



**ČVUT**

ČESKÉ VYSOKÉ  
UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE

**FAKULTA  
STAVEBNÍ  
ČVUT V PRAZE**

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

---

Stavební inženýrství

Konstrukce pozemních staveb

Katedra betonových a zděných konstrukcí

**Analýza průhybů železobetonových prvků s využitím pokročilých numerických metod**

**Analysis of Deflections of Reinforced Concrete Structural Members Using Advanced Numerical Methods**

Vedoucí práce: Ing. Radek Štefan, Ph.D.

Zpracovala: Karolina Nedomová

Praha 2019



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

Thákurova 7, 166 29 Praha 6

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Nedomová Jméno: Karolina Osobní číslo: 407462  
Zadávací katedra: Katedra betonových a zděných konstrukcí  
Studijní program: Stavební inženýrství  
Studijní obor: Konstrukce pozemních staveb

### II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Analýza průhybů železobetonových prvků s využitím pokročilých numerických metod

Název diplomové práce anglicky: Analysis of Deflections of Reinforced Concrete Structural Members Using Advanced Numerical Methods

Pokyny pro vypracování:

- Přehled dostupných numerických metod pro analýzu průhybů železobetonových prvků (přímá integrace průhybové čáry, metoda konečných prvků).
- Formulace výpočetních algoritmů.
- Implementace výpočetních algoritmů v prostředí MATLAB.
- Aplikace na vybrané řešené úlohy a porovnání s normovým přístupem.

Seznam doporučené literatury:

- Procházka, Jaroslav a kol. Navrhování betonových konstrukcí 1. ČBS Servis.
- ČSN EN 1992-1-1 Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby.
- Fish, Jacob, and Belytschko, Ted. A First Course in Finite Elements. Wiley, 2007.


Jméno vedoucího diplomové práce: Ing. Radek Štefan, Ph.D.

Datum zadání diplomové práce: 4. 10. 2018

Termín odevzdání diplomové práce: 6. 1. 2019

*Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku*

  
Podpis vedoucího práce

  
Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

4. 10. 2018

Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta(ky)

### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 4.1.2019

.....  
Karolina Nedomová

## **Poděkování**

Velice ráda bych touto cestou poděkovala vedoucímu této diplomové práce Ing. Radku Štefanovi, Ph.D., za cenné rady, věnovaný čas, vstřícnost při konzultacích, předané znalosti a zapůjčenou literaturu.

V Praze dne 4.1.2019

Karolina Nedomová

## **Abstrakt**

Diplomová práce se věnuje problematice deformací železobetonového nosníku oboustranně vyztuženého obdélníkového průřezu. Hlavním cílem této práce je popsat problematiku deformací na železobetonovém nosníku oslabeném trhlinami a s vlivem dotvarování betonu. Průhyb je vyšetřován pro čtyři statická schéma. V práci jsou použity dvě metody výpočtu deformací a následně jsou porovnány. První metodou je řešení diferenciální rovnice průhybové čáry. Jako druhá metoda výpočtu deformací je zvolena metoda konečných prvků. Cílem této práce je také porovnat metody stanovení ohybových tuhostí po délce nosníku. Práce porovnává nosníky s konstantní ohybovou tuhostí po celé délce nosníku a s proměnnou ohybovou tuhostí po délce nosníku dle normy ČSN EN 1992-1-1. Dále je tento normový výpočet porovnáván s proměnnou ohybovou tuhostí stanovenou z pracovního diagramu průřezu, při jehož sestavení jsou používány nelineární pracovní diagramy materiálů. Pro beton byl použit pracovní diagram včetně vlivu dotvarování. Dalším cílem této práce je vytvořit jednoduchý výpočetní program, který stanoví průhyb na nosníku s proměnnou ohybovou tuhostí a porovná výpočetní metody stanovení průhybu i metody stanovení ohybové tuhosti.

**Klíčová slova:** *mezní stav použitelnosti, průhyb, železobetonový nosník, metoda konečných prvků, diferenciální rovnice průhybové čáry, výpočetní pomůcka, dotvarování*

## **Abstract**

The diploma thesis deals with the deformation of a reinforced concrete beam of double-sided reinforced rectangular cross-section. The main aim of this thesis is to describe the problem of deformation of the reinforced concrete beam weakened by cracks with the influence of concrete creep. The deflection is investigated for four static schematics. Two methods of deformation calculation are used and compared in the thesis. The first method is the differential equation of the deflection curve. The finite element method is used as a second method of the deflection calculation. The aim of this work is also the comparison of methods of determining the bending stiffness along the beam length. The thesis compares beams with a constant bending stiffness along the length of the beam and beams with a variable bending stiffness along the beam length according to the standard EN 1992-1-1. Furthermore, the standard calculation is compared with the calculation with variable bending stiffness determined from a cross-section diagram, in which non-linear stress-strain diagram of the materials are used. The stress-strain diagram used for the concrete includes the effect of creep. Another aim of this thesis is to create a simple computer program, that defines the deflection on a variable bending stiffness beam and allows the user to compare the results of various deflection calculation methods and various bending stiffness calculation methods.

**Key words:** *serviceability limit state, deflection, reinforced concrete beam, finite element method, differential equations of the deflection curve, calculation tool, concrete creep*

## Obsah

Popis použitých symbolů .....	10
1. Úvod.....	13
2. Mezní stavy použitelnosti.....	14
2.1. Chování železobetonového nosníku při zatěžování .....	14
2.2. Kombinace zatížení pro mezní stavy použitelnosti.....	15
3. Výpočet deformací dle ČSN EN 1992-1-1 .....	16
3.1. Výpočet deformací dle ČSN EN 1992-1-1 kap. 7.4.3.....	16
3.2. Výpočet součinitele dotvarování dle ČSN EN 1992-1-1 Příloha B.1 .....	17
3.3. Kombinace zatížení pro výpočet deformací dle ČSN EN 1990.....	20
3.4. Výpočet geometrických a materiálových charakteristik průřezu .....	21
3.5. Posouzení dlouhodobého průhybu dle ČSN EN 1992-1-1 .....	24
4. Diferenciální rovnice průhybové čáry.....	26
4.1. Odvození diferenciální rovnice průhybové čáry .....	26
4.2. Clebschova metoda.....	29
4.3. Výpočet neznámých metodou jednotkových sil.....	30
4.3.1. Stanovení svislé reakce v levé podpoře pro nosník typu kloub – vetknutí .....	30
4.4. Výpočet deformací s respektováním ohybových tuhostí po délce nosníku .....	33
4.4.1. Stanovení průhybové čáry pro 3 integrační intervaly.....	34
4.4.2. Stanovení průhybové čáry pro 4 integrační intervaly.....	37
4.4.3. Tvorba výpočetního algoritmu.....	40
4.4.4. Stanovení hodnoty ohybové tuhosti pro každý integrační interval .....	42
4.5. Další statická uložení železobetonového nosníku .....	43
5. Metoda konečných prvků .....	45
5.1. Bázové funkce .....	45
5.2. Křivost ohýbaného prutu .....	47

5.3. Matice tuhosti.....	50
5.4. Ohybový moment .....	54
5.5. Tvorba výpočetního algoritmu.....	54
5.6. Kontrola výpočetního algoritmu ve SCIA Engineer 16.1.....	58
6. Stanovení materiálových vlastností.....	66
6.1. Materiálové vlastnosti betonu.....	66
6.2. Modul pružnosti betonu .....	69
6.3. Materiálové vlastnosti betonářské oceli.....	70
6.4. Pracovní diagram průřezu.....	71
6.4.1. Algoritmus výpočtu.....	72
6.4.2. Kontrola algoritmu výpočtu .....	74
7. Prostředí programu .....	77
8. Program č.1 – deformace dle ČSN EN 1992-1-1.....	85
8.1. Výpočetní program .....	86
8.2. Výstupy z programu – prostý nosník .....	87
8.3. Výstupy z programu – konzola.....	92
8.4. Výstupy z programu – staticky neurčité konstrukce.....	96
9. Program č.2 – porovnání DRPČ s MKP.....	100
9.1. Výpočetní program .....	100
9.2. Výstupy z programu – prostý nosník .....	101
9.3. Výstupy z programu – konzola.....	104
9.3. Výstupy z programu – staticky neurčité konstrukce.....	106
10. Program č.3 – metoda konečných prvků.....	108
10.1. Výpočetní program .....	109
10.2. Výstupy z programu – prostý nosník .....	109
10.3. Výstupy z programu – konzola.....	113



10.3. Výstupy z programu – staticky neurčité konstrukce .....	116
11. Závěr .....	118
12. Seznam zdrojů .....	119
13. Seznam obrázků.....	121
14. Seznam tabulek .....	124
15. Použitý software .....	124
16. Přílohy.....	125
Příloha P1. – Odvození výšky x tlačené části průřezu .....	125
Příloha P2. – Odvození ohybové tuhosti ideálního průřezu .....	128
Příloha P3. – Mechanické vlastnosti materiálů a hodnoty součinitelů .....	129
Příloha P4. – Tabulka pro zjednodušenou deformační metodu .....	130
Příloha P5. – Pevnostní a deformační charakteristiky betonu .....	131

## Popis použitých symbolů

$\varnothing_1$	průměr prutu spodní hlavní ohybové výztuže
$\varnothing_2$	průměr prutu horní hlavní ohybové výztuže
$\varnothing_{tř}$	průměr třmíneků
$(1/r)_{g,lt}$	výsledná křivost od kvazi-stálého zatížení
$\alpha_e$	pracovní součinitel (poměr $E_s/E_{cm}$ )
$\alpha_{e,ef}$	efektivní pracovní součinitel (poměr $E_s/E_{c,ef}$ )
$\varepsilon_{s1}$	poměrné přetvoření dolní výztuže
$\varepsilon_{s2}$	poměrné přetvoření horní výztuže
$\varepsilon_c$	poměrné přetvoření betonu
$\varepsilon_{ci}$	poměrné přetvoření betonového proužku
$\varphi, \emptyset$	natočení uzlů
$\varphi_{ef}$	účinný součinitel dotvarování
$\varphi(t, t_0)$	součinitel dotvarování
$\rho$	poloměr křivosti
$\sigma_c$	napětí v tlačeném betonu
$\sigma_s$	napětí ve výztuži
$\sigma_{s1}$	napětí v dolní výztuži
$\sigma_{s2}$	napětí v horní výztuži
$\psi_1$	součinitel pro častou kombinaci zatížení
$\psi_2$	součinitel pro kvazi-stálou kombinaci zatížení
$\zeta$	rozdělovací součinitel
$\xi$	přirozená souřadnice po délce prvku
$a_{l,ef}$	vzdálenost těžiště ideálního průřezu od horního okraje
$A_c$	plocha betonové průřezu
$A_{l,ef}$	plocha ideálního průřezu
$A_s$	celková plocha ohybové výztuže
$A_{s1}$	plocha dolní ohybové výztuže
$A_{s2}$	plocha horní ohybové výztuže
$b$	šířka průřezu
$B$	druhá derivace bázové funkce
$c$	krytí třmíneků

$C_{1,2}$	integrační konstanty
$C_{I,ef}$	ohybová poddajnost pro průřez bez trhliny
$C_{II,ef}$	ohybová poddajnost pro průřez s trhlinou
$d$	vzdálenost spodní výztuže od horních vláken
$d_1$	vzdálenost spodní výztuže od spodních vláken
$d_2$	vzdálenost horní výztuže od horních vláken
$E_{cm}$	modul pružnosti betonu
$E_{c,ef}$	efektivní modul pružnosti betonu pro dlouhodobě působící zatížení
$E_s$	modul pružnosti oceli
$EI_y, EI$	ohybová tuhost
$f$	vektor uzlových zatížení
$f_{ck}$	charakteristická pevnost betonu v tlaku
$f_{cm}$	střední hodnota pevnosti betonu v tlaku
$f_{ctm}$	charakteristická pevnost betonu v tahu
$f_{qp}$	kvazi-stálá kombinace spojitého zatížení
$F_{qp}$	kvazi-stálá kombinace bodového zatížení
$f_{yk}$	mez kluzu výztuže
$g_k$	stálé charakteristické spojité zatížení
$G_k$	stálé charakteristické bodové zatížení
$h$	výška průřezu
$h_0$	náhradní tloušťka
$I_{I,ef}$	moment setrvačnosti ideálního průřezu k jeho těžišti
$I_{II,ef}$	moment setrvačnosti průřezu s trhlinou k jeho těžišti
$L$	délka nosníku
$K^e$	matice tuhosti jednoho prvku
$K^G$	globální matice tuhosti nosníku
$K\check{C}$	značení kódového čísla
$M_{cr,ef}$	ohybový moment při vzniku trhlin
$M, M_{Ed}$	ohybový moment od kvazi-stálé kombinace zatížení
$n$	počet dílků, na které je rozdělen nosník
$N$	bázová funkce
$q_k$	užitné charakteristické spojité zatížení

$Q_k$	užitné charakteristické bodové zatížení
$r$	vektor uzlových natočení a posunutí
$RH$	relativní vlhkost okolního prostředí
$T$	teplota okolního prostředí
$t_0$	čas vnesení zatížení ve dnech
$w_{lim,t}$	limitní hodnota průhybu pro dlouhodobý účinek
$w_{g,t}$	průhyb od kvazi-stálého zatížení
$w_{(x)}$	rovnice průhybové čáry
$x_{cr,ef}$	vzdálenost neutrální osy od tlačného okraje
$x$	souřadnice po délce nosníku
$\int M_{(x)}$	symbol pro první integraci ohybového momentu bez integračních konstant
$\iint M_{(x)}$	symbol pro druhou integraci ohybového momentu bez integračních konst.

## 1. Úvod

Diplomová práce se věnuje problematice deformací štíhlých prutů, pro které můžeme zavést předpoklad chování označovaný jako Navierova – Bernoulliho hypotéza. Dle této hypotézy průřezy po deformaci zůstávají kolmé na deformovanou střednici, kde platí, že derivace průhybové čáry v daném místě je rovna natočení v daném místě. Dále uvažujeme, že štíhlý prut je železobetonový nosník oboustranně vyztužený a je obdélníkového průřezu. U železobetonových ohýbaných konstrukcí se předpokládá, že při zdeformování konstrukce tlakové síly přenesou beton a tahové síly přenesou ocel. Pokud je v betonu překročena jeho tahová pevnost, beton se poruší trhlinami. Průřezy, které se poruší trhlinami, jsou oslabené a vlivem trhlin se sníží ohybová tuhost daného průřezu. Tato práce se věnuje výpočtu deformací na ohýbaných železobetonových prutech s proměnnou ohybovou tuhostí po délce nosníku, která je způsobena oslabením průřezů vlivem trhlin. Výpočet ohybové tuhosti je prováděn dvěma způsoby. Je zde použit normový [1] postup a ten je dále porovnáván s výpočtem ohybové tuhosti získané z pracovních diagramů materiálů a skutečného zatížení. Normový postup je popsán v kap. 3. Skutečné ohybové tuhosti jsou stanoveny iteračním výpočtem. Nosník je nejprve uvažován o ohybovou tuhostí neporušeného průřezu. Následně je zatížen zatížením, které působí na konstrukci a pro tuto konstrukci pomocí pracovního diagramu průřezu určíme jeho ohybovou tuhost. Tento postup je prezentován v kap. 6.4. Iterační výpočet je ukončen, dokud se hodnoty průhybů ustálí (tj. nemění se o více než je předepsaná přesnost). Následně jsou hodnoty průhybů porovnávány na čtyřech statických schématech. Pro jednoduchost a rychlost tohoto porovnávání budou v rámci této práce prezentovány a popsány výpočetní aplikace vytvořené v programovacím prostředí Matlab. Tyto uživatelsky jednoduché programy uživateli umožní spočítat deformaci na železobetonovém nosníku, který lze vyztužit při jednom nebo obou povrchích. Práce se také zabývá porovnáním dvou výpočetních metod, které lze využít ke stanovení průhybu. První metodou, kterou se v práci budeme zabývat je řešení diferenciální rovnice průhybové čáry. V práci se budeme věnovat všem aspektům, které při použití této metody musíme znát. Druhá metoda je metoda konečných prvků, která je celosvětově využívána ke statickým výpočtům konstrukcí. Tuto metodu využívá většina komerčních programů. Velké pozitivum této metody je její univerzálnost a jednoduchost zapracování do výpočetních algoritmů. Práce navazuje na bakalářskou práci [14], ve které byly průhyby železobetonových nosníků stanovovány podle normy [1].

## 2. Mezní stavy použitelnosti

### 2.1. Chování železobetonového nosníku při zatěžování

„Železobetonový prvek se chová lineárně pružně, dokud není v jeho tažených vláknech překročena pevnost betonu v tahu – fáze 1. Beton je schopen přenést jen minimální tahová napětí, jeho tahová pevnost je zhruba 1/10 pevnosti v tlaku. Z poměrů modulu pružnosti betonu a betonářské výztuže (např. při C 20/25,  $E_c = 30\,000\text{ MPa}$ ,  $E_s = 200\,000\text{ MPa}$ ,  $\alpha_e = E_s / E_c = 6,7$ ) je patrné, že v případě betonu bez trhlin je výztuž nevyužita, napětí v ní je  $\alpha_e \cdot \sigma_c$  (pro napětí v betonu rovnému jeho tahové pevnosti  $f_{ctm} = 2,2\text{ MPa} \rightarrow \sigma_s = 6,7 \cdot 2,2 = 14,7\text{ MPa}$ ). Navrhovat železobetonové prvky za předpokladu jejich působení ve fázi 1 by tedy bylo krajně neekonomické a odpovídalo by teorii prostého betonu. [4]

Když je v taženém betonu překročena jeho pevnost v tahu, dochází ke vzniku trhliny. Pokud by tato trhlina nebyla zachycena výztuží, došlo by ke křehkému porušení prvku lomem. Beton v trhlíně nepůsobí, jeho funkci přebírá výztuž. Tato fáze železobetonového prvku je označena jako fáze 2.

S přibývajícím zatížením je pevnost betonu v tahu překračována v dalších a dalších průřezích, dochází k rozvoji trhlin. Roste napětí v betonu i betonářské výztuži. Tato fáze působení železobetonového prvku je označena jako fáze 3. Tato fáze reprezentuje běžný provoz železobetonové konstrukce, její běžné používání za běžných podmínek.“ [4]

Míru porušení průřezů trhlínami popisuje norma ČSN EN 1992-1-1 kap. 7.4.3 [1] rozdělovacím součinitelem  $\zeta$ .

„S dalším zvětšováním zatížení dochází k nárůstu napětí v betonu a betonářské výztuži. V betonu se opouští lineární část pracovního diagramu, beton začíná plastizovat. Rozdělení napětí po tlačeném průřezu se nemění, přestává být lineární. Obdobně se chová i betonářská výztuž. Pokud je dosaženo mezního přetvoření v alespoň jednom z materiálů, betonu v tlaku či výztuže v tahu, dochází ke kolapsu prvku. Tato fáze je označena jako fáze 4. Jakým způsobem ke kolapsu železobetonového prvku dojde, závisí na množství betonářské výztuže.

Jak již bylo uvedeno výše, běžné užívání železobetonové konstrukce odpovídá fázi 3. Tato fáze tedy odpovídá posudkům mezního stavu použitelnosti. Fáze 4 nechceme v reálném užívání konstrukce dosáhnout.“ [4]

„Mezní stavy použitelnosti se týkají funkce konstrukce nebo nosných prvků za běžného užívání, pohody osob a vzhledu stavby (šíření trhlin, průhyby). Rozlišují se vratné a nevratné mezní stavy použitelnosti.

V meznících stavech použitelnosti se ověřují deformace (vzhled konstrukce, pohoda uživatelů, provozuschopnost konstrukce včetně strojního a technického vybavení, stav povrchových úprav konstrukčních prvků nebo stav nenosných prvků), omezení napětí, omezení šířky trhlin, kmitání.

V závěru lze říci, že při mezních stavech použitelnosti se tedy posuzují vlastnosti konstrukce s přihlédnutím k provozu – použitelnost a trvanlivost. Prokazuje se, že konstrukce bude schopna po dobu své životnosti plnit svojí funkci za běžného užívání, při pravidelných prohlídkách a běžné údržbě. Po překročení kritérií mezních stavů použitelnosti v žádném případě nedochází ke kolapsu konstrukce, může dojít ke snížení její trvanlivosti a použitelnosti.“ [4]

## 2.2. Kombinace zatížení pro mezní stavy použitelnosti

„Kombinace zatížení, které se mají uvažovat v příslušných návrhových situacích, mají odpovídat ověřovaným požadavkům použitelnosti a podmínkám provozu. Kombinace zatížení pro mezní stavy použitelnosti jsou v normě ČSN EN 1990 [3] definovány následovně:

a) charakteristická kombinace se obvykle používá pro nevratné mezní stavy. V MSP se na ní ověřuje vznik trhlin;

b) častá kombinace je dána součinem  $\psi_1 \cdot Q_k$  a obvykle se používá pro vratné mezní stavy;

c) kvazistálá kombinace je dána součinem  $\psi_2 \cdot Q_k$  a obvykle se používá pro dlouhodobé účinky a vzhled konstrukce (průhyb).

Ve vzorcích jednotlivých kombinací zatížení se objevuje součinitel  $\psi$ . Základní hodnota proměnného zatížení je hodnota charakteristická  $Q_k$ . Součinitel  $\psi$  tedy určuje, jak je pravděpodobné, že dané zatížení bude působit plnou intenzitou – charakteristickou hodnotou  $Q_k$ , v kombinaci s dalšími vlivy. Pro výpočet deformací bude použita kvazistálá kombinace zatížení, která reprezentuje překročení charakteristické kombinace zatížení v 50 % referenční doby.“ [4]

Doporučené hodnoty součinitelů  $\psi_2$  pro pozemní stavby jsou uvedeny v normě ČSN EN 1990 [3] a v Příloze P3 této práce.

### 3. Výpočet deformací dle ČSN EN 1992-1-1

#### 3.1. Výpočet deformací dle ČSN EN 1992-1-1 kap. 7.4.3

Posouzení průhybu výpočtem dle normy ČSN EN 1992-1-1 kap. 7.4.3 zní [1]:

„(3) Prvky, u nichž se neočekává zatížení, které by vyvolalo v prvku napětí překračující v kterémkoliv průřezu pevnost betonu v tahu, lze považovat za prvky bez trhlin. Chování průřezů, u nichž se očekávají trhliny, ale nedojde k jejich plnému rozvoji, odpovídá mezilehlému stavu mezi stavem bez trhlin a stavem s plně rozvinutými trhlinami; pro prvky namáhané převážně ohybem je odpovídající předpoklad chování vyjádřen vztahem (3.1):

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I; \quad (3.1)$$

kde

$\alpha$  je uvažovaná přetvárná veličina, např. poměrné přetvoření, křivost nebo pootočení.  
(zjednodušeně lze za  $\alpha$  považovat i průhyb);

Úprava výrazu (3.1) pro stanovení ohybové tuhosti nosníku dle normy [1] je v *Příloze P2*.

$\alpha_I, \alpha_{II}$  jsou hodnoty parametru vypočteného pro stav bez trhlin a s plně rozvinutými trhlinami;

$\zeta$  rozdělovací součinitel (kterým se umožňuje zohlednit tahové zpevnění průřezu) daný vztahem (3.2):

$$\zeta = 1 - \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2; \quad (3.2)$$

kde

$\zeta = 0$  pro průřezy bez trhlin;

$\beta$  je součinitel, kterým se zohledňuje vliv doby trvání nebo opakování zatížení na průměrnou hodnotu poměrného přetvoření;

= 1,0 při jednorázovém krátkodobě působícím zatížení;

= 0,5 při dlouhodobě působícím nebo mnohonásobně opakovaném zatížení;

$\sigma_s$  je napětí v tahové výztuži vypočtené pro průřez s trhlinami;

$\sigma_{sr}$  je napětí v tahové výztuži vypočtené pro průřez s trhlinami při zatížení, způsobujícím vznik prvních trhlin.



