. Protože $M_S \approx 333000 M_Z$, těžiště rotující soustavy Slunce – Země leží téměř přesně ve středu Slunce a na hmotě $m_3$ v bodě **L2** platí rovnováha odstředivé síly s oběma gravitačními (zanedbáváme vliv Měsíce):

$$\kappa \frac{M_S m_3}{(a+x)^2} + \kappa \frac{M_Z m_3}{x^2} = m_3 (a+x)\omega^2 \quad \text{kde} \quad a = 149{,}6 \cdot 10^9 m, \ \omega = 1{,}991 \cdot 10^{-7} rad/s \quad \text{(tj. 1ot/rok).}$$

Po úpravě vychází rovnice 5.stupně

$$\kappa M_S x^2 + \kappa M_Z (a+x)^2 = (a+x)^3 x^2 \omega^2$$

Řešením (např. graficky) vychází $x_{L2} \approx 1{,}5 \cdot 10^6 km$. Podobně bychom zjistili, že bod **L1** leží mezi Zemí a Sluncem ve vzdálenosti $x_{L1} \approx -x_{L2}$. Do blízkosti tohoto bodu byla za účelem pozorování Slunce vyslána v r.1995 sonda **SOHO**.

## 1.11 Závěrečné poznámky k Newtonově gravitaci

Celá Newtonova gravitační teorie s dnešní klasickou mechanikou jsou založeny na předpokladu zachování hmoty a energie a zachování hybnosti i momentu hybnosti. Zákon zachování energie (ZZE) byl ale formulován jen na základě experimentů a je jako každý fyzikální zákon ověřován měřeními, jejichž přesnost je podmíněna stupněm technického rozvoje přístrojů. Jeho platnost je zatím potvrzena jen v naší Sluneční soustavě a bližším okolí. Se zvyšováním přesnosti měření ale zjišťujeme jevy, které mohou být se ZZE v rozporu, i když odchylka je pro pozemské účely zanedbatelná. Např. vzdalování Měsíce od Země (které dnes umíme měřit s přesností na milimetry), nebo vzdalování Země od Slunce, ukazují, že **energie z neznámých důvodů (i když nepodstatně) přibývá**. Uvedeme příklad, navazující na **kap.1.7**:

- těleso, obíhající po kružnici s poloměrem $r$ okolo centra, má celkovou energii podle (3h) $E = -\kappa \frac{mM}{2r}$.

Přechodem na dráhu s poloměrem o $\Delta r$ větším stoupne energie na $E_1 = -\kappa \frac{mM}{2(r+\Delta r)}$. Přírůstek energie je

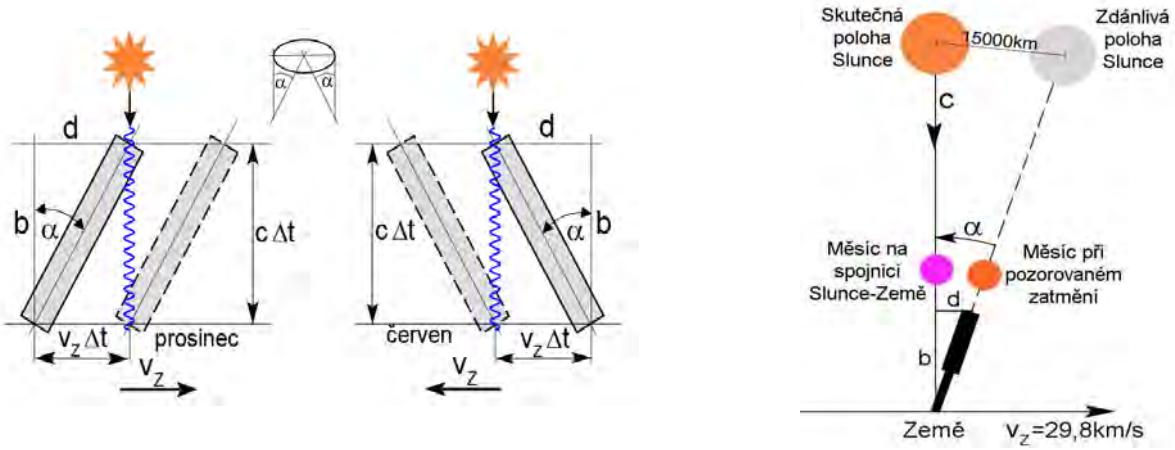
$$\Delta E = E_1 - E = \kappa \frac{mM\Delta r}{2r(r+\Delta r)} \qquad \text{(4aaaa)}$$

a poměrná změna $\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = \frac{\Delta r}{r+\Delta r}$. Měsíc se vzdaluje od Země pravidelně o $\Delta r = 38mm$ za rok, čímž získá energii $\Delta E = 3{,}78 \cdot 10^{18} J$. Kdybychom hypoteticky natáhli mezi Zemí a Měsícem lano a roztáčeli setrvačník, získali bychom výkon $120GW$ (asi 60 temelínských elektráren). Stejným způsobem můžeme určit přírůstek energie Země, která se vzdaluje od Slunce asi o 5m za rok. Vychází $8{,}8 \cdot 10^{22} J$ a odpovídající výkon je asi $2800TW$. Pro vzdalování Měsíce existuje více způsobů vysvětlení respektujících ZZE, která ale vždy vedou na menší hodnoty, než je skutečně naměřených 38mm. Newtonova teorie zde tedy selhává, i když s malou odchylkou (přírůstek energie (4aaaa) se v celkové energii Měsíce projeví až na desátém desetinném místě). O problémech vzdalování bude pojednáno v **kap.3** o rozpínání vesmíru.

V klasické mechanice se dále předpokládá nekonečná rychlost šíření silového působení, tedy i gravitace. Historie objevu gravitačního zákona začíná u Keplerových a Galileových poznatků z pozorování dvojic Slunce-Země, Země-Měsíc a končí (paradoxně) pozemským pokusem Cavendishe až 200 let po nich. Gravitační konstanta $\kappa = 6{,}67384 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ byla od té doby zpřesněna jen na pět desetinných míst a je tedy jednou z nejnepřesněji určených fyzikálních konstant (pro porovnání: číslo $\pi$ bylo k r. 2000 známo na 200 miliard desetinných míst). Platnost gravitačního zákona (stejně jako ZZE) je ověřena jen v měřítkách naší Sluneční soustavy a jejího okolí, přičemž se většinou vychází z předpokladu nekonečné rychlosti šíření gravitační

interakce. Obecná teorie relativity sice předpovídá její omezení rychlostí světla $c = 299\ 792\ 458\ m/s$ (která byla v průběhu několika století mnohokrát různými způsoby ověřována a zpřesňována), ale rychlost šíření gravitační interakce (označme ji $c_G$) nikdy změřena nebyla. Nevíme ani jak ji měřit a přitom rozlišit idealizovaný pojem „hmotný bod“ od reálného hmotného tělesa. **Je tedy pravděpodobné, že na velkých vesmírných vzdálenostech bude gravitační zákon vystihovat skutečnost jen přibližně.**

Pokud budou vzdálenosti těles velké a rychlost $c_G$ konečná, narůstá v rovnicích pro silovou rovnováhu dopravní zpoždění a proto nebudou přesné. To platí již v naší Sluneční soustavě, kde Země je od Slunce vzdálena $1au/c \approx 500$ světelných vteřin. Nežli ji dostihne aktuální přitažlivá síla Slunce, přemístí se na své oběžné dráze (za předpokladu, že $c = c_G$) o vzdálenost $500 \cdot 29{,}8 \approx 15000km$, tj. více než o svůj průměr. Přitažlivá síla tedy nebude ležet ve spojnici středů obou těles. Tomuto jevu, který nese název „**gravitační aberace**“ – viz **lit.[30a]**, se budeme věnovat v **kap.3.3**. Nevíme ani, jak při uvažování gravitační aberace definovat okamžitou polohu těžiště soustavy více pohybujících se těles, např. z **obr.1i** nebo **obr.1ii**.



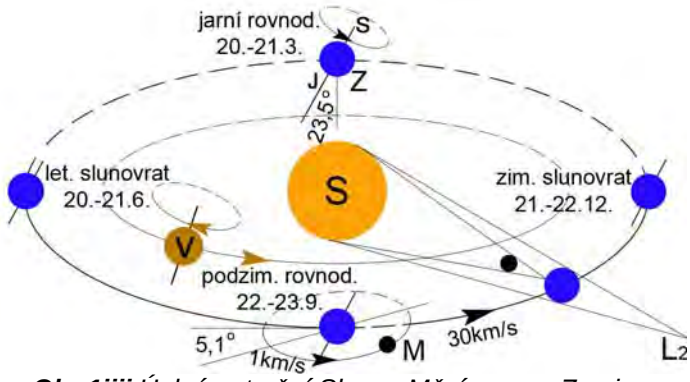

***Obr. 1jjj*** *Vlevo aberace stálic, vpravo aberace a průběh zatmění Slunce*

***Poznámky:*** ***1)*** *Obdobný a známější je jev „**světelná aberace**“, pomocí kterého vypočítal v r. 1728 James **Bradley** téměř přesně rychlost světla, viz **obr.1jjj** vlevo. Soustavným pozorováním stálic v zenitu zjistil, že všechny opisují na obloze elipsu s vrcholovým úhlem velké poloosy* $2\alpha = 41''$. *Světlo hvězdy dopadá do středu objektivu dalekohledu rychlostí* $c$ *kolmo ke směru pohybu Země. Za dobu jeho cesty od objektivu k okuláru* $\Delta t = b/c$ *se dalekohled se Zemí posune o dráhu* $d = v_Z \Delta t$. *Aby světlo prošlo i středem okuláru, je nutno průchod světla okulárem opozdit o čas* $\Delta t$, *tj. dalekohled sklonit ve směru pohybu Země o tzv. **aberační úhel*** $\alpha$, *pro který platí*

$$d/b = v_Z/c = tg\alpha \approx \alpha \approx 0{,}0001rad \approx 20{,}5''$$

*takže* $c = 10000 v_Z$. *Bradleymu vyšlo 299100km/s !! Tento jev můžeme populárně přirovnat k počínání chodce, který ve svislém dešti naklání deštník ve směru chůze, aby mu nezmokly nohy.*

***2)*** *Se světelnou aberací souvisí podivuhodná okolnost při úplném zatmění Slunce Měsícem. Při něm nám Měsíc zakrývá světlo, které Slunce vyzářilo asi před 500 vteřinami, neboli vidíme Slunce v jeho zdánlivé poloze, která se od skutečné liší o již zmíněných 15000 km, viz **obr.1jjj** vpravo. Skutečné „zatmění“ (správněji zákryt všech tří těles na jedné spojnici) nastane později asi o 40 vteřin, které Měsíc potřebuje k přemístění o aberační úhel* $\alpha$ *(*$360^0$ *za 30dní,* $0{,}5^0$ *za hodinu,* $0{,}5''$ *za vteřinu). Obrazně řečeno pozorujeme jev, který nastane v budoucnosti. Jedná se o téměř rovinný problém, neboť rovina obíhání Měsíce okolo Země svírá s rovinou ekliptiky pouhých 5,1 stupně – viz **obr.1jjjj**. Obrázek není kreslen v měřítku, ale čtenář si může sám z podobných trojúhelníků a příslušných zorných úhlů ověřit, že jde o přibližně úplná zatmění: poloměry těles jsou* $R_S = 696000km,\ R_Z = 6373km,\ R_M = 1737km$ *a vzdálenosti*




***Obr.1jjjj*** *Úplné zatmění Slunce Měsícem na Zemi a Slunce Zemí v libračním bodě **L2***

$$L_{SZ} = 149{,}6 \cdot 10^6 km,\ L_{ZM} = 384402km,\ R_{ZL2} = 1{,}5 \cdot 10^6 km$$

*Úplné zatmění bylo pozorováno dne 20.3.2015 na Špicberkách a Faerských ostrovech.*

# A2. PŘÍKLADY Z ASTRONOMIE

**Teoretickým základem současné astronomie je sice obecná teorie relativity, ale některé pojmy lze populárněji vysvětlit i pomocí klasické Newtonovy gravitační teorie.** Ta vznikala hlavně na základě poznatků z pozorování Měsíce, planet sluneční soustavy a hvězd počínaje starověkem (hlavně babylónská, čínská a řecká astronomie, Kopernik, Tycho de Brahe, Kepler, Galileo atd).

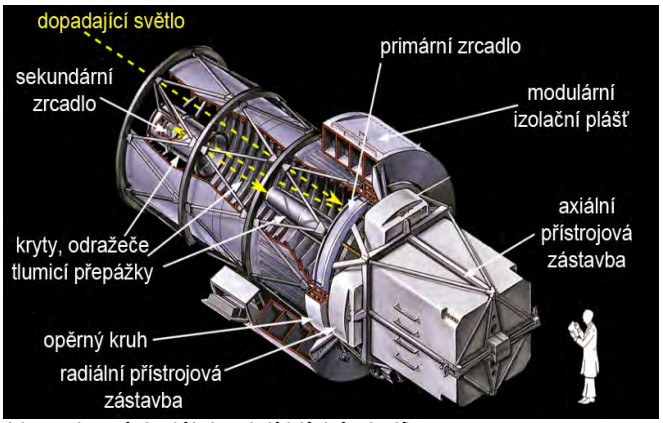
***Poznámky:*** ***1)*** *Pro běh času jsme v klasické fyzice logicky přijali kritérium podle pohybů v naší sluneční soustavě (den, měsíc, rok), o kterých předpokládáme (??proč??), že jsou periodické. Na jiné planetě jiné hvězdy by si obyvatelé mohli vymyslet jiné kritérium i jednotky. Ve vesmíru ale nic není periodické a nic se neopakuje, takže o čase je možno zrovna tak dobře tvrdit, že se zpomaluje nebo zrychluje. Nový pohled na čas přinesla až Einsteinova teorie relativity.*

***2) Měrové jednotky v astronomii:*** *Další výpočty budeme nadále provádět v základních měrových jednotkách* $kg, m, s$*, ale astronomové počítají čas v jednotkách až v miliardách let (*$Gyr$*) a vzdálenost v jednotkách, milionech až v miliardách světelných let (*$ly, Mly, Gly$*). Rychlost světla v těchto jednotkách je tedy* $c = 1Gly/1Gyr = 1$*. Jeden světelný rok (*$1ly$*) je* $9{,}46 \cdot 10^{12}\,km$*. Alternativní jednotkou vzdálenosti je* $1\,par\,sec$ *(3,262 světelných let). Z této vzdálenosti vidíme poloměr oběžné dráhy Země okolo Slunce (*$1au \approx 150 \cdot 10^6\,km$*) pod zorným úhlem jedné úhlové vteřiny. Hmotnosti hvězd je zvykem udávat v násobcích hmotnosti Slunce* $M_S = 1{,}9891 \cdot 10^{30}\,kg$*. Slunce je ve vesmírném měřítku hvězdou mírně nadprůměrné velikosti a zářivosti (tzv.* ***žlutý trpaslík****) s dlouhou dobou života (astronomové mu předpovídají od jeho vzniku před asi 4,5 miliardami let do úplného vyhasnutí celkovou délku života 12 miliard let). Leží na jednom ze spirálních ramen naší Galaxie (Mléčné dráhy) - viz* ***obr.4g*** *vlevo.*

Některé dále uvedené barevně upravené snímky jsou pořízeny z několika vesmírných teleskopů, které byly vypuštěny v rámci programu "Velkých kosmických laboratoří NASA " a Evropské kosmické agentury (ESA). Nejznámější z nich jsou:

- **Spitzer** - měří infračervenou oblast spektra (vlnové délky $\lambda = 3 \div 180\,\mu m$), vynesen v r.2003 raketou Delta2 do Lagrangeova libračního bodu **L2**, který je vzdálen 1,5 milionu kilometrů od Země;
- **Hubble** - měří oblast v okolí viditelného světla, raketoplán Discovery v r.1990, viz **obr.1k,4t1,4u**;
- **Chandra** - roentgenová oblast, obíhá Zemi ve výšce $10 \div 140$tis.km, raketoplán Columbia 1999.

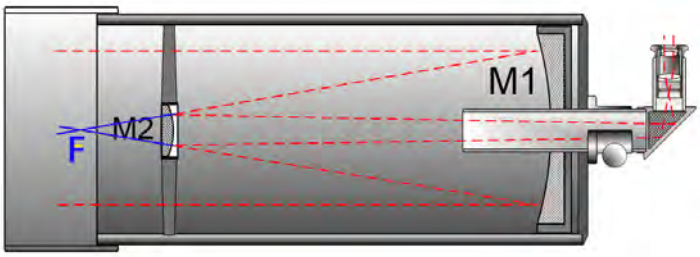
Součástí tohoto programu byla ještě **Comptonova gamma observatoř** (vynesena raketoplánem Atlantis 1991, řízeně zanikla v zemské atmosféře v r.2000).




***Obr.1k*** *Hubbleův teleskop (viditelná oblast vlnových délek a její blízké okolí)*

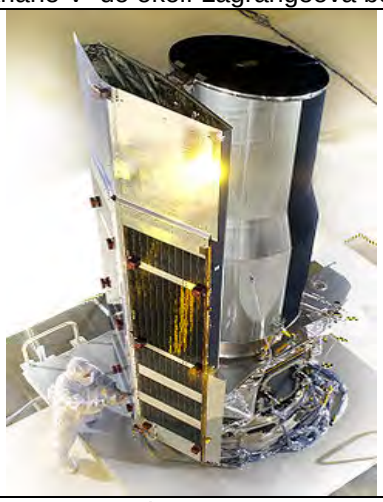
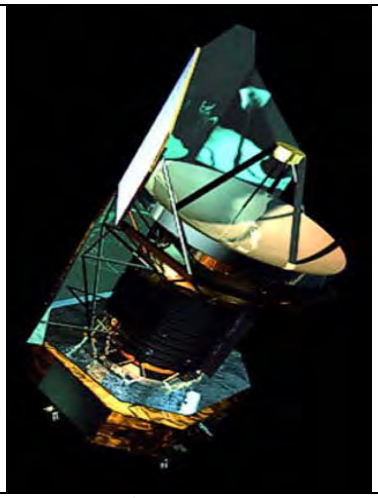
Velmi kvalitním evropským konkurentem Chandry v oblasti roentgenového záření je sonda **XMM Newton**, určená zvláště k pozorování příznaků černých děr v oblasti vlnových délek $\lambda = 0{,}1 \div 12\,nm$. Byla vynesena v r.1999 na eliptickou oběžnou dráhu okolo Země ($7 \div 114$tis.km) osvědčenou raketou Ariane V. Její pozoruhodná konstrukce obsahuje ve třech sekcích po 58 niklových pozlacených zrcadlech s průměrem až do 70 cm, která jsou soustředně ponořena do sebe.

Jedná se vesměs o zrcadlové dalekohledy (reflektory) s velkým primárním (M1) a menším sekundárním zrcadlem (M2). Menší zrcadlo má tvar konvexního rotačního hyperboloidu, větší konkávní je buď parabolické (systém **Cassegrain**....např. Herschelův nebo český Perkův dalekohled na Ondřejově), nebo hyperbolické (systém **Ritchey-Chrétien**....Hubble, Spitzer). Zatím největší ve vesmíru instalované zrcadlo (průměr 3,5m) má dnes již dosluhující dalekohled **Herschel**, který pokrývá infračervený obor v intervalu vlnových délek



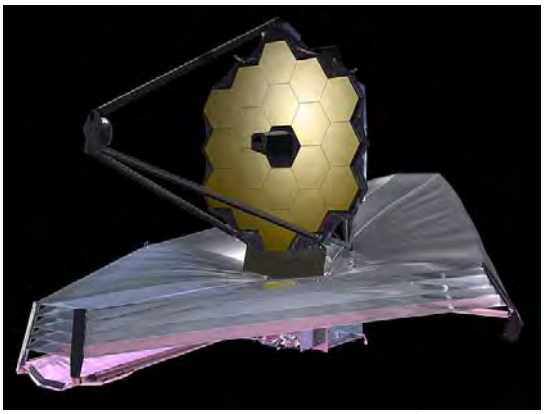

***Obr.1kk*** *Zrcadlový dalekohled, F....primární ohnisko*

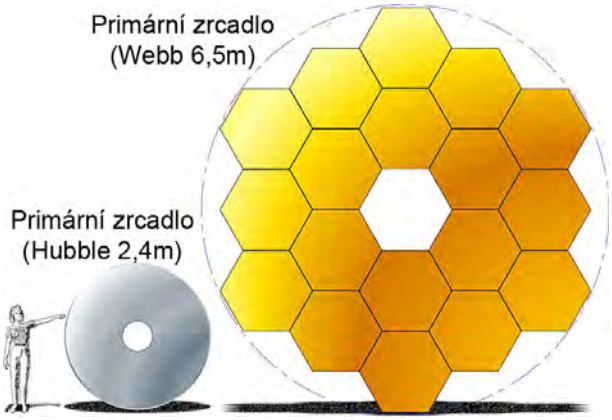
$\lambda = 60 \div 670 \mu m$. Spolu se sondou **Planck**, jejíž mise ještě trvá, byl v rámci programu ESA vynesen raketou Ariane V do okolí Lagrangeova bodu **L2** v r. 2009.

| | | |
|---|---|---|
|  |  | |
| *Infračervený dalekohled **Spitzer*** | *Infračervený dalekohled **Herschel*** | *Roentgenová observatoř **XMM Newton*** |

***Obr.1l** Vesmírné sondy pro průzkum v infračerveném a roentgenovém oboru*

V novém společném programu NASA, ESA a CSA má být v r. 2018 vynesen tamtéž a stejnou raketou obří dalekohled **Jamese E. Webba**, který bude pracovat v infračervené oblasti $\lambda = 0{,}6 \div 28 \mu m$ a nahradí dosluhující dalekohled Hubbleův - viz **obr.1m**. Jeho hlavní zrcadlo s celkovým průměrem 6,5m je složeno z 18 beryliových pozlacených segmentů, které bude možno individuálně natáčet dálkovým ovládáním ze Země. Ohnisková vzdálenost je až 131,4m. Vzhledem k velké vzdálenosti Lagrangeova bodu **L2** od Země bude na rozdíl od Hubbleova dalekohledu jakákoliv servisní nebo opravná mise k němu vyloučena.

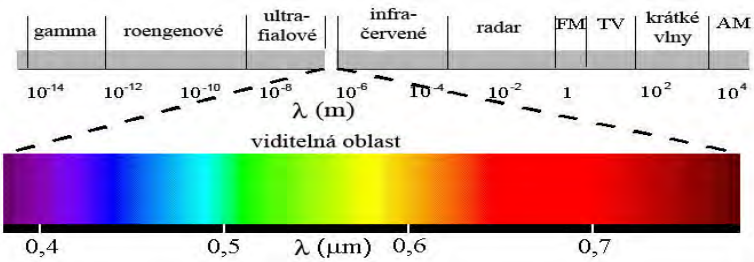





***Obr.1m** Připravovaný Webbův teleskop, srovnání velikosti hlavních zrcadel*

***Poznámka**: V pozemských podmínkách je možné levně realizovat velmi kvalitní parabolické zrcadlo roztočením nádoby se rtutí, ovšem jen pro pohled do zenitu. Zatím největší realizací této původem Newtonovy myšlenky je rtuťový dalekohled **LZT** (**L**arge **Z**enith **T**elescope.....koordinátorem projektu byla University of British Columbia, Vancouver, r.2004) s průměrem zrcadla 6m. Nerovnoměrnost rotace použitého bezkartáčového pohonu na pneumatickém ložisku je 1:10$^6$. V dalším projektu **LAMA** (opět UBC Vancouver) se plánuje realizace sítě 18 „tekutých“ zrcadel o průměru 10m, jejichž propojením by vznikl účinný průměr 54m.*

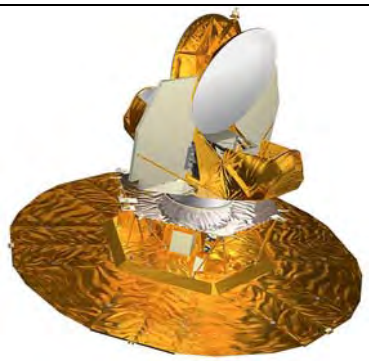
V dalším výkladu budeme často názvem „světlo“ nazývat i elektromagnetické záření jiných, než viditelných vlnových délek. Informativní přehled podává **obr.1m1**. Slunce vyzařuje nejintenzivněji na vlnové délce $0{,}5 \mu m$ a lidské oko je tomuto stavu dobře přizpůsobeno, neboť vnímá délky v rozsahu asi $0{,}4 \div 0{,}8 \mu m$.



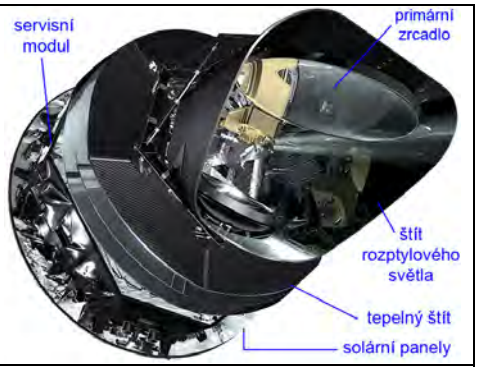

***Obr.1m1** Vlnové délky různých druhů elektromagnetického záření (viditelná oblast mezi 400 a 800 nm)*

Vzdálený vesmír a speciálně reliktní záření pozorovala po 4 roky z oběžné dráhy okolo Země sonda **COBE** (Cosmic Background Explorer, rozsah $\lambda = 1\mu m \div 10mm$, NASA 1989) a v okolí bodu **L2** jsou umístěny sondy **WMAP** (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, rozsah $\lambda = 3{,}3 \div 13{,}6mm$, NASA 2001) a již zmíněná a zatím nejpřesnější sonda **PLANCK** (rozsah $\lambda = 0{,}3 \div 10mm$). Jejich výsledky zmíníme v kapitole o rozpínání vesmíru.

*COBE (Cosmic Background Explorer)*



*WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)*




*PLANCK*

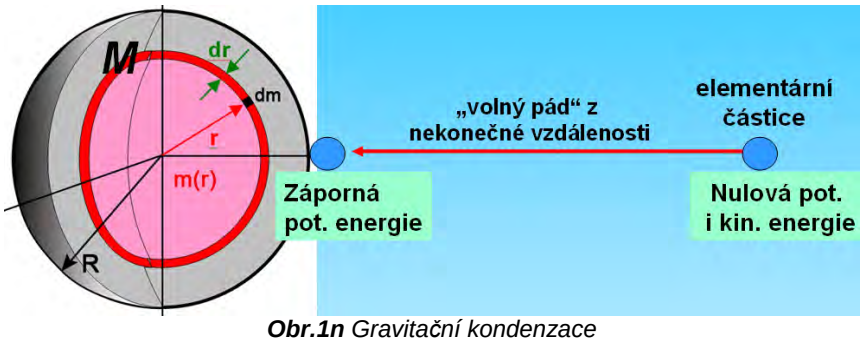
***Obr.1m2*** *Vesmírné sondy vypuštěné k výzkumu reliktní záření*

***Poznámka:*** *Interval vlnových délek od záření reliktního až po roentgenové a gamma se pohybuje v řádu nejméně* $10^8$. *Pro srovnání: námi viditelný interval* $0{,}4\mu m$ *je tedy výřezem asi 40-metrového úseku (nebo názorněji výřezem* $4cm$ *z délky* $4000km$*).*

## 2.1 Gravitační kontrakce, vznik hvězd

K názornému vysvětlení procesu vzniku hvězdy je užitečné nejprve určit potenciální energii homogenní koule s poloměrem $R$ a hustotou $\rho$. Její vytvoření je možno si představit postupným soustřeďováním (kondenzací) elementů o hmotnosti $dm$ z nekonečné vzdálenosti, čímž vzniká koule s poloměrem $r$ a hmotností $m(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$, viz **obr.1n**. Podle (3b) je potenciální energie nově příchozího elementu rovna

$$-\kappa \frac{dm \cdot m(r)}{r} = -\kappa\rho \frac{4\pi r^3}{3r} dm$$




***Obr.1n*** *Gravitační kondenzace*

Energie kulové slupky o tloušťce $dr$ a poloměru $r$ (plocha $4\pi r^2$) je tedy

$$dU = -\kappa\rho \frac{4\pi r^3}{3r} 4\pi r^2 \rho dr = -\kappa \frac{16\rho^2\pi^2 r^4}{3} dr$$

Postupným vršením slupek vznikne koule s poloměrem $R$, jejíž celková potenciální energie bude

$$U = \int_0^R dU = -\kappa \frac{16\rho^2\pi^2}{3} \int_0^R r^4 dr = -\kappa \frac{16\rho^2\pi^2}{15} R^5$$

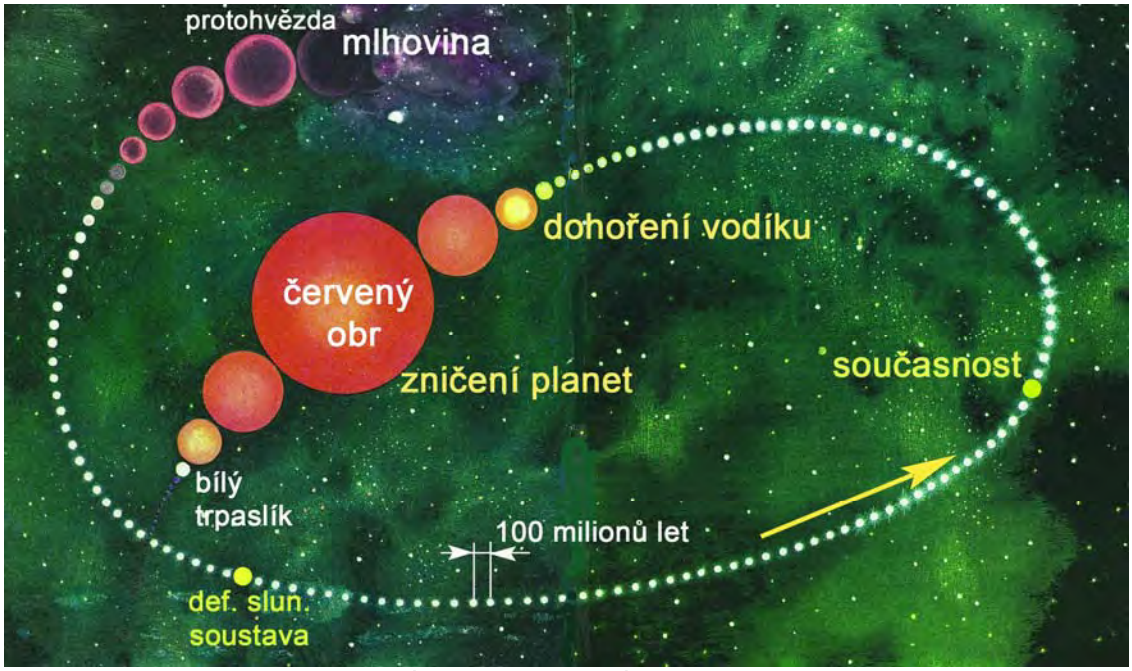
Dosazením za hmotnost celé koule $M = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$ vychází konečně

$$U = -\frac{3\kappa M^2}{5R} \qquad (4b)$$

Tato konečná potenciální energie vzniklého tělesa je záporná, i když počáteční celková energie jeho jednotlivých nekonečně vzdálených stavebních prvků byla nulová. Někde tudíž musela vzniknout kladná energie. První vysvětlení podal tzv. **Helmholtz - Kelvinův** mechanismus, podle kterého při formování tělesa tzv. "gravitační kondenzací (kontrakcí)" vzniká kladná kinetická energie, projevující se zvyšováním rychlosti částic, což v molekulárním měřítku představuje vývin tepla. Tímto způsobem je možno zjednodušeně vysvětlit formování

vesmíru, vznik hvězd nebo vysokou teplotu jádra Země. V případě hvězd (konkrétně např. Slunce) ale H.-K. mechanismus selhává, neboť množství tepla, vzniklého kondenzací, je vůči teplu vyzařovanému tak malé, že Slunce by již dávno mělo vyhasnout. Tento rozpor vysvětlili Fritz **Houtermans** a Robert **Atkinson** v r.1929 předpovězením jaderné syntézy u hmotných hvězd. Jejich myšlenku teoreticky rozpracoval v r. 1939 Hans **Bethe** a nepřímo tak inicioval úvahy o pozemském napodobení tohoto děje, tj. o možnosti sestrojení vodíkové bomby.

Vývoj Slunce nebo hvězdy "slunečního typu", která má ke konci svého života hmotnost v rozmezí asi $0{,}3 \div 1{,}4 M_S$, probíhá přibližně podle **obr.2** (převzato z **[3]**). Základní krok je 100 milionů let.




***Obr.2*** *Vývoj hvězdy slunečního typu podle* ***[3]***

Jednotlivé etapy života hvězdy (Slunce) od jejího zrození lze zjednodušeně popsat takto:

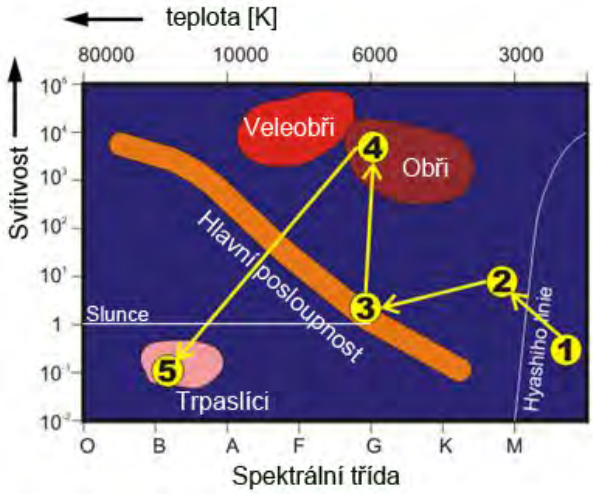
- formování obří protohvězdy gravitační kondenzací prachoplynového mračna do tvaru rotujícího disku se zárodkem Slunce uprostřed a zárodky planet na okrajích;
- nárůst teploty v centru gravitace až k tzv. Hyashiho linii v **Hertzsprung-Russellově diagramu** (viz **obr.2a**,**2b**), kde nastane rovnováha mezi gravitací a tlakem ohřátého plynu;
- pokračující kondenzace způsobuje extrémní nárůst teploty a tlaku v centru, vedoucí až k zapálení termonukleární reakce (vodík se začne "spalovat" na hélium);
- Slunce se usadí na tzv. **hlavní větvi (posloupnosti)** v **H-R** diagramu;
- definitivní podoba Sluneční soustavy s planetami (před asi $4{,}5$ miliardami let);
- dlouhodobá syntéza jader ("hoření") vodíku a setrvání Slunce ve stabilním stavu na hlavní větvi H-R diagramu až do současnosti plus ještě dalších $5 \div 7$ miliard let, tedy celkem asi $11$ miliard let trvání termonukleární reakce až do vyčerpání zásob vodíku;
- následným poklesem tlaku dojde k rychlému rozpínání do stadia **červeného obra**, hoření helia (heliový záblesk) a rozplynutí části hmoty v prostoru (Slunce ve fázi červeného obra pohltí Zemi a rozepne se až k Marsu). Pokračující jadernou syntézou vznikají další prvky (uhlík, kyslík, kovy až po železo, které již není schopno další jadernou syntézou uvolnit energii). Hvězda tak stále zmenšuje velikost a vyčerpáváním paliva klesá teplota a zaniká tlak, který doposud bránil pokračování gravitační kontrakce. Ta vyvrcholí stadiem tzv. **bílého trpaslíka**, kdy atomy degenerují na volné elektrony a jádra, která zaujmou prostorově a energeticky nejúspornější uspořádání do mříže, odolávající gravitačním silám (tzv. degenerovaný elektronový plyn). Proces končí na průměru hvězdy řádově $10^4 km$ (asi jako Země nebo i méně), hustota bude přes $10^9\, kg/m^3$ ($1 kg/mm^3$);
- bílý trpaslík by měl vychladnout do konečné fáze tzv. **černého trpaslíka**, ale při současném stáří vesmíru (asi 13,8 miliardy let) k úplnému vychladnutí žádného bílého trpaslíka pravděpodobně ještě nestačilo dojít.

***Poznámka:*** *Termojaderná syntéza uvnitř Slunce probíhá na rozdíl od vodíkové bomby velmi pomalu, ale množství uvolněné energie je díky jeho hmotnosti obrovské. Každou vteřinu se přemění přes 600 milionů tun vodíku na hélium a asi 5milionů tun přejde na energii záření. Na jeden čtvereční metr zemského povrchu, kolmý ke směru slunečního záření, by teoreticky dopadal výkon, který určíme z Einsteinovy ekvivalence hmoty a energie a z povrchu koule se středem ve Slunci:*

$$\frac{mc^2}{4\pi R^2} = \frac{5e9 \cdot 299792458^2}{4\pi \cdot (150e9)^2} \approx 1600\ W$$

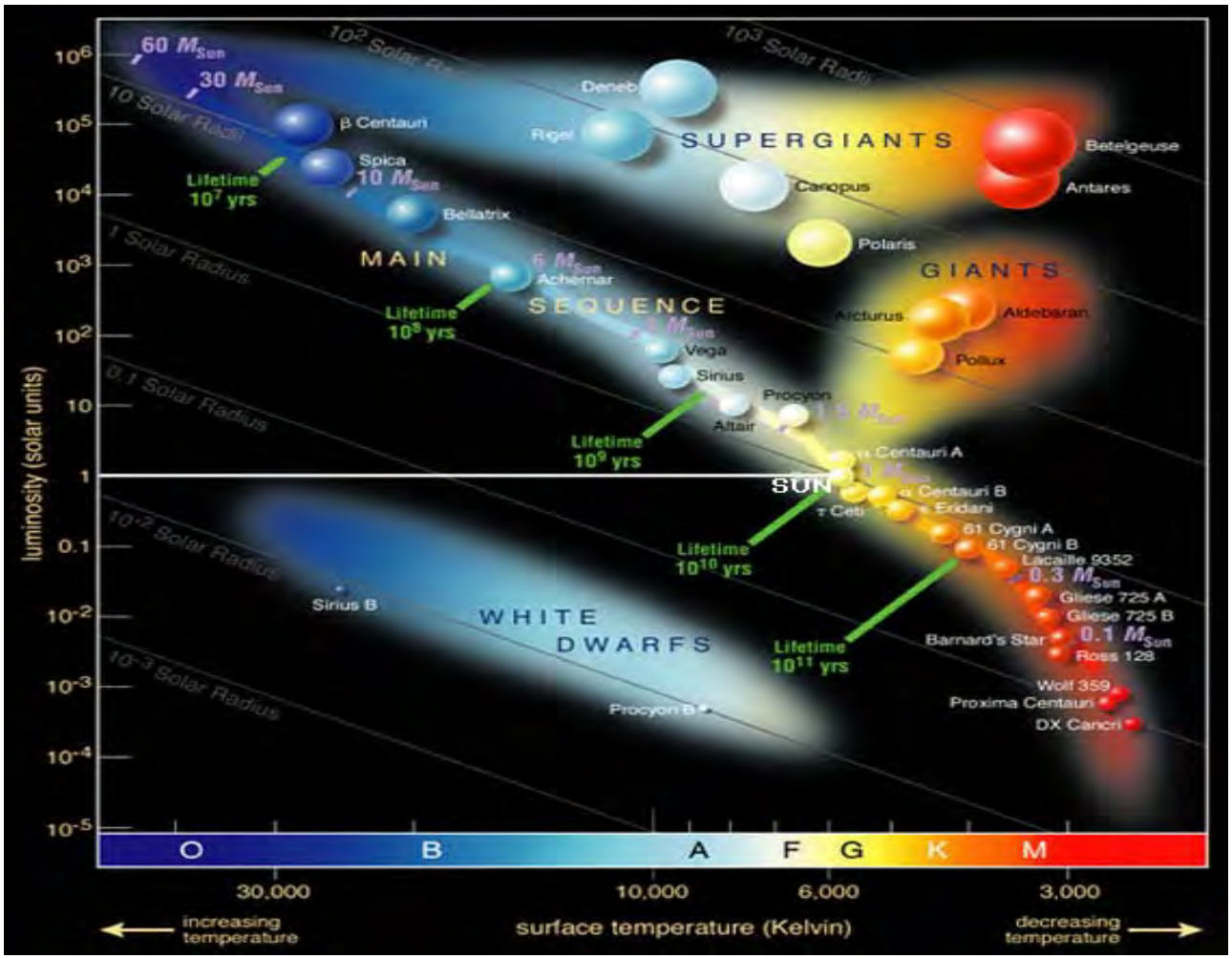
*Ve skutečnosti je část této energie pohlcena mezihvězdným prachem a před dopadem na Zemi rozptýlena v atmosféře nebo odražena, takže výsledek je asi* $1{,}36kW$. *Biologové udávají, že příznivé podmínky pro pozemský život existují pouze v úzkém pásmu* $\pm 5\%$ *okolo této hodnoty.*

**Hertzsprung-Russellův diagram** byl navržen a sestaven v r. 1909 a je jedním z nejvýznamnějších zdrojů informací o vývoji vesmíru. Aktuální poloha nám známých hvězd je do něj stále doplňována a vynášena v souřadnicích **povrchová teplota** (vodorovně, zprava doleva) – **svítivost (zářivý výkon)** v násobcích svítivosti Slunce (svisle vzhůru). V souladu s **obr.2** se v něm vyskytuje nejvíce hvězd v ustálené životní etapě, kdy trvá spalování vodíku. Ty vyplňují úhlopříčnou tzv. **hlavní větev (posloupnost)**. Oblast červených obrů je od ní šikmo vpravo vzhůru, oblast bílých trpaslíků dole poněkud vlevo. Hvězdy ve fázi vzniku (protohvězdy) leží v infračervené oblasti vpravo od Hyashiho linie. Vývoj každé hvězdy je možno popsat spojnicemi charakteristických oblastí diagramu, jak je ukázáno na příkladu Slunce v **obr.2a**.




***Obr.2a*** *Cesta Slunce v H-R diagramu*

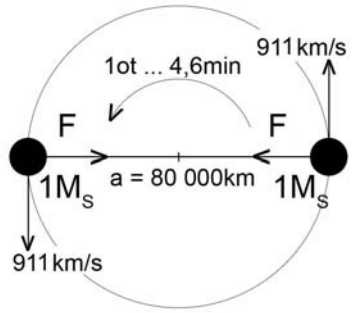
Pokud je konečná hmotnost hvězdy asi $0{,}1 \div 0{,}3 M_S$, energie vzniklá gravitační kontrakcí vyvolá jen pomalou jadernou syntézu vodíku, odpadá etapa červeného obra a vzniká rovnou tzv. **červený trpaslík**, který se trvale usídlí na hlavní posloupnosti (v **obr.2b** vpravo dole). Tento typ hvězdy v současném vesmíru převažuje. Při ještě menší hmotnosti než $0{,}1 M_S$ k termojaderné reakci nedojde a vzniká **hnědý trpaslík**, což je jakýsi "mezityp" mezi hvězdou a obří planetou (např. Jupiterem). Všichni trpaslíci by měli postupně "zčernat", ale není zatím jasné, jestli to alespoň někteří za dobu existence vesmíru stačili. Pro opticky neviditelné hvězdy tohoto typu se ujal název „infračervení trpaslíci“.




***Obr.2b*** *Hertzsprung-Russellův diagram*

Prvním objeveným a nám nejbližším bílým trpaslíkem je **SiriusB** (menší člen dvojhvězdy **Sirius**, nazývaný též „**Štěňátko**“). Od nás je vzdálen 8,6 světelných let, má průměr $12000\ km$, hmotnost $0{,}95 M_S$ a hustotu přes $2\,kg/mm^3$. Od svého většího partnera **SiriaA** (tzv. „**Psí hvězdy**“), který je dvaapůlkrát těžší a dvakrát větší než Slunce, byl rozeznán až v r.1862 a jako bílý trpaslík identifikován teprve v r.1923. Dvojhvězda **Sirius** je nejjasnější stálicí na noční obloze a měla velký význam ve staroegyptském kalendáři - byla dokonce personifikována (**obr.2c**). Podobnou dvojhvězdou (žlutá hvězda hlavní posloupnosti + bílý trpaslík) je vzdálenější **Procyon**. V r. 2005 byla objevena dvojice bílých trpaslíků o hmotnostech asi $1M_S$, obíhajících okolo sebe v těsné vzdálenosti $80000km$ (katalogové označení RXJ0806.3+1527). Předpokládá se, že po jejich budoucí srážce dojde k výbuchu a vznikne neutronová hvězda – viz další kapitola. V **obr.2d** je proveden kontrolní výpočet tohoto obrovského setrvačníku podle Newtona a Keplera (vztahy (2b) a (4)).

***Obr.2c*** *Staroegyptská personifikace Siria*




$$F = \kappa M_S^2 / a^2 = 4{,}126 \cdot 10^{34}\,N$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{2\kappa M_S}} = 276\ s$$

$$v = a\omega/2 = 911 km/s$$

$$\text{kontrola...} M_S a\omega^2/2 = F$$

***Obr.2d*** *Dvojhvězda RXJ0806.3+1527*

Výše popsaný vznik bílého trpaslíka je typický pro hvězdy s počáteční hmotností do $3M_S$, která po vyhasnutí termonukleární reakce klesne pod $1{,}44M_S$ (tzv. **Chandrasekharova mez** - vypočítal ji v r.1928; pod touto mezí zůstane bílý trpaslík ve stabilním stavu a začne chladnout). Nezávisle tuto mez vypočítal i sovětský fyzik Lev Davidovič **Landau**, který mj. teoreticky předpověděl existenci neutronových hvězd.

Doba života hvězd hmotnějších než Slunce je kratší. Intenzita termonukleární reakce ("hoření vodíku") je u nich větší, čímž se zkracuje jejich pobyt na hlavní větvi H-R diagramu. Konečná fáze života probíhá dramatičtěji a výsledným produktem gravitačního kolapsu jsou **neutronové hvězdy** nebo tzv. **černé díry**. Možnost existence neutronových hvězd intuitivně připustil (pouhý jeden rok po objevení neutronu v r.1932 Jamesem **Chadwickem**!!) Čechošvýcar Fritz **Zwicky**.

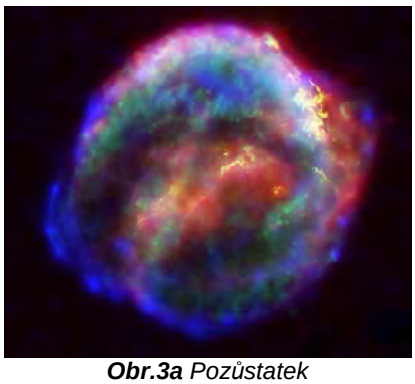
## 2.2 Neutronové hvězdy, pulsary, magnetary

U hvězd, majících na sklonku svého vývoje vyšší hmotnost než je Chandrasekharova mez (asi do $2 \div 3M_S$ ... tzv. **Oppenheimerova** mez), neodolá mříž atomových jader tlaku gravitačních sil a přebytek energie, nahromaděné smršťováním, způsobí gigantickou explozi (výbuch **supernovy**), při které je část hmoty rozmetána do okolního prostoru a vznikne velmi silný impuls záření gama. Ve stlačovaných atomech zbylé hmoty zůstanou po interakci elektronů a protonů převážně jen k sobě stlačené neutrony (tzv. neutronová suprakapalina). Takto vzniklá **neutronová hvězda** je jakýmsi obrovským atomovým jádrem o průměru řádově jen desítky kilometrů a má extrémně velkou hustotu. Intenzita jejího magnetického pole může být až sto milionů $Tesla$ a spolu s vysokou teplotou způsobí silné záření (pro srovnání: magnetické pole Země okolo pólu má $6 \cdot 10^{-5} Tesla$). Pokud původní hvězda rotovala, podle zákona o zachování momentu hybnosti se rychlost její rotace výrazně zvýší (až na 1000 otáček za vteřinu!!). Je-li magnetická osa vychýlena od osy rotace, kužel záření "zametá" okolní prostor podobně jako světlo majáku a může být zachycen jako pulsy (odtud název **"pulsar"**). Vyzařováním ztrácí pulsar energii, zpomaluje rotaci a chladne. Do dneška bylo objeveno asi 2000 pulsarů (první v r.1967). V r. 2003 byla identifikována dvojice pulsarů, obíhajících kolem společného těžiště, jejichž dráhy se "vejdou" do průměru našeho Slunce (1,4 milionu kilometrů).

V několika málo případech byly zpozorovány i tzv. **"magnetary"**, což jsou neutronové hvězdy s intenzitou magnetického pole až $10^{12} Tesla$ (udává se, že zdroj magnetického pole $10^{10} Tesla$ by smazal data z disku na polovině vzdálenosti Měsíce od Země). Vznik magnetaru se vysvětluje zhroucením rychle rotující a velmi hmotné hvězdy se silným magnetickým polem. Výchozí celkový magnetický tok povrchem hvězdy se zachovává, takže při jejím kolapsu a zmenšení dojde k extémnímu zahuštění siločar (podle některých názorů až k jakémusi „zhmotnění“ magnetického pole do viskózní formy). Pole může být navíc ještě posíleno dynamovým efektem při vzájemném pohybu různých vrstev uvnitř magnetaru.

Proces náhlého vzplanutí hvězdy a následného rychlého poklesu její jasnosti při výbuchu supernovy je velmi krátký a trvá řádově několik týdnů, max. měsíců. S dnešním dosahem techniky je běžně pozorovatelný i v cizích galaxiích, ale v minulosti to byly výjimečné události. Historicky poslední výbuch supernovy v naší Galaxii byl zpozorován Keplerem v r. 1604. Její dnešní pozůstatek je na **obr.3a**. Na **obr.3b** je dnešní podoba supernovy **SNR 0509**, která byla zpozorována před 400 lety ve Velkém Magellanově mračnu, což je trpasličí galaxie, obíhající naši Galaxii ve vzdálenosti asi 170 000 světelných let. V téže galaxii byl zpozorován v r. 1987 doposud nejjasnější výbuch supernovy nedávné historie **SN1987a**, který nastal po zhroucení veleobra (výjimečně modrého, nikoli červeného, jak by mělo být podle **obr.2**) a byl pozorovatelný pouhým okem. Jeho vývoj bylo

možno sledovat takřka hodinu po hodině. Okolo epicentra se v průběhu let rozšiřují záhadné prstence ve tvaru osmičky (viz **obr.3c**).



***Obr.3a*** *Pozůstatek Keplerovy supernovy* ***SN 1604*** *(Chandra + Spitzer)*

***Obr.3b*** *Dnešní podoba supernovy* ***SNR 0509*** *ve Velkém Magellanově mračnu (Chandra)*

***Obr. 3c*** *Supernova* **SN1987a** *ve Velkém Magellanově mračnu (Hubble 1997)*

***Příklad 4b*****: Krabí pulsar** *(rotující neutronová hvězda* ***PSR 0531+21****) byl objeven v r.1968 zachycením radiových pulsů, přicházejících z* ***Krabí mlhoviny.*** *Její barevně upravené snímky v různých oblastech spektra jsou na* ***obr.3d,e,f****. Uprostřed v* ***obr.3d*** *je vidět pulsar i výtrysk nabitých částic v ose jeho magnetického pole.*

***Obr. 3d*** *Krabí mlhovina (Chandra)*

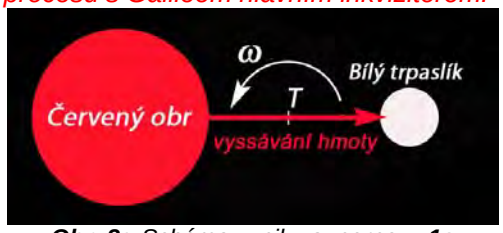
***Obr. 3e*** *Krabí mlhovina (Hubble)*

***Obr. 3f*** *Krabí mlhovina (Spitzer)*

*Krabí mlhovina je pozůstatkem výbuchu supernovy* ***SN1054*** *v souhvězdí Býka, který pozorovali již v r. 1054 čínští a indičtí astronomové a podle ústního podání a dochovaných skalních reliéfů i Indiáni v Arizoně. Podle historických záznamů byl úkaz viděn pouhým okem za denního světla. Je od nás vzdálena 6500 světelných let, takže uvedené snímky a měření zachycují její stav v době před vznikem Sumerské říše!! Perioda zachycených radiových pulsů byla v době objevení překvapivě stálá s přesností nanosekund (*$T = 33\ ms$*, tj.* $30\,ot/s$*), což zprvu zavdalo příčinu ke spekulacím o signálech mimozemských civilizací. Spektrum vyzařované energie sahá od radiových vln až po optické a gama záření. Perioda rotace se vlivem ztráty energie denně prodlužuje o 38 nanosekund a podle výpočtů byla při prvním zpozorování supernovy před 1000 lety asi* $20ms\,(50\,ot/s)$*. Astronomové odhadují hmotnost Krabího pulsaru na* $1{,}4M_S = 2{,}785\cdot 10^{30}\,kg$ *a průměr na* $25km$*, což odpovídá hustotě* $3{,}4\cdot 10^{17}\,kg/m^3$ *(*$340 tisíc\ \ tun/mm^3$*). Při této hustotě by se naše Země smrštila na kouli o poloměru asi 160m. Podle (3) je intenzita gravitačního pole pulsaru na jeho povrchu* $1{,}2\cdot 10^{12}\,m/s^2$ *(to je 120miliardkrát více než na Zemi). I přes rychlou rotaci činí odstředivé zrychlení na "rovníku" méně než půl promile z této hodnoty. Hypotetická úniková rychlost z povrchu by podle (3n) byla* $172000\,km/s$*, tj. přes polovinu rychlosti světla. Existují však objekty, u nichž je potřebná úniková rychlost ještě vyšší.*

***Poznámky*****: 1)** *Na základě pozorování výbuchu Keplerovy supernovy se Galileo postavil proti církevnímu dogmatu o "neměnnosti nebes". Oficiální rehabilitace Galilea proběhla až v r.1992 na popud* ***Jana Pavla II*** *(titulní strana Los Angeles Times: "Oficiálně potvrzeno: Země se točí okolo Slunce i pro Vatikán"). Katolickou církev nikterak nešlechtí kanonizace sv. Roberta (v r.1930), který byl v procesu s Galileem hlavním inkvizitorem.*

***2)*** *Keplerova supernova byla s největší pravděpodobností tzv.* ***typu 1a****. Výchozí situací tohoto typu je dvojhvězdný systém, u něhož jsou oba souputníci v odlišném stadiu vývoje a nastane situace, kdy jeden z nich - bílý trpaslík - začne vyssávat hmotu z červeného obra a pozvolna roste až do překročení Chandrasekharovy meze* $1{,}44M_S$*. Jeho hmotnost a tím i množství uvolněné energie při následném výbuchu jsou tedy pokaždé stejné a exploze probíhá standartním způsobem se stále stejnými parametry (zářivý výkon a jeho vývoj v čase, rozložení prvků ve spektru záření atd).* ***Supernovy 1a*** *jsou tak etalonem zářivosti (jakousi „standartní svíčkou“) a významným pomocníkem při porovnávání velkých mezigalaktických vzdáleností, neboť*




***Obr. 3g*** *Schéma vzniku supernovy* ***1a***

*jasnost (zářivý tok jednotkovou plochou) klesá se čtvercem vzdálenosti. Počátkem roku 2013 potvrdil NASA objev nejvzdálenější supernovy typu 1a, pojmenované **SN Wilson**, která vybuchla před 10 miliardami let.*
***3)** Někteří autoři spojují objevení se tzv. „Betlémské hvězdy“ s výbuchem supernovy, ale pravděpodobnější příčinou byla asi konjunkce Jupiteru a Saturnu, kterou pozoroval Kepler v r. 1603 a vypočítal, že nastala i v r.7 př.n.l., a to hned třikrát za sebou.*

## 2.3 Černé díry, Schwarzschildův gravitační poloměr

Newtonova teorie gravitace a pojem "úniková rychlost" byly dostatečně známy na poč. 18. století. O konečné rychlosti světla nepochyboval již **Galileo** počátkem 17. století (jeho známý pokus se zhášením a rozsvěcením luceren na dvou vzdálených kopcích ale neměl úspěch). První seriózní měření s výsledkem asi 220 tis. km/s provedl Ole **Roemer** v r.1675, když porovnával doby zákrytu Jupitera a jeho měsíce **Io** při různých vzdálenostech Země od Jupitera. James **Bradley** v r. 1728 změřením úhlu aberace stálic dospěl k téměř přesné hodnotě 299100 km/s!! (současná uznávaná hodnota rychlosti světla ve vakuu je $c = 299\ 792\ 458\ m/s$). Dnes se tedy zdá logické (ale při tehdejším církevním tmářství neuvěřitelně nadčasové), že již John **Michell** (v r.1783) a Pierre Simon de **Laplace** (v r.1796) se zabývali představou extrémně hmotného tělesa, ze kterého by nedokázalo uniknout ani světlo a **těleso by tudíž bylo neviditelné**. Laplace dokonce stanovil jeho nutné rozměry a hmotnost pomocí (3n) a (3p) a předběhl tak dobu příchodu obecné teorie relativity o více než 100 let, když odvodil vztah (4c). Možnost reálné existence objektů s těmito vlastnostmi (tzv. "černých děr") předpověděla obecná teorie relativity v r. 1915 a o rok později ji podpořil Karl **Schwarzschild**, který řešením zjednodušených Einsteinových rovnic gravitačního pole odvodil tzv. gravitační poloměr (výpočty prováděl jako poručík německého dělostřelectva na ruském bojišti za 1. světové války, kde i zahynul). Podrobnější výpočty uskutečnil v r. 1939 i pozdější tvůrce atomové bomby Julius Robert **Oppenheimer**, konečný teoretický důkaz existence černých děr podal v r. 1965 Roger **Penrose**. Dnes je jejich existence nezpochybnitelná a je potvrzena mnoha nepřímými důkazy.

Vznik **černé díry** se vysvětluje gravitačním kolapsem (zhroucením do sebe sama) velmi hmotné hvězdy, mající v konečné fázi více než $3M_S$, jejíž gravitační pole je ještě silnější než u hvězdy neutronové a způsobí i zhroucení neutronové suprakapaliny, další zmenšování rozměrů a neomezený pád vlastních částic směrem ke středu. Tam intenzita pole a gravitační síla rostou podle (2b) nade všechny poznané meze, takže zpětně nemůže nic (ani světlo) uniknout. Název "černá díra", který poprvé použil v r. 1969 Einsteinův žák John **Wheeler** (1911 až 2008), vystihuje přímou neidentifikovatelnost tohoto objektu. Na jeho existenci lze usuzovat jen nepřímo z účinků na okolí, neboť při gravitačním kolapsu sice zaniká hmota v obvyklé atomární podobě, ale zachovávají se její gravitační účinky, moment hybnosti a elektrický náboj. Myšlená kulová plocha obklopující hmotu černé díry, na které je úniková rychlost rovna právě rychlosti světla, se označuje jako **horizont událostí** a její poloměr je tzv. **Schwarzschildův gravitační poloměr**. Do dějů uvnitř Schwarzschildovy sféry nelze žádným způsobem nahlédnout. Matematickým aparátem obecné teorie relativity je černá díra popsána jako **"singularita časoprostoru v bodě, kde je jeho křivost nekonečně velká a časoprostor se uzavírá"**. Tato formulace je sice pro nezasvěceného čtenáře nesrozumitelná, ale (i když to fyzikové nevidí rádi) Schwarzschildův poloměr je možno vypočítat s pouhou pomocí Newtonovy mechaniky a jeho představy, že světlo má povahu toku hmotných částic. Jejich maximální rychlost je $c$, takže pro těleso, které nedovolí světlu uniknout ze svého povrchu, platí podle (3n) podmínka

$$c = \sqrt{2\kappa M / R_g}$$

Schwarzschildův gravitační poloměr je tedy

$$R_g = \frac{2\kappa M}{c^2}\ [m] \qquad (4c)$$

Dosazením za konstanty $c = 299792458\ m/s$, $\kappa = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}\, Nm^2/kg^2$ vychází

$$R_g = 1{,}485 \cdot 10^{-27} M\ [m]$$

Dobře se pamatuje i přibližný vztah

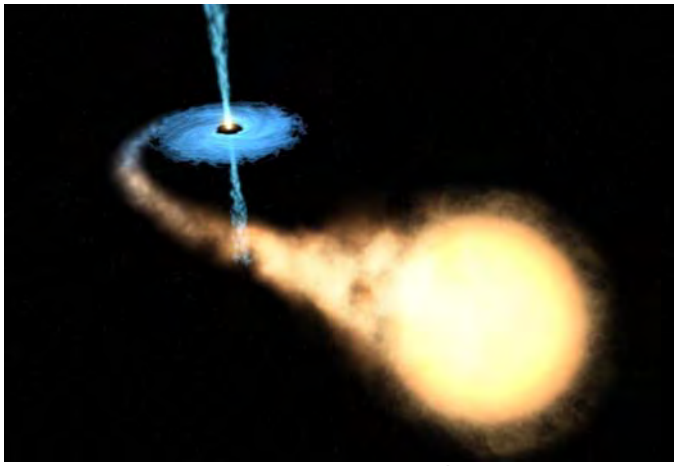
$$R_g \approx 3M/M_S\ [km]$$

Průměrná hustota černé díry klesá s kvadrátem její hmotnosti: $\rho_g = \frac{3M}{4\pi R_g^3} = \frac{3c^6}{32\pi\kappa^3} \cdot \frac{1}{M^2} = \frac{7{,}29 \cdot 10^{79}}{M^2} kg/m^3$.

Kdyby mohlo dojít ke gravitačnímu zhroucení Země do podoby černé díry, měla by gravitační poloměr $R_{gZ} = 8{,}9mm$ a těžko představitelnou hustotu $\rho_{gZ} = 2{,}04 \cdot 10^{30}\ kg/m^3$ (průměrná hustota Země je $\rho_Z = 5{,}51 \cdot 10^3\, kg/m^3$). Pro hmotnost Slunce by vyšel poloměr asi 3km. Podmínkou pro vznik černé díry ale je, aby hmotnost hvězdy na sklonku života byla alespoň $3M_S$, takže její minimální Schwarzschildův poloměr (který ovšem nelze přímo zjistit) je 9km.

