

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

12101 – Ústav technické matematiky



Bakalářská práce

Řešení technických úloh pomocí Fourierových řad

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Studijní program: Teoretický základ strojího inženýrství

Studijní obor: Bez oboru

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Atyakshyn** Jméno: **Pavlo** Osobní číslo: **453562**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Řešení technických úloh pomocí Fourierových řad

Název bakalářské práce anglicky:

Solution of technical problems using Fourier series

Pokyny pro vypracování:

1. Aproximace periodické funkce Fourierovou řadou. Vlastnosti Fourierovy řady. Diskrétní Fourierova transformace. Souvislost mezi Fourierovou řadou a diskrétní Fourierovou transformací.
2. Příklad řešení úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici s nespojitou pravou stranou aproximovanou pomocí Fourierovy řady.
3. Příklad použití Fourierovy metody pro řešení jednodušší úlohy pro parciální diferenciální rovnici druhého řádu.
4. Příklad použití diskrétní Fourierovy transformace pro frekvenční analýzu signálu.
5. Zhodnocení výsledků.

Seznam doporučené literatury:

1. L. Hermann: Obyčejné diferenciální rovnice - řady, vydavatelství ČVUT, 2004.
2. C. Gasquet, P. Witomski: Fourier analysis and applications, filtering, numerical computation, wavelets, Springer, 1991.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. Ing. Jan Halama, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **16.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **19.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Jaroslav Fořt, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu doc. Ing. Janu Halamovi, Ph.D., za trpělivé vedení, podporu, cenné rady a čas, který mi věnoval ke konzultacím.

Prohlášení o autorství

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací, vydaným ČVUT v Praze 1. 7. 2009.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že České vysoké učení technické v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 3. 8. 2018

Pavlo Atyakshyn

Název práce: Řešení technických úloh pomocí Fourierových řad

Autor: Pavlo Atyakshyn

Ústav: Ú12101 – Ústav technické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Abstrakt: Tato práce se zabývá praktickým použitím Fourierových řad a diskrétní Fourierovy transformace v různých technických úlohách. V první části jsou stručně popsány základní vztahy a vlastnosti Fourierovy řady. Pak následuje řešení obyčejné diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou aproximovanou pomocí Fourierovy řady. Další část obsahuje ukázkou použití Fourierovy metody pro řešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Poslední část zahrnuje stručný popis diskrétní Fourierovy transformace a její aplikace pro filtraci signálu.

Klíčová slova: Fourierovy řady, Fourierova metoda, rovnice vedení tepla, diskrétní Fourierova transformace, filtrace.

Title: Solution of technical problems using Fourier series

Author: Pavlo Atyakshyn

Department: Department of technical Mathematics

Supervisor: doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Abstract: The thesis explores the idea of applying Fourier series and discrete Fourier transform in the different kinds of technical tasks. In the first part, the properties of Fourier series are briefly described. Then follows the solution of ordinary differential equation with discontinuous right-hand side by approximation with the Fourier series. The following part contains examples of using Fourier method for solving partial differential equations of second order. The final part briefly covers discrete Fourier transform and its application for filtering of signals.

Keywords: Fourier series, Fourier method, thermal conduction equation, discrete Fourier transform, filtration.

Obsah

1. Úvod	- 7 -
2. Fourierova řada funkce a její vlastnosti	- 8 -
2.1. Základní vztahy	- 8 -
2.2. Fourierova sinová a kosinová řada funkce	- 8 -
2.3. Komplexní tvar Fourierovy řady funkce	- 9 -
3. Řešení obyčejné diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou aproximovanou pomocí Fourierovy řady	- 11 -
3.1. Aproximativní řešení	- 11 -
3.2. Průběh momentu (aproximativní řešení).....	- 13 -
3.3. Analytické řešení	- 14 -
4. Ukázka použití Fourierovy metody pro řešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu	- 21 -
4.1. Rovnice vedení tepla s vnějším zdrojem tepla	- 21 -
4.2. Rovnice vedení tepla bez vnějšího zdroje tepla	- 23 -
4.3. Numerické řešení – metoda sítí	- 25 -
5. Diskrétní Fourierova transformace	- 30 -
5.1. Základní vztahy a vlastnosti	- 30 -
5.2. Aplikace diskrétní Fourierovy transformace pro filtrace signálu	- 32 -
6. Závěr.....	- 37 -

1. Úvod

Fourierova řada slouží k zápisu periodických funkcí ve tvaru řady, která obsahuje siny a kosiny. V dnešní době představuje využití Fourierových řad a diskrétní Fourierovy transformace velmi rozsáhlou oblast, především při studiu periodických jevů. Cílem této práce je ukázat několik způsobů použití aproximace Fourierovou řadou a praktické použití diskrétní Fourierovy transformace.

V první části práce jsou stručně popsány základní vztahy Fourierových řad a vztahy pro výpočet Fourierových koeficientů v obecném a komplexním tvaru.

Následující kapitoly ukazují možnosti praktického použití Fourierových řad a diskrétní Fourierovy transformace. Nejprve představujeme řešení obyčejné diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou aproximovanou pomocí Fourierovy řady. Poté je ukázáno porovnání výsledků získaných pomocí aproximativního řešení s řešením analytickým a s řešením získaným pomocí MKP programu EngiLab Beam.

Další kapitola nás seznámí s použitím Fourierovy metody pro řešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Pomocí této metody je zde proveden výpočet vedení tepla s vnějším a bez vnějšího zdroje tepla. Výsledky jsou porovnány s numerickým řešením provedeným pomocí metody sítí.

Poslední kapitola se zabývá diskrétní Fourierovou transformací. Jsou zde popsány základní vztahy pro výpočet přímé a zpětné diskrétní Fourierovy transformace a souvislost diskrétní Fourierovy transformace s Fourierovou řadou. Kromě toho se věnujeme ukázce aplikace diskrétní Fourierovy transformace pro filtraci signálu, který je silně znečištěn šumem.

2. Fourierova řada funkce a její vlastnosti

2.1. Základní vztahy

Nechť $f(x)$ je $2L$ – periodická funkce, která je integrovatelná na intervalu $[-L, L]$ ($f \in P(2L)$), potom řada dle [1]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right), \quad (2.1.1)$$

v níž

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (2.1.2)$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in N_0 \quad (2.1.3)$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in N \quad (2.1.4)$$

se nazývá *Fourierova (trigonometrická) řada funkce f* a a_0, a_k, b_k se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$* a pak můžeme psát dle [1]

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right), \quad (2.1.5)$$

N_0 ze vztahu (2.1.3) je množina celých nezáporných čísel, N ze vztahu (2.1.4) je množina kladných (přirozených) čísel. [1]

Funkci $f(x)$ pak můžeme aproximovat součtem Fourierovy řady – $s(x)$ a můžeme psát

$$f(x) \approx s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right), \quad (2.1.6)$$

kde

$$s(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right).$$

V praxi se obvykle používá aproximace částečným součtem $s_n(x)$, kde se výpočet provádí ne do „ ∞ “, ale do nějaké určité hodnoty n .

2.2. Fourierova sinová a kosinová řada funkce

Pro popis sinové a kosinové řady bude důležitá následující vlastnost.

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $[-L, L]$, potom dle [1]

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{je – li } f \text{ lichá} \\ 2 \int_0^L f(x) dx, & \text{je – li } f \text{ sudá} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

V závislosti na tom, jestli je funkce $f(x)$ sudá nebo lichá, bude výsledná funkce definovaná dle následující tabulky.

Tabulka 1 Sudá/lichá funkce [1]

f	$f(x) \cos \frac{k\pi x}{L}$	$f(x) \sin \frac{k\pi x}{L}$
lichá	lichá	sudá
sudá	sudá	lichá

Z toho podle [1] plynou dvě důležité implikace:

- $f \in P(2L)$, f lichá $\Rightarrow a_k = 0, k \in N_0$
- $f \in P(2L)$, f sudá $\Rightarrow b_k = 0, k \in N$

Když budeme uvažovat funkci f zadanou na intervalu $[0, L]$ (popř. s výjimkou konečného počtu bodů) a integrovatelnou, pak se Fourierova řada lichého $2L$ -periodického prodloužení funkce f nazývá *Fourierova sinová řada funkce f* , neboť její tvar je dle [1]

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad (2.2.2)$$

kde (podle 2.2.1)

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in N \quad (2.2.3)$$

Analogicky se Fourierova řada sudého $2L$ -periodického prodloužení funkce f nazývá *Fourierova kosinová řada funkce f* , neboť její tvar je dle [1]

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L}, \quad (2.2.4)$$

kde (opět podle 1.2.1)

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in N_0 \quad (2.2.5)$$

2.3. Komplexní tvar Fourierovy řady funkce

V obecných úpravách i v aplikacích je vhodný zápis Fourierovy řady (2.1.1) v komplexním tvaru. Reálné funkce $\cos \frac{k\pi x}{L}$ a $\sin \frac{k\pi x}{L}$ můžeme vyjádřit pomocí Eulerových vzorců komplexními funkcemi dle [1]:

$$\cos \xi = \frac{1}{2}(e^{i\xi} + e^{-i\xi}), \quad \sin \xi = \frac{1}{2i}(e^{i\xi} - e^{-i\xi}), \quad \xi \in R.$$

Řada (2.1.6) pak přejde v řadu dle [1]

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_k - b_k i) e^{i \frac{k\pi x}{L}} + (a_k + b_k i) e^{-i \frac{k\pi x}{L}} \right].$$

Pak označíme

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - b_k i}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + b_k i}{2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

a získáme řadu

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi x}{L}}. \quad (2.3.1)$$

Pro koeficienty c_k a částečné součty $s_n(x)$ platí

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{k\pi x}{L}} dx \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.3.2)$$

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i \frac{k\pi x}{L}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3.3)$$

Kde \mathbb{Z} je množina celých čísel. [1]

3. Řešení obyčejné diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou aproximovanou pomocí Fourierovy řady

3.1. Aproximativní řešení

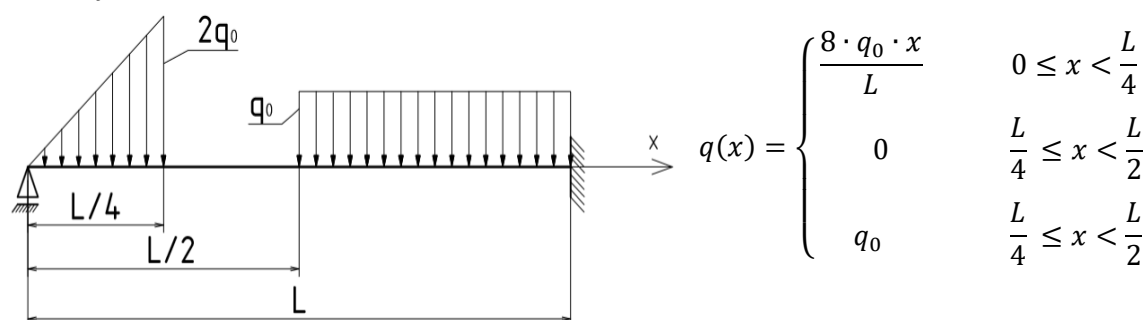
Pro ukázkou takové aproximace budeme řešit úlohu o průhybu nosníku dle [4]. Nosník má konstantní kruhový průřez $d = 30 \text{ mm}$, délku $L = 200 \text{ mm}$, modul pružnosti $E = 210\,000 \text{ MPa}$, je zatížen spojitým zatížením $q_0 = 20 \text{ Nmm}^{-1}$ a je různě upevněn na koncích.

Diferenciální rovnice průhybu nosníku může být zapsána ve tvaru

$$EJ_z \cdot v^{IV} = q(x) \quad (3.1.1)$$

kde $v(x)$ – průhyb nosníku, $EJ_z = \text{const}$ – ohybová tuhost nosníku (E – modul pružnosti, J_z – osový kvadratický moment). [4]

Nosník je zatížen dle obrázku



Obrázek 1: Zatížení nosníku [4]

Funkci $q(x)$ můžeme aproximovat Fourierovou řadou se sinusovým průběhem na intervalu $[0, L]$ dle [4]

$$q(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.1.2)$$

kde pak vypočítáme koeficient b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \cdot \int_0^L q(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \cdot \left[\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{8q_0 x}{L} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + 0 + \int_{\frac{L}{2}}^L q_0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] = \\ &= \frac{2q_0}{\pi n} \cdot \left(-2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \cos(n\pi) + \frac{8}{\pi \cdot n} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

Dosadíme rovnici (3.1.2) do rovnice (3.1.1)

$$EJ_z \cdot v^{IV} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.1.3)$$

Integrovaním rovnice (3.1.3) dostaneme diferenciální rovnici 3 řádu

$$EJ_z \cdot v''' = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cdot L}{n \cdot \pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + C_1$$

Analogicky integrujeme dál

$$EJ_z \cdot v'' = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \left(\frac{L}{n \cdot \pi}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + C_1 \cdot x + C_2 \quad (3.1.4)$$

$$EJ_z \cdot v' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \left(\frac{L}{n \cdot \pi}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

$$EJ_z \cdot v = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \left(\frac{L}{n \cdot \pi}\right)^4 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4 \quad (3.1.5)$$

Vztah (3.1.5) je řešením diferenciální rovnice (3.1.1).