Poměr  $\left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)$  lze při prostém ohybu nahradit poměrem  $\left(\frac{M_{cr}}{M}\right)$  při prostém ohybu, resp. poměrem  $\left(\frac{N_{cr}}{N}\right)$  při prostém tahu, kde  $M_{cr}$  je moment na mezi vzniku trhlin a  $N_{cr}$  je normálová síla na mezi vzniku trhlin.

(5) Při dlouhodobých zatíženích vyvolávajících dotvarování lze celkovou deformaci včetně dotvarování stanovit použitím účinného modulu pružnosti betonu dle vztahu (3.3):

$$E_{c,ef} = \frac{E_{cm}}{(1 + \varphi(t, t_0))}; \quad (3.3)$$

kde

$\varphi(t, t_0)$  je součinitel, dotvarování pro příslušné zatížení a časový interval.

(7) Nejpřesnější metoda stanovení průhybů s použitím postupu podle výše uvedeného odstavce (3) spočívá ve výpočtu křivosti v několika průřezech prvku a následném výpočtu průhybu numerickou integrací. Ve většině případů je vhodné vypočítat průhyby dvakrát, poprvé za předpokladu, že prvek není oslaben trhlinami, podruhé pro stav plně rozvinutých trhlin a pak interpolovat užitím vztahu (3.1).“

### 3.2. Výpočet součinitele dotvarování dle ČSN EN 1992-1-1 Příloha B.1

Základní vztahy pro stanovení součinitele dotvarování jsou uvedeny v normě [1], Příloze

B.1. Součinitel dotvarování  $\varphi_{(t,t_0)}$ , lze vypočítat z následujících vztahů:

$$\varphi_{(t,t_0)} = \varphi_0 \cdot \beta_{c(t,t_0)}; \quad (3.4)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta_{(f_{cm})} \cdot \beta_{(t_0)}; \quad (3.5)$$

kde

$\varphi_0$  je základní součinitel dotvarování;

$\varphi_{RH}$  je součinitel, vystihující vliv relativní vlhkosti za základní součinitel dotvarování;

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \text{ pro } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa}; \quad (3.6a)$$

$$\varphi_{RH} = \left[ 1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \text{ pro } f_{cm} > 35 \text{ MPa}; \quad (3.6b)$$

$RH$  je relativní vlhkost okolního prostředí v %;

$\beta_{(f_{cm})}$  je součinitel, vystihující vliv pevnosti betonu na základní součinitel dotvarování:

$$\beta_{(f_{cm})} = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}}; \quad (3.7)$$

$f_{cm}$  je průměrná hodnota pevnosti betonu v tlaku v MPa ve stáří 28 dní;

$\beta_{(t_0)}$  je součinitel, vystihující vliv stáří betonu v okamžiku vnesení zatížení na základní součinitel dotvarování:

$$\beta_{(t_0)} = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,2})}; \quad (3.8)$$

$h_0$  je náhradní rozměr prvku v mm:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} = \frac{2bh}{2 \cdot (b + h)}; \quad (3.9)$$

$A_c$  je plocha průřezu;

$u$  je obvod prvku vystavený okolnímu prostředí;

$\beta_{c(t,t_0)}$  je součinitel časového průběhu dotvarování po zatížení:

$$\beta_{c(t,t_0)} = \left[ \frac{t - t_0}{\beta_H + t - t_0} \right]^{0,3}; \quad (3.10)$$

$t$  je stáří betonu ve dnech v uvažovaném okamžiku;

$t_0$  je stáří betonu ve dnech v okamžiku vnesení zatížení;

$t - t_0$  je neupravená doba trvání zatížení ve dnech;

$\beta_H$  je součinitel závislý na relativní vlhkosti  $RH$  v % a na náhradním rozměru prvku  $h_0$  v mm:

$$\beta_H = 1,5 \cdot [1 + (0,012 \cdot RH)^{18}] \cdot h_0 + 250 \leq 1500 \text{ pro } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa}; \quad (3.11a)$$

$$\beta_H = 1,5 \cdot [1 + (0,012 \cdot RH)^{18}] h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 \text{ pro } f_{cm} > 35 \text{ MPa}; \quad (3.11b)$$

$\alpha_{1,2,3}$  jsou součinitele vlivu pevnosti betonu:

$$\alpha_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7}; \quad (3.12a)$$

$$\alpha_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2}; \quad (3.12b)$$

$$\alpha_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5}. \quad (3.12c)$$

Vliv druhu cementu na součinitel dotvarování betonu lze uvažovat úpravou stáří betonu v okamžiku vnesení zatížení  $t_0$  ve vztahu (3.8) podle následujícího vztahu:

$$t_0 = t_{0,T} \cdot \left( \frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0,5; \quad (3.13)$$

kde

$t_{0,T}$  je stáří betonu ve dnech v okamžiku vnesení zatížení, upravené s přihlédnutím k vlivu teploty podle vztahu (3.14);

$\alpha$  je mocnitél vystihující vliv druhu cementu:

= -1 pro cement třídy S;

= 0 pro cement třídy N;

= 1 pro cement třídy R.

Vliv zvýšených nebo snížených teplot v rozsahu 0 až 80 °C na zralost betonu lze uvažovat úpravou stáří betonu podle vztahu:

$$t_T = e^{-(4000/[273+T_{(\Delta t_i)}]-13,65)} \cdot \Delta t_i; \quad (3.14)$$

$t_T$  je stáří betonu upravené s přihlédnutím k vlivu teploty, kterým se nahrazuje  $t_0$ ;

$T_{(\Delta t_i)}$  je teplota ve °C;

$\Delta t_i$  je počet dní v nichž převládá teplota  $T_{(\Delta t_i)}$ .

Výše uvedené hodnoty  $\varphi_{(t,t_0)}$  se vztahují k tečnovému modulu pružnosti  $E_c$ . [1]

Tento postup výpočtu součinitele dotvarování platí pouze pro lineární dotvarování, dle publikace [2] lze uvažovat lineární dotvarování, pokud na počátku zatěžování konstrukce je  $\sigma_c \leq 0,45 f_{ck(t_0)}$ . Pokud pevnost betonu stáří ( $t_0$ ) v okamžiku jeho začátku zatěžování je  $\sigma_c > 0,45 f_{ck(t_0)}$ , je třeba uvažovat nelineární dotvarování. [2]

Součinitel dotvarování  $\varphi_{(t,t_0)}$  následně použijeme ve výpočtu efektivního modulu pružnosti  $E_{c,ef}$  (3.15) pro dlouhodobě působící zatížení: [2]

$$E_{c,ef} = \frac{E_c}{(1 + \varphi_{(t,t_0)})}; \quad (3.15)$$

### 3.3. Kombinace zatížení pro výpočet deformací dle ČSN EN 1990

Pro výpočet deformací na konstrukci uvažujeme kvazistálou kombinaci zatížení. Kvazistálá hodnota vyjádřená součinem  $\psi_2 \cdot Q_k$  se používá pro ověřování vratných mezních stavů použitelnosti. Kvazistálé hodnoty se používají také při výpočtu dlouhodobých účinků a vzhledu konstrukce. [3]

Kvazistálá kombinace:

$$E_d = E\{G_{k,j}; P; \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i}\} \quad j \geq 1; i \geq 1; \quad (3.16)$$

v níž kombinaci zatížení v závorkách  $\{ \}$  (nazývanou kvazistálá kombinace) lze vyjádřit výrazem: [3]

$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} + P + \sum_{i \geq 1} \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \quad (3.17)$$

Hodnota kvazistálé kombinace zatížení v našem případě pro pozemní stavby bude zapsána následovně:

$$F_{E,qp} = G_k + \psi_2 \cdot Q_k; \quad (3.18)$$

$$f_{E,qp} = g_k + \psi_2 \cdot q_k; \quad (3.19)$$

kde

$F_{E,qp}$  je hodnota kvazistálé kombinace pro osamělé břemeno;

$G_k/Q_k$  je hodnota char. stálého/proměnného zatížení od osamělého břemene;

$\psi_2$  je součinitel zohledňující kategorii konstrukce dle provozního zatížení;

$f_{E,qp}$  je hodnota kvazistálé kombinace pro rovnoměrné spojitě zatížení;

$g_k/q_k$  je hodnota char. stálého/proměnného zatížení od rovnoměrného spojitěho zatížení.

Maximální hodnotu ohybového momentu od kvazistálé kombinace zatížení bude označena jako  $M_{E,qp}$ . Tato hodnota je závislá na typu uložení nosníku.

### 3.4. Výpočet geometrických a materiálových charakteristik průřezu

Tento postup byl převzat z publikace [2].

Pomocí pracovního součinitele  $\alpha$  převedeme plochu výztuže na odpovídající plochu betonu:

$$\alpha_{c,ef} = \frac{E_s}{E_{c,ef}}. \quad (3.20)$$

V dalším kroku provedeme výpočet geometrických charakteristik průřezu bez trhliny, pro tzv. ideální průřez:

- plocha ideálního průřezu:

$$A_{I,ef} = A_c + \alpha_{c,ef} \cdot (A_{s1} + A_{s2}); \quad (3.21)$$

- vzdálenost těžiště ideálního průřezu k jeho těžišti:

$$a_{I,ef} = \frac{A_c \cdot a_c + \alpha_{c,ef} \cdot (A_{s1} \cdot d + A_{s2} \cdot d_2)}{A_{I,ef}}; \quad (3.22)$$

kde

$a_c$  je těžiště obdélníkového průřezu, tj. polovina výšky průřezu;

- moment setrvačnosti ideálního průřezu k jeho těžišti:

$$I_{I,ef} = I_c + A_c(a_{I,ef} - a_c)^2 + \alpha_{e,ef} \cdot [A_{s1}(d - a_{I,ef})^2 + A_{s2}(a_{I,ef} - d_2)^2]; \quad (3.23)$$

Materiálové vlastnosti ideálního průřezu:

- ohybová tuhost:

$$E_{c,ef} \cdot I_{I,ef}; \quad (3.24)$$

- ohybová poddajnost:

$$C_{I,ef} = \frac{1}{E_{c,ef} \cdot I_{I,ef}}; \quad (3.25)$$

Posouzení vzniku trhlin:

Výpočet průřezu neporušený trhlínami lze uvažovat pouze, pokud ohybový moment, který na nosník působí, nepřekročí limitní hodnotu kritického momentu  $M_{cr,ef}$  (3.26). Kritický moment je hodnota momentu na mezi vzniku trhlin v průřezu a je závislá na pevnosti

betonu v tahu a geometrických charakteristikách tzv. ideálního průřezu. V případě, že ohybový moment od kvazi-stálé kombinace  $M_{E,qp}$  je větší než kritický moment, dojde k porušení a vzniku trhlin v průřezu.

$$M_{cr,ef} = f_{ctm} \frac{I_{l,ef}}{h - a_{l,ef}} ; \quad (3.26)$$

Posouzení, zda v průřezu dojde k porušení:

$$M_{cr,ef} \leq M_{E,qp}. \quad (3.27)$$

V případě, že podmínka (3.27) nevyhoví, v průřezu nedojde ke vzniku trhlin a ze vztahu (3.28) dopočítáme průhyb od kvazi-stálého zatížení:

$$w_{g,lt} = k \cdot \left( \frac{1}{r} \right)_{qp,ef} \cdot l^2 ; \quad (3.28)$$

kde

$k$  je součinitel zohledňující typ zatížení a statické schéma uložení nosníku;

$\left( \frac{1}{r} \right)_{qp,ef}$  je křivost od kvazi-stálého zatížení, spočítaná ze vztahu (3.29);

$$\left( \frac{1}{r} \right)_{qp,ef} = M_{E,qp} \cdot C_{l,ef}. \quad (3.29)$$

V případě, že podmínka (3.27) vyhoví, dojde k porušení prvku trhlinami, přistoupíme ke druhé části, a to výpočtu geometrických a materiálových charakteristik průřezu porušeného trhlinami.

Geometrické charakteristiky pro průřez s trhlinami:

- vzdálenost neutrální osy od tlačného okraje:

$$x_{cr,ef} = \frac{\alpha_{e,ef}}{b} \cdot A_s \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2b}{\alpha_{e,ef}} \cdot \frac{A_{s1} \cdot d + A_{s2} \cdot d_2}{(A_{s1} + A_{s2})^2}} \right]; \quad (3.30)$$

(Pozn.: Odvození tohoto vzorce lze dohledat v Příloze P1.)

- moment setrvačnosti:

$$I_{II,ef} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot x_{cr,ef}^3 + \alpha_{e,ef} \cdot [A_{s1} \cdot (d - x_{cr,ef})^2 + A_{s2} \cdot (x_{cr,ef} - d_2)^2]. \quad (3.31)$$

Materiálové vlastnosti průřezu s trhlinami:

- ohybová tuhost:

$$E_{c,ef} \cdot I_{II,ef}; \quad (3.32)$$

- ohybová poddajnost:

$$C_{II,ef} = \frac{1}{E_{c,ef} \cdot I_{II,ef}}. \quad (3.33)$$

Pomocí součinitele  $\zeta_{qp,ef}$  určíme hodnotu udávající míru spolupůsobení betonu mezi trhlinami

$$\zeta_{qp,ef} = 1 - \beta \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2; \quad (3.34)$$

kde

$\beta$  je součinitel, který zohledňuje vliv doby trvání nebo opakování zatížení na průměrnou hodnotu poměrného přetvoření;

= 1,0 při jednorázovém krátkodobě působícím zatížení;

= 0,5 při dlouhodobě působícím nebo mnohonásobně opakovaném zatížení;

$\sigma_s$  je napětí v tahové výztuži vypočtené pro průřez s trhlinami za předpokladu, že beton v tahu nepůsobí;

$\sigma_{sr}$  je napětí v tahové výztuži vypočtené pro průřez s trhlinami při uvažovaném zatížení, při kterém vzniknou trhliny.

Poměr  $\left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)$  lze při prostém ohybu nahradit poměrem  $\left( \frac{M_{cr,ef}}{M_{E,qp}} \right)$ , kde  $M_{E,qp}$  je moment od kvazistálé kombinace.

V našem případě uvažujeme nosník zatížený dlouhodobě, pouze prostým ohybem, a proto vztah (3.34) upravíme na:

$$\zeta_{qp,ef} = 1 - 0,5 \cdot \left( \frac{M_{cr,ef}}{M_{E,qp}} \right)^2 \quad (3.35)$$

Výslednou křivost nosníku od kvazistálé kombinace spočteme jako součet křivostí pro průřez bez trhlin a průřez porušený trhlinami v poměru součinitele  $\zeta_{qp,ef}$  :

$$\left( \frac{1}{r} \right)_{qp,ef} = M_{E,qp} \cdot [(1 - \zeta_{qp,ef}) \cdot C_{I,ef} + \zeta_{qp,ef} \cdot C_{II,ef}] \quad (3.36)$$

Celkový průhyb od kvazi-stálého zatížení se stanoví dle následujícího vztahu:

$$w_{g,lt} = k \cdot \left( \frac{1}{r} \right)_{qp,ef} \cdot l^2 ; \quad (3.37)$$

kde

$k$  je součinitel zohledňující typ zatížení působící na nosník a statické schéma uložení nosníku, např.:

= 1/8 pro konstantní průběh ohybového momentu způsobený osamocenými momenty na koncích nosníku, prostě uložený nosník;

= 5/48 pro kvadratický průběh ohybového momentu způsobený rovnoměrným zatížením, prostě uložený nosník.

### 3.5. Posouzení dlouhodobého průhybu dle ČSN EN 1992-1-1

Poslední krok při výpočtu průhybu je posouzení, zda průhyb od zatížení včetně dotvarování betonu nepřekročí limitní průhyb stanovený v normě ČSN EN 1992-1-1 [1].

Norma ČSN EN 1992-1-1 [1] stanovuje, že obecná použitelnost a vzhled konstrukce mohou být ohroženy, pokud vypočtený průhyb nosníku, desky nebo konzoly při kvazi-stálém zatížení překročí hodnotu 1/250 rozpětí. Dále stanovuje, že průhyby, které mohou poškodit přilehlé části konstrukce, mají být omezeny. Obvykle mezní hodnota průhybu od kvazi-stálé kombinace zatížení je 1/500, ale lze uvažovat i jiná omezení.



Posouzení průhybu:

$$w_{lt} \leq w_{lim,lt} ; \quad (3.38)$$

kde

$w_{lt}$  je dlouhodobý průhyb od zatížení včetně dotvarování betonu;

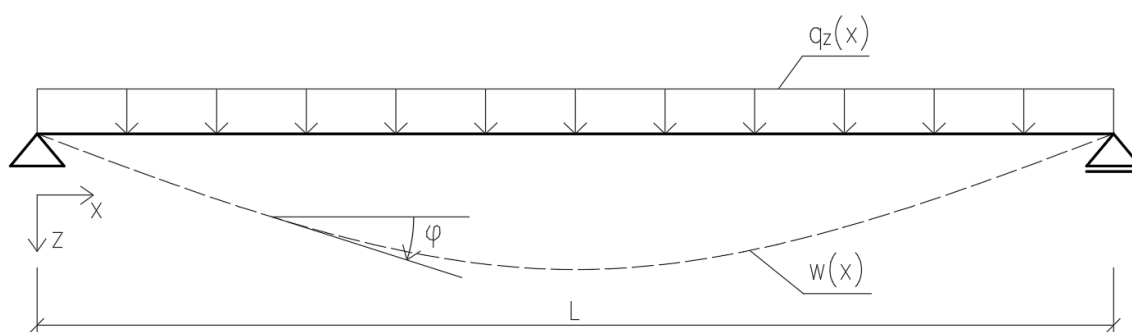
$w_{lim,lt}$  je limitní průhyb stanovený v normě nebo požadavkem investora;

=  $1/250 \cdot l$  pro obecnou použitelnost a vzhled konstrukce dle ČSN EN 1992-1-1 [1].

## 4. Diferenciální rovnice průhybové čáry

### 4.1. Odvození diferenciální rovnice průhybové čáry

Uvažujme rovinný staticky určitý nosník s libovolným svislým zatížením  $q_z(x)$  v rovině  $xz$ . Dané zatížení vyvolává pružnou deformaci nosníku, za níž se přímá osa nosníku přetvoří v rovinnou křivku, takzvanou ohybovou čáru  $w(x)$ , znázorněnou čárkovaně na obrázku Obr.4.1. Jednotlivé svislé pořadnice ohybové čáry  $w(x)$  udávají průhyb nosníku v daném místě a jsou kladné, směřují-li dolů. [7]



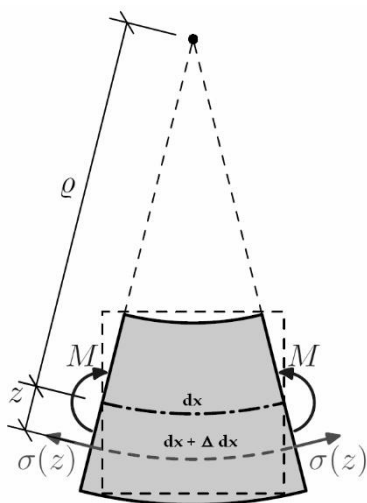
Obr.4.1. Ohybová čára rovinného nosníku

Ohybová čára  $w(x) = w$  rovinného nosníku je velmi plochá a podle teorie malých deformací lze pro ni psát:

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{dw}{dx} = w' ; \quad (4.1)$$

kdy šikmou čarou je vyznačena derivace  $w$  podle  $x$ .

Stanovení křivosti průřezu [7]:



Obr.4.2. Přetvoření prvku nosníku

Ohybový moment vzájemně pootočí koncové průřezy prvku  $dx$  o úhel  $\Delta\varphi = d\varphi$ . Dle obrázku Obr.4.2. platí vztahy: [7]

$$dx = \rho \cdot d\varphi ; \quad (4.2)$$

$$dx' = (\rho + z) \cdot d\varphi ; \quad (4.3)$$

$$\Delta dx = dx' - dx = z \cdot d\varphi ; \quad (4.4)$$

z nichž plynou výrazy pro poloměr křivosti prvku: [7]

$$\rho = \frac{dx}{d\varphi} \quad (4.5)$$

a poměrné přetvoření obecného podélného vlákna: [7]

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z}{\rho}; \quad (4.6)$$

ležícího ve vzdálenosti  $z$  od neutrální vrstvy s  $\varepsilon_x = 0$ .

Pro normálové napětí  $\sigma_x$  lze podle Hookova zákona napsat: [7]

$$\sigma_x = \varepsilon_x \cdot E = \frac{E}{\rho} \cdot z; \quad (4.7)$$

a pomocí něho pak vyjádřit ohybový moment průřezu: [7]

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \, dA = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 \, dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_y; \quad (4.8)$$

kde

$I_y$  je moment setrvačnosti průřezu nosníku k jeho těžištní ose.

Po dosazení vztahů (4.2) a (4.8) získáváme: [7]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_y}{EI_y}. \quad (4.9)$$

Pro křivost rovinné čáry je znám výraz: [8]

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}}; \quad (4.10)$$

kde  $\rho$  je poloměr křivosti v rovině  $xz$ .