Jedním z důkazů existence černých děr jsou anomálie v pohybu některých hvězd, které se chovají jako součást dvojhvězdy (tzv. **roentgenové dvojhvězdy**). Příkladem je zdroj roentgenového záření **Cygnus X-1** v souhvězdí Labutě. Viditelná část dvojice (tzv. modrý veleobr) má hmotnost asi $25M_S$. Jeho předpokládaný neviditelný partner s hmotností přes $6M_S$ je téměř jistě černou dírou, která svým extrémně silným gravitačním polem "vyssává" hmotu veleobra, viz **obr.4** vlevo. Plyn vtahovaný do smrtícího gravitačního objetí černé díry je

urychlován téměř na rychlost světla, zahřívá se a vysílá roentgenové záření. Jiná nedávno objevená dvojhvězda s černou dírou je na **obr.4** vpravo. Hmotnost neviditelné části se odhaduje přes $5M_S$ .



***Cygnus X-1 (****HDE 226868, souhvězdí Labuť)*
*(rekonstrukce NASA červen 2012)*

*XTE J 1859 +226 (souhvězdí Lištičky)*
*(rekonstrukce ESO 2011)*

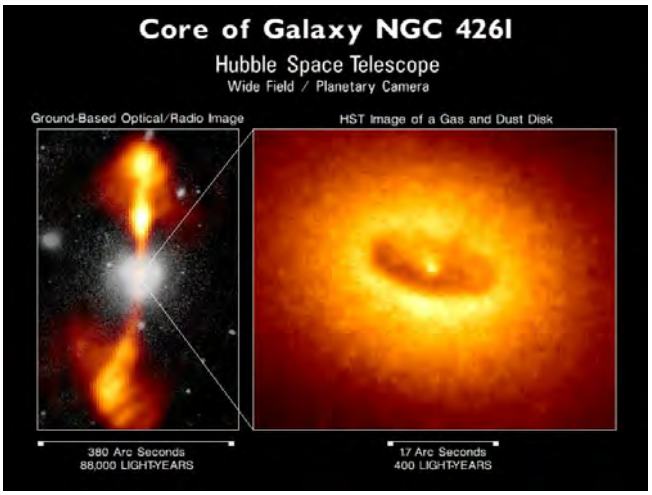
***Obr.4*** *Roentgenové dvojhvězdy s černými děrami*

Dnes je zjištěno, že v centrech galaxií (včetně naší) se nalézají obří tzv. supermasivní černé díry. Černá díra v centru naší Galaxie má hmotnost čtyř milionů Sluncí a gravitační poloměr $R_g \approx 12 \cdot 10^6 km$ (40 světelných vteřin), čemuž odpovídá průměrná hustota 1000 tun/m$^3$. Jedna z největších černých děr s hmotností $6{,}6 \cdot 10^9 M_S$ byla objevena v centru Galaxie M87 (NGC4486) v souhvězdí Panny. Při tak velké hmotnosti je $R_g \approx 20 \cdot 10^9 km$ a její průměrná hustota je nižší než hustota spodních vrstev zemské atmosféry. V tomtéž souhvězdí se nalézá i známá galaxie, nazvaná podle svého tvaru **Sombrero** - viz **obr.4a** (objevena r.1781).

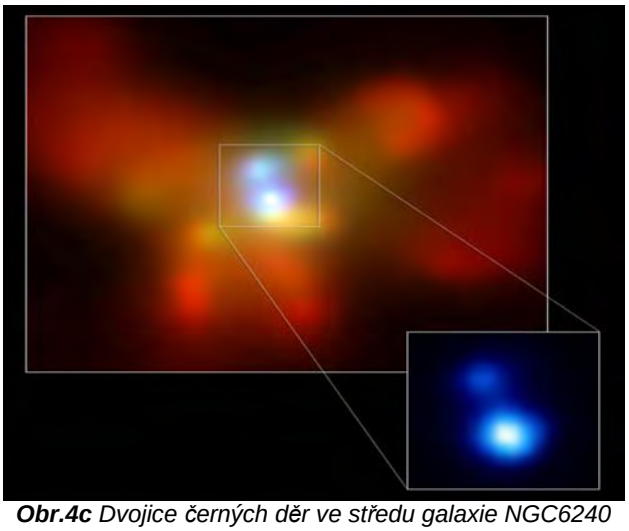
***Poznámka:*** *Za určitých okolností mohou z okolí černé díry unikat částice. Tento jev (tzv. "vypařování černých děr") dokázal v r.1975 pomocí kvantové teorie jeden z největších teoretických fyziků současnosti Stephen* ***Hawking*** *(nar. 1942).*

***Obr.4a*** *Galaxie* ***Sombrero NGC 4594, M104*** *(souhvězdí Panny), ve středu modré plochy supermasivní černá díra (Spitzer + Hubble + Chandra)*

Další snímky, pořízené z kosmických teleskopů v různých oblastech spektra, jsou na **obr.4b,c**.




***Obr.4b*** *Černá díra ve středu galaxie NGC4261 v souhvězdí Panny (Hubble + Chandra)*



***Obr.4c*** *Dvojice černých děr ve středu galaxie NGC6240 (Chandra 2002)*

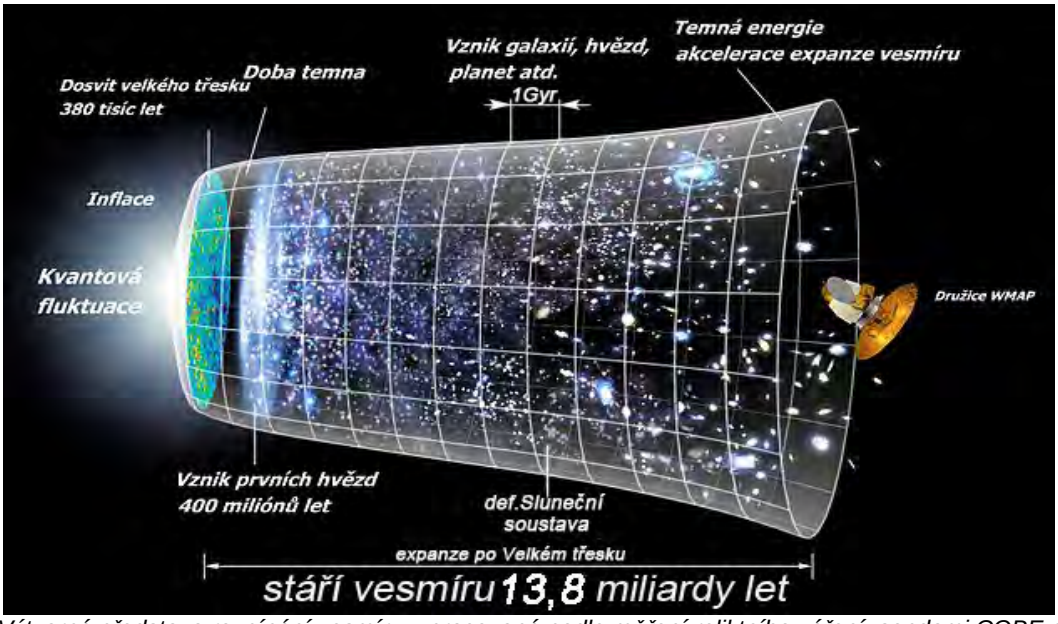
# A3. ROZPÍNÁNÍ VESMÍRU

***S. Hawking****: "Proč je vesmír takový jaký je?*
*Kdyby byl jiný, nebyl by v něm nikdo, kdo by mohl podobné otázky klást".*

Podle dnešních astronomických pozorování **je nezpochybnitelným faktem, že vesmír se rozpíná a toto rozpínání se v současnosti zrychluje**. Celý proces je matematicky popisován nejčastěji tzv. „**standartním kosmologickým modelem** $\Lambda CDM$ **“**, který je ověřen řadou nezávislých měření a vychází z předpokladu, že **vesmír je ve velkých mezigalaktických měřítkách izotropní** (směrově symetrický) **a homogenní** (translačně symetrický) **a všude v něm platí stejné fyzikální zákony** (např. neměnná Newtonova gravitační konstanta $\kappa$ ). Jako „velké vzdálenosti“ jsou v kosmologii míněny miliardy světelných let (pro srovnání: Slunce je od nás vzdáleno $500$ světelných vteřin) a galaxie jsou chápány jako hmotné body. **Podle standartního modelu není ve vesmíru žádné privilegované místo a všechna místa se jeví jako středy rozpínání**.

**Kosmologie** je věda o vzniku a vývoji vesmíru jako celku a je to obor na rozhraní astronomie, teoretické fyziky a filozofie. Ještě donedávna byla částí veřejnosti nespravedlivě chápána poněkud hanlivým způsobem (podobně jako astrologie, která si to ovšem zaslouží!!). Stěžejním teoretickým základem kosmologie je obecná teorie relativity (OTR), ale v tomto odstavci uvedeme některé poznatky zjednodušeným způsobem tak, aby byly srozumitelné i čtenáři, který není do této teorie zasvěcen. Od Einsteinova objevu OTR do konce 20.století (přibližně 80 let !!) přetrvaly ve fyzice některé **názorové omyly**, které se v dalším textu pokusíme populárním způsobem objasnit. Autor **lit.[31]** a **[32]** je shrnul do čtyř bodů takto:

- **omyl č.1:** galaxie letí nehybným prostorem (jako střepiny granátu)
  **2:** při rozpínání vesmíru platí speciální teorie relativity, podle které nelze překročit rychlost světla
  **3:** na tzv. rudý posuv v záření hvězd je možno použít klasický Dopplerův vztah
  **4:** při rozpínání vesmíru se zachovává energie.




***Obr.4d*** *Výtvarná představa rozpínání vesmíru, zpracovaná podle měření reliktního záření sondami COBE a WMAP*

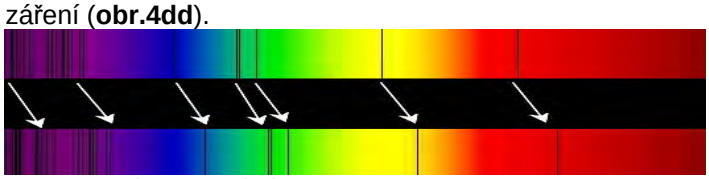
**Albert Einstein** při tvorbě obecné teorie relativity zprvu vycházel ze všeobecně uznávané představy "statického vesmíru", jehož fyzikální vlastnosti (rozměry, hustota atd.) se s časem nemění. Gravitační síly ale působí podle Newtonova zákona (2b) i na nekonečně velké vzdálenosti a jsou vždy přitažlivé, takže se snaží stabilitu vesmíru narušit a způsobit jeho smršťování (již Newton přemýšlel o riziku pádu planet do Slunce). Tuto nesrovnalost Einstein ve svých rovnicích, popisujících gravitaci, zprvu řešil zavedením stabilizačního odpudivého efektu ("antigravitace") pomocí tzv. **kosmologické konstanty** $\Lambda$. Rus **Alexandr Fridman** (po matce, klavíristce Vojáčkové, Čech) ale její stabilizující vliv v r. 1922 zpochybnil, připustil dokonce i možnost rozpínání vesmíru z počátečního nulového poloměru bez ní a Einstein posléze údajně doznal (alespoň podle svědectví **Georgije Gamowa**), že zavedení kosmologické konstanty bylo jeho největším vědeckým omylem. V r. 1927 belgický osvícený abbé **Georges Lemaitre** (1894 - 1966) jako první naznačil možnost **"Velkého třesku"** a potvrdil Fridmanovu hypotézu rozpínání, ale jeho práce neměla dostatečnou publicitu. Té se dostalo až v r.1929 **Edwinu Hubbleovi**, který utřídil naměřená data o vzdalování asi padesáti jím pozorovaných galaxií a zveřejnil svůj slavný tzv. "Hubbleův zákon" (4d). Jeho vysvětlení pomocí Dopplerova principu, že galaxie se od nás vzdalují v klidném prostoru, však z dnešního pohledu nebylo správné a teprve nedávno byla ověřena a vědeckou obcí přijata původní Lemaitrova domněnka, že **se rozpíná sám prostor a rychlost galaxií vůči němu nehraje při velkých mezigalaktických vzdálenostech významnou roli**. Lemaitrovo jméno je dodnes vůči Hubbleovu opomíjeno a podle mnoha názorů jej neprávem minula Nobelova cena (nemluvě o Gamowovi, který s velkým předstihem předpověděl existenci reliktního záření jakožto důsledek Velkého třesku, viz další kapitola).

Z pozorování **supernov typu 1a** bylo v r. 1998 dvěma nezávislými experimenty prokázáno, že rozpínání prostoru se v současnosti dokonce zrychluje a k vysvětlení této největší vědecké události roku musela být kosmologická konstanta znovu dosazena do rovnic obecné teorie relativity. Objevitelé zrychleného rozpínání Adam G. **Riess**, Saul **Perlmutter** a Bryan P. **Schmidt** si ale museli na Nobelovu cenu počkat až do r.2011, kdy již byly známy výsledky dalších potvrzujících experimentů.

## 3.1 Co se vlastně rozpíná a jak?

*Georgij **Gamow** (1948): "Náš vesmír je vlastně obrovská exploze, která pokračuje dodnes".*

V kapitole o neutronových hvězdách jsme vysvětlili, že supernovy typu **1a** lze využít k určování mezigalaktických vzdáleností porovnávacím způsobem, neboť jejich jasnost obecně klesá s druhou mocninou vzdálenosti. Dalším významným prostředkem k získávání informací o vzdálených objektech ve vesmíru (a nejen o supernovách) je frekvenční spektrum jejich záření (**obr.4dd**).



***Obr.4dd** Posuv absorpčních spektrálních čar prvků (nahoře Slunce, dole vzdalující se objekt)*

Z přítomnosti emisních nebo absorpčních čar charakteristických prvků ve spektru lze poznat chemické složení zdroje a ze změny polohy čar i jeho rychlost, jak ukážeme dále. Při vzdalování zdroje vlnění naměří pozorovatel místo zdrojem emitované vlnové délky $\lambda_e$ delší vlnovou délku $\lambda_0$ (tzv. **Dopplerův efekt**). Přírůstek délky je tedy $\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_e$ a spektrální čára příslušného prvku se posune. Definujeme tzv. **rudý posuv**, což je poměrná veličina

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} \qquad \text{(4cc)}$$

(název "rudý" proto, že - v případě viditelného světla - se vlnová délka zvětšuje směrem od modré k červené, rudé až posléze do infračervené oblasti spektra). Pokud je rychlost $u$ zdroje vlnění (zářící hvězdy) výrazně menší než rychlost světla $c$, je možno použít klasický Dopplerův vztah (16h) z r.1842, resp. linearizovaný relativistický vztah (16ee), odvozený Einsteinem. Oba přístupy vedou na shodnou závislost rudého posuvu a rychlosti (16eee), tedy $z = u/c$. To ale mohlo platit v Hubbleově období, kdy byly naměřeny jen velmi malé rudé posuvy.

***Poznámky**: Hubble měl na hoře Mt. Wilson v Kalifornii k dispozici dalekohled s průměrem zrcadla 100 palců (2,54m, postaven v r.1917), který mu umožňoval pozorovat jen bližší galaxie s velmi malým rudým posuvem (asi do $z \approx 0{,}003$), takže neměl důvod hledat rozpor při použití lineárního vztahu $u = z \cdot c$. Po něm pojmenovaný vesmírný dalekohled má zrcadlo s průměrem o málo menším (2,4m) - viz **obr.4u**.*

Při pozdějších pozorováních vesmíru nastaly potíže v okamžiku, kdy byly naměřen rudý posuv blízký jedné nebo dokonce větší než jedna a klasický Dopplerův vztah vedl na nadsvětelnou rychlost, což bylo v zásadním rozporu se speciální teorií relativity. Částečné, ale ne zcela uspokojivé vysvětlení mohl ve své době podat Einsteinův úplný nelinearizovaný vztah (16e):

- pokud je rychlost vzdalování zdroje záření srovnatelná s rychlostí světla nebo se jí blíží, je zpozorovaná vlnová délka $\lambda_0 = \lambda_e \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}$. Spojením se vztahem (4cc) vychází

$$\frac{u}{c}=\frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}<1 \qquad \text{(4ccc)}$$

takže pro libovolně velké $z$ je stále $u<c$ a Einsteinův princip skládání rychlostí v STR není porušen (viz **příklad 6** a **obr.8** v **kap.4.5**). Tento vztah je ale možno aplikovat pouze lokálně v určitém místě časoprostoru, kdežto ve velkých mezigalaktických měřítkách neplatí. **Dopplerův lineární vztah a dokonce ani speciálně relativistický vztah (16e) resp. (4ccc) není možno při kosmologických úvahách použít**. V současné době je uznáván názor, podložený výpočty v obecné teorii relativity (OTR) a zveřejněný Lemaitrem o dva roky dříve před Hubblem, že **se rozpíná sám prostor a galaxie jsou jím od nás unášeny**. Správné vysvětlení velkých hodnot rudého posuvu je zásadně odlišné od dopplerovského vysvětlení a podáme je později s pomocí tzv. **standartního modelu vesmíru** a **expanzní funkce**.

Hubble ze svých měření zjistil, že čím je galaxie vzdálenější, tím rychleji se od nás vzdaluje a vyšla mu přímá úměra mezi rychlostí a vzdáleností (dnes nazývaná též jako **Hubbleův zákon**)

$$u=H_0\cdot r \qquad \text{(4d)}$$

Tento vztah je v současné kosmologii nadále stěžejní, ale k jeho správnému chápání je třeba dodat, že veličina $u$ **není rychlost galaxie vůči prostoru, ale rychlost rozpínání prostoru mezi ní a námi**. V (4d) se nejčastěji používají měrové jednotky $km/s$ a $Mpc$, takže

$u$ ... rychlost vzdalování (unášení) galaxie v $km/s$;

$r$ ... její vzdálenost v megaparsecích (jeden $Mpc$ .... $3{,}262\cdot 10^6$ světelných let ... $3{,}086\cdot 10^{19}\,km$);

$H_0$ ... **Hubbleova konstanta**, jejíž aktuální hodnota (tedy v současném tzv. "kosmickém" čase $t_0$) se podle různých zdrojů poněkud liší a s dnešním - lze říci až překotným - vývojem pozorovací techniky se stále zpřesňuje. Na **obr.4ddd** jsou zprůměrované výsledky starších měření, provedených před r.2000 a v následující tabulce uvádíme výsledky nejvýznamnějších vesmírných projektů poslední doby.

| ***Vesmírný projekt*** | ***Zveřejnění výsledků*** | ***Hubbleova konstanta*** $H_0$ |
|---|---|---|
| Sonda **WMAP** (NASA) | r. 2003 | $71\pm 4\,kms^{-1}/Mpc$ |
| **Spitzerův teleskop** (NASA) | r. 2012 | $74\,kms^{-1}/Mpc$ |
| Sonda **PLANCK** (ESA) | r. 2013 | $67\,kms^{-1}/Mpc$ |

**Nadále budeme uvažovat nejnovější hodnotu ze sondy PLANCK**, podle které se vesmír rozpíná poněkud pomaleji, než se předpokládalo podle měření sond Spitzer a WMAP:

$$H_0=67\,kms^{-1}/Mpc \quad \text{tj.} \quad 2{,}17\cdot 10^{-18}\,s^{-1}$$

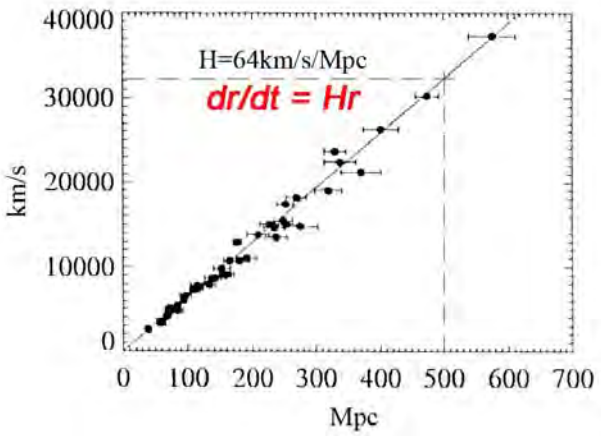
Pokud by se v celé historii vesmíru Hubbleova konstanta neměnila, vzdalování by s časem narůstalo exponenciálně, jak se snadno přesvědčíme z rovnice (4d) po dosazení $u=dr/dt$. Jejím řešením (bez zadaných počátečních podmínek) vychází $r=konst\cdot e^{H_0 t}$, ale situace je složitější. Ukážeme později, že Hubbleova konstanta s časem klesá (viz **obr.4q1**) a vesmír se (zatím) rozpíná pomaleji než exponenciálně. Výstižnějším označením je $H(t)$ - tzv. **"Hubbleův parametr"**. **Hubbleův zákon (4d) nadále platí, ale v obecném tvaru**

$$u=H(t)\cdot r \qquad \text{(4dd)}$$

V současném vesmírném čase $t=t_0$ je tedy $H(t_0)=H_0$, ale námi zachycované světlo velmi vzdálených galaxií jimi bylo vyzářeno v minulosti, kdy tato hodnota neplatila.

***Poznámky**: **1)** Nesprávnou aplikací (4d) a lineárního vztahu $u=z\cdot c$ bychom dospěli k falešnému závěru, že vzdálenost a rudý posuv jsou si úměrné, tj. $r=z\cdot c/H_0$. Např. pro $z=1$ by vyšla vzdálenost zdroje záření $14{,}6Gly$ (miliard světelných let), ale podle soudobého modelu ΛCDM (viz tabulka pod **obr.4s1**) byl od nás zdroj v době vyzáření vzdálen $5{,}56Gly$, jeho světlo k nám letělo skoro 8 miliard let a za tu dobu jsme se od zdroje vzdálili dvojnásobně.*

***2)** Použitím (4ccc) bychom došli k dalšímu rozporu, neboť pro všechny objekty s rudým posuvem $z>>1$ by vyšlo, že mají téměř světelnou rychlost a podle (4d) by se všechny nalézaly ve stejné vzdálenosti od nás.*

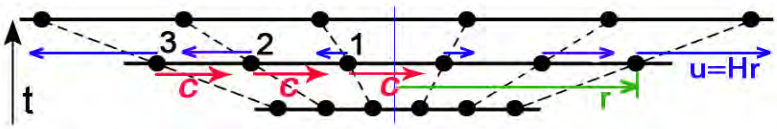



***Obr.4ddd** Starší měření rychlosti galaxií ( r.2000, kompilace z více zdrojů, "Review of Particle Physics")*

***Obr.4e*** *Nejvzdálenější galaxie z Hubbleova teleskopu (stáří 13,2 miliardy let), celková doba expozice* $10^6$ *vteřin při 400 obězích Země, plocha pole* $3'\times 3'$ *(*$0{,}01$ *plochy Měsíce)*

***Obr.4ee*** *Spirální galaxie "Whirlpool"* ***NGC 5194, M 51*** *(NASA 2011)*

Rozpínání prostoru podle Hubbleova zákona (4d) lze znázornit např. v jednorozměrné podobě jako natahování gumového vlákna, na němž jsou v určitých vzdálenostech připevněna hmotná tělesa (viz **obr.4f**). Vlákno bude představovat prostor, tělesa galaxie. Vzdalování sousedních těles se bude pozorovateli jevit vždy stejně bez ohledu na to, kde na vlákně sedí, takže každé místo na vlákně je možno považovat za střed rozpínání. Vzdálenost dvou sobě blízkých těles se mění neznatelně, což si lze představit i v mezní situaci, kdy vlákno bude neomezeně dlouhé a vzájemná rychlost jeho konců při natahování nekonečně velká.




***Obr.4f*** *Jednorozměrná představa rozpínání prostoru - natahování pružného vlákna*

Galaxie 2 v obrázku je právě na Hubbleově vzdálenosti. Je zjednodušeně nakreslen lineární průběh rozpínání, ale ten by nastal jen v případě, že Hubbleův parametr je nepřímo úměrný času, tj. $H(t)=1/t$. Podle (4dd) by bylo $u=\frac{dr}{dt}=\frac{1}{t}r$, po separaci proměnných $\frac{dr}{r}=\frac{dt}{t}$ a po integraci $\ln r=\ln t+\ln konst$, neboli $r=konst\cdot t$. V dalším textu ale ukážeme, že v dynamickém modelu $\Lambda CDM$ platí pro $H(t)$ vztah (4n) a prostor expanduje nelineárně podle červené čáry v **obr.4p** (tzv. **expanzní funkce**).

Dvojrozměrná představa rozpínání je na **obr.4k**, trojrozměrná na **obr.4r**. Efekt rozpínání prostoru se tedy projeví až na velkých vesmírných vzdálenostech, kdežto v "místních" poměrech (v naší Sluneční soustavě, uvnitř naší Galaxie nebo mezi blízkými galaxiemi) je jeho vliv malý.

**Spolu s rozpínáním prostoru se prodlužuje i vlnová délka světla jím letícího. Cestou k pozorovateli se vlnová délka protáhne tolikrát, kolikrát se za dobu letu světla k němu zvětšila vzdálenost mezi zdrojem a pozorovatelem.** Rudý posuv je způsoben roztažením vlnové délky světla spolu s prostorem (tzv. **kosmologický rudý posuv**) a teprve dodatečně dopplerovským rudým posuvem (pokud se galaxie pohybuje vůči prostoru). Druhý ze jmenovaných ale nehraje ve velkých mezigalaktických měřítkách významnou roli.

***Poznámka****: Kromě kosmologického a dopplerovského rudého posuvu existuje ještě tzv. gravitační rudý posuv, způsobený prodloužením vlnové délky záření vlivem zakřivení časoprostoru v okolí hmotného tělesa. Pro naše úvahy rovněž není důležitý.*

Dosazením rychlosti světla do (4d) vychází délka

$$r_{H0}=\frac{c}{H_0}=\frac{299\ 792}{2{,}17\cdot 10^{-18}}=1{,}38\cdot 10^{23}\,km \ldots\ldots 14{,}6 \text{ miliard světelných let} \qquad (4ddd)$$

což je současná tzv. **Hubbleova vzdálenost**. Galaxie, ležící za Hubbleovou vzdáleností, jsou rozpínajícím se prostorem od nás unášeny nadsvětelnou rychlostí a jejich záření se od nás vzdaluje (v **obr.4f** je to galaxie 3). **Tím není popírána teorie relativity, podle jejíž speciální verze je rychlost světla** $c$ **nejvyšší možná. Ve speciální teorii relativity nemůže hmotné těleso překročit rychlost** $c$ **vůči okolnímu prostoru, kdežto v této kapitole se zabýváme jeho rozpínáním a rychlost tělesa (galaxie) v prostoru nehraje významnou roli. Speciální teorie relativity platí vždy jen lokálně jako aproximace obecné teorie relativity, která ve velkých vesmírných (mezigalaktických) měřítkách nadsvětelnou rychlost rozpínání připouští.**

V současnosti nejvyšší změřená hodnota rudého posuvu u nejstarších a nejvzdálenějších objektů námi pozorovatelného vesmíru (tzv. kvasarů) je $z\approx 10$. Podle (4cc) je tedy $\lambda_0=11\lambda_e$, takže prostor mezi nimi a námi se za dobu, než nás jejich záření dostihlo, rozepnul 11krát. V dávné minulosti, kdy k vyzáření došlo, byl

Hubbleův parametr větší než dnes, zdroj se od nás vzdaloval vysoce nadsvětelnou rychlostí (ovšem menší než $z$ – násobek $c$ !!) a Hubbleova vzdálenost $r_H(t)=c/H(t)$ byla menší než dnes, jak ukážeme dále na **obr.4s1**. Vysvětlení námitky, proč nás záření mohlo přesto dostihnout, podáme později pomocí expanzní funkce.

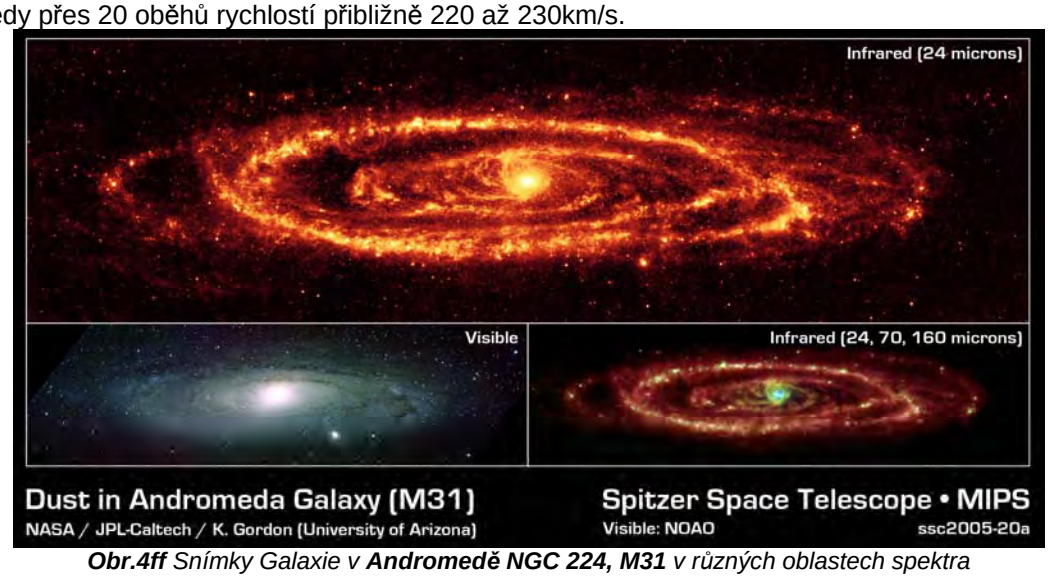
Mezi méně vzdálenými objekty (u sobě blízkých galaxií v jejich tzv. místních skupinách nebo uvnitř galaxií) je rychlost rozpínání prostoru podle výše uvedené analogie s gumovým vláknem malá a může být srovnatelná s rychlostí galaxií vůči prostoru, způsobenou přitažlivými silami gravitace. Ta bývá v řádu tisíců km/s:

- např. u galaxie **Sombrero** z **obr.4a** se udávají tyto hodnoty: vzdálenost $32\cdot10^6$ světelných let, rychlost vzdalování $1000 kms^{-1}$, tj. $z\approx0{,}003$. Rychlost rozpínání prostoru vychází podle (4d) pouze $657\,km/s$, takže v tomto případě (a obecně u všech nám bližších objektů) je třeba počítat s oběma rychlostmi a naměřený rudý posuv chápat jako součet kosmologického a dopplerovského.

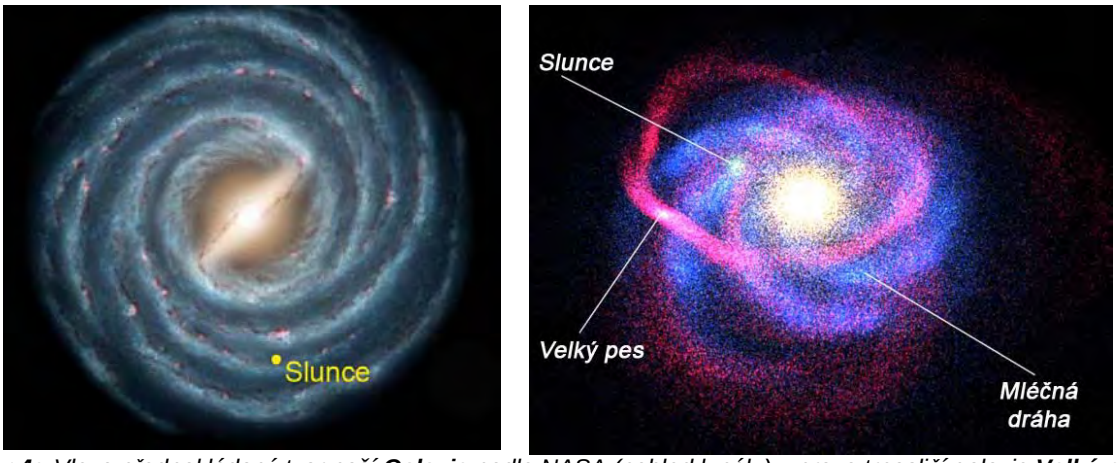
U sobě blízkých objektů může převážit vliv gravitace, takže navzdory rozpínání prostoru se mohou dokonce přibližovat. Naše Galaxie a její nejbližší velký soused - **Galaxie v Andromedě** (**obr.4ff**) - jsou od sebe vzdáleny jen 2,5 milionu světelných let a podle (4d) se prostor mezi ní a námi rozpíná rychlostí asi 51 km/s. Vlivem gravitace se ale navzájem přibližují rychlostí asi 200 km/s, takže se pravděpodobně za několik miliard let potkají a splynou. U přibližování je tedy správnější termín "modrý posuv“ (vlnová délka záření se zkracuje).

***Poznámka:*** *Galaxie v Andromedě má přezdívku "žrout okolních hvězd", neboť zvyšuje svoji hmotnost jejich přitahováním a pohlcováním (astronomové mají pro tento jev název "galaktický kanibalismus"). Původně byla pokládána za mlhovinu ležící v naší Galaxii a správně ji identifikoval až E.Hubble v r. 1924. Do té doby převládal názor, že naše Galaxie je ve vesmíru jediná.*

Přibližování a splývání galaxií bylo nedávno dokumentováno objevem nám nejbližší tzv. trpasličí galaxie, pojmenované **Velký pes** podle souhvězdí, v němž se nalézá - viz **obr.4g** vpravo. Má tvar roztrhaného prstence, vzdáleného od středu naší Galaxie asi 42000 světelných let. Pro srovnání: naše **Galaxie** (nazývaná též nepřesně podle její námi pozorované části **Mléčná dráha** - **obr.4g** vlevo) má spirálový tvar tenkého disku s průměrem necelých 100 000 světelných let a řadí se mezi galaxie s průměrnou velikostí (odhaduje se, že ji tvoří asi 300 až 400 miliard hvězd). Slunce oběhne její střed, vzdálený 26 000 světelných let, asi za 220 milionů let. Vykonalo tedy přes 20 oběhů rychlostí přibližně 220 až 230km/s.




***Obr.4ff*** *Snímky Galaxie v* ***Andromedě NGC 224, M31*** *v různých oblastech spektra*




***Obr.4g*** *Vlevo předpokládaný tvar naší* ***Galaxie*** *podle NASA (pohled k pólu), vpravo trpasličí galaxie* ***Velký pes***

***Obr.4h*** *Vlevo snímek středu naší* ***Galaxie****, vpravo typický tvar spirální galaxie (****M81****, souhvězdí Velké Medvědice, NASA)*

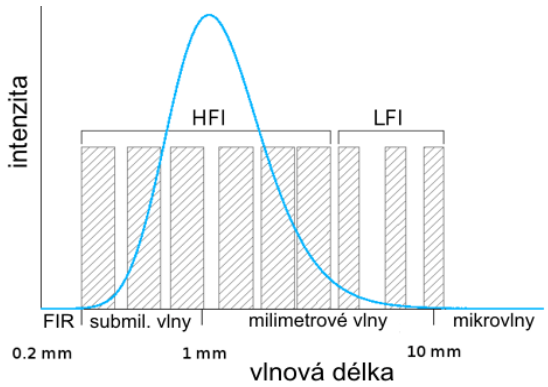
V naší Sluneční soustavě není rozpínání prostoru podstatné a uplatňují se jiné vlivy: např. prostor mezi Zemí a Sluncem se za jeden rok rozepne o míru $365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 2{,}17 \cdot 10^{-18} \cdot 150 \cdot 10^{9} \approx 10\ m$ (5m$^3$ se rozepne o 1mm$^3$), ale rychlost skutečného vzdalování obou těles je odhadem asi poloviční. U Měsíce je přesně změřena rychlost vzdalování od Země 38 mm za rok, ale podle rovnice (4d) se prostor rozpíná jen o 26 mm za rok.

S objevem rozpínání vesmíru vznikl nevyhnutelně dotaz, kdy a jaký byl jeho počátek. Dnes není pochybnosti o tom, že vesmír vznikl formou **"Velkého horkého třesku"**, tj. že expandoval z extrémně hmotného a horkého stavu. Jako první tuto hypotézu vyslovil v r.1927 opět G. **Lemaitre** a horké počáteční stadium předpověděl Rus Georgij Antonovič **Gamow** (1904-1968).

***Poznámky****: **1)** Termín „Big Bang“ použil poprvé britský astrofyzik Fred Hoyle v r.1949, ale tehdy ještě v ironizujícím smyslu. Autorem českého názvu „Velký třesk“ je Jiří Grygar.*
***2)*** *Stephen* ***Hawking*** *spolu s Rogerem* ***Penrosem*** *předložili hypotézu, podle které je Velký třesk opačným procesem ke vzniku singularity (černé díry).*
***3)*** *Někdy bývá Velký třesk mylně přirovnáván k výbuchu granátu a letu jeho střepin (hmotných částic, hvězd, galaxií...) prázdným prostorem. Správné vysvětlení ale je, že se rozpíná sám prostor a neexistuje nějaký pevný střed rozpínání ani rozdíl tlaků, jako u „konvenční“ exploze. Jedno písmenko navíc může způsobit zásadní chybu ve výkladu: „rozpínání prostoru“ .... ??rozpínání* ***v*** *prostoru??*

Jako pozůstatek prvních okamžiků vesmíru předpověděli **A**lpher, **B**ethe a **G**amow ve slavném článku z r. 1948 (známém pod názvem „αβγ“) tzv. **reliktní studené záření**, které bylo v r.1964 skutečně zachyceno. Jeho objevitelé A. **Penzias** a R. **Wilson** (Nobelova cena 1978) se zprvu domnívali, že jde o šum, způsobený znečištěním jejich anténního systému trusem v něm hnízdícího párku holubů. Reliktní záření je pozůstatkem z doby asi 380 000 let po Velkém třesku, kdy se vesmír ochladil na $3000\,K$ a při zániku plazmatu se záření oddělilo od hmoty. Je tedy pro nás obrazem vesmíru z jeho raného období. Dopadá k nám ze všech směrů přibližně se stejnou intenzitou a jeho teplota je $2{,}73K$ (1100-krát menší). Podle Wienova posouvacího zákona $\lambda_{max}T = konst = 2{,}9mmK$ by měla být dnešní vlnová délka na maximu intenzity vyzařování asi 1100-krát větší ($\lambda = 2{,}9/2{,}73 \approx 1mm$) neboli vesmír se od vzniku reliktního záření rozepnul 1100-krát.

Reliktní záření je jedním z nejdůležitějších zdrojů informací o vývoji vesmíru a je intenzivně zkoumáno jak pozemskými (**obr.4i** vlevo) tak i vesmírnými prostředky.



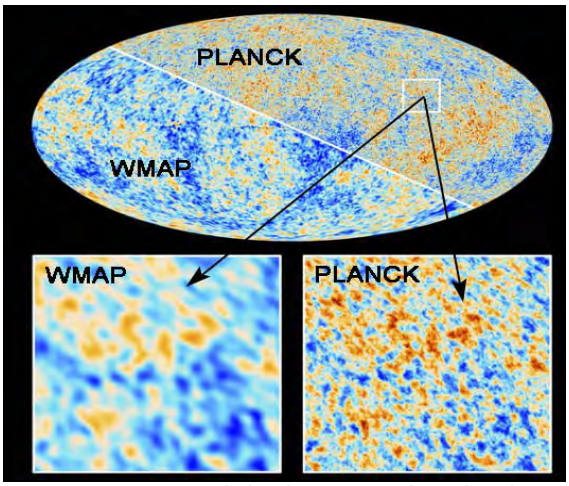

***Obr.4i*** *Vlevo anténa CBI (Cosmic Background Imager, Chile, Atacama 5080 n.m, pásmo 26-36GHz); vpravo spektrum reliktního záření (PLANCK)*

K vypouštění měřicích sond do stratosféry se používají i balony. Hlavní tři kosmické sondy jsme uvedli již na **obr.1m2**:

- **COBE** objevila **nehomogenitu** reliktního záření (největší vědecká událost roku1992);

- **WMAP** (snímané pásmo $\lambda = 3{,}3 \div 13{,}6mm$, teplotní rozlišení detektorů teploty $20\mu K$) potvrdila existenci **temné hmoty a temné energie** a jejich poměrné zastoupení ve vesmíru. Datum zveřejnění výsledků sondy 11.2.2003 je považováno za jeden z mezníků v současné astrofyzice;
- **PLANCK** (snímané pásmo $\lambda = 0{,}3 \div 10mm$, teplotní rozlišení senzorů $2\mu K$) umožňuje při snímkování oblohy rozlišit kolísání teploty reliktního záření až na šestém desetinném místě, což má velký význam při zkoumání vývoje vesmíru doslova v prvních zlomcích vteřin po Velkém třesku. Její měření z r. 2013 pomocí devíti pásmových detektorů skutečně vykazuje maximum na vlnové délce něco málo přes $1mm$ (**obr.4i** vpravo). Sonda PLANCK podala zatím nejpřesnější údaje o rozložení hmoty a energie ve vesmíru a o jeho rozpínání.

Na obr. **4ii** je patrný kvalitativní rozdíl v detailním rozlišení teploty u sond **WMAP** a **PLANCK** (celkový teplotní rozsah je znázorněn barevně od červenohnědé do modré a činí asi $0{,}0002K$).




***Obr.4ii*** *Porovnání snímků reliktního záření WMAP (2003) a PLANCK (2013)*

## 3.1.1 Newtonova mechanika a rozpínání vesmíru

**Z pohledu klasické Newtonovy gravitační teorie by bylo možno rozlišit tři možné scénáře vývoje vesmíru podle velikosti celkové mechanické energie jeho vybrané části** (podle **[30]**). **Toto zjednodušené vysvětlení je podobné k výpočtu únikové rychlosti družice Země. Respektuje ale všeobecně platnou skutečnost, že s růstem hmoty je podporováno přibližování těles, kdežto energie působí opačně, tedy podporuje oddalování.**

Uvažujme vesmír jako homogenní kouli o aktuální hustotě $\rho_0$ a poloměru $r$, takže jeho hmotnost je $M = \rho_0 \frac{4\pi r^3}{3}$. Malá část ležící na jeho okraji (např. galaxie s hmotností $m$) má kladnou kinetickou a zápornou potenciální energii. Její celkovou mechanickou energii určíme spojením (3b) a (4d):

$$E = E_K + U = \frac{1}{2}mu^2 - \kappa\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}mH_0^2 r^2 - \frac{\kappa m}{r}\cdot\rho_0\frac{4\pi r^3}{3}$$

neboli $$H_0^2(t) - \frac{8\kappa\pi\rho_0}{3} = \frac{2E}{mr^2} \qquad (4e)$$

**1)** Je-li $E > 0$, současné rozpínání se bude zrychlovat *(tzv. otevřený nekonečný vesmír);*

**2)** Při $E < 0$ se rozpínání postupně zastaví a přejde ve smršťování teoreticky až do stavu $r \to 0$ *(uzavřený vesmír, který skončí tzv. "velkým křachem");*

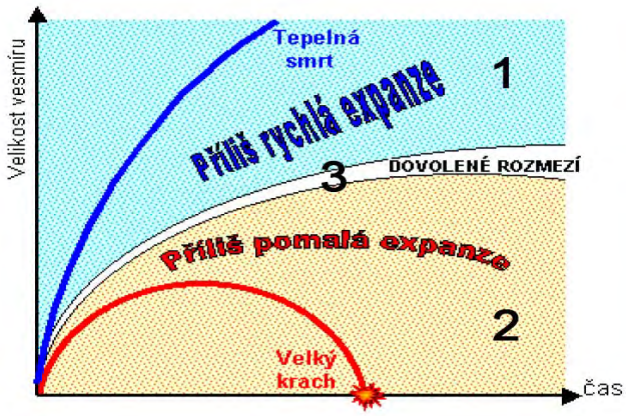
**3)** Ve zvláštním případě $E = 0$ se expanze zastaví, ale až při $r \to \infty$ *(tzv.* ***plochý*** *nebo též* ***eukleidovský*** *nekonečný vesmír)*. Jde tedy o analogii s výpočtem tzv. parabolické rychlosti podle (3p). Ze (4e) je možno pro tento scénář určit příslušnou tzv. **kritickou hustotu vesmíru**:

$$\rho_{0krit} = \frac{3H_0^2}{8\kappa\pi} \approx 0{,}84\cdot 10^{-26}\,kgm^{-3} \qquad (4f)$$

Při klidové hmotnosti neutronu $m_n = 1{,}675\cdot 10^{-27}kg$ by to odpovídalo asi 5 neutronům nebo atomům vodíku v jednom krychlovém metru, což je o několik řádů řidší "vakuum", než jsme schopni dosáhnout v nejlepších pozemských laboratorních podmínkách. Schématické znázornění všech tří scénářů je na **obr.4j** (podle **[27]**).

Při úvahách, který z nich by mohl platit, je často zohledňován nutný čas pro vznik života na Zemi a jeho rozvoj do dnešní podoby. Filozofie tohoto tzv. **antropického principu** (který má ale spíše nábožensko - filosofický než přísně vědecký základ) se dá vyjádřit slovy *"vesmír má právě takové parametry, které umožnily vznik života a naši existenci" (řec. anthropos....člověk):*

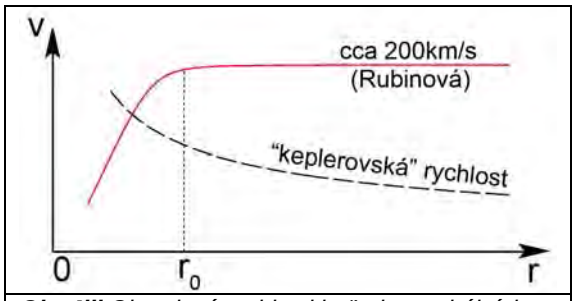
- v případě **2** (nadkritická hustota) by fáze expanze vesmíru přešla ve smršťování končící kolapsem a na rozvoj života by nebylo dost času;
- v případě **1** (podkritická hustota) by kvůli rychlému rozřeďování nemohla hmota vlivem gravitace kondenzovat do větších útvarů, takže by nevznikly hvězdy a na nich těžší prvky (uhlík, kyslík, kovy), nutné pro život.




***Obr.4j*** *Možné scénáře vývoje vesmíru podle antropického principu (převzato z* ***[27]****)*

Podle antropického principu bychom tedy měli prožívat scénář **3**, u kterého expanze vesmíru započala ve velmi úzkém "dovoleném rozmezí", předurčeném kritickou hustotou (4f). Hustota zjistitelné hmoty v námi poznané části vesmíru je ale ve srovnání s touto hodnotou podstatně nižší!! Tato nesrovnalost podpořila hypotézu (a podle současné fyziky již jistotu) existence tzv. **temné hmoty**. Její přítomnost (stejně jako možnost existence neutronových hvězd) předpověděl v r.1933 Fritz **Zwicky** na základě pozorování podivného pohybu některých galaxií ve Vlasech Bereniky, který nebyl v souladu s gravitační teorií.

Vera **Rubinová** v 70. letech 20. století měřila závislost obvodové rychlosti hvězd na jejich vzdálenosti od středu ve spirálních galaxiích (**obr.4jjj**). Zjistila, že až do určitého poloměru $r_0$, který odpovídá přibližně střední části galaxie s velkou koncentrací hmoty (tzv. výduti), roste obvodová rychlost lineárně, tj. úhlová rychlost je přibližně konstantní jako u rotujícího kompaktního disku. Při $r > r_0$ se obvodová rychlost ustálí na hodnotě okolo $200\,km/s$ a převyšuje tzv. keplerovskou rychlost (viz (3g) a **obr.1ggg**), takže u těchto hvězd by měly převážit síly odstředivé nad přitažlivými a galaxie by je měly "odhazovat" do okolí, což se ale neděje. Vzniklo tak podezření na přítomnost neviditelné hmoty, která drží galaxie gravitačně pohromadě. Na úplné vysvětlení tohoto chování galaxií ale nestačí ani dnes potvrzená existence velmi hmotných černých děr v jejich středech.



***Obr.4jjj*** *Obvodové rychlosti hvězd ve spirálních galaxiích podle Rubinové ( převzato z* ***[30a]****)*

***Poznámka:*** *Výstižnější než „temná“ by asi byl název "skrytá" nebo "nepoznaná" forma hmoty, která může mít kromě gravitačních projevů i jiné, které současná fyzika zatím nezná.*

## 3.1.2 Co všechno vesmír obsahuje?

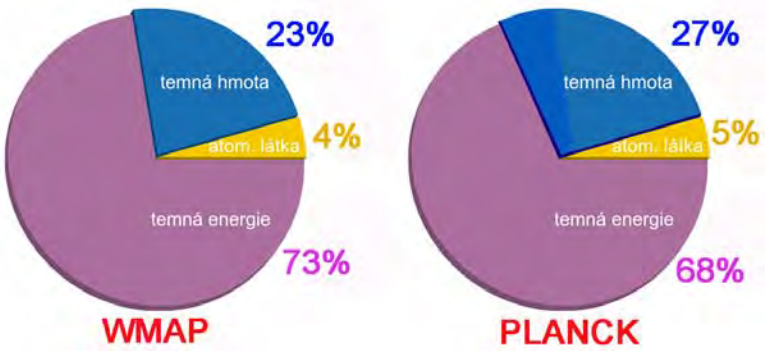
S objevem zrychleného rozpínání vesmíru vyvstala další záhada, která je nyní vysvětlována přítomností tzv. **temné energie**. Z výsledků nejnovějších experimentů a z rovnic obecné teorie relativity kupodivu vyplývá, že současný vesmír má opravdu kritickou hustotu (4f), kterou jsme vypočítali v podstatě nesprávným postupem pomocí Newtonovy gravitační teorie. Je ale nutno uvažovat obě výše uvedené formy hmoty i temnou energii a sloučit je na základě Einsteinovy ekvivalence $E = mc^2$. Podrobněji o tomto problému pojednáme v **kap.3.2.1** a **kap.3.2.2**.

**Podle dnešních znalostí by mělo být rozdělení hmoty a energie ve vesmíru následující (údaje sondy PLANCK, zveřejněné v r. 2013):**

- **1%** .... tzv. "svítící" hmota (viditelné objekty). Odhaduje se, že je tvořena převážně atomy vodíku a helia (v poměru asi 3:1) a na ostatní prvky připadají pouhá dvě procenta, tedy 0,2 promile celkového "obsahu" vesmíru;
- **4%** .... "nesvítící" hmota (mj. hnědí, popřípadě černí trpaslíci, neutronové hvězdy, černé díry), tedy celkem **5%** hmoty původně atomární povahy (tzv. **baryonové hmoty**).

Podstata dalších složek není dosud uspokojivě vysvětlena:

- **27%** .... **temná hmota**. Předpokládá se, že ji tvoří neutrina a další exotické částice neznámé povahy, které neinteragují elektromagneticky. Odhaduje se, že za vteřinu projde skrz 1cm$^2$ lidské pokožky „bez povšimnutí“ 60 miliard neutrin emitovaných Sluncem, ale na pokrytí uvedeného procentuálního podílu temné hmoty to stále nestačí. Kandidátem na ni by mohla být zatím neidentifikovaná tzv. „sterilní neutrina“, která se podle předpokladů projevují pouze slabě gravitačně;



***Obr.4jj*** *Rozložení hmoty a energie podle údajů sond* ***WMAP****(2003) a* ***PLANCK*** *(2013)*

- **68%** .... **temná energie**. Její podstata je největší hádankou současné fyziky a je možné, že jde o určitou vlastnost časoprostoru jako takového.

Na základě ekvivalence hmoty a energie se všechny výše uvedené složky započítávají do celkového obsahu vesmíru a pokud je uvedeme v jednotkách hmotnosti, na hmotu (látku) připadne asi 1,5 a na energii 3,5 atomů vodíku v 1m$^3$.

***Poznámky:*** ***1)*** *Podle starších měření sondou WMAP z r.2003 je celkový podíl baryonové i temné hmoty dohromady 27% a ostatních 73% připadá na energii. Sonda PLANCK naměřila větší podíl hmoty (celkem 32%) a menší Hubbleovu konstantu, čímž se poněkud snižují současné odhady rychlosti rozpínání.*

***2)*** *Výše uvedená převaha temné hmoty nad baryonovou v poměru přes 5:1 je zpochybňována odpůrci standartního modelu vesmíru. Problém chybějící hmoty je možno částečně vysvětlit našimi omezenými, i když rostoucími pozorovacími možnostmi. Např. odhad podílu červených a infračervených trpaslíků na celkovém počtu hvězd stoupl za posledních 30 let z pouhých 3% na 70% !!*

## 3.2 Standartní dynamický model vesmíru (ΛCDM)

Zkratkou $\Lambda CDM$ je vyjádřeno, že model počítá s existencí Einsteinovy kosmologické konstanty $\Lambda$ a chladné temné hmoty (angl. "**C**old **D**ark **M**atter"). **Předem důrazně upozorňujeme, že tento model a všechny na něm provedené výpočty platí v období až 100 000 let po Velkém třesku.**

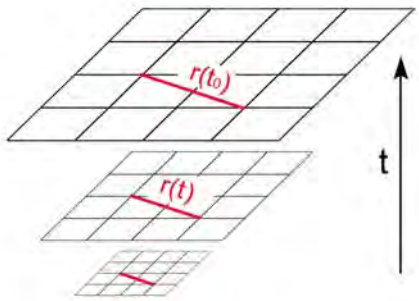
Použití termínu "model" a nikoliv "teorie" vyjadřuje určitou dávku opatrnosti a ponechává prostor pro jeho možnou úpravu, která může v budoucnu přijít s novými výsledky pozorování vesmíru stále se zdokonalujícími metodami.

V dalším textu budeme pracovat s pojmem "kosmický čas", aniž by bylo řečeno, v jakém inerciálním systému je zaveden (což je vyžadováno ve **speciální** teorii relativity). Modely vesmíru ale vycházejí z **obecné** teorie relativity, kde to nutné není, neboť ve velkých vesmírných měřítkách žádný inerciální systém nelze zavést. Pokud jej přesto zavádíme, potom jen lokálně. **Kosmickým časem nazveme náš čas, jehož stupnice je odvozena z periodických dějů v naší Sluneční soustavě.** Vhodnou jednotkou času v kosmologických modelech vývoje vesmíru je 1 miliarda let (Gyr), u vzdálenosti 1 miliarda světelných let (1Gly). V současnosti je kosmický čas (tj. doba od Velkého třesku) $t_0 = 13{,}8$ miliardy let.

### 3.2.1 Expanzní funkce

Ve standartním modelu vesmíru, který vychází z Fridmanova řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole, je zavedena bezrozměrná tzv. "**expanzní funkce**" (též "kosmický škálový faktor") $a(t)$, která vyjadřuje, jak se při rozpínání prostoru liší vzdálenost $r(t)$ dvou v něm nehybných objektů v kosmickém čase $t$ od jejich vzdálenosti nynější: $r(t) = a(t)r(t_0)$. V současnosti je tedy $a(t_0) = 1$, v minulosti bylo $a(t) < 1$ a v nejbližší budoucnosti bude velmi pravděpodobně $a(t) > 1$.

Dvojrozměrná představa rozpínání prostoru je na **obr.4k** znázorněna souřadnicovou sítí. Koncové body úsečky $r$ mají stále stejné souřadnice (tzv. "**comoving - unášené**"), vlastní souřadný systém se ale s časem rozpíná. Tím je řečeno, že **pevné body se při rozpínání prostoru od sebe vzdalují, ale přitom se nepohybují**. Protože při velkých vesmírných vzdálenostech je pohyb galaxií v prostoru zanedbatelný vůči rychlosti jeho rozpínání, můžeme galaxie považovat za pevné body v zavedeném souřadném systému. S rozpínáním prostoru (s růstem $a$) se zároveň zřeďuje hmota, takže pro průměrnou hustotu hmoty ve vesmíru platí $\rho_M(t) = \rho_{M0} / a^3(t)$, kde $\rho_{M0}$ je současná hustota. Vzájemná rychlost dvou objektů vyjde derivací podle času:




***Obr.4k*** *Dvojrozměrná představa rozpínání prostoru*

$$u(t) = \dot{r}(t) = \dot{a}(t)r(t_0) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} r(t) = H(t)r(t)$$

kde $H(t)$ je již zmíněný Hubbleův parametr – viz (4dd). Je tedy

$$H(t) = \dot{a}(t)/a(t) \tag{4ff}$$

V současnosti (v kosmickém čase $t_0$) je $H(t) = H_0$ a platí vztah (4d). Znalost expanzní funkce $a(t)$ nám umožní poznat minulost a předvídat budoucnost rozpínání vesmíru. Dvě hlavní **Einstein – Fridman - Lemaitrovy (E-F-L) rovnice** pro její nalezení jsou uvedeny např. v **[27]**. První je

$$\left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right]^2 = H^2(t) = \frac{8\kappa\pi\rho_M(t)}{3} - \frac{c^2 k}{a^2(t)} + \frac{c^2\Lambda}{3} \tag{4g}$$

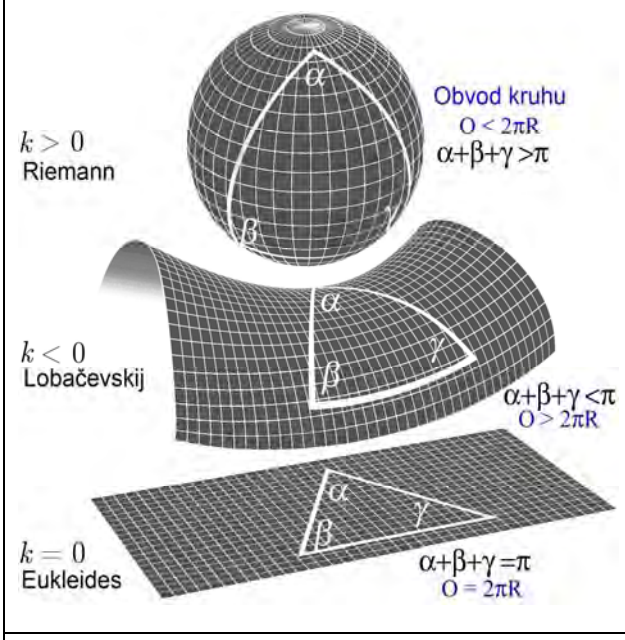
kde $\Lambda$ $[m^{-2}]$ .... kosmologická konstanta, kterou Einstein uměle zavedl po dokončení obecné teorie relativity v r.1915; později ji po Fridmanových výpočtech a Hubbleových měřeních zavrhl ale dnes byla znovu přijata (vývoj názorů na ni vysvětlíme dále);

- konstanta $k$ .... tzv. index křivosti vesmíru. **Hmotná tělesa zakřivují okolo sebe časoprostor, křivost roste s koncentrací hmoty**. Rozlišují se tři případy (viz ilustrace pomocí křivé plochy na **obr.4m**):

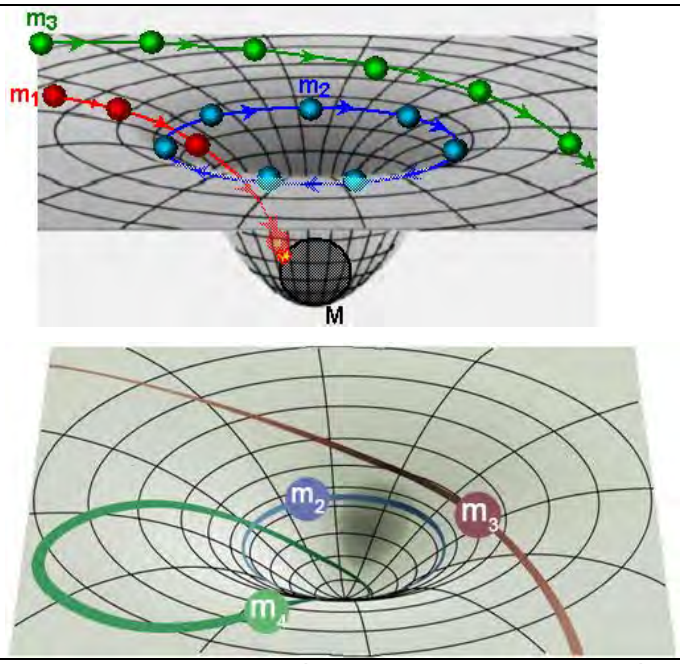
$k = 1$ .... kladná křivost ("uzavřený vesmír", platí Riemannova geometrie);

$k = -1$ .... záporná křivost ("otevřený vesmír", platí Lobačevského geometrie).

**Podle současných pozorování je průměrná křivost vesmíru ve velkých mezigalaktických rozměrech nulová**, tj. $k = 0$ a platí eukleidovská geometrie (**plochý,** tzv. **eukleidovský vesmír**). V místních měřítkách (uvnitř galaxií) ale může být křivost vlivem větší koncentrace hmoty nenulová.