Integrační konstanty C_1, C_2, C_3, C_4 určíme z okrajových podmínek:

$$1) x = 0 \rightarrow v(0) = v''(x) = 0 \Rightarrow C_2 = 0; C_4 = 0$$

$$2) x = L \rightarrow v(L) = v'(L) = 0$$

$$C_1 = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot b_n \cdot L}{(n \cdot \pi)^3}, \quad (3.1.6)$$

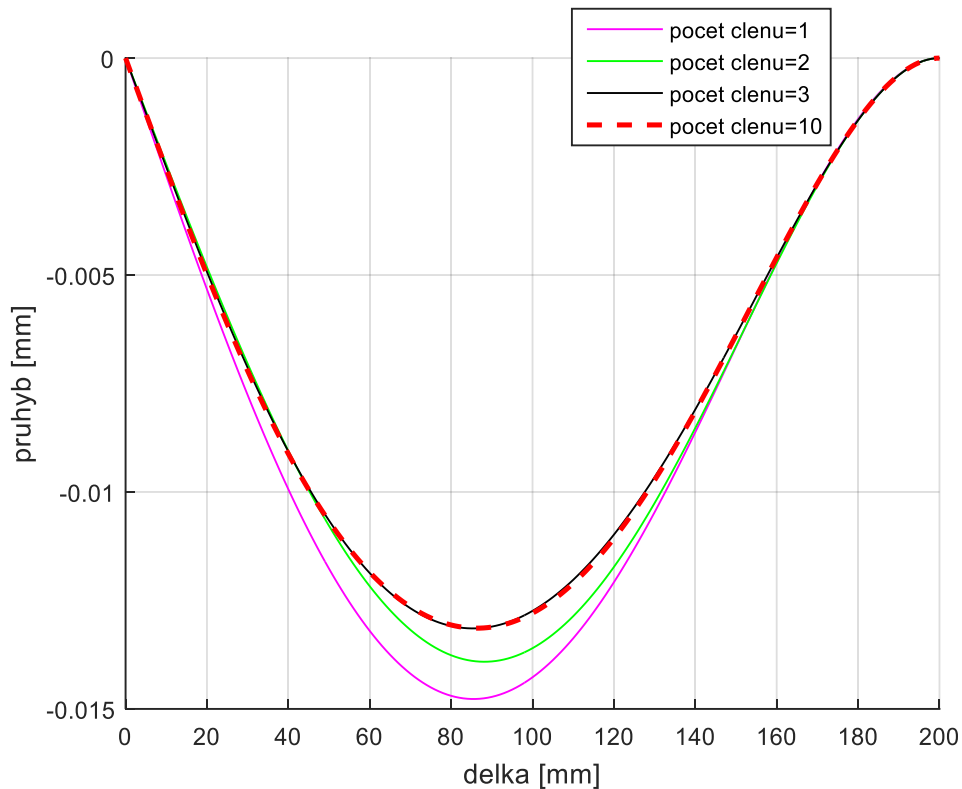
$$C_3 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot b_n \cdot L}{(n \cdot \pi)^3}, \quad (3.1.7)$$

Pro konstanty C_1 a C_3 bychom měli určit minimální počet členů řady, ale pro zjednodušení pro další výpočty budeme volit pro vztahy (3.1.6), (3.1.7) stejný počet členů řady jako pro rovnice (3.1.5).

Dosadíme (3.1.6), (3.1.7) a koeficient b_n do vztahu (3.1.5) a po úpravách dostaneme

$$v(x) = - \frac{2q_0 L^4}{\pi^4 EJ_z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left[2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n - \frac{8}{n \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right] \cdot \left[\frac{1}{n \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + (-1)^n \cdot \frac{x}{2 \cdot L} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \right] \quad (3.1.8)$$

Nyní vyneseme do grafu hodnotu průhybu v v závislosti na souřadnici x pro různý počet členů řady.



Obrázek 2: Průhybová čára (aproximace Fourierovou řadou)

Z grafu je zřejmé, že pro výpočet průhybu nosníku nám stačí první 3 členy řady. Je to dáno tím, že rovnice (3.1.8) obsahuje člen $1/n^4$ a pak velikost členů řady poměrně rychle klesá. To znamená, že 4. člen řady už přinese zanedbatelně malou změnu. Výsledek pro 3 členy řady tedy bude poměrně přesný a téměř se nebude lišit od výsledku pro vyšší počet členů řady.

3.2. Průběh momentu (aproximativní řešení)

Analogicky budeme postupovat při určování průběhu momentu podél nosníku.

Pro určení momentu použijeme diferenciální rovnici průhybové čáry

$$v''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ_z} \quad (3.2.1)$$

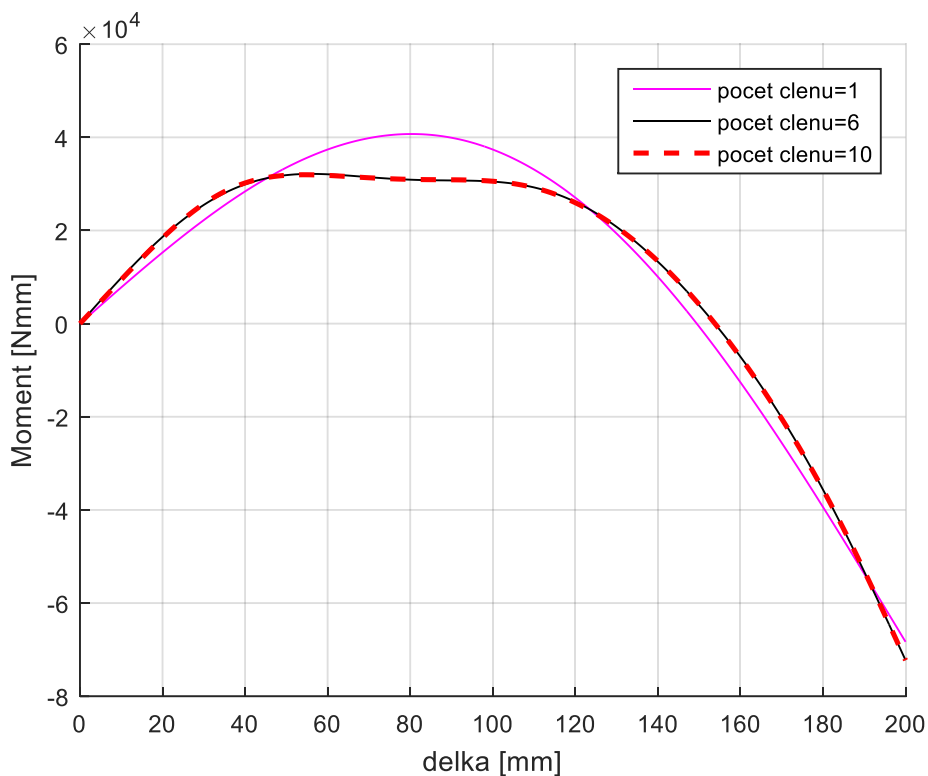
Vztah (3.2.1) odpovídá rovnici (3.1.4), odkud pak vyjádříme moment

$$M_o(x) = -EJ_z \cdot v''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \left(\frac{L}{n \cdot \pi}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + C_1 \cdot x + C_2 \quad (3.2.2)$$

Do vztahu (3.2.2) dosadíme integrační konstanty C_1 , C_2 a po úpravách dostaneme výslednou rovnici momentu v závislosti na souřadnici x

$$M_o(x) = -\frac{2q_0L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left[2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n - \frac{8}{n \cdot \pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right] \cdot \left[\frac{1}{n \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{3 \cdot x}{L} \right] \quad (3.2.3)$$

Pak vykreslíme průběh momentu:

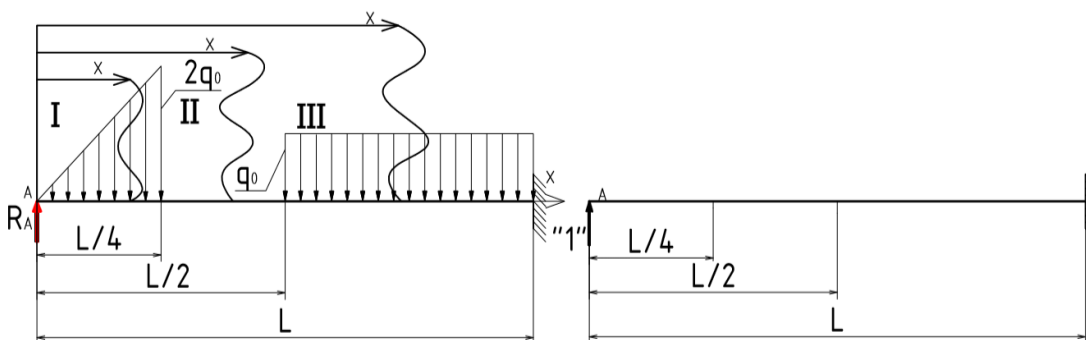


Obrázek 3: Průběh momentu (aproximace Fourierovou řadou)

Na rozdíl od průhybu budeme pro určení momentu potřebovat víc členů řady, pouze 3 členy v tomto případě nestačí, potřebovali bychom minimálně 6 členů. Rovnice (3.2.3) obsahuje člen $1/n^2$, což znamená, že pokles velikosti členů řady bude pomalejší a 7. člen řady už bude zanedbatelný. 6 členů řady je tedy dostatečných pro zobrazení poměrně přesného řešení.

3.3. Analytické řešení

Pro analytické řešení musíme nosník rozdělit na tři pole a pro každé sestavíme momentové rovnice.



Obrázek 4: Nosník (analytické řešení)

Tabulka 2: Momentové rovnice

Pole	$M_o(x)$	$m_o(x)$
I $x \in \left\langle 0; \frac{L}{4} \right\rangle$	$R_A \cdot x - \frac{4 \cdot q_0 \cdot x^2}{L} \cdot \frac{x}{3}$	"1" · x
II $x \in \left\langle \frac{L}{4}; \frac{L}{2} \right\rangle$	$R_A \cdot x - \frac{q_0 \cdot L}{4} \cdot \left(x - \frac{L}{6}\right)$	"1" · x
III $x \in \left\langle \frac{L}{2}; L \right\rangle$	$R_A \cdot x - \frac{q_0 \cdot L}{4} \cdot \left(x - \frac{L}{6}\right) - \frac{q_0 \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2}$	"1" · x

Úloha je staticky neurčitá, proto určíme reakce v podpoře A pomocí Mohrova integrálu a rovněž budeme uvažovat deformační podmínku v místě A.

$$v(x) = \frac{1}{EJ_z} \cdot \int M_o(x) \cdot m_o(x) dx \quad (3.3.1)$$

$$v_A = 0 \quad (3.3.2)$$

Jednotlivé rovnice z tab. 2 dosadíme do vztahu (3.3.1) a (3.3.2)

$$v_A = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left[\int_0^{\frac{L}{4}} \left(R_A \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{q_0 x^4}{L} \right) dx + \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(R_A \cdot x^2 - \frac{q_0 L x^2}{4} + \frac{q_0 L^2}{24} \cdot x \right) dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \left(R_A \cdot x^2 - \frac{q_0 \cdot L \cdot x^2}{4} + \frac{q_0 \cdot L^2}{24} \cdot x - q_0 \cdot \left(x^3 - x^2 \cdot L + \frac{L^2}{4} \cdot x \right) \right) dx \right] = 0$$

Po integraci a úpravách určíme reakce v podpoře A

$$R_A = \frac{311}{1280} \cdot q_0 \cdot L, \quad (3.3.3)$$

Kterou pak dosadíme do momentových rovnic z tab.2

$$x \in \left\langle 0; \frac{L}{4} \right\rangle \Rightarrow M_{o1}(x) = \frac{311}{1280} q_0 L x - \frac{4 q_0 x^3}{3 \cdot L} \quad (3.3.4)$$

$$x \in \left\langle \frac{L}{4}; \frac{L}{2} \right\rangle \Rightarrow M_{o2}(x) = \frac{311}{1280} q_0 L x - \frac{q_0 L}{4} \cdot x + \frac{q_0 L^2}{24} \quad (3.3.5)$$

$$x \in \left\langle \frac{L}{2}; L \right\rangle \Rightarrow M_{o3}(x) = \frac{311}{1280} q_0 L x - \frac{q_0 L}{4} \cdot x + \frac{q_0 L^2}{24} - \frac{q_0 x^2}{2} + \frac{q_0 L x}{2} - \frac{q_0 L^2}{8} \quad (3.3.6)$$

Vztahy (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6) dosadíme do diferenciální rovnice průhybové čáry:

$$v''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ_z} \quad (3.3.7)$$

Po integraci vztahu (3.3.7) dostaneme rovnici pro výpočet průhybu v každém ze třech polí

$$EJ_z \cdot v_{1(x)} = -\frac{311}{7680} \cdot q_0 L x^3 + \frac{q_0 \cdot x^5}{15L} + C1x + C2 \quad (3.3.8)$$

$$EJ_z \cdot v_{2(x)} = -\frac{311}{7680} \cdot q_0 L x^3 + \frac{q_0 \cdot L \cdot x^3}{24} - \frac{q_0 \cdot L^2 \cdot x^2}{48} + C3 \cdot x + C4 \quad (3.3.9)$$

$$EJ_z \cdot v_{3(x)} = -\frac{311}{7680} \cdot q_0 L x^3 - \frac{q_0 L x^3}{24} - \frac{q_0 L^2 x^2}{48} + \frac{q_0 x^4}{24} + \frac{q_0 L^2 x^2}{16} + C5x + C6 \quad (3.3.10)$$