Dosazením rovnic (4.9) a (4.10) získáváme rovnici:

$$\frac{M_y}{EI_y} = - \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}}; \quad (4.11)$$

Tato rovnice se nazývá přesnou diferenciální rovnicí ohybové čáry nosníku. Tato nelineární rovnice se řeší poměrně složitě. Znaménko mínus je zvoleno z důvodu, že křivost při tažených dolních vláknech je záporná. [8]

V praktických úlohách jsou průhyby malé, tudíž lze přesnou rovnici nahradit rovnicí přibližnou. Člen ve jmenovateli lze nahradit: [8]

$$1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 1 + (\tan \varphi)^2 . \quad (4.12)$$

Při malých hodnotách průhybu se ukazuje, že úhel pootočení je menší než  $1^\circ$ . Tangenta malého úhlu  $1^\circ$  je přibližně rovna hodnotě 0,017. V druhé mocnině je rovna hodnotě 0,003, což je velmi malá hodnota ve srovnání s jedničkou, ke které tangentu ve druhé mocnině přičítáme. Tedy bez velké chyby můžeme zapsat: [8]

$$\frac{M_y}{EI_y} = - \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{[1+(0^+)^2]^{\frac{2}{3}}} = - \frac{d^2w}{dx^2} = -w'' ; \quad (4.13)$$

$$w'' = - \frac{M_y}{EI_y} . \quad (4.14)$$

Kde výraz (4.14) představuje diferenciální rovnici průhybové čáry. Druhá derivace průhybu je přímo úměrná hodnotě ohybovému momentu  $M_y$  v daném místě a nepřímo úměrná ohybové tuhosti  $EI_y$  v daném místě. Integrací výrazu (4.14) dostaneme postupně následující výrazy:

$$w' = - \int \frac{M_y}{EI_y} dx + C_1 ; \quad (4.15)$$

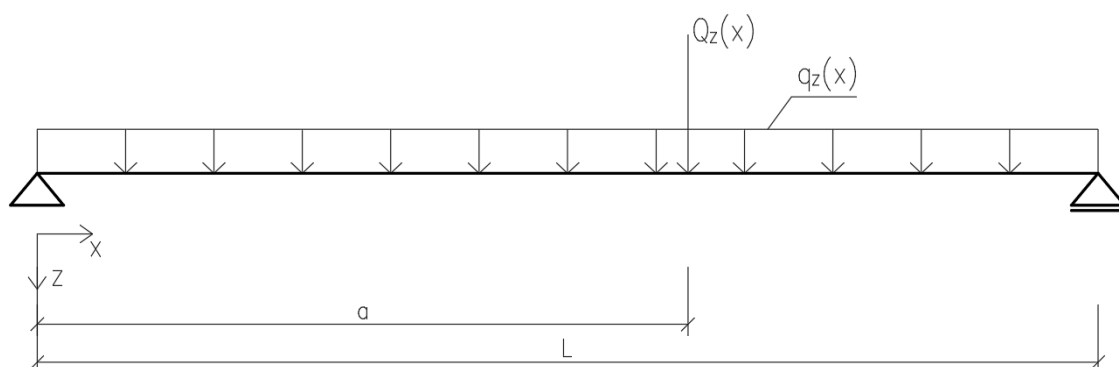
$$w = - \int \left[ \int \frac{M_y}{EI_y} dx \right] dx + C_1 \cdot x + C_2 . \quad (4.16)$$

Integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme z okrajových podmínek, které vyplývají ze způsobu podepření prutu. Integrace diferenciální rovnice není v inženýrské praxi pro svou náročnost příliš populární. Se dvěma integračními konstantami se setkáme jen ojediněle. Nespojité průběh zatížení zpravidla vyžaduje rozdělit osu po délce na  $n$  intervalů a v každém z nich popsat ohybovou čáru samostatnou funkcí. Ke každé funkci přísluší po dvou integračních konstantách, takže na prutu máme celkem  $2 \cdot n$  integračních konstant. Je-li podepření prutu staticky určité, sestavíme první dvě okrajové podmínky v koncových průřezech prutu. Zbývajících  $2 \cdot (n - 1)$  integračních konstant zpravidla vyjadřujeme jako lineární kombinace dvou libovolně zvolených konstant z požadavku spojitosti průhybů a prvních derivací (pootočení průřezů) na rozhraní mezi intervaly. [6]

U konstrukcí  $s$ -krát staticky neurčitých počet neznámých roste. Kromě  $2 \cdot n$  integračních konstant přibude i  $s$  staticky neurčitých „sil“. Celkový počet neznámých je tedy  $(2 \cdot n + s)$ . Pro jejich určení máme k dispozici  $(2 + s)$  kinematických podmínek, což jsou 2 okrajové podmínky a  $s$  přetvárných podmínek, dále  $2 \cdot (n - 1)$  podmínek spojitosti mezi intervaly. Celkem tedy  $(2 \cdot n + s)$  rovnic. [6]

#### 4.2. Clebschova metoda

Při složitějším (nespojitém) zatížení nelze průběh ohybových momentů vyjádřit jedinou funkcí (výrazem). Pak je třeba rozdělit celý vyšetřovaný obor na jednotlivé intervaly a v každém z nich integrovat diferenciální rovnici zvlášť, viz obrázek Obr.4.3. Je-li počet intervalů  $n$ , vyvstane při integraci celkem  $2 \cdot n$  integračních konstant. Pro ruční výpočet nosníků s konstantním průřezem se jeví tento postup jako nevhodný. Proto je vhodné použít metodu, která integrační postup upravuje tak, abychom pracovali pouze se dvěma integračními konstantami. Tuto metodu navrhl Clebsch. [8]



Obr.4.3. Nosník s nespojitým zatížením

Základní myšlenka Clebschovy metody vychází z předpokladu, že řešení lze provést takovým způsobem, aby integrační konstanty byly stejné pro všechny části nosníků. Toto platí pouze tehdy, kdy se v rovnicích momentů, pootočení a průhybů při přechodu od předcházejícího intervalu k následujícímu intervalu opakují všechny členy z předcházejících intervalů. [8]

Pro splnění uvedených podmínek při sestavování diferenciálních rovnic ohybové čáry a při jejich integraci je nutno dodržet následující pravidla:

- počátek souřadnic volíme v krajním například levém bodě zkoumaného nosníku a platí pro všechny intervaly;
- rovnici  $M_y(x)$  sestavujeme od všech působících sil nalevo od sledovaného průřezu;

- integrace se provádí bez odstranění závorek. [8]

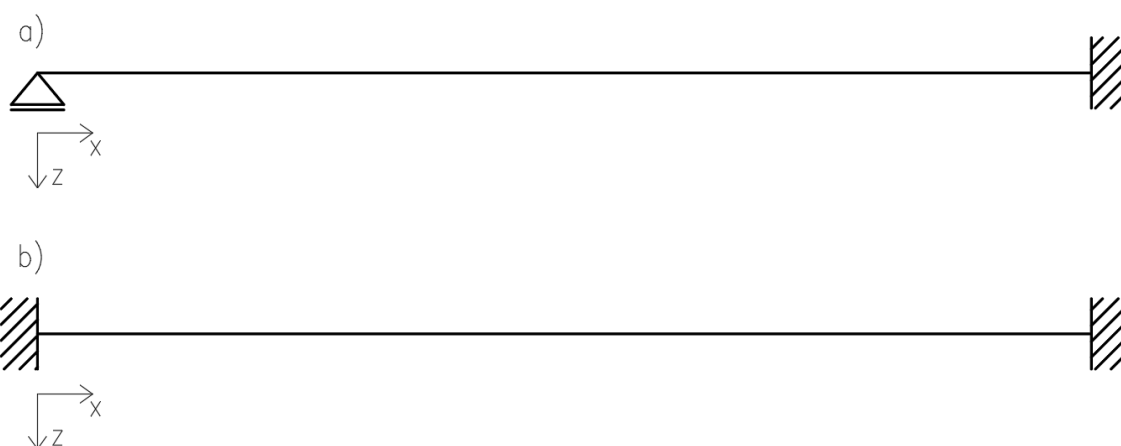
Složitější úlohou je určení přetvoření nosníků s proměnným průřezem, neboť moment setrvačnosti je funkcí souřadnice  $x$  a integrace je složitější. V tomto případě je nutno rozdělit délku prutu na řadu intervalů s konstantním průřezem a na rozhraních jednotlivých intervalů použít podmínky spojitosti průhybů a pootočení.

### 4.3. Výpočet neznámých metodou jednotkových sil

Pokud budeme uvažovat nosník staticky neurčitý, je nutné si předem spočítat reakce v podporách. Pro výpočet neznámých použijeme zjednodušený Maxwellův-Mohrův vztah [9]. Princip této metody je založen na uvolnění přebytečných vazeb, proto je nutné určit kolikrát je konstrukce staticky neurčitá. V našem případě budeme uvažovat nosník uložený (Obr.4.4.):

a) kloub – vetknutí;

b) vetknutí – vetknutí.



Obr.4.4. Schéma uložení staticky neurčitých nosníků

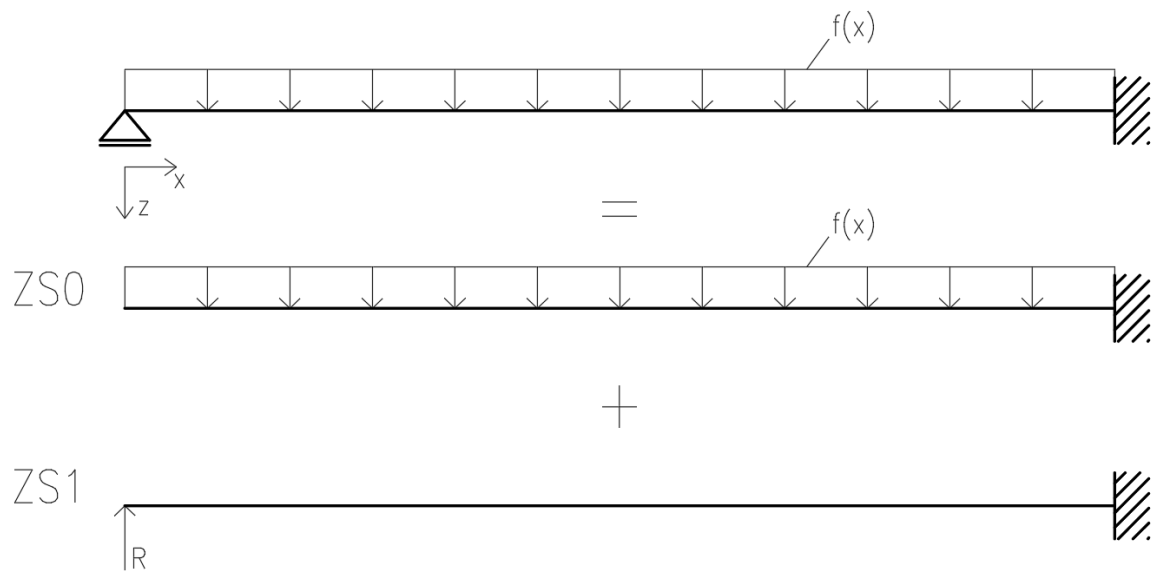
Stupeň statické neurčitosti:

a) kloub – vetknutí  $n_s = (1 + 3) - 3 = 1 \rightarrow$  konstrukce 1x staticky neurčitá

b) vetknutí – vetknutí  $n_s = (3 + 3) - 3 = 3 \rightarrow$  konstrukce 3x staticky neurčitá

#### 4.3.1. Stanovení svislé reakce v levé podpoře pro nosník typu kloub – vetknutí

Konstrukce je 1x staticky neurčitá, tudíž budeme mít jednu neznámou. Jako neznámou zvolíme hodnotu svislé reakce v levé podpoře. Zatížení na nosník budeme uvažovat v prvním případě jako konstantní spojitě  $f(x)$ .



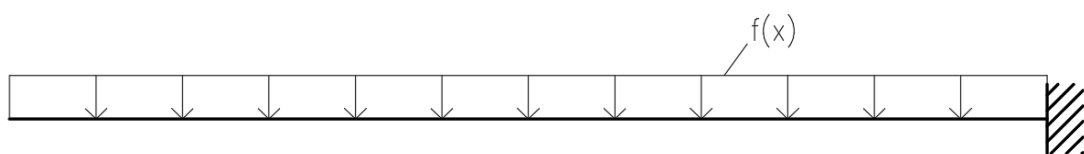
Obr.4.5. Nosník 1x staticky neurčitý zatížen spojitým rovnoměrným zatížením

Na obrázku Obr.4.5. vidíme uvolnění jedné nadbytečné vazby, tudíž nosník již není konstrukcí staticky neurčitou ale konstrukcí staticky určitou. Vzniklé dva zatěžovací stavy ZS0 a ZS1 dohromady tvoří původní stav. Z deformační podmínky víme, a tudíž můžeme zapsat:

$$\delta_{ZS0} + \delta_{ZS1} \cdot R = 0 . \quad (4.17)$$

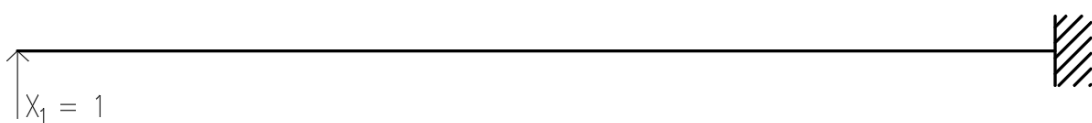
ZS0 - Výpočet deformační podmínky  $\delta_{ZS0}$  :

Skutečné zatížení konstrukce:



Obr.4.6. Skutečné zatížení

Zatížení virtuální silou:



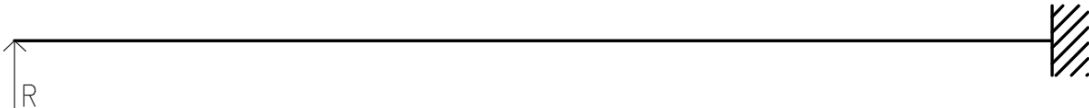
Obr.4.7. Virtuální zatížení

Výpočet deformační podmínky na levém konci nosníku – konzoly ZS0:

$$\delta_{ZS0} = \int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx = \int_0^L \frac{-\frac{x^2}{2} \cdot f \cdot x}{EI} dx = -\frac{f}{2EI} \int_0^L x^3 dx = -\frac{fL^4}{8EI}. \quad (4.18)$$

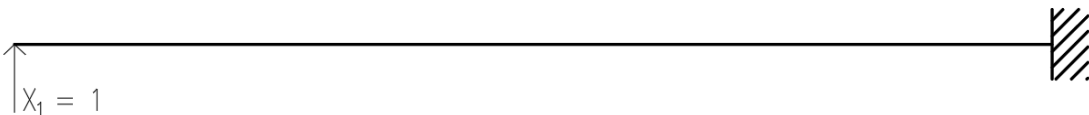
ZS1 - Výpočet deformační podmínky  $\delta_{ZS1}$ :

Skutečné zatížení konstrukce:



Obr.4.8. Skutečné zatížení

Zatížení virtuální silou:



Obr.4.9. Virtuální zatížení

Výpočet deformační podmínky na levém konci nosníku – konzoly ZS1:

$$\delta_{ZS1} = \int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx = \int_0^L \frac{x^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{L^3}{3EI}. \quad (4.19)$$

Výpočet svislé reakce R v levé podpoře pro rovnoměrné spojitě zatížení:

Dosadíme vztahy (4.18) a (4.19) do (4.17):

$$\delta_{ZS0} + \delta_{ZS1} \cdot R = 0; \quad (4.20)$$

$$-\frac{fL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} \cdot R = 0; \quad (4.21)$$

$$R = \frac{\frac{fL^4}{8EI}}{\frac{L^3}{3EI}} = \frac{3fL}{8}; \quad (4.22)$$

$$R_f = \frac{3fL}{8}. \quad (4.23)$$



Zatěžovací stav 0 představuje staticky určitý nosník zatížený daným zatížením, zatěžovací stav 1 představuje staticky určitý nosník, zatížený silovým účinkem odstraněné vazby. Využitím principu superpozice zjištěné deformace následně můžeme sečíst a zjistit z nich reakci  $R_f$  v „odstraněné vazbě“. Správnost výsledku byla kontrolována s tabulkou pro zjednodušenou deformační metodu, kterou lze dohledat v příloze P.4. Obdobným způsobem lze stanovit reakce pro nosník uložen jako kloub-vetknutí zatížen osamělým břemenem či hodnoty neznámých reakcí pro nosník uložen jako vetknutí-vetknutí a zatížen rovnoměrným spojitým zatížením, nebo zatížen osamělým břemenem.

#### 4.4. Výpočet deformací s respektováním ohybových tuhostí po délce nosníku

Postup výpočtu, který bude prezentován v této kapitole, respektuje proměnnou ohybovou tuhost nosníku, dle míry potrhání betonu v jednotlivých vyšetřovaných průřezech. Jak bylo řečeno ve třetí kapitole, normový výpočet uvažuje ohybovou tuhost nosníku po celé délce konstantní. Tato hodnota se získá lineární interpolací mezi hodnotami ohybové tuhosti pro průřez neporušený trhlinami a pro průřez plně porušený trhlinami. Míru porušení a hodnotu ohybové tuhosti určujeme pomocí rozdělovacího součinitele  $\zeta$ . Z tohoto důvodu lze očekávat, že normový výpočet bude vykazovat větší průhyby než výpočet, který respektuje ohybovou tuhost po délce nosníku, jelikož normový výpočet zanedbává výskyt nepotrhaných, či méně potrhaných částí konstrukce.

Pro výpočet průhybu s respektováním proměnné ohybové tuhosti použijeme diferenciální rovnici druhého řádu známou jako Bernoulliovu rovnici průhybové čáry (4.24):

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (4.24)$$

Tuto diferenciální rovnici můžeme dvakrát integrovat a získáme následující tvary:

$$\frac{dw}{dx} = -\int \frac{M(x)}{EI} dx + C_1; \quad (4.25)$$

$$w = -\int \left( \int \frac{M(x)}{EI} dx \right) dx + C_1 \cdot x + C_2. \quad (4.26)$$

kde

$C_{1,2}$  jsou integrační konstanty spočítané z okrajových podmínek;

$EI$  je ohybová tuhost nosníku;

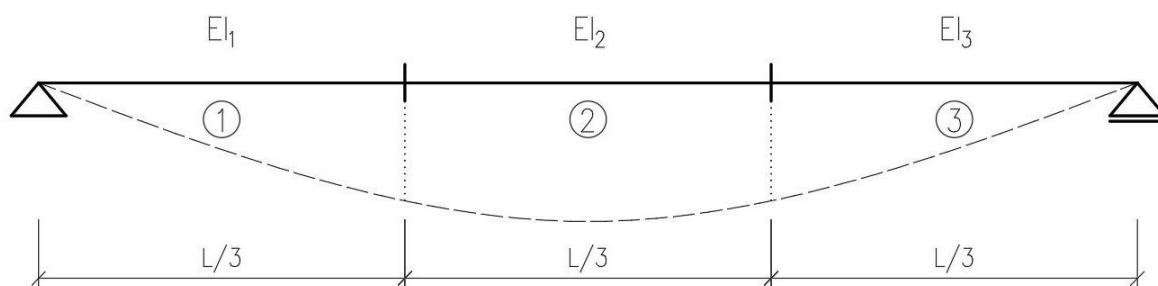
$M_{(x)}$  je funkce ohybového momentu;

$$M_{(x)} = \frac{f \cdot l}{2} \cdot x - \frac{f}{2} \cdot x^2.$$

Pro výpočet ohybové čáry nosník rozdělíme na několik integračních intervalů. Pro  $n$  integračních intervalů dostaneme celkem  $2 \cdot n$  integračních konstant. Pro každý interval získáme dvě integrační konstanty. Integrační konstanty dopočítáváme pomocí okrajových podmínek, tj. podmínky které simulují uložení nosníku nebo z podmínek spojitosti ohybové čáry. V našem případě uvažujeme staticky určitý prostý nosník. V místě kloubové podpory nebo posuvné podpory je nulový průhyb. Na rozhraní mezi integračními intervaly je ohybová čára spojitá, a tudíž je zde stejná hodnota průhybu a natočení. U symetrických a symetricky zatížených nosníků lze řešit pouze polovinu nosníku a v ose symetrie využít podmínku nulového natočení ohybové čáry.

#### 4.4.1. Stanovení průhybové čáry pro 3 integrační intervaly

Význam použitých symbolů je vysvětlen v kapitole *Popis použitých symbolů*.



Obr.4.10. Schéma prostého nosníku, který je rozdělen na 3 integrační intervaly

Pro výpočet integračních konstant na prostém nosníku budeme potřebovat následující informace:

- Rovnice průhybové čáry:  $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_{(x)}}{EI}$  ;
- Rovnice ohybového momentu:  $M_{(x)} = \frac{f \cdot l}{2} \cdot x - \frac{f}{2} \cdot x^2$  ;

- 1. integrace  $M(x) : \int M(x) = \frac{f \cdot l}{4} \cdot x^2 - \frac{f}{6} \cdot x^3 ; \quad \dots$  bez integračních konstant
- 2. integrace  $M(x) : \iint M(x) = \frac{f \cdot l}{12} \cdot x^3 - \frac{f}{24} \cdot x^4 . \quad \dots$  bez integračních konstant

(Pozn.: Význam použitých symbolů je vysvětlen v kapitole *Popis použitých symbolů*.)

Okrajové podmínky pro prostý nosník:

- *pro*  $x = 0, w = 0$  ... průhyb v kloubové podpoře = 0;
- *pro*  $x = l, w = 0$  ... průhyb pro posuvný kloub = 0;
- $w_i = w_{i+1}$  ... průhyb na rozhraní integračních intervalů je stejný;
- $w_i' = w_{i+1}'$  ... natočení na rozhraní integračních intervalů je stejné.

V následující tabulce jsou rovnice natočení a průhybů pro všechny integrační intervaly:

Tab.4.1 – Rovnice natočení a průhybů na prostém nosníku pro 3 int. intervaly

č.int.	1. integrace – natočení $\varphi$	2. integrace – průhyb $w$
n = 1	$\frac{dw}{dx} = - \int_0^{l/3} \frac{M(x)}{EI_1} dx + C_1 ;$	$w = - \int_0^{l/3} \left( \int_0^{l/3} \frac{M(x)}{EI_1} dx \right) dx + C_1 \cdot x + C_4$
n = 2	$\frac{dw}{dx} = - \int_{l/3}^{2l/3} \frac{M(x)}{EI_2} dx + C_2 ;$	$w = - \int_{l/3}^{2l/3} \left( \int_{l/3}^{2l/3} \frac{M(x)}{EI_2} dx \right) dx + C_2 \cdot x + C_5$
n = 3	$\frac{dw}{dx} = - \int_{2l/3}^l \frac{M(x)}{EI_3} dx + C_3 ;$	$w = - \int_{2l/3}^l \left( \int_{2l/3}^l \frac{M(x)}{EI_3} dx \right) dx + C_3 \cdot x + C_6$

Jak je z tabulky Tab.4.1 zřejmé pro 3 intervaly je počet integračních neznámých roven šesti.

Pro tyto neznámé konstanty sestavíme šest rovnic o šesti neznámých:

a) první dvě rovnice sestavíme z okrajových podmínek uložení nosníku:

$$0 = - \int_0^{l/3} \left( \int_0^{l/3} \frac{M(x)}{EI_1} dx \right) dx + C_1 \cdot 0 + C_4 \quad (4.27)$$

$$0 = - \int_{2l/3}^l \left( \int_{2l/3}^l \frac{M(x)}{EI_3} dx \right) dx + C_3 \cdot L + C_6 \quad (4.28)$$

b) další dvě rovnice určíme z rovnosti natočení na rozhraní intervalů:

$$- \int_0^{l/3} \frac{M(x)}{EI_1} dx + C_1 = - \int_{l/3}^{2l/3} \frac{M(x)}{EI_2} dx + C_2 \quad (4.29)$$

$$- \int_{l/3}^{2l/3} \frac{M(x)}{EI_2} dx + C_2 = - \int_{2l/3}^l \frac{M(x)}{EI_3} dx + C_3 \quad (4.30)$$

c) poslední dvě rovnice určíme z rovnosti průhybů na rozhraní intervalů:

$$-\int_0^{\frac{l}{3}} \left( \int_0^{\frac{l}{3}} \frac{M(x)}{EI_1} dx \right) dx + C_1 \cdot x + C_4 = -\int_{\frac{l}{3}}^{2l/3} \left( \int_{\frac{l}{3}}^{2l/3} \frac{M(x)}{EI_2} dx \right) dx + C_2 \cdot x + C_5 \quad (4.31)$$

$$-\int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \left( \int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \frac{M(x)}{EI_2} dx \right) dx + C_2 \cdot x + C_5 = -\int_{2l/3}^l \left( \int_{2l/3}^l \frac{M(x)}{EI_3} dx \right) dx + C_3 \cdot x + C_6 \quad (4.32)$$

Následně rovnice (4.27) až (4.32) upravíme:

$$C_4 = -\frac{1}{EI_1} \cdot \iint M_{(x=0)}; \quad (4.33)$$

$$C_3 \cdot l + C_6 = \frac{1}{EI_3} \cdot \iint M_{(x=l)}; \quad (4.34)$$

$$C_1 - C_2 = \left( -\frac{1}{EI_2} + \frac{1}{EI_1} \right) \cdot \int M_{(x=l/3)}; \quad (4.35)$$

$$C_2 - C_3 = \left( -\frac{1}{EI_3} + \frac{1}{EI_2} \right) \cdot \int M_{(x=2l/3)}; \quad (4.36)$$

$$C_1 \cdot \frac{l}{3} - C_2 \cdot \frac{l}{3} + C_4 - C_5 = \left( -\frac{1}{EI_2} + \frac{1}{EI_1} \right) \cdot \iint M_{(x=l/3)}; \quad (4.37)$$

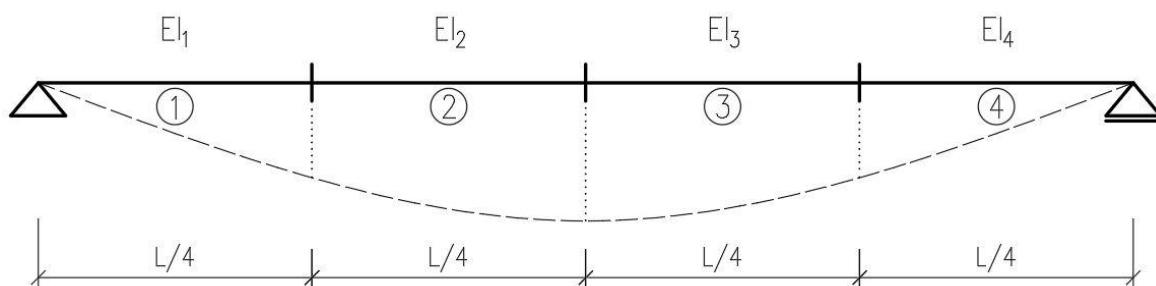
$$C_2 \cdot \frac{2l}{3} - C_3 \cdot \frac{2l}{3} + C_5 - C_6 = \left( -\frac{1}{EI_3} + \frac{1}{EI_2} \right) \cdot \iint M_{(x=2l/3)}. \quad (4.38)$$

Následně rovnice (4.33) až (4.38) převedeme na maticový tvar:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ l/3-l/3 & 0 & 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l/3-2l/3 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{EI_1} \cdot \iint M_{(x=0)} \\ \frac{1}{EI_3} \cdot \iint M_{(x=l)} \\ \left( -\frac{1}{EI_2} + \frac{1}{EI_1} \right) \cdot \int M_{(x=l/3)} \\ \left( -\frac{1}{EI_3} + \frac{1}{EI_2} \right) \cdot \int M_{(x=2l/3)} \\ \left( -\frac{1}{EI_2} + \frac{1}{EI_1} \right) \cdot \iint M_{(x=l/3)} \\ \left( -\frac{1}{EI_3} + \frac{1}{EI_2} \right) \cdot \iint M_{(x=2l/3)} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

#### 4.4.2. Stanovení průhybové čáry pro 4 integrační intervaly

Význam použitých symbolů je vysvětlen v kapitole *Popis použitých symbolů*.