**Obr.4m** *Typy geometrií podle křivosti*




**Obr.4n** *Zjednodušené představy souvislosti zakřivení časoprostoru a gravitační přitažlivé sily*

***Poznámka:*** *Základní myšlenky, na kterých je vybudována **obecná teorie relatity**, lze populárně vyjádřit takto:*

*- ve všech inerciálních soustavách je rychlost světla stejná (a zároveň nejvyšší možná), což je v souladu se **speciální teorií relativity** (viz **kap.4**). Ze základů mechaniky opakujeme, že **inerciální soustava** má tu vlastnost, že těleso se v ní řídí 1. Newtonovým zákonem (nepůsobí-li na ně vnější síla, je v klidu nebo se pohybuje přímočaře konstantní rychlostí). Každá vztažná soustava, je-li vzhledem k dané inerciální soustavě v klidu nebo pohybu rovnoměrném přímočarém, je rovněž inerciální (Newton ještě rozlišoval klid a konstantní rychlost, tj. předpokládal existenci absolutního prostoru i času);*

*- inerciální soustavy existují jen lokálně;*

*- hmotná tělesa vytvářejí čas a prostor a zakřivují jej okolo sebe;*

*- gravitace je projev tohoto zakřivení;*

*- setrvačnost a gravitaci nelze od sebe rozlišit (setrvačná a gravitační hmotnost jsou si úměrné a v naší měrové soustavě shodné);*

*- tělesa se v zakřiveném časoprostoru pohybují po nejkratší možné dráze.*

*Laická "pozemská" ilustrace vlivu hmoty na zakřivení časoprostoru a souvislosti s gravitací je na **obr.4n** (podle **[27]** a **[37]**). Hmotnější těleso **M** způsobí v pružné membráně (např. trampolíně) větší prohlubeň s větší křivostí, takže snaha lehčího tělesa (např. **$m_1$**) se k němu "skutálet" poroste. Nekonečnou křivost časoprostoru, která byla zmíněna v kapitole o černých děrách, je možno si představit jako extrémně hlubokou a úzkou prohlubeň, ve které lehčí těleso nenávratně zmizí. V obrázcích jsou vyznačeny nejkratší možné dráhy v zakřiveném časoprostoru pro tělesa s různými počátečními rychlostmi. Jde o přímou analogii s pohybem v centrálním gravitačním poli podle **kap.1.7**:*

***$m_1$** ... počáteční klid, **$m_2$** ... kruhová rychlost, **$m_3$** ... parabolická rychlost, **$m_4$** ... eliptická rychlost.*

V rovnici (4g) nahradíme hustotu $\rho_M(t)$ současnou hustotou $\rho_{M0}$ podle vztahu $\rho_M(t) = \rho_{M0} / a^3(t)$ a po úpravě vychází

$$\dot{a}^2(t) - \frac{8\kappa\pi\rho_{M0}}{3a(t)} = -c^2 k + \frac{c^2\Lambda}{3} a^2(t) \qquad (4h)$$

Druhou **E-F-L** rovnici z **[27]** vynecháme a uvedeme pouze zjednodušený výsledek, vzniklý vzájemným odečtením obou rovnic, který platí až od doby přibližně 100 000 let po Velkém třesku, kdy zanikl vliv tlaku plynu a záření. Kromě toho dosadíme dnes ověřenou hodnotu $k = 0$ a pro expanzní funkci vývoje vesmíru vychází překvapivě jednoduchá diferenciální rovnice 2.řádu

$$\ddot{a}(t) + \frac{4\kappa\pi\rho_M(t)a(t)}{3} = \frac{c^2\Lambda}{3} a(t) \quad \text{nebo také} \quad \ddot{a}(t) + \frac{4\kappa\pi\rho_{M0}}{3a^2(t)} = \frac{c^2\Lambda}{3} a(t) \qquad (4i)$$

Einstein po dokončení obecné teorie relativity v r.1915 předpokládal eukleidovský vesmír ($k = 0$) a sdílel všeobecný názor, že je statický, tj. $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ neboli $a = konst$, $H = 0$ (Lemaitreův a Hubbleův objev rozpínání přišel až později). Kosmologickou konstantu zavedl proto, že při $\Lambda = 0$ by mu v (4h) a (4i) paradoxně vyšla nepřípustná nulová hustota!!

Přijmeme-li formální analogii mezi veličinou $a$ (poměr vzdáleností) a $r$ (vzdálenost), je rovnice (4g) podobná k rovnici (4e), kterou jsme odvodili s pouhou znalostí **Newtonovy gravitační teorie**. Odvození (4g) z **obecné**

**teorie relativity** není ale zdaleka tak jednoduché a fyzikální význam některých konstant je odlišný. Poslední dva členy na pravé straně (4g) představují obdobu energie v (4e), jejíž znaménko rozhodovalo mezi scénáři vývoje vesmíru **1**, **2**, **3** z **obr.4j**. Proto se o kosmologické konstantě někdy hovoří jako o **"energii vakua"** nebo **"temné (skryté) energii"**, již zmíněné dříve. Přesné fyzikální vysvětlení tohoto pojmu však doposud nebylo podáno.
Pro $k=0$ a $\Lambda=0$ vychází z rovnice (4g) tzv. **kritická hustota** vesmíru jako funkce Hubbleova parametru

$$\rho_{krit}=\frac{3H^2}{8\kappa\pi}\ \left[kg/m^3\right] \tag{4ii}$$

To by byla hustota plochého vesmíru, obsahujícího pouze hmotu (výstižněji řečeno "hmotu ve formě látky"), což ale dnes již neplatí, viz **obr.4jj**!! Současná kritická hustota je $\rho_{0krit}=\frac{3H_0^2}{8\kappa\pi}$ a shoduje se s "newtonovskou" velikostí (4f), ale je třeba upozornit na některé rozdíly:
- kritická hustota se s časem mění (ukážeme později, že Hubbleův parametr se stárnutím vesmíru klesá);
- na základě ekvivalence hmoty a energie v teorii relativity ($E=mc^2$) jsou do kritické hustoty zahrnuty všechny složky z **obr.4jj**, tedy baryonová i temná hmota a temná energie. Z různých nezávislých měření se potvrzuje, že průměrná hustota vesmíru dlouhodobě sleduje hodnotu kritickou, ale poměrné zastoupení hmoty a energie se postupem času mění ve prospěch energie, jak bude ukázáno na **obr.4q**.

***Poznámky*: 1)** *Rovnici ve (4i) napravo můžeme obdržet rovněž derivováním (4h) podle času za předpokladu, že při úpravách bude dodržena podmínka $\dot{a}\neq 0$. Také z této rovnice by se při $\Lambda=0$ a záměně $r$ za $a$ stala úplná obdoba Newtonova gravitačního zákona s jeho výhradně přitažlivou silou, takže podle něj by hrozilo smršťování vesmíru. Kladná kosmologická konstanta $\Lambda>0$ by tedy v Newtonově mechanice mohla "zachránit" představu statického vesmíru, protože má na rozdíl od gravitace odpudivý účinek.*
***2)** Vakuum nepředstavuje z fyzikálního hlediska absolutní prázdnotu, neboť v něm působí různá pole (elektrické, magnetické, gravitační). Při určení jeho energie existuje výrazná a zatím neobjasněná kvantitativní neshoda mezi částicovou fyzikou a současnou kosmologií.*

Již dříve jsme uvedli, že zkoumáním zjednodušených rovnic obecné teorie relativity dokázal Fridman v r.1922 (ještě před Hubbleovým měřením), že při $\Lambda=0$ vesmír nejenže nemusí zkolabovat nebo být statický, ale dokonce se může rozpínat. Následující příklad to objasní:

***Příklad 4c*: Výpočet rozpínání vesmíru bez kosmologické konstanty** *(viz **lit.[32]**):*
*- pro $k=0$ a $\Lambda=0$ má rovnice (4i) jednoduché řešení*

$$a(t)\big|_{\Lambda=0}=\sqrt[3]{6\kappa\pi\rho_{M0}t^2} \tag{4j}$$

*Expanzní funkce tedy monotónně roste, což je znázorněno slabě čárkovaně v **obr.4p**. Derivací (4j) snadno zjistíme, že Hubbleův parametr je $H(t)\big|_{\Lambda=0}=\dot{a}(t)/a(t)_{\Lambda=0}=2/3t$ a z limity pro $t\to\infty$ vyplývá, že rychlost rozpínání s postupem času klesne k nule. Tento výsledek se shoduje se scénářem č. **3** a při troše představivosti je obdobou dříve zmíněného případu druhé únikové rychlosti při svislém vrhu vzhůru (3n), kdy těleso dosáhne nekonečné výšky a zastaví se. Vesmír nejenže se bez kosmologické konstanty nesmršťuje, ale expanduje (i když stále pomaleji) až do úplného zastavení expanze v nekonečném čase. Po Hubbleových měřeních tedy Einstein neshledal důvod s ní nadále počítat. Jím takto revidovaná představa vesmíru bez kosmologické konstanty přetrvala ve fyzice od třicátých let 20. století skoro až do jeho konce, kdy bylo v r. 1998 moderními měřicími prostředky a pozorováním **supernov typu 1a** překvapivě prokázáno, že **rozpínání se dokonce zrychluje**. Kosmologická konstanta musela být znovu povolána do standartního modelu vesmíru a Einsteinův "omyl" se po třech čtvrtinách století ukázal být pravdou, viz **kap.3.2.2**. Povšimněme si, že malou změnou konstanty v nepřímé úměře z $2/3t$ na $1/t$ vyjde kvalitativně odlišný lineární model rozpínání, který jsme popsali na **obr.4f**.*

## 3.2.2 Výpočet zrychleného rozpínání s kosmologickou konstantou

***Poznámky*: 1)** *Je nutno připomenout, že stále vyšetřujeme pouze jeden možný (byť všeobecně uznávaný a preferovaný) model vývoje vesmíru $\Lambda CDM$, který se jistě s vývojem teoretické i experimentální fyziky bude dále nikoliv snad zásadně měnit, ale zpřesňovat. V poslední době jsme zažili tento vývoj např. u vesmírných sond COBE, WMAP a PLANCK, které postupně v létech 1992, 2003 a 2013 zpřesnily informace o reliktním záření a obsahu hmoty a energie ve vesmíru.*
***2)** V následujících výpočtech půjde o „přesné výsledky z nepřesných podkladů“, protože vstupní hodnoty modelu jsou často udány se značným rozptylem (např. $H_0$). Je to kvůli lepší orientaci čtenáře - zájemce, který by prováděl v modelu $\Lambda CDM$ své samostatné výpočty a chtěl by si je porovnat s tímto textem.*

Opět vycházíme ze současných pozorování, podle kterých je vesmír plochý, takže při $k=0$ můžeme rovnici (4g) upravit na tvar $\frac{8\kappa\pi\rho_M}{3H^2}+\frac{c^2\Lambda}{3H^2}=\frac{\rho_M}{3H^2/8\kappa\pi}+\frac{c^2\Lambda/8\kappa\pi}{3H^2/8\kappa\pi}=1$ a po zavedení bezrozměrných parametrů

$$\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_{krit}} = \frac{8\kappa\pi\rho_M}{3H^2} \quad \text{a} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{krit}} = \frac{c^2\Lambda}{3H^2} \quad \text{dostáváme důležitý vztah} \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \tag{4jj}$$

Parametr $\Omega_M$ zde má význam poměrné hustoty hmoty – látky. Dále jsme zavedli výraz

$$\rho_\Lambda = c^2\Lambda/8\kappa\pi \quad \text{(tzv. hustotu temné energie)} \tag{4jjj}$$

takže parametr $\Omega_\Lambda$ představuje analogicky poměrnou hustotu temné energie; parametr $\Omega_M$ podporuje smršťování a $\Omega_\Lambda$ rozpínání. Součet hustot hmoty a energie je stále roven hustotě kritické: $\rho_M + \rho_\Lambda = \rho_{krit}$.

Současná velikost poměrných hustot (při aktuálních hodnotách $H_0$ a $\rho_{M0}$) je

$$\Omega_{M0} = \frac{\rho_{M0}}{\rho_{0krit}} = \frac{8\kappa\pi\rho_{M0}}{3H_0^2}, \Omega_{\Lambda 0} = \frac{c^2\Lambda}{3H_0^2}$$

a dosazením do pravé z rovnic (4i) vychází stěžejní vztah kosmologického modelu $\Lambda CDM$

$$\ddot{a}(t) + \frac{\Omega_{M0}H_0^2}{2a^2(t)} = \Omega_{\Lambda 0}H_0^2 a(t) \tag{4k}$$

Řešení (4k) je uvedeno v **lit.[32]** sice bez odvození, ale snadno si je ověříme provedením druhé derivace a zpětným dosazením:

$$a(t) = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{M0}}{\Omega_{\Lambda 0}} sinh^2\left(1{,}5H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\ t\right)} \tag{4m}$$

Model vývoje vesmíru je tedy určen dnes aktuální trojicí konstant $H_0, \Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda 0}$, nebo (podle (4i)) hodnotami $\kappa, \rho_{M0}, \Lambda$. Jejich číselné hodnoty se určují několika nezávislými způsoby, z nichž tři první jsme zmínili již dříve:

- měření **rudého posuvu** vzdálených objektů,
- pozorování **supernov typu 1a**,
- měření **nehomogenity reliktního záření**,
- měření **hustoty výskytu hvězd a galaxií a jejich hmotností** se děje buď detailním pozorováním malých velmi vzdálených oblastí vesmíru (tzv. „hluboká pole“ – viz např. **obr.4e**), nebo celooblohovými přehlídkami velkorozměrových oblastí s desítkami až stovkami tisíc galaxií. Tímto způsobem jich dosud bylo zmapováno a katalogizováno přes 500 milionů.

Z velkého množství informačních zdrojů uvádíme tyto hodnoty:

- podle **lit.[32]** (r.2008) je $H_0 = 73\,kms^{-1}/Mpc$, $\Omega_{M0} = 0{,}24$, $\Omega_{\Lambda 0} = 0{,}76$;
- údaje sondy **WMAP** (r.2003): $H_0 = 71\ (\pm 4)kms^{-1}/Mpc$, $\Omega_{M0} = 0{,}27$, $\Omega_{\Lambda 0} = 0{,}73$;
- současné nejpřesnější údaje z měření sondou **PLANCK** (r.2013):

$$H_0 = 67\,kms^{-1}/Mpc,\ tj.\ 2{,}17\cdot 10^{-18}\,s^{-1}, \Omega_{M0} = 0{,}317,\ \Omega_{\Lambda 0} = 0{,}683$$

**Ve všech následujících numerických výpočtech a grafech jsou použity hodnoty ze sondy PLANCK.**

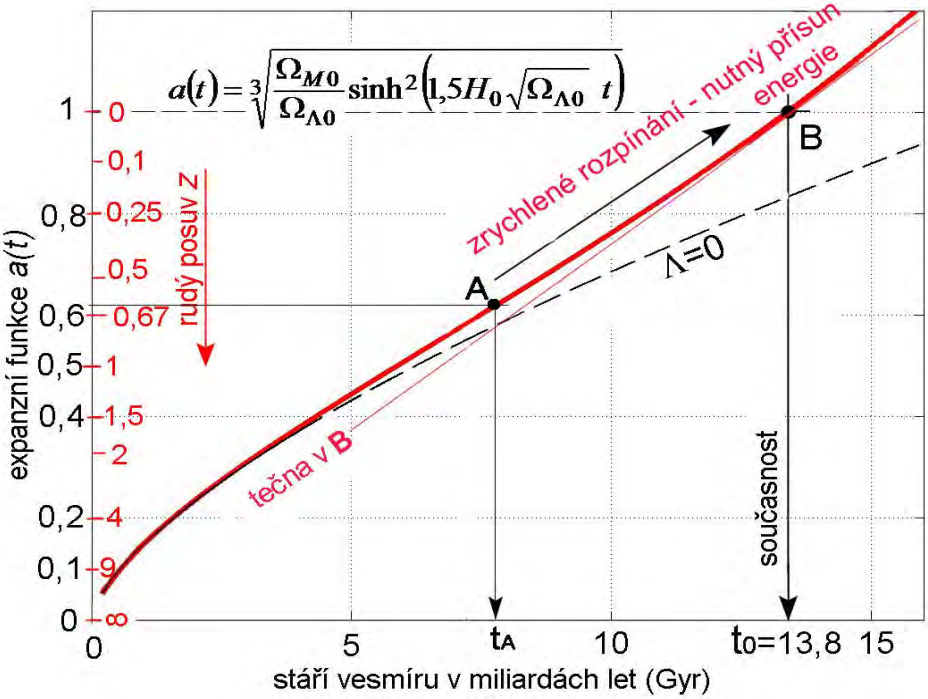
Současná hustota hmoty (látky) je tedy $\rho_{M0} = 0{,}317\rho_{0krit} = 0{,}27\cdot 10^{-26}\,kgm^{-3}$, tj. asi třetina kritické hustoty z (4f) resp. (4ii) a v souladu s rozdělením na **obr.4jj**. Kosmologická konstanta vychází

$$\Lambda = 1{,}075\cdot 10^{-52}\ m^{-2}$$

***Poznámka**: Zatím není jasné, patří-li kosmologická konstanta mezi ostatní (neměnné) fyzikální konstanty, stejně jako není vyjasněna podstata temné energie. Model $\Lambda CDM$ předpokládá, že $\Lambda$ a tím i hustota temné energie $\rho_\Lambda$ jsou neměnné, zatímco hustota hmoty $\rho_M$ při rozpínání prostoru klesá!! Fyzikální rozměry hustot jsou $[kg/m^3]$, ale u $\rho_\Lambda$ se někdy uvádí rozměr $[J/m^3]$, který obdržíme přepočtem podle Einsteinovy ekvivalence $E = mc^2$.*

Průběh expanzní funkce (4m) je v **obr.4p** zobrazen červenou křivkou a je vidět, že až do bodu **A** se téměř shoduje se zjednodušeným řešením (4j). Bod **A** je inflexním bodem (expanzní funkce v něm má nulovou druhou derivaci), takže dosazením $\ddot{a}(t) = 0$ do levé rovnice (4i) vychází $4\kappa\pi\rho_M = c^2\Lambda$ a porovnáním s (4jj) zjišťujeme, že v bodě **A** je $\Omega_\Lambda = \Omega_M/2$. Z rovnice (4k) pro $\ddot{a}(t) = 0$ určíme příslušnou hodnotu expanzní funkce $a_A = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{M0}}{2\Omega_{\Lambda 0}}} = \sqrt[3]{\frac{0{,}317}{2\cdot 0{,}683}} = 0{,}615$ a z grafu konečně odečteme i příslušný čas $t_A = 7{,}76$ miliard let. Od Velkého třesku až do této doby se vesmír sice rozpínal, ale převládající vliv hmoty rozpínání brzdil (první derivace expanzní funkce klesala). Protože v současnosti je $a = 1$, lze z grafu vyčíst i stáří vesmíru ($t_0 = 13{,}8$ miliardy let, bod **B**). Za bodem **A** se s poklesem hustoty hmoty začal prosazovat "energetický" člen s parametrem $\Omega_\Lambda$, rozpínání se začalo zrychlovat až do dnešní doby a tento trend bude pravděpodobně nadále pokračovat, jak

ukazuje tečna v bodě **B**. V **obr.4p** jsou na svislé ose duplicitně vyneseny i hodnoty rudého posuvu podle rovnice (4p), která bude objasněna později.

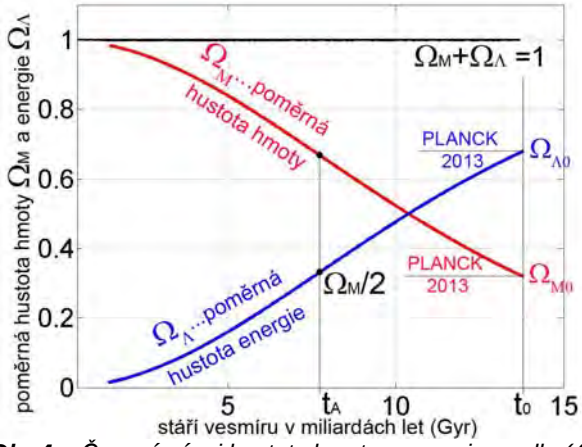



***Obr.4p*** *Průběh rozpínání vesmíru podle standartního modelu* $\Lambda CDM$ *(slabou čárkovanou čarou bez kosmologické konstanty)*

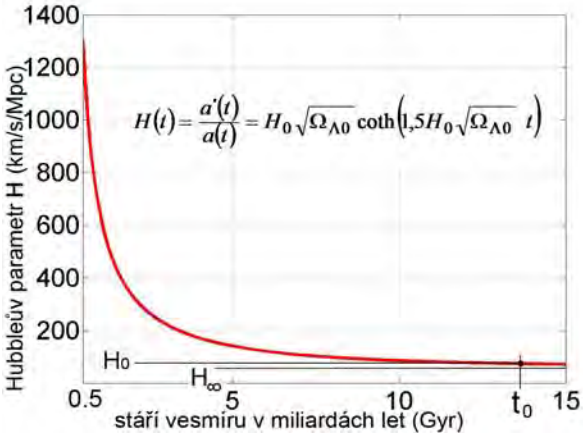
Derivací expanzní funkce a dosazením do (4ff) vychází časový průběh Hubbleova parametru, viz **obr.4q1**:

$$H(t)=\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}=H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\coth\left(1{,}5H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\ t\right) \tag{4n}$$

Snadno zjistíme, že pro $t\to 0$ Hubbleův parametr bez omezení roste, takže pro přehlednost je v obrázku časová osa kreslena až od $0{,}5Gyr$ (pro kosmický čas menší než asi 100 000 let náš model (4m) stejně neplatí!). Na **obr.4q** je znázorněn časový vývoj poměrných hustot hmoty a energie podle (4jj). Je patrné, že raný vesmír obsahoval téměř výhradně hmotu ($\Omega_\Lambda\to 0,\ \Omega_M\to 1,\ \rho_M\to\rho_{krit}$). Naopak v daleké budoucnosti se Hubbleův parametr ustálí na hodnotě $H_\infty=H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}=c\sqrt{\Lambda/3}\approx 55{,}4\,kms^{-1}/Mpc$ (limitu pro $t\to\infty$ lze určit nejsnadněji ze (4g) dosazením $k=0$ a $\rho_{M\infty}=0$). Bude tedy $\dot{a}(t)=c\sqrt{\Lambda/3}\ a(t)$, zcela převládne vliv energie (bude $\Omega_{\Lambda\infty}\to 1,\ \Omega_{M\infty}\to 0$), vesmír se bude rozpínat exponenciálně bez omezení a dojde k jeho tzv. "velkému roztržení". Tento model vývoje uvedl již v r. 1917 **Willem de Sitter**, ale vzhledem k dnešní úrovni znalostí je úvaha pro dalekou budoucnost stále jen spekulativní.




***Obr.4q*** *Časový vývoj hustoty hmoty a energie podle (4jj)*




***Obr.4q1*** *Časový vývoj Hubbleova parametru podle (4n)*

## 3.2.3 Kosmologický rudý posuv a vesmírné vzdálenosti

Stále se zabýváme velmi vzdálenými objekty (galaxiemi), jejichž světlo k nám dorazilo za velmi dlouhou dobu, takže je pozorujeme tak, jak vypadaly v dávno minulém čase $t_e$, kdy jimi bylo světlo emitováno. V rané fázi vesmíru byl podle **obr.4q1** Hubbleův parametr $H(t)$ velký a rychlost rozpínání prostoru mohla mnohonásobně

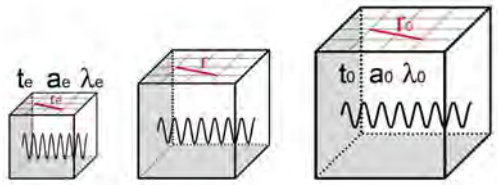
překročit rychlost světla. Světlo se sice podle speciální teorie relativity pohybuje vůči danému místu ve vesmíru rychlostí $c$, ale při současném rozpínání prostoru mohlo být od nás unášeno pryč v případě, že rychlost rozpínání byla větší než $c$. Tento stav nastal, když vyzařující objekt ležel za tehdy aktuální Hubbleovou vzdáleností $r_H$. Hubbleova vzdálenost byla nejdříve malá, neboť analogicky k (4ddd) pro ni platí v obecném čase vztah $r_H(t) = c/H(t)$. Teprve později, když se parametr $H$ snížil, rozpínání prostoru se zpomalilo, světlo se k nám mohlo začít přibližovat a posléze nás i dostihnout. Ukážeme později, že přibližování světla těch nejvzdálenějších objektů nastalo při stáří vesmíru asi 4 miliardy let. Tímto způsobem můžeme dnes pozorovat velmi staré objekty a "podívat se" do raného stadia vývoje vesmíru.

Jestliže zdroj vyzářil v minulosti světlo o vlnové délce $\lambda_e$, v současnosti (v čase $t_0$) je přijímáme s vlnovou délkou $\lambda_0$. Bylo již dříve řečeno, že **vlnová délka světla se prodloužila tolikrát, kolikrát se za dobu jeho letu k nám zvětšila vzdálenost mezi zdrojem a námi**, což lze zjistit pomocí expanzní funkce. Růst vlnové délky s rozpínáním prostoru je znázorněn na **obr.4r**:

- v čase $t_e$ byla hodnota expanzní funkce $a_e = \lambda_e/\lambda_0$, v současném čase $t_0$ je $a_0 = 1$. Kosmologický rudý posuv u námi přijímaného záření je

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{1}{a_e} - 1 \quad \text{neboli} \quad a_e = \frac{1}{1+z} \tag{4p}$$

Vliv Dopplerova posuvu (tj. rychlost galaxií vůči okolnímu prostoru) zanedbáváme. Vztah (4p) nám umožňuje ze změřeného rudého posuvu a následného zjištění hodnoty expanzní funkce určit pomocí (4m) nebo **obr.4p** okamžik emise $t_e$, tj. **tehdejší stáří objektu**. Například z naměřeného rudého posuvu $z = 1$ vyplývá hodnota $a_e = 0{,}5$ (vesmír se od doby emise do dneška zvětšil dvakrát) a čas emise byl necelých 6 miliard let (světlo k nám letělo skoro 8 miliard let). V r. 2012 oznámil NASA při pozorování nejvzdálenějších objektů (kvasarů) rudý posuv $z \approx 10$, takže expanzní funkce měla v době emise hodnotu $a_e \approx 0{,}09$ a příslušný čas byl $t_e \approx 0{,}47 Gyr$. Kvasar dnes pozorujeme tak, jak vypadal 470 milionů let po Velkém třesku. Od té doby se od nás vzdálil 11krát.



***Obr.4r*** *Vlnová délka roste podle expanzní funkce*

Dále je možno určit vzdálenosti i příslušné rychlosti vzdalování objektů od nás v době emise i dnes. Již dříve jsme zdůraznili, že **rychlost vzdalování zdroje neroste lineárně s rudým posuvem a při jejím určení je nutno použít expanzní funkci**. Vycházíme z toho, že **speciální teorie relativity se svou nezávislou konstantní rychlostí světla $c$ platí pouze lokálně okolo daného bodu časoprostoru.**

V následujících úvahách o rozměrech vesmíru použijeme rychlost světla $c$ jakožto jednu z univerzálních fyzikálních konstant, a dále kosmický čas $t$, který odvozujeme z periodických dějů v naší Sluneční soustavě. Potom je možno definovat jeden inkrement vzdálenosti $cdt$.

Předpokládejme, že v daném bodě časoprostoru emituje nějaký zdroj v kosmickém čase $t_e$ záblesk světla (foton), který za čas $dt$ urazí vůči bezprostředně jej obklopujícímu prostoru přírůstek vzdálenosti

$$dr = c \cdot dt$$

Prostor se ale zároveň rozpíná podle expanzní funkce $a(t)$ a foton je jím unášen, takže na jeho cestě k Zemi se v čase $t$ přírůstek vzdálenosti změní na hodnotu

$$dR = \frac{dr}{a(t)} = \frac{c \cdot dt}{a(t)}$$

Aby foton dostihl Zemi v našem čase $t_0$, je nutno integrovat od času emise $t_e$ do $t_0$, takže celá dnešní vzdálenost Země od zdroje je

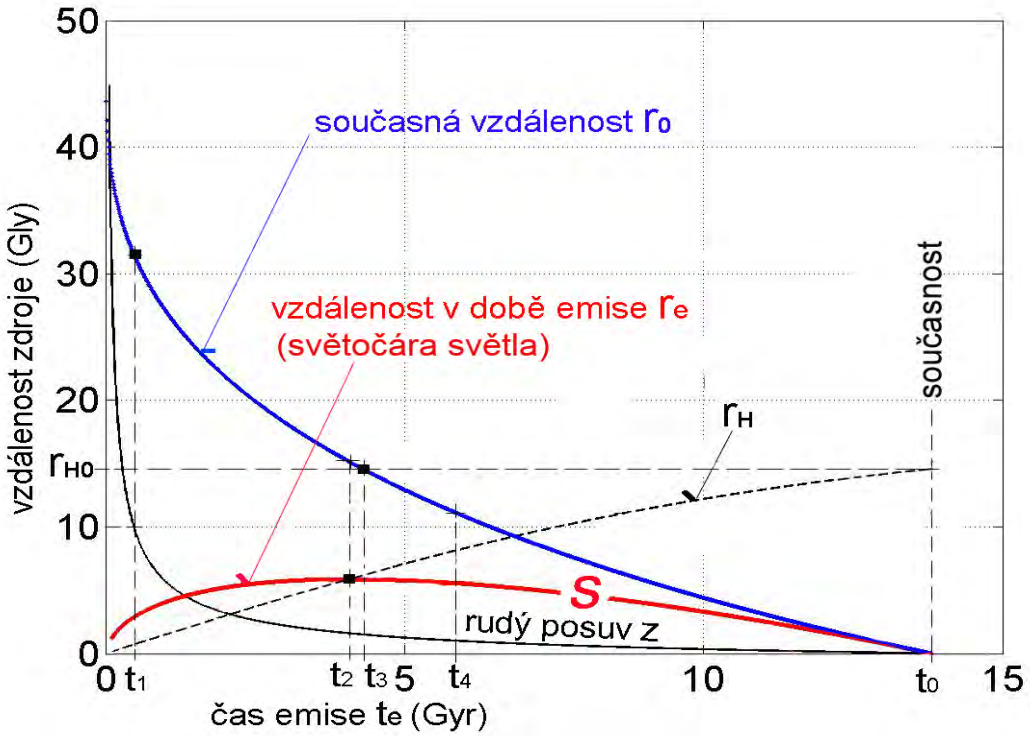
$$r_0 = \int_{t_e}^{t_0} dR = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{4q}$$

Známe-li současnou vzdálenost zdroje, který k nám v čase $t_e$ záblesk světla vyslal, je možno z tehdejší hodnoty expanzní funkce $a_e$ zjistit i tehdejší vzdálenost zdroje od nás

$$r_e = a_e r_0 = a_e c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{4r}$$

Pokud bychom použili zjednodušený vztah (4j), nečinila by integrace (4q,r) potíže. Na **obr.4s1** ale uvádíme výsledek, získaný numerickou integrací přesnějšího vztahu (4m). Opakovaným dosazováním spodní meze $t_e$ od času platnosti modelu $\Lambda CDM$ (asi 100 tisíc let) do současnosti $t_0$ získáme silnou červenou křivku ***S***, udávající vzdálenosti zdrojů $r_e$ v časech emise $t_e$ a silnou modrou čáru, která ukazuje jejich současné vzdálenosti $r_0$. K

časům emise je vynesen i odpovídající rudý posuv $z$ a příslušná Hubbleova vzdálenost $r_H$. Pojem „světočára světla“ bude vysvětlen v následující kapitole.

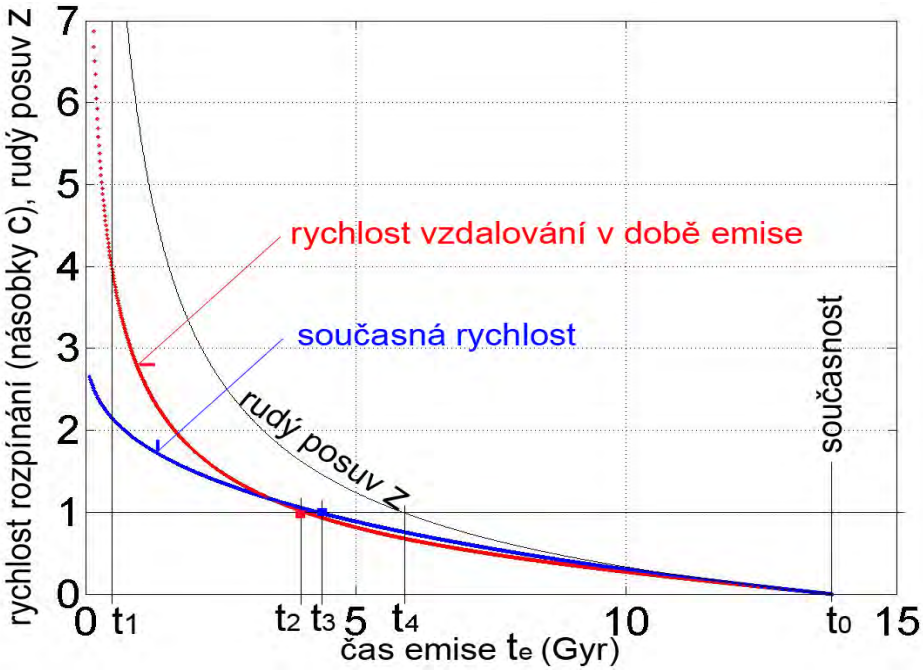



***Obr.4s1*** *Vzdálenosti objektů podle modelu (4m)*

***Poznámky:*** ***1)*** *Pod pojmem „záblesk světla“ si zde představujeme krátký časový interval emise, ovšem krátký v měřítkách doby existence vesmíru. Pro současného pozorovatele se jeví jako trvalý stav.*

***2)*** *Jiný způsob odvození vztahů (4q,r) pomocí pojmu „unášená souřadnice“ je v* ***lit.[32]****. Logika postupu je zde odlišná: nejdříve je určena hodnota $r_e$ a z ní teprve $r_0$.*

***3)*** *Souřadný systém volíme tradičně s vodorovnou osou času $t$ (Gyr) a svislou osou vzdálenosti $ct$ (Gly). Ve speciální teorii relativity je používán tzv.* ***čtyřrozměrný Minkowskiho časoprostor*** *a je tam zvykem osy zaměnit, tj. vzdálenost vynášet vodorovně a čas svisle (viz např.* ***obr.12,13****). V STR nás nesmí zmýlit, že čas na svislé ose je také označen $ct$, neboť je chápán jako čtvrtá souřadnice časoprostoru, tedy formálně zrovnoprávněn s délkou!! Bližší vysvětlení zmíněných obrázků podáme ve výkladu o STR.*




***Obr.4s2*** *Rychlosti objektů podle modelu (4m)*

Ze zjištěných hodnot vzdáleností je možno určit podle Hubbleova vztahu $u = H \cdot r$ také rychlosti vzdalování od nás tehdy a dnes, viz **obr.4s2**. V následující tabulce jsou příklady výpočtů, vycházející z modelu (4m) a z různých hodnot změřeného rudého posuvu podle následující posloupnosti: $z \to a_e \to t_e \to H_e, r_e, r_0 \to u_e, u_0$.

| ***pořadové číslo objektu (galaxie)*** | ***4*** | ***3*** | ***2*** | ***1*** |
|---|---|---|---|---|
| rudý posuv $z$ | $z = 1$ | $z = 1{,}49$ | $z = 1{,}59$ | $z = 10$ |
| expanzní funkce $a_e$ | 0,5 | 0,401 | 0,386 | 0,091 |
| čas emise $t_e$ | $t_4 = 5{,}86 Gyr$ | $t_3 = 4{,}3 Gyr$ | $t_2 = 4{,}07 Gyr$ | $t_1 = 0{,}47 Gyr$ |
| tehdejší Hubbleův parametr $H_e$ | $120{,}2\, kms^{-1}/Mpc$ | $158{,}3\, kms^{-1}/Mpc$ | $166{,}5 kms^{-1}/Mpc$ | $1377\, kms^{-1}/Mpc$ |
| tehdejší Hubbleova vzdálenost $r_{He}$ | $8{,}13 Gly$ | $6{,}18 Gly$ | $5{,}87 Gly$ | $0{,}71 Gly$ |
| tehdejší vzdálenost $r_e$ | $5{,}56 Gly$ | $5{,}86 Gly$ | $5{,}87 Gly$ | $2{,}87 Gly$ |
| tehdejší rychlost $u_e = H_e r_e$ | $0{,}684c$ | $0{,}95c$ | $1c$ | $4c$ |
| dnešní vzdálenost $r_0 = r_e / a_e$ | $11{,}1 Gly$ | $14{,}6 Gly$ | $15{,}2 Gly$ | $31{,}6 Gly$ |
| dnešní rychlost $u_0 = H_0 r_0$ | $0{,}76c$ | $1c$ | $1{,}04c$ | $2{,}17c$ |

Např. u naměřeného rudého posuvu $z = 1$ platí, že jsme zachytili světlo, vyzářené v čase $t_e = t_4 = 5{,}86 Gyr$, kdy byl jeho zdroj (***objekt č.4***) od nás vzdálen $5{,}56 Gly$, tedy hluboko pod tehdejší Hubbleovou vzdáleností;

- rudý posuv $z = 1{,}49$ přísluší ***objektu č.3***. Zachytili jsme světlo, které vyzářil v čase $t_e = t_3 = 4{,}3 Gyr$, kdy byl od nás vzdálen $5{,}86 Gly$. Nyní se nalézá na současné Hubbleově vzdálenosti $r_{H0} = 14{,}6 Gly$ a vzdaluje se právě rychlostí $c$ (jeho nyní vyzařované světlo vůči nám stojí);

- rudému posuvu $z = 1{,}59$ odpovídá doba emise $t_e = t_2 = 4{,}07 Gyr$ a tehdejší vzdálenost zdroje (***objekt č.2***) $5{,}87 Gly$ se shodovala s Hubbleovou vzdáleností $r_{He}$. Rychlost rozpínání prostoru byla rovna rychlosti vyzařovaného světla, které vůči nám tehdy stálo a teprve od této doby se k nám začalo přibližovat. V době našeho dnešního měření je ale galaxie vzdálena již $15{,}2 Gly$ a její právě vyzařované světlo se od nás vzdaluje rychlostí $\approx 0{,}04c$;

- rekordní hodnotě $z = 10$ odpovídá čas emise $t_1 = 470$ milionů let, takže sledujeme stav ***objektu č.1*** před 13,3 miliardami let. Dnes je od nás vzdálen již 31,6 miliard světelných let a vzdaluje se rychlostí $2{,}17c$.

- nakonec uvedeme hodnoty, vypočtené z modelu $\Lambda CDM$ pro **zdroj reliktního záření**. Již dříve bylo řečeno, že po zániku plazmatu a oddělení záření od hmoty byla jeho teplota $T \approx 3000K$. Dnes zjištěná teplota je $2{,}73K$ (1100-krát menší) a dnešní vlnová délka na maximu intenzity je 1100-krát větší ($\lambda \approx 1mm$, viz **obr.4i**). Prostor se tedy od vzniku záření rozepnul 1100-krát ($a_e = 1/1100$, rudý posuv $z \approx 1100$ a v **obr.4s1,2** je to těsně v okolí počátku). Výpočtem z (4m) vychází čas asi 470 000 let po Velkém třesku. V té době jsme byli od zanikajícího plazmatu vzdáleni 41 milionů světelných let a rychlost vzdalování byla $58c$!! V současné době jsme od jeho pozůstatků (což jsou pravděpodobně galaxie a kvasary) vzdáleni 46 miliard světelných let a rychlost vzdalování je $3{,}1c$.

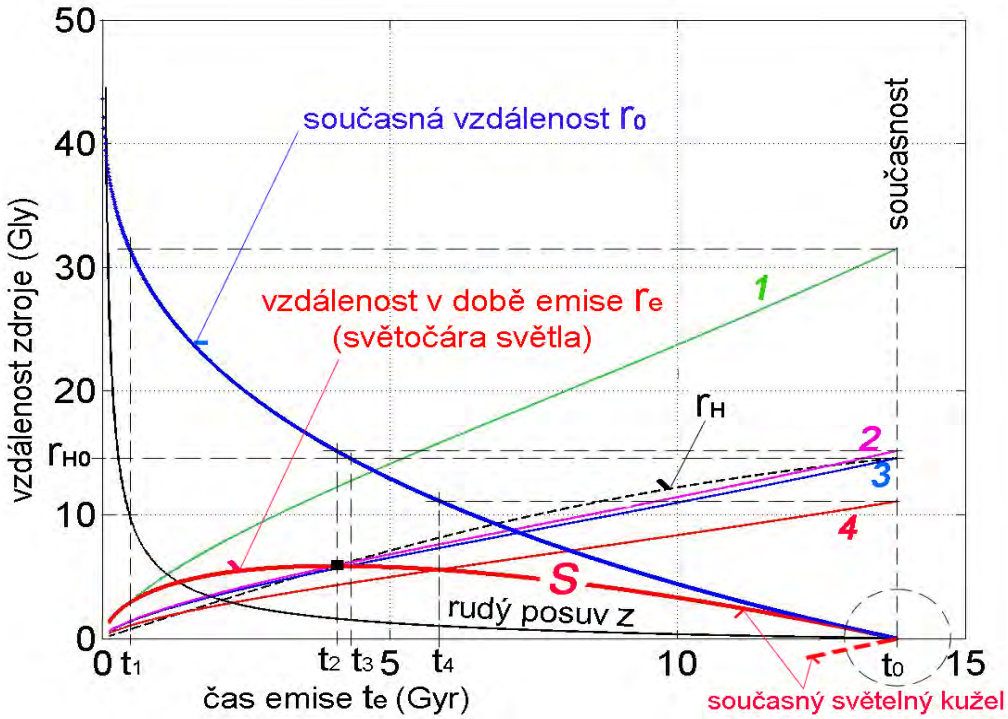
***Poznámka:*** *Doba vzniku reliktního záření je dnes různými experimenty spolehlivě ověřena na 380 000 let, takže náš model zde počítá s poměrně velkou chybou +24%. Upozornili jsme ale už dříve, že v raných fázích vývoje vesmíru lze jeho větší chybu očekávat.*

## 3.2.4 Světočára světla (světelný kužel)

Pro úplné objasnění **obr.4s1** ještě vysvětlíme pojem **„světočára“**. Obecně tak nazýváme množinu tzv. **světobodů**, zobrazujících „pohyb“ určitého objektu ve čtyřrozměrném časoprostoru (přesněji řečeno sled událostí, kterými objekt prošel - viz podrobněji v **kap. „Minkowskiho čtyřrozměrný časoprostor“**). V tomto výkladu budeme pod pojmem světočára zjednodušeně chápat **časový průběh vzdálenosti objektu (galaxie) od nás** v rozpínajícím se prostoru. Na příkladech v horní tabulce jsme ukázali, jak lze z hodnoty rudého posuvu přijatého světla určit čas jeho emise a tehdejší i dnešní vzdálenost zdroje. Na světočáře zdroje tedy známe dva body se souřadnicemi $t_e, r_e$ a $t_0, r_0$ a její celý průběh vznikne vynásobením expanzní funkce $a(t)$ z **obr.4p** současnou vzdáleností $r_0$. Takto vypočítané světočáry galaxií ***1,2,3,4*** z horní tabulky je možno doplnit do **obr.4s1**, který pro větší přehlednost uvádíme znovu jako **obr.4s2a**. V něm jsou světočáry zobrazeny slabými čarami v pořadí barev zelená – fialová – modrá – červená.

Silná červená křivka ***S*** (průběh $r_e$ podle (4r)) je množinou bodů, zachycujících stavy (vzdálenosti) světla - fotonů, vyzářených v různých časech nejrůznějšími zdroji, které máme dnes možnost pozorovat. Udává, jak daleko od nás se v určitém čase nacházelo světlo s původní vlnovou délkou $\lambda_e$, neovlivněnou rozpínáním

prostoru. Je to tzv. **současná světočára světla** a její průsečík se světočárou vyzařujícího zdroje nastává v čase vyzáření $t_e$. Z úseku křivky ***S*** od tohoto času do současného času $t_0$ vyčteme průběh vzdálenosti vyzářeného světla při jeho letu směrem k nám. Křivka ***S*** dosahuje svého maxima $5{,}87Gly$ v čase $t_2 = 4{,}07Gyr$, což je právě v průsečíku s křivkou Hubbleovy vzdálenosti $r_H(t)$. To znamená, že např. světlo emitované galaxií ***1*** v čase $t_1$ se od nás nejprve vzdalovalo a teprve od času $t_2$ se k nám počalo přibližovat, aby nás v současnosti dostihlo. Oproti tomu světlo galaxie ***4*** se k nám od okamžiku vyzáření $t_4$ již jen přibližovalo.




***Obr.4s2a*** *Světočáry galaxií* ***1,2,3,4*** *z předchozí tabulky*

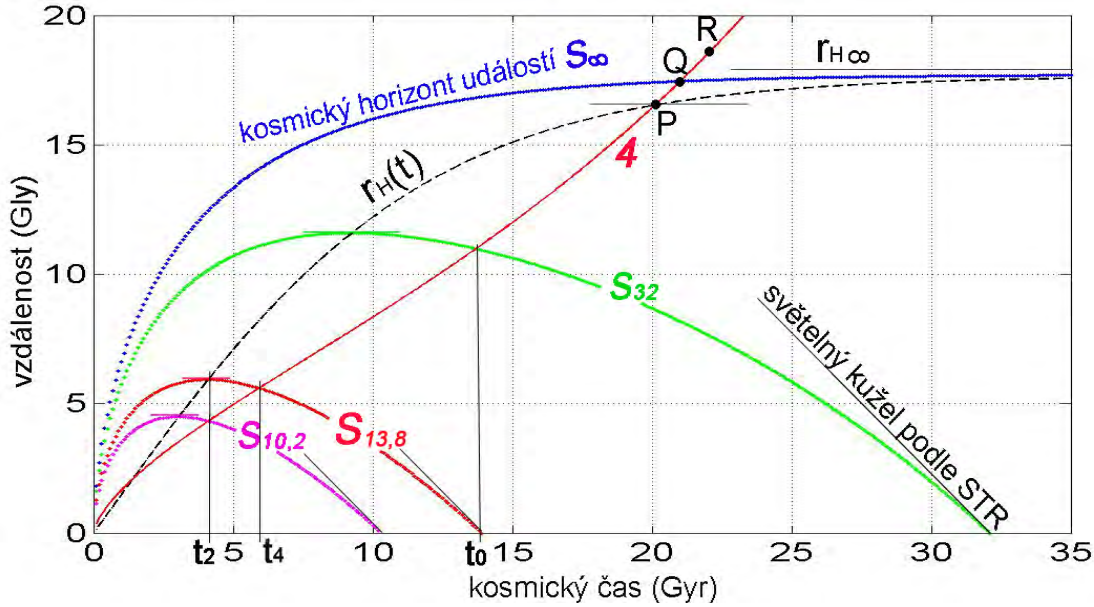
Nabízí se otázka „jak je to se světlem, které vyzářil nějaký zdroj před časem průsečíku jeho světočáry s naší světočárou světla (např. zdroj ***4*** v čase $t_2$)? Z předchozího výkladu je zřejmé, že toto světlo jsme dnes již propásli a v Minkowskiho terminologii to lze vyjádřit slovy „události jeho emise i možného zachycení se odehrály v absolutní minulosti“. Příslušné světobody událostí leží pod křivkou ***S***, nebo též uvnitř „našeho světelného kužele“. **Naším světelným kuželem** nazýváme plochu, vzniklou rotací světočáry světla ***S*** v **obr.4s1,2a** okolo vodorovné osy času (křivka ***S*** je jeho tzv. meridiánem). Vrchol kužele leží v našem kosmickém čase $t_0$ a zobrazuje současnost.

***Poznámky:*** ***1)*** *I když se jedná o plochu ve tvaru kapky, používáme termín „světelný kužel“, který je převzat ze speciální teorie relativity, kde se jedná o skutečný kužel s vrcholovým úhlem* $90^0$*, viz oblast* **II** *v* ***obr.13*** *(tam jsou pouze zaměněny směry souřadných os: vzdálenost vodorovně a čas svisle, ovšem jakožto násobek* $ct$*, neboť v STR je čas chápán jako čtvrtá souřadnice časoprostoru). Náš světelný kužel (kapka), naznačený v* ***obr.4s2a*** *čárkovaně, má při zachování stejných měřítek v obou osách také vrcholový úhel* $90^0$ *a v okolí času* $t_0$ *se shoduje s kuželem Minkowskiho, který platí v STR. Změna z opravdového kužele na tvar kapky, mající „dno“ v počátku, je způsobena rozpínáním prostoru, které u blízkých galaxií s velmi malým rudým posuvem nemá hlavní vliv. Pozorujeme jejich pohyby, které se udály v nedávné minulosti (blízko vrcholu kužele) a můžeme je tedy posuzovat podle pravidel STR.*

***2)*** *Oba názvy „světočára světla“ a „světelný kužel“ se často v literatuře zaměňují, protože vystihují tentýž fyzikální princip. Při srovnání s* ***obr.12,13*** *by byl správnější název „****minulý světelný kužel****“. Současný pozorovatel má tedy možnost vidět jen události, ležící na povrchu našeho minulého světelného kužele.*

Každému času $t_n$ při vývoji vesmíru přísluší určitá světočára světla $\boldsymbol{S_n}$, která je meridiánem světelného kužele s vrcholem v čase $t_n$. Její rovnici získáme ze vztahu (4r) záměnou horní meze integrace $t_0$ za $t_n$. Maximum $\boldsymbol{S_n}$ (největší průměr světelného kužele) nastává vždy v průsečíku s křivkou Hubbleovy vzdálenosti $r_H(t)$. S klesajícím časem $t_n$ světelný kužel „splaskává“ a jeho vrchol se přesouvá vlevo. K zodpovězení výše položené otázky je tedy třeba najít takový světelný kužel, který je protnut světočárou zdroje ***4*** právě v čase $t_2$. Vrchol kužele nám určí kosmický čas, ve kterém naši předkové mohli zmíněné světlo zdroje ***4*** pozorovat.

Podrobnějším výpočtem pomocí (4r) bychom zjistili, že tato situace nastala v čase $t_n = 10{,}2Gyr$. Příslušný světelný kužel $S_{10,2}$ je naznačen fialově v **obr.4s3**.




***Obr.4s3*** *Světočáry světla (světelné kužele) v různých kosmických časech (kužel* $S_{70}$ *, jdoucí bodem* **P***, není zakreslen)*

## 3.2.5 Kosmický horizont událostí

Dále popustíme uzdu fantazii a rozšíříme platnost modelu $\Lambda CDM$ do vzdálené budoucnosti. Pokusíme se např. předpovědět čas, ve kterém půjde pozorovat světlo, vyzářené zdrojem ***4*** právě dnes. Světelný kužel našich potomků se bude muset „nafouknout“ a prodloužit tak, aby jej světočára ***4*** protnula v čase $t_0$. Opět se dá spočítat, že možnost pozorování (vrchol kužele) nastane asi při $t_n \approx 32Gyr$ (zelená čára $S_{32}$ v **obr.4s3**).

S dalším zvyšováním horní meze integrace $t_n$ v (4r) se světelný kužel (kapka) v **obr.4s3** protahuje do tvaru válce a jeho poloměr se pro $t_n \to \infty$ asymptoticky blíží k maximální Hubbleově vzdálenosti

$$r_{H\infty} = c/H_\infty = \sqrt{3/\Lambda} = 17{,}7Gly$$

V **obr.4s3** je příslušná světočára světla $S_\infty$ zobrazena modře a v kosmologii nese název **„kosmický horizont událostí“** (pozor: nezaměňovat s „horizontem událostí“ u černých děr!!). Rovina, znázorňující časoprostor, je jím rozdělena do dvou oblastí:

**Oblast 1)** Pod křivkou $S_\infty$ lze ještě sestrojit byť sebedelší, ale vpravo zašpičatělý světelný kužel (opět s vrcholovým úhlem $90^0$) a bude tedy existovat průsečík s křivkou $r_H(t)$, v němž dosáhne průměr kužele svého maxima a dále již bude jen klesat. Jinými slovy existuje čas, od kterého se k „nám“ (budoucím generacím) světlo vzdálených objektů začne přibližovat:

- například bodem **P** je možno proložit světelný kužel, jehož vrchol leží daleko vpravo mimo nákresnu v čase asi $70Gyr$. To znamená, že světlo, vyzářené zdrojem ***4*** v čase $20Gyr$, v této době bude vůči nám stát ve vzdálenosti asi $16{,}5Gly$ a následně se začne přibližovat, až nás posléze dostihne v čase $70Gyr$;
- světlo vyzářené tímtéž zdrojem v čase asi $21Gyr$ (bod **Q**) se od nás ještě nepatrně vzdálí, zastaví na vzdálenosti $r_{H\infty} = 17{,}7Gly$ a k nám již nedosáhne.

**Oblast 2)** Světlo, vyzářené ještě později (za časem průsečíku světočáry zdroje s kosmickým horizontem událostí – např. v bodě **R**) rovněž nebude možno nikdy zachytit. Ani jedním z bodů, ležících nad křivkou $S_\infty$, nelze proložit světelný kužel a nastávají tam události, které nikdy nezaregistrujeme.

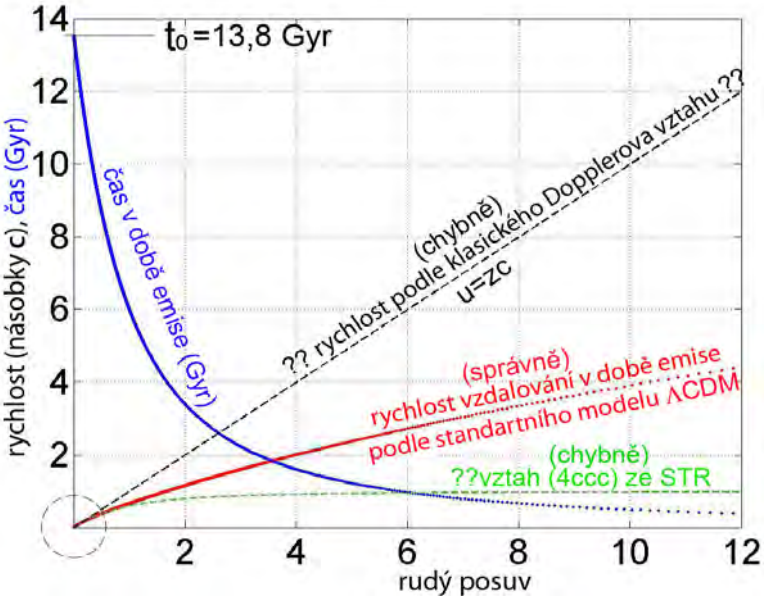
Stále platí, že v místě průsečíků křivky $r_H(t)$ se světelnými kuželi je jejich průměr největší (v **obr.4s3** jsou tato místa naznačena vodorovnými tečnami).

## 3.2.6 Závěrečné poznámky k rozpínání vesmíru podle modelu ΛCDM

**1)** Lepší přehled o závislosti času $t_e$ a rychlosti vzdalování objektu v době emise na rudém posuvu poskytuje **obr.4s4**. Černá čárkovaná čára platí pro rychlost určenou z klasického Dopplerova vztahu (16eee), jak mylně uvažoval Hubble a jeho současníci. Zelená čára zobrazuje výpočet rychlosti podle nevhodně použitého relativistického vztahu (4ccc). Správné průběhy jsou vyznačeny červeně (rychlost v násobcích $c$) a modře (stáří od Velkého třesku). Hubbleův omyl byl zcela logický, neboť pozoroval blízké galaxie s rudými posuvy o velikosti $10^{-2}$ až $10^{-3}$, tedy okolo počátku, kde se grafy rychlostí v obrázku téměř ztotožňují.

**2)** Pohyb světla v rozpínajícím se prostoru při současném poklesu Hubbleova parametru v čase je možno přirovnat k pohybu lodi (světla) proti proudu řeky (prostoru). Odvoláváme se přitom na **obr.4s1,2** a v tabulce zvolíme např. galaxii **č.1**, neboli počátek děje položíme do kosmického času $t_1$:

- loď je od našeho pobřežního stanoviště vzdálena $2{,}87Gly$ po proudu, pluje proti proudu směrem k nám rychlostí světla (měřeno vůči vodě) a vedle ní je vodou volně unášený list (galaxie). Proud vody a list mají v počátečním čase $t_1$ vysoce nadsvětelnou rychlost $4c$, takže loď se od nás vzdaluje rychlostí $3c$. Rozpínání prostoru si můžeme představit tak (podle rovnice kontinuity z hydromechaniky), že řečiště se stále zužuje, takže proud s rostoucí vzdáleností od nás zrychluje. S postupem času ale po celé své délce naopak zpomaluje, což je analogie s časovým poklesem Hubbleova parametru. Loď se od nás vzdaluje do okamžiku $t_2$, kdy rychlost proudu okolo lodi poklesne na úroveň její rychlosti $c$, loď vůči nám stojí a je od nás vzdálena na tehdejší Hubbleovu vzdálenost $5{,}87Gly$. Následně se k nám začne přibližovat a k našemu stanovišti konečně dorazí v čase $t_0$. List je mezitím už $31{,}6Gly$ daleko a pohybuje se rychlostí $2{,}17c$.




***Obr.4s4*** *Čas emise a rychlosti objektů podle modelu (4m)*

**3)** Několikrát jsme zdůraznili, že model $\Lambda CDM$ platí až od doby 100 tisíc let po Velkém třesku a i v pozdějším stadiu (hlavně v raných etapách vývoje vesmíru) není zcela přesný, i když konstanty $\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda 0}$ jsou z měření sondou Planck stanoveny až na tři desetinná místa. S pomocí výše uvedených výpočtů můžeme odhadovat maximální poloměr námi "pozorovatelného" vesmíru asi 46 miliard světelných let (pozorovatelného ale v podobě, jak vypadal v čase vzniku reliktního záření, kdy byl 1100-krát menší). Úvahy, co bychom mohli vidět za touto hranicí, mohou být sice zajímavé a vzrušující, bohužel však nejsou podloženy žádnou seriózní a experimentálně potvrzenou vědeckou teorií. Z tohoto hlediska je třeba posuzovat i výklad v **kap.3.2.5**.

**4)** Model $\Lambda CDM$ bývá též nazýván „modelem všeobecného souhlasu“ (angl. *concordance model*), ale přesto mu oponují některé odlišné (i když menšinové) názory, podle nichž se např. gravitace na tak velkých vzdálenostech může chovat jinak, než jak ji známe. Jiné zpochybňují konstantní rychlost plynutí času a zrychlené rozpínání vesmíru vysvětlují zpomalováním času („jestliže čas vznikl při Velkém třesku, může i zanikat“). Plynutí času ještě zmíníme v poznámce **7**.

**5)** Předpokládejme (ale nesprávně!!), že rychlost rozpínání vesmíru od okamžiku Velkého třesku byla stále stejná jako dnes, jak je nakresleno v **obr.4f**. Platil by vztah $H(t) = 1/t$, časový průběh expanzní funkce by byl lineární a čas rozpínání až do dneška $T_H = 1/H_0$. Tento fiktivní čas je někdy nazýván jako Hubbleův a v měrových jednotkách $[Gyr],[Gly]$ je jeho číselná hodnota shodná s Hubbleovou vzdáleností $r_{H0} = c/H_0$. Při použití staršího údaje sondy **WMAP**, tj. $H_{0WMAP} = 71 kms^{-1}/Mpc$, bychom dokonce dospěli k úplné shodě Hubbleova času se stářím vesmíru $t_0 = 13{,}8$ miliard let. V **obr.4p** by tečna v bodě **B** procházela počátkem. Jak ale zjistíme konstrukcí různých tečen, shoda obou časů je náhodná, v minulosti nikdy nenastala a ani v budoucnu nenastane. Při použití aktuálních údajů sondy **PLANCK** ($H_0 = 67\, kms^{-1}/Mpc$) vycházejí hodnoty $T_H, r_{H0}$=14,6 miliard (světelných) let. Hubbleův čas proto nelze ztotožňovat se stářím vesmíru.

**6)** V astronomické literatuře jsou často slučovány číselné údaje časů a vzdáleností. Např. u galaxie **č.1** s rudým posuvem $z = 10$ (čas emise 470 milionů let, tedy před 13,3 miliardami let – viz předchozí tabulka) bývá někdy uváděno, že „jsme dohlédli do vzdálenosti 13,3 miliard světelných let “. Podle modelu $\Lambda CDM$ ale sledujeme objekt ve stavu, kdy byl od nás vzdálen 2,87 miliard světelných let a nyní je vzdálen 31,6 miliard světelných let.

**7)** Doposud jsme stále pracovali s tzv. **kosmickým časem**, tedy časem, který odvozujeme z periodických dějů v naší Sluneční soustavě. Při rozpínání vesmíru se ale nic neopakuje ani není periodické, takže je někdy výhodnější upravit i stupnici času, stejně jako jsme zavedli unášené souřadnice pro vzdálenosti v **obr.4k**. Zavádí se tzv. **konformní čas** $\tau$, pro jehož přírůstek platí $d\tau = dt/a(t)$. Jeho použití je výhodné hlavně při zobrazování

dějů brzy po Velkém třesku, kdy je hodnota expanzní funkce $a$ malá, takže stupnice času se více roztáhne jako u časové lupy. Konformní čas je tedy veličinou, přizpůsobenou dění ve vesmíru a nikoliv dění ve Sluneční soustavě.

**8)** Jak se s rozpínáním prostoru prodlužuje vlnová délka záření, tak klesá i jeho energie. Rovněž hmotné částice při svém letu prostorem ztrácejí s jeho rozpínáním rychlost vůči svému okolí a tím i kinetickou energii. Zatím není vyjasněno, kam se tato energie ztrácí. Ze vztahů (4jj) jsme ale na druhé straně zjistili, že hustota energie $\rho_\Lambda$ je konstantní, takže s růstem objemu při rozpínání prostoru temné energie přibývá. Oba tyto protichůdné jevy se zatím nepodařilo teoreticky propojit, takže v současném stadiu znalostí **nelze zákon zachování energie zobecnit na celý vesmír**. Je dokázán jen experimentálně v našem nejbližším okolí a s omezenou přesností, danou aktuální technickou úrovní měřicích přístrojů. Problém temné energie bude diskutován v další kapitole.