Konstanty C1, C2, C3, C4, C5, C6 určíme z následujících okrajových podmínek

$$1) x = 0 \Rightarrow v_1(0) = 0 \Rightarrow \mathbf{C2 = 0}$$

$$2) x = L \Rightarrow v'_3(L) = 0 \Rightarrow \mathbf{C5 = -\frac{9}{2560} \cdot q_0 \cdot L^3}$$

$$3) x = L \Rightarrow v_1(L) = 0 \Rightarrow \mathbf{C6 = \frac{3}{1280} \cdot q_0 \cdot L^4}$$

$$4) x = \frac{L}{2} \Rightarrow v'_2\left(\frac{L}{2}\right) = v'_3\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{C3 = \frac{133}{7680} \cdot q_0 \cdot L^3}$$

$$5) x = \frac{l}{2} \Rightarrow v_2\left(\frac{L}{2}\right) = v_3\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{C4 = -\frac{1}{3840} \cdot q_0 \cdot L^4}$$

$$6) x = \frac{L}{4} \Rightarrow v'_1\left(\frac{L}{4}\right) = v'_2\left(\frac{L}{4}\right) \Rightarrow \mathbf{C1 = \frac{103}{7680} \cdot q_0 \cdot L^3}$$

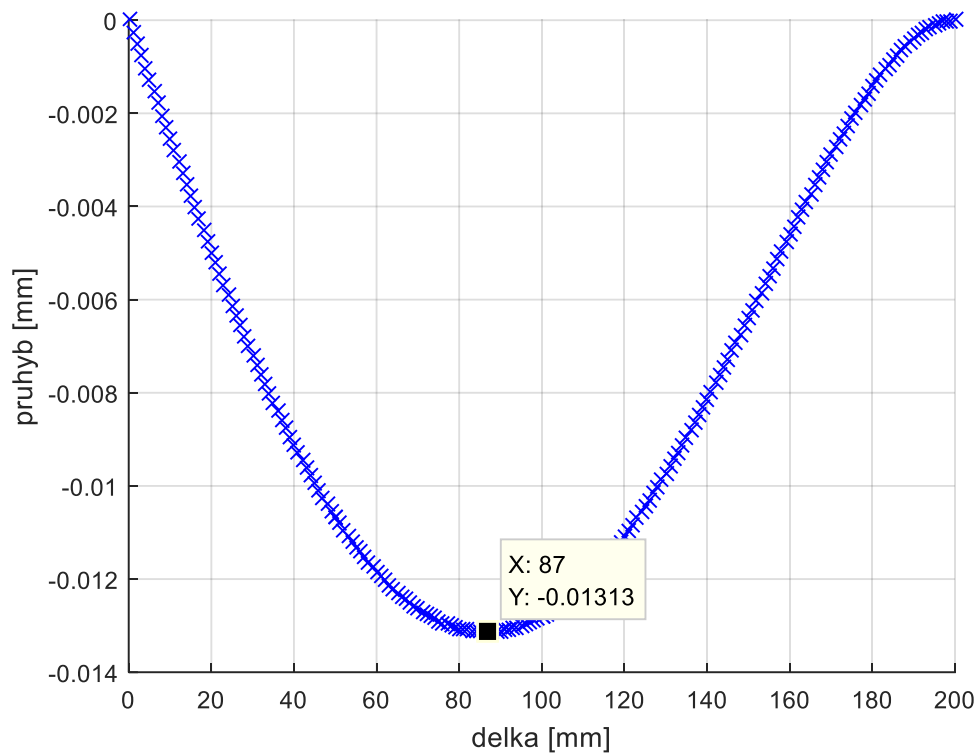
Po dosazení konstant do vztahů (3.3.8), (3.3.9), (3.3.10) dostaneme rovnici průhybu v každém ze třech polí

$$v_{1(x)} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(-\frac{311}{7680} q_0 L x^3 + \frac{q_0 x^5}{15 \cdot L} + \frac{103}{7680} q_0 L^3 x \right)$$

$$v_{2(x)} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(-\frac{311}{7680} q_0 L x^3 + \frac{q_0 L x^3}{24} - \frac{q_0 L^2 x^2}{48} + \frac{133}{7680} q_0 L^3 x - \frac{1}{3840} q_0 L^4 \right)$$

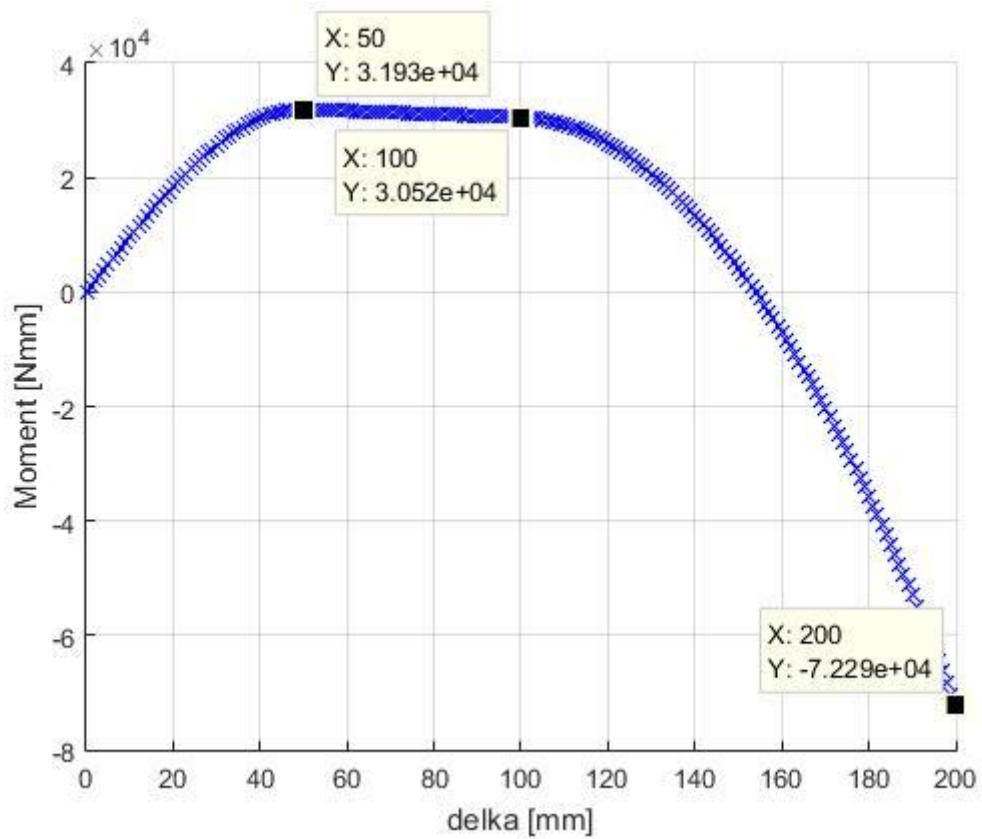
$$v_{3(x)} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(-\frac{311}{7680} q_0 L x^3 - \frac{q_0 L x^3}{24} + \frac{q_0 x^4}{24} + \frac{q_0 L^2 x^2}{24} - \frac{9}{2560} q_0 L^3 x + \frac{3}{1280} q_0 L^4 \right)$$

Poté vykreslíme závislost průhybu v v závislosti na souřadnici x v každém poli, a tak dostaneme výsledný tvar průhybové čáry.



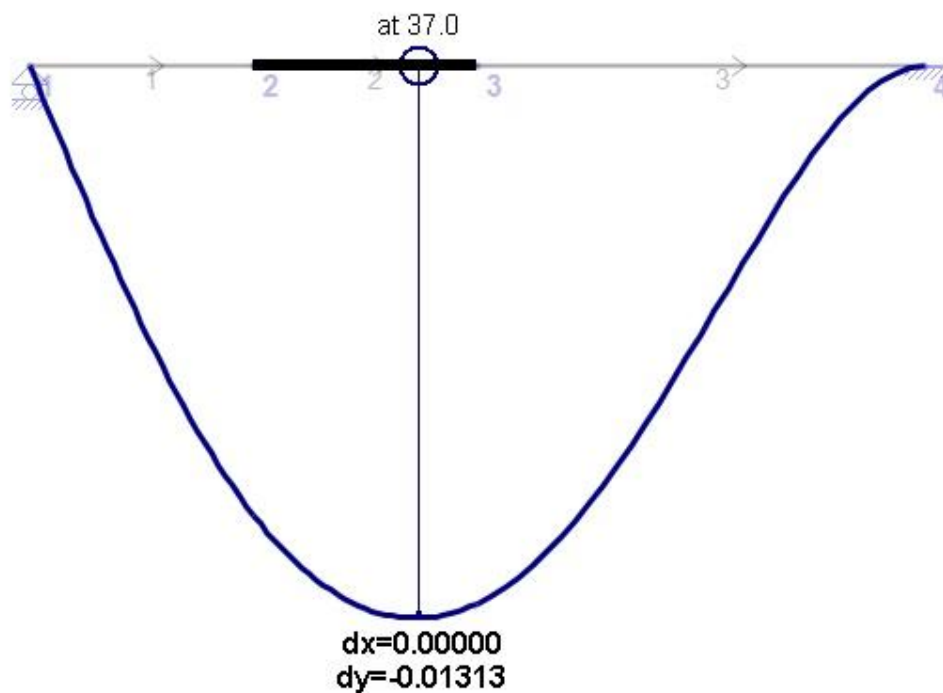
Obrázek 5: Průhybová čára (analytické řešení)

Stejně tak můžeme pomocí vztahů (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6) vykreslit průběh momentu podél celého nosníku.

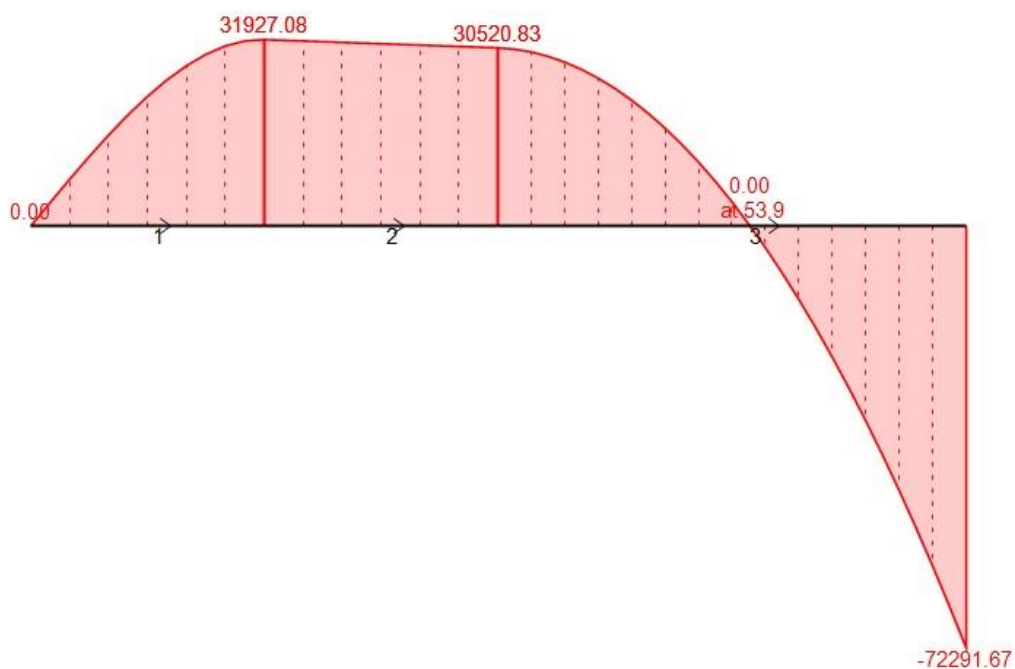


Obrázek 6: Průběh momentu (analytické řešení)

Pro jistotu naše řešení ještě porovnáme s výsledky získanými pomocí MKP programu EngiLab Beam.