Obr.4.11. Schéma prostého nosníku, který je rozdělen na 4 integrační intervaly

V této kapitole provedeme identický výpočet jako v předchozí kapitole. Jediná změna bude počet integračních intervalů, kdy z původních 3 intervalů zvýšíme počet na 4 dílky. Důvod tohoto podobného výpočtu je vystihnout trend tvoření matice a vektoru pravé strany pro výpočet neznámých integračních konstant (4.39).

Okrajové podmínky, rovnice ohybového momentu a její integrace zůstávají stejné jako v předchozím případě, neboť i tento nosník je zatížen spojitým lineárním ztížením.

V následující tabulce jsou rovnice natočení a průhybů pro všechny integrační intervaly:

Tab.4.2 – Rovnice natočení a průhybů na prostém nosníku pro 4 int. intervaly

č.int.	1. integrace – natočení $\varphi$	2. integrace – průhyb $w$
n = 1	$\frac{dw}{dx} = - \int_0^{l/4} \frac{M(x)}{EI_1} dx + C_1 ;$	$w = - \int_0^{l/4} \left( \int_0^{l/4} \frac{M(x)}{EI_1} dx \right) dx + C_1 \cdot x + C_5$
n = 2	$\frac{dw}{dx} = - \int_{l/4}^{l/2} \frac{M(x)}{EI_2} dx + C_2 ;$	$w = - \int_{l/4}^{l/2} \left( \int_{l/4}^{l/2} \frac{M(x)}{EI_2} dx \right) dx + C_2 \cdot x + C_6$
n = 3	$\frac{dw}{dx} = - \int_{l/2}^{3l/4} \frac{M(x)}{EI_3} dx + C_3 ;$	$w = - \int_{l/2}^{3l/4} \left( \int_{l/2}^{3l/4} \frac{M(x)}{EI_3} dx \right) dx + C_3 \cdot x + C_7$
n = 4	$\frac{dw}{dx} = - \int_{3l/4}^l \frac{M(x)}{EI_4} dx + C_4 ;$	$w = - \int_{3l/4}^l \left( \int_{3l/4}^l \frac{M(x)}{EI_4} dx \right) dx + C_4 \cdot x + C_8$

Jak je z tabulky Tab.4.2 zřejmé pro 4 intervaly je počet integračních neznámých roven osmi.

Pro tyto neznámé konstanty sestavíme osm rovnic o osmi neznámých:

d) první dvě rovnice sestavíme z okrajových podmínek uložení nosníku:

$$0 = - \int_0^{l/4} \left( \int_0^{l/4} \frac{M(x)}{EI_1} dx \right) dx + C_1 \cdot 0 + C_5 \quad (4.40)$$

$$0 = - \int_{3l/4}^l \left( \int_{3l/4}^l \frac{M(x)}{EI_4} dx \right) dx + C_4 \cdot l + C_8 \quad (4.41)$$

e) další tři rovnice určíme z rovnosti natočení na rozhraní intervalů:

$$- \int_0^{l/4} \frac{M(x)}{EI_1} dx + C_1 = - \int_{l/4}^{l/2} \frac{M(x)}{EI_2} dx + C_2 \quad (4.42)$$

$$- \int_{l/4}^{l/2} \frac{M(x)}{EI_2} dx + C_2 = - \int_{l/2}^{3l/4} \frac{M(x)}{EI_3} dx + C_3 \quad (4.43)$$

$$- \int_{l/2}^{3l/4} \frac{M(x)}{EI_3} dx + C_3 = - \int_{3l/4}^l \frac{M(x)}{EI_4} dx + C_4 \quad (4.44)$$

f) poslední tři rovnice určíme z rovnosti průhybů na rozhraní intervalů:

$$- \int_0^{l/4} \left( \int_0^{l/4} \frac{M(x)}{EI_1} dx \right) dx + C_1 \cdot x + C_5 = - \int_{l/4}^{l/2} \left( \int_{l/4}^{l/2} \frac{M(x)}{EI_2} dx \right) dx + C_2 \cdot x + C_6 \quad (4.45)$$

$$- \int_{l/4}^{l/2} \left( \int_{l/4}^{l/2} \frac{M(x)}{EI_2} dx \right) dx + C_2 \cdot x + C_6 = - \int_{l/2}^{3l/4} \left( \int_{l/2}^{3l/4} \frac{M(x)}{EI_3} dx \right) dx + C_3 \cdot x + C_7 \quad (4.46)$$

$$- \int_{l/2}^{3l/4} \left( \int_{l/2}^{3l/4} \frac{M(x)}{EI_3} dx \right) dx + C_3 \cdot x + C_7 = - \int_{3l/4}^l \left( \int_{3l/4}^l \frac{M(x)}{EI_4} dx \right) dx + C_4 \cdot x + C_8 \quad (4.47)$$

Následně rovnice (4.40) až (4.47) upravíme:

$$C_5 = - \frac{1}{EI_1} \cdot \iint M_{(x=0)}; \quad (4.48)$$

$$C_4 \cdot l + C_8 = \frac{1}{EI_4} \cdot \iint M_{(x=l)}; \quad (4.49)$$

$$C_1 - C_2 = \left( -\frac{1}{EI_2} + \frac{1}{EI_1} \right) \cdot \int M_{(x=l/4)}; \quad (4.50)$$

$$C_2 - C_3 = \left( -\frac{1}{EI_3} + \frac{1}{EI_2} \right) \cdot \int M_{(x=l/2)}; \quad (4.51)$$

$$C_3 - C_4 = \left( -\frac{1}{EI_4} + \frac{1}{EI_3} \right) \cdot \int M_{(x=3l/4)}; \quad (4.52)$$

$$C_1 \cdot \frac{l}{4} - C_2 \cdot \frac{l}{4} + C_5 - C_6 = \left(-\frac{1}{EI_2} + \frac{1}{EI_1}\right) \cdot \iint M_{(x=l/4)}; \quad (4.53)$$

$$C_2 \cdot \frac{l}{2} - C_3 \cdot \frac{l}{2} + C_6 - C_7 = \left(-\frac{1}{EI_3} + \frac{1}{EI_2}\right) \cdot \iint M_{(x=l/2)}; \quad (4.54)$$

$$C_3 \cdot \frac{3l}{4} - C_4 \cdot \frac{3l}{4} + C_7 - C_8 = \left(-\frac{1}{EI_4} + \frac{1}{EI_3}\right) \cdot \iint M_{(x=3l/4)}. \quad (4.55)$$

Následně rovnice (4.48) až (4.55) převedeme na maticový tvar:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l/4 - l/4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & l/2 & -l/2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3l/4 - 3l/4 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI_1} \cdot \iint M_{(x=0)} \\ \frac{1}{EI_4} \cdot \iint M_{(x=l)} \\ \left(-\frac{1}{EI_2} + \frac{1}{EI_1}\right) \cdot \int M_{(x=l/4)} \\ \left(-\frac{1}{EI_3} + \frac{1}{EI_2}\right) \cdot \int M_{(x=l/2)} \\ \left(-\frac{1}{EI_4} + \frac{1}{EI_3}\right) \cdot \int M_{(x=3l/4)} \\ \left(-\frac{1}{EI_2} + \frac{1}{EI_1}\right) \cdot \iint M_{(x=l/4)} \\ \left(-\frac{1}{EI_3} + \frac{1}{EI_2}\right) \cdot \iint M_{(x=l/2)} \\ \left(-\frac{1}{EI_4} + \frac{1}{EI_3}\right) \cdot \iint M_{(x=3l/4)} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

V maticových rovnicích (4.48) a (4.55) lze vidět určitou pravidelnost, opakující se prvky v matici viz Obr.4.12. Díky tomu lze jednoduše výpočet zautomatizovat a vytvořit algoritmus, který by byl schopen rychle a efektivně počítat průhyby na nosnících s násobně větším počtem integračních intervalů, a tudíž dosahovat mnohem přesnějších výsledků.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l/4 - l/4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & l/2 & -l/2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3l/4 - 3l/4 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obr.4.12. Matice pro 4 integrační intervaly

#### 4.4.3. Tvorba výpočetního algoritmu

Jak bylo řečeno v předchozí kapitole, s rostoucím počtem integračních intervalů, na které rozdělíme nosník, se v matici a ve vektoru pravé strany utváří pravidelnost, kterou lze jednoduše zapsat pomocí cyklů. Pro názornou ilustraci použijeme Obr.4.12. Matici rozdělíme do tří částí, jak lze vidět na následujícím obrázku Obr.4.13:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l/4 - l/4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & l/2 & -l/2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3l/4 - 3l/4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obr.4.13. Matice pro 4 integrační intervaly rozdělená do tří oblastí

První dva řádky matice vyjadřují okrajové podmínky v našem případě jsou to okrajové podmínky pro prostý nosník. Okrajové podmínky říkají, že průhyb v krajních bodech je roven nule. Matematicky lze toto tvrzení zapsat následně:

$$w(0) = 0 \quad (4.57)$$

$$w(l) = 0 \quad (4.58)$$

Posléze dosadíme vztahy (4.57) a (4.58) do rovnic pro výpočet průhybu v prvním a posledním dílku z tabulky Tab.4.2 a upravíme na následující tvar:

$$C_1 \cdot 0 + C_5 \cdot 1 = \int_0^{l/4} \left( \int_0^{l/4} \frac{M(x)}{EI_1} dx \right) dx \quad (4.59)$$

$$C_4 \cdot l + C_8 \cdot 1 = \int_{3l/4}^l \left( \int_{3l/4}^l \frac{M(x)}{EI_4} dx \right) dx \quad (4.60)$$

Ze vztahu (4.59) vidíme, že na prvním řádku matice první člen, který bude násobit integrační konstantu  $C_1$  bude roven nule a člen pátý, který bude násobit integrační konstantu  $C_5$  bude roven hodnotě jedna. Ze vztahu (4.60) vidíme, že na druhém řádku matice čtvrtý člen, který bude násobit integrační konstantu  $C_4$  bude roven hodnotě  $L$ , což je délka vyšetřovaného nosníku a člen osmý ve druhém řádku, který bude násobit integrační konstantu  $C_8$  bude roven hodnotě jedna. Stejným způsobem můžeme určit i první dvě hodnoty vektoru pravé



strany. Ze vztahu (4.59) vidíme, že člen je kladný a rovná se hodnotě  $1/EI_1$ , což představuje ohybovou poddajnost nosníku pro první dílek. Tento člen je vynásobený druhou integrací ohybového momentu  $\iint M_{(x)}$  pro první integrační interval. Ze vztahu (4.60) vidíme, že druhý člen vektoru pravé strany bude obdobný, akorát hodnota ohybové poddajnosti a hodnota druhé integrace ohybového momentu bude pro poslední integrační interval, v našem případě pro 4 dílek. Tímto jsme určili první dva řádky matice a vektoru pravé strany, jak lze vidět na obrázku Obr.4.14., a je roven soustavě ze vztahu (4.56).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI_1} \cdot \iint M_{(x=0)} \\ \frac{1}{EI_4} \cdot \iint M_{(x=l)} \end{bmatrix}$$

Obr.4.14. První dva řádky matice a vektoru pravé strany

Následně stejným způsobem určíme řádky matice, které jsou na obrázku Obr.4.13. zvýrazněné modře. Těmto řádkům matice určíme i příslušné řádky vektoru pravé strany. Tyto členy vždy začínají na třetím řádku matice i vektoru pravé strany, jsou to prvky, které získáme z rovnosti natočení na rozhraní jednotlivých integračních intervalů a jejich počet je vždy roven hodnotě  $n-1$ . V našem případě počet je roven hodnotě 3, protože uvažujeme nosník rozdělený na 4 dílky.

V poslední řadě zase obdobným způsobem určíme poslední tři řádky matice a řádky vektoru pravé strany. Tyto prvky získáme díky rovnosti průhybů na rozhraní jednotlivých dílků, jejich počet je opět roven hodnotě  $n-1$ , kdy  $n$  je počet integračních intervalů.

Vzhledem k faktu, že počet řádků, které odpovídají rovnosti natočení a průhybům na rozhraní jednotlivých intervalů, je roven hodnotě  $n-1$ , je vhodné zde využít cyklus, který bude vždy v intervalu od 1 do  $n-1$ . Hodnoty pro rovnost natočení se budou zapisovat vždy do třetího řádku, protože na prvních dvou řádcích budou hodnoty získané ze dvou okrajových podmínek. Hodnoty získané od rovnosti průhybů se budou vždy zapisovat na řádek, který bude roven hodnotě  $2+n$ , kde  $n$  je počet integračních intervalů.

Takto sestavené matice a vektory použijeme k vytvoření programu, který bude schopen nosník rozdělit na více než 3 nebo 4 integrační intervaly, a tudíž rychle a efektivně spočítat hodnotu průhybu pro každý dílek po délce nosníku.

#### 4.4.4. Stanovení hodnoty ohybové tuhosti pro každý integrační interval

Ve třetí kapitole je popsán normový postup výpočtu průhybu a je zde i popsán způsob, jak určit hodnotu ohybové tuhosti pomocí rozdělovacího součinitele  $\zeta$ , který reprezentuje hodnotu ohybové tuhosti pro nosník, který je porušen trhlinami, vzhledem k velikosti ohybového momentu, který na nosník v daném místě působí:

$$\zeta_i = 1 - 0,5 \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M_i} \right)^2 \quad (4.61)$$

kde

$M_{cr}$  je hodnota kritického momentu – hodnota, při které vzniknou trhliny v betonu;

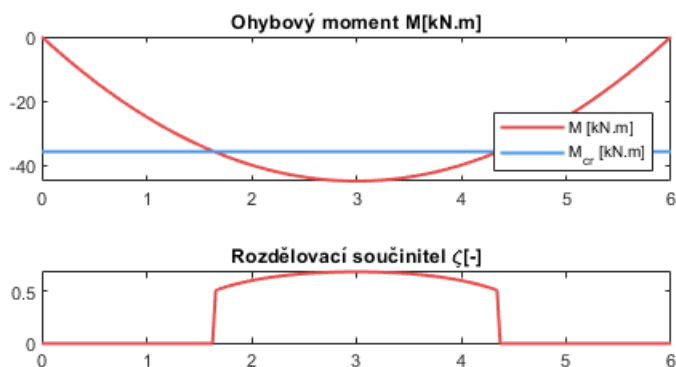
$M_i$  je hodnota ohybového momentu pro daný integrační interval.

Tento normový postup použijeme při zjišťování ohybové tuhosti pro jednotlivé dílky. Výslednou ohybovou tuhost nosníku spočteme jako součet ohybových tuhostí pro průřez bez trhlin a průřez porušený trhlinami v poměru součinitele  $\zeta$ :

$$EI_{\zeta_i} = E \cdot \frac{I_I + I_{II}}{(1 - \zeta_i) \cdot I_{II} + \zeta_i \cdot I_I} \quad (4.62)$$

(Pozn.: Odvození tohoto vzorce je v Příloze P2.)

Na obrázku Obr.4.15. nahoře vidíme hodnotu ohybového momentu působící na vzorový nosník a hodnotu kritického momentu. Na stejném obrázku dole je vykreslena hodnota rozdělovacího součinitele  $\zeta_i$  po délce nosníku. Vidíme, že v místě, kde hodnota ohybového momentu, která působí na nosník překročí hodnotu kritického momentu, zvýší se hodnota součinitele  $\zeta$  z nuly na příslušnou poměrnou hodnotu. Tento fakt způsobí, že hodnota ohybové tuhosti spočtena ze vztahu (4.62) se sníží.



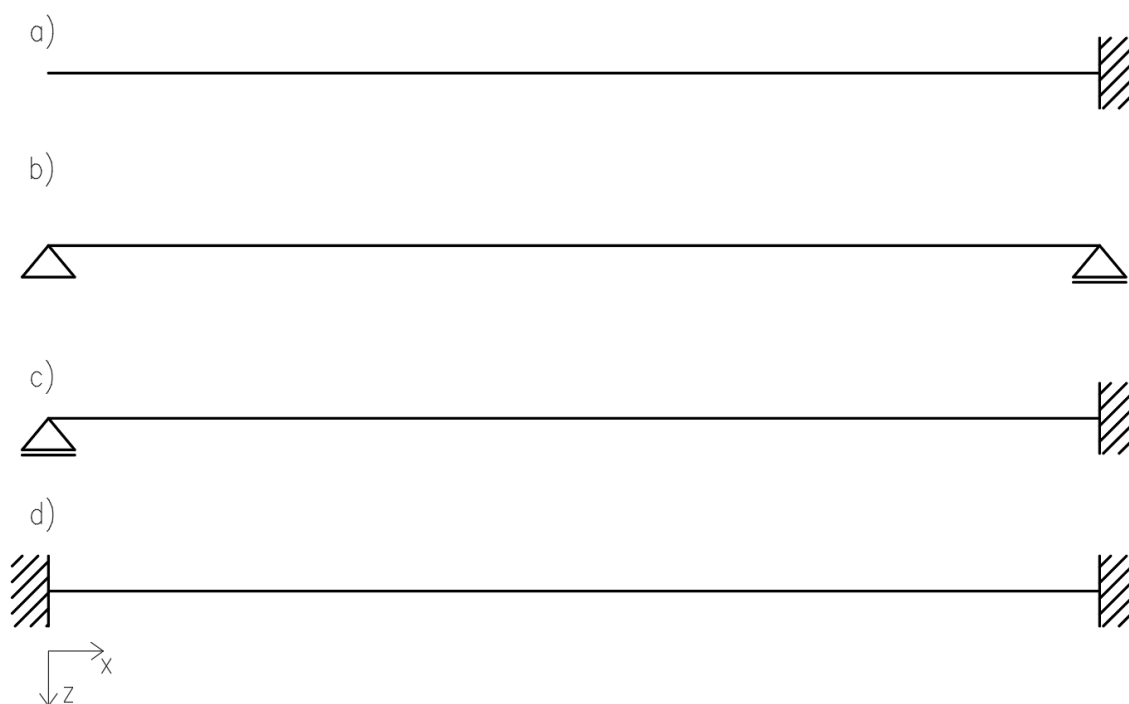
Obr.4.15. Vztah mezi rozdělovacím součinitelem  $\zeta$  a ohybovým momentem  $M$

#### 4.5. Další statická uložení železobetonového nosníku

V předešlých kapitolách byl představen výpočet deformací pomocí řešení rovnice průhybové čáry pouze na prostém nosníku. Tento postup lze aplikovat na jakýkoli typ uložení nosníku, jediný rozdíl bude ve změně okrajových podmínek, a tudíž ve změně vektoru pravé strany. V této práci se budeme celkem zabývat čtyřmi statickými uloženími železobetonového nosníku:

- a) konzola;
- b) prostý nosník;
- c) uložení typu kloub – vetknutí;
- d) uložení typu vetknutí – vetknutí.

Tato schémata jsou zobrazena na následujícím obrázku Obr.4.16:



Obr.4.16. Statická schéma uložení nosníků

Okrajové podmínky pro konzolové uložení nosníku:

- $pro\ x = l, w = 0$  ... průhyb ve vetknuté podpoře = 0;
- $pro\ x = l, w' = 0$  ... natočení ve vetknuté podpoře = 0;
- $w_i = w_{i+1}$  ... průhyb na rozhraní integračních intervalů je stejný;
- $w_i' = w_{i+1}'$  ... natočení na rozhraní integračních intervalů je stejné.

Okrajové podmínky pro uložení nosníku typu kloub – vetknutí:

- $pro\ x = 0, w = 0$  ... průhyb v kloubové podpoře = 0;
- $pro\ x = l, w = 0$  ... průhyb ve vetknuté podpoře = 0;
- $pro\ x = l, w' = 0$  ... natočení ve vetknuté podpoře = 0;
- $w_i = w_{i+1}$  ... průhyb na rozhraní integračních intervalů je stejný;
- $w_i' = w_{i+1}'$  ... natočení na rozhraní integračních intervalů je stejné.

Okrajové podmínky pro uložení nosníku typu vetknutí – vetknutí:

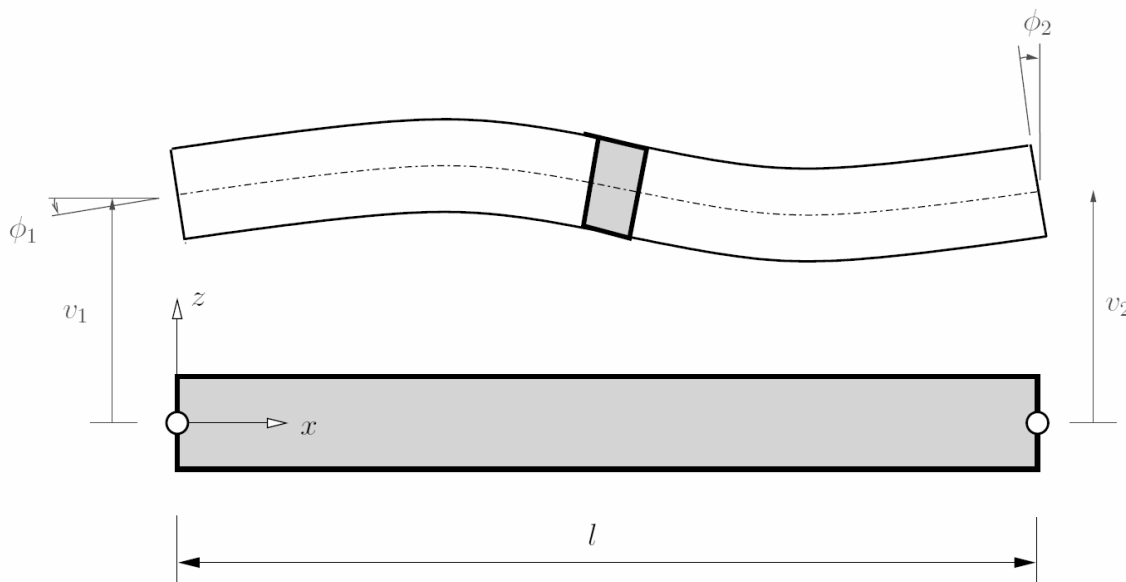
- $pro\ x = 0, w = 0$  ... průhyb ve vetknuté podpoře = 0;
- $pro\ x = 0, w' = 0$  ... natočení ve vetknuté podpoře = 0;
- $pro\ x = l, w = 0$  ... průhyb ve vetknuté podpoře = 0;
- $pro\ x = l, w' = 0$  ... natočení ve vetknuté podpoře = 0;
- $w_i = w_{i+1}$  ... průhyb na rozhraní integračních intervalů je stejný;
- $w_i' = w_{i+1}'$  ... natočení na rozhraní integračních intervalů je stejné.