***Poznámka:*** *Původní formulace ZZE jednoho z objevitelů (J.P.* ***Joule*** *v r. 1843) je pro dnešního studenta poněkud nesrozumitelná:* ***"Veliké prasíly přírody podle vůle Stvořitele jsou nezmařitelné"****.*

## 3.3 Je model ΛCDM ten správný?

*John* ***Wheeler****: "Jediný zákon je, že neplatí žádný zákon".*
*Jára* ***Cimrman****: "Víme že nic nevíme, ale zato to víme přesně".*

I když je model ΛCDM většinově přijímán jako nejvěrohodnější, existují vůči němu některé výhrady:

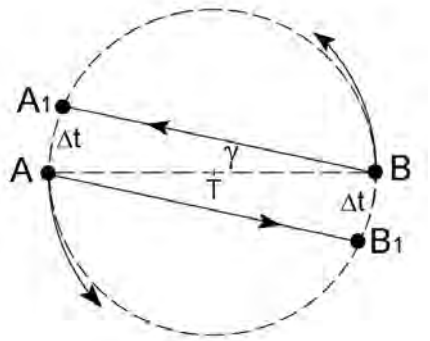
- velká převaha temné hmoty nad baryonovou byla částečně zpochybněna již na konci **kap.3.1.2** v diskuzi k **obr.4jj** (s rostoucími technickými možnostmi astronomie roste i množství objevených hvězd);
- není jasné, můžeme-li platnost Hubbleova zákona (4d) extrapolovat na neomezeně velké vzdálenosti. Měření aktuální velikosti Hubbleovy konstanty $H_0$ v našem blízkém okolí je ztíženo gravitačními vlivy blízkých galaxií, při pozorování vzdálenějších objektů se zase nedíváme do současnosti;
- existují námitky, že obecná teorie relativity a tedy i Einstein-Fridman-Lemaitrova rovnice (4g) nemusí platit v celém vesmíru. Odpůrcům modelu ΛCDM připadá nelineární diferenciální rovnice 1.řádu až podezřele jednoduchá;
- model předpokládá nulovou křivost vesmíru, která ale vychází z měření, jejichž přesnost je omezená. Potom by byla podle (4d) teoreticky možná nekonečná rychlost vzdalování nejvzdálenějších objektů;
- o univerzální platnosti nějaké definitivně přesné gravitační konstanty $\kappa$ v celém vesmíru jsme vyslovili pochybnosti již v **kap.1.11**;
- největším problémem je **nevyjasněný původ temné energie**, charakterizované v rovnicích OTR uměle zavedenou kosmologickou konstantou $\Lambda$ bez bližšího fyzikálního zdůvodnění.

V **kap.1.11** jsme určili, jak roste energie Měsíce s jeho vzdalováním od Země, které činí prokazatelně 38mm za rok. S použitím Newtonovy mechaniky a zákonů o zachování energie a momentu hybnosti lze tuto míru naplnit jen částečně. Podobná situace nastává i u dvojic Slunce – Země, Slunce – Mars a dalších. Chybějící hodnota při vzdalování je připisována efektu rozpínání prostoru vlivem zmíněné temné energie, která má podle modelu ΛCDM v celém vesmíru narůstat. Zde můžeme pozorovat analogii s termodynamikou, podle které je k expanzi plynu potřeba dodat energii a **ke zrychlené expanzi je nutná rostoucí dodávka energie**.

### 3.3.1 Gravitační aberace

V následující úvaze ukážeme, že vzdalování těles a **přibývání energie je možno vysvětlit také pomocí gravitační aberace**, zmíněné rovněž v **kap.1.11**. Jde vlastně o aplikaci Newtonovy gravitace, doplněné efektem konečné rychlosti jejího šíření. Úvaha je převzata z **lit.[30a]** a poprvé ji zmínil již A. Eddington v r. 1966:

- předpokládejme nejprve jednoduchý případ, kdy rychlost šíření gravitační interakce $c_G$ je nekonečná a dvě stejně hmotná tělesa **A**,**B** obíhají symetricky po čárkovaně vyznačené kružnici v **obr.4s5** okolo společného těžiště **T** (středu kružnice). Přitažlivé síly mezi oběma tělesy leží na jedné přímce procházející těžištěm a nevyvíjejí žádný moment. Energie i moment hybnosti soustavy jsou konstantní;
- rychlost $c_G$ je ale zřejmě konečná a gravitační interakce potřebuje k překonání vzdálenosti mezi tělesy určitý čas $\Delta t$. Těleso **B** je tedy přitahováno tělesem **A** směrem k bodu $\mathbf{A_1}$, ve kterém se těleso **A** nalézalo před časem $\Delta t$. Stejně tak je těleso **A** přitahováno tělesem **B** k jeho předchozí poloze $\mathbf{B_1}$. Vzniká tak dvojice sil na nenulovém rameni, která zvyšuje moment hybnosti i celkovou energii, takže obě tělesa se budou od sebe vzdalovat po rozvíjejících se spirálách. Rameno silové dvojice závisí na úhlu gravitační aberace $\gamma$ (pro $c_G \to \infty$ je $\gamma \to 0$ a vrátili bychom se k původnímu newtonovskému modelu).




***Obr.4s5*** *Gravitační aberace*
*(úhel $\gamma$ je ve skutečnosti velmi malý)*

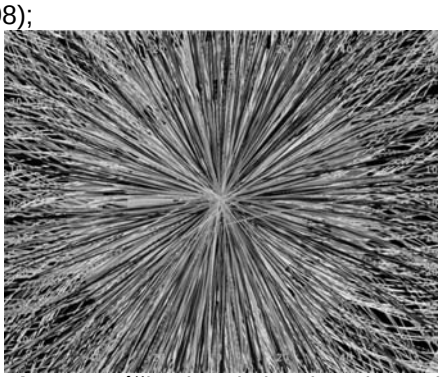
Popsaný mechanismus vzdalování je možno zobecnit i na více těles s různými hmotnostmi. Mohl by přispět k vysvětlení expanze vesmíru, ale jen formou vzdalování těles (nikoliv rozpínání prostoru samotného) a hlavně k rozluštění otázky, kde se bere energie. Vyvolává však opět některé nejasnosti:
- podle Thaletovy věty je trojúhelník **AA$_1$B** pravoúhlý a odvěsna **A$_1$B** je kratší než vzdálenost obou těles **AB**. Přitažlivé síly oproti Newtonovu vztahu (2a) vlivem gravitační aberace vzrostly v poměru $1/\cos\gamma$, čímž je podporována tendence k přibližování. Výpočty na matematických modelech pro $c_G = c$ (jak předpovídá obecná teorie relativity) zase vedou na příliš rychlé vzdalování a jsou v rozporu s astronomickými měřeními pohybů nebeských těles.

Je tedy vidět, že okolo podstaty gravitace a rychlosti jejího šíření panuje řada nejasností, které se možná objasní pomocí některých náročných projektů, chystaných k „odchycení“ gravitačních vln.

## 3.4 Vesmírné projekty

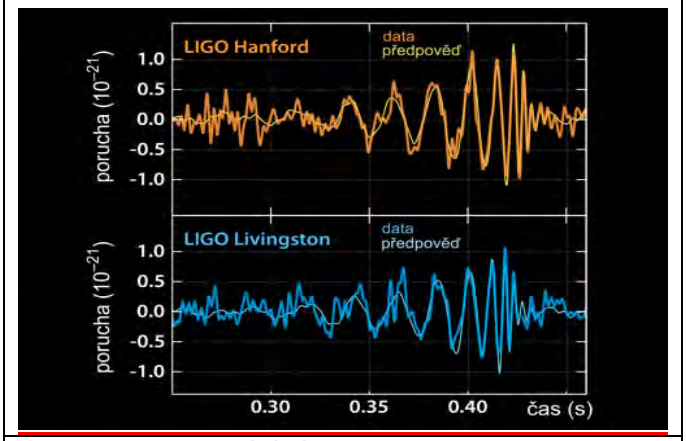
V posledních několika desetiletích došlo k nesmírnému pokroku v astrofyzice a k převratným změnám v nazírání na vývoj vesmíru. Tempo rozvoje experimentální fyziky a průzkumu vesmíru nejmodernějšími přístroji, sondami a družicemi je dnes díky obrovskému vědeckému úsilí a investicím tak rychlé, že doslova každým dnem přináší nová překvapení.

Za nejvýznamnější milníky poslední doby v astrofyzice je možno pokládat tyto (podle **[33]**):
- Hubbleův (Lemaitreův) objev vzdalování galaxií (1929), který otevřel cestu k poznání expanze vesmíru;
- objev reliktního záření (1964), kterým byla podpořena hypotéza Velkého třesku, vyslovená v r.1948;
- objev nehomogenity reliktního záření (sonda COBE 1992), který definitivně potvrdil hypotézu Velkého třesku a podal informaci o vzniku prvních hvězd (asi 400 milionů let po něm);
- objev zrychleného rozpínání vesmíru pozorováním supernov typu 1a (1998);
- vytvoření a krátkodobé udržení kvark-gluonového plazmatu (CERN 2000), které napodobuje poměry těsně po Velkém třesku. Vystřelením urychleného jádra olova do terče vznikla teplota $10^5$ krát větší než uvnitř Slunce a hustota jádra stoupla dvacetkrát, až došlo k „rozbití“ protonů a neutronů (jeden z pokusů je zachycen na **obr.4s6**);
- zveřejnění výsledků sondy WMAP dne 11.2.2003, dokazující mj. existenci temné hmoty a temné energie;
- aktuální výsledky měření sondou PLANCK z r. 2013, které potvrzují výše uvedené hypotézy a zpřesňují je.


***Obr.4s6*** *Srážka dvou jader olova (CERN)*

Jedním z posledních a nejpádnějších důkazů ve prospěch obecné teorie relativity a teorie Velkého třesku by se mohl stát nedávno ohlášený objev Einsteinem předpovězených gravitačních vln, což je podle jeho OTR přechodné zvlnění časoprostoru, způsobené velkými a náhlými změnami v uspořádání hmoty, šířící se rychlostí světla. V rámci projektu **Bicep2** se na **Amundsen - Scottově polární stanici**, vybudované na Jižním pólu, uskutečnilo v březnu 2014 zatím jediné měření s pozitivním výsledkem a je nutno si počkat na jeho nezávislé potvrzení. Zde probíhají mj. i pokusy se zachycením neutrin pomocí senzorů, umístěných v 70 ledových šachtách, hlubokých 2,4km.

***Aktuální poznámka:*** *Dne 14.9.2015 v 9:51 hod. došlo k nezávislému zachycení gravitačních vln na dvou obřích detektorech LIGO v Hanfordu a v 3000km vzdáleném Livingstonu (USA). Po mnohonásobném ověřování dat byl objev zveřejněn až v únoru 2016. Jev byl vyvolán splynutím dvou černých děr o hmotnostech 29$M_S$ a 36$M_S$ ve vzdálenosti 1,3 miliardy světelných let od Země. Bylo změřeno „zachvění“ časoprostoru s max. výchylkou $10^{-21}$m a vynikající shoda obou měření (včetně odpovídajícího časového posunu mezi nimi) ukazuje, že existence vln, předpovězených před 100 lety, je již nezpochybnitelná.*

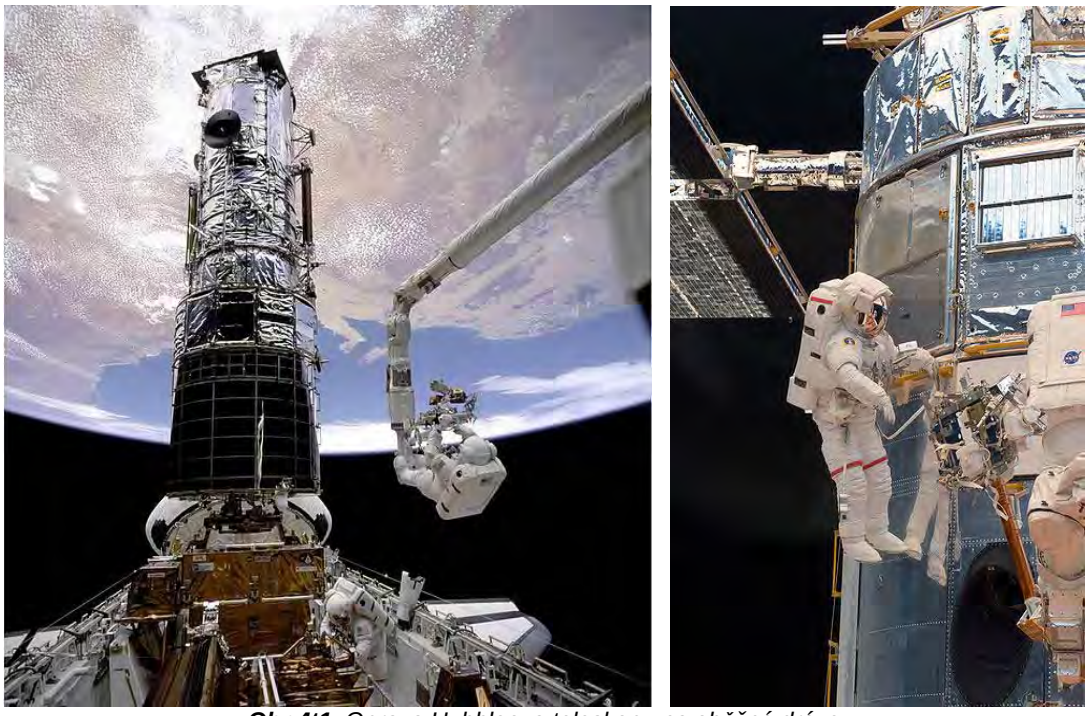


***Obr.4s7*** *Srovnání výsledků Hanford – Livingston mezi sebou i s teoretickým výpočtem*

Velkým pomocníkem soudobé astronomie je mj. porovnávání snímků vzdálených objektů, pořízených v infračervené, viditelné i roentgenové oblasti spektra stále dokonalejšími teleskopy. Nesrovnalosti s gravitační teorií, které iniciovaly vznik hypotézy existence temné hmoty a temné energie, byly ale zjištěny již v první polovině minulého století poměrně jednoduchými prostředky. V dnešní době se zkoumá zejména reliktní záření, ze kterého lze rozpoznat první okamžiky vesmíru a následný průběh jeho rozpínání.

Dosud nejlepší mimozemský nástroj k pozorování vesmíru - Hubbleův teleskop (**obr.4t1,4u**) - byl vynesen na oběžnou dráhu raketoplánem Discovery v r. 1990. Váží 11 tun a obíhá Zemi v proměnné výšce $500 \div 600$ km. Průměr zrcadla je $2{,}4m$, ohnisková vzdálenost $57{,}6m$. Po zjištění tvarové chyby zrcadla (je „mělčí“ o $2{,}3\mu m$)

mu bylo v r. 1993 na oběžné dráze přidáno kompenzační zařízení (jakési "elektronické brýle") a kvalita snímků se výrazně zlepšila (**obr.4t2**). V současné době po několika opravných misích již dosluhuje a jeho plánovanou náhradou bude **Webbův dalekohled** (**obr.1m**), jehož vypuštění má po několika odkladech nastat v r. 2018.



***Obr.4t1*** *Oprava Hubbleova teleskopu na oběžné dráze*

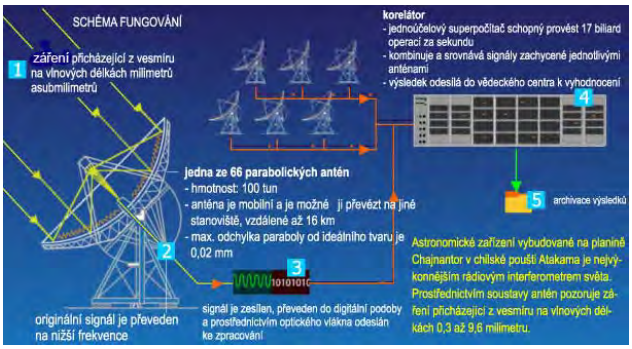
***Obr.4t2*** *Expozice před a po korekci vady zrcadla*

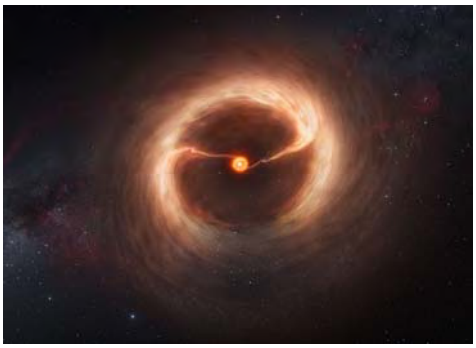
***Obr.4u*** *Broušení hlavního zrcadla Hubbleova teleskopu (systém Ritchey-Chrétien)*

Nejvýkonnějším pozemským pomocníkem astronomie při zkoumání reliktního záření se nedávno stala nově otevřená mezinárodní observatoř **ALMA** (**A**tacama **L**arge **M**illimeter **A**rray) na náhorní plošině Chajnantor v poušti Atacama (Chile) - viz **obr.4v**. Hovoří se o podobném kvalitativním přelomu, jakým byl vynález dalekohledu. Některé technické údaje:

- nadmořská výška 5050 m n.m., minimální vliv řídké atmosféry, vlhkost 2%, v noci jsou patrné stíny od světla, vrhaného Mléčnou dráhou;
- 54 radioteleskopů s hmotností 100 tun a průměrem 12m (z toho 4 mobilní), 12 mobilních s průměrem 7m;
- max. vzdálenost konfigurace teleskopů 16km (ekvivalentní průměr jediného náhradního teleskopu 14km);
- doprava a polohování teleskopů z podpůrné základny (2900m n.m.) na vzdálenost 28km pomocí speciálního samohybného podvozku, přesnost polohování 3mm;
- rozsah vlnových délek $\lambda = 0{,}3 \div 9{,}6mm$ pokrývá oblast reliktního záření - srovnej s **obr.4i**;

- maximální tvarová chyba parabol $20\mu m$;
- přenos dat do 15km vzdáleného centra skleněnými vlákny, přesnost synchronizace $10^{-12}\,s$ (bez dodatečné kompenzace by tedy délka vláken musela být v toleranci $1\cdot 10^{-12}\cdot 300\cdot 10^{9} = 0{,}3mm$ !!);
- skládání dat jednotlivých teleskopů superpočítačem ($17\cdot 10^{15}$ operací za vteřinu);
- je předpokládána desetkrát vyšší rozlišovací schopnost oproti Hubbleovu teleskopu.

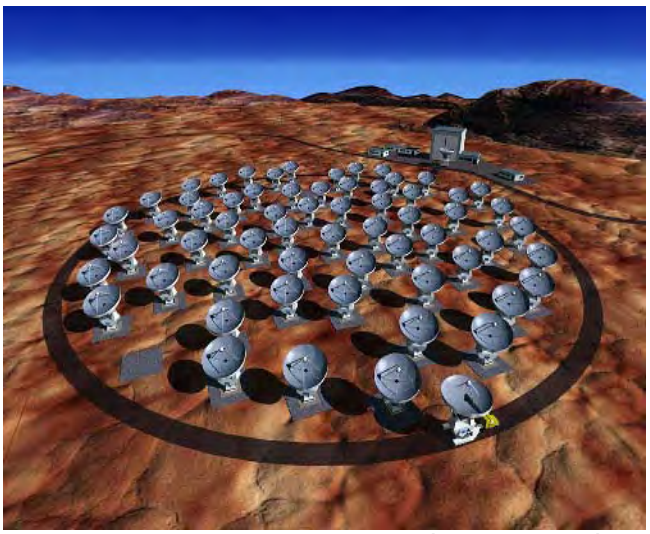


***Obr.4v*** *Observatoř* ***ALMA*** *(poušť Atacama v Chile, otevřena 13.3.2013), vpravo dole jeden z jejích prvních snímků (zrod vzdálené hvězdy)*

Observatoř **ALMA** mj. potvrdila domněnku, že v mlhovině Boomerang (na **obr.4w** vpravo) se nalézá nejchladnější doposud poznané místo ve vesmíru ($1K$, tedy téměř dva stupně pod teplotou reliktního záření). Mlhovina leží v souhvězdí Kentaura 5000 světelných let od nás.

Dílčí technické podrobnosti o dalších současných i projektovaných velkých pozemských teleskopech uvedeme v **Dodatku**.



***Obr.4w*** *Vlevo observatoř* ***ALMA*** *v plné koncentrované sestavě (animace), vpravo mlhovina Boomerang (PGC 3074547)*

## 3.5 Jak je to se "Stvořitelem"?

**Po teoretické stránce je stále nejdokonalejším nástrojem k popisu vesmíru mnohokrát ověřená obecná teorie relativity (která bude mít brzy své sté narozeniny!!) a nemá smysl předpokládat, že bude v budoucnu zásadně změněna nebo dokonce vyvrácena, i když se o to řada nedůvěřivců stále pokouší (viz např. nedávný planý mediální humbuk s překročením rychlosti světla v CERN). S příchodem nějaké další geniální myšlenky může dojít nejvýše k jejímu rozšíření nebo dalšímu zobecnění tak, jak to v minulosti proběhlo u Newtonovy gravitační teorie a speciální teorie relativity. Zatím se však nesplnila optimistická očekávání, že dojde ke sjednocení obecné teorie relativity a kvantové teorie do ucelené kvantové teorie gravitace.**

Einstein-Fridmanovy rovnice nelze rozšířit do oblasti záporného času a pro $t = 0$ vedou k singularitě. Z toho plyne závěr, že čas vznikl spolu s vesmírem (tedy s prostorem a hmotou) v okamžiku Velkého třesku. Podobně jako u teploty můžeme tedy hovořit o "absolutní nule" času. V této souvislosti je nutno ocenit prozíravost i odvahu sv. Augustina, který již ve 4.století n.l. zapochyboval otázkou *"co dělal Bůh před stvořením světa?"* a vyslovil domněnku, že čas ještě neexistoval. Hypotéza Velkého třesku je v současné době nejuznávanější variantou vzniku vesmíru a je potvrzována i kvantovou teorií.

Současné kosmologické úvahy o vzniku, vývoji a budoucnosti vesmíru tak narušují naše zažité představy o pořadí příčiny a následku (co bylo příčinou Velkého třesku, když před ním čas neexistoval?), vnucují nám otázky typu *"co bylo, když ještě nic nebylo?"* a probíhají filozoficko-teologické diskuze o stvoření vesmíru a úloze tzv. Stvořitele, ať si již pod tímto pojmem představíme Boha, fyzikální neznámo nebo cokoliv jiného. S. Hawking k tomu poznamenal: *„Byl zde Bůh, který připravoval peklo pro lidi, kteří se budou na takové otázky ptát.“* Např. věřící Newton, který se po objevu svého gravitačního zákona obával pádu planet do Slunce, přirovnával Boha k hodináři, který musí občas "nebeský hodinový stroj" seřídit.

Otázka víry je u fyziků často bagatelizována: např. Einstein, který nepřijal kvantovou teorii (přestože k jejímu vybudování sice nepřímo, ale podstatně přispěl), se proti jejímu nedeterminismu vyjádřil metaforicky slovy *"nevěřím, že Bůh hraje se světem v kostky"*. Tento výrok je ale často jednostranně interpretován jako důkaz jeho víry v Boha. Kvantové procesy u černých děr parafrázoval jeho slovy Stephen Hawking: *"Bůh nejenže v kostky se světem hraje, ale někdy je hází i tam, kde nejsou vidět. Můžeme si představit, že Bůh stvořil vesmír v okamžiku Velkého třesku, ale nemá smysl předpokládat, že vesmír byl stvořen před Velkým třeskem. Model rozpínajícího se vesmíru sice Stvořitele nevylučuje, ale omezuje dobu, kdy mohl odvést svoji práci".* Einsteinovy názory na religiozitu si čtenář může dobře upřesnit v kapitole „Náboženství a věda“ v **lit.[2]**, kde zmiňuje zpátečnický vliv církví a vyzdvihuje tzv. „vesmírnou religiozitu“ jakožto nejsilnější vzpruhu pro vědecké bádání a odkrývání fyzikálního neznáma.

V dnešních teoriích o rozpínání vesmíru ale stále existují některé znepokojující otázky, jako např. tato (**lit.[5]** a **obr.4j**): *"Proč byla hustota, ze které se vesmír začal rozpínat, tak blízká kritické hodnotě, rozlišující kosmologické modely, které později přejdou ve smršťování, od modelů trvale expandujících? Co nebo kdo ji nastavil tak přesně? Pokud by v první sekundě po Velkém třesku byla rychlost expanze o nepatrný zlomek promile menší, vesmír by zkolaboval dříve, než by dosáhl svého dnešního rozměru".* Při této příležitosti citujeme 200 let starý Laplaceův názor: *"Zákony i počáteční podmínky vesmíru určil Bůh, ale dále již nezasahoval".* Laplace byl Napoleonem jmenován ministrem vnitra, funkce byl ale brzy zbaven, neboť podle slov císaře "zaváděl do veřejných záležitostí nekonečně malé veličiny". Na dotaz věřícího císaře, proč ve svém pětisvazkovém díle o nebeské mechanice *Mécanique céleste* nezmiňuje Boha, odpověděl: *"Občane první konsule, nepotřeboval jsem hypotézu jeho existence".*

# A4. STRUČNÝ NÁSTIN SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

***i pro střední školy, aneb "hrátky s druhou mocninou a odmocninou, úpravy složených zlomků".***

*Albert **Einstein**: -"tím nejkrásnějším, co kdy můžeme zažít, je tajemno";*
*- "je bezpočet kateder, z nichž se vyučuje, ale notně málo moudrých a ušlechtilých učitelů. Je bezpočet prostorných poslucháren, ale nevelký počet těch mladých, kteří žízní po pravdě";*
*- „pouze dvě věci jsou nekonečné: vesmír a lidská hloupost. U té první si tím však nejsem jist";*
*- „Bůh je rafinovaný, ale není zlomyslný";*
*- „představivost je důležitější než znalosti";*
*- „žádné množství experimentů nemůže dokázat, že mám pravdu. Jediný experiment ale může dokázat, že ji nemám".*

Tvůrce (přesněji řečeno dovršitel) **speciální teorie relativity (STR)** Albert **Einstein** i jeho předchůdci (**Michelson, Lorentz, Poincaré**....) využili při jejím budování krásný a jednoduchý matematický aparát, z dnešního hlediska srozumitelný i středoškolákům, neboť vystačili s operacemi "druhá mocnina, druhá odmocnina" a jen výjimečně použili pojem "diferenciál, integrál". Z fyzikálního hlediska však teorie vyžaduje mimořádnou dávku pochopení přírodních dějů a její pokračování, **obecná teorie relativity (OTR),** činila potíže mnoha věhlasným fyzikům (zpočátku měl údajně formální výhrady i samotný Max **Planck**). Její první experimentální důkaz přinesl Arthur **Eddington**, když potvrdil předpověď, že světlo se v gravitačním poli Slunce ohýbá: zjistil rozdíl ve zdánlivé poloze hvězd před a při úplném zatmění Slunce v r.1919 na Princově ostrově u západního pobřeží Afriky. Změřená úhlová odchylka byla 1,7 úhlové vteřiny, což se téměř přesně shodovalo s Einsteinovou předpovědí. Na otázku, co říká názoru, že Einsteinově teorii rozumějí stěží tři lidé na světě, odpověděl Eddington: *"Nemohu si vzpomenout, kdo je ten třetí".* Ještě ve 30. letech 20. století panovala mezi fyziky k teorii relativity všeobecná nedůvěra. Politováníhodně se zachovali zejména vyznavači tzv. "německé fyziky" mezi dvěma světovými válkami, kteří ji označili za "židovskou propagandu" (např. Philipp Lenard, nar. v Bratislavě, v r.1942 jmenován jejím čestným občanem, nositel Nobelovy ceny za výzkum katodových paprsků 1905, pozdější obdivovatel Hitlera a člen NSDAP). Byla dokonce založena protieinsteinovská společnost a na vydání knihy "100 autorů proti Einsteinovi" reagoval Einstein lhostejně slovy: *"Kdybych neměl pravdu, stačil by jediný".* Trvalo však téměř 80 let do dnešní éry výkonných vesmírných teleskopů, než byly jeho rovnice správně aplikovány a ověřeny na problémech okolo rozpínání vesmíru.

Současné teoretické fyzice (resp. jejím nejnovějším hypotézám okolo vzniku a vývoje vesmíru) rozumí stále menší okruh lidí, nevyjímaje filozofy. Podle Stephena **Hawkinga** je úkolem fyziků nejprve zkoumat "jak" a následně (spolu s filozofy) "proč". Na rozdíl od minulosti, kdy se velcí myslitelé věnovali filosofii až v druhé řadě po proniknutí do přírodních věd (**Aristoteles, Descartes, Kant, Russell**), nyní pro filosofy zbývá (podle vyjádření jednoho z nich - Ludwiga **Wittgensteina**) už jen věnovat se rozboru jazyka.

K vyslovení a podpoře STR a OTR bylo třeba v dané době určitého stupně odvahy a „nenormálního" nazírání na okolní svět. Tehdejší situaci možná charakterizuje výrok našeho předního psychiatra **prof. Zdeňka Myslivečka**: *„Blázny odděluje od normálních lidí mříž sanatoria. Nikdo z nás si nikdy nemůže být jist, na které straně mříže stojí".*

## 4.1 Galileova transformace

Již Galileovi bylo jasné, že pojem "pohyblivá soustava" je třeba doplnit informací "pohyblivá vůči čemu". Ve své knize "Dialogy o dvou největších systémech světa" (církví zakázána až do r. 1822!!) prohlásil, že při provádění mechanických pokusů v podpalubí lodi nelze zjistit, je-li loď v klidu, nebo zdali pluje (mínil tím rovnoměrně, přímočaře, bez houpání a otřesů). Pohyby míčku při ping-pongu budou hráči pozorovat stále stejně bez ohledu na směr a rychlost plavby.

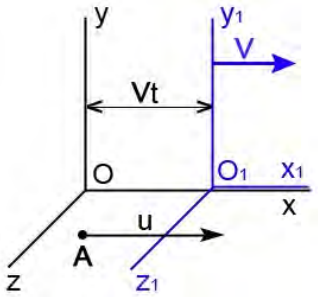
**Galileův princip relativity pohybů a skládání rychlostí:** dvě souřadné soustavy **Oxyz** a $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ splývají v čase $t=0$ a soustava $\mathbf{O_1}$ se pohybuje vůči soustavě **O** rychlostí $V$ v kladném směru osy $x$ (doprava v **obr.5**). V obou soustavách platí stejný čas, tj. $t_1 = t$. Pokud se bod **A** v soustavě **O** pohybuje rychlostí $u$, v soustavě $\mathbf{O_1}$ je jeho rychlost

$$u_1 = u - V \qquad (5)$$

Jeho souřadnice v soustavě $\mathbf{O_1}$ jsou

$$x_1 = x - Vt, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z \qquad (6)$$

a v soustavě **O** platí $\quad x = x_1 + Vt, \quad y = y_1, \quad z = z_1$




***Obr.5** Skládání rychlostí v Galileově transformaci*

Vzdálenost dvou bodů **A, B** se po Galileově transformaci nezmění (je vůči ní invariantní), neboť použitím (6) pro $t_1 = t$ vychází

$$x_{1A} - x_{1B} = x_A - x_B \qquad (6a)$$

Obě soustavy jsou si rovnocenné a neexistuje absolutní vztažná soustava. Lze stejně tak dobře tvrdit, že soustava **O** se pohybuje vůči soustavě $\mathbf{O_1}$ rychlostí $V$ v záporném směru osy $x$, nebo že soustava **O** se pohybuje rychlostí $V/2$ vlevo a soustava $\mathbf{O_1}$ rychlostí $V/2$ vpravo atd.

***Poznámka:*** *Zde jsme pro jednoduchost uvedli případ pohybů jen v ose* $x$, *ale Galileova transformace samozřejmě platí i při obecných směrech pohybů, jen je třeba provést rozklad do všech tří směrů a budou platit složkové rovnice* $u_{1X} = u_X - V_X$, $u_{1Y} = u_Y - V_Y$ *atd.,* $x_1 = x - V_X t$, $y_1 = y - V_Y t$ *atd.*

## 4.2 Michelsonův pokus (1881)

Podle mnoha názorů jde asi o nejdůležitější pokus v dějinách fyziky (**Michelson** jej spolu s **Morleyem** zpřesnil v Clevelandu v r.1887). Jeho výsledkem byla zpochybněna Newtonova představa absolutního prostoru i absolutní současnosti. Dal podnět k radikální změně dosavadního nazírání na svět (mj. opuštění představy o tzv. "éteru") a k vytvoření speciální i obecné teorie relativity. K jejímu objevu přispěli mj. Maxwell, Lorentz, Poincaré, Hilbert, Minkowski, Noetherová atd. a je kuriózní, že její hlavní tvůrce a dovršitel **Einstein** později doznal, že zpočátku o výsledku Michelsonova pokusu nevěděl. Základní myšlenka pokusu bez technických podrobností je na **obr.6**:

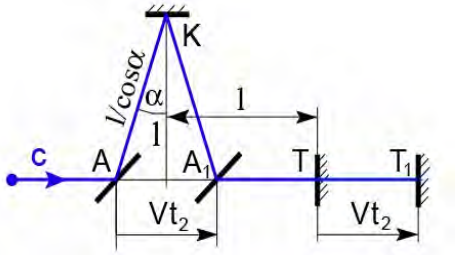
**a)** Kdyby Země stála ($V = 0$, $\alpha = 0$, body A, $A_1$ by splývaly:

- doba, za kterou světlo projde dráhu ATA = doba za kterou projde dráhu AKA, tj. $t = 2l/c$, kde rychlost světla je $c = 299\ 792\ 458\ m/s$;

**b)** Země se však pohybuje rychlostí $V$:

**1.** Paprsek rovnoběžný se směrem pohybu by měl na dráhu ATA potřebovat čas

$$t_{\rightarrow} = t_1 = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2lc}{c^2 - V^2} = \frac{2l}{c\left(1 - V^2/c^2\right)} \qquad (7)$$




***Obr.6*** *Zjednodušené schéma Michelsonova pokusu*

**2.** Paprsek kolmý ke směru pohybu by měl potřebovat na dráhu AKA$_1$ čas $t_{\uparrow} = t_2 = \dfrac{2l}{c \cdot \cos\alpha} = \dfrac{2l}{c\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$, $\sin\alpha = \dfrac{0{,}5\mathrm{AA}_1}{\mathrm{AK}} = \dfrac{0{,}5Vt_2}{0{,}5ct_2} = \dfrac{V}{c}$, takže

$$t_{\uparrow} = t_2 = \frac{2l}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad (8)$$

**Fázový posuv obou paprsků ale nebyl na interferometru pozorován**, tj. $\Delta t = t_{\uparrow} - t_{\rightarrow} = 0$.

**Závěr: světlo se šíří stejnou rychlostí ve směru pohybu zeměkoule i ve směru kolmém, jeho rychlost je konstantní a nezávisí na rychlosti pohybu zdroje.**

Albert Abraham **Michelson** (Nobelova cena 1907 za optické přístroje a pokusy s nimi) svým pokusem vyvolal revizi Galileova principu skládání rychlostí. Jeho výsledek lze vysvětlit **kontrakcí délek**. Tuto domněnku poprvé vyslovil George **FitzGerald** v r.1891:

- má-li v rovnicích (7) a (8) platit $t_{\uparrow} = t_{\rightarrow}$, musí být při $c = konst$ rozdílné délky:

$$t_{\rightarrow} = \frac{2l_{\rightarrow}}{c\left(1 - V^2/c^2\right)} = t_{\uparrow} = \frac{2l_{\uparrow}}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \text{neboli} \quad l_{\rightarrow} = l_{\uparrow}\sqrt{1 - V^2/c^2} \qquad (9)$$

Rozměry se zkracují ve směru pohybu, $l_{\rightarrow} < l_{\uparrow}$, viz Lorentzova transformace.

## 4.3 Lorentzova transformace (1904)

*John **Wheeler**: "Čas je způsob, jakým příroda zajišťuje, aby se všechno neudálo najednou".*
*Richard **Feynman**: "Čas je to, co se děje, když se nic neděje".*
*Hermann **Minkowski**: "Čas je čtvrtá souřadnice časoprostoru".*
*Jan **Werich**: "Čas si vymysleli lidi, aby mohli říkat od kdy do kdy a co za to".*
*Prorok **Mohamed**: "Alláh sice stvořil čas, ale o spěchu se nezmiňoval".*

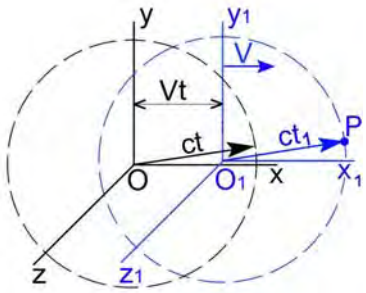
Hendrik Antoon **Lorentz** (1853 - 1928) jako první zavrhl dosavadní představu o čase, který plyne rovnoměrně a sám o sobě nezávisle na okolí. Vyšel z převratného předpokladu, že **čas plyne v různých vztažných soustavách různě** a zpochybnil představu absolutní současnosti jevů (o absolutním čase pochyboval v téže době i Henri **Poincaré**).

Pro vysvětlení překvapivého výsledku Michelsonova pokusu vytvořil Lorentz matematickou náhradu Galileovy transformace, ale svým transformačním rovnicím (viz (14) a (15) v dalším textu) nepřikládal hlubší fyzikální význam. Dostal se tak na samotný práh speciální teorie relativity, ale fyzikální význam jeho rovnic vysvětlil a rozvedl až Einstein o rok později.

**Výchozí úvahy a předpoklady Lorentzova odvození** (viz **obr.7**):

- dvě vztažné souřadné soustavy **Oxyz** a $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ se vůči sobě pohybují rychlostí $V$ ve směru osy $x$. Každá soustava má svůj vlastní čas. V čase $t = t_1 = 0$ soustavy právě splývají (tj. $\mathbf{O} \equiv \mathbf{O_1}$) a z bodu **O** je vyslán světelný signál, který se v soustavě **O** za čas $t$ rozšíří na vlnoplochu s poloměrem $ct$. Mezitím se obě soustavy od sebe vzdálily o míru $Vt$. Do soustavy $\mathbf{O_1}$ umístíme pozorovatele **P**, který se s ní pohybuje. Pokud bychom přijali

**Galileovu transformaci**, čas by v obou soustavách plynul shodně a světlo by k pozorovateli **P** dosáhlo po absolvování dráhy $(c+V)t$. Podle **Michelsona** se ale světlo šíří v obou soustavách stejnou rychlostí $c$ a v soustavě $\mathbf{O_1}$ platí čas $t_1$, takže světlo v ní dosáhne bodu **P** po absolvování dráhy $ct_1$. Z porovnání obou výrazů $(c+V)t$ a $ct_1$ vyplývá, že čas $t_1$ musí být delší (v soustavě $\mathbf{O_1}$ plyne pomaleji) a původní předpoklad Galileovy transformace vede k rozporu. Světlo se za čas $t$ dostane na vlnoplochy (kulové plochy)



***Obr.7** Šíření světla ve vztažných soustavách*

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$
$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=c^2t_1^2$$

Vztah $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ by měl být v hledané transformaci invariantem:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2-c^2t_1^2 \qquad (10)$$

Požadavky na transformaci mezi oběma souřadnými systémy:
- linearita;
- konstanta úměrnosti musí být stejná pro směr transformace $\mathbf{O}\rightarrow\mathbf{O_1}$ i pro směr $\mathbf{O_1}\rightarrow\mathbf{O}$ (tzv. symetrie);
- pro $V<<c$ (v mezním případě $V/c\rightarrow 0$) musí platit Galileova transformace;
- při vzájemném pohybu ve směru osy $x$ se souřadnice kolmé k ose $x$ nemění.

Pro vodorovné souřadnice v obou soustavách platí $x=ct,\ \ x_1=ct_1$, $c=x/t=x_1/t_1$ (11)

Transformační rovnice by měly mít lineární tvar $x=\gamma(x_1+Vt_1),\ \ x_1=\gamma(x-Vt)$ (12)

***Poznámka**: Oproti Galileově transformaci (6) přistoupila kromě času $t_1$ navíc ještě konstanta $\gamma$.*

Obě transformační rovnice spolu vynásobíme:

$$xx_1=c^2tt_1=\gamma^2(x_1+Vt_1)(x-Vt)$$

$$\frac{xx_1}{tt_1}=c^2=\gamma^2\left(\frac{x_1}{t_1}+V\right)\left(\frac{x}{t}-V\right)=\gamma^2(c+V)(c-V)=\gamma^2\left(c^2-V^2\right)$$

$$\gamma=\sqrt{\frac{c^2}{c^2-V^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}>1$$ ..... transformační koeficient (**Lorentzův faktor**) (13)

(před odmocninou musí být +, aby se shodovaly směry souřadných os $x, x_1$).

Transformace délek (12): $$x=\frac{x_1+t_1V}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ \ x_1=\frac{x-tV}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ \ y=y_1,\ \ z=z_1 \qquad (14)$$

Transformace času : $$t=x/c=\gamma(x_1+Vt_1)/c=\gamma(x_1/c+V\,t_1/c)=\gamma\left(t_1+V\,x_1/c^2\right)$$

$$t=\frac{t_1+x_1V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ \ t_1=\frac{t-xV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad (15)$$

***Poznámka**: Požadavek symetrie a invariance rychlosti světla je splněn: dosazením ze (14) a (15) za $x$ a $t$ do rovnice $x=ct$ obdržíme $x_1=ct_1$ a naopak z $x_1=ct_1$ vyjde $x=ct$. Čtenář si sám snadno ověří i vztah (10).*

**Důsledky Lorentzovy transformace:**

**1. Relativita současnosti:** dvě události A,B proběhnou v soustavě **O** na různých místech $x_A\neq x_B$ současně, tj. $t_A=t_B,\ \ \Delta t=t_A-t_B=0$. V soustavě $\mathbf{O_1}$ ale současné nebudou, neboť pro časový interval mezi nimi platí podle druhého vztahu v (15)

$$\Delta t_1=t_{1A}-t_{1B}=\frac{t_A-x_AV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-\frac{t_B-x_BV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\frac{(x_B-x_A)V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\neq 0 \qquad (16a)$$

Obě události proběhnou v soustavě $\mathbf{O_1}$ současně pouze v tom případě, že budou v soustavě **O** nejen současné, ale i soumístné, tj. $x_A=x_B$ (obrazně řečeno splývají v jedinou událost).

***Poznámka**: Klasická mechanika pracuje s pojmem „pohyb dokonale tuhého tělesa". Zapůsobí-li na jeden konec dlouhé tyče osová síla, dá se najednou celá tyč do pohybu. Předpokládá se tedy (v rozporu se STR), že šíření informace (silové interakce) podél tyče probíhá nekonečně rychle. Události na obou koncích tyče jsou chápány jako současné, nejsou ale soumístné. Ve speciální teorií relativity by se správně mělo s tyčí pracovat jako s kontinuem. Představa absolutní současnosti se historicky vyvinula ze zrakového vnímání a z nesprávného předpokladu nekonečné rychlosti světla. Použitý slovní obrat "pozorovatel vidí...." je sice názorný, ale poněkud nepřesný, neboť se jím nepřímo rozumí, že vidí celý objekt současně.*

**2. Dilatace času:** mezi dvěma soumístnými událostmi A,B v soustavě **O** (tj. událostmi, které nastaly v témže místě $x = x_A = x_B$) byl naměřen časový interval $\Delta t = t_A - t_B$. V soustavě **O₁** bude podle druhého vztahu v (15) časový interval delší, neboť

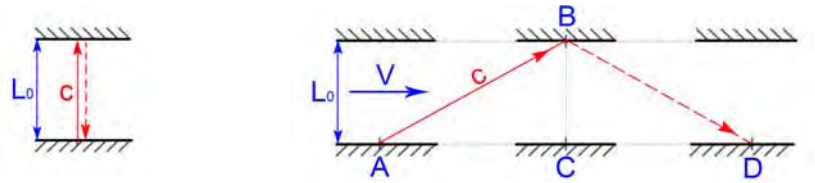
$$\Delta t_1 = t_{1A} - t_{1B} = \frac{t_A - x_A V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{t_B - x_B V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{t_A - t_B}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}} > \Delta t \qquad (16b)$$

Snadno lze dokázat pomocí prvního vztahu v (15), že byl-li pro soumístné události v soustavě **O₁** (tj. $x_1 = x_{1A} = x_{1B}$) naměřen časový interval $\Delta t_1 = t_{1A} - t_{1B}$, potom v soustavě **O** bude časový interval opět větší:

$$\Delta t = t_A - t_B = \frac{\Delta t_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} > \Delta t_1$$

Souhrnně v obou případech platí, že pohyb způsobuje dilataci (prodloužení) času. Tento jev je možno názorně vysvětlit i pomocí tzv. **světelných hodin** podle **obr.7a**, což jsou dvě rovnoběžná zrcadla, mezi kterými kmitá v kolmém směru světelný paprsek:

- perioda stojících hodin $\Delta t$ (časová jednotka v soustavě **O**) je doba, za kterou světlo urazí dráhu od jednoho zrcadla k druhému a zpět, tj. $\Delta t = 2L_0/c$;




***Obr.7a*** *Světelné hodiny (vlevo v klidu, vpravo za pohybu rychlostí $V$)*

- hodiny, pohybující se spolu se soustavou **O₁** rychlostí $V$, budou mít periodu $\Delta t_1$. Na dráhu **AB** potřebuje paprsek čas $\Delta t_1/2$, dráha je tedy $c\Delta t_1/2$. Hodiny se mezitím přemístily z bodu **A** do bodu **C** o dráhu $V\Delta t_1/2$. V trojúhelníku **ABC** platí Pythagorova věta $\left(\frac{V\Delta t_1}{2}\right)^2 + L_0^2 = \left(\frac{c\Delta t_1}{2}\right)^2$ a po úpravách vychází $\Delta t_1^2 = \frac{\Delta t^2}{1-V^2/c^2}$, tedy opět vztah (16b).

**3. Kontrakce délek:** úsečka **AB**, rovnoběžná s osou $x$, leží v soustavě **O** a je vůči ní v klidu. Její délka je $l = x_B - x_A$. Chceme-li její délku zjistit v soustavě **O₁**, je nutno zjistit obě souřadnice $x_{1A}, x_{1B}$ ve stejném čase $t_{1A} = t_{1B}$. Je tedy třeba použít první vztah v (14):

$$l = x_B - x_A = \frac{x_{1B} - Vt_{1B}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{x_{1A} - Vt_{1A}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{x_{1B} - x_{1A}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{l_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Délka úsečky v soustavě **O₁** je tedy

$$l_1 = l\sqrt{1-V^2/c^2} < l \qquad (16c)$$

V souladu se vztahem (9) dochází ke kontrakci délek ve směru pohybu ("pozorovatel, pohybující se spolu se soustavou **O₁**, vidí rozměry objektů soustavy **O**, ležící ve směru pohybu, kratší"). U vícerozměrných útvarů (rovinných obrazců a těles) dochází podle (14) ke kontrakci rozměrů pouze ve směru pohybu $x$ a v kolmých směrech $y, z$ nikoliv, takže dojde ke změně úhlů, tedy následně i **ke změně ploch a objemů**. Pro úhel $\varphi$ mezi osou $x$ a úsečkou $l(l_x, l_y)$, setrvávající v klidu v soustavě **O**, platí $tg\varphi = l_y/l_x$. Z hlediska soustavy **O₁** bude mít úhel velikost $\varphi_1$ a platí

$$tg\varphi_1 = \frac{l_{y1}}{l_{x1}} = \frac{l_y}{l_x\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \varphi_1 > \varphi$$

***Poznámka:*** *Někdy se používá termín "klidová délka", což je délka úsečky v takové soustavě, vůči níž se úsečka nepohybuje, tudíž podle (16c) největší možná délka. Podobně je možno použít pojem "klidový směr (úhel)", který je naopak nejmenší.*

**4. Relativistický podélný Dopplerův jev (vysvětlen Einsteinem v r. 1905):** paprsek světla s vlnovou délkou $\lambda$ je vyslán z počátku souřadnic soustavy **O** v okamžiku, kdy se soustavy **O**, **O₁** právě míjejí. Jeho kmitočet je $f = \frac{\omega}{2\pi}[Hz]$, rychlost šíření je $c = \lambda f$. Rovnice vlnění v soustavě **O** je $y = Y_0 \sin\omega t$ (počáteční fázový posuv předpokládáme nulový). Do bodu **A**, ležícího ve vzdálenosti $x$ od počátku, se vlnění rozšíří s časovým zpožděním $\frac{x}{c}$, takže v bodě **A** je popsáno rovnicí $y = Y_0 \sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)$. V soustavě **O₁** se světlo šíří stejnou

rychlostí $c$, ale dojde ke transformaci délky z $x$ na $x_1$, času z $t$ na $t_1$ a kmitočet se změní na $f_1$. Fázový posuv vlnění v obou soustavách je stejný (nulový), takže musí platit

$2\pi f\left(t-\frac{x}{c}\right)=2\pi f_1\left(t_1-\frac{x_1}{c}\right)$ neboli $f_1=f\,\frac{ct-x}{ct_1-x_1}$. Dosazením ze (14) a (15) dostáváme

$$f_1=f\,\frac{ct-x}{c\,\frac{t-xV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-\frac{x-tV}{\sqrt{1-V^2/c^2}}}=f\,\frac{(ct-x)\sqrt{1-V^2/c^2}}{ct-xV/c-x+tV}=f\,\frac{(ct-x)\sqrt{1-V^2/c^2}}{ct-x+(ct-x)V/c}$$ a po úpravě konečně

$$f_1=f\sqrt{\frac{c-V}{c+V}} \tag{16d}$$

V soustavě $\mathbf{O_1}$ je kmitočet menší, a protože platí, že $c=\lambda_1 f_1$, pozorovaná vlnová délka se zvětší:

$$\lambda_1=\lambda\sqrt{\frac{c+V}{c-V}} \tag{16e}$$

Výsledek jsme získali za předpokladu, že pozorovatel je umístěn v soustavě $\mathbf{O_1}$ a **vzdaluje** se od zdroje záření rychlostí $V$. **Pro případ přibližování je nutno obrátit znaménka u rychlosti $V$ pod odmocninami !!**
Vztahy (16d,e) - ať již pro vzdalování nebo přibližování - bychom získali i v případě, že pozorovatel je umístěn v soustavě **O** a zdroj záření v soustavě $\mathbf{O_1}$. **To je zásadní rozdíl oproti Dopplerovu jevu v klasické mechanice, kde je třeba rozlišovat pohyblivost zdroje a pozorovatele**, jak uvedeme v dalším textu.

***Poznámka:*** *Pro malé rychlosti je možno relativistický vztah (16e) rozvinout do Taylorovy řady v okolí bodu $V/c=0$. Po zanedbání vyšších diferenciálů vychází přibližný vztah pro změnu vlnové délky*

$$\lambda_1\cong\lambda(1+V/c) \tag{16ee}$$

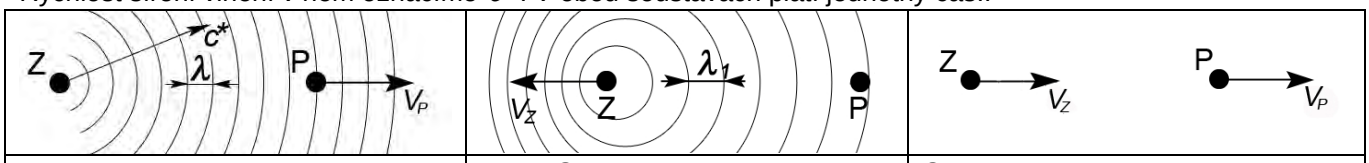
*Poměrná změna vlnové délky (tzv. posuv spektrální čáry) podle tohoto přibližného vztahu je*

$$z=\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda}\cong\frac{V}{c} \tag{16eee}$$

*V případě oddalování se vlnová délka prodlužuje, tj. $\lambda_1>\lambda,\ z>0$ („rudý posuv“), u přibližování je $z<0$ („modrý posuv“). Protože pozorování vlnových délek záření hvězd hraje významnou roli v astronomii při zkoumání vesmíru, uvedeme i původní interpretaci z klasické teorie vlnění, kterou přednesl Christian **Doppler** poprvé v r.1842 v pražském Karolinu.*

## 4.3.1 Dopplerův jev v klasické mechanice

Na rozdíl od teorie relativity je nutno rozlišovat tři případy podle vzájemného pohybu zdroje vlnění (soustavy **O**) a pozorovatele, stojícího v soustavě $\mathbf{O_1}$ - viz **obr.7b**. **Prostředí mezi zdrojem a pozorovatelem, ve kterém se vlnění (např. zvuk) šíří, je předpokládáno nehybné** v souladu s tehdejšími představami o nehybném éteru. Rychlost šíření vlnění v něm označíme $c^*$. V obou soustavách platí jednotný čas!!




| | | |
|---|---|---|
| ***1****….vzdalující se pozorovatel* | ***2****….vzdalující se zdroj* | ***3****….zdroj i pozorovatel se pohybují* |

***Obr.7b*** *Dopplerův jev v klasické mechanice při různé pohyblivosti zdroje i pozorovatele*

**<u>1. Zdroj (soustava O) stojí, pozorovatel (soustava $O_1$) se od něj vzdaluje rychlostí</u> $V_P$ (obr.7b vlevo).**

V nehybném prostředí okolo stojící soustavy **O** je časová perioda vlnění $T$, kmitočet $f=1/T$. Vzdálenost mezi dvěma po sobě následujícími kulminacemi vlnění (dráha, kterou vlnění urazí za periodu $T$) je vlnová délka $\lambda=c^*T$. Podle Galileova principu zachování vzdálenosti (6a) **pozorovatel naměří tutéž vlnovou délku**, ale protože vlnění v jeho soustavě $\mathbf{O_1}$ se šíří rychlostí $c^*-V_P$, pro jeho periodu $T_1$ bude platit $\lambda=(c^*-V_P)T_1$, tj.

$$\frac{T}{T_1}=\frac{f_1}{f}=\frac{c^*-V_P}{c^*} \tag{16f}$$

K témuž výsledku můžeme dojít i jinou úvahou:
- v čase $t=0$ se soustavy **O**, $\mathbf{O_1}$ právě míjejí a pozorovatel v soustavě $\mathbf{O_1}$ přijímá vlnění např. v okamžiku jeho kulminace. Další kulminace, která nastává v soustavě **O** za dobu periody $T$, je v soustavě $\mathbf{O_1}$ zachycena za čas $T_1=T+\Delta T$. Soustava $\mathbf{O_1}$ se mezitím vzdálila o míru $V_PT_1$, takže přírůstek periody je $\Delta T=V_PT_1/c^*$, tj. $T_1=T+V_PT_1/c^*$, $T_1=\frac{T}{1-V_P/c^*}$ a s využitím vztahů $f=1/T$, $f_1=1/T_1$ dostaneme opět výsledek (16f). Protože

v soustavě **O₁** se vlnění šíří rychlostí $c^* - V_P$, pozorovatel naměří vlnovou délku $\lambda_1 = (c^* - V_P)T_1 = \frac{(c^* - V_P)T}{1 - V_P/c^*} = \lambda$, tedy stejnou jako v soustavě **O**. **Vzdálenost dvou kulminací (vlnová délka) se v obou soustavách zachovává**.

**2. Pozorovatel (soustava $O_1$) stojí, zdroj (soustava O) se vzdaluje rychlostí $V_Z$ (obr.7b uprostřed).**

V čase $t = 0$ se soustavy **O**, **O₁** právě míjejí a pozorovatel v soustavě **O₁** přijímá vlnění v okamžiku jeho kulminace. Další kulminace, která nastává v soustavě **O** za dobu periody $T = 1/f$, je v nehybné soustavě **O₁** zachycena za čas $T_1 = 1/f_1 = T + \Delta T$. Soustava **O** se ale mezitím vzdálila o míru $V_Z T$, takže přírůstek periody je $\Delta T = V_Z T / c^*$, neboli $T_1 = T + V_Z T / c^*$ a po úpravě vychází

$$\frac{T}{T_1} = \frac{f_1}{f} = \frac{c^*}{c^* + V_Z} \tag{16g}$$

V nehybném prostředí (jehož součástí je i pozorovatel) se vlnění šíří rychlostí $c^*$ a pro jím naměřenou vlnovou délku $\lambda_1$ platí $\lambda_1 = c^* T_1 = c^* T\left(1 + \frac{V_Z}{c^*}\right) = \lambda\left(1 + \frac{V_Z}{c^*}\right)$, kde $\lambda = c^* T$ je vlnová délka příslušná vlnění nehybného zdroje. **Na rozdíl od případu ad.1 dochází při vzdalování zdroje k nárůstu vlnové délky u pozorovatele**:

$$\lambda_1 = \lambda\left(1 + \frac{V_Z}{c^*}\right) \tag{16h}$$

V obou případech **ad.1,2** zaznamená pozorovatel nižší kmitočet $f_1 < f$, ale při malých rychlostech vzdalování $V_{P,Z} << c^*$ není rozdíl mezi vztahy (16f) a (16g) podstatný. V případech přibližování dojde ke změně znamének u rychlostí $V_P, V_Z$ a pozorovatel zaznamená namísto snížení kmitočtu jeho zvýšení.

Po dosazení $V_Z = V$, $c^* = c$ do (16h) vychází shodný tvar s linearizovaným relativistickým vztahem (16ee). Související vztah (16eee) použil Edwin **Hubble** při svých měřeních a výpočtech rychlosti vzdalování cizích galaxií. Můžeme s jistotou předpokládat, že Hubble byl seznámen s teorií relativity a s rozdílným výkladem Dopplerova jevu oproti klasické teorii vlnění. Jím naměřené změny vlnových délek vesmírných zdrojů záření ale byly tak malé, že rozdíl mezi klasickým a relativistickým výkladem Dopplerova jevu nebyl patrný.

**3. Zdroj se pohybuje rychlostí $V_Z$, pozorovatel rychlostí $V_P$ (obr.7b vpravo).**

Ze čtyř možných variant je v obrázku pro obě rychlosti zvolen shodný (kladný) směr zleva doprava. Mezi oběma kulminacemi vlnění uplyne u zdroje čas $T$, zdroj se mezitím přemístí vpravo o délku $V_Z T$ a čas pro dostižení pozorovatele druhým kulminačním vrcholem se zkrátí o hodnotu $V_Z T / c^*$. Pozorovatel přijme obě kulminace v intervalu $T_1$, během něhož se přemístí vpravo o délku $V_P T_1$ a okamžik přijetí druhého kulminačního vrcholu se tak oddálí o čas $V_P T_1 / c^*$. Pro periodu měřenou pozorovatelem tedy platí

$T_1 = T - V_Z T / c^* + V_P T_1 / c^*$ neboli $T_1 = T \frac{1 - V_Z / c^*}{1 - V_P / c^*} = T \frac{c^* - V_Z}{c^* - V_P}$ a pozorovatel zaregistruje kmitočet

$$f_1 = f \frac{c^* - V_P}{c^* - V_Z}$$

Obecný vztah pro všechny čtyři možnosti směrů rychlostí je tedy

$$f_1 = f \frac{c^* \pm V_P}{c^* \pm V_Z} \tag{16j}$$

a zahrnuje v sobě i výše řešené případy **ad.1,2**.

## 4.4 Henri Poincaré (1905)

*Grigorij **Perelman**: „Mám všechno, co potřebuji. Vím, jaký tvar má vesmír. Tak mi řekněte, proč bych se měl hnát za milionem?“ (jeho výrok, když odmítl nabízenou Fieldsovu medaili a zvláštní cenu 1milion dolarů za důkaz Poincarého hypotézy).*

Henri **Poincaré** (1854 – 1912) byl jedním z nejvšestrannějších přírodovědců. Jako jediná osoba všech dob byl zvolen do všech pěti sekcí Francouzské akademie věd: geometrie, mechaniky, fyziky, geografie a navigace. Vyslovil mj. tzv. Poincarého hypotézu, která donedávna patřila mezi sedm největších nevyřešených matematických problémů v 21.století (její znění neuvádíme, neboť svojí srozumitelností přesahuje odbornou úroveň tohoto textu). Hypotézu dokázal teprve v r.2003 geniální výstřední ruský matematik Grigorij **Perelman** a má klíčový význam při současných výzkumech topologie vesmíru.

Poincaré se kromě mnoha jiného zabýval i rozšířením Newtonova gravitačního zákona na obecně $N$ těles a dokázal, že neexistuje exaktní řešení rovnice

$$\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} = \kappa \sum_{j \neq i}^{N} \frac{m_j (\mathbf{r_j} - \mathbf{r_i})}{|\mathbf{r_j} - \mathbf{r_i}|^3}$$

Ještě před Einsteinem vyslovil v r.1905 doměnku, že princip relativity (tj. naprosté rovnocennosti všech inerciálních soustav) může být základním přírodním zákonem, nahrazujícím (nebo zobecňujícím) zákony Newtonovy. Až do té doby byla Lorentzova transformace považována spíše za matematickou hříčku a spekulaci. Poincaré je pokládán za druhého nejvýznamnějšího spolutvůrce teorie relativity po Einsteinovi. Známou rovnici $E = mc^2$ (viz **kap.4.5.3**) publikoval již v r. 1900 s tím rozdílem, že na levé straně měl hustotu energie a na pravé hustotu hmoty.

## 4.5 Speciální teorie relativity (Einstein 1905)

Albert **Einstein** jako první přijal Poincarého myšlenku, že důsledky Lorentzovy transformace mají hlubší fyzikální smysl a rozšířil je na všechny fyzikální zákony dosavadní Newtonovy mechaniky, hlavně na zákon o zachování hybnosti, momentu hybnosti a hmotnosti (ovšem tzv. "relativistické" hmotnosti - viz dále). Přesný důkaz obecného principu zachování ale podala Emmy **Noetherová** až v r.1919 ve svém 1. teorému. Za speciální teorii relativity byl Einstein v r.1912 spolu s Lorentzem neúspěšně navržen na Nobelovu cenu (byla mu udělena až v r.1921, ale za "příspěvky k teoretické fyzice" a fotoelektrický jev; Lorentz už jednu měl z r.1902 za magnetizmus). Nobelovský výbor byl zprvu vůči teorii relativity nedůvěřivý a vyčkával na její experimentální potvrzení, které přinesl až Eddingtonův pokus v r.1919.

**Einsteinovy dva základní výchozí předpoklady ve speciální teorii relativity:**

**1. Všechny fyzikální děje probíhají z hlediska libovolné inerciální soustavy podle stejných zákonů**
(v r.1915 Einstein dokončil **obecnou teorii relativity**, ve které stejné zákony platí i v neinerciálních soustavách).