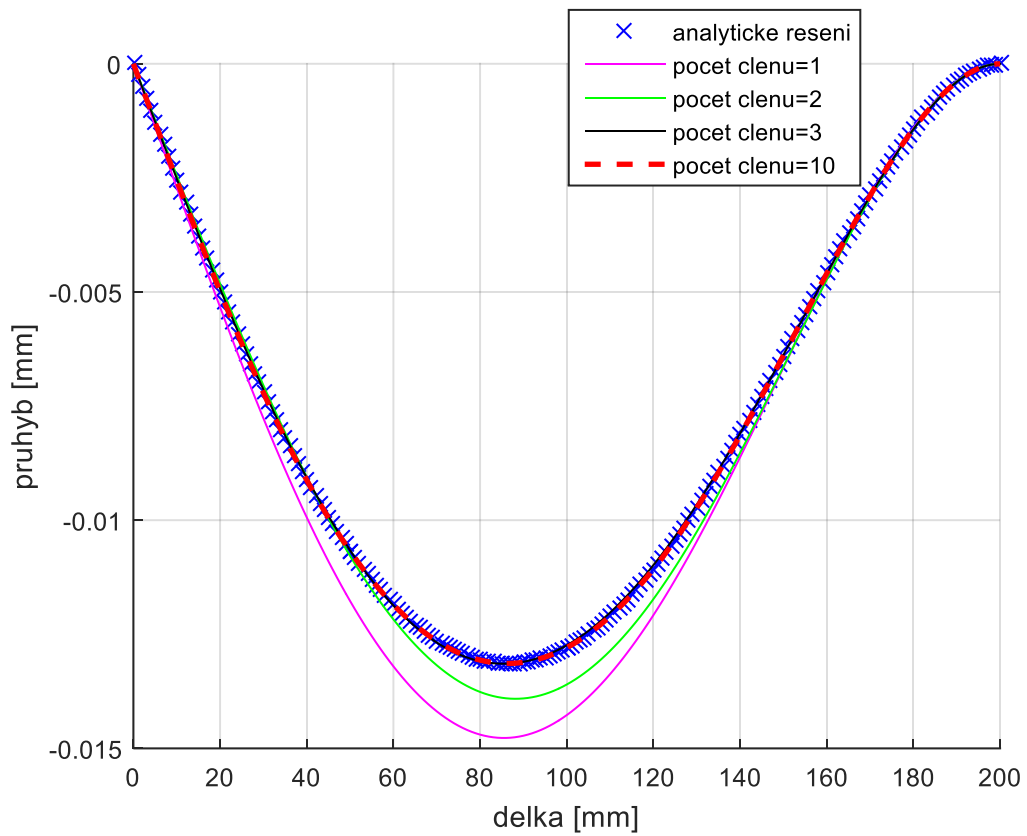
Obrázek 7: Průhybová čára (EngiLab Beam)



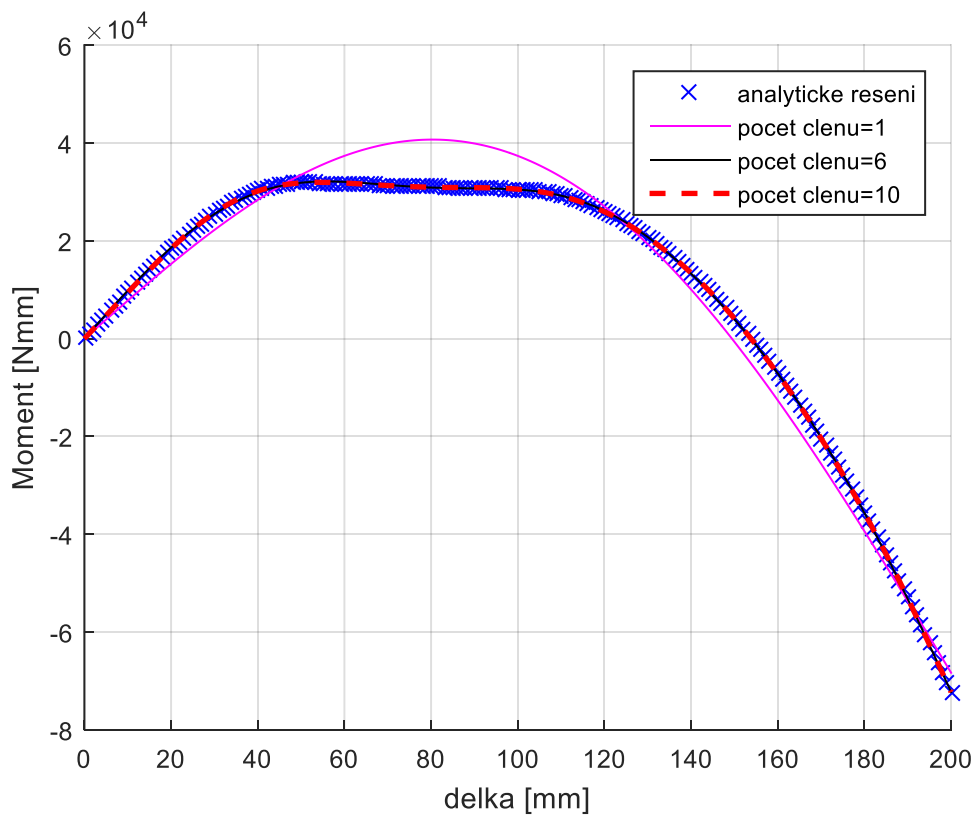
Obrázek 8: Průběh momentu (EngiLab Beam)

Je patrné, že naše řešení odpovídá výsledkům z MKP programu. Hodnoty průhybu a momentu v určitých bodech jsou stejné (s výjimkou automatického zaokrouhlování v MatLabu).

Nyní můžeme porovnat výsledky získané pomocí analytického řešení a pomocí aproximace Fourierovou řadou.



Obrázek 9: Průhybová čára (porovnání výsledků)



Obrázek 10: Průběh momentu (porovnání výsledků)

Grafy ilustrují, že pomocí Fourierovy řady lze poměrně přesně určit, jak průhyb nosníku, tak průběh momentu. Kromě toho je řešení průhybu nosníku pomocí aproximace Fourierovou řadou značně rychlejší než analytické řešení, protože řadu lze docela snadno sestavit a pak stačí napočítat jenom první 3 členy, zatímco u analytického řešení musíme počítat 6 integračních konstant pomocí 6 okrajových podmínek. Maximální odchylka mezi aproximativním a analytickým řešením je v místě $x = 120 \text{ mm}$ a vychází kolem 0,813 %, což je opravdu dobrý výsledek.

Pro výpočet momentu je nutno použít větší počet členů řady, ale už 6 členů je postačujících pro poměrně přesný výsledek a maximální odchylka od přesného řešení bude kolem 1,5 % (v místě $x = 41 \text{ mm}$).

4. Ukázka použití Fourierovy metody pro řešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu

4.1. Rovnice vedení tepla s vnějším zdrojem tepla

Fourierovu metodu lze aplikovat i na řešení parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, například na rovnici vedení tepla.

Pro ukázkou takové aplikace zkusíme vyřešit příklad na vedení tepla v homogenní tyči o délce 1, povrch tyče bude tepelně izolován a výměna tepla s okolím bude probíhat přes koncové části tyče. Kromě toho bude těleso ještě obklopeno vnějším zdrojem tepla.

Budeme tedy hledat funkci $u(x,t)$ – teplotu uvnitř tyče v libovolném místě x a v čase t , která bude odpovídat rovnici vedení tepla (s vnějším zdrojem tepla).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cdot t \quad (4.1.1)$$

V čase $t = 0$ musí funkce $u(x,t)$ splňovat následující počáteční podmínku

$$u_{(x,0)} = x - x^2 \quad x \in \langle 0,1 \rangle \quad (4.1.2)$$

a na krajích tyče bude teplota v libovolném čase t nulová

$$u_{(0,t)} = 0 \quad u_{(1,t)} = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.1.3)$$

Nejprve určíme řešení homogenní rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.1.4)$$

kteřá odpovídá okrajovým podmínkám (4.1.3). Hledanou funkci $u(x,t)$ lze zapsat ve tvaru součinu dvou funkcí, kde každá bude záviset pouze na jedné proměnné.

$$u_{(x,t)} = X(x)T(t) \neq 0 \quad (4.1.5)$$

Rovnici (4.1.5) dosadíme do vztahu (4.1.4) a po úpravách obdržíme vztah

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = 5 \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (4.1.6)$$

Ze vztahu je zřejmé, že při změně t levá část, která na t nezávisí, zůstane konstantní, ale konstantní zůstane rovněž i pravá část (protože se rovná levé části). To samé platí i pro změnu x , pravá část na x nezávisí a zůstane konstantní, a pak zůstane konstantní i levá část, která se rovná pravé. Můžeme tedy konstatovat, že obě části rovnice (4.1.6) nezávisí ani na t ani na x a obě části se budou rovnat konstantě.

Jak je vidět z okrajových podmínek (4.1.3), funkce $u(x,t)$ na krajích intervalu je nulová, to znamená, že ji můžeme aproximovat Fourierovou řadou se sinusovým průběhem na intervalu $[0, 1]$

$$u_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \cdot \sin(k\pi x), \quad (4.1.7)$$

kde $B_k(t) = T(t)$ a $\sin(k\pi x) = X(x)$ ze vztahu (4.1.5).

Stejným způsobem aproximujeme i funkci $F(x,t) = x \cdot t$, která popisuje hustotu vnějšího zdroje tepla

$$F_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.1.8)$$

V tomto momentě můžeme vypočítat koeficient $b_k(t)$, který dosadíme do rovnice (4.1.8)

$$b_k(t) = \int_{-1}^1 t \cdot x \cdot \sin(k\pi x) \cdot dx = -\frac{2 \cdot t}{k \cdot \pi} \cdot (-1)^k$$

Rovnici (4.1.7) zderivujeme podle času a podle souřadnice x

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k'(t) \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.1.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} -B_k(t) \cdot (k\pi)^2 \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.1.10)$$

Rovnice (4.1.8), (4.1.9), (4.1.10) dosadíme do vztahu (4.1.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k'(t) \cdot \sin(k\pi x) = -\frac{1}{5} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \cdot (k\pi)^2 \cdot \sin(k\pi x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot t}{k \cdot \pi} \cdot (-1)^k \cdot \sin(k\pi x)$$

Po úpravách dostaneme lineární nehomogenní rovnici prvního řádu

$$B_k'(t) + \frac{(k\pi)^2}{5} \cdot B_k(t) = -\frac{2 \cdot t}{k \cdot \pi} \cdot (-1)^k \quad (4.1.11)$$

Řešení rovnice (4.1.11) se bude skládat z homogenní a partikulární části a po úpravách dostaneme vztah

$$B_k(t) = C_k \cdot e^{-\frac{(k\pi)^2}{5}t} + \frac{50 \cdot (-1)^k}{\pi^5 \cdot k^5} - \frac{10 \cdot (-1)^k}{\pi^3 \cdot k^3} \cdot t \quad (4.1.12)$$

Vztah (4.1.12) dosadíme do rovnice (4.1.7)

$$u_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \cdot e^{-\frac{(k\pi)^2}{5}t} + \frac{50 \cdot (-1)^k}{\pi^5 \cdot k^5} - \frac{10 \cdot (-1)^k}{\pi^3 \cdot k^3} \cdot t \right) \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.1.13)$$

Pak do rovnice (4.1.13) dosadíme počáteční podmínku (4.1.2) a obdržíme následující vztah

$$u_{(x,0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \cdot e^{-\frac{(k\pi)^2}{5} \cdot 0} + \frac{50 \cdot (-1)^k}{\pi^5 \cdot k^5} \right) \cdot \sin(k\pi x) = x - x^2 \quad (4.1.14)$$

Ze vztahu (4.1.14) určíme koeficient C_k

$$C_k \cdot e^{-\frac{(k\pi)^2}{5}t} + \frac{50 \cdot (-1)^k}{\pi^5 \cdot k^5} = 2 \cdot \int_0^1 (x - x^2) \cdot \sin(k\pi x) \cdot dx = 2 \cdot \left(\frac{2}{k^3 \cdot \pi^3} - \frac{2 \cdot (-1)^k}{k^3 \cdot \pi^3} \right)$$

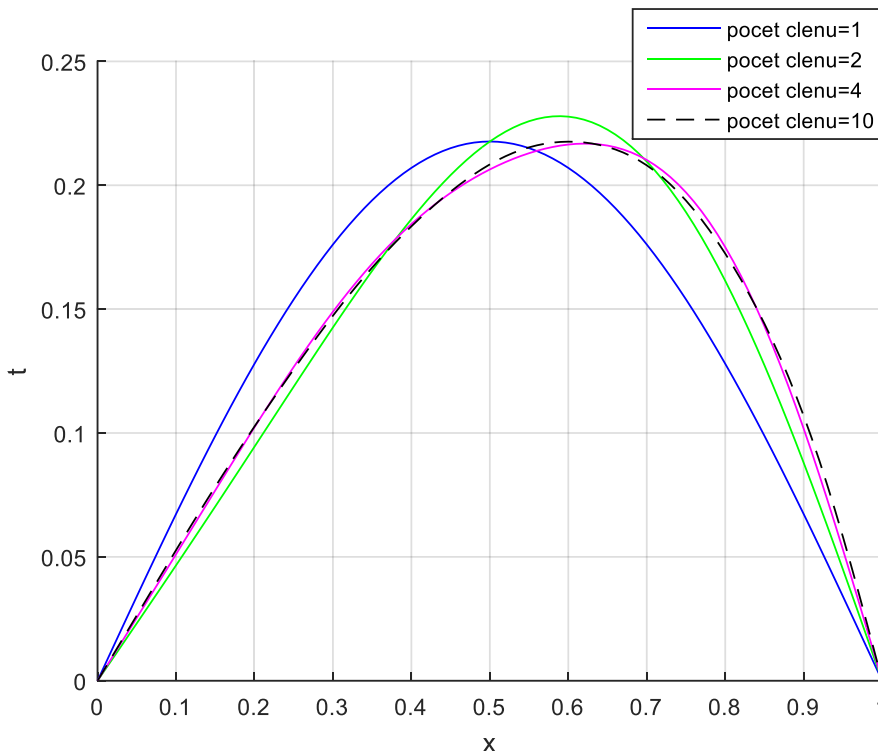
a po úpravách konečně obdržíme vztah

$$C_k = \frac{4}{k^3 \cdot \pi^3} - \frac{4 \cdot (-1)^k}{k^3 \cdot \pi^3} - \frac{50 \cdot (-1)^k}{k^5 \cdot \pi^5}$$

Zjištěný koeficient C_k dosadíme do rovnice (4.1.13), čímž dostaneme výslednou rovnici ve tvaru Fourierovy řady pro určení teplotního profilu v tělese, které je obklopeno nějakým vnějším zdrojem tepla.

$$u_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[\left(\frac{4}{\pi^3} - \frac{4(-1)^k}{\pi^3} - \frac{50(-1)^k}{k^2\pi^5} \right) e^{-\frac{(k\pi)^2}{5}t} + \frac{50(-1)^k}{\pi^2 k^2} - \frac{10(-1)^k}{\pi^3} t \right] \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.1.15)$$

Do grafu nyní vykreslíme teplotní profil v tělese v čase $t = 1$ a odhadneme minimální počet členů řady pro přesné řešení příkladu.