Vzhledem ke změně uložení nosníku se také změní funkce ohybového momentu, která na nosník působí. Po úpravě rovnic ohybového momentu a dosazení příslušných okrajových podmínek do rovnic průhybové čáry získáme soustavu pro výpočet průhybu pro naše vybraná statická schémata.

## 5. Metoda konečných prvků

### 5.1. Bázové funkce

Prut má dva uzlové body, v každém z nich jsou dvě deformační neznámé – posunutí ve směru osy  $z$  a pootočení koncových průřezů viz Obr.5.1. [10]

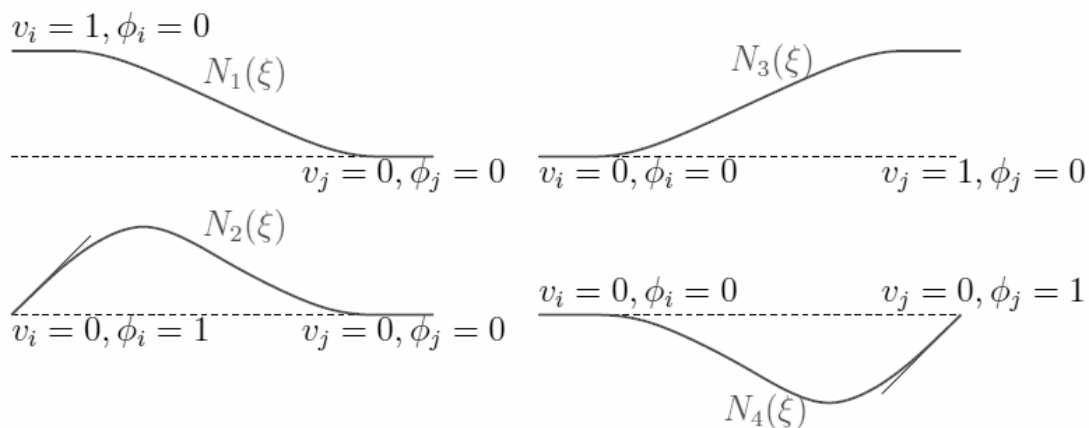


Obr.5.1. Euler-Bernoulliho ohýbaný prut [10]

Posunutí libovolného místa prutu určíme pomocí matice bázových funkcí  $[N]$  a vektoru posunutí prutu  $\{r\}$  :

$$v = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ v_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{r\}^{(e)} . \quad (5.1)$$

Bázové funkce  $N_i$  zapíšeme pomocí přirozené souřadnice  $\xi = \frac{2x}{L} - 1$ . Přirozená souřadnice má hodnotu  $-1$  pro  $x = 0$  a hodnotu  $1$  pro  $x = L$ . Tvary bázových funkcí pro ohýbaný prut jsou na obrázku Obr.5.2. [10] Bázová funkce  $N_1$  vzniká jednotkovým posunem prvního uzlu. Bázová funkce  $N_2$  vzniká jednotkovým pootočením prvního uzlu. Bázová funkce  $N_3$  vzniká jednotkovým posunem druhého uzlu. Bázová funkce  $N_4$  vzniká jednotkovým pootočením druhého uzlu.



Obr.5.2. Bázové (tvarové) funkce ohýbaného prutu [10]

Tvarové (bázové) funkce lze zapsat jako kubické polynomy ve tvaru:

$$N_i(\xi) = a \cdot \xi^3 + b \cdot \xi^2 + c \cdot \xi + d . \quad (5.2)$$

Kubický polynom zajistí spojitost natočení, průhybů i křivostí po délce prutu.

Derivace  $N_i$  je rovna:

$$N_i'(\xi) = 3a \cdot \xi^2 + 2b \cdot \xi + c . \quad (5.3)$$

Koeficienty  $a, b, c, d$  nalezneme pomocí okrajových podmínek. Pro bázovou funkci  $N_1$  platí:

$$N_1(-1) = 1 ; \quad (5.4)$$

$$N_1'(-1) = 0 ; \quad (5.5)$$

$$N_1(+1) = 0 ; \quad (5.6)$$

$$N_1'(+1) = 0 . \quad (5.7)$$

Po dosazení rovnic (5.2) a (5.3) do rovnic (5.4) až (5.7) získáme následující soustavu rovnic:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} . \quad (5.8)$$

Koeficienty vyjdou:  $a = \frac{1}{4}$  ;  $b = 0$  ;  $c = -\frac{3}{4}$  ;  $d = \frac{1}{2}$  . Hledaná bázová funkce  $N_1$  je ve tvaru:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) . \quad (5.9)$$

Jednotkové pootočení v uzlu  $i$  pro interval  $\langle 0, L \rangle$  znamená pootočení o velikosti  $\phi_1 = \frac{L}{2}$  pro interval  $\langle -1, +1 \rangle$  [10]. Hledáme tedy funkci  $N_2$  s následujícími okrajovými podmínkami:

$$N_2(-1) = 0; \quad (5.10)$$

$$N_2'(-1) = \frac{L}{2}; \quad (5.11)$$

$$N_2(+1) = 0; \quad (5.12)$$

$$N_2'( +1) = 0. \quad (5.13)$$

Koeficienty vyjdou:  $a = \frac{L}{8}$ ;  $b = -\frac{L}{8}$ ;  $c = -\frac{L}{8}$ ;  $d = \frac{L}{8}$ . Hledaná bázová funkce  $N_2$  je ve tvaru: [10]

$$N_2(\xi) = \frac{L}{8}(\xi^3 - \xi^2 - \xi - 1) = \frac{L}{8}(1 - \xi)^2(1 + \xi). \quad (5.14)$$

Obdobným způsobem určíme zbylé dvě chybějící bázové funkce  $N_3, N_4$ , které jsou obdobné jako bázové funkce  $N_1$  a  $N_2$ , a zapíšeme: [10]

$$N_3(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi); \quad (5.15)$$

$$N_4(\xi) = -\frac{L}{8}(1 + \xi)^2(1 - \xi); \quad (5.16)$$

## 5.2. Křivost ohýbaného prutu

Pro křivost na prutu je známý vztah: [10]

$$\kappa = [B] \cdot \{r\}; \quad (5.17)$$

kde

$\kappa$  je křivost po délce nosníku;

$B$  je matice druhých derivací bázových funkcí  $N_i$ ;

$r$  je vektor uzlových posunů a natočení.

Vypočteme druhou derivaci všech bázových funkcí:

$$B = N''; \quad (5.18)$$

Vypočteme druhou derivaci bázové funkce  $N_1$  :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) = \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}; \quad (5.19)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{L} - 1\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{2x}{L} - 1\right) + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{L^3}(3Lx^2 - 2x^3); \quad (5.20)$$

$$N_1' = -\frac{1}{L^3}(6Lx - 6x^2); \quad (5.21)$$

$$N_1'' = -\frac{1}{L^3}(6L - 12x) = -\frac{1}{L^3}\left(6L - 12\left(\frac{L}{2}(\xi + 1)\right)\right); \quad (5.22)$$

$$N_1'' = -\frac{1}{L^2}(6 - 6\xi + 6) = \frac{1}{L^2}6\xi; \quad (5.23)$$

Vypočteme druhou derivaci bázové funkce  $N_2$  :

$$N_2 = \frac{L}{8}(1 - \xi)^2(1 + \xi) = \frac{L}{8}\xi^3 - \frac{L}{8}\xi^2 - \frac{L}{8}\xi - \frac{L}{8}; \quad (5.24)$$

$$N_2 = \frac{L}{8}\left(\frac{2x}{L} - 1\right)^3 - \frac{L}{8}\left(\frac{2x}{L} - 1\right)^2 - \frac{L}{8}\left(\frac{2x}{L} - 1\right) - \frac{L}{8} = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x; \quad (5.25)$$

$$N_2' = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1; \quad (5.26)$$

$$N_2'' = \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} = \frac{6}{L^2}\left(\frac{L}{2}(\xi + 1)\right) - \frac{4}{L}; \quad (5.27)$$

$$N_2'' = \frac{3}{L}\xi + \frac{3}{L} - \frac{4}{L} = \frac{1}{L}(3\xi - 1); \quad (5.28)$$

Vypočteme druhou derivaci bázové funkce  $N_3$  :

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) = -\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}; \quad (5.29)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{L} - 1\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{2x}{L} - 1\right) + \frac{1}{2} = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \quad (5.30)$$

$$N_3' = \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}; \quad (5.31)$$

$$N_3'' = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} = \frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}\left(\frac{L}{2}(\xi + 1)\right); \quad (5.32)$$

$$N_3'' = \frac{6}{L^2} - \frac{6}{L^2}\xi - \frac{6}{L^2} = -\frac{1}{L^2}6\xi; \quad (5.33)$$



Vypočteme druhou derivaci bázové funkce  $N_4$  :

$$N_4 = -\frac{L}{8}(1+\xi)^2(1-\xi) = \frac{L}{8}\xi^3 + \frac{L}{8}\xi^2 - \frac{L}{8}\xi - \frac{L}{8}; \quad (5.34)$$

$$N_4 = \frac{L}{8}\left(\frac{2x}{L}-1\right)^3 + \frac{L}{8}\left(\frac{2x}{L}-1\right)^2 - \frac{L}{8}\left(\frac{2x}{L}-1\right) - \frac{L}{8} = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}; \quad (5.35)$$

$$N_4' = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}; \quad (5.36)$$

$$N_4'' = \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} = \frac{6}{L^2}\left(\frac{L}{2}(\xi+1)\right) - \frac{2}{L}; \quad (5.37)$$

$$N_4'' = \frac{3}{L}\xi + \frac{3}{L} - \frac{2}{L} = \frac{1}{L}(3\xi+1); \quad (5.38)$$

Výrazy zapíšeme do matice  $B$  :

$$B = \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}, \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}, \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}, \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right]; \quad (5.39)$$

$$B = \left[ \frac{1}{L^2}6\xi, \frac{1}{L}(3\xi-1), -\frac{1}{L^2}6\xi, \frac{1}{L}(3\xi+1) \right]. \quad (5.40)$$

Vztah (5.39) je zapsán pomocí souřadnice  $x$ . Vztah (5.40) je zapsán pomocí přirozené souřadnice  $\xi$ . Ze vztahů (5.39) a (5.40) vidíme, že prvky matice  $B$  jsou lineární tudíž nám dovoluje stanovit křivost po délce prvku v závislosti na souřadnici  $x$  nebo přirozené souřadnici  $\xi$ . Souřadnice  $x$  nabývá hodnot od 0 do  $L$ . Přirozená souřadnice nabývá hodnot od -1 do 1.

Výslednou křivost po délce prvku zapíšeme pomocí souřadnice  $x$  ve tvaru (5.41):

$$\kappa = [B] \cdot \{r\} = \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}, \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}, \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}, \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \cdot \begin{pmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{pmatrix}; \quad (5.41)$$

kde

$w_{i,j}$  jsou svislé posuny v uzlových bodech;

$\phi_{i,j}$  jsou pootočení v uzlových bodech.

$x$  je souřadnice ve směru délky prvku a nabývá hodnot od 0 do  $L$ .

Křivost po délce prvku pomocí přirozené souřadnice  $\xi$  zapíšeme ve tvaru (5.42):

$$\kappa = [B] \cdot \{r\} = \left[ \frac{1}{L^2} 6\xi, \frac{1}{L} (3\xi - 1), -\frac{1}{L^2} 6\xi, \frac{1}{L} (3\xi + 1) \right] \cdot \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix}; \quad (5.42)$$

kde

$w_{i,j}$  jsou svislé posuny v uzlových bodech;

$\phi_{i,j}$  jsou pootočení v uzlových bodech.

$\xi$  je funkce závislá na  $x$  a nabývá hodnot od -1 do 1,  $\xi = \frac{2x}{L} - 1$ .

### 5.3. Matice tuhosti

Pro matici tuhosti je známý vztah: [10]

$$K = \int_0^L B^T \cdot EI \cdot B \, dx; \quad (5.43)$$

kde

$EI$  je ohybová tuhost prvku;

$B$  je matice druhých derivací bázových funkcí  $N_i$ .

Ohybová tuhost  $EI$  není závislá po délce prvku. Ohybovou tuhost uvažujeme na jednotlivých prvcích konstantní, a tudíž jí vytkneme před integrál. Ze vztahu (5.31) vidíme, že vzniklá matice tuhosti bude mít rozměr  $[4 \times 4]$ , protože násobíme matice derivovaných bázových funkcí o rozměrech  $[4 \times 1]$  a  $[1 \times 4]$  (5.44):

$$K = EI \int_0^L B^T \cdot B \, dx = EI \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} \cdot \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}, \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}, \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}, \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] dx; \quad (5.44)$$

Výpočet prvku  $K_{[1,1]}$  matice tuhosti:

$$K_{[1,1]} = EI \int_0^L B^T_{[1,1]} \cdot B_{[1,1]} \, dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \cdot \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) dx; \quad (5.45)$$

$$K_{[1,1]} = EI \cdot \int_0^L \frac{144x^2}{L^6} - \frac{144x}{L^5} + \frac{36}{L^4} dx = EI \cdot \left( \frac{144L^3}{3L^6} - \frac{144L^2}{2L^5} + \frac{36L}{L^4} \right); \quad (5.46)$$

$$K_{[1,1]} = \frac{EI}{L^3} \cdot (48 - 72 + 36) = 12 \frac{EI}{L^3}. \quad (5.47)$$

Výpočet prvku  $K_{[1,2]}$  matice tuhosti:

$$K_{[1,2]} = EI \int_0^L B^T_{[1,1]} \cdot B_{[1,2]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \cdot \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) dx ; \quad (5.48)$$

$$K_{[1,2]} = EI \cdot \int_0^L \frac{72x^2}{L^5} - \frac{84x}{L^4} + \frac{24}{L^3} dx = EI \cdot \left( \frac{72L^3}{3L^5} - \frac{84L^2}{2L^4} + \frac{24L}{L^3} \right) ; \quad (5.49)$$

$$K_{[1,2]} = \frac{EI}{L^2} \cdot (24 - 42 + 24) = 6 \frac{EI}{L^2} . \quad (5.50)$$

Výpočet prvku  $K_{[1,3]}$  matice tuhosti:

$$K_{[1,3]} = EI \int_0^L B^T_{[1,1]} \cdot B_{[1,3]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \cdot \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) dx ; \quad (5.51)$$

$$K_{[1,3]} = EI \cdot \int_0^L -\frac{144x^2}{L^6} + \frac{144x}{L^5} - \frac{36}{L^4} dx = EI \cdot \left( -\frac{144L^3}{3L^6} + \frac{144L^2}{2L^5} - \frac{36L}{L^4} \right) ; \quad (5.52)$$

$$K_{[1,3]} = \frac{EI}{L^3} \cdot (-48 + 72 - 36) = -12 \frac{EI}{L^3} . \quad (5.53)$$

Výpočet prvku  $K_{[1,4]}$  matice tuhosti:

$$K_{[1,4]} = EI \int_0^L B^T_{[1,1]} \cdot B_{[1,4]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \cdot \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) dx ; \quad (5.48)$$

$$K_{[1,4]} = EI \cdot \int_0^L \frac{72x^2}{L^5} - \frac{60x}{L^4} + \frac{12}{L^3} dx = EI \cdot \left( \frac{72L^3}{3L^5} - \frac{60L^2}{2L^4} + \frac{12L}{L^3} \right) ; \quad (5.49)$$

$$K_{[1,4]} = \frac{EI}{L^2} \cdot (24 - 30 + 12) = 6 \frac{EI}{L^2} . \quad (5.50)$$

Výpočet prvku  $K_{[2,1]}$  matice tuhosti:

$$K_{[2,1]} = EI \int_0^L B^T_{[2,1]} \cdot B_{[1,1]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \cdot \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) dx ; \quad (5.51)$$

Násobení je komutativní operace tudíž lze říci, že výrazy (5.48) a (5.51) jsou stejné, a tudíž i prvky  $K_{[1,2]}$  a  $K_{[2,1]}$  matice tuhosti jsou si rovny:

$$K_{[2,1]} = K_{[1,2]} = 6 \frac{EI}{L^2} . \quad (5.52)$$

Výpočet prvku  $K_{[2,2]}$  matice tuhosti:

$$K_{[2,2]} = EI \int_0^L B^T_{[2,1]} \cdot B_{[1,2]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \cdot \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) dx ; \quad (5.53)$$

$$K_{[2,2]} = EI \cdot \int_0^L \frac{36x^2}{L^4} - \frac{48x}{L^3} + \frac{16}{L^2} dx = EI \cdot \left( \frac{36L^3}{3L^4} - \frac{48L^2}{2L^3} + \frac{16L}{L^2} \right) ; \quad (5.54)$$

$$K_{[2,2]} = \frac{EI}{L} \cdot (12 - 24 + 16) = 4 \frac{EI}{L} . \quad (5.55)$$

Výpočet prvku  $K_{[2,3]}$  matice tuhosti:

$$K_{[2,3]} = EI \int_0^L B^T_{[2,1]} \cdot B_{[1,3]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \cdot \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) dx ; \quad (5.56)$$

$$K_{[2,3]} = EI \cdot \int_0^L -\frac{72x^2}{L^5} + \frac{84x}{L^4} - \frac{24}{L^3} dx = EI \cdot \left( -\frac{72L^3}{3L^5} + \frac{84L^2}{2L^4} - \frac{24L}{L^3} \right) ; \quad (5.57)$$

$$K_{[2,3]} = \frac{EI}{L^2} \cdot (-24 + 42 - 24) = -6 \frac{EI}{L^3} . \quad (5.58)$$

Výpočet prvku  $K_{[2,4]}$  matice tuhosti:

$$K_{[2,4]} = EI \int_0^L B^T_{[2,1]} \cdot B_{[1,4]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \cdot \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) dx ; \quad (5.59)$$

$$K_{[2,4]} = EI \cdot \int_0^L \frac{36x^2}{L^4} - \frac{36x}{L^3} + \frac{8}{L^2} dx = EI \cdot \left( \frac{36L^3}{3L^4} - \frac{36L^2}{2L^3} + \frac{8L}{L^2} \right) ; \quad (5.60)$$

$$K_{[2,4]} = \frac{EI}{L} \cdot (12 - 18 + 8) = 2 \frac{EI}{L} . \quad (5.61)$$

Výpočet prvku  $K_{[3,1]}$  matice tuhosti:

$$K_{[3,1]} = EI \int_0^L B^T_{[3,1]} \cdot B_{[1,1]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \cdot \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) dx . \quad (5.62)$$

V tomto prvku matice tuhosti nastal stejný případ jako v (5.52) a proto můžeme zapsat:

$$K_{[3,1]} = K_{[1,3]} = -12 \frac{EI}{L^3} . \quad (5.63)$$

Výpočet prvku  $K_{[3,2]}$  matice tuhosti:

$$K_{[3,2]} = EI \int_0^L B^T_{[3,1]} \cdot B_{[1,2]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \cdot \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) dx . \quad (5.64)$$

I v tomto prvku matice tuhosti využijeme symetrie matice tuhosti viz (5.52) a zapíšeme:

$$K_{[3,2]} = K_{[2,3]} = -6 \frac{EI}{L^3} . \quad (5.65)$$

Výpočet prvku  $K_{[3,3]}$  matice tuhosti:

$$K_{[3,3]} = EI \int_0^L B^T_{[3,1]} \cdot B_{[1,3]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \cdot \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) dx ; \quad (5.66)$$

$$K_{[3,3]} = EI \cdot \int_0^L \frac{144x^2}{L^6} - \frac{144x}{L^5} + \frac{36}{L^4} dx = EI \cdot \left( \frac{144L^3}{3L^6} - \frac{144L^2}{2L^5} + \frac{36L}{L^4} \right) ; \quad (5.67)$$

$$K_{[3,3]} = \frac{EI}{L^3} \cdot (48 - 72 + 36) = 12 \frac{EI}{L^3} . \quad (5.68)$$

Výpočet prvku  $K_{[3,4]}$  matice tuhosti:

$$K_{[3,4]} = EI \int_0^L B^T_{[3,1]} \cdot B_{[1,4]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \cdot \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) dx ; \quad (5.66)$$

$$K_{[3,4]} = EI \cdot \int_0^L -\frac{72x^2}{L^5} + \frac{60x}{L^4} - \frac{12}{L^3} dx = EI \cdot \left( -\frac{72L^3}{3L^5} + \frac{60L^2}{2L^4} - \frac{12L}{L^3} \right) ; \quad (5.67)$$

$$K_{[3,4]} = \frac{EI}{L^2} \cdot (-24 + 30 - 12) = -6 \frac{EI}{L^2} . \quad (5.68)$$

Prvky  $K_{[4,1]}$ ,  $K_{[4,2]}$  a  $K_{[4,3]}$  stanovíme následujícím způsobem:

$$K_{[4,1]} = EI \int_0^L B^T_{[4,1]} \cdot B_{[1,1]} dx = K_{[1,4]} = 6 \frac{EI}{L^2} ; \quad (5.69)$$

$$K_{[4,2]} = EI \int_0^L B^T_{[4,1]} \cdot B_{[1,2]} dx = K_{[2,4]} = 2 \frac{EI}{L} ; \quad (5.70)$$

$$K_{[4,3]} = EI \int_0^L B^T_{[4,1]} \cdot B_{[1,3]} dx = K_{[3,4]} = -6 \frac{EI}{L^2} . \quad (5.71)$$

Výpočet prvku  $K_{[4,4]}$  matice tuhosti:

$$K_{[4,4]} = EI \int_0^L B^T_{[4,1]} \cdot B_{[1,4]} dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \cdot \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) dx ; \quad (5.72)$$

$$K_{[4,4]} = EI \cdot \int_0^L \frac{36x^2}{L^4} - \frac{24x}{L^3} + \frac{4}{L^2} dx = EI \cdot \left( \frac{36L^3}{3L^4} - \frac{24L^2}{2L^3} + \frac{4L}{L^2} \right) ; \quad (5.73)$$

$$K_{[4,4]} = \frac{EI}{L} \cdot (12 - 12 + 4) = 4 \frac{EI}{L} . \quad (5.74)$$

Prvky matice zapíšeme do matice tuhosti, která má rozměry  $[4 \times 4]$  :

$$K = EI \int_0^L B^T \cdot B dx = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} & -12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} \\ 6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} & -6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} \\ -12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} & 12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} \\ 6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} & -6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} . \quad (5.75)$$

Matici  $K$  (5.75) upravíme na tvar:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} . \quad (5.76)$$

## 5.4. Ohybový moment

Pro ohybový moment, je znám vztah (5.77). Tento vztah využijeme při kontrole výpočtu porovnáním hodnoty ohybového momentu spočteného analytickým vyjádřením s hodnotou ohybového momentu spočtenou pomocí metody konečných prvků.

$$M = EI \cdot [B] \cdot \{r\}; \quad (5.77)$$

$$M = EI \cdot \left[ \frac{1}{L^2} 6\xi, \frac{1}{L} (3\xi - 1), -\frac{1}{L^2} 6\xi, \frac{1}{L} (3\xi + 1) \right] \cdot \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \\ \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}. \quad (5.78)$$

kde

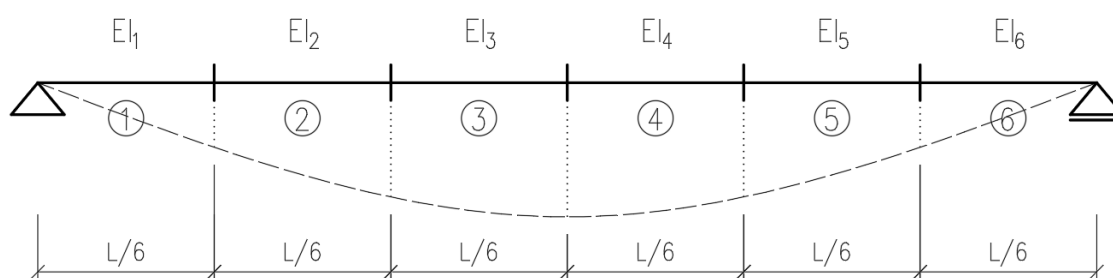
$EI$  je hodnota ohybové tuhosti pro daný prvek;

$B$  je matice druhých derivací bázových funkcí  $N_i$ ;

$r$  je vektor uzlových posunů a natočení.