**2. Světlo se ve vakuu šíří konstantní rychlostí $c$, která nezávisí na pohybovém stavu zdroje.**

### 4.5.1 Skládání rychlostí

Podobně jako u Galileovy transformace předpokládáme, že rychlosti mají směr osy $x$, viz **obr.5**. Východiskem je nyní ale Lorentzova transformace:

- bod **A** se v soustavě **Oxyz** pohybuje ve směru kladné osy $x$ rychlostí $u = \frac{dx}{dt}$. Z rovnic (14) a (15) platí

$$dx = \frac{dx_1 + V dt_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dt = \frac{dt_1 + \frac{V}{c^2} dx_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad u = \frac{dx_1 + V dt_1}{dt_1 + \frac{V}{c^2} dx_1} = \frac{dx_1/dt_1 + V}{1 + \frac{V}{c^2} dx_1/dt_1}$$

V soustavě $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ má bod **A** rychlost $u_1 = \frac{dx_1}{dt_1}$, takže

$$u = \frac{u_1 + V}{1 + u_1 V/c^2}, \quad u_1 = \frac{u - V}{1 - uV/c^2} \tag{17}$$

Pro $u, V << c$ (v mezním případě $uV/c^2 \to 0$) nutně platí Galileova transformace (5). Všechny inverzní vztahy v (14), (15) a (17) se liší jen záměnou indexovaných a neindexovaných veličin $x \leftrightarrow x_1$, $t \leftrightarrow t_1$, $u \leftrightarrow u_1$ a znaménkem před rychlostí $V$ !!

***Příklad 5:*** *Je-li $u = c$, potom $u_1 = \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = c$ bez ohledu na velikost $V$. Tím je potvrzen výsledek Michelsonova pokusu a **invariance rychlosti světla v Lorentzově transformaci**.*

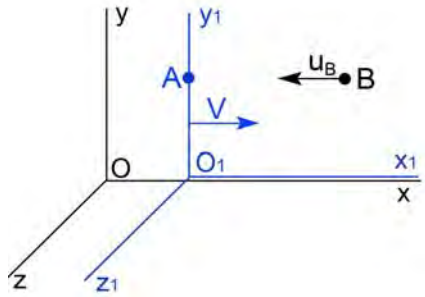
***Příklad 6:*** *Dvě částice **A,B** letí proti sobě shodnou rychlostí $kc$, kde konstanta $k \leq 1$. Jaká je jejich vzájemná rychlost?*

***Řešení:*** *vzájemnou rychlost soustav **O**,**O₁** položíme rovnu $V = kc$. Protisměrný pohyb obou částic si představíme v soustavě **O** tak, že částice **B** se v ní pohybuje rychlostí $u_B = -kc$ a částici **A** znehybníme v soustavě **O₁** (viz **obr.8**). Je tedy $u_{1A} = 0$ a podle prvního vztahu v (17) je její rychlost v soustavě **O** rovna $u_A = V = kc$. Pohyb obou částic se v soustavě **O₁** jeví jako pohyb částice **B** rychlostí $u_{1B}$ vůči nehybné částici **A**. Podle druhého vztahu v (17) je tedy vzájemná rychlost*

$$u_{1B} = \frac{u_B - V}{1 - u_B V/c^2} = \frac{-2k}{1 + k^2} c$$

*Např. pro* $k=0{,}8$ *je* $u_{1B}=\dfrac{-1{,}6c}{1{,}64}=-0{,}976c$, *pro* $k=1$ *je* $u_{1B}=-c$.

*Vychází záporné číslo, neboť pozorovatel stojí spolu s částicí **A** v systému **O₁** a částice **B** se vůči němu pohybuje směrem vlevo. Vzájemná rychlost přibližování (nebo vzdalování) obou částic nikdy nemůže překročit rychlost světla* $c$.



***Obr.8** Skládání rychlostí podle Einsteina*

***Poznámka:** Má-li rychlost* $u$ *obecný směr, je nutný její rozklad a vztah (17) lze použít jen pro složku* $u_x$, *rovnoběžnou se směrem vzájemného pohybu soustav **O**, **O₁**. Protože je* $dy=dy_1$, $dz=dz_1$, $dt=\dfrac{dt_1+\dfrac{V}{c^2}dx_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$,

*platí pro další složky:* $u_y=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy_1\sqrt{1-V^2/c^2}}{dt_1+\dfrac{V}{c^2}dx_1}$, $u_z=\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{dz_1\sqrt{1-V^2/c^2}}{dt_1+\dfrac{V}{c^2}dx_1}$ *a po úpravách*

$$u_y=\frac{u_{1y}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+u_{1x}V/c^2} \qquad u_z=\frac{u_{1z}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+u_{1x}V/c^2} \tag{17a}$$

*Inverzní vztahy jsou*

$$u_{1y}=\frac{u_y\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-u_xV/c^2} \qquad u_{1z}=\frac{u_z\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-u_xV/c^2} \tag{17b}$$

## 4.5.2 Hmotnost roste s rychlostí

Při aplikaci kinematických důsledků Lorentzovy transformace do dynamiky si Einstein uvědomil, že vliv rychlosti na čas a rozměry je nutno rozšířit i na hmotnost a zavést tyto pojmy:

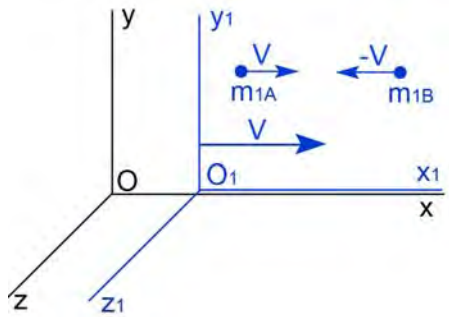
- klidová hmotnost $m_0$ v dané soustavě ..... částice se v této soustavě nepohybuje;
- relativistická hmotnost $m(u)$ .... částice se v dané soustavě pohybuje rychlostí $u$.

Nejnázornější vysvětlení tohoto jevu podali v r.1909 Tolman a Lewis na rázu dvou částic (viz **obr.9**).

Nadále platí, že soustavy **O**, **O₁** se vůči sobě pohybují rychlostí $V$. Předpokládejme, že soustavě **O₁** dojde k dokonale nepružnému rázu **dvou stejných částic A**,**B** se stejnými rychlostmi, ale opačného směru: $u_{1A}=V$, $u_{1B}=-V$. Relativistické hmotnosti v soustavě **O₁** jsou tedy stejné: $m_{1A}=m_{1B}$. Rychlost $U_1$ vzniklé částice s hmotností $m_{1A}+m_{1B}$ zjistíme ze zachování hybnosti:

$$m_{1A}V-m_{1B}V=0=(m_{1A}+m_{1B})U_1$$

Vzniklá částice je tedy vůči soustavě **O₁** v klidu, $U_1=0$.



***Obr.9** Srážka dvou shodných částic*

**Popis srážky z hlediska soustavy O**: podle prvního vztahu v (17) budou rychlosti

$$u_A=\frac{2V}{1+V^2/c^2},\quad u_B=\frac{-V+V}{1-V^2/c^2}=0,\quad U=\frac{U_1+V}{1+U_1V/c^2}=V \tag{18}$$

Částice **B** je v soustavě **O** v klidu, takže její hmotnost je $m_B=m_0$. Zachování hybnosti v soustavě **O**:

$$m_Au_A+m_Bu_B=m_Au_A=(m_A+m_B)V \tag{19}$$

***Poznámka:** Protože rychlosti* $u_A,u_B$ *jsou různé, musí být různé i hmotnosti* $m_A,m_B$. *Kdyby byly stejné (tj.* $m_A=m_B=m$*), dostali bychom z (19):* $\dfrac{2mV}{1+V^2/c^2}=2mV$, *tedy spor !!*

Dosazením za rychlosti z (18) a vydělením hodnotou $m_B=m_0$ vychází z (19)

$$\frac{m_A}{m_0}\cdot\frac{2Vc^2}{c^2+V^2}=\left(\frac{m_A}{m_0}+1\right)V$$

a po úpravě

$$m_A=m_0\frac{c^2+V^2}{c^2-V^2} \tag{20}$$

Protože částice **A**,**B** byly předpokládány stejné a tudíž jsou stejné i jejich klidové hmotnosti, lze vztah (20) obecně interpretovat takto:

- při změně rychlosti z klidu na hodnotu $u=\dfrac{2V}{1+V^2/c^2}$ (21)

změní částice svou klidovou hmotnost $m_0$ na hmotnost $m=m_0\dfrac{c^2+V^2}{c^2-V^2}$ (22)

Dále provedeme jednoduchou algebraickou úpravu výrazu $1-u^2/c^2$ pomocí (21):

$$1-\frac{u^2}{c^2}=1-\frac{\left(\dfrac{2Vc^2}{c^2+V^2}\right)^2}{c^2}=1-\frac{4V^2c^2}{\left(c^2+V^2\right)^2}=\frac{\left(c^2+V^2\right)^2-4V^2c^2}{\left(c^2+V^2\right)^2}=\frac{\left(c^2-V^2\right)^2}{\left(c^2+V^2\right)^2}\text{, tj. }\frac{c^2-V^2}{c^2+V^2}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

a dosazením do (22) vychází konečně **obecně platný vztah mezi relativistickou a klidovou hmotností:**

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{23}$$

Pro relativistickou hmotnost jedné částice platí při různých rychlostech $u_1,u_2$ vztah $\dfrac{m_1}{m_2}=\sqrt{\dfrac{1-u_2^2/c^2}{1-u_1^2/c^2}}$ (24)

Hmotnost částice roste s rychlostí nade všechny meze, neboť pro $u\to c$ je $m\to\infty$.

***Poznámka:*** *Ve výše uvedených výpočtech si povšimněme, že princip zachování hmotnosti platí uvnitř každé vztažné soustavy, ale* ***mezi soustavami neplatí****: v klasické fyzice vznikne srážkou jedna částice s dvojnásobkem klidové hmotnosti, tj.* $2m_0$*, ale v relativistické fyzice*

*- v soustavě* ***O*** *je výsledná hmotnost* $m_C=m_A+m_B=m_0\dfrac{c^2+V^2}{c^2-V^2}+m_0=\dfrac{2m_0}{1-V^2/c^2}$*;*

*- v soustavě* ***O₁*** *byly předpokládány rychlosti obou částic* $\pm V$*, takže hmotnosti jsou*

$m_{1A}=m_{2A}=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ *a výsledná hmotnost je* $m_{1C}=m_{1A}+m_{1B}=\dfrac{2m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$.

*Ve všech třech případech jsme dospěli k různým relativistickým hmotnostem:* $2m_0\neq m_C\neq m_{1C}$*. Výsledek je v souladu se vztahem (24), neboť rychlosti výsledné částice při vzájemné rychlosti* $V$ *obou soustav jsou* $U=V,\ U_1=0$*, takže* $\dfrac{m_C}{m_{1C}}=\sqrt{\dfrac{1-U_1^2/c^2}{1-U^2/c^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$.

### 4.5.3 Ekvivalence hmotnosti a energie (E=mc²)

Tuto slavnou rovnici zveřejnil Einstein 27. září 1905 ve svém třístránkovém článku *„Závisí setrvačnost tělesa na jeho energii?“* v časopisu *Annalen der Physik 18*, str.639-641. Jedná se o jeden z nejvýznamnějších vědeckých poznatků v historii.

**Předpoklady:**

Jsou zachovány základní souvislosti z klasické fyziky:

- element dráhy = rychlost x element času ..... $d\mathbf{s}=\mathbf{u}dt$;
- element práce = síla x element dráhy ..... $dW=\mathbf{F}d\mathbf{s}$ (skalární součin);
- přírůstek kinetické energie = element práce ..... $dE_K=dW=\mathbf{F}d\mathbf{s}=\mathbf{F}\mathbf{u}dt$, $\dfrac{dE_K}{dt}=\mathbf{F}\mathbf{u}$ (25)
- hybnost = hmotnost x rychlost. Hmotnost ale bude podle (23) záviset na rychlosti, takže

$$\mathbf{H}=m\mathbf{u}=\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{26}$$

**Pro pojem "síla" je zachována Newtonova formulace podle jeho 2. zákona:**

- časová změna hybnosti je rovna působící síle ..... $\mathbf{F}=\dfrac{d\mathbf{H}}{dt}=\dfrac{d(m\mathbf{u})}{dt}$ (27)

**Klasická fyzika** zná jen klidovou hmotnost $m_0$, která se s rychlostí nemění. Pro sílu tedy platí

$$\mathbf{F}=\frac{d(m_0\mathbf{u})}{dt}=m_0\frac{d\mathbf{u}}{dt}=m_0\mathbf{a} \tag{28}$$

**V klasické fyzice má zrychlení vždy směr působící síly**. Při rozjezdu hmoty z počátečního klidového stavu má stejný směr se silou i přírůstek dráhy a rychlosti, takže není nutný vektorový zápis a při $m=konst=m_0$ vychází po integraci (25)

$$E_K = \int F ds = \int m_0 \frac{du}{dt} u dt = m_0 \int_0^u u du = \frac{1}{2} m_0 u^2$$

**Relativistická fyzika** rozeznává klidovou hmotnost $m_0$ a okamžitou hmotnost

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow m^2\left(c^2 - u^2\right) = m_0^2 c^2 \tag{29}$$

Přírůstek rychlosti $du$ je doprovázen přírůstkem hmotnosti $dm$. Přírůstek kinetické energie $dE_K$ zjistíme stejně jako v klasické fyzice (opět za předpokladu počátečního klidového stavu):

$$dE_K = F ds = \frac{d(mu)}{dt} u dt = u d(mu) = u(u dm + m du) = u^2 dm + u m du$$

Až sem platí 2.Newtonův zákon s tím, že nyní je $dm \neq 0$. Diferencováním (29) vychází $2m dm\left(c^2 - u^2\right) + m^2(-2u du) = 0 \quad \Rightarrow \quad dm\left(c^2 - u^2\right) = u m du$ a dosazením do předchozího vztahu je

$$dE_K = u^2 dm + dm\left(c^2 - u^2\right) = c^2 dm \tag{30}$$

Urychlením z klidu na rychlost $u$ naroste hmotnost z $m_0$ na $m$ a získá se kinetická energie

$$E_K = \int_{m_0}^{m} c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2 \tag{31}$$

***Poznámka:*** *Vztah (31) upravíme do tvaru* $E_K = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1 \right)$. *V zobecněné binomické větě* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots$ *lze pro* $x = \frac{u}{c} << 1$ *zanedbat členy s vyššími mocninami než dvě a vychází známý vztah z klasické fyziky* $E_K \approx \frac{1}{2} m_0 u^2$.

Jestliže nárůst klidové hmotnosti $m_0$ o hodnotu $\Delta m = m - m_0$ je spojen s nárůstem energie, vzniká otázka, co představuje druhý člen na pravé straně (31). Einstein dospěl k názoru, že se musí jednat o energii stojící částice (tzv. "**klidovou energii**"), ekvivalentní ke klidové hmotnosti:

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{32}$$

Hmota je tedy jen další formou energie a celková energie pohybující se částice je

$$E = E_K + E_0 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{33}$$

***Poznámky: 1)*** *V klasické Newtonově mechanice platí zákony o zachování energie a zachování hmoty odděleně, kdežto v teorii relativity pojmy hmota a energie splývají, takže pro ně platí jeden společný zákon.*

***2)*** *Jeden kilogram hmoty je ekvivalentem energie* $c^2 = 9\cdot 10^{16} J$, *tedy* $9\cdot 10^{13}/3600 = 25\cdot 10^9 kWh$, *tj.* $21{,}5\cdot 10^{12} kcal$. *To by teoreticky stačilo k ohřevu* $10^{12} l$ *vody (krychle o hraně 1km) o 21,5°C, nebo k pokrytí celoročního tepelného výkonu (asi 3000 MW) jednoho reaktoru temelínské elektrárny. Udává se, že úplným rozštěpením všech jader uranu* $^{235}U$ *by bylo možno získat jen jedno promile z této hodnoty, tj.* $9\cdot 10^{13} J/kg$. *V současných jaderných reaktorech se používá palivo, obohacené uranem* $^{235}U$ *na 4-5% a produkce tepla je okolo* $4\cdot 10^{12} J/kg$, *což vznikne spálením asi 160 tun černého uhlí.*

*Veškerá přeměna hmoty na energii podle vztahu (32) je možná jen vzájemnou anihilací částic a antičástic, což se v nám známé části vesmíru děje jen v nepatrné míře.*

***3)*** *Souvislost energie a hmoty byla pozorována a zkoumána odedávna (např. pomocí ohně): udává se, že* ***Toricelli*** *pálil koňské žíně pod skleněným poklopem a čichem zkoumal, neuniká-li mu hmota.*

## 4.5.4 Síla, pohybová rovnice, hybnost a energie ("Pythagorova věta“)

***Úvodní poznámka: co je to vlastně síla?*** *V přírodě jsou známy čtyři druhy interakcí (silového působení):* ***silná jaderná, elektromagnetická, slabá jaderná a gravitační****, která je sice nejslabší, ale působí univerzálně na všechny částice, nedá se žádným způsobem odstínit a účinkuje na velké vzdálenosti, takže má zásadní význam v astronomii. Její účinek je ve srovnání s ostatními silovými interakcemi nejmenší: např. elektrická odpudivá síla dvou elektronů je* $4\cdot 10^{42}$ *- krát větší, než jejich gravitační síla přitažlivá.*

*Celá Newtonova fyzika je založena na pojmu síly. Sám Newton předpokládal okamžité silové působení mezi tělesy (tj. nekonečně velkou rychlost jeho šíření), ale u gravitace nerozuměl bezkontaktnímu působení "na dálku". Pojem "gravitační pole" v jeho době nebyl znám. Na otázky o podstatě gravitační síly a hranici rychlosti*

*jejího šíření odpovídal výrokem "hypotézami se nezabývám". Až z Einsteinovy teorie relativity vyplynulo, že silové působení (stejně jako každá jiná informace) se může šířit maximálně rychlostí světla a podle této teorie* ***je gravitace projevem zakřivení časoprostoru****. „Přesně vzato Země se pohybuje kolem Slunce po elipse nikoli proto, že by na ni působila gravitační síla, ale proto, že Slunce pokřivilo prostor a čas kolem sebe a elipsa je nejrovnější možnou dráhou v tomto pokřiveném světě“ (****[34]****). Čas a prostor v obecné relativitě vytvářejí tělesa samotná. V této souvislosti podotýkáme, že již v 17. století definoval Gottfried* ***Leibniz*** *prostor jakožto "****projev přítomnosti hmotných těles****" a Georg Friedrich Bernhard* ***Riemann*** *vyslovil 50 let před příchodem obecné teorie relativity názor, že "****prostor je závislý na rozložení hmoty****".*
*„Znalost síly umožňuje předpovídat pohyby těles pomocí pohybových zákonů a rovnic. Pokud chápeme znalost síly jen jako znalost vhodného matematického předpisu, je vše v pořádku. Jakmile se ale pokusíme sílu nějak definovat, narazíme na potíže. Zatím se to nikomu nepodařilo a všechny definice síly končí v kruhu“ (****[34]****).*

*Odhlédneme-li od Newtonovy formulace jeho 2. zákona* $Fdt = d(mv)$ *(který je bohužel často interpretován ve zkomoleném tvaru* $F = m\,dv/dt = ma$ *, předpokládajícím neměnnou hmotnost), máme dnes k dispozici dva zatím ne zcela uspokojivé výklady pro gravitační sílu:*
*- podle obecné teorie relativity je gravitace způsobena zakřivením časoprostoru;*
*- pomocí kvantové teorie pole je možno vysvětlit elektromagnetickou, silnou a slabou interakci a u gravitace se předpokládá, že je způsobena virtuálními nehmotnými částicemi – gravitony. Jejich existence je zatím předpovězena teoreticky, ale dosud nebyly zpozorovány.*
*S. Hawking již v osmdesátých letech minulého století předpovídal, že během několika málo let dojde ke sjednocení obou přístupů a k vytvoření obecné kvantové teorie gravitace, pro kterou již byl přijat název „Teorie všeho“ (****T****heory* ***O****f* ***E****verything,* ***TOE****). Zatím k tomu bohužel ještě nedošlo.*

Podle speciální teorie relativity se v každé inerciální soustavě zachovává energie a hybnost. Síla je až "druhotným" pojmem, odvozeným od hybnosti - viz (27). Pohybová rovnice bude mít oproti (28) složitější tvar. Provedením derivace v (27) vychází

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \tag{34}$$

kde $\mathbf{a}$ je okamžité zrychlení. Spojením (30) a (25) vychází $c^2\frac{dm}{dt} = \mathbf{Fu}$ a dosazením do (34) získáváme konečný vztah mezi zrychlením částice, silou na ni působící a navíc i rychlostí částice:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{dm}{dt}\mathbf{u} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{Fu}}{c^2}\mathbf{u} \tag{35}$$

Je zřejmé, že **zrychlení nemusí mít vždy směr působící síly**, neboť na rozdíl od (28) přistupuje člen s rychlostí, která nemá pokaždé shodný směr se silou. To je zásadní rozdíl oproti klasické mechanice, kde jsou směry působící síly a zrychlení vždy shodné.

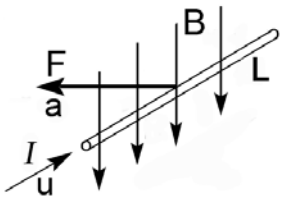
***Příklad 7****: Uvedeme dva typické příklady, ve kterých se směry síly i zrychlení shodují:*
***a) Síla má směr rychlosti:*** *jedná se např. o pohyb elektronu v elektrickém poli. Skalární součin v rovnici (35) je*

$$\frac{\mathbf{Fu}}{c^2}\mathbf{u} = F\frac{u^2}{c^2} \quad \text{a zrychlení} \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_0}\sqrt{\left(1-u^2/c^2\right)^3} \tag{35a}$$

***b) Síla je kolmá na rychlost (obr.10):*** *tento případ se v praxi vyskytuje u cyklických urychlovačů nabitých částic, které využívají tzv.* ***Lorentzovu sílu****, působící na elektrický náboj, pohybující se ve stacionárním magnetickém poli. Její velikost je dána vektorovým součinem*

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u}\times\mathbf{B}$$

*kde* $q$ *je elektrický náboj částice,* $\mathbf{u}$ *její rychlost a* $\mathbf{B}$ *magnetická indukce pole. Směr vektorového součinu určíme známým pravidlem "pravotočivé vývrtky". Skalární součin v rovnici (35) je tedy* $\mathbf{Fu} = 0$ *a zrychlení*



***Obr.10*** *Pravidlo levé ruky*

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_0}\sqrt{1-u^2/c^2} \tag{35b}$$

***Poznámka****: V technické praxi elektrických pohonů (samozřejmě v podrelativistické oblasti, neboť elektrony se ve vodičích pohybují rychlostí jen několik milimetrů za vteřinu) je Lorentzova síla interpretována* ***Ampérovým zákonem*** *a pravidlem levé ruky podle* ***obr.10****: délka vodiče je* $\mathbf{L}$*, rychlost elektronů* $\mathbf{u} = \mathbf{L}/t$*, protékající proud (náboj za jednotku času)* $I = q/t$*, takže síla na vodič je* $\mathbf{F} = It\frac{\mathbf{L}}{t}\times\mathbf{B} = I\,\mathbf{L}\times\mathbf{B}$*, siločáry míří do dlaně levé ruky, prsty ukazují směr proudu, palec směr síly. Svůj zákon Ampér odvodil před Lorentzem již v r.1826 (podle vlastních slov "výlučně z pokusů").*

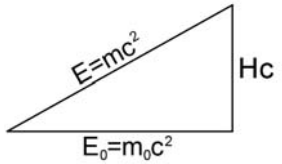
**Vztah mezi hybností a energií:** po umocnění (26) vychází

$\frac{u^2}{c^2}=\frac{H^2}{m_0^2c^2+H^2}$, takže energie je $E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{H^2}{m_0^2c^2+H^2}}}$ a po úpravě bude

$$E^2=m_0^2c^4+H^2c^2=E_0^2+H^2c^2 \qquad (36)$$

Rovnici $E=mc^2$ vynásobíme rychlostí částice $\mathbf{u}$ a vychází další důležitá souvislost mezi energií a hybností

$$E\mathbf{u}=m\mathbf{u}c^2=\mathbf{H}c^2 \qquad (36a)$$




***Obr.11*** *"Pythagorova věta" pro energii a hybnost*

***Příklad 8****: Vztah (36) (tzv.* ***"Pythagorovu" větu*** *- viz* ***obr.11****) ověříme na částici, vzniklé po srážce, zmíněné v předchozích úvahách:*

***a)*** *V soustavě* ***O*** *byla hmotnost po srážce* $m_C=\frac{2m_0}{1-V^2/c^2}$, *rychlost* $V$, *hybnost* $H=\frac{2m_0V}{1-V^2/c^2}$. *Klidová hmotnost je* $m_{C0}=m_C\sqrt{1-V^2/c^2}=\frac{2m_0}{1-V^2/c^2}\sqrt{1-V^2/c^2}=\frac{2m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$

*Pravá strana (36) je* $m_{C0}^2c^4+H^2c^2=\frac{4m_0^2c^4}{1-V^2/c^2}+\frac{4m_0^2V^2c^2}{\left(1-V^2/c^2\right)^2}=\frac{4m_0^2c^4\left(1-V^2/c^2\right)+4m_0^2V^2c^2}{\left(1-V^2/c^2\right)^2}=\frac{4m_0^2c^4}{\left(1-V^2/c^2\right)^2}$

*Energie* $E=m_Cc^2=\frac{2m_0c^2}{1-V^2/c^2}$, *takže levá strana (36) je stejná:* $E^2=\frac{4m_0^2c^4}{\left(1-V^2/c^2\right)^2}$

***b)*** *V soustavě* $\mathbf{O_1}$ *jsou rychlosti obou částic* $\pm V$, *hmotnosti jsou* $m_{1A}=m_{2A}=\frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ *a výsledná hmotnost je* $m_{1C}=\frac{2m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$. *Rychlost i hybnost jsou nulové, takže klidová hmotnost* $m_{1C0}=m_{1C}=\frac{2m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$. *Energie je* $E_1=m_{1C}c^2=\frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$.

*Pravá strana (36) je* $m_{1C0}^2c^4=\frac{4m_0^2c^4}{1-V^2/c^2}$, *levá strana* $E_1^2=\frac{4m_0^2c^4}{1-V^2/c^2}$.

***Závěrečná poznámka****: Ve všech výše uvedených rovnicích speciální teorie relativity počínaje (7) stačí dosadit nekonečnou rychlost světla* $c\to\infty$ *a získáme vztahy platné v klasické Newtonově mechanice.*

## 4.6 Minkowskiho čtyřrozměrný časoprostor

*Hermann* ***Minkowski*** *(ve své slavné přednášce o časoprostoru dne 21.9.1908):*
*„Prostor sám a čas jsou napříště odsouzeny ke zmizení do pouhých stínů*
*a pouze spojení obou si zachová skutečně nezávislou existenci."*

*Jaroslav* ***Hašek („Osudy dobrého vojáka Švejka")****:*
*"Latrinengenerál mluvil nyní o něčem v minulosti, o tom, co se nestalo, co bylo jaksi za nějakým druhým rohem.*
*Stál tu jako přízrak z říše čtvrté dimenze".*

Zde je třeba dodat, že Hašek (1883 - 1923) žil a tvořil v období, kdy teorie relativity vznikala a se svými novými pojmy a představami si teprve razila cestu do obecného povědomí. Je pravděpodobné, že Hašek – syn suplujícího profesora matematiky a fyziky a podle svědků i matematicky nadaný – byl novými pojmy a poznatky alespoň okrajově zasažen. Je dokonce možné, že se osobně setkal s Albertem Einsteinem, který v r. 1911-12 přednášel na Ústavu teoretické fyziky Karlo-Ferdinandovy univerzity na Karlově v Praze 2. Místem setkání mohl být např. blízký hostinec U Kalicha Na Bojišti, kam kromě Haška docházeli dozorci ze sousedícího Českého zemského ústavu pro choromyslné (a možná i Haškem zmiňovaní profesoři Kuffner a Heveroch) a kde jistě docházelo k výměně názorů. Z Haškova románu uvádíme některé Švejkovy výroky, mající ve světle moderní fyziky hlubší význam:

***Kap.4 ( „Švejka vyhodili z blázince"):***

*- „jeden tam byl pořád ve svěrací kazajce, aby nemohl vypočítat, kdy bude konec světa";*
*- „v blázinci bylo mnoho šachistů, politiků,…několik profesorů… jeden tvrdil, že uvnitř zeměkoule je ještě jedna mnohem větší než ta vrchní"* (že v různých inerciálních soustavách jsou různé délky, plochy a objemy, bylo již známo od r.1905 ze speciální teorie relativity).

V románu se vyskytuje i množství odborných astronomických termínů a čísel, např.:
*- rozbor účinnosti facky při uvažování místního gravitačního pole ("pozemská, měsíční, sluneční facka");*
- výsměch jednoročního dobrovolníka Marka na adresu nafoukaného desátníka:

*"Co jste vlastně proti vesmíru, když považíte, že nejbližší nám stálice je od tohoto vojenského vlaku vzdálena 275.000krát než slunce, aby její paralaxa tvořila jednu obloukovou vteřinu. Kdyby vy jste se nacházel ve vesmíru jako stálice, byl byste rozhodně příliš nepatrným, aby vás mohly postřehnout nejlepší hvězdářské přístroje. Pro vaši nepatrnost ve vesmíru není pojmu...Za rok byste udělal na obloze maličkou elipsu, pro vyjádření kteréž číslicemi není vůbec pojmu...Vaše paralaxa byla by neměřitelnou"* (zmíněná stálice - červený trpaslík Proxima Centauri - byla objevena v r.1915. Jednoroční dobrovolník vypočítal vzdálenost 4,36 světelných let, dnes se udává 4,22 světelných let a paralaxa necelých 0,8 vteřiny)

.... atd....

Hermann **Minkowski** (1864 – 1909) svým pojmem "**čtyřrozměrný časoprostor**" doplnil a dovršil formální podobu speciální teorie relativity. Jeho tzv. Minkowskiho geometrii zde objasníme jen do té míry, aby si čtenář ujasnil polem „světočára" a „světelný kužel". Inspirací mu byla Pythagorova věta v trojrozměrném eukleidovském prostoru, kde pro přírůstek vzdálenosti $dL$ platí

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \tag{37}$$

a v Galileově transformaci je tato rovnice kovariantní (tj. vzdálenost mezi dvěma body se ve všech souřadných soustavách zachovává). Minkowski formálně zrovnoprávnil čas s geometrickými délkami tak, že jej interpretoval jako imaginární délku $jcdt$, kterou urazí světlo za čas $dt$ a úpravou vztahu (10) získal čtyřrozměrnou obdobu Pythagorovy věty (37), kde pro přírůstek $ds$ platí obdobně

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (jcdt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2 \tag{38}$$

Tato rovnice je opět kovariantní, ale v transformaci Lorentzově a je jí definován čtyřrozměrný časoprostor se souřadnicemi $ct, x, y, z$. Veličina $s$ je stejná ve všech vztažných soustavách, obsahuje časovou i prostorovou souřadnici a nemá význam vzdálenosti, nýbrž **intervalu mezi událostmi v časoprostoru**. Každou událost si v něm lze představit opět jako „bod" (nebo též název „**světobod**"), ale bez možnosti doposud obvyklého eukleidovského zobrazení. Pro kvadrát vzdálenosti $L$ dvou bodů v eukleidovském prostoru platí (37) a kvadrát časoprostorového intervalu je tedy

$$(ds)^2 = (dL)^2 - (cdt)^2 \tag{39}$$

Na rozdíl od (37) může být na pravé straně (39) i záporná hodnota.
Pro snazší pochopení Minkowskiho geometrie zredukujeme v dalším výkladu tři eukleidovské prostorové souřadnice $x, y, z$ na pouhou jednu, takže $L = x$ a z (39) vyplývá

$$s^2 = x^2 - c^2t^2$$

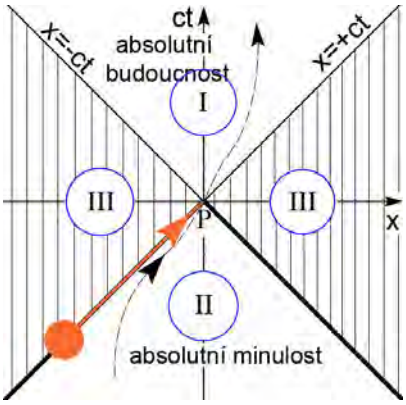
Události budou probíhat pouze na ose $x$ v libovolném čase $t$. Čtyřrozměrný časoprostor je nyní možno zobrazit klasickým dvojrozměrným grafem v souřadnicích $x, ct$ (tzv. Minkowskiho diagramem, viz **obr.12**). V něm jsou důležité dvě přímky s rovnicemi $s = 0$ (neboli $x = ct$, $x = -ct$), které rozdělují rovinu na tři oblasti:

**I.** $x^2 \le (ct)^2$, $t > 0$

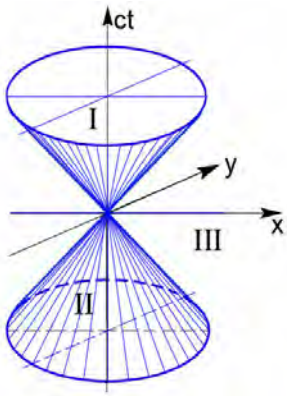
**II.** $x^2 \le (ct)^2$, $t < 0$

**III.** $x^2 > (ct)^2$

Při Lorentzově transformaci mezi různými vztažnými systémy se tedy mohou měnit veličiny $L$ i $t$, ale veličina $s$ zůstane stejná.




***Obr.12*** *Minkowskiho rovinný diagram*




***Obr.13*** *Minkowskiho světelný dvojkužel*

***Poznámky:*** ***1)*** *Někdy se při názorném výkladu Minkowskiho geometrie redukují tři eukleidovské prostorové souřadnice $x, y, z$ na dvě, takže se vychází ze vztahu $s^2 = x^2 + y^2 - c^2t^2$, který lze ještě zobrazit trojrozměrně v souřadnicích $x, y, ct$. Namísto rozdělení roviny na oblasti* **I**, **II**, **III** *dojde k rozdělení prostoru na podprostory tzv.* ***světelným dvojkuželem*** *s vrcholovým úhlem $45^0$, popsaným rovnicí $x^2 + y^2 = c^2t^2$, viz* ***obr.13****. Grafické znázornění úplného čtyřrozměrného časoprostoru již není možné a používá se jen dvoj- nebo trojrozměrné zobrazení podle* ***obr.12,13*** *s tím, že vodorovná osa $x$ (nebo rovina $x, y$) jsou označeny obecně jako "prostor" a svislá osa jako "čas". Dále se přidržíme pouze dvojrozměrného zobrazení podle* ***obr.12*** *s tím, že pro oblasti* **I**, **II** *nadále zachováme název „světelný dvojkužel".*

***2)*** *Seřazením čtyř souřadnic časoprostorů $ct, x, y, z$ a $ct_1, x_1, y_1, z_1$ do sloupcových tzv. „čtyřvektorů" je možno Lorentzovu transformaci délek a času (14) a (15) pro pohyb v ose $x$ vyjádřit v maticové podobě*

$$\begin{bmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma V/c & 0 & 0 \\ -\gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (40)$$

*kde* $\mathbf{\Lambda}$ *je tzv. Lorentzova matice a* $\gamma = \left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2}$ *je nám již známý Lorentzův faktor. Snadno se přesvědčíme, že* $\det(\mathbf{\Lambda}) = 1$ *a že obrácená transformace ze soustavy* ***O₁*** *do* ***O*** *proběhne pomocí inverzní matice* $\mathbf{\Lambda}^{-1}$*, která se od původní liší pouze záporným znaménkem u rychlosti* $V$ *.*

Množina světobodů, popisujících sled souvisejících událostí, kterými nějaký objekt prošel (jeho pohyb v čase a prostoru) je tzv. **světočára**. Světočára hmotného tělesa musí ležet uvnitř světelného dvojkužele **I**, **II**, neboť jeho rychlost nemůže překročit rychlost světla, tj. $|x| < |ct|$ (viz čárkované křivky v **obr.12**). Pouze světočára světla (fotonu) leží na povrchu kužele. Světobod události, probíhající v současnosti, je kladen do počátku souřadného systému **P** $(x = 0, t = 0)$. Světobody všech událostí, které mohly ovlivnit událost **P**, leží v oblasti **II** (v tzv. „minulém světelném kuželu“), která zobrazuje „absolutní minulost“ a která je relevantní v úvahách o dosavadním vývoji vesmíru. Například sluneční světlo, které dnes pozorujeme, urazilo vzdálenost 8 světelných minut a bylo Sluncem vyzářeno před 8 minutami. Světobod události vyzáření a světočára slunečního světla jsou v **obr.12** naznačeny oranžově. Naopak světobody všech událostí, které mohou být událostí **P** ovlivněny, leží v oblasti **I** (v tzv. „budoucím světelném kuželu“), který zobrazuje „absolutní budoucnost“.
U vzdálených hvězd a galaxií přistupuje vliv rozpínání prostoru. Minulý světelný kužel se deformuje do tvaru kapky tak, že jeho meridián (světočára světla) již není přímkou, ale při směřování do dávné minulosti vesmíru se zakřivuje a míří k bodu $x \approx 0$ a $t \approx -13{,}8$ miliard světelných let, tedy do doby vzniku vesmíru (viz **obr.4s1,3**).

Blíže o Minkowskiho geometrii viz např. **[17]**.

# B. STRUČNĚ Z HISTORIE MATEMATIKY

*Motto:* $x^n + y^n = z^n$ *... pro* $n = 2$ *nekonečně mnoho celočíselných řešení (důkaz: Eukleides)*

*pro* $n = 3,4,5.....\infty$ *žádné řešení (tvrzení: Fermat 17.stol., důkaz Wiles 1994 )*

## B1. Rozdíl mezi matematikou a fyzikou

**Matematika** je exaktní věda. Matematický důkaz je konečný a nevyvratitelný. Například:
- **Platon** ve 4.stol.př.n.l dokázal, že pravidelných těles (všechny vrcholy na kouli) je jen pět:
4-,6-,8-,12- a 20-stěn.

Z toho např. vyplývá, že nelze vytvořit pravidelně ozubenou kouli s více než 20 zuby;
- **Fermat** (1601 - 1665) vyslovil tvrzení, že neexistuje celočíselná čtveřice *x,y,z,n>2* , splňující rovnici

$$x^n + y^n = z^n$$

Pro *n=3* dokázal tuto tzv. Velkou Fermatovu větu Euler (v r. 1753). Nikdo se dnes nesnaží najít celočíselné řešení rovnice $x^3 + y^3 = z^3$ nebo vytvořit pravidelně ozubenou kouli pro *z>20*, protože předem ví, že to nejde.

**Fyzika** je přírodní věda, založená na pozorování světa a proto neexistuje definitivní důkaz nějaké fyzikální teorie. Např. obecná teorie relativity je známa a používána 100 let a potvrzuje ji množství měření, ale jediný pokus s protichůdným výsledkem by ji mohl zcela zpochybnit. Mnoho lidí se o to stále a neúspěšně snaží. Mezi fyziky platí zásada „jeden důkaz – žádný důkaz“ a každá fyzikální teorie se stále ověřuje novými postupy.

***Poznámka:*** *Matematické konstanty (Ludolfovo číslo, Eulerovo číslo atd.) lze na rozdíl od konstant fyzikálních určit na libovolný počet desetinných míst (např. u čísla* $\pi$ *to v r. 2000 bylo přes 200miliard míst). Fyzikální konstanty je nutno chápat jen jako interval hodnot s neostrými hranicemi.*

**Přístup fyzika** demonstruje následující odpověď na otázku školní zkušební komise: „**Jak změříte výšku mrakodrapu, máte-li k dispozici barometr?“** (podle nezaručených pramenů se jednalo o zkoušku z fyziky žáka **W. Pauliho**, pozdějšího nositele Nobelovy ceny za vylučovací princip v r.1945):

**Pauli: celkem 7 možností:**

**1.** Spustím ze střechy mrakodrapu barometr na provázku o známé délce $L_{prov}$ až na zem. Potom je

$$L_{mrak} = L_{prov} + L_{barom}$$

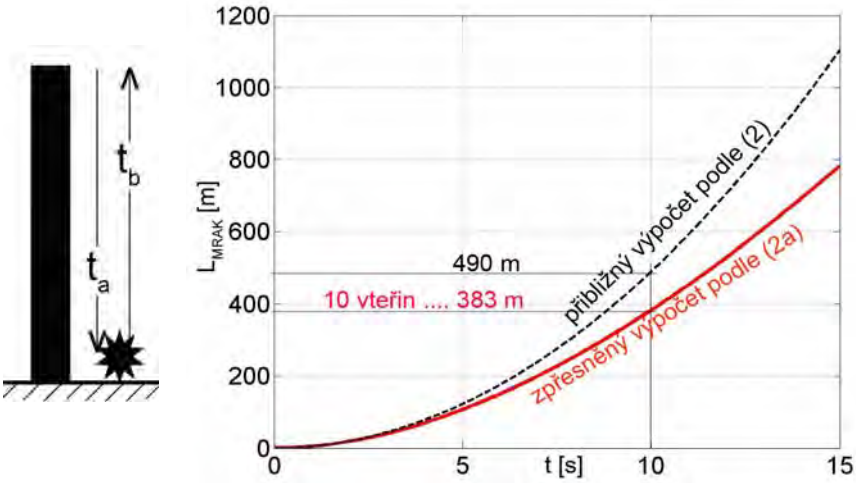
Měření je možno zpřesnit přičtením prodloužení provázku, známe-li jeho modul pružnosti a hmotnost barometru.

**2.** Spustím ze střechy mrakodrapu barometr volným pádem a změřím dobu pádu *t* . Potom je přibližně

$$L_{mrak} \approx \frac{1}{2} g t^2$$

(přibližně proto, že je zanedbán odpor vzduchu a změna tíhového zrychlení $g$ s nadmořskou výškou).

**2a.** Přesnější postup zahrnuje čas šíření zvukového (nebo světelného) signálu od okamžiku dopadu barometru na zem zpátky na střechu podle obrázku:




$L = g t_a^2 / 2$, doba pádu $t_a = \sqrt{2L/g}$ ;

$L = c t_b$ ($c$ je rychlost zvuku), doba letu zvuku $t_b = L/c$ ;

$t = t_a + t_b = \sqrt{2L/g} + L/c$ ;

$L + \sqrt{2c^2 L/g} - ct = 0$ ..... substituce $L = x^2$, $\sqrt{L} = x$ ;

$x^2 + x\sqrt{2c^2/g} - ct = 0$ .... $x_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{2c^2/g} \pm \sqrt{2c^2/g + 4ct}}{2}$

Smysl má jen kladné řešení $x = \sqrt{c^2/2g + ct} - \sqrt{c^2/2g}$

$$L_{mrak} = \left(\sqrt{c^2/2g + ct} - \sqrt{c^2/2g}\right)^2$$

**3.** Přesnější postup, který počítá se změnou tíhového zrychlení:
- změřím doby kyvu $T$ barometru, zavěšeného na provázku délky $L_{prov}$, na střeše mrakodrapu a na zemi:

- tíhové zrychlení na povrchu Země $g = \kappa \dfrac{M_Z}{R_Z^2}$, doba kyvu matematického kyvadla $T = 2\pi\sqrt{L_{prov}/g}$

- doba kyvu na povrchu Země $T_{zem} = 2\pi\sqrt{L_{prov} R_Z^2 / \kappa M_Z}$

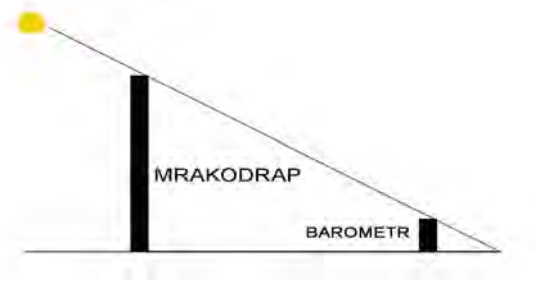
- doba kyvu na střeše mrakodrapu $T_{mrak} = 2\pi\sqrt{L_{prov}(R_Z + L_{mrak})^2 / \kappa M_Z}$

a po vzájemném dělení a úpravě

$$L_{mrak} = R_Z\left(\frac{T_{mrak}}{T_{zem}} - 1\right)$$

**4.** Ve stejný časový okamžik změřím délky stínů mrakodrapu a barometru na povrchu Země. Z podobných trojúhelníků je

$$\frac{L_{mrak}}{L_{barom}} = \frac{L_{stín\ mrak}}{L_{stín\ barom}}$$




Je zanedbáno zakřivení časoprostoru v gravitačním poli Země podle obecné teorie relativity.

**5.** Zvolím výšku barometru $L_{barom}$ jako přírůstek dráhy. Při výstupu po schodech na mrakodrap budu postupně nad sebe klást barometr $N$ - krát, takže

$$L_{mrak} = N \cdot L_{barom}$$

Měření je zatíženo chybou maximálně $\pm L_{barom}/2$ v případě, že $N$ nebude celé číslo.

**6.** Protože barometry mají většinou stupnici také v metrech nadmořské výšky, odečtu (pokud možno s co nejmenším časovým odstupem) nadmořskou výšku na střeše a na zemi:

$$L_{mrak} = L_{n.m.strecha} - L_{n.m.zem}$$

a konečně

**7. Informaci o výšce mrakodrapu získám dole v jeho vrátnici výměnou za barometr.**

## B2. Počátky vědy

Proč rozvoj vědy nastal po "Velké zemědělské revoluci" právě v mírném zeměpisném pásmu?
- **na severu**....drsné podmínky, všechen čas byl nutný pro obhájení existence;
- **v tropech**....žádné stimulující činitele (horko, lenost, dostatek potravy, minimální oděv....).

**Subtropický pás** okolo zeměkoule (Středomoří, povodí velkých řek: Egypt, Mezopotámie, Čína, Indie, Střední Amerika-pravlast brambor a kukuřice) .... vyšší produktivita uvolnila část populace k přemýšlení a zlepšování metod obživy.

Rozvoj **astronomie** (sledování drah hvězd a period počasí): **Mayové** (od 12.stol. př.n.l): počítali v dvacítkové soustavě, znali nulu a polohovou notaci čísel o 1000 let dříve než Evropa, měli přesný kalendář (chyba 3minuty za rok, juliánský kalendář 11minut, náš dnešní kalendář 2 vteřiny).

Z juliánského kalendáře na gregoriánský přešla Evropa v 16.stol., Rusko až ve 20.stol. (proto dodnes nevíme, jestli VŘSR byla v říjnu nebo v listopadu). Anglie přijala gregoriánský kalendář teprve v r.1752, když už byla proti Evropě o 11dní pozadu. Jejich přeskočení (vypuštění) způsobilo vlnu žalob na vládu o ušlé úroky v bankách.

Jedním ze zázraků naší doby je komise pro reformu kalendáře, která byla založena v r.1923 při Společnosti národů (dnes OSN). Komise existuje dodnes, ale za 90 let své existence zatím nic nevyřešila.

Rozvoj rovinné **geometrie** v Egyptě byl dán mj. obnovováním hranic pozemků po nilských záplavách, výpočty ploch vedly k prvním pokusům o integraci, sledování drah hvězd a kulatého Slunce a Měsíce vedly ke zkoumání vlastností kružnice;

***Einstein**: "Geometrie je nejstarší odvětví fyziky".*

**Vývoj znalostí čísla** $\pi$ (toto označení ale zavedl až **Euler):**

20.stol.př.n.l.: **Babylon** $\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$, výpočty v šedesátkové soustavě;

20.stol.př.n.l.: **Egypt** $(16/9)^2 = 3{,}1605$;

12.stol.př.n.l.: **Čína** $\pi = 3$, mj. znalost "Pythagorovy" věty, ale v 5.stol. již $\pi = 3{,}14159265$!!! Číňané se považují za "objevitele" nuly a jako první měli dnešní desítkovou soustavu s poziční notací;

5.stol.n.l.: **Indie** $\pi = 3{,}1416$; Brahmagupta v 7.stol.: $\pi = \sqrt{10}$, mj. dělil nulou k získání nekonečna (za což se v Evropě v 16. stol. upalovalo na hranici).

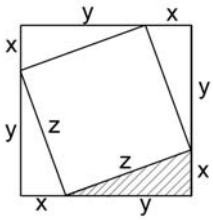
## B3. Starověké Řecko

Řekové položili základy teorie čísel. Hledali hlavně prvočísla, dokonalá čísla (d.č. je rovno součtu svých dělitelů (vyjímaje sebe sama), např. 6=3+2+1, 28=14+7+4+2+1), spřátelená čísla $a,b$ (součet dělitelů $a$ je roven $b$ a naopak, např. dvojici 1184, 1210 objevil až houslový virtuos **Nicolo Paganini**), společenská čísla (uzavřený kruh spřátelených čísel), atd.

**Zlatý řez**: řecké mystické číslo $\varphi = 1{,}618...$, vzniká dělením úsečky

$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ ... $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ ... $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618...$ $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, bezpočet aplikací v živé i neživé přírodě;

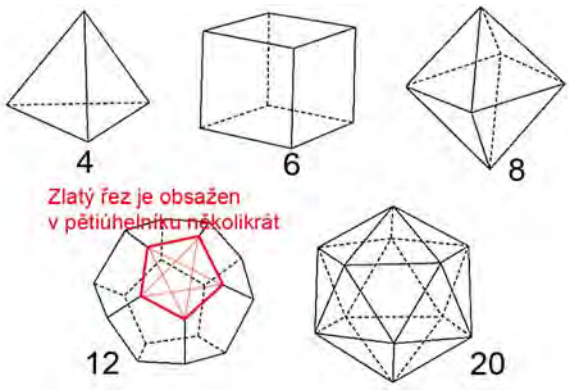
- **Pythagoras** (6.stol.př.n.l) pouze dokázal, že Pyth. věta platí pro **každý** pravoúhlý trojúhelník: velký čtverec = malý čtverec + čtyři trojúhelníky




$$(x+y)^2 = z^2 + 4\frac{xy}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

Mystickým geometrickým útvarem byl pro Pythagora a jeho žáky **pentagram** (pravidelný pětiúhelník a v něm vepsaná pěticípá hvězda - viz Platonův pravidelný dvanáctistěn), kde je mnohonásobně obsažen tzv. **zlatý řez**, viz další text;

- **Platon** (4.stol.př.n.l): pravidelných těles (všechny vrcholy na kouli) je jen pět: 4-,6-,8-,12- a 20-stěn (nelze vytvořit pravidelně ozubenou kouli pro $z > 20$);




- **Eukleides** (nar. asi 330 př. n.l): jeho "**Základy**" (13 knih) jsou po bibli nejvydávanější knihou v historii, dodnes se podle nich učí (viz **lit.16**). Některé z mnoha Eukleidových důkazů:

  - existuje nekonečně mnoho celočíselných "pythagorejských" trojic (např. 3-4-5, 5-12-13, 7-24-25, 20-21-29, 99-4900-4901 atd.) a je nekonečně mnoho prvočísel (zatím nejvyšší nalezené prvočíslo k r. 2008 je $2^{43\,112\,609} - 1$, má 13milionů číslic);

- číslo $\sqrt{2}$ je iracionální (nelze ho vyjádřit podílem dvou celých čísel);
- prvočíselný rozklad čísla je jen jeden *(až Euler uvedl více rozkladů s komplexními čísly, např.* $65 = 5 \times 13 = (8+j)\times(8-j) = (7+4j)\times(7-4j)$ *.....);*
- zavedl **reductio ad absurdum** (důkaz sporem).

***Pět Eukleidových axiomů, na kterých je postavena celá rovinná geometrie:***
***1. Mezi dvěma body může být proložena přímka;***
***2. Úsečka může být prodloužena opět na úsečku;***
***3. Kruh může být opsán z libolného středu s libovolným poloměrem;***
***4. Všechny pravé úhly jsou si rovny;***
***5. K dané přímce a bodu, který na ní neleží, existuje jen jedna rovnoběžka, bodem procházející;***
*(dodnes nebylo dokázáno, že pátý axiom je možno odvodit z předchozích čtyř);*

- **Erastothenes** (3.stol.př.n.l.): obvod Země s chybou 5%, vzdálenost od Slunce 9%;
- **Archimedes** (3.stol.př.n.l., největší starověký matematik a fyzik, zavražděn římskými barbary). Dokázal mimo jiné:

- poměr objemů válce, vepsané koule a vepsaného kužele je 3:2:1
  a asi 20 podobných tvrzení pro různá tělesa a rovinné útvary;
- určoval $\pi$ z obvodu pravidelných mnohoúhelníků, vepsaných a opsaných kružnici: strana vepsaného 2n-úhelníku $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$, $n = 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96$, dál nepokračoval. Vyšlo mu $3^{10}/_{71} < \pi < 3^{10}/_{70}$ neboli $3{,}1408 < \pi < 3{,}1428$. Půlením středových úhlů $\varphi = 2\pi/6,\ 2\pi/12, ....2\pi/n....$ otevřel cestu k pojmu **diferenciál** a **integrace**. Řekové se ale báli nekonečna, neznali pojem limity (např. $\lim_{n\to\infty} 2\pi/n = d\varphi$). Neuměli sčítat nekonečné řady, o čemž svědčí **Zenonův paradox:**

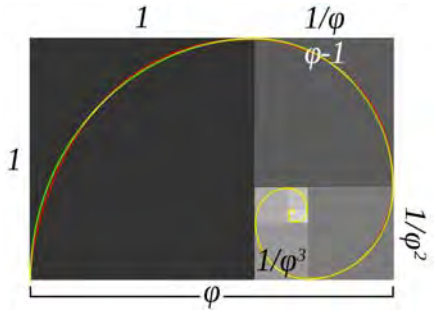
**Achilles nikdy nedohoní želvu:** $1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + ... = 1{,}11111... = ???$ $(dnes\ víme\ = 10/9)$;

- **Leonardo z Pisy**, zvaný též **Fibonacci** (1170 - 1230 n.l.): $\pi = 3{,}141818...$

Velmi zajímavá je Fibonacciho řada: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34..... $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{....}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+....}}} = 1{,}618.... = \varphi$$ .... **zlatý řez**, také limita řady $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$

**Zlatý řez, Fibonacciho řada a spirála v přírodě:** rozměry pěticípé hvězdy (viz Platonův 12stěn), rozměry obrazů a monitorů, starověká architektura, genetika včel, rozmnožování králíků, úmrtnost při epidemiích, rozložení listů na stonku rostlin, nárůst ulit, parohů antilop, uspořádání semen v šiškách jehličnanů, plody ananasu, květy slunečnice, kroužení hmyzu v blízkosti zdroje světla, růst krystalů, velikost listů zelí v sousedních vrstvách, napětí a proudy v odporových sítích atd. atd....



Řekové tušili **tři nevyřešitelné problémy:** kvadraturu kruhu, zdvojení krychle (Fermatova věta pro $n = 3$), trisekci úhlu.

***Čistý způsob kvadratury kruhu podle Řeků:***
***- vytvořit čtverec se stejnou plochou jako má kruh***
***- použitím pouze pravítka (bez stupnice) a kružítka***
***- konečným počtem úkonů.***

**Konec starověké vědy** - zničení **knihovny v Alexandrii** barbarským zásahem Říma (v době největšího rozkvětu měla asi 700000 knih - papyrových svitků namotaných na hůlkách a uložených v kožených pouzdrech):

- r.48 př.n.l.: povětrná **Kleopatra** (která měla krásou i povahou velmi daleko do ideálu, který nám vykreslil film s Liz Taylorovou) nabídla lupiči **Caesarovi** sebe a knihovnu, velkou část knih ale Římané spálili. Později se do její postele dostal **Marcus Antonius** a odměnou za poskytnuté služby jí daroval ukradené knihy z Pergamonu (asi 200 000), čímž se stav knihovny částečně vyrovnal;
- 2.stol.n.l.: biskup křesťanské církve **Tertullianos**: *"Nám po Kristu není třeba žádná vědychtivost, po Evangeliu není třeba žádný výzkum"*;
- 6.stol.n.l.: zákon císaře **Justiniána**: *"Úplně se zakazuje umění matematiky"*;
- 7.stol. n.l.: arabský kalif **Omar**: *"Je pouze dvojí druh knih: ty, co jsou v souladu s Koránem, tedy zbytečné, a ty, které jsou s ním v nesouladu, tedy škodlivé. Spalte ty knihy."* Ještě ve 13. stol. s nimi topili Turci ve veřejných lázních.....definitivní konec knihovny.

Existují ale i světlé výjimky, předbíhající dobu. Např. **sv. Augustin** (354 až 430 n.l.) si kladl otázku *"co dělal Bůh před stvořením světa?"* a vyslovil domněnku, že čas neexistoval, což koresponduje se současnou teorií "Velkého třesku".

**Matematická symbolika**

Až v r.999 osvícený papež **Sylvestr II.** (původem francouzský učenec Gerbert de Aurillac) zavedl arabská čísla. Řecká číselná soustava měla 27 znaků (písmen), bez polohové notace. Římané byli proti Řekům primitivní a neschopní počtáři. Styl výpočtů s římskými číslicemi byl např.

MDCCCLXXXVIII - MDCCCLXXXVII = I, dnes 1888 - 1887 = 1

Rovnice se ve starověku i později řešily geometrickými konstrukcemi, matematická symbolika zavedena až v 16.stol. (**Viete**). Příklad středověkého způsobu vyjadřování:

- násobením poloviny průměru sebou samým a tím, co vznikne z hodnoty, která, když jí vynásobíme průměr, dá obvod kruhu, dostaneme plochu kruhu.

*Věrný přepis do dnešní symboliky:* $\left(\frac{D}{2} \times \frac{D}{2}\right) \times \pi = \frac{\pi D^2}{4}$

***Poznámka**: neobvyklý způsob vyjadřování (alespoň pro nás současníky) se udržel i v novověku. Jeden z objevitelů zásadního zákona zachování energie - James Prescott Joule - jej v r. 1843 formuloval takto: "**Veliké prasíly přírody podle vůle Stvořitele jsou nezmařitelné**".*

## B4. Středověké temno

R.1486: Valmes výnosem církve upálen za vyřešení kvadratické rovnice, r.1600 Giordano Bruno atd.

Pro středověké křesťanství byla matematika (a zvláště astronomie) ďábelskou vědou, takže lodi měly většinou židovské navigátory, křižovat plachetnicí proti větru byl hřích.
Historicky největšími brzdami v rozvoji přírodních věd bylo barbarství Římanů, středověké křesťanství ale v určitých směrech i Aristotelovo učení. Jeho knihy obsahují množství fyzikálních spekulací a nesmyslů. Je příznačné, že ze starověkých myslitelů respektovala středověká církev pouze jeho (*Anatol France: "Knihy, které každý obdivuje, jsou knihy, které nikdo nečte"*). Např. **Galileo Galilei** zhřešil zpochybněním Aristotelova tvrzení, že těžší kámen padá rychleji než lehký, tímto dotazem: *"Když svážu těžký a lehký kámen dohromady, budou společně padat ještě rychleji, nebo ten lehký bude pád těžšího brzdit?"* Aristoteles rozlišoval čtyři formy hmoty (1-země, 2-voda, 3-vzduch, 4-oheň) a dva druhy síly (sestupná-1,2 a vzestupná-3,4). Nutno mu však přiznat, že z tvaru stínů při zatměních Země a Měsíce již odvozoval kulový tvar Země.

**Diskriminace žen - matematiček (i v novověku)**

- **Hypatie** (415 n.l.): na popud biskupa Cyrila rozčtvrcena před alexandrijským chrámem;
- Sophie **Germain** (nar.1776, dokázala Velkou Fermatovu větu pro některá prvočísla), musela vystupovat a publikovat pod pseudonymem August Le Blanc. Odhalil ji a velmi ocenil až Lagrange;
- Emmy **Noetherová** (1882 - 1935) neměla jakožto žena nárok na docenturu v Göttingen, ačkoliv ji Einstein hodnotil jako "matematického genia". Zastal se jí až David **Hilbert**: *"Meine Herren, nevím proč by pohlaví mělo rozhodovat o titulu docenta. Konec konců, univerzita nejsou veřejné lázně"*. Její slavný 1.teorém **"symetrie (invariance) přírodních dějů vůči transformacím prostoru a času má za následek zákon zachování nějaké fyzikální veličiny**" vyjasnil platnost základních zákonů fyziky v obecné teorii relativity. Emmy Noetherová dokázala tři zásadní tvrzení (1919):

**1.** Z invariance přírodních dějů vůči libovolnému posunutí v prostoru plyne zákon zachování celkové hybnosti;
**2.** Z invariance přírodních dějů vůči libovolnému posunutí v čase plyne zákon zachování celkové energie;
**3.** Z invariance přírodních dějů vůči libovolnému pootočení v prostoru plyne zákon zachování celkového momentu hybnosti.

***Poznámka:*** *První tvrzení je spolu s Lorentzovou transformací použito při důkazu jevu, že hmotnost roste s rychlostí (viz kapitola Speciální teorie relativity). Druhé tvrzení rozptýlilo Einsteinovy a Hilbertovy nejasnosti ohledně platnosti zákona o zachování energie v teorii relativity.*

Královská vědecká společnost v Londýně umožnila ženám přístup až v r.1945, francouzská Akademie věd v Paříži až v r.1962, ačkoliv obě existovaly od 17.století!!

**Pozitivní diskriminace žen:** Grace **Hopperová** (1906 - 1992), historicky první kontradmirál v záloze (US Navy), vývoj počítačů Mark I,II,III (její termín "brouk"-programátorská chyba - vznikl, když našla můru mezi kontakty relé u počítače Mark II).