Obrázek 11: Teplotní profil v tělese s vnějším zdrojem tepla v čase $t=1$ (Fourierova řada)

Z grafu je vidět, že pro poměrně přesné řešení stačí první 4 členy řady. Je to způsobeno členem $1/k^3$ v rovnici (4.1.15) a rovněž tím, že v čase $t = 1$ bude mít největší vliv na výsledek pouze funkce $F(x,t)$.

Rovněž je patrné, že výsledek pro 4 členy řady se poněkud liší od výsledku pro větší počet členů řady, ale změna, kterou způsobí 5. člen řady, už bude zanedbatelně malá.

4.2. Rovnice vedeni tepla bez vnějšího zdroje tepla

Níže zkusíme vypočítat stejný příklad, ale bez vnějšího zdroje tepla.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.2.1)$$

Okrajové podmínky jsou stejné jako v minulém příkladu, (4.1.2) a (4.1.3). Rovněž funkce $u(x,t)$ na krajích intervalu je nulová, to znamená, že ji můžeme taky aproximovat Fourierovou řadou se sinusovým průběhem na intervalu $[0, 1]$

$$u_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.2.2)$$

kde $b_k(t) = T(t)$ a $\sin(k\pi x) = X(x)$ ze vztahu (4.1.5).

Rovnici (4.2.2) zderivujeme podle času a podle souřadnice x

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k'(t) \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} -b_k(t) \cdot (k\pi)^2 \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.2.4)$$

Rovnice (4.2.3), (4.2.4) dosadíme do vztahu (4.2.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k'(t) \cdot \sin(k\pi x) = -\frac{1}{5} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} -b_k(t) \cdot (k\pi)^2 \cdot \sin(k\pi x)$$

Po úpravách dostaneme lineární homogenní rovnice prvního řádu

$$b_k'(t) + \frac{1}{5} \cdot (k\pi)^2 \cdot b_k(t) = 0 \quad (4.2.5)$$

Řešení rovnice (4.2.5) je definováno vztahem

$$b_k(t) = C_k \cdot e^{-\frac{(k\pi)^2}{5}t},$$

který pak dosadíme do rovnice (4.2.2)

$$u_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-\frac{(k\pi)^2}{5}t} \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.2.6)$$

Rovnici (4.2.6) pak dosadíme do okrajové podmínky (4.1.2) a obdržíme vztah

$$u_{(x,0)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin(k\pi x) = x - x^2,$$

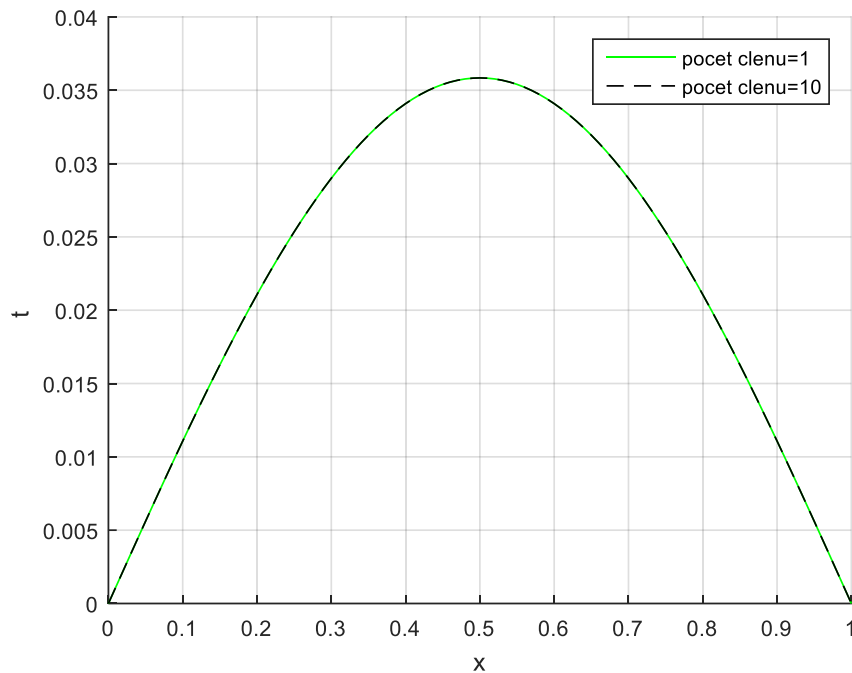
ze kterého určíme koeficient C_k

$$C_k = 2 \cdot \int_0^1 (x - x^2) \cdot \sin(k\pi x) \cdot dx = 2 \cdot \left(\frac{2}{k^3 \cdot \pi^3} - \frac{2 \cdot (-1)^k}{k^3 \cdot \pi^3} \right)$$

Tento koeficient dosadíme do rovnice (4.2.6) a dostaneme výslednou rovnici ve tvaru Fourierovy řady

$$u_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \left(\frac{4}{\pi^3} - \frac{4 \cdot (-1)^k}{\pi^3} \right) \cdot e^{-\frac{(k\pi)^2}{5}t} \cdot \sin(k\pi x) \quad (4.2.7)$$

Do grafu nyní opět vykreslíme teplotní profil v tělese v čase $t = 1$ a určíme minimální počet členů řady pro řešení příkladu.



Obrázek 12: Teplotní profil v tělese bez vnějšího zdroje tepla v čase $t=1$ (Fourierova řada)

Nyní je zřejmé, že pro takový příklad nám stačí hned první člen řady. Z rovnice (4.2.7) vypadnou všechny sudé členy řady. Taky v důsledku toho, že rovnice (4.2.7) obsahuje členy $1/k^3$ a $e^{-\frac{(k\pi)^2}{5}t}$, třetí člen řady vyjde zanedbatelně malý (řádově 10^{-10}). Taky v tomto případě není žádná funkce od vnějšího zdroje tepla jako v minulém příkladu, kvůli níž by bylo nutno použít větší počet členů řady. Všechno bude platit pouze pro čas $t = 1$ a pro počáteční podmínku (4.1.2). A například pro čas $t = 0$ bychom pro poměrně přesné řešení měli vzít minimálně 3 členy řady.

4.3. Numerické řešení – metoda sítí

Nyní zkusíme oba příklady vypočítat numericky pomocí metody sítí.

Nahradíme derivaci funkce $u(x,t)$ podle času tzv. dopřednou diferencí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\tau} \quad (4.3.1)$$

Druhou derivaci funkce $u(x,t)$ podle souřadnice x nahradíme tzv. centrální diferencí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2 \cdot u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{h^2} \quad (4.3.2)$$

Vztahy (4.3.1) a (4.3.2) dosadíme do rovnic (4.1.1) (4.2.1), obdržíme vztah pro přibližné řešení rovnice vedení tepla s vnějším zdrojem tepla

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\tau} = \frac{1}{5} \cdot \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2 \cdot u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{h^2} + f_i^{(k)} \quad (4.3.3)$$

a bez vnějšího zdroje tepla

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\tau} = \frac{1}{5} \cdot \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2 \cdot u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{h^2} \quad (4.3.4)$$

Upravíme rovnice (4.3.3), (4.3.4) a získáme vztahy pro určení hodnoty přibližného řešení v (k+1) - ní časové vrstvě pro oba případy [5]

$$u_i^{(k+1)} = (1 - 2 \cdot \sigma) \cdot u_i^{(k)} + \sigma \cdot u_{i+1}^{(k)} + \sigma \cdot u_{i-1}^{(k)} + \tau \cdot f_i^{(k)}$$

$$u_{i-1}^{(k+1)} = (1 - 2 \cdot \sigma) \cdot u_{i-1}^{(k)} + \sigma \cdot u_i^{(k)} + \sigma \cdot u_{i-2}^{(k)}$$

kde

$$\sigma = \frac{1}{5} \cdot \frac{\tau}{h^2} \quad (4.3.5)$$

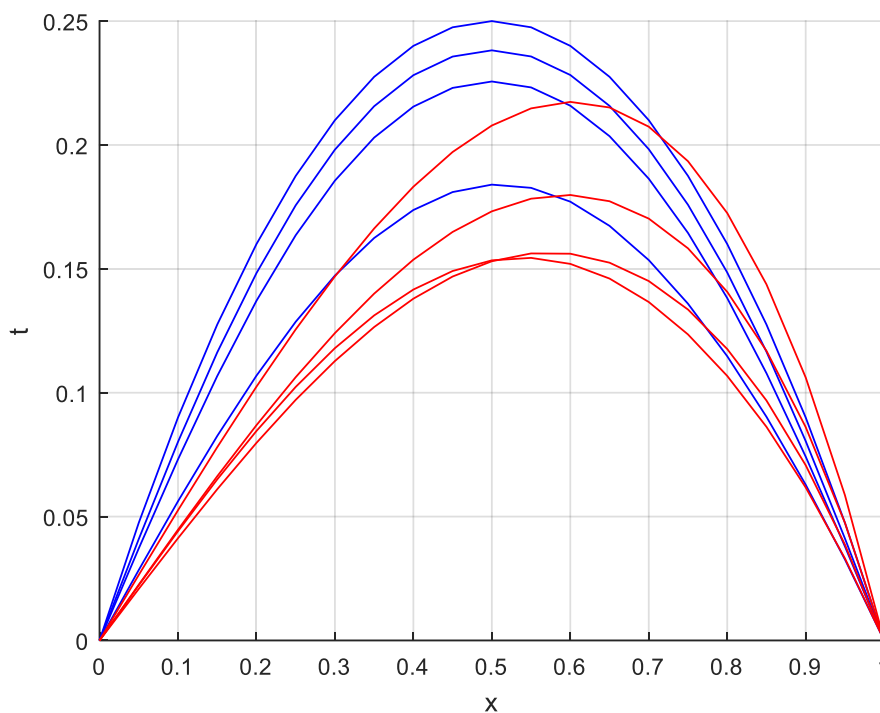
Prostorový krok definujeme jako

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{20} = 0,05$$

kde a – začátek intervalu, b – konec intervalu, n – přirozené číslo

Pak zvolíme časový krok $\tau = 0,0033$ a ze vztahu (4.3.5) pak vychází $\sigma = 0,27$ a je splněna podmínka stability $\sigma \leq 0,5$.

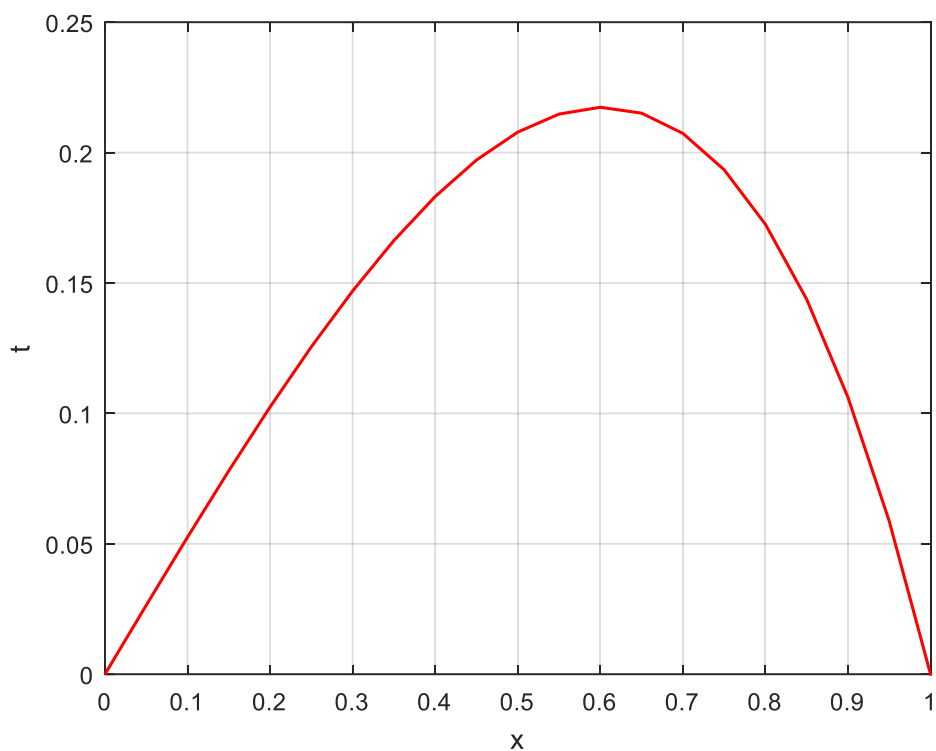
Nejprve vykreslíme změnu teplotního profilu v tělese, které je obklopeno vnějším zdrojem tepla v čase $t \in \langle 0, 1 \rangle$.