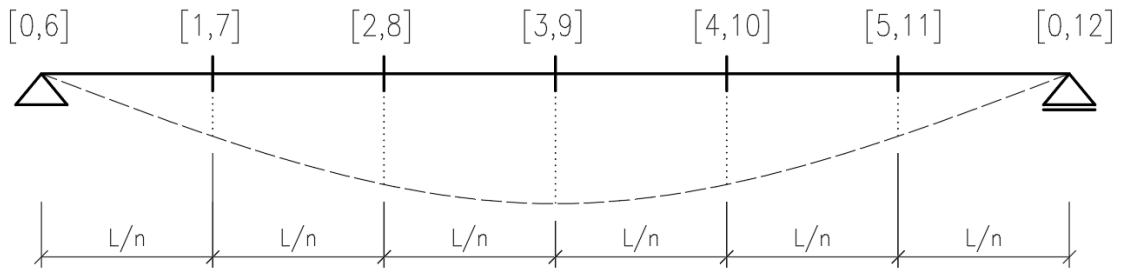
## 5.5. Tvorba výpočetního algoritmu

Princip metody konečných prvků je založen na rozdělení vyšetřovaného prvku na jednotlivé úseky a u nich spočítat veličiny, které jsou pro nás neznámé. V našem případě řešíme 1D prvek, a tudíž budeme dělit prvek pouze v jednom směru, a to ve směru osy  $x$  viz obrázek Obr.5.3. Na tomto obrázku vidíme schematicky zobrazený prsný nosník rozdělen na šest úseků:



Obr.5.3. Schéma prostého nosníku, rozdělen na šest dílků

Každý uzel rozděleného nosníku poté označíme příslušnými kódovými čísly. Použijeme stejný postup jako při sestavení výpočetního algoritmu pro průhybovou čáru, a budeme se snažit najít princip podle kterého vytvoříme univerzální zápis pro tato kódová čísla viz obrázek Obr.5.4.



Obr.5.4. Schéma prostého nosníku, rozdělen na  $n=6$  dílků, označen kódovými čísly

Nad každým uzlem na obrázku Obr.5.4. vidíme závorku, kam vpisujeme hodnotu kódového čísla. První hodnota přísluší průhybu v daném místě, druhá hodnota přísluší natočení v daném uzlu. Číslo nula představuje, že hodnotu neznámé v daném místě známe. Jsou to hodnoty, které známe z okrajových podmínek. Pro prostý nosník platí, že průhyb v krajních uzlech nosníku je nulový, hodnoty deformací neznáme pouze pro uzly po délce nosníku. Hodnoty natočení uzlů neznáme ve všech uzlech po délce nosníku i na kraji nosníku. Algoritmus pro vytváření kódových čísel pro prostý nosník můžeme zapsat následovně:

$$w_i = 1 \text{ až } (n - 1) ; \quad (5.79)$$

$$\varphi_i = n \text{ až } 2 \cdot n . \quad (5.80)$$

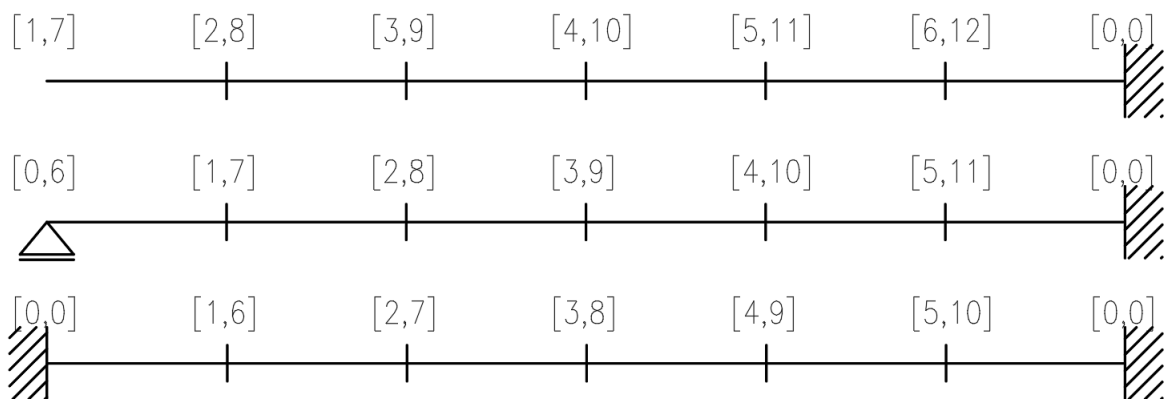
kde

$w_i$  jsou hodnoty kódových čísel pro průhyb;

$\varphi_i$  jsou hodnoty kódových čísel pro natočení;

$n$  je počet dílků po délce nosníku.

Obdobným způsobem vytvoříme tvoření kódových čísel pro ostatní statická uložení. Jejich kódová čísla budou vypadat následovně (Obr.5.5.):



Obr.5.5. Schéma konzoly, kloub-vetknutí, vetknutí-vetknutí a označeny kódovými čísly

Algoritmus pro tvorbu kódových čísel pro ostatní statická uložení zapíšeme následovně:

Konzola:

$$w_i = 1 \text{ až } n ; \quad (5.79)$$

$$\varphi_i = (n + 1) \text{ až } 2 \cdot n . \quad (5.80)$$

Kloub – vetknutí:

$$w_i = 1 \text{ až } (n - 1) ; \quad (5.79)$$

$$\varphi_i = n \text{ až } (2 \cdot n - 1) . \quad (5.80)$$

Vetknutí – vetknutí:

$$w_i = 1 \text{ až } (n - 1) ; \quad (5.79)$$

$$\varphi_i = n \text{ až } (2 \cdot n - 2) . \quad (5.80)$$

kde

$w_i$  jsou hodnoty kódových čísel pro průhyb;

$\varphi_i$  jsou hodnoty kódových čísel pro natočení;

$n$  je počet dílků po délce nosníku.

Následně si vytvoříme matici kódových čísel, kam zapíšeme vždy příslušnou čtveřici kódových čísel pro každý prvek. Matice bude mít rozměry  $[n \times 4]$ , kdy  $n$  je hodnota rovna počtu dílků a 4 jsou deformační neznámé.

Matice kódových čísel pro prostý nosník rozdělen na 6 dílků vypadá následovně:

$$M_{K\check{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 4 & 10 \\ 4 & 10 & 5 & 11 \\ 5 & 11 & 0 & 12 \end{bmatrix} . \quad (5.81)$$



Obecně pro  $n$  dílků na které rozdělíme prostě uložený nosník, můžeme zapsat:

$$M_{K\check{c}} = \begin{bmatrix} 0 & n & 1 & n+1 \\ 1 & n+1 & 2 & n+2 \\ 2 & \dots & 3 & n+3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & (n-1) & (2n-1) \\ (n-1) & (2n-1) & 0 & 2n \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

Následně vytvoříme globální matici tuhosti celého nosníku rozděleného na určitý počet dílků. K sestavení globální matice použijeme matici tuhosti pro jeden prvek  $K^e$  (5.76). Z těchto lokálních matic sestavíme globální matici tuhosti. Globální matice bude čtvercová a její velikost se bude rovnat největšímu kódovému číslu příslušného nosníku. Do prázdné globální matice  $K^G$  o velikosti  $[\max(K\check{c}), \max(K\check{c})]$  budeme vkládat přídavky od jednotlivých lokálních matic tuhosti.

Další krok, který zbývá, je sestavit vektor pravé strany, kde se nacházejí hodnoty zatížení v příslušných uzlech. Pro nosník zatížen rovnoměrným spojitým zatížením, se do příslušného uzlu započítá velikost zatížení, která podle velikosti zatěžovací šířky, která danému bodu přísluší. V případě zatížení osamělým břemenem, se uzel vytvoří přímo pod zadanou silou a její velikost bude působit pouze v tomto uzlu.

Pokud máme spočtenou globální matici tuhosti a k ní příslušný vektor zatížení, vypočteme neznámý vektor  $r$  ze soustavy lineárních rovnic:

$$K^G \cdot r = f. \quad (5.83)$$

kde

$K^G$  je globální matice tuhosti celého nosníku;

$r$  je vektor neznámých natočení a posunutí;

$f$  je vektor uzlových zatížení.

Velikost vektoru  $r$  je rovno počtu neznámých na nosníku a příslušné hodnoty deformací a pootočení přísluší kódovým číslům, jak jsme si je zavedli. V případě jiného číslování kódovými čísly, by nám vyšly stejné hodnoty ale v pořadí jiného číslování.

## 5.6. Kontrola výpočetního algoritmu ve SCIA Engineer 16.1

Správnost sestaveného algoritmu ověříme pomocí programu SCIA Engineer verze 16.1. Použijeme lineární výpočet železobetonového průvlastku a porovnáme výstupní hodnoty z obou výpočtů.

Vstupní hodnoty do výpočtu ve SCIA Engineer:

Data o projektu

Základní data Funkcionalita Akce Ochrana

Data

Jméno: -

Část: -

Popis: -

Autor: -

Datum: -

Materiál

Beton	<input checked="" type="checkbox"/>
Materiál	C20/25
Materiál výztuže	B 500B
Ocel	<input type="checkbox"/>
Dřevo	<input type="checkbox"/>
Zdivo	<input type="checkbox"/>
Ostatní	<input type="checkbox"/>
Hlinik	<input type="checkbox"/>

Konstrukce: Rám XZ

Model: Jeden

Norma

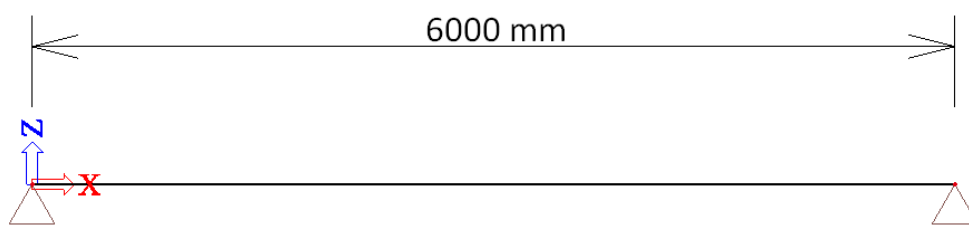
Národní norma: EC - EN

Národní dodatek: Česká CSN-EN NA

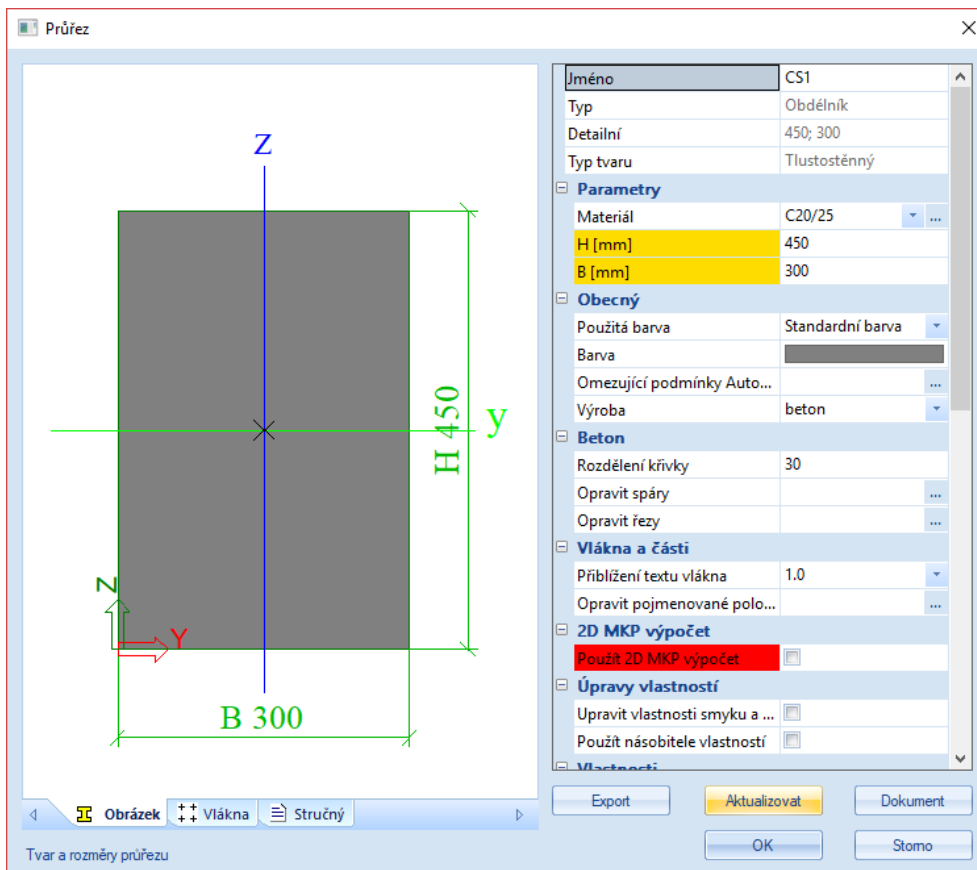
Tlustostěnné betonové průřezy: pokročilá 2D MKP metoda je vypnuta!

OK Zrušit

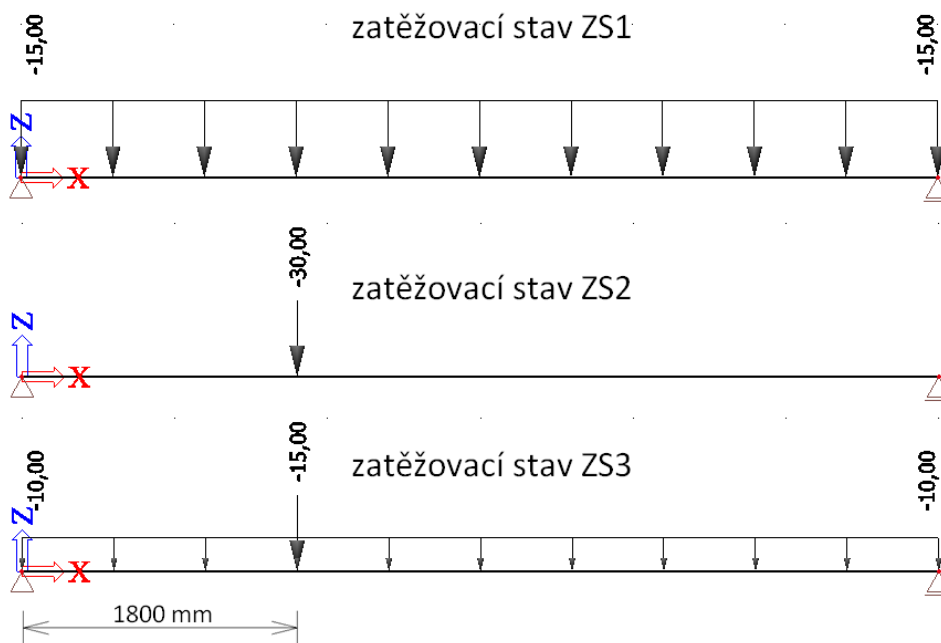
Obr.5.6. Materiálové vlastnosti



Obr.5.7. Statické schéma uložení nosníku a jeho délka



Obr.5.8. Průřez železobetonového nosníku

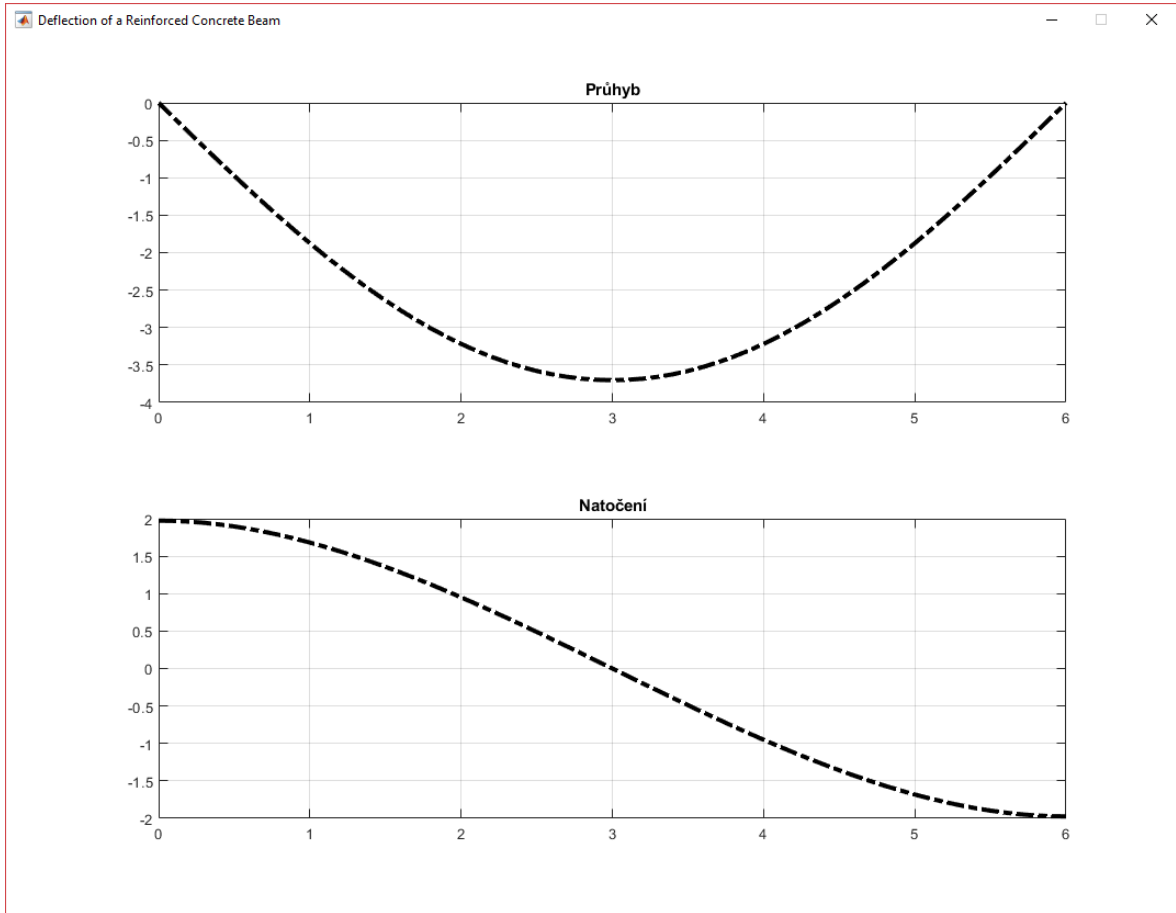


Obr.5.9. Zatěžovací stavy působící na nosník





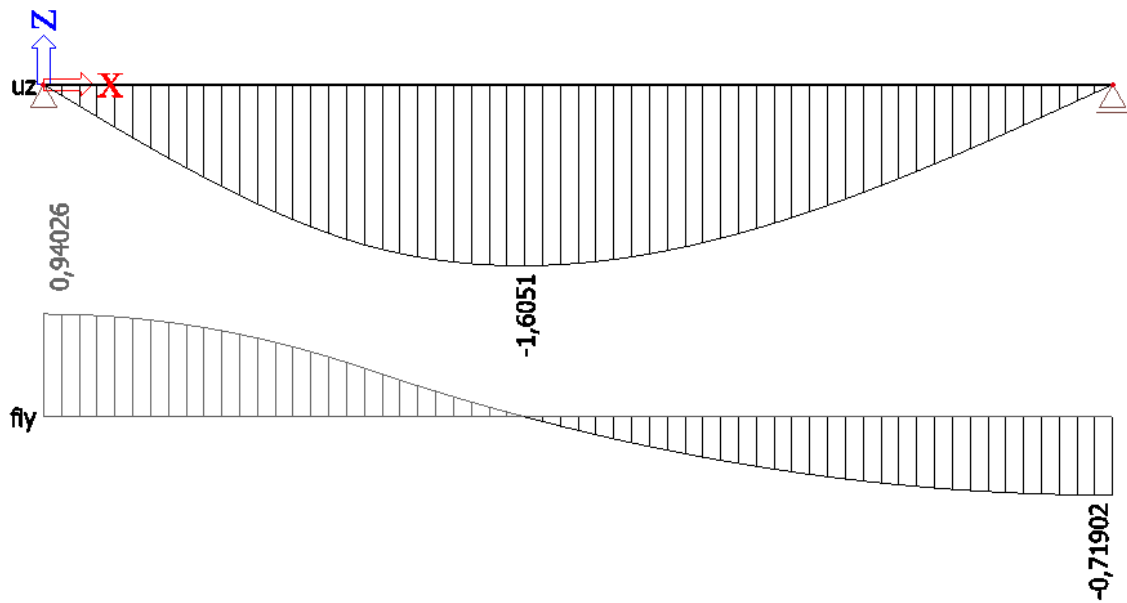
Obr.5.15. Výsledky Matlab – zatěžovací stav 1



Obr.5.16. Grafické výsledky Matlab – zatěžovací stav 1

Porovnání výsledků – Zatěžovací stav 2:

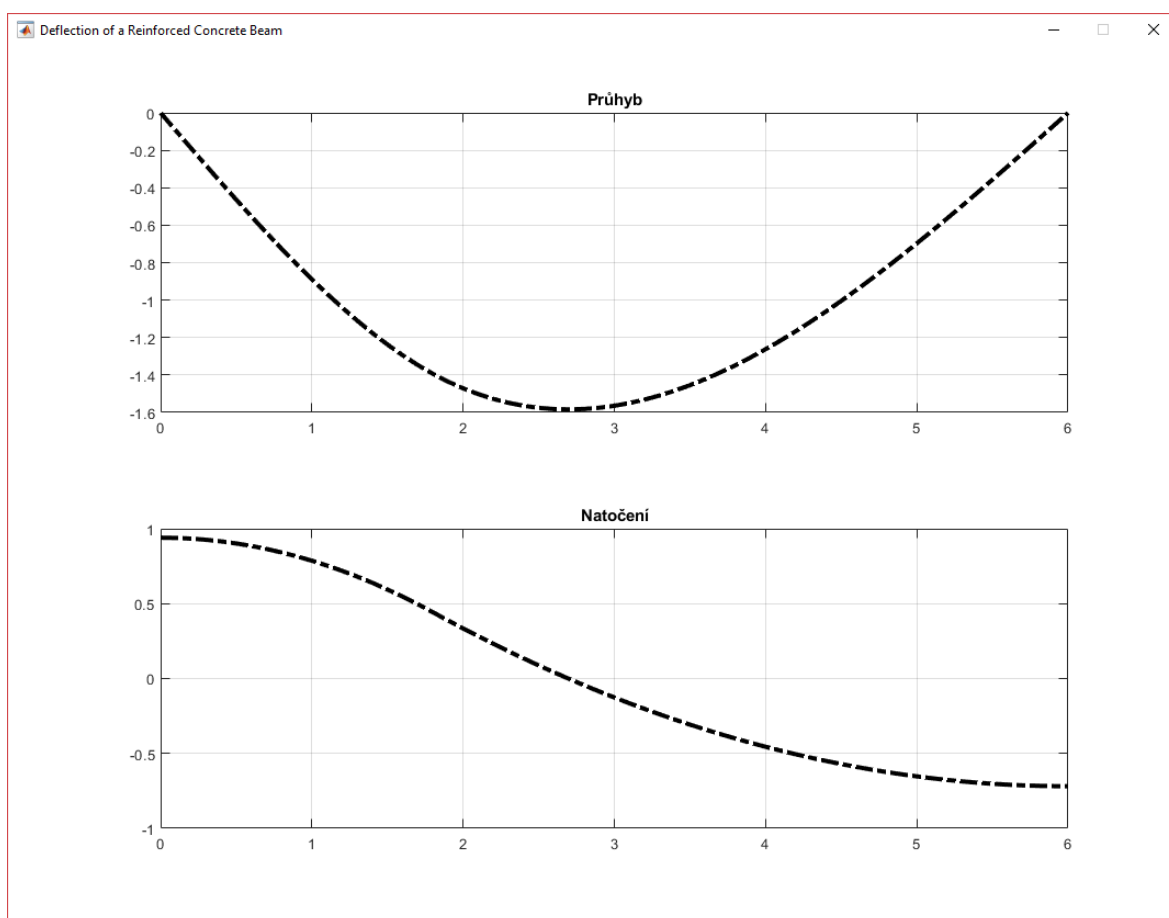
SCIA Engineer:



Obr.5.17. Výsledky SCIA – zatěžovací stav 2

```
>> NosnikMKP_ESA  
  
MAX_w =  
    -1.5840  
  
MAX_fi =  
    0.9402  
  
MIN_fi =  
   -0.7190
```

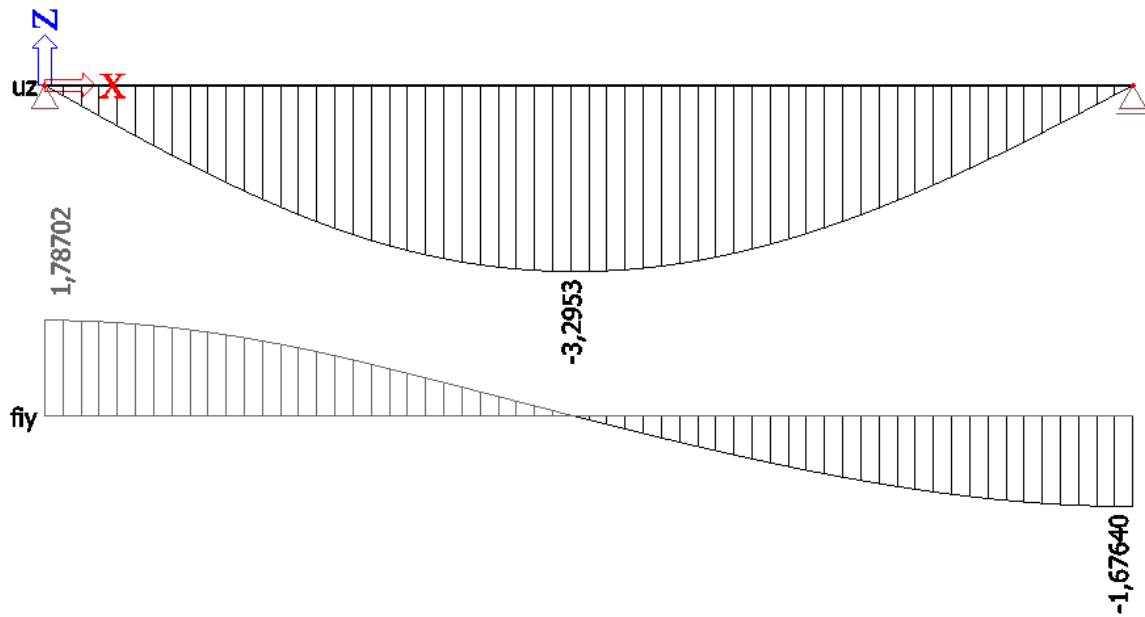
Obr.5.18. Výsledky Matlab – zatěžovací stav 2



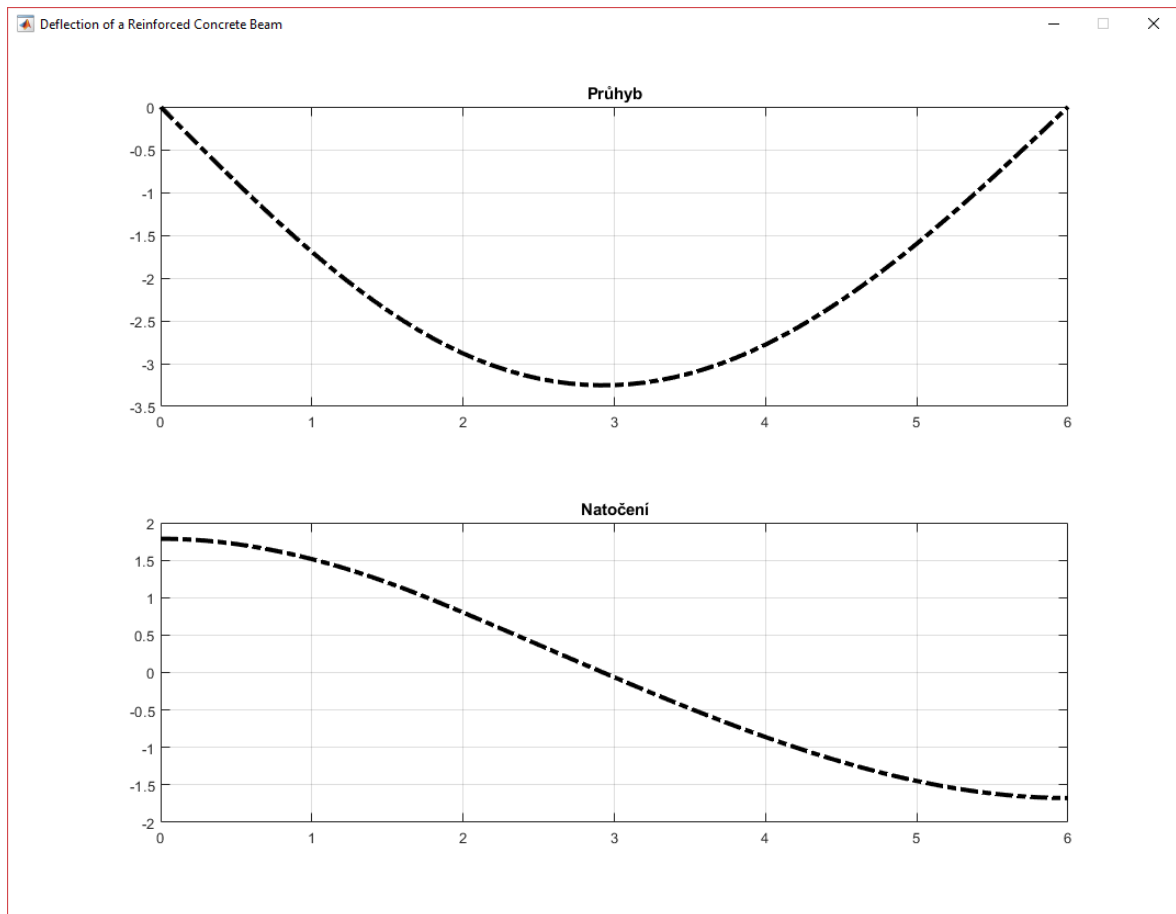
Obr.5.19. Grafické výsledky Matlab – zatěžovací stav 2

### Porovnání výsledků – Zatěžovací stav 3:

SCIA Engineer:



Obr.5.20. Výsledky SCIA – zatěžovací stav 3



Obr.5.21. Grafické výsledky Matlab – zatěžovací stav 3



```

>> NosnikMKP_ESA

MAX_w =

    -3.2528

MAX_fi =

    1.7866

MIN_fi =

   -1.6760

```

Obr.5.22. Výsledky Matlab – zatěžovací stav 3

V tabulce Tab.5.1 vidíme, že výsledky jsou téměř stejné a hodnoty se převážně mění až na druhém desetinném místě. Hodnoty všech lineárních průhybů jsou v milimetrech. Hodnoty natočení jsou v  $\text{rad} \cdot 10^3$ .

Tab.5.1 – Tabulkové porovnání výsledků

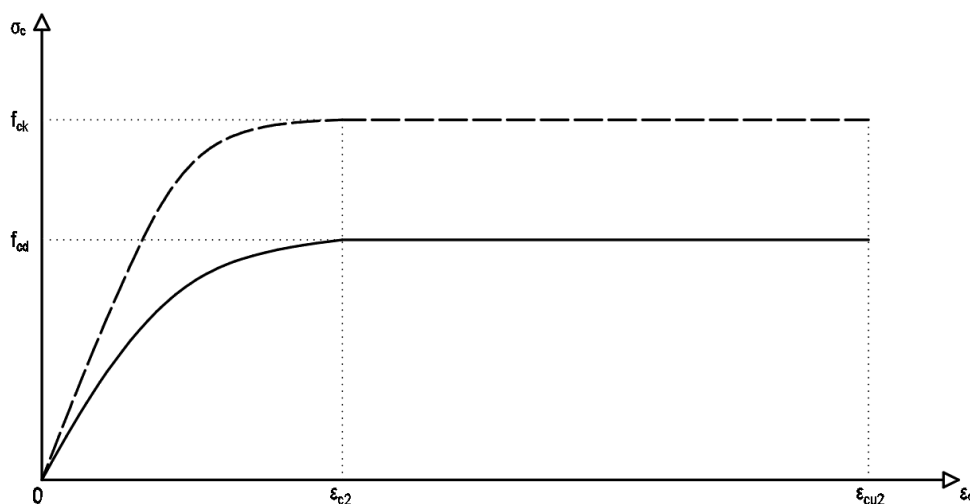
	ZS1			ZS2			ZS3		
	w	$\varphi^+$	$\varphi^-$	w	$\varphi^+$	$\varphi^-$	w	$\varphi^+$	$\varphi^-$
SCIA Engineer	-3,75	1,98	-1,98	-1,61	0,94	-0,72	-3,29	1,79	-1,68
Matlab	-3,70	1,97	-1,97	-1,58	0,94	-0,72	-3,25	1,79	-1,68

V závěru lze říci, že sestavený algoritmus funguje správně.

## 6. Stanovení materiálových vlastností

### 6.1. Materiálové vlastnosti betonu

Pro navrhování průřezů dle normy ČSN EN 1992-1-1 [1] byl použit parabolicko - rektangulární pracovní diagram pro beton namáhaný tlakem viz Obr.6.1. [1]:



Obr.6.1. Parabolicko-rectangulární pracovní diagram pro beton namáhaný tlakem [1]

$$\sigma_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad \text{pro } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} ; \quad (6.1a)$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{pro } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} ; \quad (6.1b)$$

kde

$n$  je exponent podle tabulky 3. 1 v [1];

$\varepsilon_{c2}$  je poměrné přetvoření při dosažení maximální pevnosti podle tabulky 3.1 v [1];

$\varepsilon_{cu2}$  je mezní poměrné přetvoření podle tabulky 3. 1 v [1].

(Pozn.: tabulku 3.1 lze dohledat v Příloze P5.)

Tento pracovní diagram betonu v tlaku nezohledňuje dobu působení zatížení. Dle normy ČSN EN 1992-1-1 [1] lze dobu působení zatížení zjednodušeným způsobem uvažovat prostřednictvím účinného součinitele dotvarování  $\varphi_{ef}$ , který při použití spolu s návrhovým zatížením, udává deformace (křivost) od dotvarování odpovídající kvazi-stálému zatížení:

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(t,t_0)} \cdot \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}}. \quad (6.2)$$

kde

$\varphi_{(t,t_0)}$  je konečný součinitel dotvarování podle (3.4);

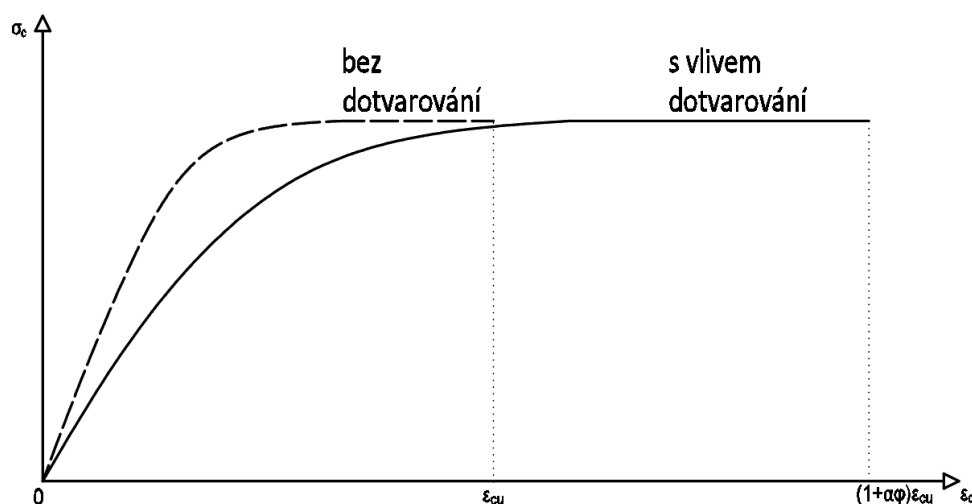
$M_{0Eqp}$  je ohybový moment prvního řádu od kvazistálé kombinace zatížení (MSP);

$M_{0Ed}$  je ohybový moment prvního řádu od návrhové kombinace zatížení (MSÚ).

Jestliže se  $\frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}}$  v prvcích nebo konstrukci mění, dovoluje se stanovit poměr s maximálním momentem, nebo použít reprezentativní průměrnou hodnotu momentu. [1]

$\varphi_{ef}$  je také možné určit na základě celkových ohybových momentů a při působení kvazistálého zatížení s  $\varphi_{ef} = \varphi_{(t,t_0)}$ . [1]

Dotvarování lze zohlednit vynásobením všech hodnot přetvoření v pracovním diagramu betonu součinitelem  $(1 + \varphi_{ef})$ , kde  $\varphi_{ef}$  je účinný součinitel dotvarování (6.2). [1]



Obr.6.2. Vliv dotvarování pomocí modifikace pracovního diagramu betonu v tlaku [11]

Dotvarování v betonu vede k postupnému zvyšování přetvoření při konstantním namáhání.

Časově měnící se napětí vyvolané trvalým zatížením betonu je dáno: [12]

$$\varepsilon_{c(t,t_0)} = \varepsilon_{c,el}(1 + \varphi_{(t,t_0)}); \quad (6.3)$$

$$\varepsilon_{c(\infty,t_0)} = \varepsilon_{c,el}(1 + \varphi_{(\infty,t_0)}); \quad (6.4)$$

kde

$\varepsilon_{c(t,t_0)}$  je hodnota přetvoření v čase  $t$  ;

$\varepsilon_{c(\infty,t_0)}$  je hodnota přetvoření v čase nekonečno;

$\varepsilon_{c,el}$  je hodnota elastického přetvoření;

$\varphi_{(t,t_0)}$  je hodnota součinitele dotvarování v čase  $t$  ;

$\varphi_{(\infty,t_0)}$  je hodnota součinitele dotvarování v čase nekonečno.

Hodnota  $\varepsilon_{c,el}$  odpovídá hodnotě napětí v pracovním diagramu betonu v tlaku pro krátkodobé zatížení Obr.6.1. Efekt dotvarování lze zobrazit protažením pracovního diagramu betonu v tlaku v horizontálním směru pomocí součinitele  $(1 + \varphi_{(t,t_0)})$  [12] Obr.6.2. a upravení výrazu (6.3) lze zapsat:

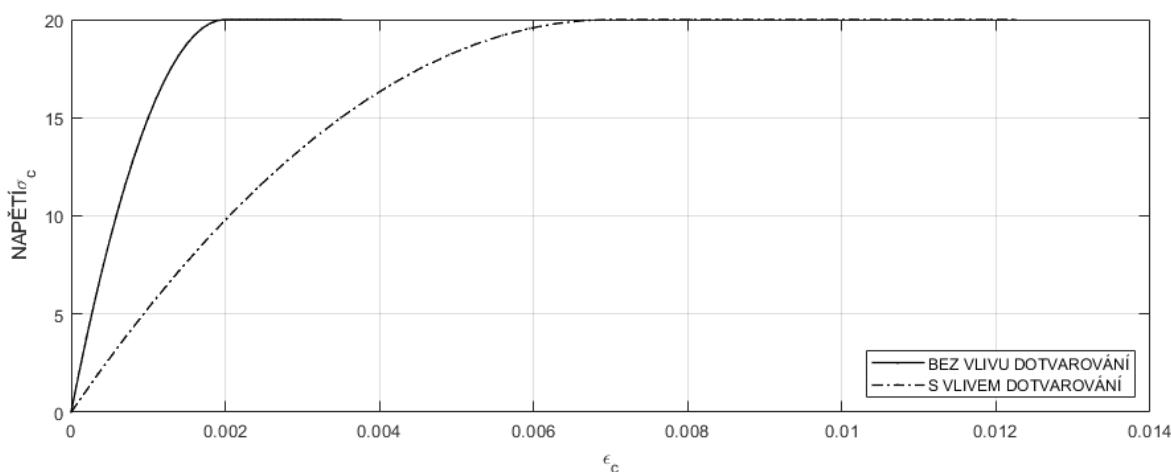
$$\varepsilon_{c(t,t_0)} = \varepsilon_{c,el}(1 + \varphi_{(t,t_0)}) = \varepsilon_{c,el} + \varepsilon_{c,el} \cdot \varphi_{(t,t_0)} = \varepsilon_{c,el} + \varepsilon_{c,\varphi(t,t_0)} . \quad (6.5)$$

Je zřejmé, že beton bude schopen přenést dlouhodobé účinky zatížení, vzhledem k uvažování že celkové přetvoření betonu se skládá ze dvou složek, z přetvoření elastického a přetvoření od dotvarování v daném čase  $t$ , viz výraz (6.5).

Do normových vzorců (6.1a) a (6.1b) parabolicko - rektangulárního pracovního diagramu betonu v tlaku budeme dosazovat pouze elastické hodnoty přetvoření  $\varepsilon_{c,el}$ , které získáme úpravou výrazu (6.5):

$$\varepsilon_{c,el} = \frac{\varepsilon_{c(t,t_0)}}{(1 + \varphi_{(t,t_0)})} . \quad (6.6)$$

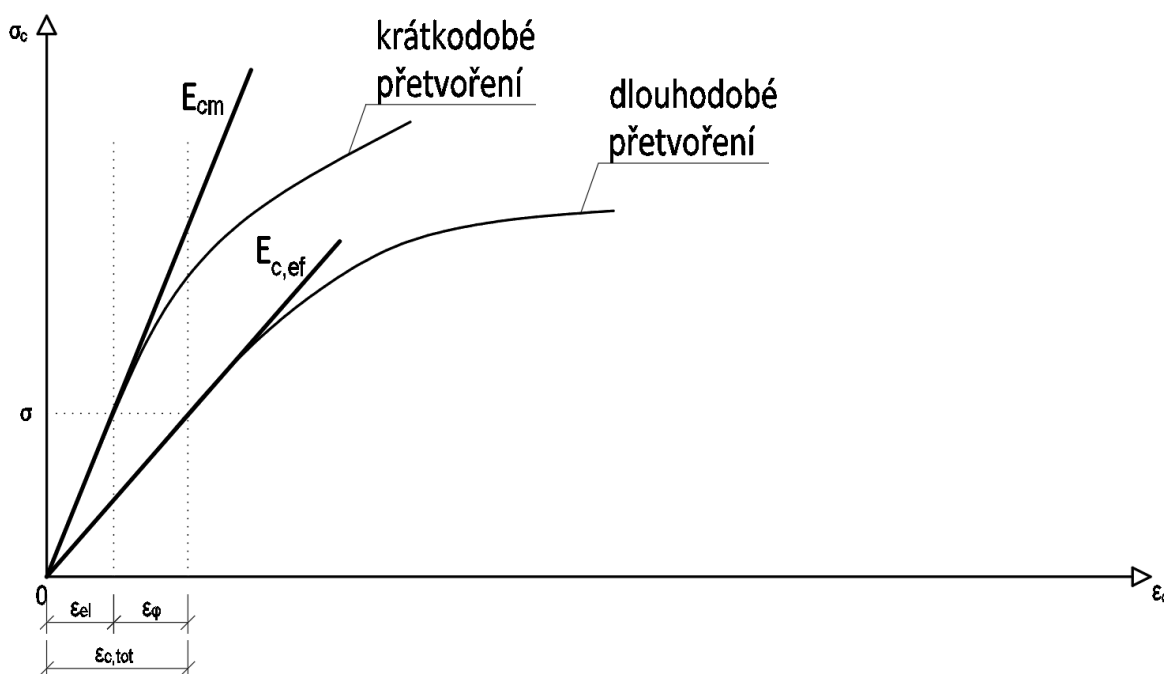
Na obrázku Obr.6.3. je v měřítku vykreslen pracovní diagram betonu v tlaku pro návrhovou pevnost betonu v tlaku  $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$  a součinitel dotvarování  $\varphi_{(t,t_0)} = 2,5$  .



Obr.6.3. Pracovní diagram betonu v tlaku pro  $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$  a  $\varphi_{(t,t_0)} = 2,5$

## 6.2. Modul pružnosti betonu

Vzhledem k faktu, že ve výpočtech stanovení napětí v tlačeném betonu zohledňujeme účinek dotvarování, je nutné tento fakt zohlednit i při určování dalších materiálových vlastností.



Obr.6.4. Pracovní diagram betonu [15]

Na obrázku Obr.6.4. je schéma pracovního diagramu betonu pro účinky krátkodobého i dlouhodobého zatížení, z něhož lze odečíst sečnový modul betonu pro krátkodobé zatížení  $E_{cm}$  a sečnový účinný modul pružnosti betonu pro dlouhodobé zatížení s vlivem dotvarování  $E_{c,ef}$ .

Vzájemný vztah lze vyjádřit následovně, viz (3.3) [1]:

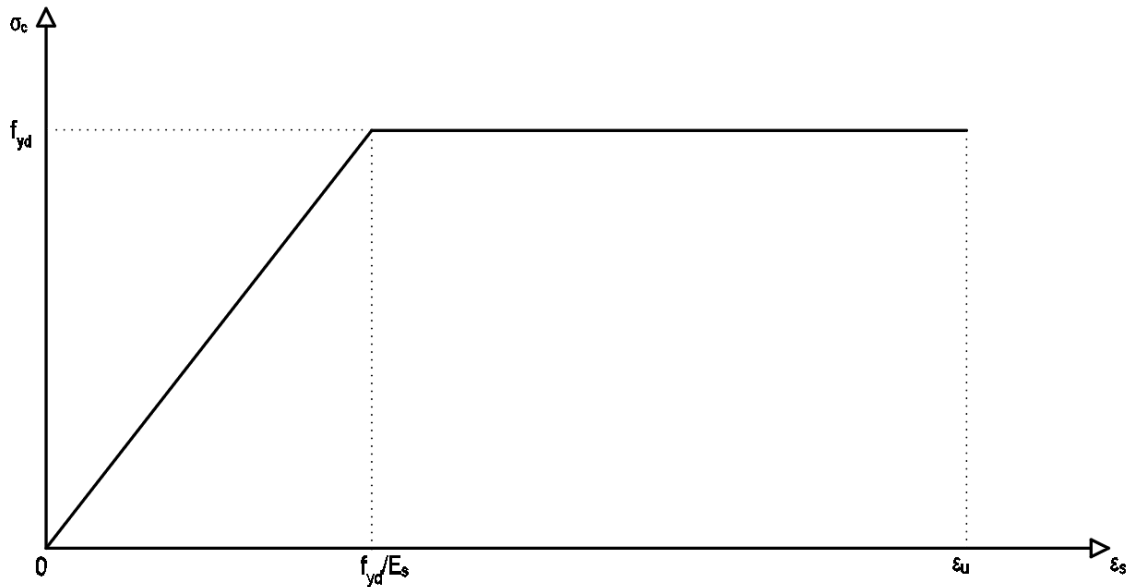
$$E_{c,ef} = \frac{E_{cm}}{(1+\varphi(t,t_0))}. \quad (6.7)$$

Norma ČSN EN 1992-1-1 stanovuje, že při stanovení tuhosti se má uvažovat účinný modul pružnosti betonu. [1]

Na obrázku Obr.6.4. vidíme grafické vyjádření vztahu (6.5). Zároveň zde vidíme, že poměrné přetvoření od dotvarování není závislé na napětí, tudíž na účinkách zatížení.