## B5. Několik jmen novověku

Rozvoj **geometrie těles** a **integrálu** měl někdy prozaický hací motiv, např.:

- Johannes **Kepler** (1571 - 1630): mimo jiné "**Stereometrie vinných sudů"**;
- Pierre de **Fermat** (1601 - 1665, soudce, matematik-samouk): položil základy diferenciálního a integrálního počtu a počtu pravděpodobnosti, objevitel pojmu diferenciál a derivace (hledání maxima funkce). Nejzáhadnější postava matematiky:

- předpověděl asi 20 zásadních vztahů z teorie čísel, včetně Velké Fermatovy věty. Tvrdil, že zná důkazy, ale většinou je neuvedl. Skoro všechna jeho tvrzení ale byla do dnešní doby dokázána. Některá jeho tvrzení o celých číslech:

- rovnice $y^2 = x^3 - 2$ má v celém oboru celých čísel jediné řešení:

$$x = 3, \quad y = 5$$

- jediné číslo mezi druhou a třetí mocninou dvou jiných čísel je 26:

$$5^2 < 26 < 3^3$$

- jsou pouze dvě skupiny prvočísel: 1) dají se vyjádřit ve tvaru 4n+1 a pak jsou vždy sumou druhých mocnin, nebo 2) jako 4n-1 a pak nikdy nejsou sumou druhých mocnin (dokázal až Euler);

**- Fermatova čísla** $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ jsou pro všechna $n$ prvočísla (jedině zde se mýlil, pro $n = 5$ vyvrátil Euler a dodnes není důkaz, že existuje nějaké Fermatovo prvočíslo $F_n$ pro $n > 5$).

**Velká Fermatova věta (nejslavnější matematický problém v dějinách): neexistuje celočíselná trojice** $x, y, z \neq 0$**, splňující rovnici** $x^n + y^n = z^n$ **pro** $n > 2$. Fermat jen nastínil důkaz pro $n = 4$,

Euler ji dokázal pro $n=3$ (nelze zdvojit krychli), obecný důkaz pro všechna $n$ přes intenzivní snahu všech matematiků (kromě Gausse a Hilberta) odolával 360 let;

- Blaise **Pascal** (1623 - 1662) ... nejnadějnější a nejbrilantnější matematik, zemřel příliš mladý. V 10 letech odvodil některé Eukleidovy věty, s Fermatem zakladatel teorie pravděpodobnosti - tzv. "matematické naděje" (*sdělení Fermatovi:* ***"Napsal jsem tento dopis delší než obyčejně, protože jsem neměl dost času ho napsat krátký")***;

- Gottfried **Leibniz** (1646 - 1716)... zavedl pojem funkce, znak $\int$ , spolu s Newtonem je zakladatelem analýzy.

Oproti Newtonovi mu dal za pravdu pozdější vývoj fyziky v jeho názoru na prostor, když tvrdil, že "prostor je výsledek vztahů mezi jednotlivými tělesy (substancemi)". Tento názor je potvrzován i Einsteinovou obecnou teorií relativity. Naopak Newton měl představu absolutního času a zprvu i absolutního prostoru, který byl ještě dlouhá staletí po něm vysvětlován fyziky jako tajemný "éter". Přes blízkost řešených problémů nebyly osobní vztahy Leibnize a Newtona přátelské a oba často vedli spory o prvenství (vzhledem k Newtonově konfliktní povaze se klade vina spíše na jeho stranu);

- Isaac **Newton** (1643 - 1727) ... podle některých názorů největší přírodovědec v dějinách (matematika, mechanika, optika, astronomie, gravitace.....). Otázka Newtonovi: jak jste dělal své objevy? Odpověď: "Tak, že jsem na ně stále myslel". Jeho formulace 2. zákona $Fdt = d(mu)$ není v rozporu s teorií relativity, neboť počítá i s Einsteinovou možností proměnné hmoty $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ ($m_0$ ... klidová hmotnost, $c$ ... rychlost světla).

Jedině při $m = konst$ je $F = m \cdot du/dt = m \cdot a$ !!

- rod **Bernoulliů** (celkem 9 matematiků, hlavně bratři Jacob (1654 - 1705), Johann (1667 - 1748), syn Daniel, Nicolaus I,II...), vedli katedru matematiky v Basileji 105 let, profesury zastávali tamtéž nepřetržitě 200 let;

- Leonhard **Euler** (1707-1783).... nejplodnější (s Gaussem asi i nejlepší) matematik všech dob: jeho sebrané spisy budou mít 75 svazků po 600 stranách + 3000 dopisů, do r.1964 vydáno ve Švýcarsku 59 svazků. V 16 letech absolvoval univerzitu v Basileji, v 19 letech profesorská přednáška na téma šíření zvuku. Od 28 let slepý na 1 oko, od 60 let na obě a své práce diktoval. Fenomenální paměť: za 1 večer spočítal zpaměti 6-té mocniny prvních 100 celých čísel, ještě za týden je reprodukoval. Povahově člověk veselý, společenský a nejtěžší úlohy řešil jaksi mimochodem (při jídle, s vnoučaty na klíně, na WC, před spaním...).

**Eulerovo číslo** $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} = 2{,}7\ 1828\ 1828...$ poprvé je zmínil **Napier** už v r. 1618!! Euler ukázal jeho výpočet pomocí mnoha limit a integrálů. V některých oborech je možná důležitější než $\pi$, ale honba za jeho zpřesňováním je menší: k 1.1.2000 bylo $\pi$ vypočteno na 206 158 430 000 desetinných míst (Tokio, cca 45 hod. strojového času). K určení obvodu zeměkoule s chybou pod 13mm přitom stačí znát $\pi$ jen na 9 desetinných míst.

**Nejdůležitější vlastnost čísla $e$: derivace i integrál funkce $e^x$ je stále $e^x$.**

Jeden z mnoha zásadních Eulerových přínosů: **komplexní čísla** a jejich souvislost s reálnými. Např.:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j \text{ ..... } j^j = (e^{j\frac{\pi}{2}})^j = e^{j^2\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{-\pi}{2}} = 0{,}208$$

$$(j^j)^j = (e^{\frac{-\pi}{2}})^j = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \text{ ..... } ((j^j)^j)^j = (e^{-j\frac{\pi}{2}})^j = e^{\frac{\pi}{2}} = 4{,}81 \text{ ..... } (((j^j)^j)^j)^j = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

atd. pořád dokola: +j 0,208 -j 4,81 + j 0,208 ...

***Pozor:*** *záleží na pořadí umocňování (není to asociativní operace): např.* $(2^3)^2 = 64$, *ale* $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$, *nepřesná syntaxe v MATLABu, neplést do toho* ***2.axiom aritmetiky****!!!*

- Karl Friedrich **Gauss** (1777 - 1855)....matematika, astronomie, elektřina a magnetizmus;

- pět velkých francouzských **"L"**: **Laplace, Lagrange** (brilantní odvození základních rovnic teoretické mechaniky)**, Legendre, Lebesgue, Liouville**. Laplace byl Napoleonem jmenován ministrem vnitra, funkce byl ale brzy zbaven, neboť podle slov císaře *"zaváděl do veřejných záležitostí nekonečně malé veličiny"*. Na dotaz věřícího císaře, proč ve svém pětisvazkovém díle o nebeské mechanice ***Mécanique céleste*** nezmiňuje Boha, odpověděl: *"Občane první konsule, nepotřeboval jsem hypotézu jeho existence"*. Laplace byl zastánce tzv. **determinismu**: *"existuje soubor zákonů, které předurčují vývoj vesmíru ze stavu, daného v jediném čase.*

*Zákony i počáteční podmínky určil Bůh, ale dále již nezasahoval".* Naopak **Newton** po svém objevu gravitačního zákona nevěřil ve stabilitu sluneční soustavy, obával se pádu planet do Slunce a přirovnával Boha k hodináři, který musí občas "nebeský hodinový stroj" seřídit.

***Zajímavá otázka:*** *proč Itálie a Španělsko nemají od pozdního středověku více významných matematiků (až na Galilea)? Možná pozůstatek neblahého vlivu Říma a středověké církve (malý příklad: vyjádření biskupské konference ke stavbě přehrady ve Španělsku, poč. 20.stol.: "Kdyby Bůh tomu chtěl, aby voda stoupala do kopce, učinil by to již dříve").*

- Georg Friedrich Bernhard **Riemann** (1826 - 1866) ... mj. tvůrce **sférické geometrie**, kterou využil Einstein při budování obecné teorie relativity, **Riemannova funkce zeta**:

$\varsigma(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+...=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^s}$ kde $s$ je komplexní číslo. Řada konverguje při $\mathrm{Re}\,s>1$:

např. pro $s=2$ je $\varsigma(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$; funkce má velký význam v teorii čísel;

- od 19.století až do současnosti jsou vynikající **ruští matematici: Čebyšev, Lobačevskij** ("*hyperbolická geometrie*"), **Kovalevská, Markov ...**

## B6. Novodobá matematika

- David **Hilbert** (1862 - 1943), asi největší matematik 20. století, mj. s Einsteinem spolutvůrce rovnic obecné teorie relativity, podle některých pramenů jej dokonce předběhl. Na rozdíl od Leibnize a Newtona byly mezi nimi přátelské vztahy a vzájemně se uznávali (*Hilbert:"Rozhodující práci v teorii relativity nevykonali matematici, ale Einstein"*); Hilbert ve své slavné přednášce dne 8.8.1900 formuloval 23 zásadních nevyřešených problémů v matematice (dnes je až na Riemannovu hypotézu většina vyřešena) a prohlásil, že vše lze dokázat pomocí dokonalé bezesporné soustavy axiomů. Např. současná aritmetika je postavena na **sedmi axiomech** (zjednodušeně pro neznalé teorie množin):

**1.** $m+n=n+m$, $m\times n=n\times m$

**2.** $(m+n)+k=m+(n+k)$, $(m\times n)\times k=m\times(n\times k)$

**3.** $m\times(n+k)=m\times n+m\times k$

**4.** $n+0=n$

**5.** $n\times 1=n$

**7.** Jestliže $k\neq 0$ a $k\times m=k\times n$, potom $m=n$.

- Bertrand **Russell** ale pojal r. 1902 strašlivé podezření, že v matematice existují nerozhodnutelné (nedokazatelné ale i nevyvratitelné) výroky. Byl inspirován **krétským paradoxem** ***"Já jsem lhář"*** *(je-li tento výrok pravdivý, pak jsem lhář, ale jak to, že říkám pravdu? Je-li nepravdivý, nejsem lhář, ale tvrdím že jím jsem, tedy lžu)* nebo tzv. **dilematem holiče** (***"holím jen ty, kteří se neholí sami"*** *- kdo tedy holí holiče?*). Další podobný výrok: ***"Tento příkaz nesmíte splnit"***. Russell vzpomíná, že po svém objevu týden nespal. Zděšení mezi matematiky, že celá její tisíciletá logická stavba se hroutí. Toto podezření v r. 1931 skutečně dokázal brněnský rodák Kurt **Gödel** (1906 - 1978):

**1. Je-li nějaká axiomatická teorie bezesporná, pak v ní existuje alespoň jedno tvrzení, které nelze dokázat ani vyvrátit**

a co je ještě horší

**2. Neexistuje důkaz, že axiomatická teorie je bezesporná.**

**Důsledek:** Vždy budou existovat nezodpověditelné otázky (laicky řečeno "svět je nepoznatelný") a nikdy si nemůžeme být jisti, že výběr axiomů nepovede ke sporu. Vzdálenou obdobou ve fyzice je **Heisenbergův princip neurčitosti** (1927). Gödel po svém důkazu, který otřásl jeho důvěrou v matematiku, posléze ztratil důvěru i ve své okolí a rodinu a podezříval je ze snahy jej otrávit. Propuknutí stihomamu a posléze smrt podvýživou.

Naštěstí existují výroky sice nedokazatelné, ale pravdivé (nerozhodnutelné), např. výrok

**"tento výrok nelze dokázat"**

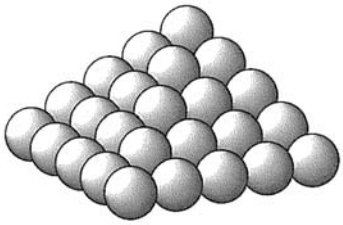
(kdyby byl nepravdivý, bylo by možno jej dokázat, což je spor. Musí být tedy pravdivý, ale jak sám o sobě tvrdí, nelze jej dokázat);

- Paul **Cohen** podal r.1963 postup, podle kterého lze některé nerozhodnutelné výroky rozpoznat a předem zastavit marné snahy o jejich důkaz. Velká Fermatova věta nepatřila na tento "černý seznam" a obecný důkaz pro všechna $n>2$ konečně podal Andrew **Wiles** (1994, 200stran, 8 let nepřetržité práce);

- André **Weil** (1906 - 1998): *"Bůh existuje, neboť matematika je bezesporná, a ďábel také, protože to neumíme dokázat".*

### Nejznámější dosud nedokázané matematické hypotézy

**(na jejich důkazech se pracuje, neboť zatím nejsou rozpoznány jako nerozhodnutelné):**



**1. Keplerova** (nejstarší, 400let): skládání koulí do šestiúhelníkové mříže je prostorově nejúspornější (objemová účinnost 74,04%). Pradávný způsob ukládání pomerančů na trzích, dělových koulí na lodích. Podobně si lze představit uspořádání neutronů po gravitačním zhroucení velké hvězdy do podoby hvězdy neutronové. Kepler byl ale inspirován tvorbou sněhových vloček;

**2. Je nekonečně mnoho dokonalých čísel?** V r.2008 jich bylo známo 46, všechna sudá, zatím největší má 25 956 377 číslic: $2^{43112608}\left(2^{43112609}-1\right)$. Již Eukleides (!!!) dokázal, že dokonalá čísla mají tvar $2^n\left(2^{n+1}-1\right)$, ale ne pro všechna $n$. Platí, že součet reciprokých hodnot dělitelů každého dokonalého čísla (započítáváme-li do dělitelů i samotné číslo) je dvě:

*např.* $6=2^1\left(2^2-1\right)=3+2+1$ *a také* $1/6+1/3+1/2+1/1=2$, *nebo* $28=2^2\left(2^3-1\right)=14+7+4+2+1$ *a také* $1/28+1/14+1/7+1/4+1/2+1/1=2$ *atd.*

**3. Existuje Fermatovo prvočíslo** $F_n=2^{\left(2^n\right)}+1$ **pro** $n>4$ **?** Zatím známe pouze prvočísla $F_0,F_1,F_2,F_3,F_4$; v r. 2008 byl nalezen rozklad na součinitele u $F_{11}$, takže možná už $F_{12}$ je prvočíslo;

**4. Je nekonečně mnoho prvočíselných dvojčat ?** (např. 3 a 5, 5 a 7, 11 a 13 ... $10^9+61$ a $10^9+63$ atd.) Zatím největší dvojice $65\ 516\ 468\ 355\times 2^{333\ 333}\pm 1$, má 100 tisíc cifer;

**5. K vybarvení každé mapy stačí 4 barvy.** Snahy o důkaz vedly k rozvoji topologie, důkaz podaný s pomocí počítače (1200 hod. strojového času) není uznáván, není zkontrolovatelný člověkem. Při jeho provádění byla odhalena a odstraněna závada na procesoru Intel Pentium.

**6. Goldbachova hypotéza** (260let): každé sudé číslo je součtem dvou prvočísel (zatím ověřeno do $3\cdot 10^{17}$);

**7. Riemannova hypotéza** (jeden ze sedmi největších problémů třetího tisíciletí. V r. 2000 vyhlášena cena 1milion dolarů za vyřešení): pro nulové body Riemannovy funkce zeta (řešení rovnice $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^s}=0$) platí, že $\mathrm{Re}\,s=1/2$.

***Poznámka**: Teorie čísel není samoúčelná hračka matematiků, ale má velký význam v mnoha nejen matematických odvětvích (kryptografie, statistika - ekonomika, sdělovací technika atd.).*

## B7. Současná diskuze mezi matematiky

Eugen **Wigner** (1902 - 1995, Nobelova cena za fyziku 1963): ***„Matematika je úžasný dar, za který bychom měli být vděčni, i když nevíme, odkud se vlastně vzal. Je to pouhá hra s čísly, kterou si vytvořil člověk, nebo existuje nezávisle na něm?“***

**Příklad (druhá mocnina a odmocnina ve fyzice):**

Coulombův zákon $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$, Newtonův gravitační zákon $F=\kappa\frac{m\cdot M}{r^2}$, Lorentzův faktor $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$, který se stal pro Einsteina východiskem při tvorbě teorie relativity a gravitace. V současnosti (a zatím nejlépe - podle obecné teorie relativity) je gravitace popsána zakřivením časoprostoru. Pro slabá pole a malé rychlosti ale vystačíme s Newtonovou formulací, která je ověřena jak v mezihvězdných, tak molekulárních rozměrech (v r. 2007 byl zákon ověřen pro $r<56\mu m$). Newton vyšel z Keplerova zákona ($T^2=konst\cdot a^3$). S Keplerovými možnostmi měření byla chyba nejméně 5%. Dnes je obecná teorie gravitace ověřena s chybou pod $10^{-6}$ a jevy kvantové elektrodynamiky dokonce pod $10^{-9}$, takže se můžeme divit:

- Freeman **Dyson** (nar. 1923, zakladatel QED): ***"Je s podivem, jak přesně příroda tančí podle písničky, kterou jsme před lety lehkomyslně spíchli, a jak experimentátoři dokážou změřit a teoretici spočítat její tanec s přesností biliontin"***.

**Otázka č.1**: **Je vystižení přírodního děje obyčejnou druhou mocninou a s přesností miliontin dílem člověka, který si druhou mocninu vymyslel, nebo Boha, nebo přírody?**

Příkladem aplikace jednoduché matematiky, využívající pouze operaci druhá mocnina, druhá odmocnina (a jen výjimečně pojmy "diferenciál, integrál"), je speciální teorie relativity.

**Otázka č.2**: **Proč je matematika tak účinná ve fyzice a v biologii ne? Je matematická teorie řízení aplikována u živočichů?**

**Příklad:** Popis pohybu pavouka (8 nohou po 4 kloubech) po dané trajektorii znamená řešit inverzní kinematickou úlohu simultánně pro 32 redundantních souřadnic. Jaký výpočetní algoritmus a potřebný hardware má pavouk? Kolik používá postprocesorů a křížových překladačů?

## Souvislost logiky a matematiky

**je velmi těsná a v některých partiích obě vědy splývají. Bez logického myšlení se z člověka opět stane opice, takže snaha o vyloučení matematiky z povinného vzdělání je zločinem páchaným na mládeži, má horší dopad než rasismus a měla by být ze zákona trestným činem.**

## Souvislost beletrie a matematiky

Oblíbená kniha královny **Viktorie**: Charles **Dodgson** (pseud. Lewis **Carroll**): **Alenka v říši divů**. Královna si přála další knihu od téhož autora, byl jí tedy předložen **Výpočet determinantů kondenzační metodou.**

## Na závěr ukázka, jak lze získávat politickou podporu na vědu, event. body RIV:

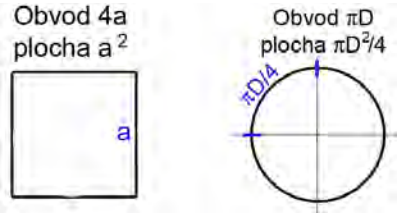
(aneb **hlupáci nejsou jen mezi našimi politiky**):

## „Návrh zákona zavádějící novou matematickou pravdu“

schválen sněmovnou amerického Státu Indiana jednomyslně a bez diskuze (67 hlasů pro, 0 proti) dne 5.2.1897 (zápis č.246 Indianské státní legislativy):

*"Bylo nalezeno, že plocha kruhu je čtvercem čáry rovné kvadrantu obvodu, neboť plocha rovnostranného obdélníku je čtvercem jeho strany. Autor nabízí Státu Indiana bezplatné používání svého objevu a volné publikování ve školních učebnicích, zatímco všichni ostatní budou muset platit daň".*

*Doslovným přepisem textu dostáváme* $\frac{\pi D^2}{4} = \left(\frac{\pi D}{4}\right)^2$ *a po úpravách vychází* $\pi = 4$ *, což je jedna z největších zjištěných hodnot čísla* $\pi$ *v celé historii matematiky. Blahopřejeme státu Indiana!!*




## U.S.PATENT No. 90 298 (r.1869):

*"Vynález se vztahuje na přístroj znemožňující svému uživateli postavit se na sedadlo. Spočívá v umístění koleček nahoře na sedadle, která sice zajišťují bezpečné sezení, ale při pokusu stoupnout si na ně se převrátí a shodí uživatele na zem".*

## 1. Příklad starověkého důkazu

**EUKLEIDES (je nekonečně mnoho celočíselných pythagorejských trojic)**

Východisko důkazu: rozdíl čtverců po sobě jdoucích celých čísel je vždy lichý: $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$

takže: libovolné liché číslo $2n+1$ + čtverec nějakého čísla = čtverec jiného čísla

ale: z nekonečně mnoha lichých čísel $2n+1$ je **část** (tedy zase nekonečně mnoho) čtvercem jiných celých čísel $p$, neboli pro některá $n$ je $2n+1 = p^2$ takže $(n+1)^2 = n^2 + p^2$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^2$ | $2^2$ | $3^2$ | $4^2$ | $5^2$ | $6^2$ | $7^2$ | $8^2$ | $9^2$ | $10^2$ | $11^2$ | $12^2$ | $13^2$ | $14^2$ | ..... | $24^2$ | $25^2$ | ..... | |
| 3 | 5 | 7 | **9** | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | **25** | 27 | ..... | **49** | ..... | | | |
| Pyth. trojice: | | | 3,4,5 | | | | | | | | 5,12,13 | | | | 7,24,25 | ..... | | |

## 2. Kde se stala chyba?

Předpoklad: $a = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

Obě strany násobíme $a$:

$$a^2 = ab$$

K oběma stranám přičteme $a^2 - 2ab$:

$$a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$$

Upravíme:

$$2a^2 - 2ab = a^2 - ab$$

Nalevo vytkneme $2$:

$$2\left(a^2 - ab\right) = a^2 - ab$$

Substituce $a^2 - ab = c$:

$$2c = c$$

???? $2 = 1$ ????

## B8. Vyšší matematika v ekonomii

***Úvodem upřesníme několik pojmů:***

- **růst** = zvětšení veličiny $y$ za určitý čas (např. "meziroční růst o ...") ... první derivace $dy/dt$
- **expanze = růst** .... rovněž první derivace $dy/dt$
- **rychlost** veličiny $y$ .... opět první derivace $dy/dt$
- **tempo** (např. v italském hudebním názvosloví) **= rychlost** .... zase první derivace $dy/dt$
- **inflace = růst** cenové hladiny v čase .... tedy znovu první derivace (ceny, cenové hladiny).

Dále přijmeme obecné označení $y$ pro pojem "**ekonomika**" (nebo pro jiný pojem, např. "**cenová hladina**") a čtenáři ponecháme možnost volby, co si pod tímto pojmem představit.

### Jak číst Lidové noviny 26.10.2011

(příloha "Peníze a byznys", str.14):

... **zpomalení** (nebo o pár řádků výše **"ochabnutí") růstu ekonomiky v celé Evropě** .... zmenšení první derivace, takže druhá derivace je záporná: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} < 0$;

... **klesá tempo expanze čínské ekonomiky** ... klesá rychlost rychlosti čínské ekonomiky, neboli klesá zrychlení čínské ekonomiky, takže jerk čínské ekonomiky (třetí derivace čínské ekonomiky) je záporný: $\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right) = \frac{d^3y}{dt^3} < 0$;

- **hlavní ekonom Citibank J. Šindel**: ... **pokles tempa růstu ekonomiky** ... zmenšení rychlosti rychlosti (tj. zrychlení) ekonomiky, neboli opět záporný jerk: $\frac{d^3y}{dt^3} < 0$

a konečně výrok amerického prezidenta v Kongresu
(ale i nejmenovaného poslance Parlamentu ČR):

**...tempo růstu inflace se zpomaluje...**

jinými slovy " **rychlost růstu inflace klesá**"

- neboli "**zmenšuje se rychlost rychlosti (tedy zrychlení) růstu cenové hladiny**"

- neboli **zmenšuje se třetí derivace (jerk) cenové hladiny**

- takže radostná zpráva zní jednoduše a výstižně:

**čtvrtá derivace cenové hladiny je záporná**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right)\right) = \frac{d^4y}{dt^4} < 0$$

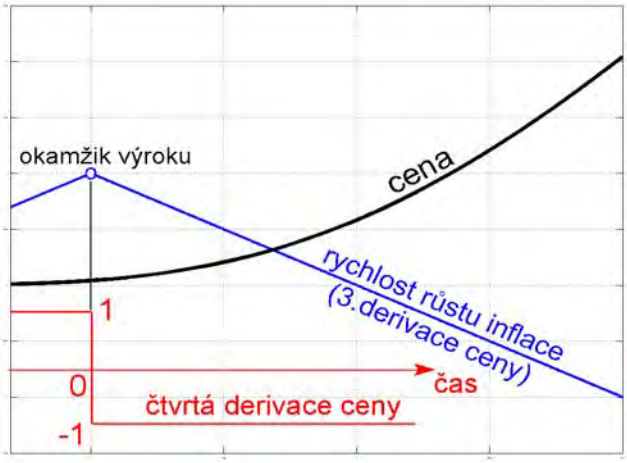
**Blahopřejeme mediálním a ekonomickým odborníkům i politikům ke snaze o matematické vzdělání nejširších vrstev obyvatelstva a přimlouváme se za zpřísněnou povinnou maturitu z matematiky.**

*Koho baví integrace, ať čte dále; koho ne, ať si raději koupí BLESK.*

## Dvě nejjednodušší hypotézy změny polarity čtvrté derivace
(skoková a lineární funkce)

**A.** Čtvrtá derivace ceny změní znaménko nespojitě skokem: $\frac{d^4y}{dt^4} = -sign(t) = \frac{-t}{|t|}$

(pro rychlý výpočet doporučuji Matlab-Simulink)




**B.** Protože přírodní děje mají převážně spojitý charakter (a doufáme, že též děje ekonomické), přikláníme se spíše ke druhé hypotéze: čtvrtá derivace ceny klesá lineárně, např. podle vztahu $d^4y/dt^4 = 1 - t$ (změna znaménka nastane v čase $t = 1$):

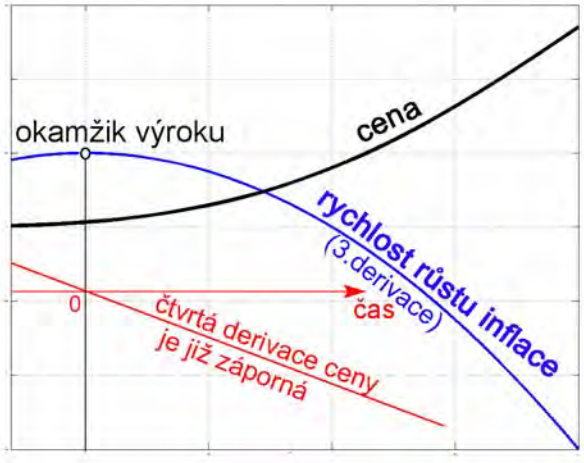
$$\frac{d^4y}{dt^4} = 1 - t \quad \text{.... červeně}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = t - \frac{t^2}{2} \quad \text{.... modře}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24}$$

$$y = \frac{t^4}{24} - \frac{t^5}{120} \quad \text{.... cena (černě)}$$




Výsledek: od okamžiku uklidňujícího výroku prezidenta rostou ceny převážně se čtvrtou mocninou času, později tento růst zbrzdí pátá mocnina. Inflexní bod křivky "cena" je v obou grafech vysoko a hodně vpravo mimo nákresnu. Pokles ceny nastane ještě daleko za inflexním bodem ve velmi vzdálené budoucnosti.

Nejsme si tedy jisti, která z hypotéz **A,B** nás při nákupu v hypermarketu uspokojí lépe.

## ZÁVĚR

**Potěšující zpráva o zpomalení tempa růstu inflace je zkalena tím, že při integraci vzniká zpoždění, takže na pokles cen si budeme muset počkat,**

**přestože čtvrtá derivace je již záporná. Pomoz Pánbůh našim dětem, kdyby v budoucnu měla být opět kladná!**

*28.10.2011 S pozdravem "jen více matematiky" Souček*

## Literatura


***Populární***:

***1.*** *Beckmann, P.: Historie čísla $\pi$ (Academia Praha 1998)*
***2.*** *Einstein, A.: Jak vidím svět (soubor přednášek a korespondence, Lidové noviny 1993)*
***3.*** *Grygar, J.,Horský, Z., Mayer, P.: Vesmír (Mladá fronta, 1979)*
***4.*** *Hawking, S.: Stručná historie času (Mladá fronta, 1991)*
***5.*** *Hawking, S.: Černé díry a budoucnost vesmíru (Mladá fronta, 1995)*
***6.*** *Lenard, P.: Velcí přírodozpytci (Orbis 1943)*
***7.*** *Livio, M.: Je Bůh matematik? (Argo 2010)*
***8.*** *Mareš, M.: Příběhy matematiky (Pistorius 2011)*
***9.*** *Nikiforovskij, V.A.: Cesta k integrálu (Nauka, Moskva 1985)*
***10.*** *Singh, S.: Velká Fermatova věta (Academia Praha 2002)*

***Odborná***:

***11.*** *Andrle, P.: Základy nebeské mechaniky (Academia Praha 1971)*
***12.*** *Bajer, J.: Mechanika 2 - gravitace (VUP Olomouc 2008)*
***13.*** *Berezin, I.S.: Metody vyčislenij (Moskva 1960)*
***14.*** *Borevič, E.I.: Opredělitěli i matricy (Leningrad 1965)*
***15.*** *Dettman, J.W.: Matematické metody ve fyzice a technice (Academia Praha 1970)*
***16.*** *Eukleides: Základy, knihy V,VI (OPS 2010)*
***17.*** *Horský, J., Novotný, J., Štefaník,M.: Mechanika ve fyzice (Academia Praha, 2002)*
***18.*** *Chudý, J.: Determinanty a matice (SNTL Praha 1974)*
***19.*** *Jefgrafov, M.A. a kol.: Sbírka úloh z teorie funkcí komplexní proměnné (SNTL Praha 1976)*
***20.*** *Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics (John Wiley @ Sons, Inc. 1999)*
***21.*** *Promberger, M.: Použití matic a tensorů v theoretické elektrotechnice (SNTL Praha 1955)*
***22.*** *Ralston, A.: Základy numerické matematiky (Academia Praha 1978)*
***23.*** *Rektorys, K.: Přehled užité matematiky (SNTL Praha 1981)*
***24.*** *Richterek, L.: Teorie relativity a astronomie (UP Olomouc, 2012)*
***25.*** *Romanovskij, P.I.: Fourierovy řady, teorie pole, analytické a speciální funkce, Laplaceova transformace (SNTL Praha 1964)*
***26.*** *Šulista, M.: Základy analýzy v komplexním oboru (SNTL Praha 1981)*
***27.*** *Ullmann, V.: Gravitace, černé díry a fyzika prostoročasu (Astronomická společnost při ČSAV, 1986)*
***28.*** *Veit, J.: Integrální transformace (SNTL Praha 1979)*
***29.*** *Vích, R.: Transformace Z a některá její použití (SNTL Praha 1979)*
***30.*** *Vybíral, V.: Teorie relativity a gravitace (Gaudeamus 2008)*
***30a.*** *Křížek, M.: Antigravitace (ISBN 978-80-7015-019-1, Praha 2014)*

***Články***:

***31.*** *Jersák, J: Rozpínání vesmíru podle soudobých poznatků (Vesmír 87, 2008/1)*
***32.*** *Jersák, J: Rozpínání vesmíru (Československý časopis pro fyziku, 2008/3)*
***33.*** *Kulhánek, P.: Přednášky a příklady z astrofyziky a teoretické mechaniky (webové stránky FEL ČVUT)*
***34.*** *Kulhánek, P.: Moderní kosmologie aneb Jak přednášet o kosmologii, FEL ČVUT, 2010*
***35.*** *Lineweaver,Ch.H., Davis,T.M.: Expanding Confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe (U. of N.S.Wales, Sydney, 2003)*
***36.*** *Pilipenko,S.V.: Paper-and-pencil cosmological calculator (Astrospace Center of the Lebedev Physical Institute, Moscow 2013)*
***37.*** *Reichl, J., Všetička, M.: Encyklopedie fyziky (webové stránky)*
***38.*** *Webové stránky (NASA, ESO – VLT,GTC, ELT...)*
***39.*** *E-ELT Construction Proposal (ESO 12/2011)*

# Velké pozemské dalekohledy

Obdoba tzv. kolébek u pětiosých NC strojů
(obří otočné a naklápěcí stoly)

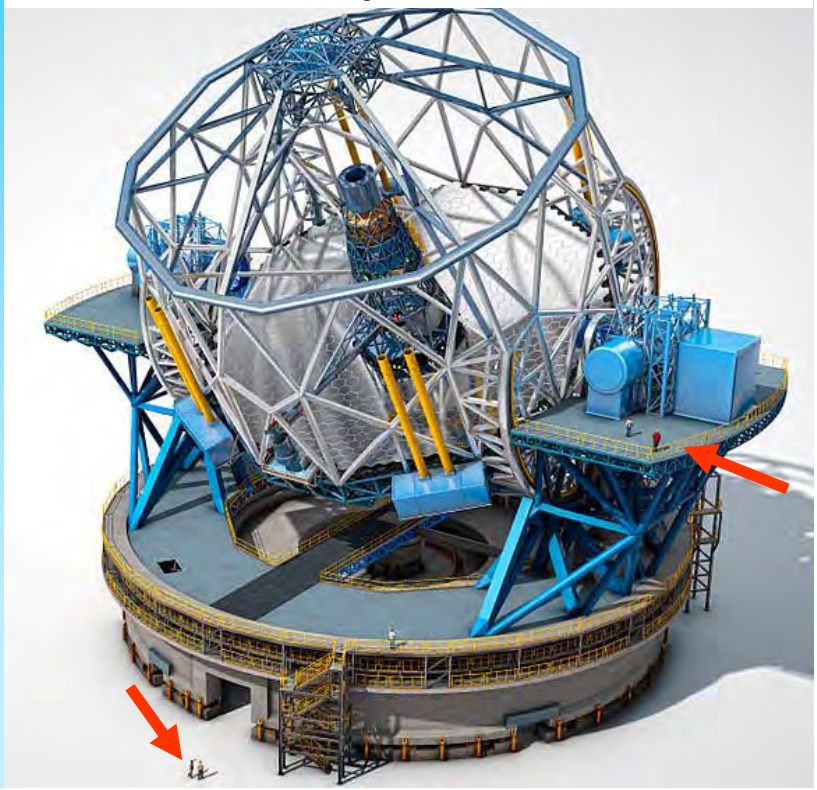
Inspirace pro konstruktéry, pohonáře a mechatroniky

# Pokrok za 4 století

H. Lippershey (Holandsko)
- patent dalekohledu 1608

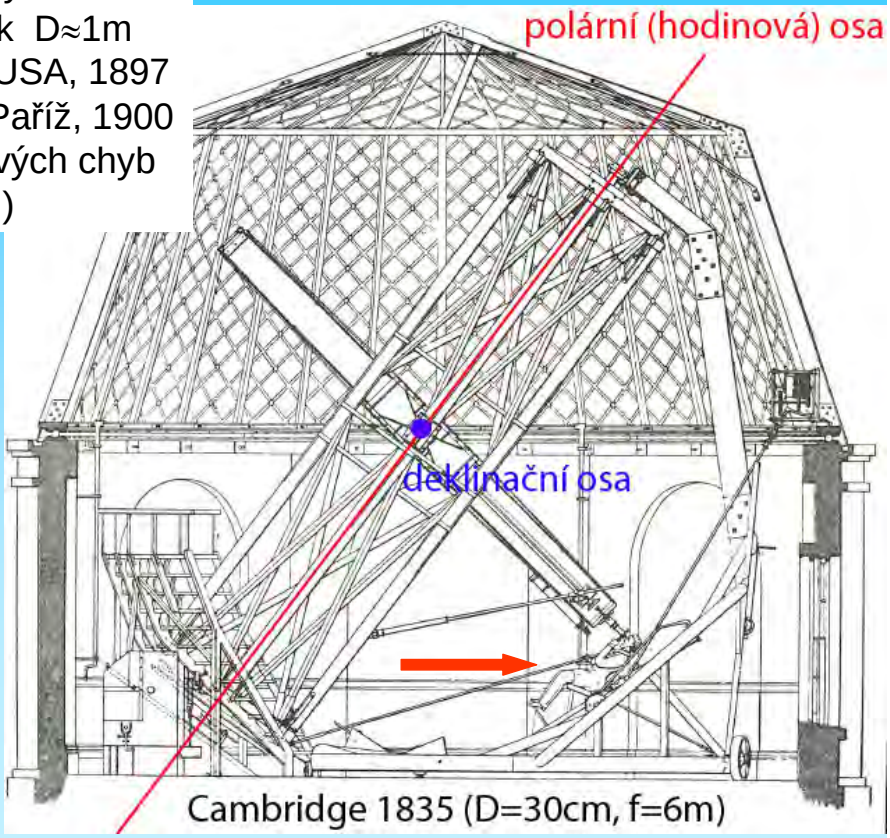
Snaha o
odlouhé
ohnisko
(Gdaňsk 1670)

**ELT** (Extremely Large Telescope (ESO)
zrcadlo **D=39,3m, ve výstavbě, ?dokončení 2025?**



# REFRAKTORY (čočky)

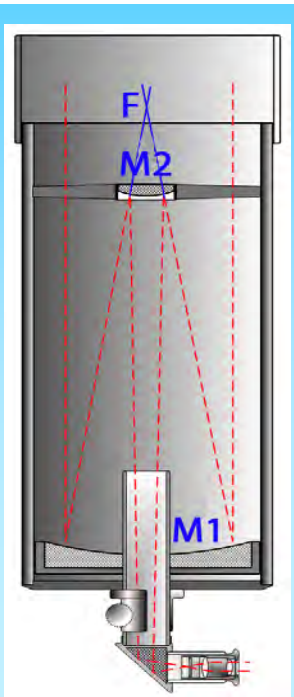
**Galileo (1609):**
objektiv - spojka, okulár - rozptylka
**Kepler**...2 spojky
Hranice možností čoček D≈1m
- 1,02m Yerkesova obs., USA, 1897
- 1,25m světová výstava Paříž, 1900
(více ploch → více tvarových chyb
a optických vad)

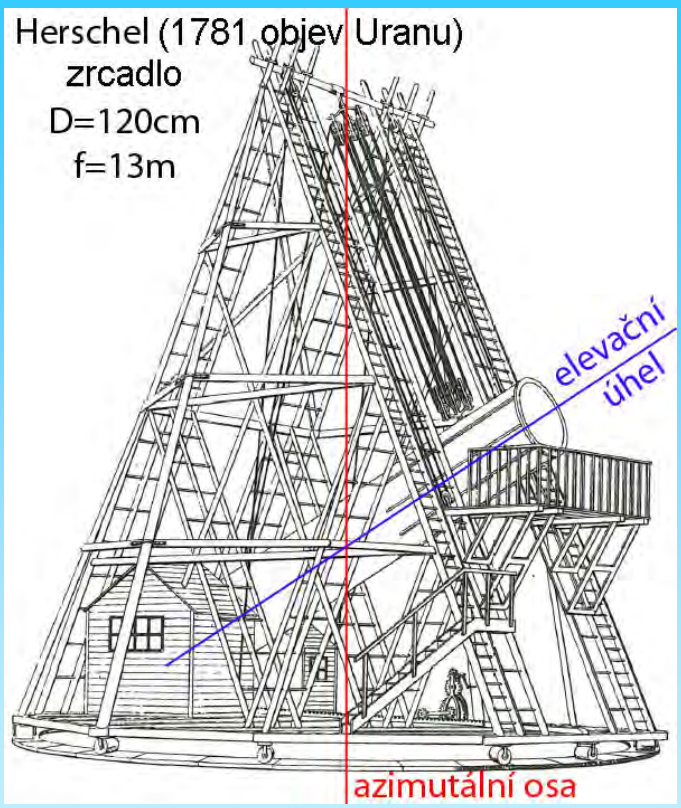



**Paralaktická (ekvatoreální) montáž**
Ke kompenzaci rotace Země stačí jednoosé řízení (rotace **1ot/den** okolo polární osy)

# REFLEKTORY (zrcadla)

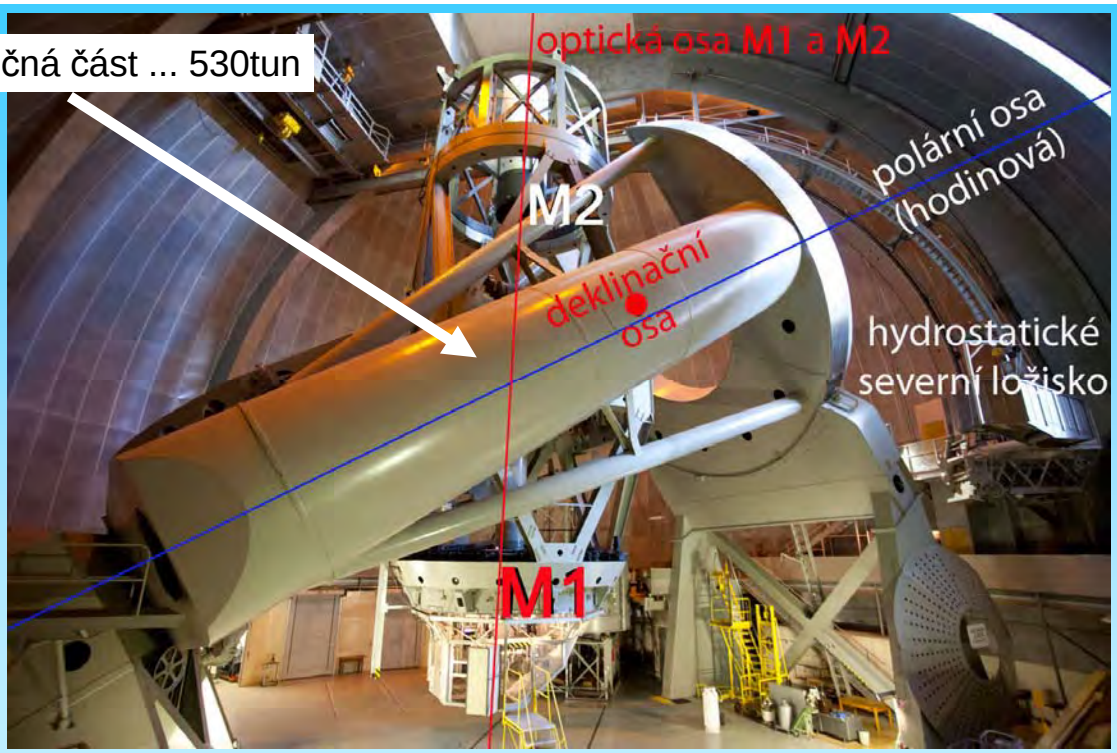
**Newton** 1668 - vývod světla přes šikmé zrcadlo **M2** bokem
**Cassegrain** 1672 - vývod světla v ose přes **M2** středem **M1**




**Alt-azimutální montáž**
Součinnost obou os jako u našich kolébek, ale základní osou je točna, druhé naklápění

**Haleův dalekohled**, Mt. Palomar 1948, první uživatel **E. Hubble**, **paralaktická montáž**, zrcadlo $D_{M1}$=508cm, 20tun, do r.1992 největší na světě

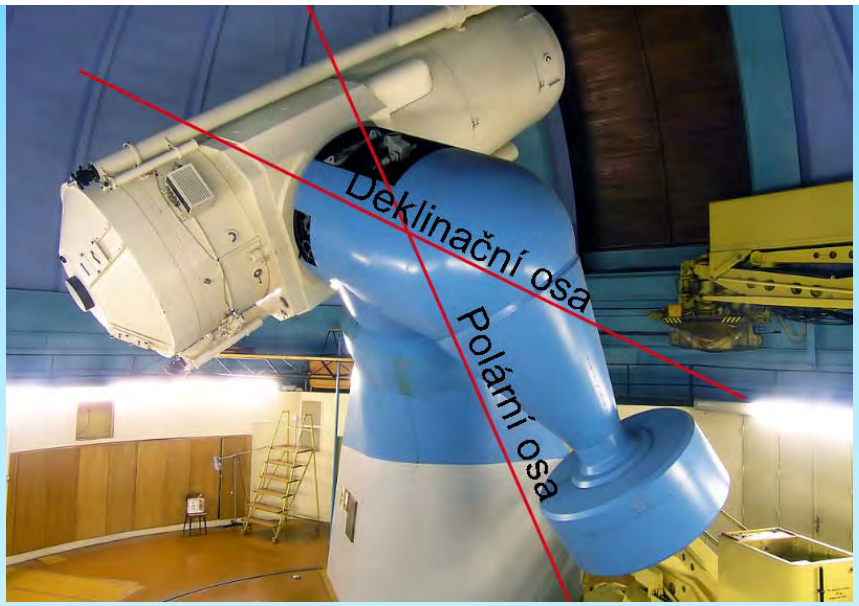



**Dnes téměř výhradně alt-azimutální montáž**
(ve 20. stol. poprvé použita u kavkazského neúspěšného 6m teleskopu (1972)

## **Perkův dalekohled na Ondřejově** (největší v ČR)

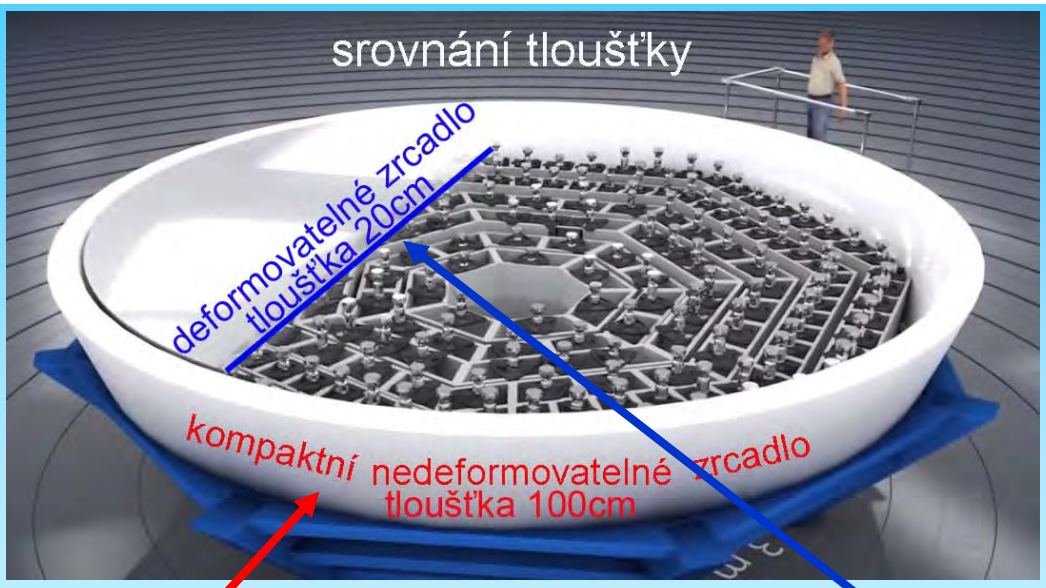
(uveden do provozu v r.1967 jako sedmý největší na světě)

- paralaktická montáž, parabolické zrcadlo D=2m, 2340 kg, ohnisko 9m
- vlastní tubus 33 tun, celá otočná část i s protizávažím 83 tun je uložena na hlavním kulovém hydrostatickém ložisku, umístěném v průsečíku obou os
- při 1ot/den okolo polární osy stačí výkon hnacího elmotoru 150W
- antiseismický pískový podklad



**Max. technologické možnosti výroby celistvého zrcadla** $D_{MAX} \approx 8$m,

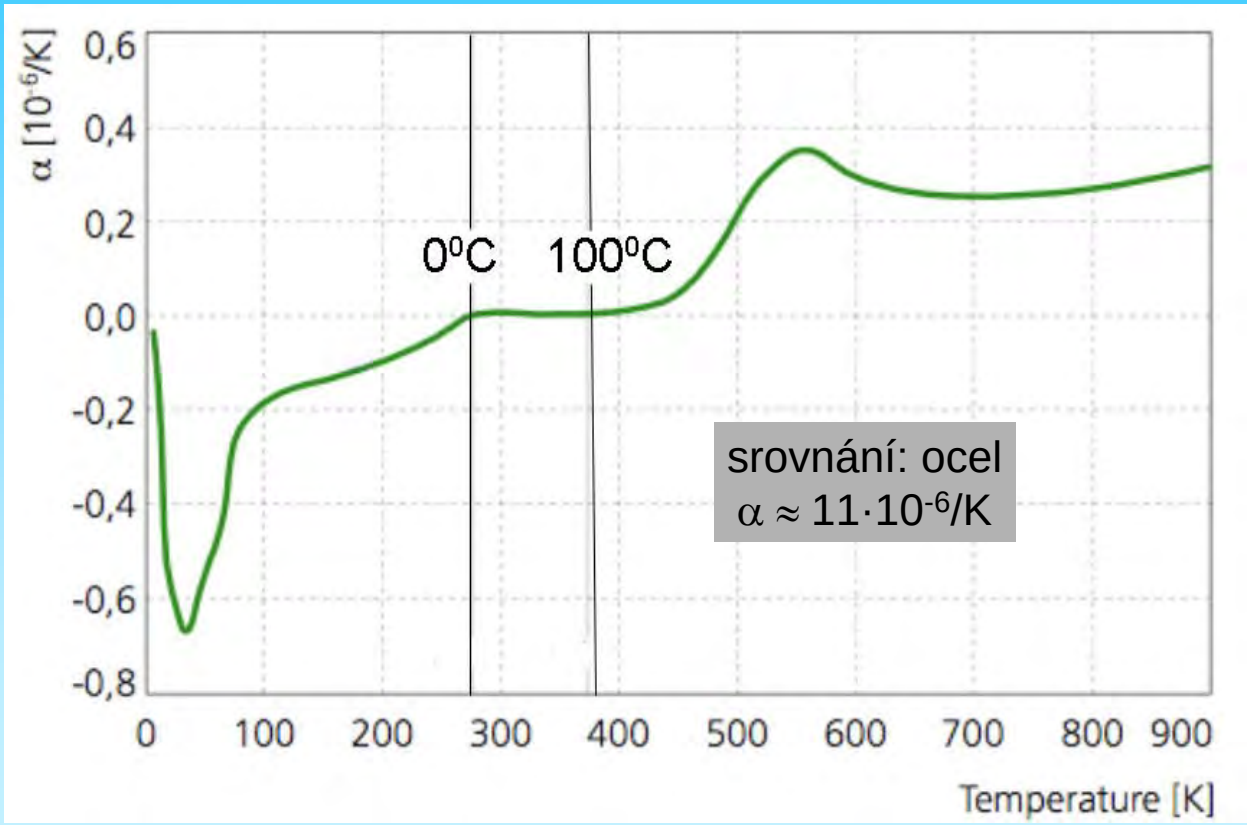
- reálný poměr průměru a tloušťky s ohledem na průhyb vlivem gravitace a proces lití a chladnutí **D/h ≈ 6** (maximálně 9)
- max. přípustná tvarová chyba plochy 0,01÷0,02 μm




**Problémy:** doba odlití+chlazení i v řádu let, vnitřní pnutí, hmotnost, průhyby vlivem gravitace, doprava do hor ...

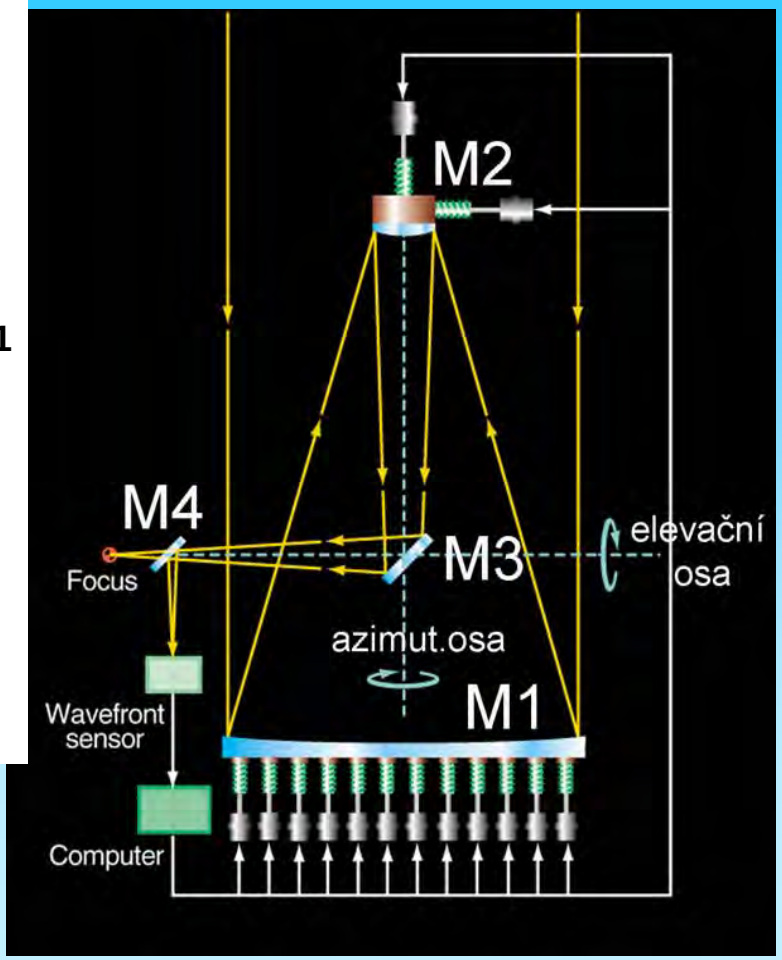
**Řešení:** tenké zrcadlo s umělým řízením tvaru pomocí mnoha aktuátorů (tzv. **aktivní optika**)

## Sklokeramika Zerodur (Schott AG, zal. 1884 Jena) (oxid Li-Al-Si, minimální tepelná roztažnost)



Dnes nejčastější systém
**Ritchey - Chrétien:**
**M1** ... konkávní hyperboloid
**M2** ... konvexní hyperboloid

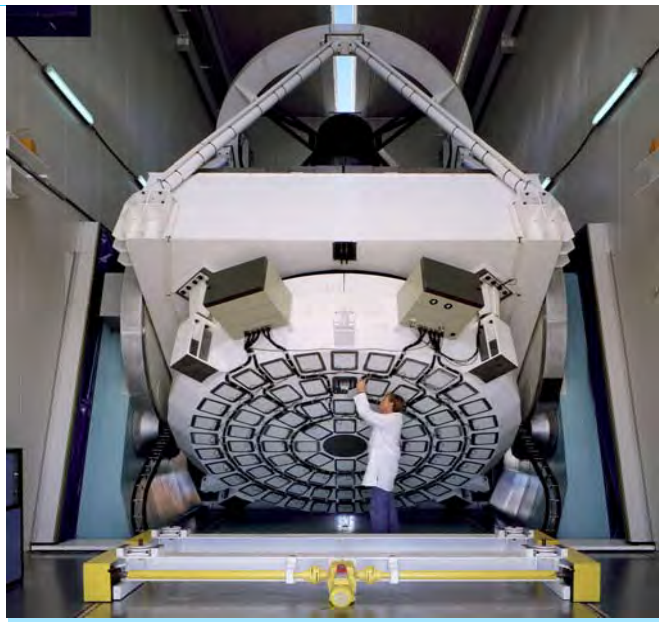
**Aktivní optika**
(např. teleskop **VLT**):
- umělé deformace zrcadla **M1** a přestavování **M2** (hexapod) pro dodržení optické osy
- potlačení nízkofrekvenčních spíše statických vlivů v řádu max. $10^0$Hz (výrobní chyby, deformace vlivem gravitace a tepla, vítr, stárnutí konstrukce...)