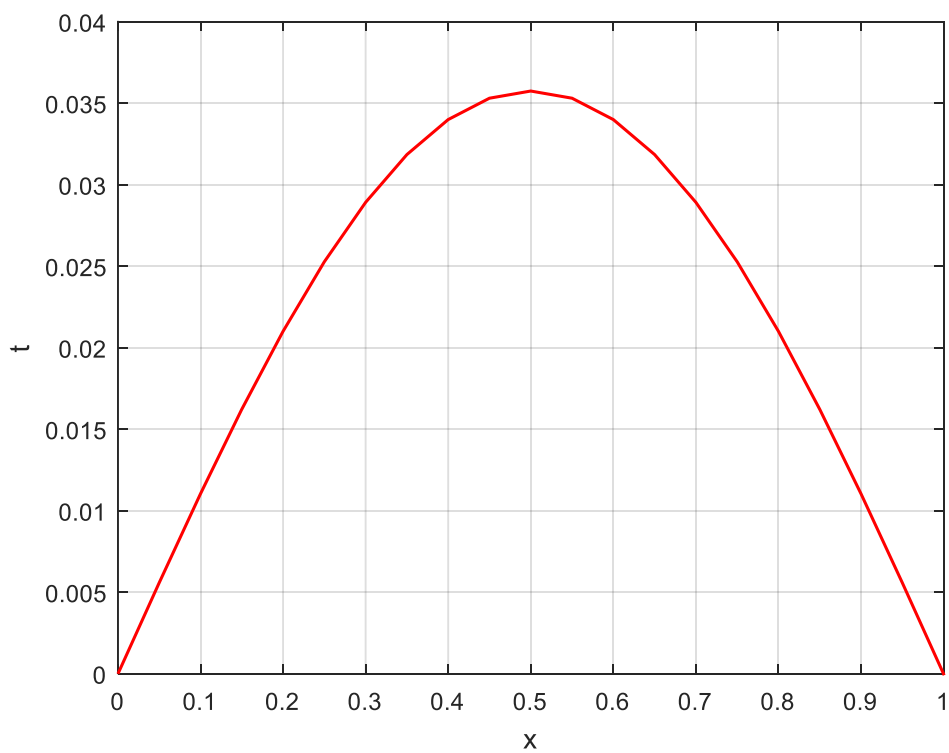
Obrázek 13: teplotní profil v čase $t \in \langle 0, 1 \rangle$ (metoda sítí)

Je zřejmé, že ze začátku bude teplota klesat (modré křivky) a pak v důsledku působení vnějšího zdroje tepla postupně poroste (červené křivky). U příkladu bez vnějšího zdroje tepla by se teplota po určité době ustálila na nule.

Nyní vykreslíme teplotní profil v tělese pro oba případy v čase $t = 1$

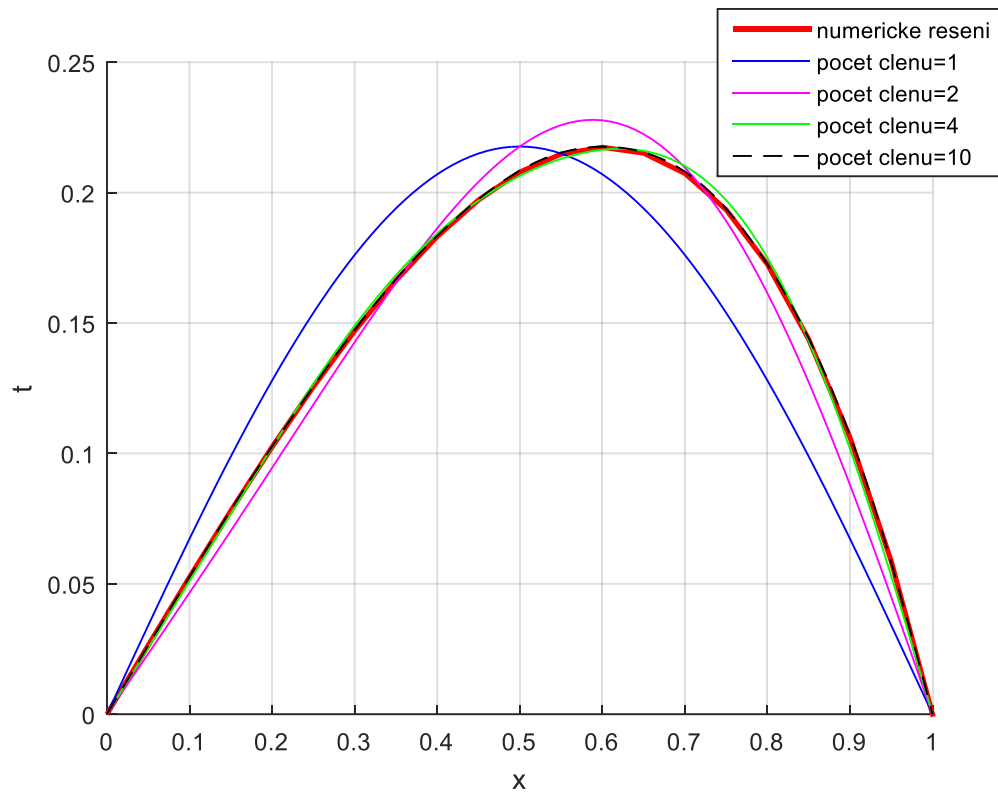


Obrázek 14: Teplotní profil v tělese s vnějším zdrojem tepla v čase $t=1$ (metoda sítí)

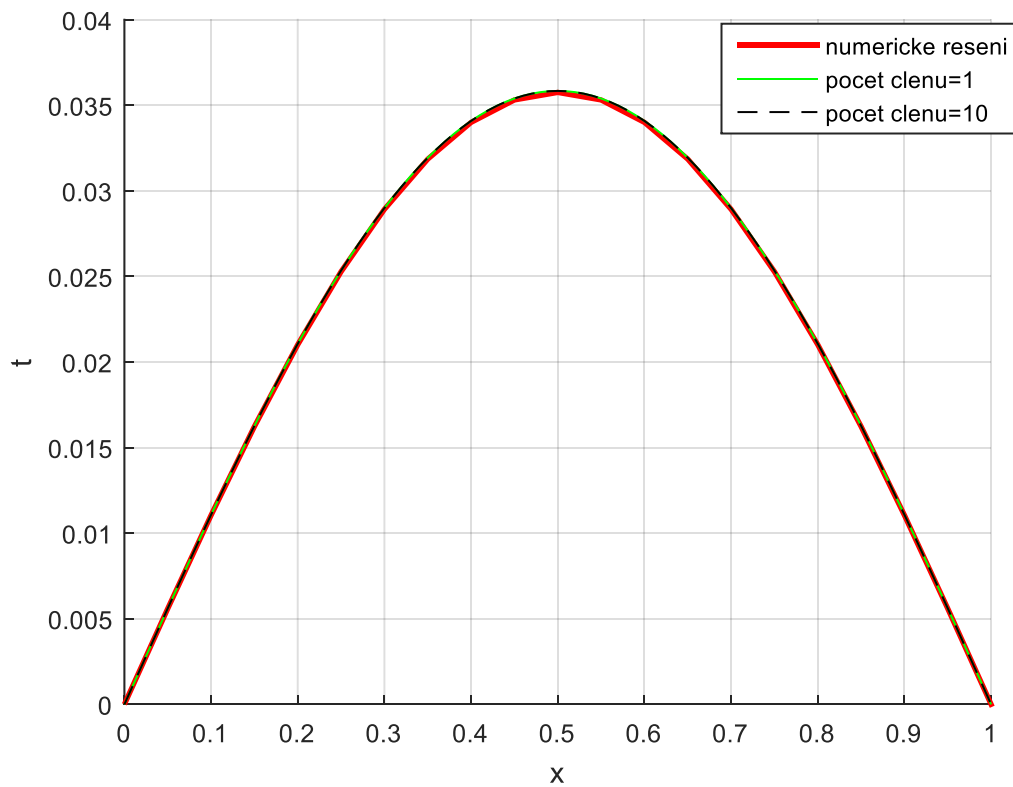


Obrázek 15: Teplotní profil v tělese bez vnějšího zdroje tepla v čase $t=1$ (metoda sítí)

A už můžeme porovnat numerické řešení s řešením pomocí Fourierovy řady.



Obrázek 16: Teplotní profil v tělese s vnějším zdrojem tepla v čase $t=1$ (porovnání výsledků)



Obrázek 17: Teplotní profil v tělese bez vnějšího zdroje tepla v čase $t=1$ (porovnání výsledků)

Z grafů vyplývá, že řešení pomocí Fourierovy řady odpovídá numerickému řešení pomocí metody sítí.

Je jasné, že výsledek můžeme dostat s různou přesností jak pro Fourierovu řadu, kde bude záviset na počtu členů řady, tak i pro metodu sítí, kde přesnost výsledku záleží na volbě prostorového a časového kroku.

Ve dvou spočítaných příkladech se podařilo docela dobře aplikovat Fourierovu metodu a výpočet byl poměrně rychlý a jednoduchý, například v případě bez vnějšího zdroje tepla nám stačil hned první člen řady a u případu s vnějším zdrojem první 4 členy.

Zároveň nesmíme opomenout, že řešení rovnice vedení tepla pomocí Fourierovy metody a volba počtu členů řady budou záviset rovněž na počátečních podmínkách a na čase t .

5. Diskrétní Fourierova transformace

5.1. Základní vztahy a vlastnosti

Diskrétní Fourierova transformace (DFT), známá širší veřejnosti spíše jako rychlá Fourierova transformace, je jedna z výpočetních metod, která zaznamenala od doby svého vzniku v letech 1965–1967 bouřlivý rozvoj. [2]

Diskrétní Fourierova transformace jako prostředek pro výpočet Fourierovy transformace vznikla v podstatě z potřeb techniků, fyziků a především elektroniků, a zejména díky elektronice se vyvíjela dál. V dnešní době představuje diskrétní Fourierova transformace jednu z moderních metod diskrétního zpracování signálů. [2]

Diskrétní Fourierova transformace může být popsána jako transformace konečných posloupností komplexních nebo reálných čísel. Výsledkem této transformace je pak zase konečná posloupnost obecně komplexních čísel. Diskrétní Fourierova transformace zobrazuje konečnou posloupnost čísel opět na konečnou posloupnost čísel. V následujících výpočtech budeme pod názvem diskrétní Fourierova transformace rozumět jak přímou diskrétní Fourierovu transformaci, tak i zpětnou (inverzní) diskrétní Fourierovu transformaci, která zobrazuje výsledek přímé transformace opět na původní posloupnost. [2]

DFT jako transformace v obou směrech byla prvně zavedena v roce 1967. Ale vztahy, které definují přímou transformaci, byly používány již dlouhou dobu pro přibližný výpočet koeficientů Fourierových řad a v reálném zápisu bývají nazývány Besselovými vztahy. Hlavní rozvoj diskrétní Fourierovy transformace nastal až po roce 1965, kdy J. W. Cooley a J. W. Tukey popsali velmi rychlý algoritmus jejího výpočtu známý jako „rychlá Fourierova transformace“ (FFT – Fast Fourier Transform). [2]

Definice přímé diskrétní Fourierovy transformace

Je-li $x_j, j = 0, 1, 2, \dots, N-1$, posloupnost N konečných komplexních čísel, pak její *přímá diskrétní Fourierova transformace* je dána posloupností hodnot X_k , kde dle [2]

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i \frac{jk2\pi}{N}}, \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \dots, N-1, \\ i = \sqrt{-1}. \end{matrix} \quad (5.1.1)$$

Definice zpětné diskrétní Fourierovy transformace

Je-li $X_k, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, posloupnost N konečných komplexních čísel, pak její *zpětná diskrétní Fourierova transformace* je posloupnost N čísel vyjádřená vztahem dle [2]

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{jk2\pi}{N}}, \quad \begin{matrix} j = 0, 1, \dots, N-1, \\ i = \sqrt{-1}. \end{matrix} \quad (5.1.2)$$

Souvislost diskrétní Fourierovy transformace s Fourierovou řadou

Předpokládáme, že máme funkci $f(t)$, která je po částech spojitá na intervalu $t \in \langle 0, b \rangle$. Tuto funkci můžeme rozšířit na periodickou funkci s periodou b , takže podle vztahu (2.3.1) můžeme napsat

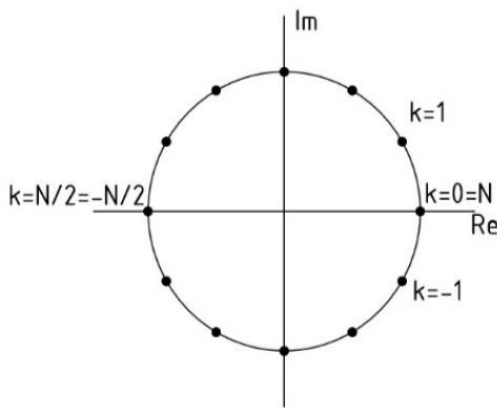
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i \frac{2\pi kt}{b}}$$

Nyní se zkusíme zaměřit na funkci $f(t)$ v diskretním čase $t_j = j \frac{b}{N}, j = 0, \dots, N$ a dostaneme vztah

$$f_j = f(t_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i \frac{2\pi k j}{N}} \quad (5.1.3)$$

Máme $N+1$ vstupních hodnot f_j , a proto potřebujeme najít $N+1$ koeficientů C_k , takže vztah (5.1.3) můžeme přepsat jako

$$f_j = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} C_k e^{i \frac{2\pi k j}{N}}, \quad j = 0, \dots, N \quad (5.1.4)$$



Kde $e^{i \frac{2\pi k}{N}}, k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$ reprezentuje N bodů na jednotkové kružnici v komplexní rovině.

Při použití jiného číslování $-e^{i \frac{2\pi k}{N}}, k = 0, \dots, N$, vztah (5.1.4) můžeme upravit na

$$f_j = \sum_{k=0}^N C_k e^{i \frac{2\pi k j}{N}}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (5.1.5)$$

Obrázek 18: Jednotková kružnice

V důsledku toho, že $e^{i \frac{2\pi \cdot 0}{N} j} = e^{i \frac{2\pi \cdot N}{N} j}$, máme pouze N nezávislých funkcí $e^{i \frac{2\pi k}{N}}$, a proto vztah (5.1.5) ještě upravíme na

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{i \frac{2\pi k j}{N}}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (5.1.6)$$

Rovnice (5.1.6) může být zapsána ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = C_0 \begin{pmatrix} W_0 \\ W_0 \\ \vdots \\ W_0 \end{pmatrix} + \dots + C_k \begin{pmatrix} W_0 \\ W_{k \cdot 1} \\ \vdots \\ W_{k \cdot (N-1)} \end{pmatrix} + \dots + C_{(N-1)} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_{(N-1) \cdot 1} \\ \vdots \\ W_{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix}$$

kde $W_k = e^{i \frac{2\pi k}{N}}$. Vektor vstupních hodnot (f_0 až f_{N-1}) označíme jako F .

Vektory $W_0, W_1, \dots, W_{(N-1)}$ budou tvořit bázi N -rozměrného prostoru, a proto vektor F může být zapsán jako lineární kombinace vektorů $W_0, W_1, \dots, W_{(N-1)}$

$$F = C_0 W_0 + C_1 W_1 + \dots + C_{N-1} W_{N-1}$$

A tento vztah můžeme psát jako

$$F = V \cdot C,$$

kde V je matice ($N \times N$) a C je vektor koeficientů C_k ($N \times 1$).

Nyní už tedy můžeme spočítat vektor neznámých koeficientů C_k

$$C = V^{-1} \cdot F$$

A lze říct, že vektor C je diskretní Fourierovou transformací původního vektoru F.

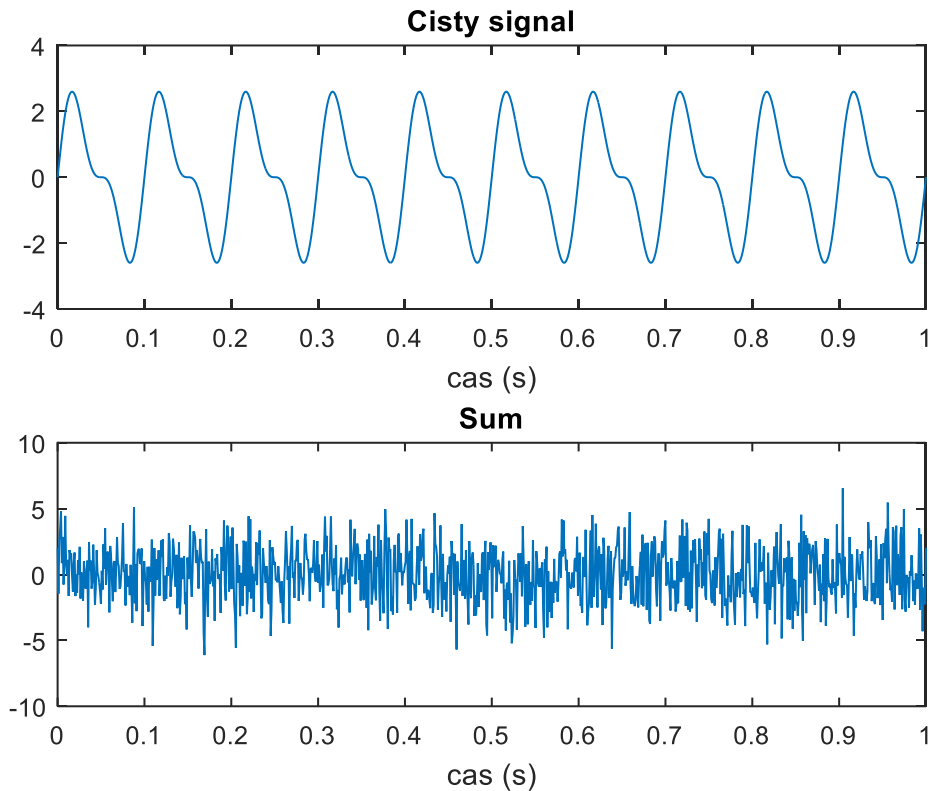
5.2. Aplikace diskretní Fourierovy transformace pro filtraci signálu.

Nyní bude představena takzvaná dolní propust (LPF – Low-Pass Filter), což je lineární filtr, který nepropouští signál vyšších frekvencí.

Signál, který uměle vytvoříme v programu MatLab, bude definován jako

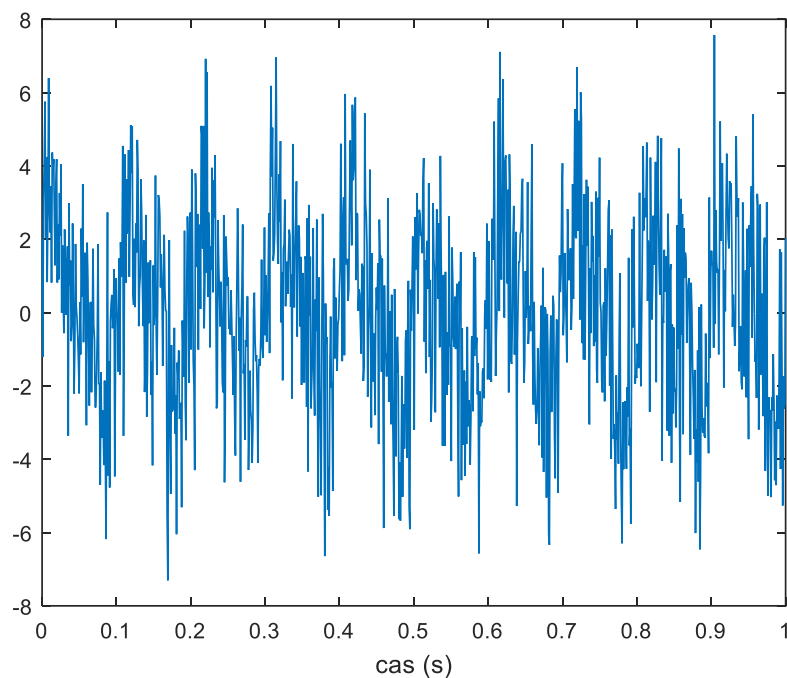
$$x(t) = 2 \sin(2\pi 10t) + \sin(2\pi 20t),$$

a k tomu bude ještě přidán náhodný vysokofrekvenční šum, který se vytvoří pomocí speciální funkce „randn“ a zároveň bude mít podstatně vyšší amplitudu než čistý signál.



Obrázek 19: Čistý signál a vysokofrekvenční šum

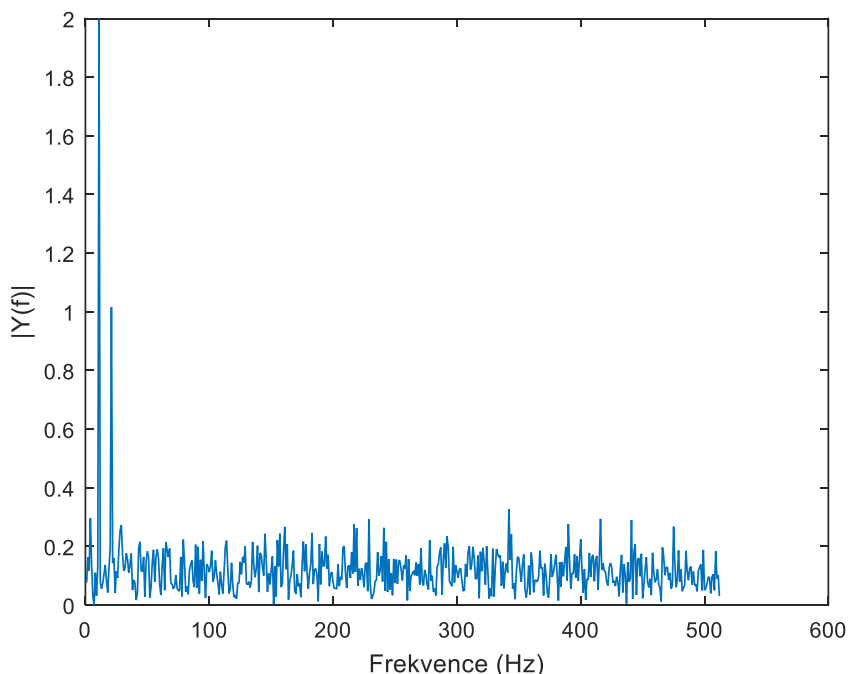
Takže pak bude mít signál následující tvar:



Obrázek 20: "Znečištěný" signál

Jak je vidět z obrázku, původní signál je poměrně silně „znečištěn“ šumem a je docela obtížné identifikovat frekvence a amplitudu původního signálu.

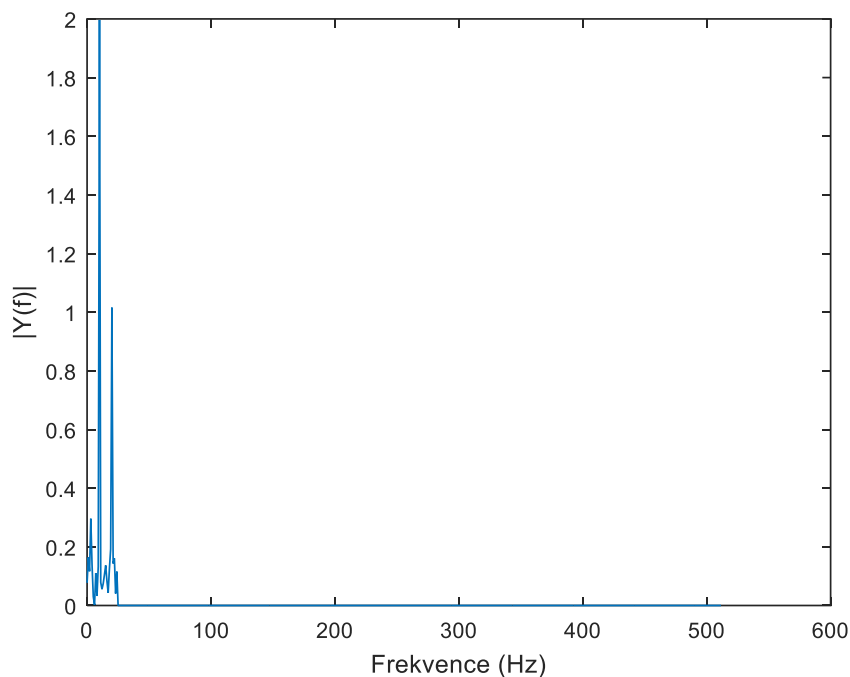
Pro zjištění amplitudy a frekvenci původního signálu provedeme přímou diskrétní Fourierovu transformaci (nebo rychlou Fourierovu transformaci v MatLabu) a vykreslíme amplitudové spektrum signálu, který je „znečištěn“ šumem.



Obrázek 21: Amplitudové spektrum (signál + šum)

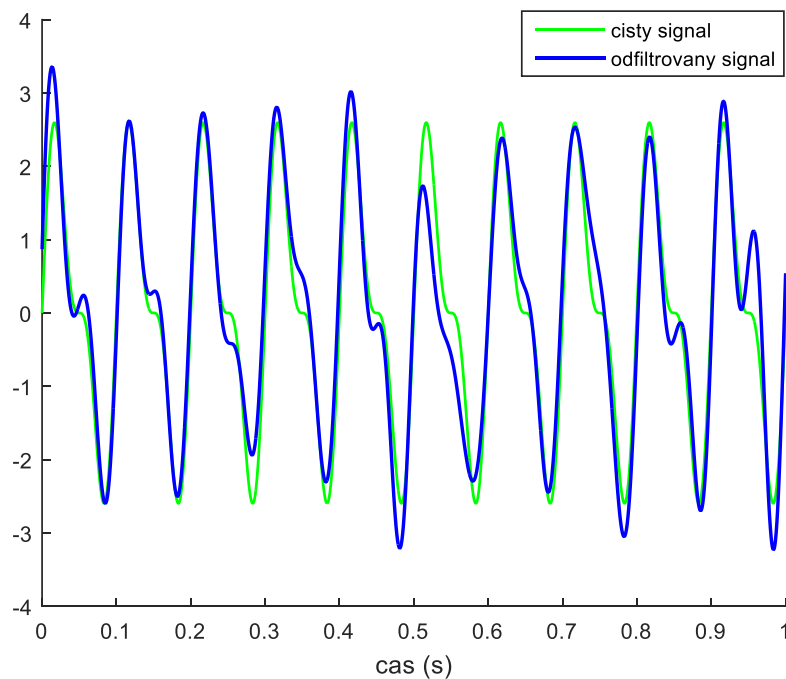
Z obrázku je zřejmé, že existují 2 vrcholy, které mají amplitudu přibližně 2 a 1 a frekvenci téměř 10 Hz a 20 Hz. Hlavním důvodem, proč nejsou amplitudy na hodnotách 2 a 1, je šum, přičemž pro každé spuštění kódu v MatLabu budou mít tyto hodnoty různé přiblížení k hodnotám 2 a 1.

Pro vytvoření čistšího amplitudového spektra nyní vynulujeme všechny frekvence, které jsou vyšší než 25 Hz.