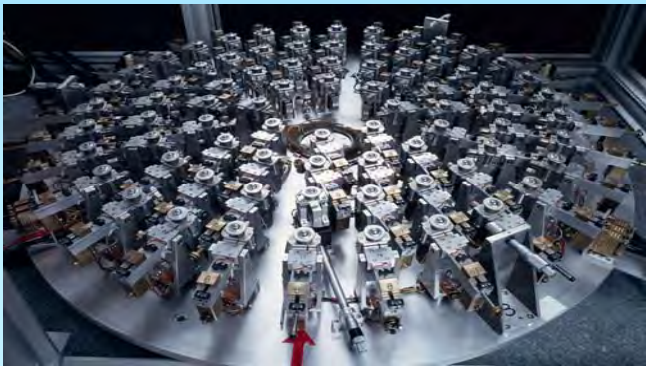



**První aplikace aktivní optiky na celistvém zrcadle v r.1989: NTT**
**(New Technology Telescope, ESO)**
Chile,La Silla, 2375m n.m.
**M1...D=3,58m**, tl.24cm, 6tun, Zerodur,
75 axiálních a 24 stranových aktuátorů

**Motor ETEL**, D=770/556mm, výška 98mm
- chlazení $H_2O$
$M_{Kmax}$=530Nm, $M_{Ktrv}$=300Nm

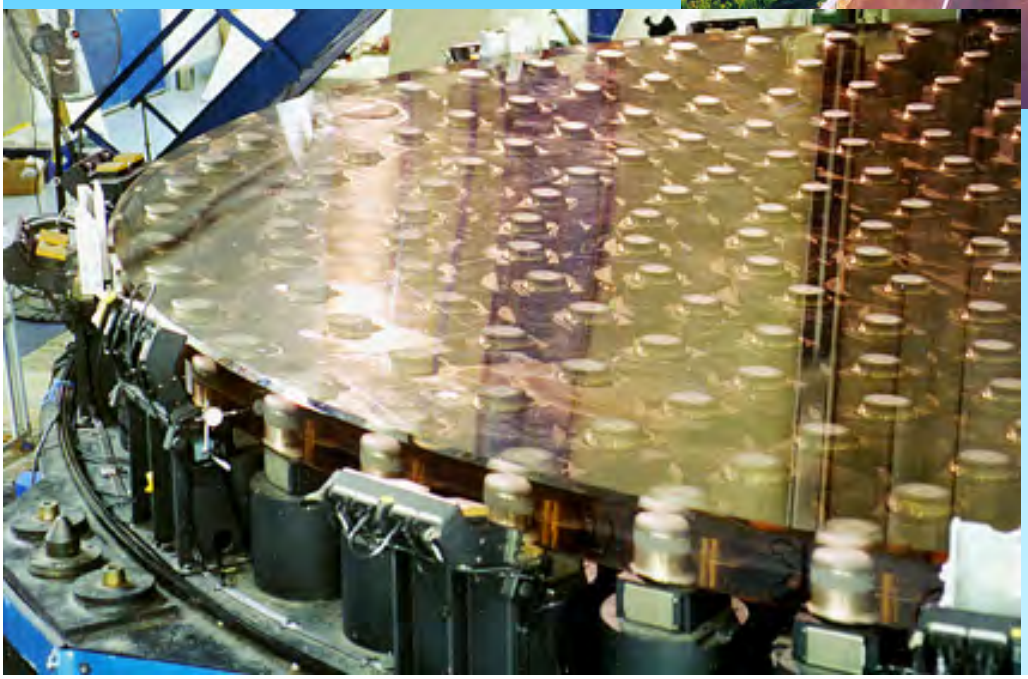
**Ložisko** D=1728/1480mm, výška 90mm,
2 kuličkové dráhy,
předpětí 30μm, $M_T$=100Nm,
házení pod 35μm
odměř. **Heidenhain** ... 32 768 rysek/ot,
2 snímací hlavy, interp. 2xAWE 1024





## SUBARU (Japonsko, Havaj)

D=8,2m, tl.20cm, f=15m
- monolit. 23tun, lití a chladnutí 3roky
- opracování a leštění 4 roky,
- **aktivní optika** 261 aktuátorů,
- max. chyba povrchu 12nm



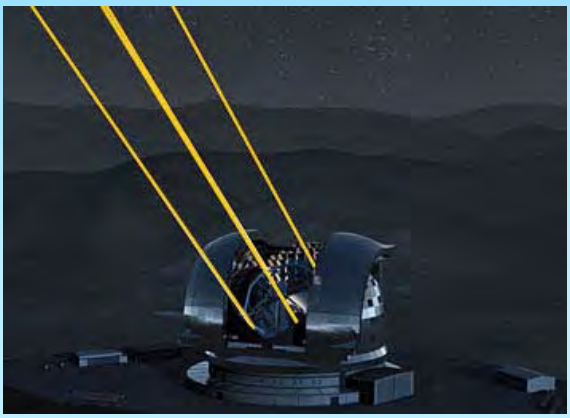
Další zdokonalení:

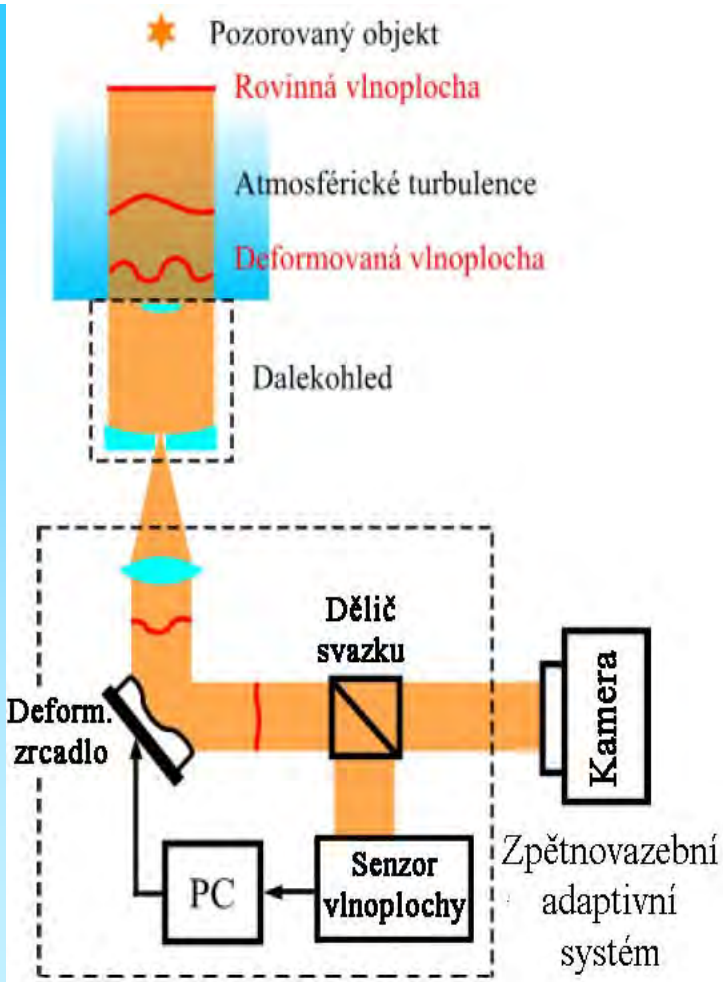
## Adaptivní optika:

potlačení vysokofrekv. vlivů (chvění atmosféry) rychlým řízením tvaru dalšího zrcadla v řádu *nm* nebo jeho polohy (až 1000Hz, **M2, M3** nebo **M4**)

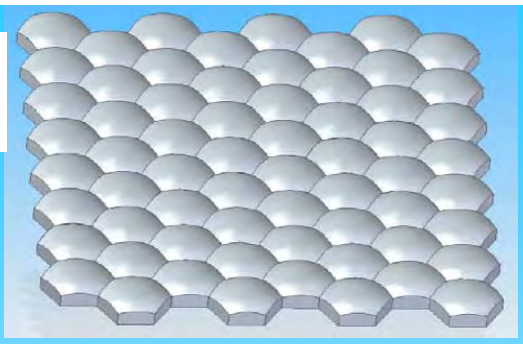
**Kalibrační signál pro zpětnovazební obvod:**

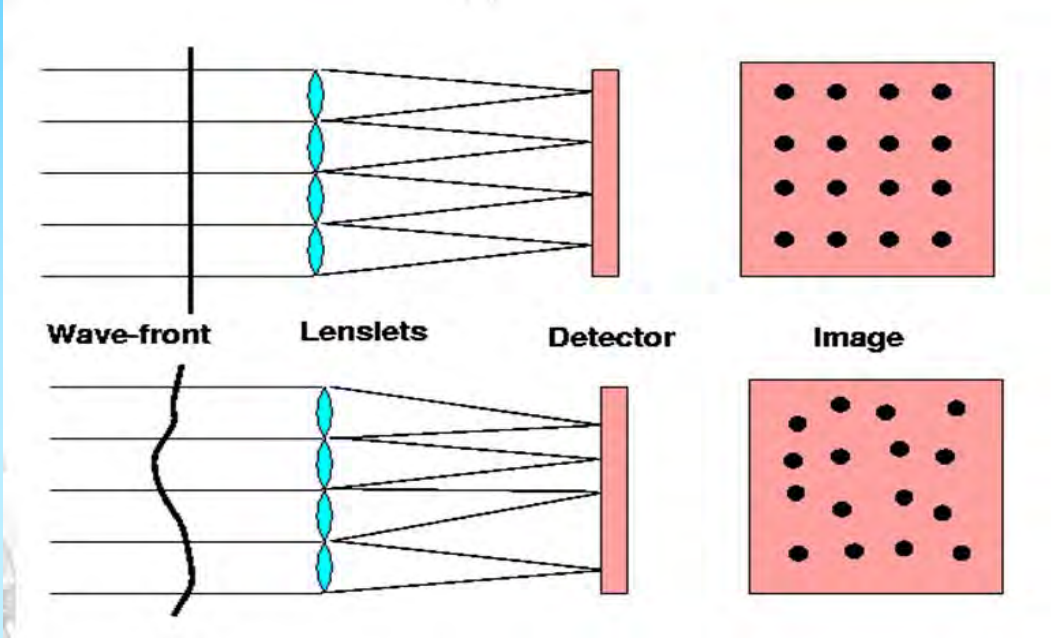
"umělá sodíková hvězda" (aktivace sodíku 90km nad Zemí oranžovým laserem...$\lambda$=*589 nm*)





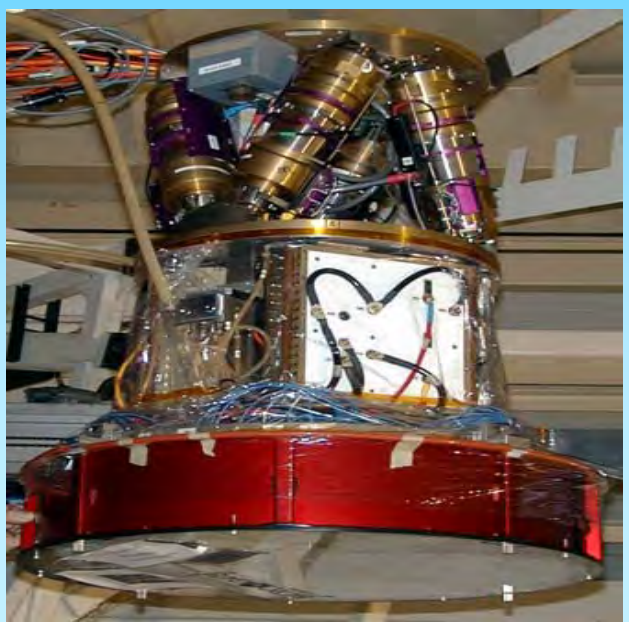
Shack-Hartmannův senzor vlnoplochy
(maticové pole miniaturních čoček)



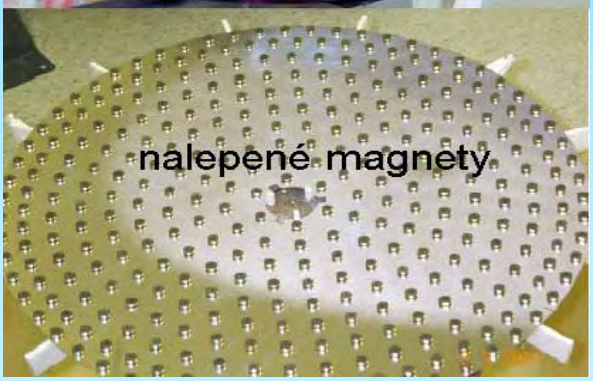



**Příklad: Adaptivní optika teleskopu MMT** (Arizona, $D_{M1}$=6,4m)
- rychle deformovatelné malé tenké zrcadlo **M2 ($D_{M2}$=64cm, tl. 2mm)**
- 350 elektromagnetických aktuátorů (možno též piezoelektrické)
- **magnety** nalepeny na zrcadle, **cívky** v opěrné desce

Pohyb celé skupiny **M2** (zrcadlo+opěrná deska) hexapodem

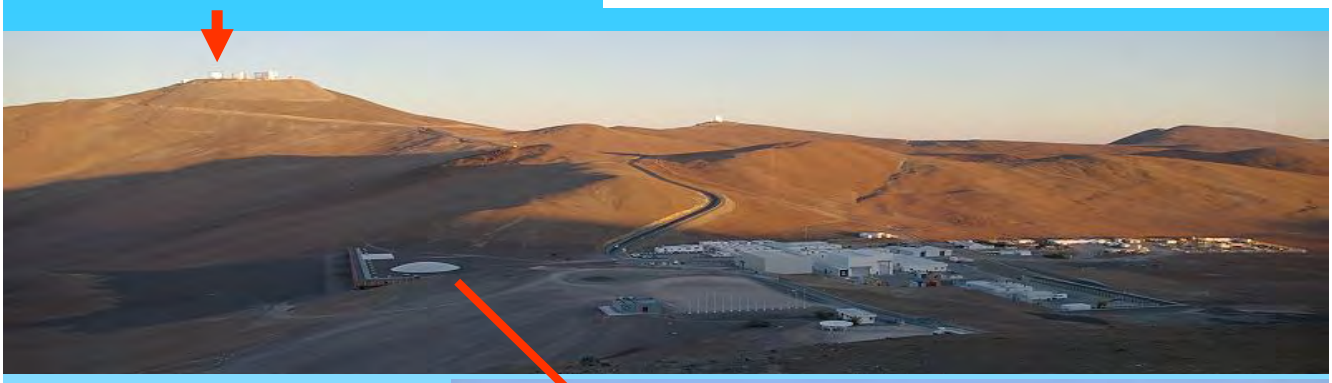


Gemini.avi



**VeryLargeTelescope**

**Areál ESO, Cerro Paranal, 2635m**

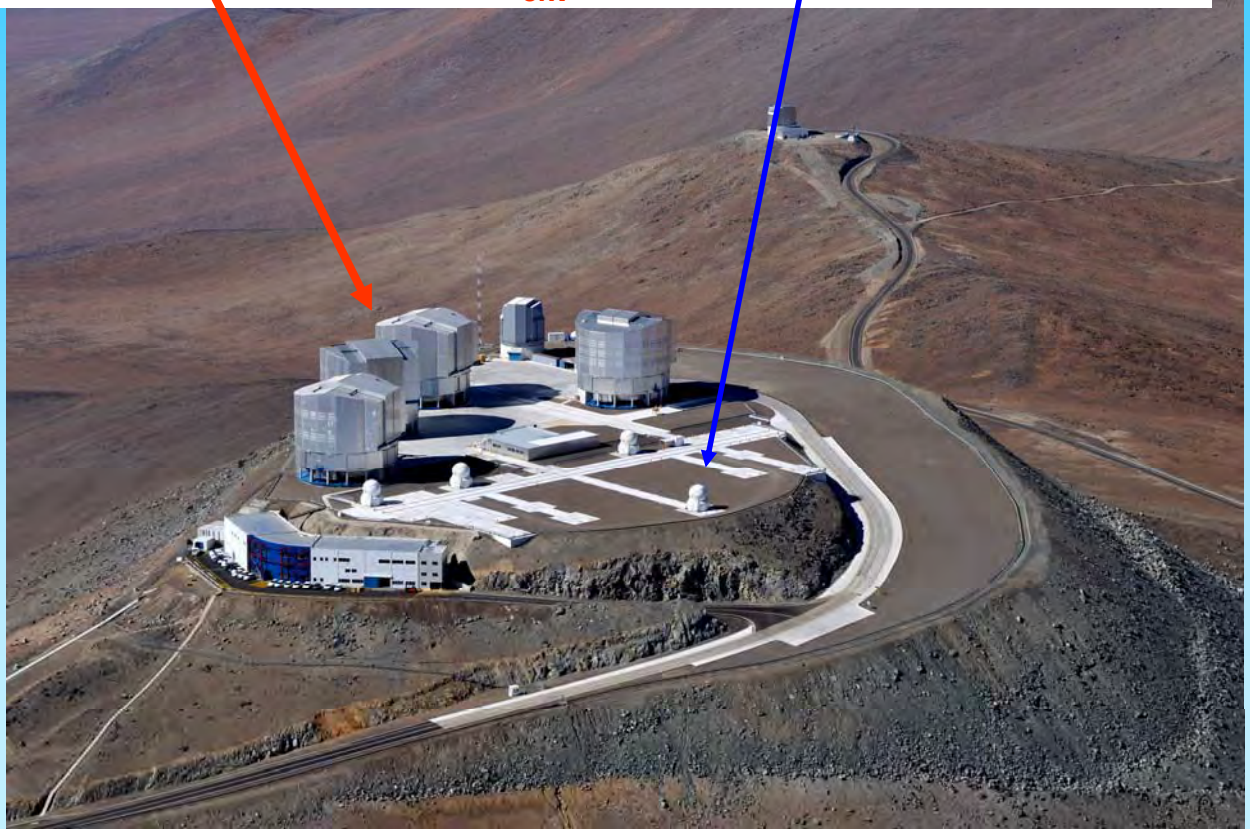


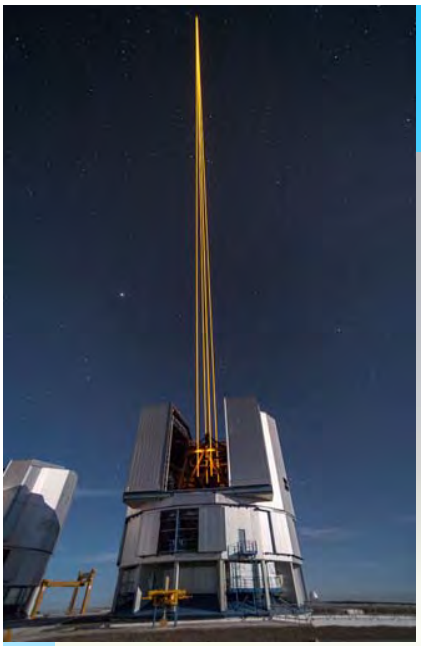
**CHILE**
**Poušť Atacama**
- nejsušší místo na Zemi
- vlhkost 2%
- až 320 jasných nocí za rok
- nulový světelný smog
- dovoz vody do areálu
**60 m³ denně**

**VLT** (4 hlavní + 4 pomocné teleskopy)

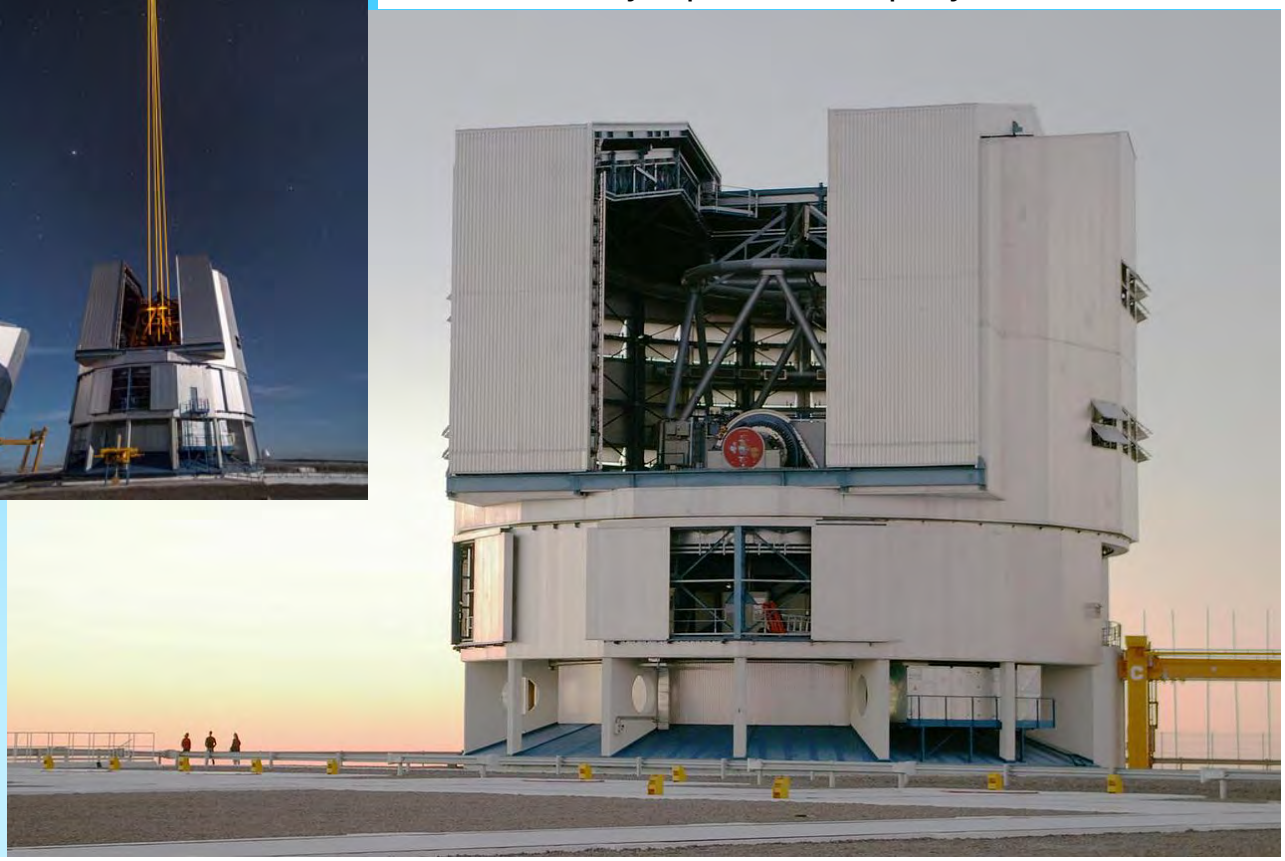
Synchronizace všech čtyř signálů do interferometru (1μm/100m)

**4xD=8,2m monolit., $D_{ekv}$=16m**, 4xD=1,8m na kolejích



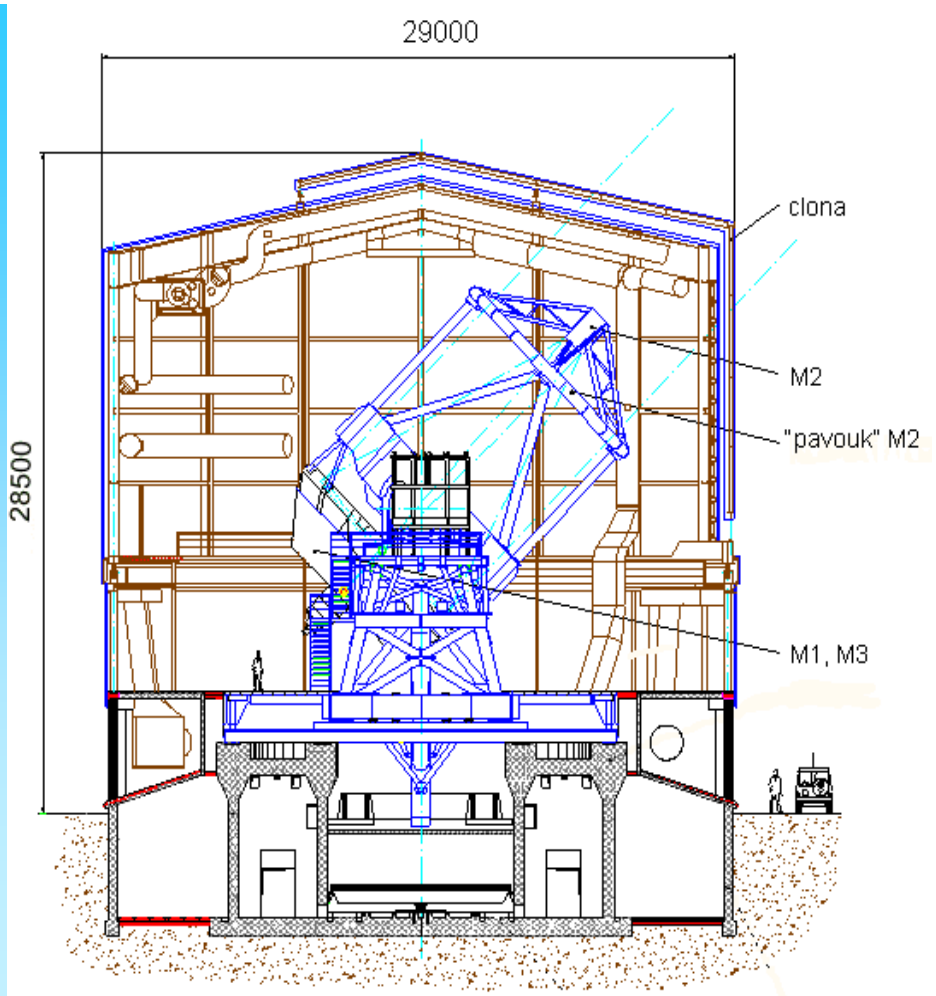


Umělé sodíkové hvězdy: 4x4 lasery 22W, $\lambda$=*589 nm*
- nutná koordinace pozorovacího času
s letovým provozem a pohybem družic

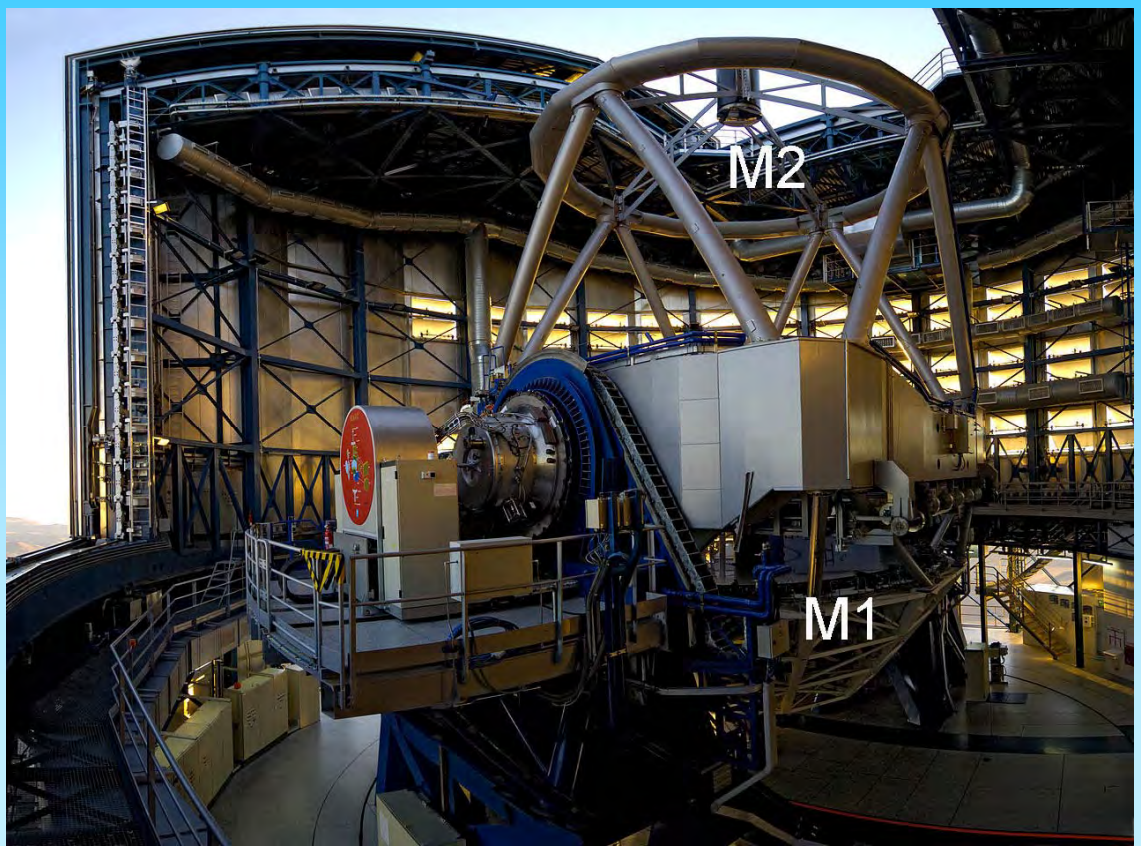


**Azimutová osa:**
- encoder ERA 780C (Heidenhain)
- délka pásku 25m

Laser 22W trvale ...
... příkon 50kW !!



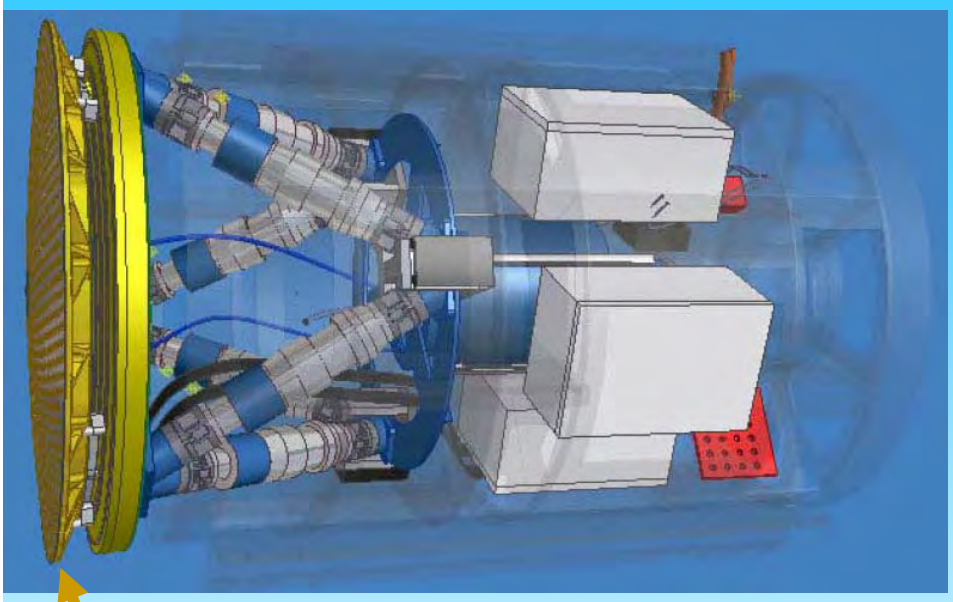
V srpnu 2017 byly na VLT zachyceny gravitační vlny




Pokovení každého zrcadla vždy jednou za dva roky, vrstva hliníku 80nm (15g)

**Čtyři monolitická zrcadla M1**
**D=8,2m,** tl.178mm, 23tun, materiál **Zerodur**,
**aktivní optika M1** se150 aktuátory, deformace v řádu *nm*

## Zrcadlo M2 pro VLT (2006) ... D=112cm



**Aktivní optika (hexapod)**
- AC motory
- red. převodovky
- planetové šrouby
- lin. odměř. polohy
- 1.tvar kmitu 54Hz

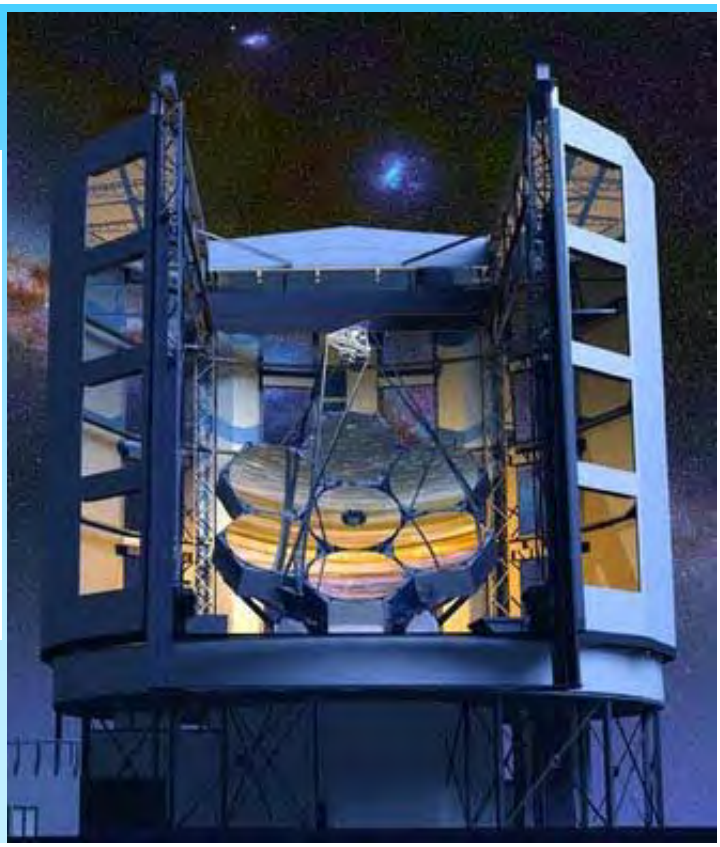
**Adaptivní optika - "gumové zrcadlo"**
- konvexní ohebná **membrána** tl. 2mm (berylium), nalepené magnety
- 1170 elmag. aktuátorů na opěrné desce tl. 29mm, teplo 0,3W/1aktuátor
- kapacitní senzory polohy, AD převod 80kHz, 8 senzorů na jeden DSP
- silová (proudová) zpětná vazba 2kHz, aktivní tlumení
- opěrná deska + membrána: **m =180kg** (bez hexapodu)

## GMT (Giant Magellan Telescope, Las Campanas, Chile, 2500m n.m.)

- sedm celistvých zrcadel **D=8,4m** na jedné alt-azimutální montáži, ekvivalentní průměr 24,5 metrů, **dokončení v r.2022??**

Konec možností celistvých zrcadel na **D≈8m**

Další vývoj: **vícesegmentová zrcadla** (6-úhelníky - jako hmyzí oko), **každý segment je stavitelný a má svoji aktivní optiku**



## Některé další teleskopy:

### KECK (Mauna Kea 4100m n.m., Havaj)

2xD=10m po 10 šestiúhel. segmentech, tvarová odchylka zrcadel max. 4nm, tvar přídavného zrcadla pro adaptivní optiku je řízen na frekvenci 670Hz

### GEMINI (Havaj 4100m+Chile 2700m)

D=8,2m, monolit.,tloušťka 20cm, f=14,5m, synchronizace mezi Havají a Chile, přehled o celé obloze

### SALT (Jižní Afrika)

91 segmentů, $D_{STŘ}$ ≈10m, **jen azimutální osa**, konstantní elevace $37^0$

### HET (Texas)

91 segmentů, $D_{STŘ}$ ≈10,5m, **jen azimutální osa**, konstantní elevace $35^0$

**Zvláštní případ ("obří triedr")**

**L**arge**B**inocular**T**elescope

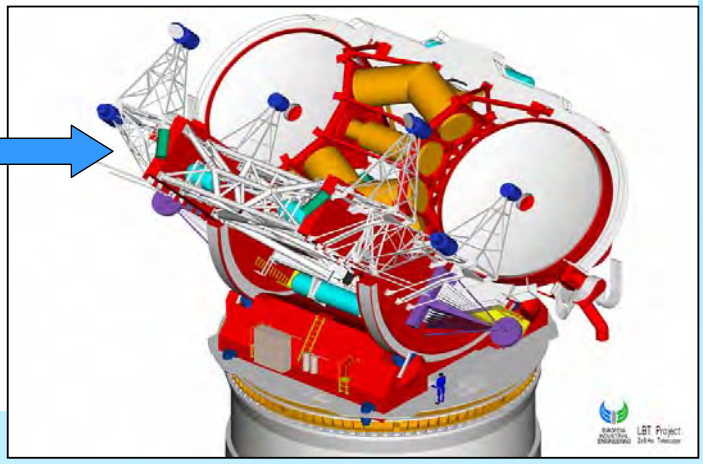
(Mount Graham, 3267m, Arizona)

**2x8,4m, monolit.,** 2x16 tun,

$D_{ekv}$ =23m v režimu interferometru

Protesty Apačů

(zneuctění posvátné hory)



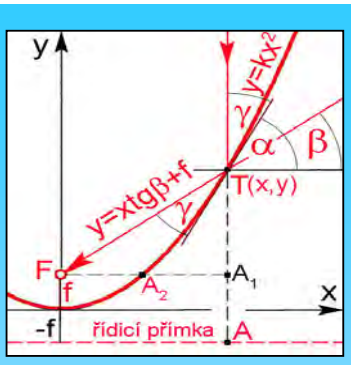
# Rotující tekutá zrcadla - rtuť

(jen pro pohled do zenitu)

(Hg .... 13,7 kg/dm$^3$, odrazivost 77% pro $\lambda$=600*nm*)

**Parazitní vlivy na tvar paraboloidu:**

- rotace Země....Coriolisovo rychlení, zakřivení Země, proudění vzduchu, teplota, viskozita, povrchové napětí, vlnění hladiny Hg...




$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{mx\omega^2}{mg} \Rightarrow dy = \frac{\omega^2}{g} x dx$$

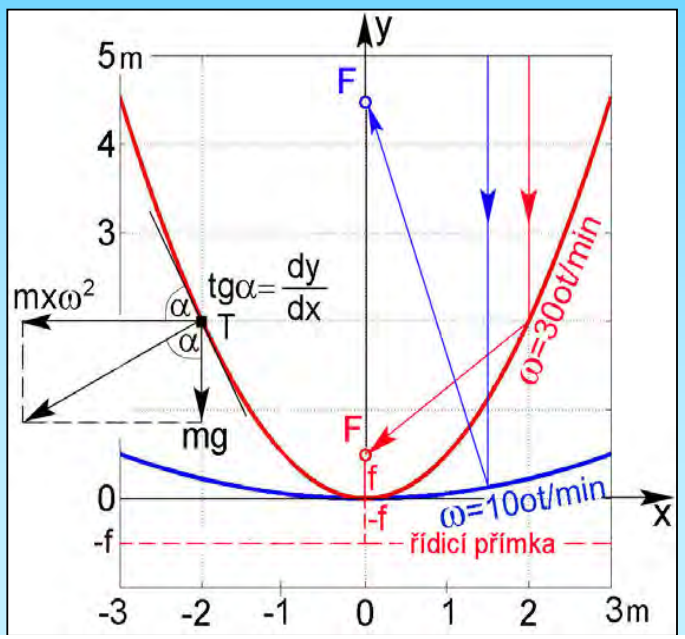
$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4f}$$

$$f = \frac{g}{2\omega^2}$$

Plocha paraboloidu

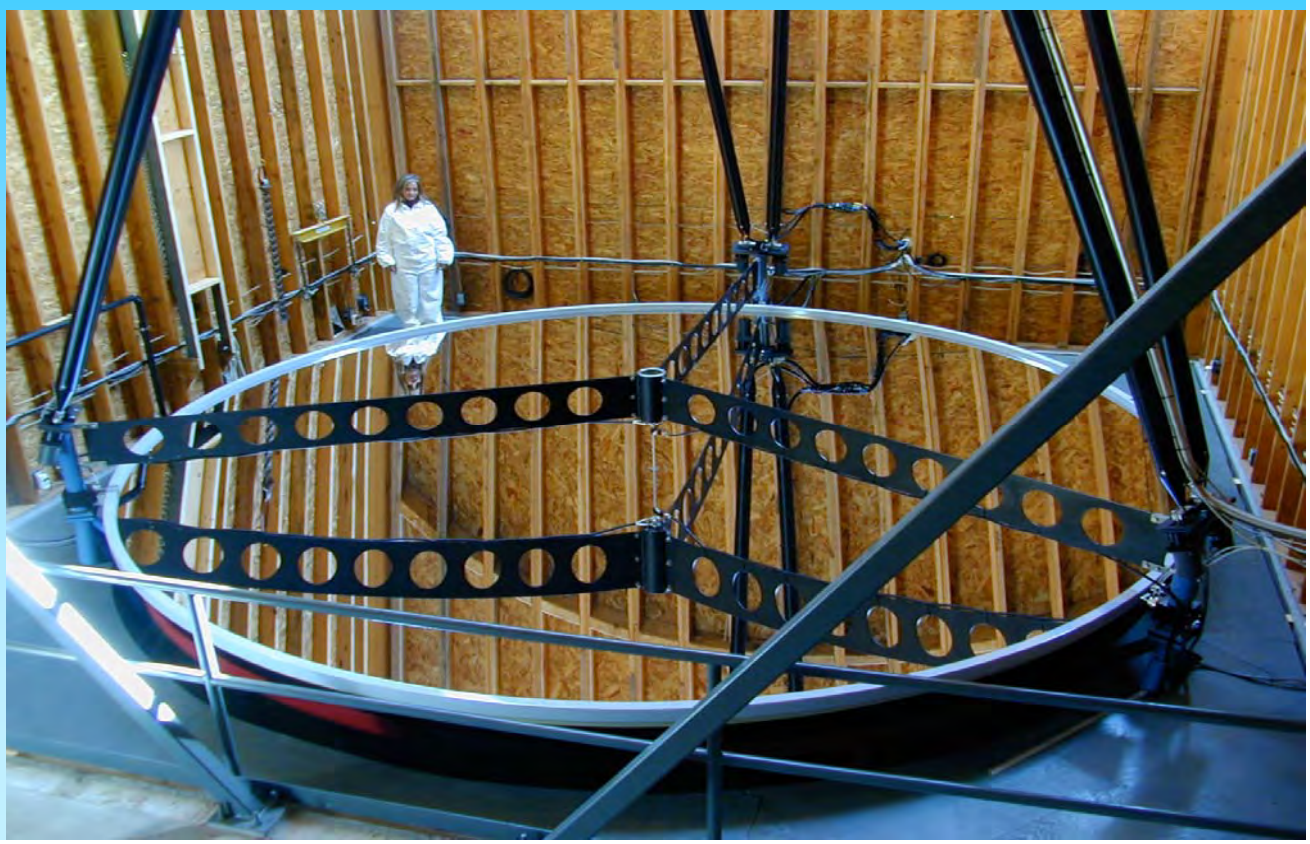
$$A = \frac{2\pi g^2}{3\omega^4}\left[\left(\frac{\omega^4 R^2}{g^2}+1\right)^{3/2} - 1\right]$$

Objem rtuti V,
tloušťka rtuťové vrstvy $\Delta$=V/A




# LZT (Large Zenith Telescope), D=6m

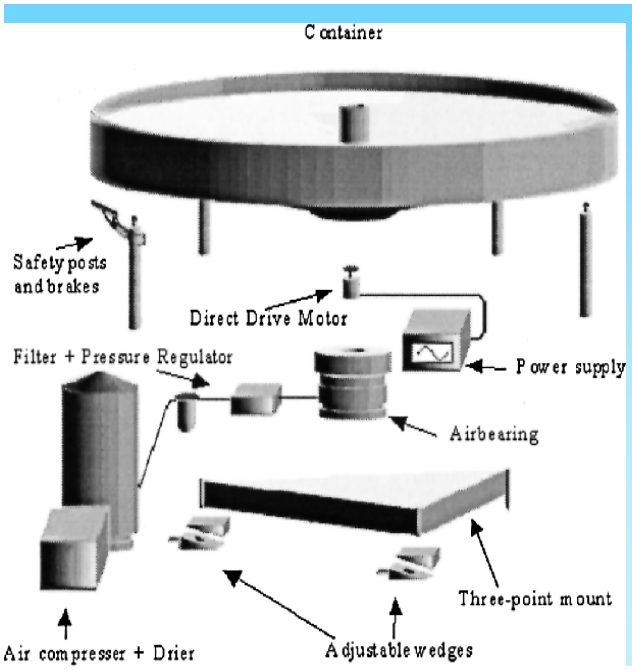
University of British Columbia, Vancouver, 49$^0$ s.š.)



**T=8,508120 s/ot, úhlová rychlost 0,738493 rad/s** .... cca 7 ot/min

- takt regulace 10ms, opt. snímač 2500 rysek/ot
- hmotnost rotujících částí 3000kg, únosnost pneum. ložiska 10 tun, ϕ56 cm
- motor 2,14kW, tepel. ztráty 22W

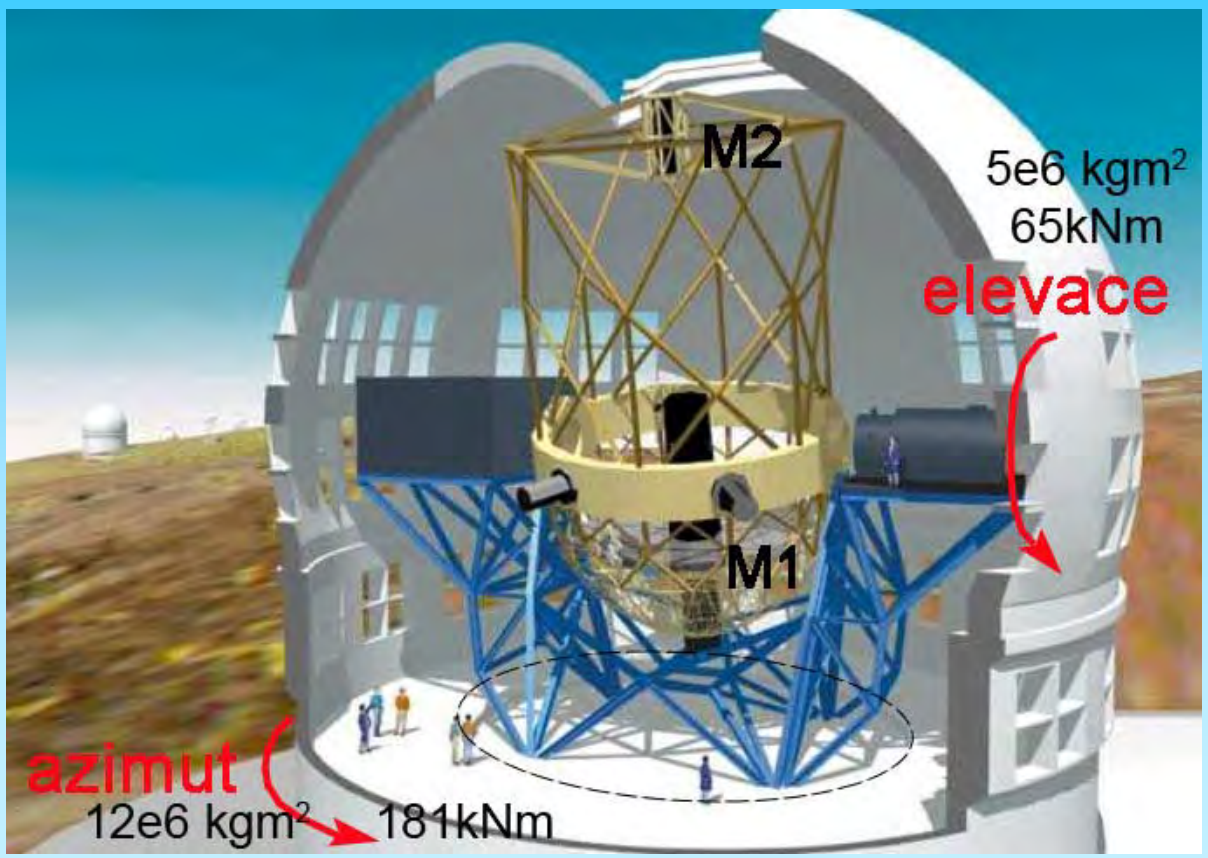
**Výpočet:** f = 9 m, plocha paraboloidu A = 28,5 m$^2$, hloubka zrcadla 250 mm
Start (ruční roztočení) při 100 litrech Hg..... vrstva Δ = 3,5 mm
Provoz po upuštění rtuti za 2 dny na 34 litrů ..... Δ = 1,2 mm



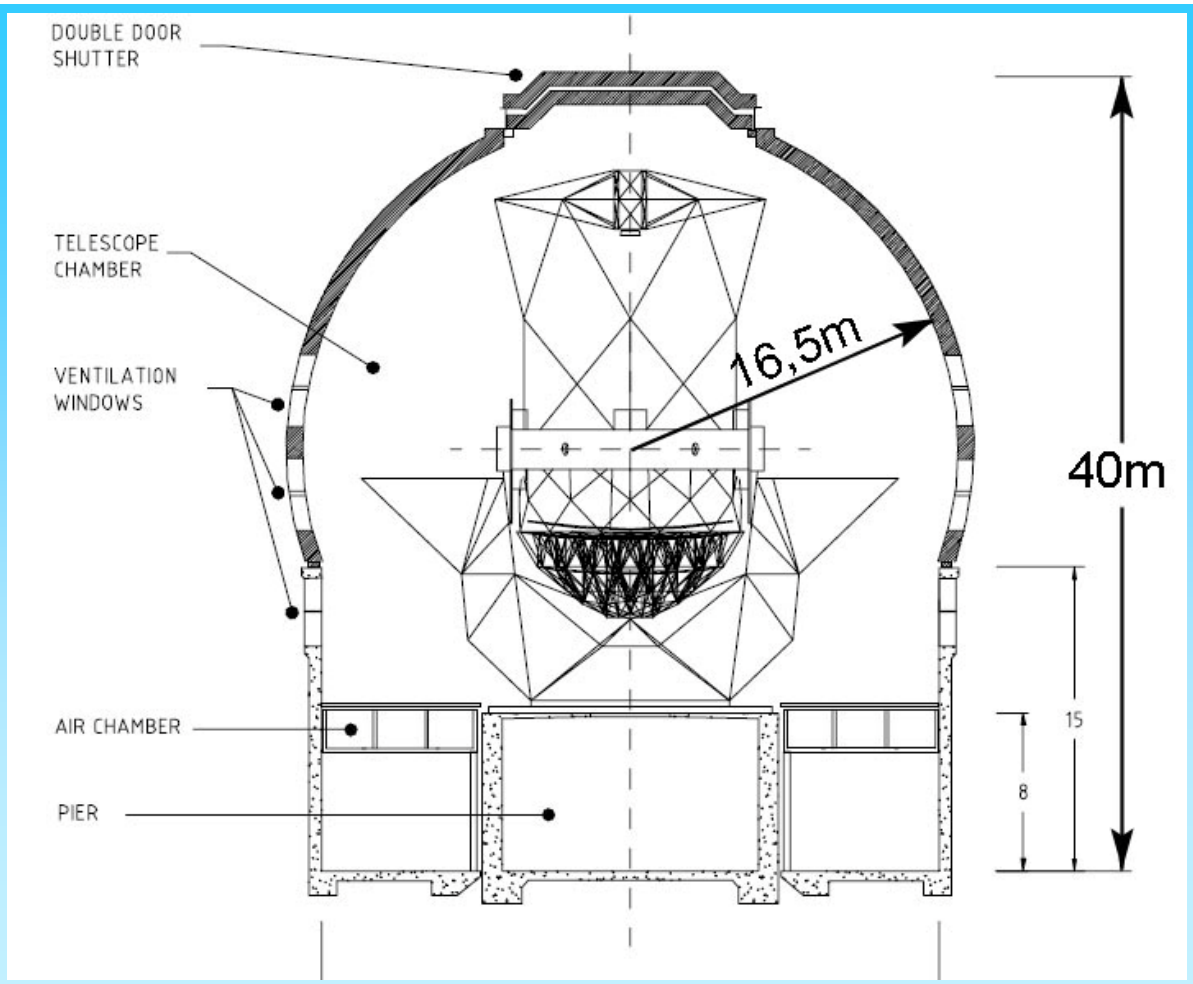
## Gran Telescopio CANARIAS (La Palma, 2267m) současný největší světový teleskop .... D=10,4m

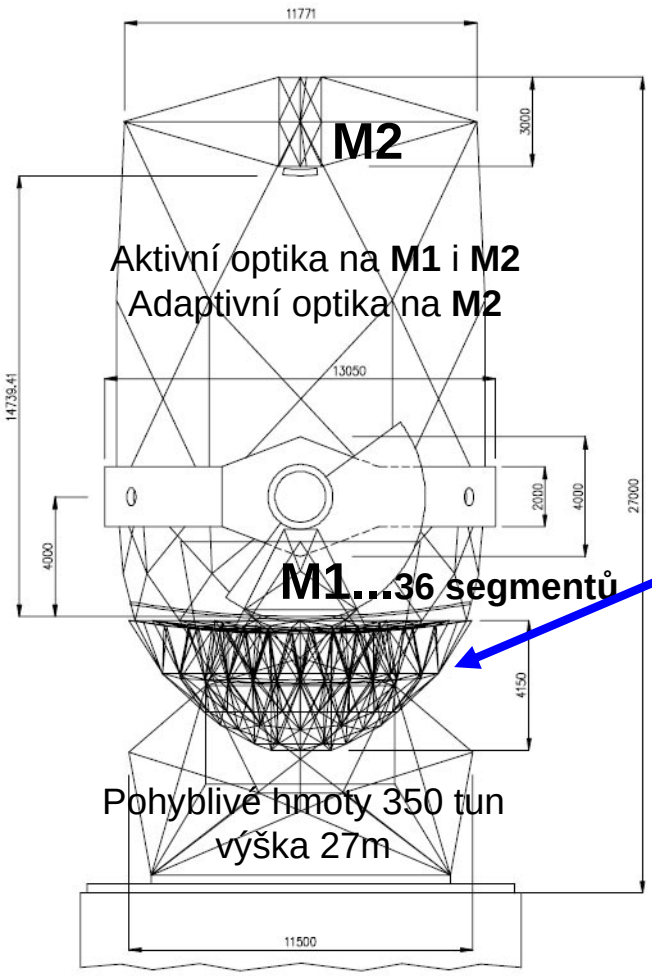
plný provoz od r.2007, 130e6 €
(90% Španělsko, 5% USA, 5% Mexiko)
Typické počasí (stejné jako
v době návštěvy autora):
vrchol hory nad nízkými mraky nad Atlantikem

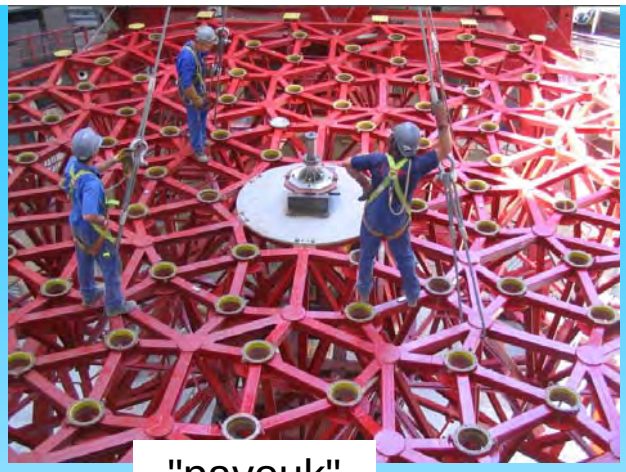
V obou osách přímé pohony - torque motory **Phase** (Ital.), hydrostat. ložiska **SKF**, hydraul. diskové brzdy, 2700 litrů oleje



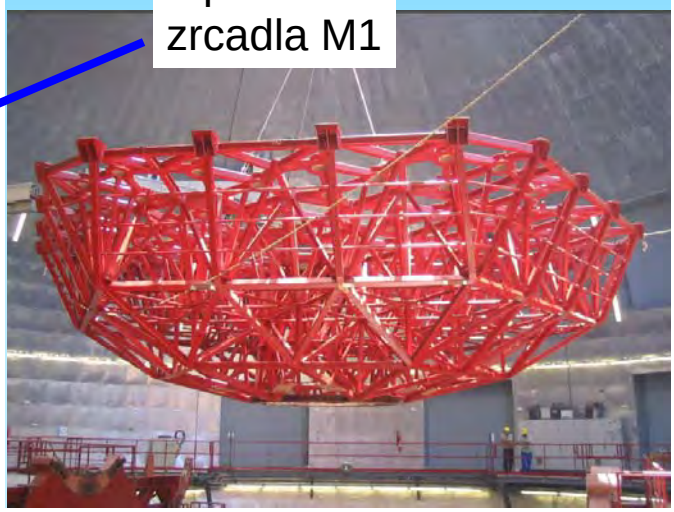

stav v srpnu 2000



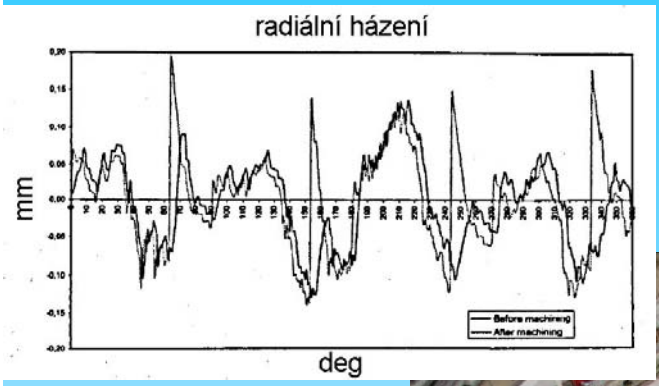



"pavouk"
zrcadla M1



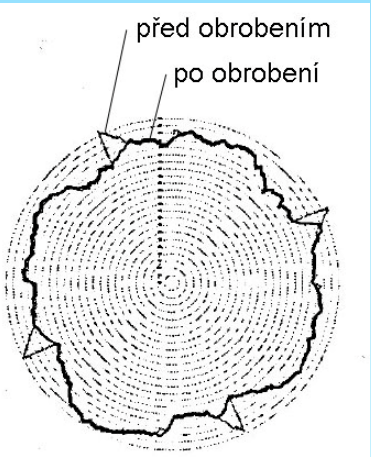
- radiální házení 0,25mm, ax.0,16mm

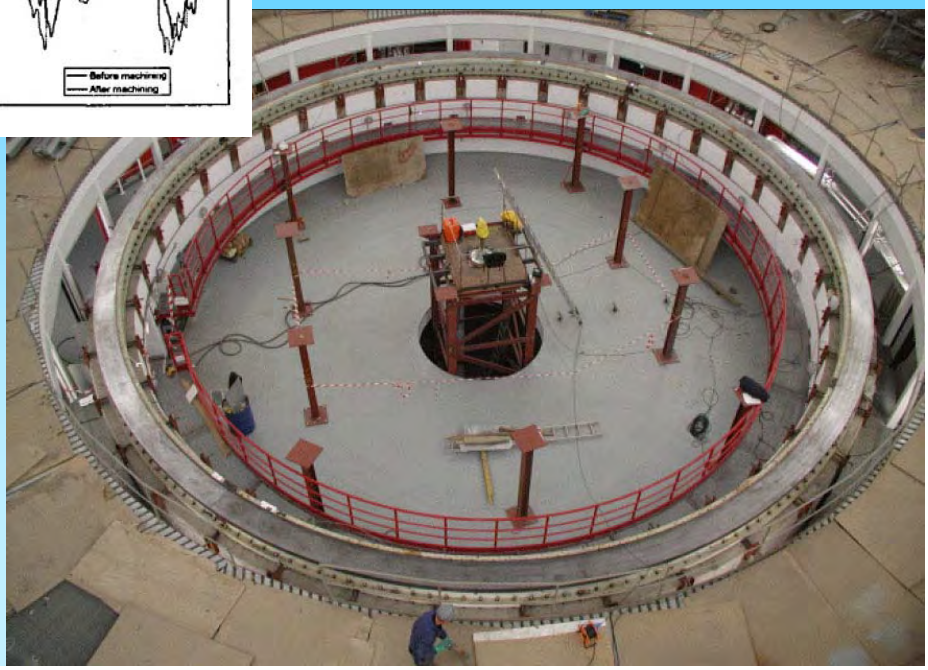



## Montáž azimutové osy

## $J_{CELK}$=12e6 kgm$^2$

- hydrostat. ložisko D=16m,
- 4 axiální segmenty,
- 4 radiální (2pevné+2 pohyblivé),
- radiální předepnutí 150tun



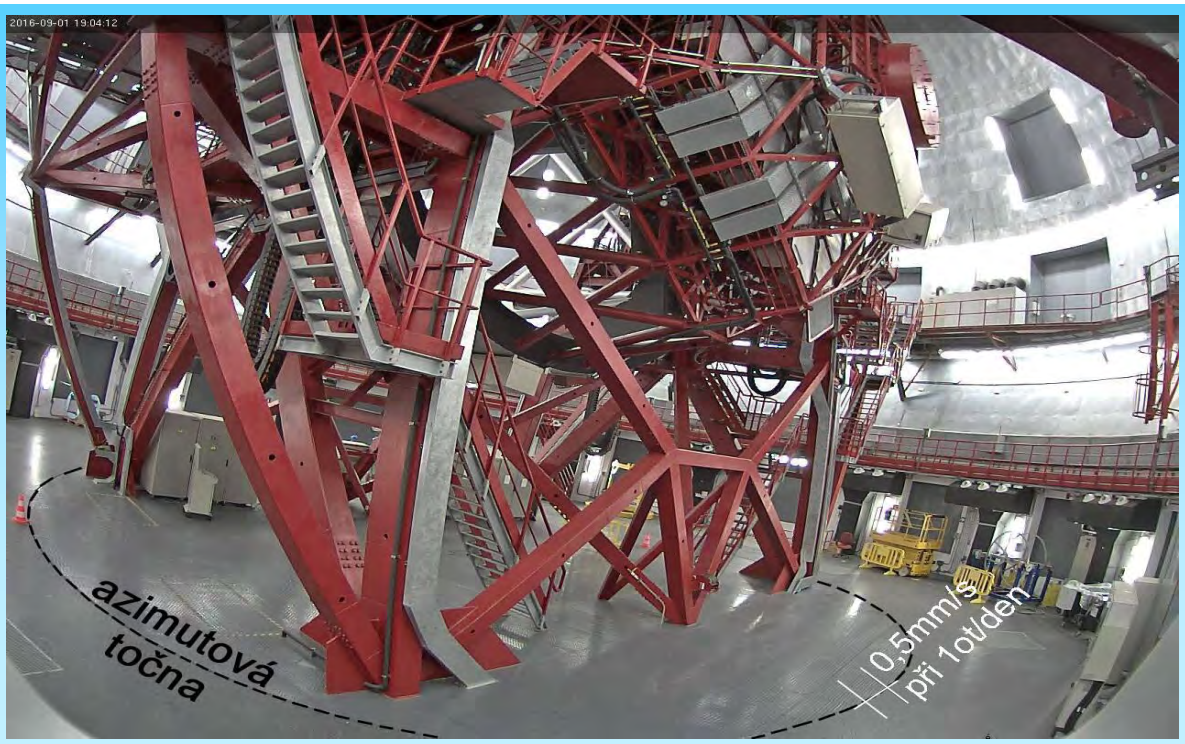



**Torque motor** axiální diskový, rot. magnety, oboustr. stator ve 4 sekcích, 31 400 Nm/A, max. 181 500 Nm/6A, vzduchová mezera 2,6 ± 0,15 mm

**Encoder** pásek ERA 780C na **ϕ15m**, **L=48m** (Heidenhain...nejdelší), 8 snímacích hlav pro pol. vazbu, 4 pro rychlostní, přesnost 0,02arcsec/360$^0$

**Zkoušení rovnoměrnosti chodu azimutové osy:**

- jedna sekce statoru...brzda, ostatní 3 sekce....pohon
- kolísání momentu při zatížení 14kNm pod 2%
- odchylka momentové konstanty od výpočtu 25%
- polohová odchylka pod 0,01arcsec (rychlost se neudává, asi 1ot/den???)

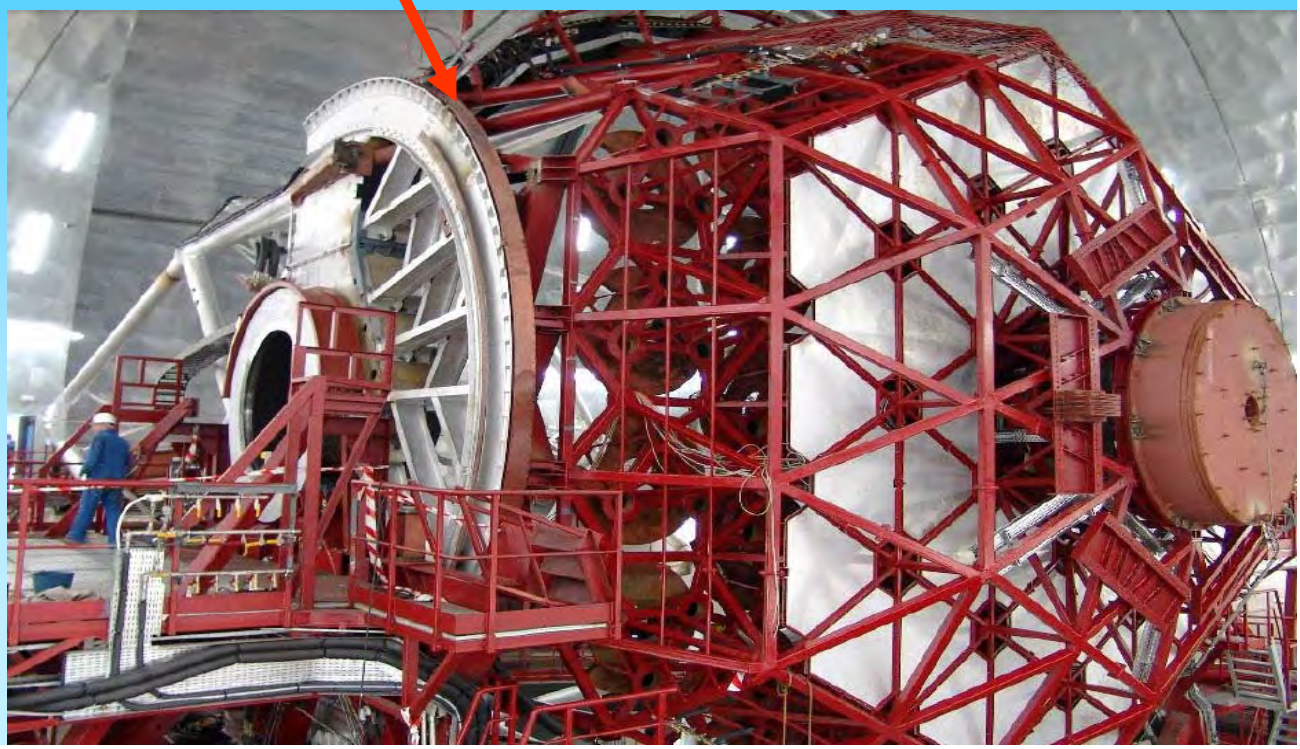



## Nosný kruh elevační osy

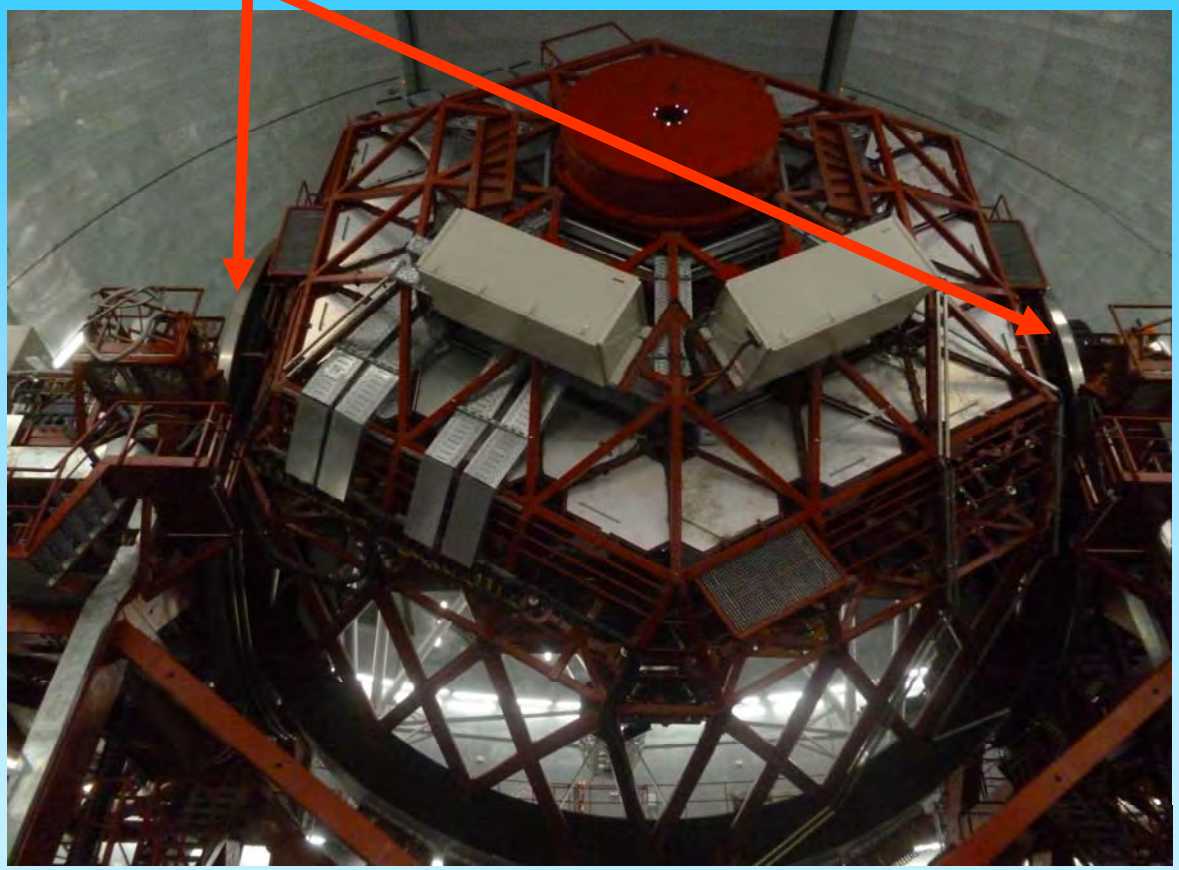
- ϕ13m, složen ze 6 segmentů,
- čepy ϕ2m, nesouosost 0,3mm, hydrostatická ložiska

## Elevační osa: J=5e6 kgm$^2$, oboustranný přímý pohon

- **dva radiální segmentové torque motory**, 5400 Nm/A, max. 65000Nm/12A
- magnety na rotorech **D=9m** po části obvodu 180$^0$, statory ve 2 sekcích
- encodery Heidenhain ERA 780C (pásky na průměru 2m)
- přesnost 0,045arcsec/90$^0$, 8 snímacích hlav pro poloh. vazbu, 2 pro rychl.