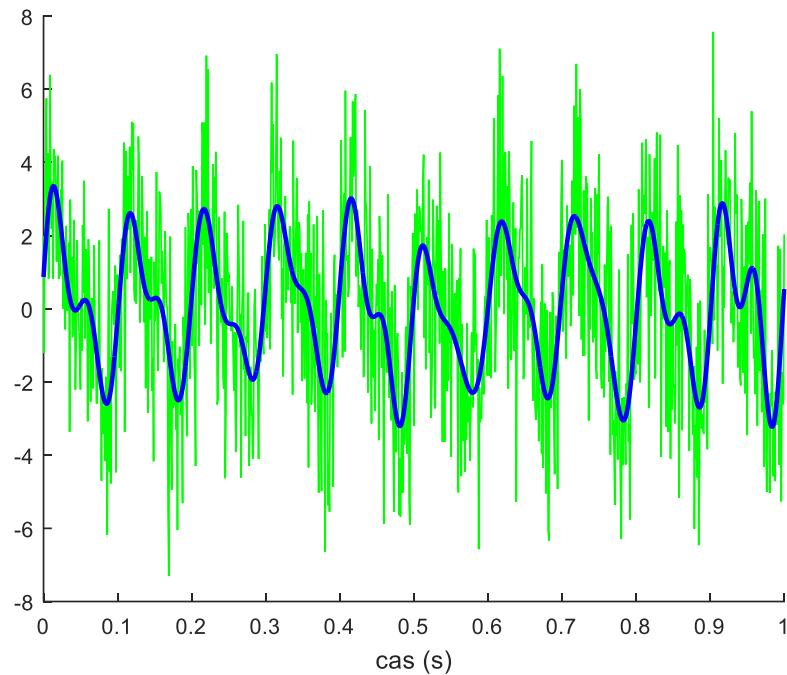
Obrázek 22: Upravené amplitudové spektrum

Získali jsme odfiltrované amplitudové spektrum signálu bez vysokých frekvencí. Pak můžeme pomocí zpětné diskrétní Fourierovy transformace vykreslit signál po filtraci a porovnat ho s původním signálem.



Obrázek 23: Porovnání čistého a odfiltrovaného signálu

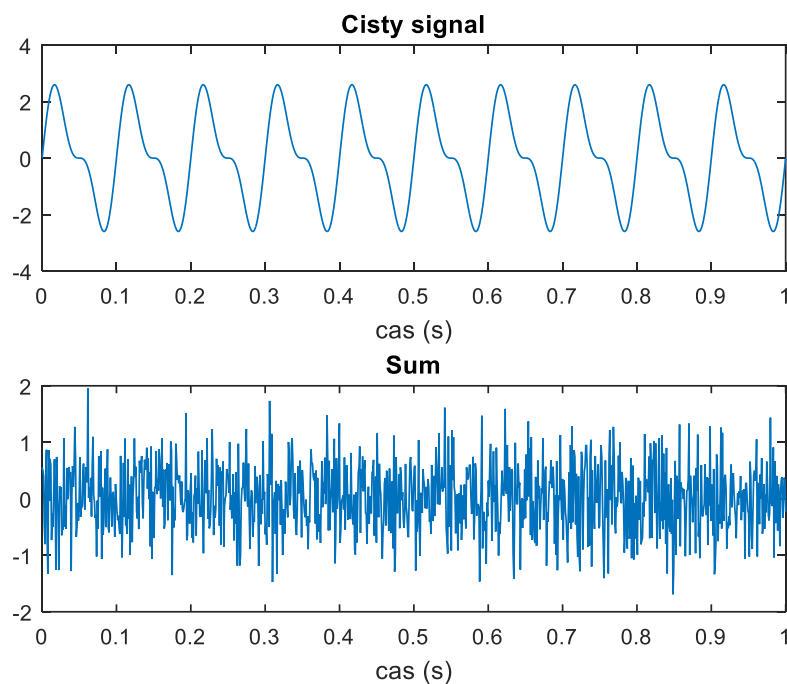
Odfiltrovaný signál nyní porovnáme s původním signálem, který byl znečištěn šumem.



Obrázek 24: Porovnání odfiltrovaného a "znečištěného" signálu

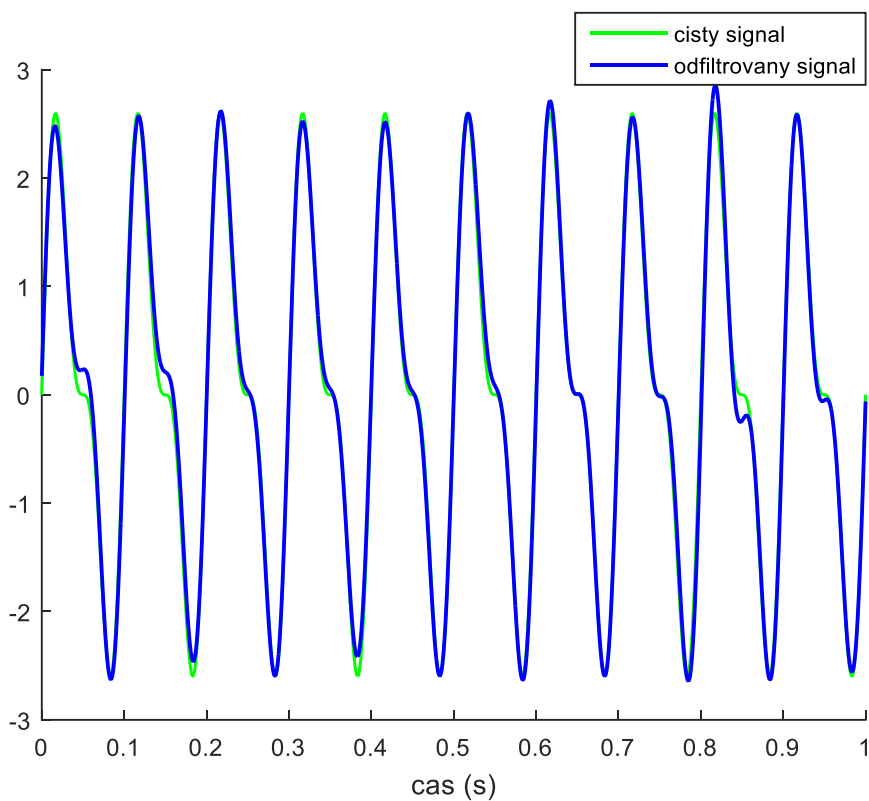
Jak je patrné z obrázku, pomocí diskrétní Fourierovy transformace se podařilo relativně úspěšně odfiltrovat signál i při poměrně velkém šumu. Signál vypadá značně čistší, byly odstraněny všechny vysoké frekvence, ačkoliv odfiltrovaný signál se poněkud liší od původního čistého signálu, podařilo se z amplitudového spektra vcelku přesně odečíst amplitudu a vlastní frekvenci čistého signálu. Hlavní důvod, proč se odfiltrovaný signál liší od původního, je výrazný šum, který má podstatně větší amplitudu než „čistý signál“.

Zkusme nyní demonstrovat, jaký bude výsledek, když bude vygenerován šum s menší amplitudou.



Obrázek 25: Čistý signál a vysokofrekvenční šum (s menší amplitudou)

Šum má nyní menší amplitudu než původní „čistý“ signál. Stejným způsobem odstraníme všechny frekvenci větší než 25 Hz a vykreslíme odfiltrovaný signál.



Obrázek 26: Porovnání čistého a odfiltrovaného signálu (pro šum s menší amplitudou)

Zde už je vidět, že odfiltrovaný signál vypadá téměř stejně jako původní.

Diskrétní Fourierovu transformaci lze tedy velmi dobře aplikovat na filtrace signálů, které jsou „znečištěny“ šumem s menší amplitudou než amplituda signálů, ale i při velkém šumu lze docela přesně určit amplitudy a vlastní frekvenci signálů. Kromě toho lze tuto metodu aplikovat i na další účely spojené s harmonickou analýzou.

6. Závěr

Práce se zabývá praktickým využitím Fourierových řad a diskrétní Fourierovy transformace v různých technických úlohách. Byly zde popsány základní vztahy a vlastnosti Fourierových řad a diskrétní Fourierovy transformace a poté na třech příkladech demonstrováno jejich praktické použití.

První příklad jasně ukazuje, že obyčejnou diferenciální rovnici s nespojitou pravou stranou (v našem případě rovnice průhybové čáry) lze snadno aproximovat Fourierovou řadou. Získané výsledky se téměř nelišily od analytického řešení a od řešení v MKP programu EngiLab Beam. Jak se ukázalo, velikost členů řady bude poměrně rychle klesat a pro poměrně přesné určení průhybu nám stačily první 3 členy řady a pro určení průběhu momentu prvních 6 členů řady.

V dalším příkladu bylo představeno využití Fourierovy metody pro řešení rovnice vedení tepla s vnějším a bez vnějšího zdroje tepla a následně porovnání výsledků s řešením pomocí metody sítí. V tomto případě minimální počet členů řady pro přesné řešení ještě závisí na počátečních podmínkách a rovněž na čase. Například pro naše počáteční podmínky a pro čas $t = 1$ nám u příkladu bez vnějšího zdroje tepla pro zobrazení velmi přesného řešení stačil hned první člen řady. U příkladu s vnějším zdrojem tepla bylo nutno vzít už minimálně 4 členy řady, protože velký vliv měla funkce $F(x,t)$, která popisovala hustotu vnějšího zdroje tepla.

Poslední příklad demonstroval aplikaci diskrétní Fourierovy transformace pro filtraci signálu. Pomocí přímé diskrétní Fourierovy transformace bylo vykresleno amplitudové spektrum signálu, ze kterého se podařilo identifikovat amplitudy a vlastní frekvenci původního signálu a odstranit všechny vysoké frekvence. Pomocí zpětné transformace pak byl vykreslen odfiltrovaný signál.

Seznam obrázků

Obrázek 1: Zatížení nosníku [4].....	- 11 -
Obrázek 2: Průhybová čára (aproximace Fourierovou řadou).....	- 13 -
Obrázek 3: Průběh momentu (aproximace Fourierovou řadou)	- 14 -
Obrázek 4: Nosník (analytické řešení).....	- 14 -
Obrázek 5: Průhybová čára (analytické řešení).....	- 17 -
Obrázek 6: Průběh momentu (analytické řešení)	- 17 -
Obrázek 7: Průhybová čára (EngiLab Beam)	- 18 -
Obrázek 8: Průběh momentu (EngiLab Beam).....	- 18 -
Obrázek 9: Průhybová čára (porovnání výsledků)	- 19 -
Obrázek 10: Průběh momentu (porovnání výsledků).....	- 19 -
Obrázek 11: Teplotní profil v tělese s vnějším zdrojem tepla v čase $t=1$ (Fourierova řada)...	- 23 -
Obrázek 12: Teplotní profil v tělese bez vnějšího zdroje tepla v čase $t=1$ (Fourierova řada) .	- 25 -
Obrázek 13: teplotní profil v čase $t \in \langle 0, 1 \rangle$ (metoda sítí).....	- 26 -
Obrázek 14: Teplotní profil v tělese s vnějším zdrojem tepla v čase $t=1$ (metoda sítí)	- 27 -
Obrázek 15: Teplotní profil v tělese bez vnějšího zdroje tepla v čase $t=1$ (metoda sítí)	- 27 -
Obrázek 16: Teplotní profil v tělese s vnějším zdrojem tepla v čase $t=1$ (porovnání výsledků).....	- 28 -
Obrázek 17: Teplotní profil v tělese bez vnějšího zdroje tepla v čase $t=1$ (porovnání výsledků).....	- 28 -
Obrázek 18: Jednotková kružnice	- 31 -
Obrázek 19: Čistý signál a vysokofrekvenční šum.....	- 32 -
Obrázek 20: "Znečištěný" signál	- 33 -
Obrázek 21: Amplitudové spektrum (signál + šum).....	- 33 -
Obrázek 22: Upravené amplitudové spektrum.....	- 34 -
Obrázek 23: Porovnání čistého a odfiltrovaného signálu	- 34 -
Obrázek 24: Porovnání odfiltrovaného a "znečištěného" signálu	- 35 -
Obrázek 25: Čistý signál a vysokofrekvenční šum (s menší amplitudou).....	- 35 -
Obrázek 26: Porovnání čistého a odfiltrovaného signálu (pro šum s menší amplitudou).....	- 36 -

Seznam použitých zdrojů

- [1] HERRMANN, Leopold a České vysoké učení technické v Praze. Strojní fakulta. Fourierovy řady: komentované přednášky. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2006. ISBN 8001026035;9788001026038;.
- [2] ČÍŽEK, Václav. Diskrétní Fourierova transformace a její použití. 1. vyd. Praha: SNTL, 1981.
- [3] NUSSBAUMER, Henri J. Fast Fourier transform and convolution algorithms. 2. correct and update. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
- [4] KOGAN, E.A. a E.A. LOPANICYN. Ряды Фурье и дифференциальные уравнения математической физики: Fourierovy řady a diferenciální rovnice matematické fyziky. In: *Mospolytech.ru* [online]. Moskva: MAMI, 2012 [cit. 2018-07-16]. Dostupné z: http://mospolytech.ru/storage/files/kaf/vm/furie_rows.pdf
- [5] BENDA, Josef a Růžena ČERNÁ. Numerická matematika: doplňkové skriptum. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1994. ISBN 9788001012161;8001012166;.
- [6] HERRMANN, Leopold a České vysoké učení technické v Praze. Strojní fakulta. Obvyčejné diferenciální rovnice: řady : komentované přednášky pro předmět Matematika III. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 8001030415;9788001030417;.