Oboustranný náhon elevační osy (systém gantry)

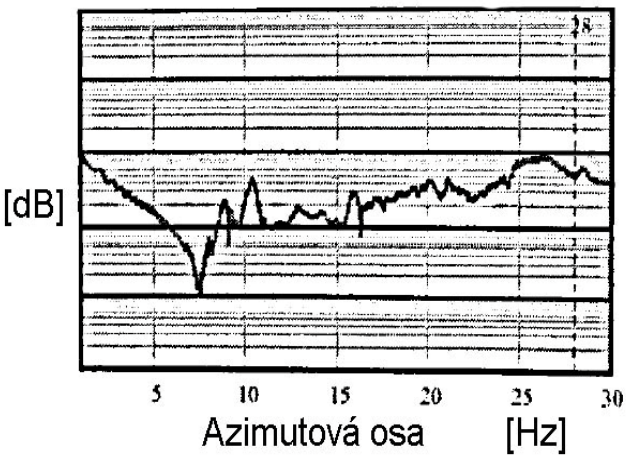


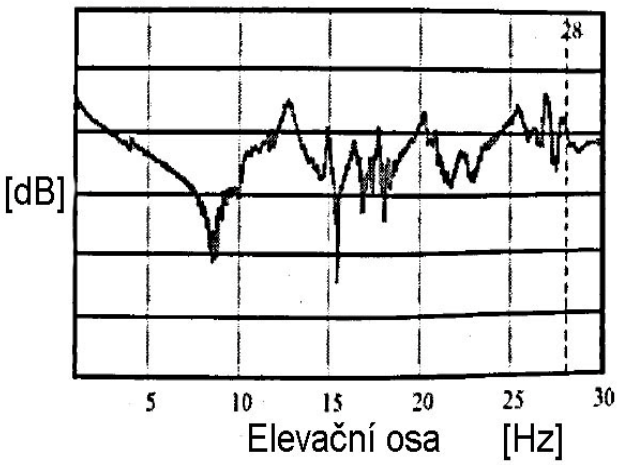
Změřená statická deformace celé konstrukce mezi M1 a M2:
- max.1,2mm ve vertik. i horiz. poloze (analýza FEM ... 0,8mm)

Měření dynamické poddajnosti - přenos $G_{11}(j\omega)$
- vstup .... moment motoru
- výstup ... encoder

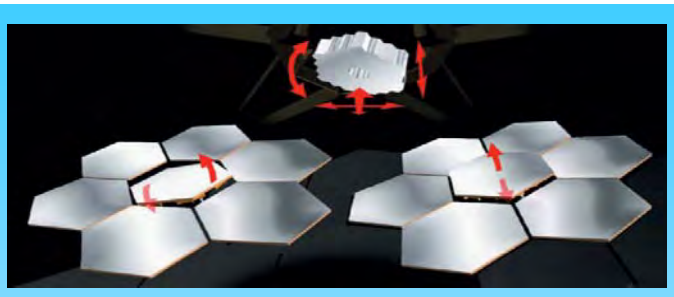
1. antirezonanční frekvence:
- azimut. osa ....7,5Hz
- elevační osa .... 8,5Hz

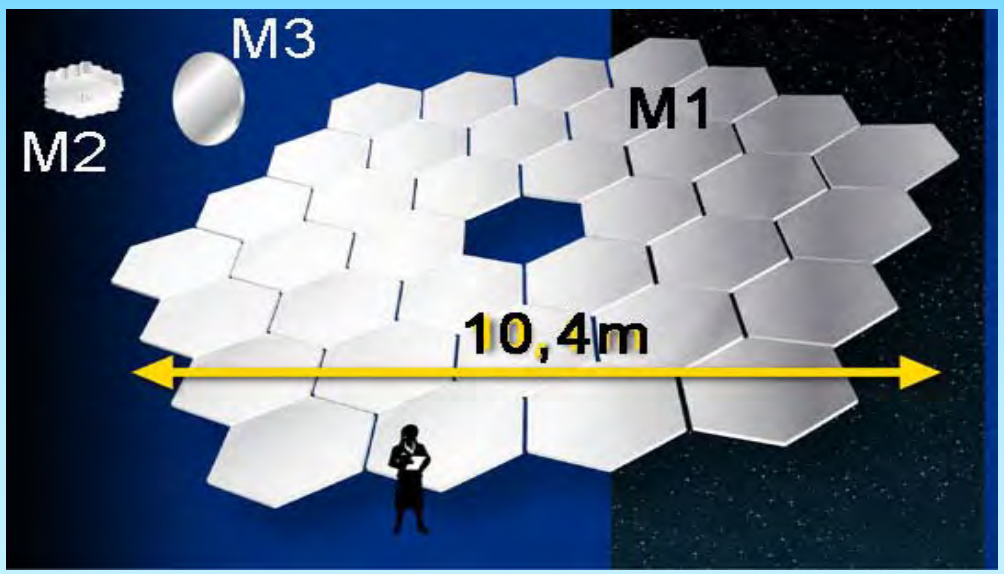
Dynam. poddajnost $G_{11}$ - otevřená polohová smyčka



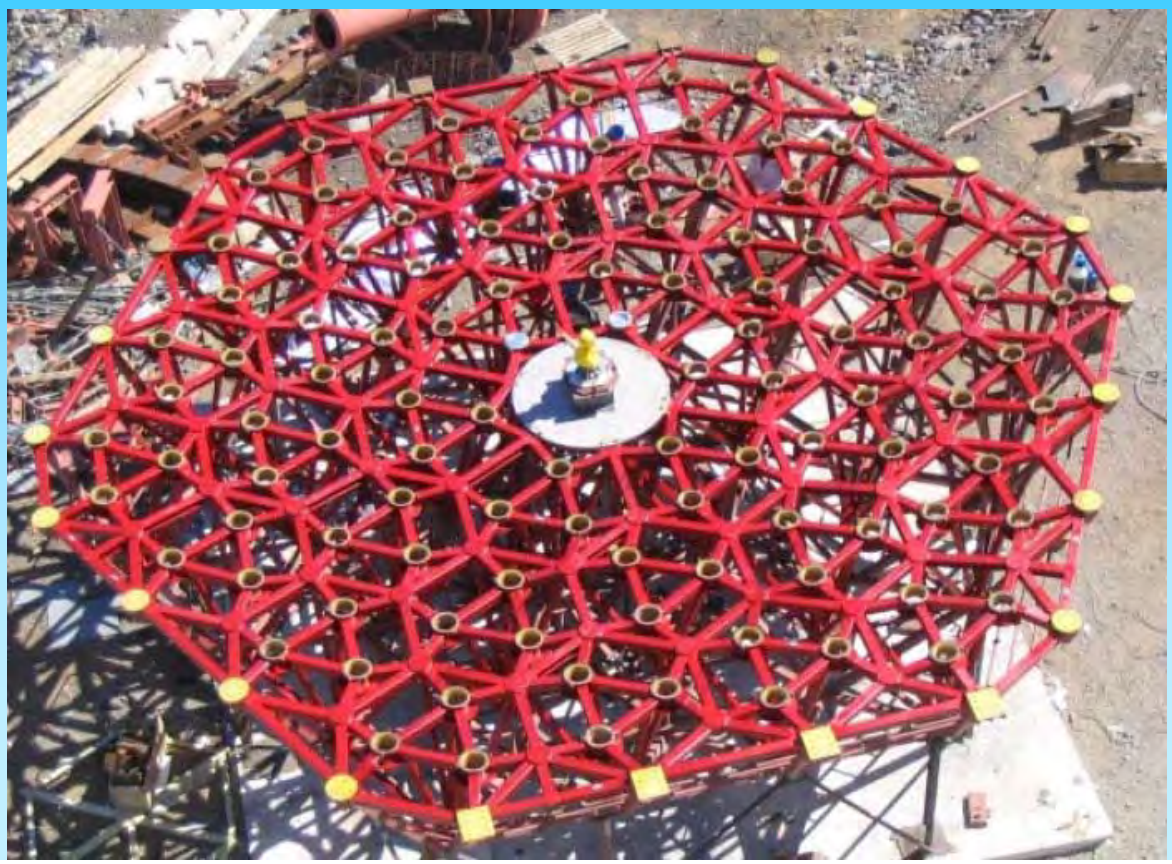



**Zrcadlo M1:** celkem 36 segmentů (Zerodur), aktivní optika 1÷10Hz, celk.17 tun, odraz. plocha 73m$^2$, f=167m, broušení 6 let (2000÷2006)






Pavouk M1: celkem 36x3=108 opěrných bodů

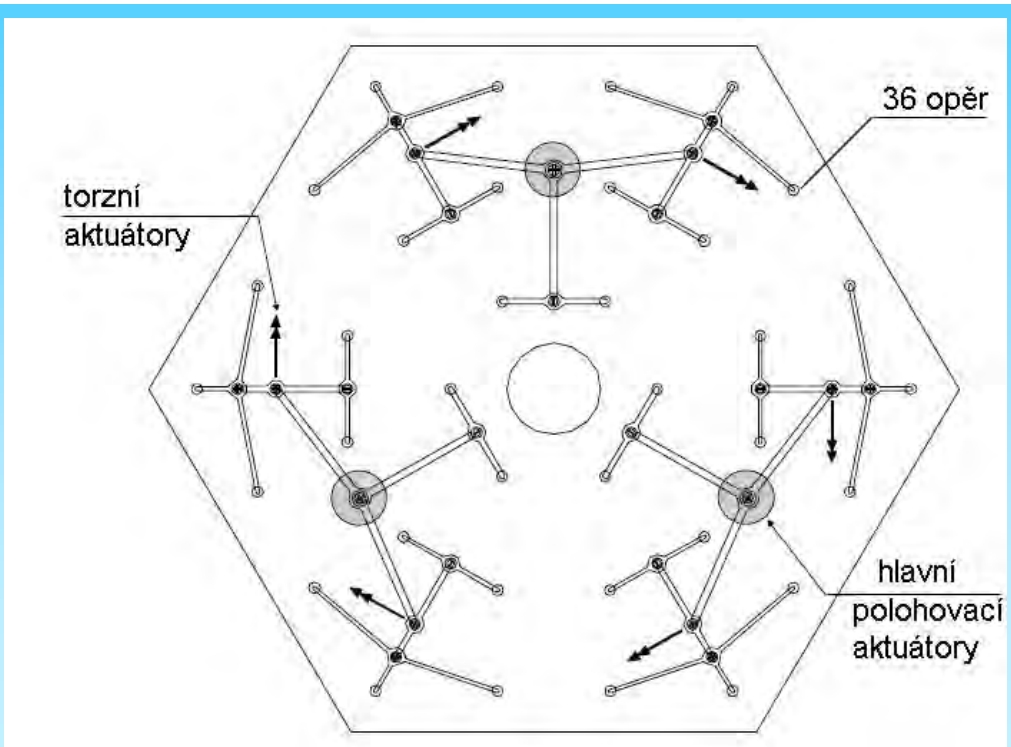


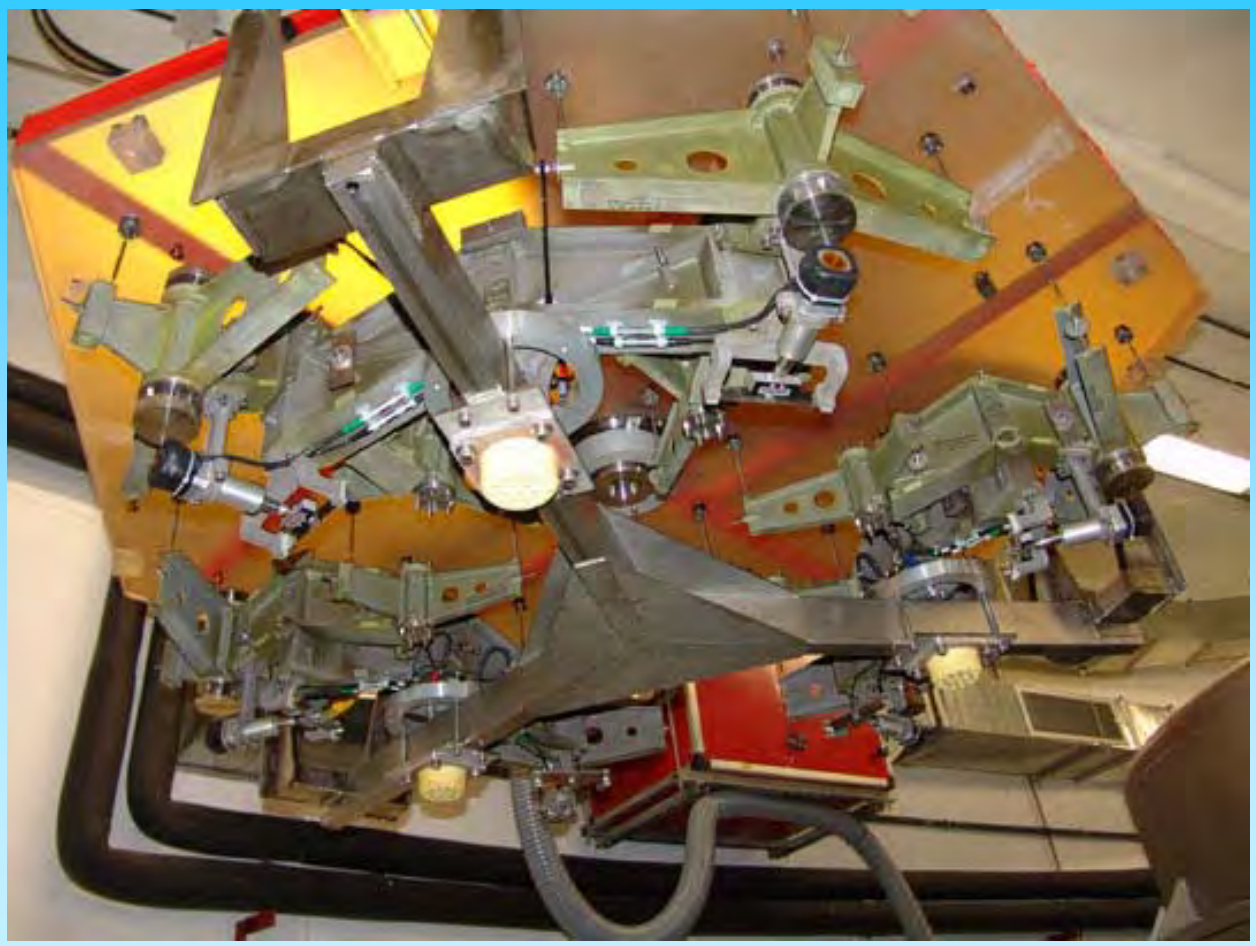
**Jeden segment:**
opsaná kružnice
ϕ1870mm
výška 80mm
m=480kg
chyba povrchu
max. 0,007μm

Pokovení hliníkem ve vakuu

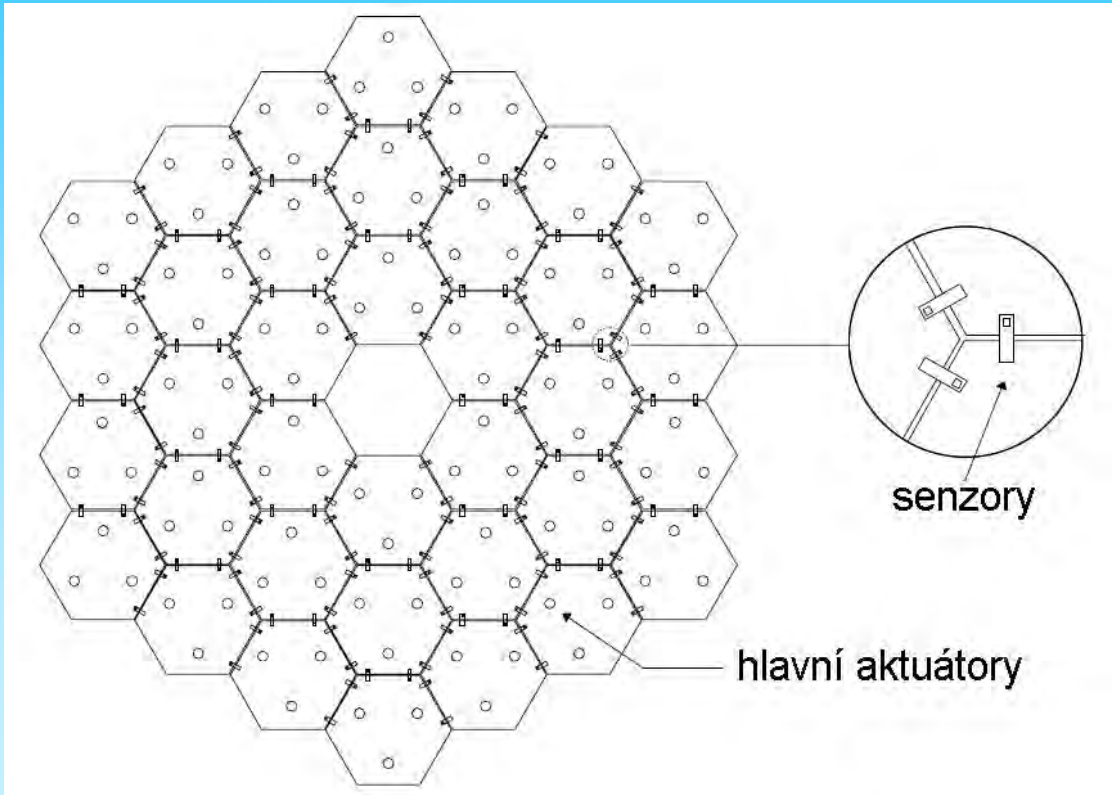
## Aktivní optika M1 (1÷10Hz)

Každý segment: 3 hlavní + 6 naklápěcích (torzních) aktuátorů
(celkem 36x9=324 stupňů volnosti)
- 36 tenkých ohybově poddajných opěr

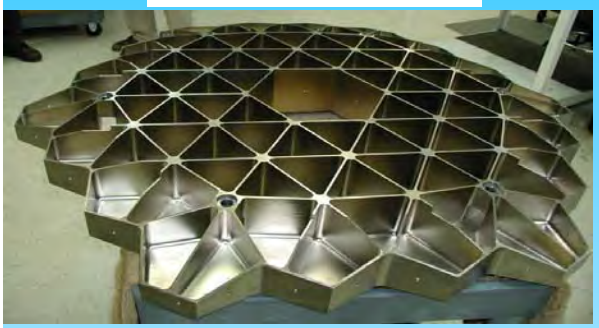


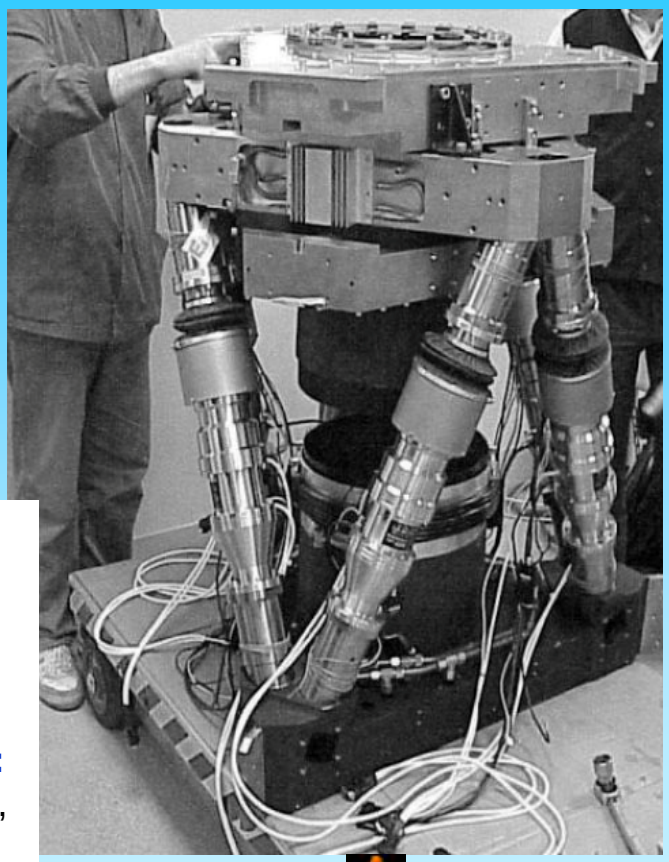


Polohování segmentů ... 36x3=108$^0$ volnosti
Tvar segmentů ... 36x6=216$^0$ volnosti, celk. 324$^0$
Mezi segmenty mezery 3mm, celkem 168 vícesměrových senzorů



**Zrcadlo M2:**
- slitina Be
D=118cm, tl. 13cm
m=46kg





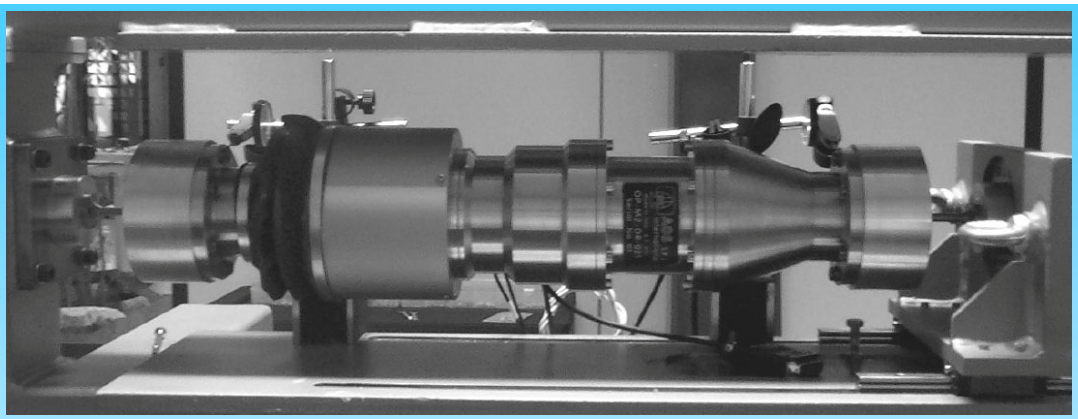
GTcelk.mp4

**Dvoustupňový pohon (seriově)**

**1. stupeň (aktivní optika, 1÷10Hz):**
- souosost s **M1** hexapodem
- řízení v $5^0$ volnosti (X,Y,Z,Rx,Ry)
- 1.tvar kmitů 155Hz

**2. stupeň (adaptivní optika, 200Hz):**
- naklápění **M2** vůči plošině hexapodu, pružné závěsy, elektrodyn. pohony, seismické vyvážení protihmotou

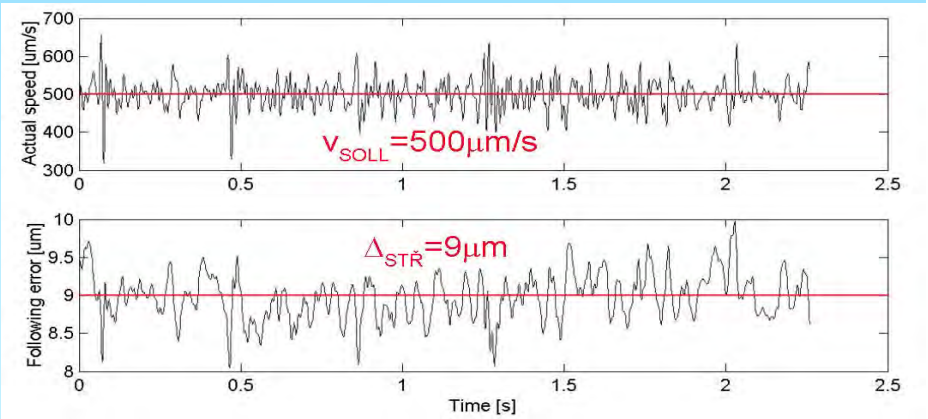
**Noha hexapodu:** AC motor+red.převodovka+planetový šroub,
- lineární snímač polohy s rozlišením 0,04μm, přídavný rot. snímač
- rozsah ±17mm, statická tuhost 132N/μm, poloh. vazba s PID reg.



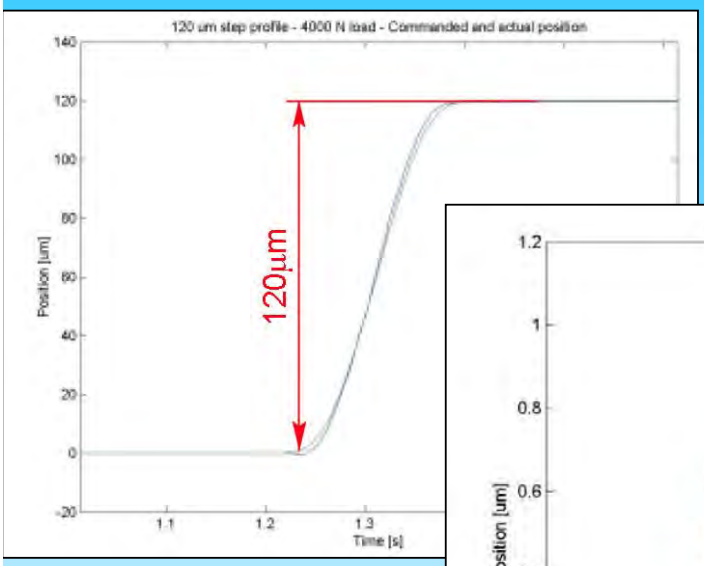
Rovnoměrnost chodu

$K_V \approx 50/s$

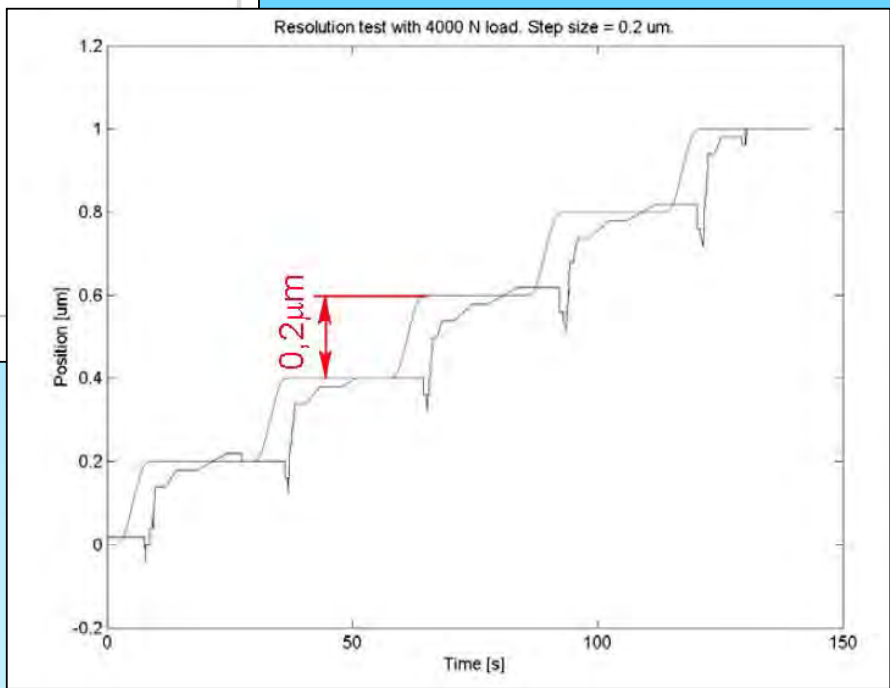
Polohová odchylka při v=0,5mm/s: kolísání ±2μm



Odezva na rampu polohy
120μm/100ms při zatížení 4000N, rychlostní feedforward




Odezva na rampy 0,2μm
při zatížení 4000N




# ... a nakonec budoucí největší monstrum ELT

Čočky

**GTC**

**Keck**

**Gemini**
(Chile+Havaj)

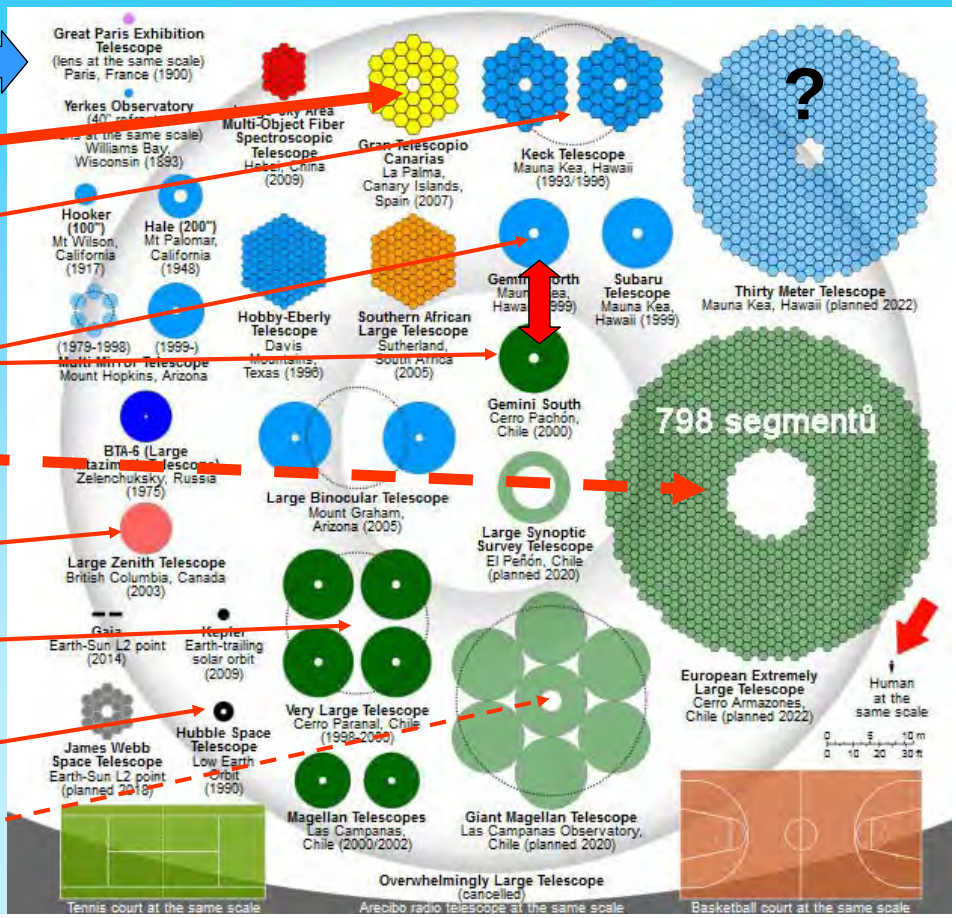
**ELT**(2025?)

**LZT**(rtuť)

**VLT**

**Hubble**

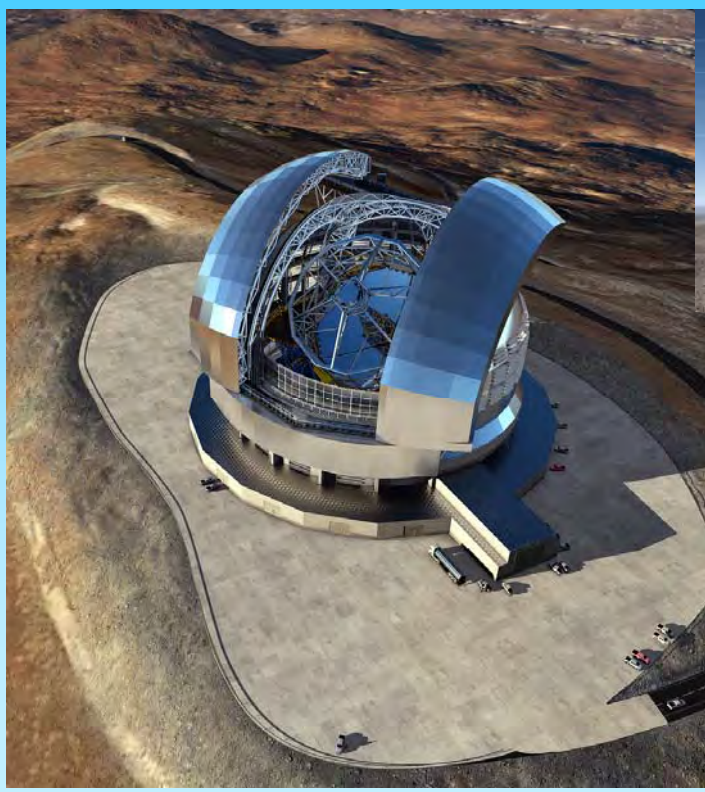
**GMT**(2022?)

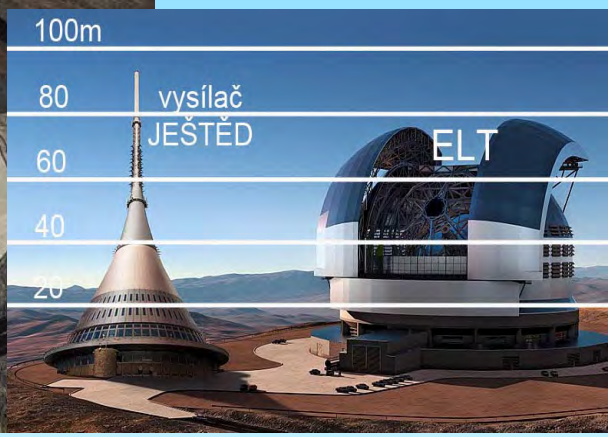


Cerro Amazones, 3060 m n.m., 190km$^2$ dar Chile pro ESO, ochrana 1270km$^2$
- hotová silnice, 6/2014 odstřel 300 000 m$^3$ zeminy, plošina cca. 150x150m

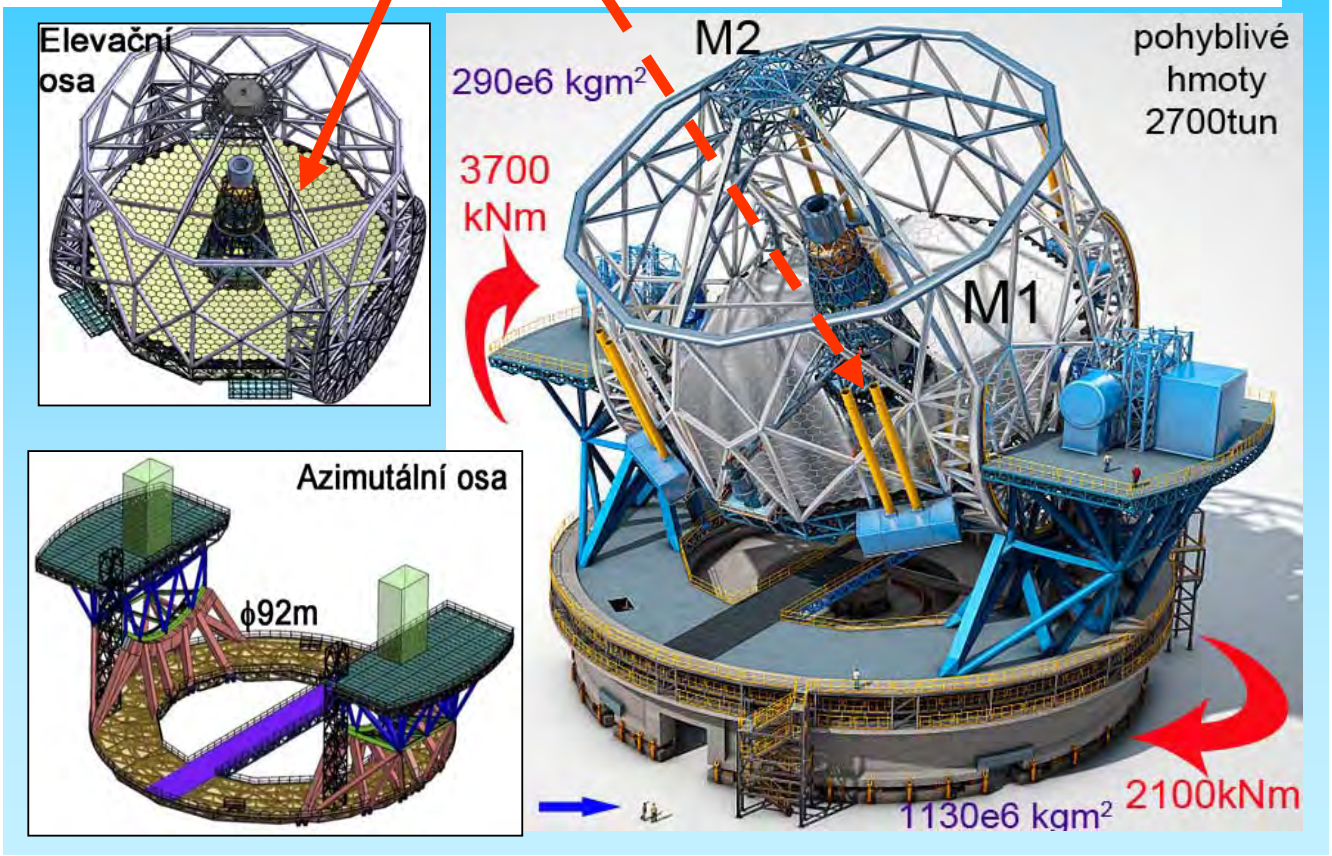
Odhad 1 miliarda euro, plánovaná životnost max.50 let
příspěvek ČR jednorázově 3 miliony, ročně 1,4 milionu euro

**Kupole:** výška 74m, pohyblivá část 5000 tun, 54 vozíků (2,5 MW při rotaci)





Zrcadlo **M1 ... D=39,3m**, 798 segmentů, 978m$^2$, 100e6 víckrát světla než oko
- v obou osách torque motory, hydrostatická ložiska, přesnost 0,3 arcsec
- umělé sodíkové hvězdy: 8 laserů po 50W




5/2017 - položen základní kámen
- odlito sekundární zrcadlo M2

2018 - odlity první segmenty primárního zrcadla M1
- rýsují se základy kupole

Předpokládané zvýšení rozlišovací schopnosti

## Azimutální osa:

**Hydrostat. ložisko:**

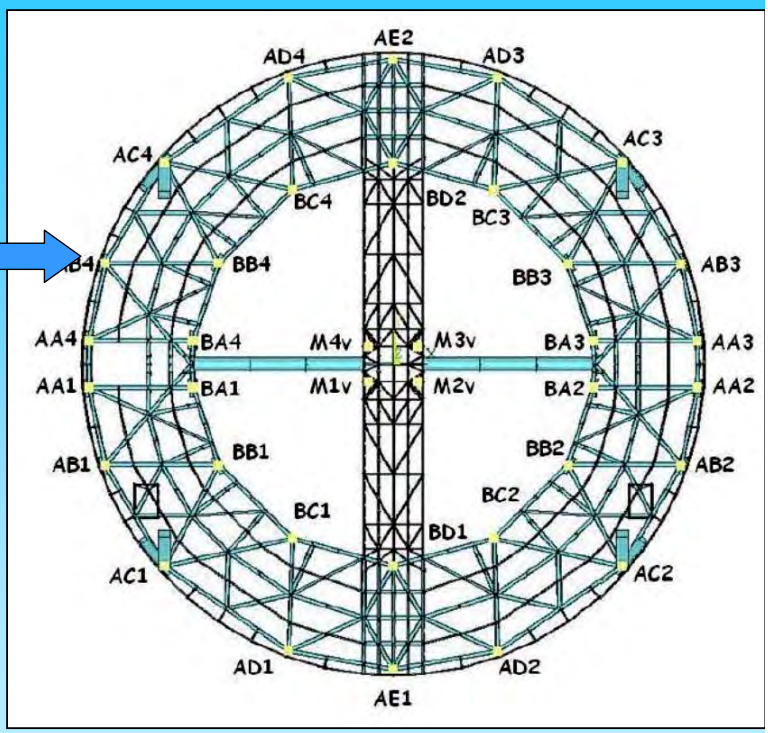
- 36 buněk ve 3 prstencích

(ax.ϕ51,5m, ax.ϕ34m, rad.ϕ4m)

**Axiální torque motor:** ϕ51,5m

- rotující cívky ve 24 ax. sekcích
- max. 2100 kNm

**Rozsah rotace 360⁰**



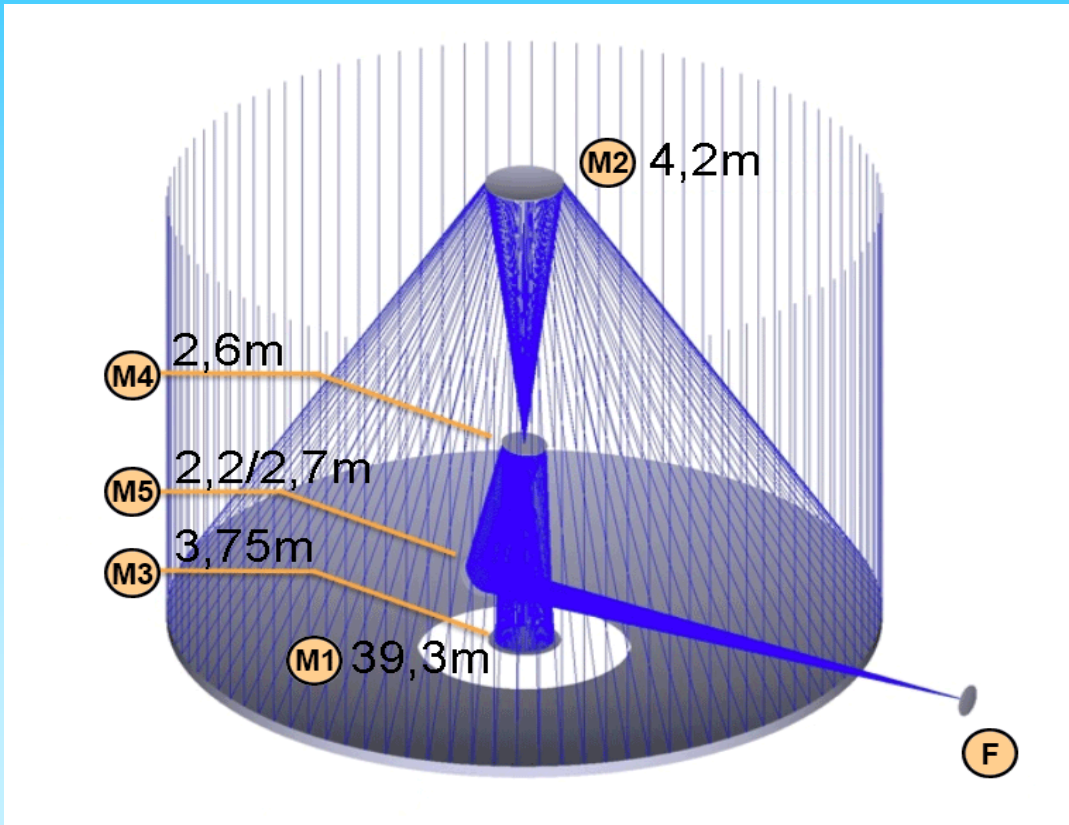

## Elevační osa:

**Radiální torque motor:**

- cívky v 16 rad. sekcích
  (8 vlevo + 8 vpravo)
- max. 3700 kNm

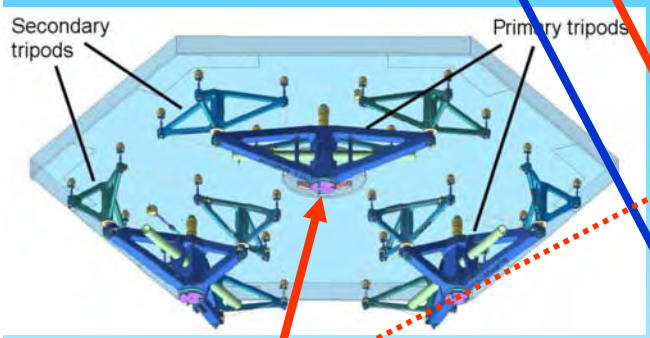
**Optické schéma: hlavní zrcadlo M1 + 4 pomocná (M2÷M5)**

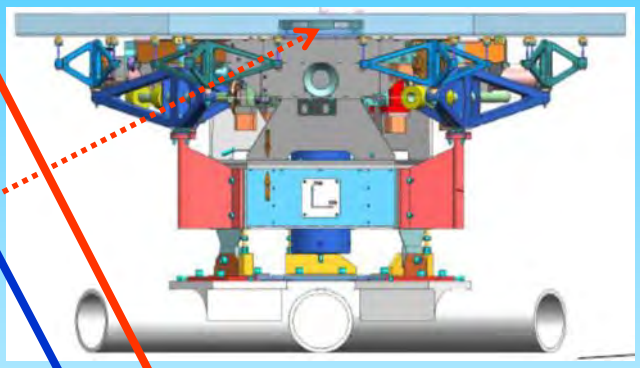
- životnost hliníkového povlaku 18 měsíců (průběžná výměna segmentů)
- volný střed M1 (ϕ10m)



## Zrcadlo M1...798 segmentů ϕ140cm, tl. 5cm, mezery 4mm

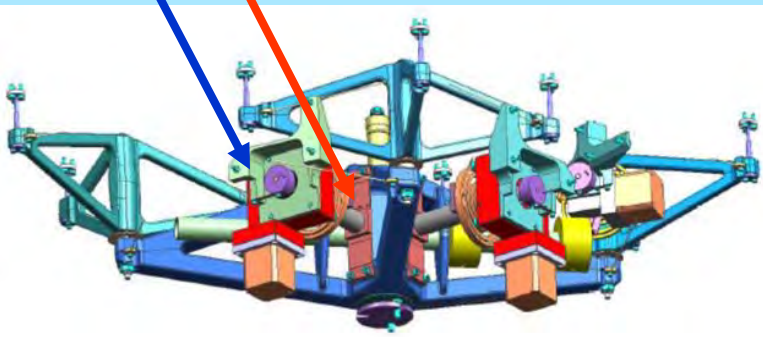
- **aktivní optika: každý segment** 3x3x3=27 axiálních ohebných opěr
- 3 axiální 2-stupňové aktuátory (eldyn.+ elmech.) pro celkové nastavení
- 3x3=9 torzních aktuátorů (krokové motory + převodovky) pro změnu tvaru
- celkem 3x798 ax. a 9x798 torzních aktuátorů, cca 5000 senzorů polohy



### Radiální vedení

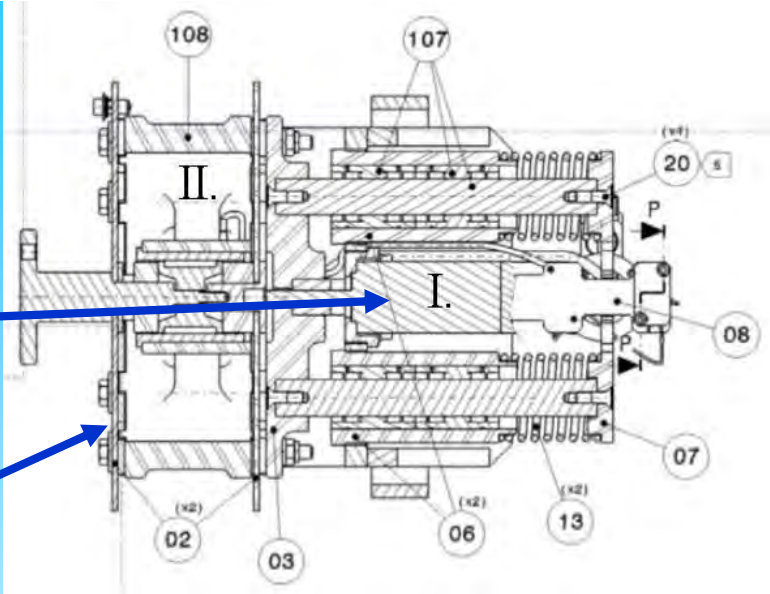
- centrální 6-ramenná planžeta D=200mm, tl. 0,25mm v neutrální rovině segmentu
- 1.vlastní kmitočet celé segmentové jednotky 30÷60Hz

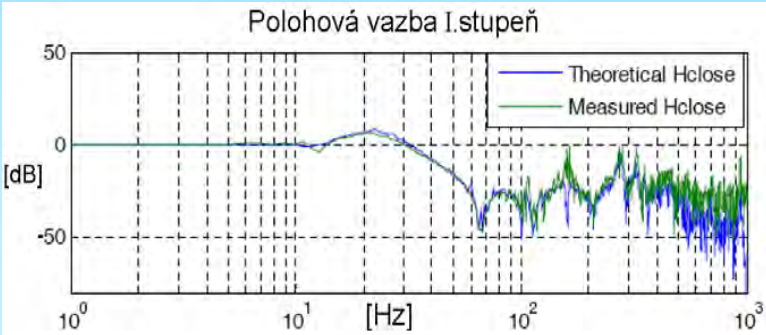


## Axiální pohyb jednoho segmentu (3 ax. aktuátory):

(pro celé **M1** ... 2400 kusů)

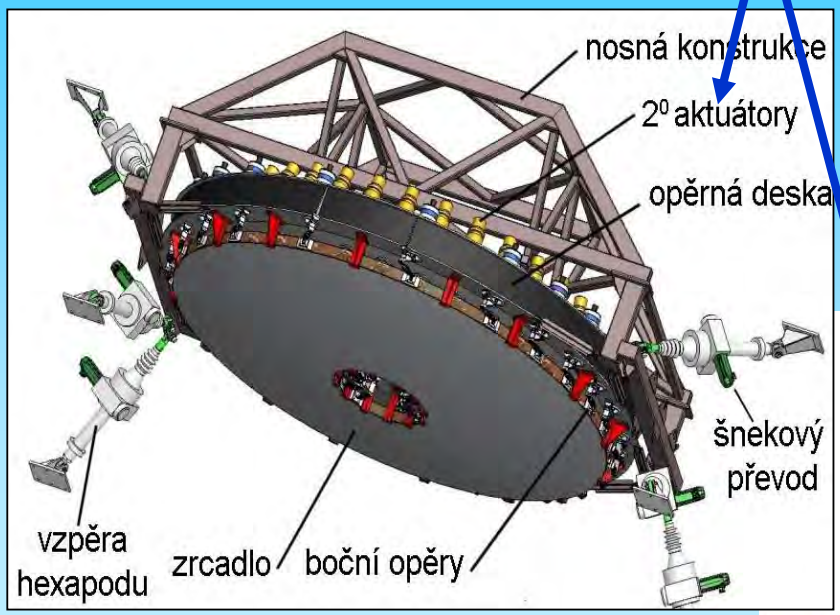
- **I. (pomalý) stupeň**
  elmotor Maxon,
  převodovka HD 50:1,
  planet. šroub 2mm/ot
- **II. (rychlý) stupeň**
  reproduktorový princip
  s planžetovým závěsem
- **rot.+ lin. encoder**



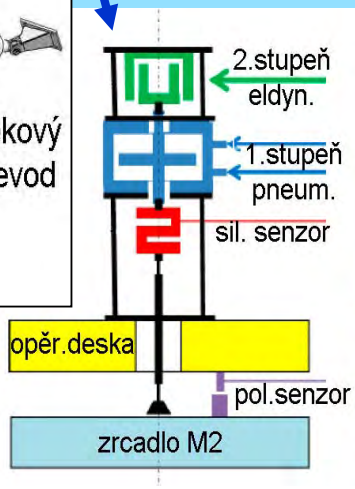



## Montážní skupina M2 (10tun)...přestavování hexapodem

(šnekové převodovky + planetové šrouby), 1.vlast. frekvence 10Hz
Zrcadlo M2: D=4,2m, tloušťka 10cm, **84 dvoustupňových aktuátorů**
(vyvažování gravitačních sil + korekce tvaru M2)

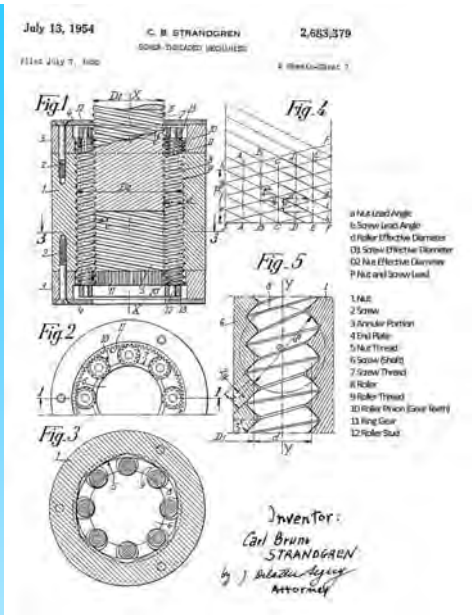



Zrcadlo odlito 5/2017
mat. Zerodur, 3500kg
(Schoot, Mainz)

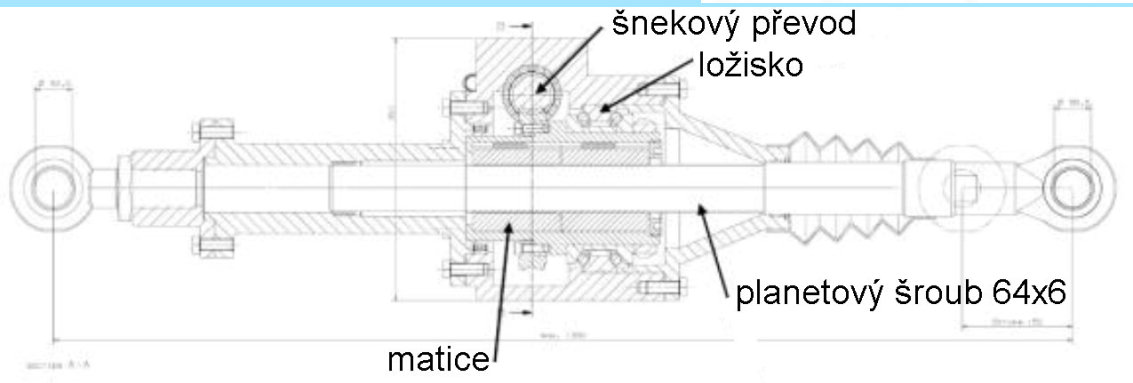


Korekce polohy M2 jednou za 20÷60 vteřin
(při pozorování je v klidu)

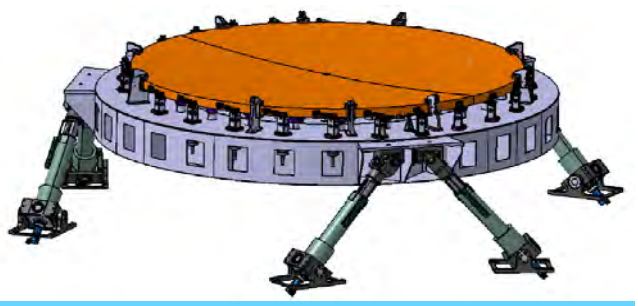
Planetový šroub - patent 1954



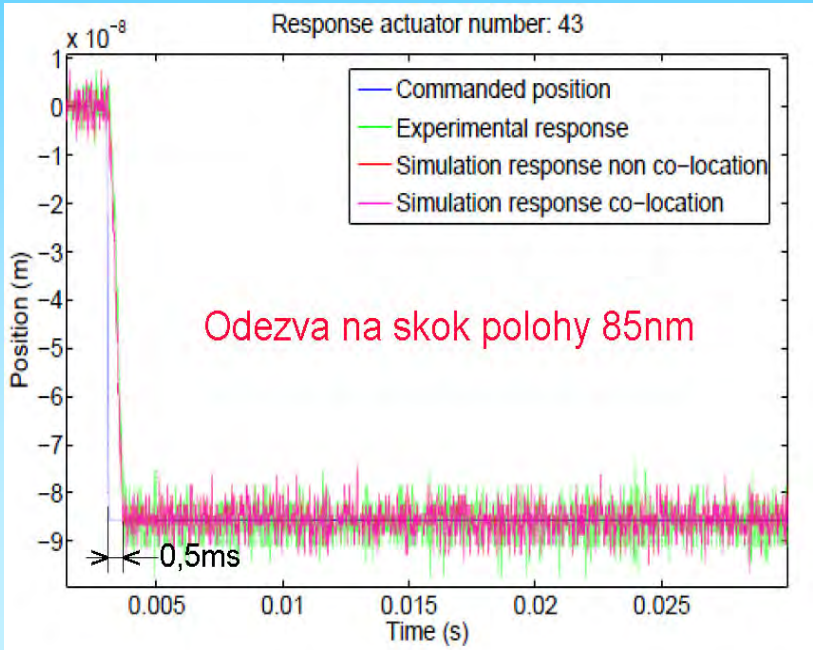

Vzpěra hexapodu zrcadla M2

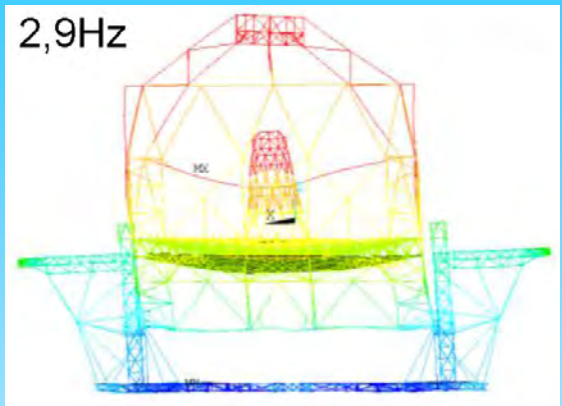
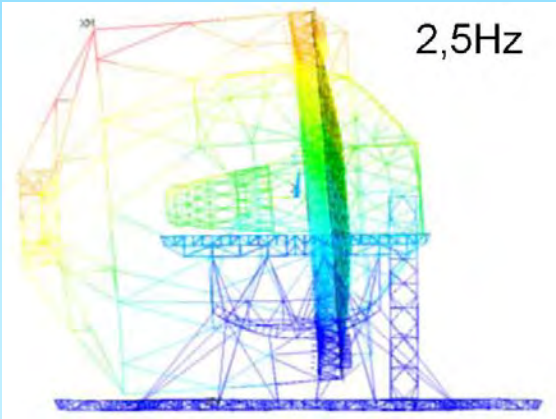
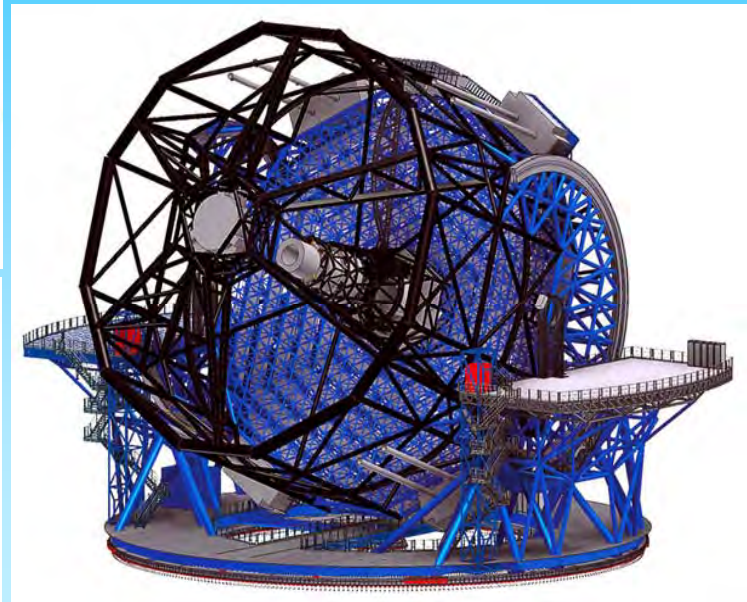


**Zrcadlo M3**... hexapod
(planet.šrouby)
D=3,75m, tloušťka 10cm
**aktivní optika...57 pneum. aktuátorů**
- 1. vlast. kmitočet 8Hz,
- optická pravítka LIDA



**Zrcadlo M4**...hexapod
"gumové zrcadlo"
D=2,6m, skořepina tl.2mm
- **adaptivní optika**
- **5000 aktuátorů**
- propustné pásmo
  polohové regulace 700Hz




Nejnižší tvary kmitů (při zablokovaných motorech):
- ve svislé poloze .... 2,9Hz, ve vodorovné poloze .... 2,5Hz