### 6.3. Materiálové vlastnosti betonářské oceli

Při běžném návrhu lze použít následující návrhový pracovní diagram betonářské oceli s vodorovnou větví na úrovni meze kluzu bez omezení poměrného přetvoření [1]:



Obr.6.5. Schéma návrhového pracovního diagramu betonářské oceli [1]

$$\sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s \quad \text{pro } 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} ; \quad (6.8a)$$

$$\sigma_s = f_{yd} \quad \text{pro } \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_u ; \quad (6.8b)$$

kde

$f_{yk}$  je charakteristická mez kluzu;

$f_{yd}$  je návrhová mez kluzu, kde  $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$ ;

kde

$\gamma_s$  je součinitel spolehlivosti výztuže;

$\gamma_s = 1,15$  ... pro mezní stav únosnosti;

$\gamma_s = 1,00$  ... pro mezní stav použitelnosti;

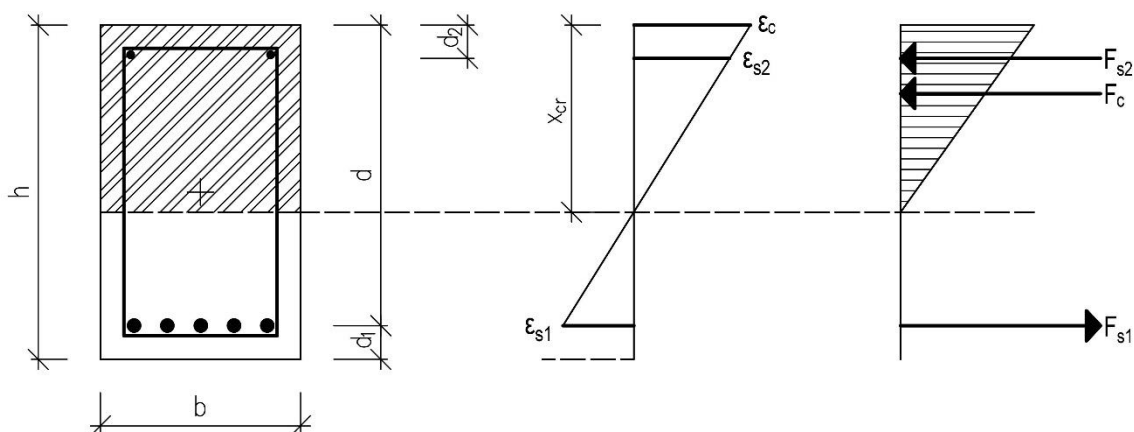
$\varepsilon_s$  je poměrné přetvoření betonářské oceli;

$\varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_s$ ;

$E_s$  je modul pružnosti oceli,  $E_s = 200 \text{ GPa}$ .

#### 6.4. Pracovní diagram průřezu

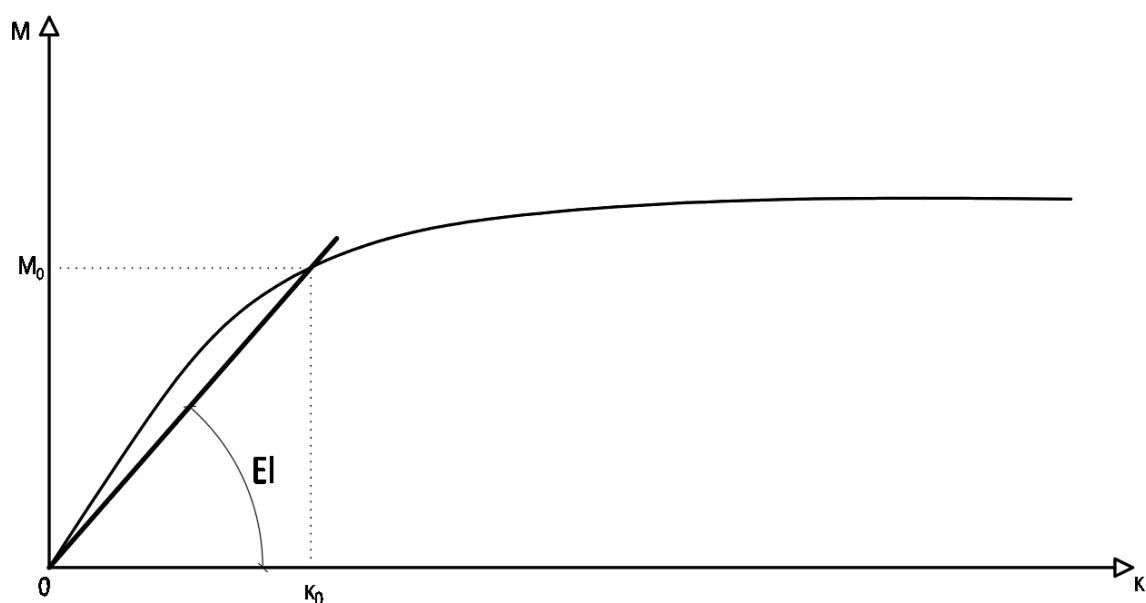
Pro libovolný průřez lze sestavit pracovní diagram průřezu. V našem případě budeme uvažovat betonový obdélníkový průřez vyztužený při horním i spodním povrchu betonářskou výztuží viz Obrázek Obr.6.6.



Obr.6.6. Schéma obdélníkového železobetonového průřezu [2]

Tento diagram následně využijeme k odečtení přesné hodnoty ohybové tuhosti pro libovolný železobetonový prvek. Sestavení proběhne ve dvou cyklech a s využitím materiálových vlastností, kterou jsou popsány v kapitolách 6.1. až 6.3.

Pracovní diagram průřezu je závislý na křivosti a ohybovém momentu. Na vodorovné ose se nachází hodnoty křivosti a na svislé ose jsou vyneseny hodnoty ohybového momentu. Sečnou metodou [13] v příslušném místě pro určitou hodnotu křivosti nebo ohybového momentu, lze získat hodnotu ohybové tuhosti  $EI$  viz Obr.6.7.



Obr.6.7. Schéma pracovního diagramu železobetonového průřezu [13]

Sestavení diagramu průřezu, jak již bylo řečeno, probíhá ve dvou cyklech. První cyklus stanovuje hodnotu křivosti, druhý cyklus probíhá uvnitř prvního cyklu a hledá hodnotu výšky tlačené oblasti betonu  $x$ , pro zadanou křivost  $\kappa$  z prvního cyklu, tak aby v průřezu nastala rovnováha vnitřních sil.

#### 6.4.1. Algoritmus výpočtu

V prvním kroku zvolíme hodnotu křivosti  $\kappa^e$ , pro kterou budeme vyšetřovat příslušnou hodnotu ohybové tuhosti, kterou následně vyneseme do pracovního diagramu průřezu. V našem případě budeme hodnoty křivosti  $\kappa^e$  stanovovat z intervalu  $\langle 0, 0.01 \rangle$  a jako krok zvolíme hodnotu 0.0005, tudíž nás první cyklus bude závislý na hodnotě křivosti. Do tohoto cyklu vložíme druhý cyklus, který bude závislý na hodnotě přetvoření v horních vláknech tlačného betonu  $\varepsilon_c^e$ . Hodnoty přetvoření stanovujeme z intervalu  $\langle 0, 0.0035 \rangle$  a snažíme se pro zadanou křivost najít příslušnou hodnotu přetvoření horních vláken betonu, tak aby v průřezu nastala rovnováha vnitřních sil.

Výpočet tlačené výšky betonu  $x^e$ , pro zadanou křivost  $\kappa^e$  a hodnotu přetvoření horních vláken  $\varepsilon_c^e$ :

$$x^e = \frac{\varepsilon_c^e}{\kappa^e}; \quad (6.9)$$

kde

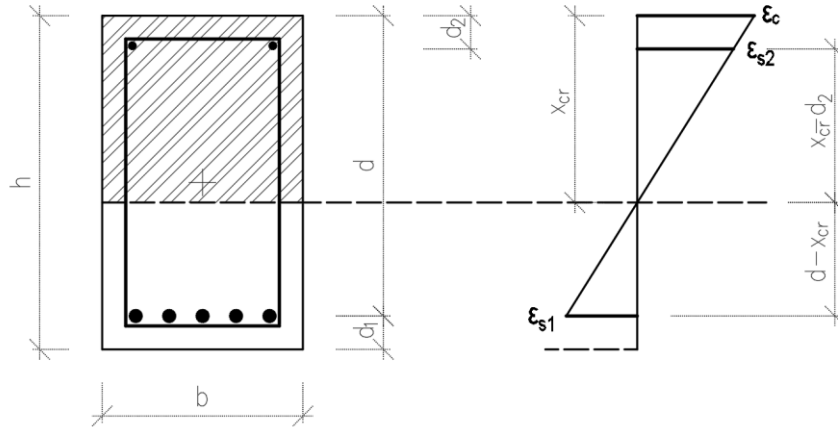
$\varepsilon_c^e$  je přetvoření v horních vláknech tlačného betonu;

$\kappa^e$  je zvolená hodnota křivosti z prvního cyklu.

Výpočet provedeme pouze pokud hodnoty  $x^e$  budou v intervalu  $\langle 0, h \rangle$ , kde  $h$  je výška průřezu, a tudíž v žádném případě nemůže výška tlačené oblasti betonu přesáhnout tuto hodnotu.

Dále si stanovíme hodnoty přetvoření ve spodní výztuži  $\varepsilon_{s1}^e$  a v horní výztuži  $\varepsilon_{s2}^e$  z podobnosti trojúhelníků, dle obrázku Obr.6.8.





Obr.6.8. Schéma železobetonového průřezu

$$\varepsilon_{s1}^e = \varepsilon_c^e \cdot \frac{x^e - d}{x^e}; \quad (6.10)$$

$$\varepsilon_{s2}^e = \varepsilon_c^e \cdot \frac{x^e - d_2}{x^e}; \quad (6.11)$$

kde

$\varepsilon_{s1}^e$  je přetvoření ve spodní ohybové výztuži;

$\varepsilon_{s2}^e$  je přetvoření v horní ohybové výztuži.

Nyní spočteme velikosti napětí všech tří složek z pracovních diagramů. Pro beton použijeme pracovní diagram betonu s vlivem dotvarování, a tudíž použijeme vzorec (6.6) pro stanovení napětí pouze pro složku poměrného přetvoření bez dotvarování. Napětí ve výztuži spočteme ze vzorce (6.8). Pro dosažení nejpřesnějších výsledků rozdělíme tlačenou oblast betonu na proužky cca o výšce 1 mm, spočteme míru přetvoření pro každý proužek zvlášť a účinky sečteme.

Tento výpočetní postup budeme opakovat tak dlouho dokud nenalezneme pro zadanou křivost  $\kappa^e$  a k ní odpovídající hodnotu přetvoření horních vláken  $\varepsilon_c^e$ , tak aby platila rovnováha vnitřních sil na průřezu:

$$0 = \sum F_{ci} + F_{s1} + F_{s2}; \quad (6.12)$$

kde

$F_{ci}$  je návrhová hodnota vnitřní síly od tlačeného betonu v jednotlivých proužcích;

$F_{s1}$  je návrhová hodnota vnitřní síly od tažené výztuže;

$F_{s2}$  je návrhová hodnota vnitřní síly od tlačené výztuže.

V případě, že nalezneme kombinaci vnitřních sil, která bude vyhovovat podmínce (6.12) s velmi malou chybou, přistoupíme k výpočtu ohybového momentu:

$$M^e = \sum(F_{ci} \cdot z_{ci}) + F_{s1} \cdot z_{s1} + F_{s2} \cdot z_{s2} ; \quad (6.13)$$

kde

$z_{ci}$  je délka ramene pro jednotlivé betonové proužky;

$z_{s1}$  je délka ramene pro taženou výztuž;

$z_{s2}$  je délka ramene pro tlačnou výztuž.

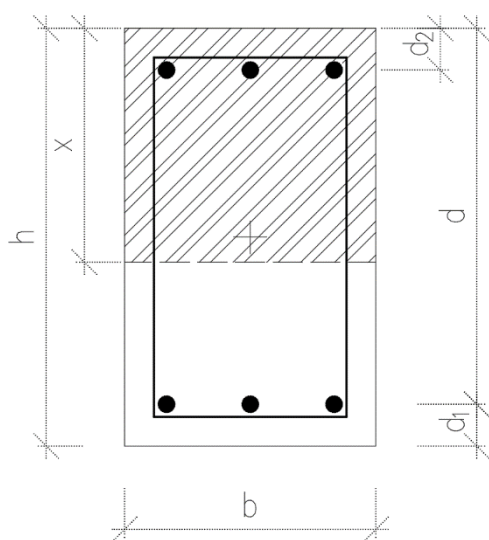
Hodnotu ohybového momentu  $M^e$ , která přísluší zvolené křivosti  $\kappa^e$  v každém kroku zapíšeme. V posledním kroku vyneseme hodnoty křivosti a jim příslušných ohybových momentů a tím sestavíme pracovní diagram průřezu.

#### 6.4.2. Kontrola algoritmu výpočtu

Pro kontrolu správnosti tohoto algoritmu byl sestaven vzorový pracovní diagram průřezu a porovnán s programem RCC.exe dostupný z:

<http://people.fsv.cvut.cz/~stefarad/software/rcc/rcc.cz.html>

Vstupní hodnoty do výpočtu:



beton : C20/25

$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$  ... mez kluzu oceli

$b = 300 \text{ mm}$  ... šířka průřezu

$h = 450 \text{ mm}$  ... výška průřezu

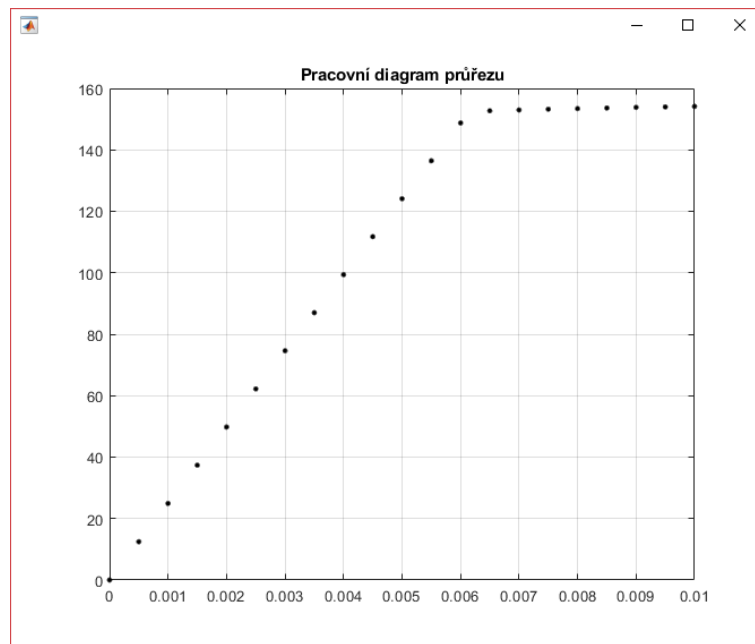
$d_1 = d_2 = 40 \text{ mm}$  ... vzdálenost výztuže od kraje

$A_{s1} = A_{s2} = 950 \text{ mm}^2$  ... plocha výztuže

$A_s = 1900 \text{ mm}^2$  ... celková plocha výztuže

Obr.6.9. Schéma železobetonového průřezu

Výsledný pracovní diagram průřezu:

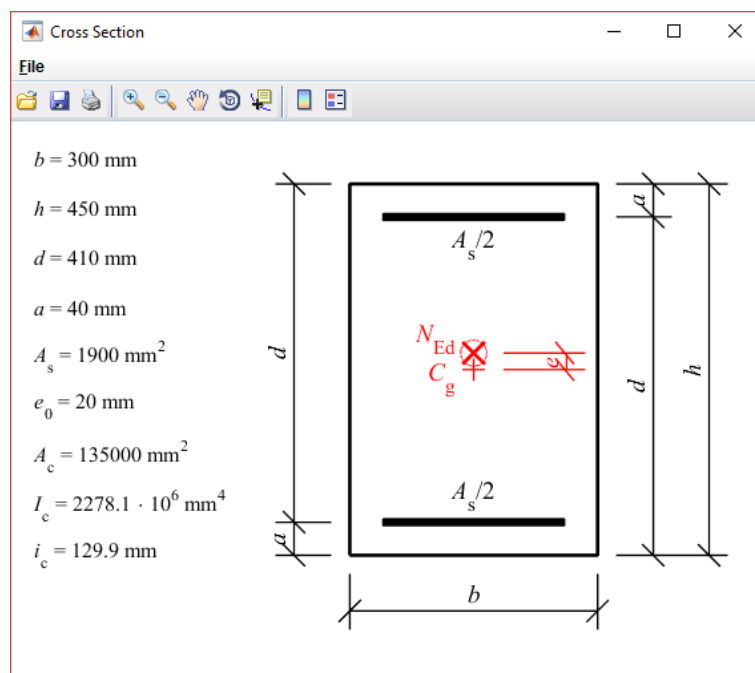


Obr.6.10. Pracovní diagram průřezu spočten v rámci této práce

Vstupní hodnoty do programu RCC.exe:

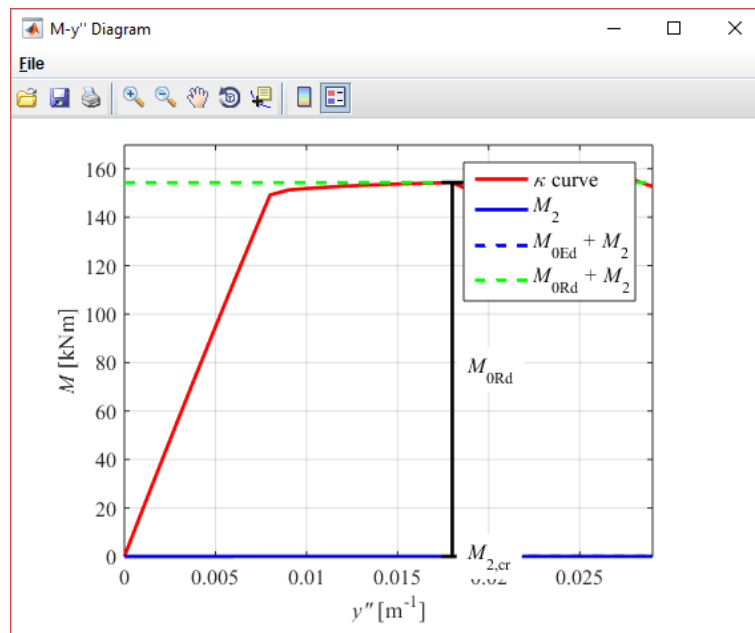
Materials	
Concrete	C20/25 ?
$\varphi_{(\infty, t_0)}$	0 ?
$f_{yk}$ [MPa]	500 ?

Obr.6.11. Vstupní hodnoty výpočtu v programu RCC.exe



Obr.6.12. Vstupní hodnoty výpočtu v programu RCC.exe

Výstupní diagram z programu RCC.exe:



Obr.6.13. Pracovní diagram průřezu spočtený v programu RCC.exe

Vidíme, že obě křivky diagramů jsou stejné nebo velmi podobné, tudíž lze říci, že výpočetní algoritmus pracuje správně.

## 7. Prostředí programu

V rámci této práce byly vytvořeny tři aplikace v programovacím jazyce Matlab. Všechna okna programů, které byly vytvořeny, jsou stejná. V těchto programech se mění pouze výpočetní metody výpočtu průhybu. Aplikace jsou volně dostupné na adrese:

<http://people.fsv.cvut.cz/www/stefarad/software/pruhyb/pruhyb.cz.html>

### Struktura programu:

Program je tvořen pěti okny. První okno je úvodní, kde se uprostřed objeví stručné informace o programu. Tento popis ve vzorovém okně (Obr.7.1.) není zobrazen. Toto okno obsahuje jediné tlačítko, které umožňuje vstup dál do programu.

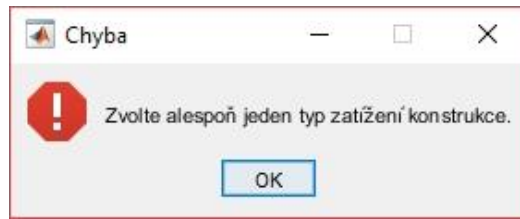


Obr.7.1. Úvodní okno programu

Druhé okno je rozděleno do tří oblastí (Obr.7.2.). První oblast je výběr statického schéma konstrukce, uživatel má možnost výběru jedné ze čtyř variant. První varianta je konstrukce konzoly, druhá varianta představuje prostý nosník, třetí varianta je uložení typu kloub - vetknutí a poslední varianta je typu vetknutí - vetknutí. V této oblasti si uživatel musí vybrat právě jedno statické schéma. Druhá oblast je zaměřená na výběr typu zatížení, uživatel volí mezi rovnoměrným spojitým zatížením nebo osamělou silou působící na konstrukci, popřípadě jejich kombinací.

Obr.7.2. Druhé okno programu

Pokud uživatel nezvolí ani jeden typ zatížení, program uživatele vyzve (Obr.7.3.), aby vybral alespoň jeden typ zatížení.



Obr.7.3. Chybová hláška – chybí typ zatížení konstrukce

Třetí oblast je výběr základních vstupních údajů pro výpočet průhybu. Uživatel zde vybírá pevnostní třídu betonu a třídu výztuže. Tyto dvě hodnoty uživatel vybírá z přednastaveného seznamu z důvodu, že na další stránce se předvyplní materiálové vlastnosti těchto materiálů, například pevnost či modul pružnosti. Tyto předvyplněné hodnoty uživatel může ručně přepsat. Po vyplnění všech požadovaných informací lze tlačítkem přejít dále k dalšímu kroku.

Vstupní hodnoty pro výpočet průhybu:	
Kategorie konstrukce:	A - Obytné plochy
Délka nosníku:	6 m
Rozměry průřezu:	- výška průřezu: $h=$
	0.45 m
	- šířka průřezu: $b=$
	0.3 m
Stálé charakteristické zatížení - $g$ :	10 kN/m
Proměnné charakteristické zatížení - $q$ :	5 kN/m
Stálé charakteristické zatížení - $G$ :	5 kN
Proměnné charakteristické zatížení - $Q$ :	3 kN
Vzdálenost bodové síly od levé podpory:	3 m
Třída cementu:	CEM N
Modul pružnosti betonu:	31 GPa
Modul pružnosti oceli:	200 GPa
Průměr dolní ohybové výztuže:	10 mm
Počet prutů dolní ohybové výztuže:	3 ks
Průměr horní výztuže:	10 mm
Počet prutů horní výztuže:	3 ks
Průměr třmínků:	10 mm
Krytí třmínků:	20 mm
Relativní vlhkost okolního prostředí:	50 %
Čas vnesení zatížení:	28 dní
Stáří betonu ve vyšetřovaném čase:	100 let

zpět      výpočet

Obr.7.4. Třetí okno programu

Na dalším okně programu uživatel vybírá či zadává vstupní informace pro výpočet průhybu viz obrázek Obr.7.4. V tomto případě uživatel zvolil, že zatížení na nosník bude jak od rovnoměrného spojitého zatížení, tak i od osamělé síly. Pokud by uživatel jedno z těchto zatížení nezvolil, okna pro dané zatížení by se stala neaktivní viz obrázek Obr.7.5. a Obr.7.6.

Numerická analýza průhybu na železobetonovém nosníku

**Vstupní hodnoty pro výpočet průhybu:**

Kategorie konstrukce: A - Obytné plochy

Délka nosníku: 6 m

Rozměry průřezu: - výška průřezu: h= 0.45 m  
- šířka průřezu: b= 0.3 m

Stálé charakteristické zatížení - g: 10 kN/m

Proměnné charakteristické zatížení - q: 5 kN/m

Stálé charakteristické zatížení - G: kN

Proměnné charakteristické zatížení - Q: kN

Vzdálenost bodové síly zleva: m

Třída cementu: CEM N

Obr.7.5. Zatížení pouze pro rovnoměrné spojitě zatížení

Numerická analýza průhybu na železobetonovém nosníku

**Vstupní hodnoty pro výpočet průhybu:**

Kategorie konstrukce: A - Obytné plochy

Délka nosníku: 6 m

Rozměry průřezu: - výška průřezu: h= 0.45 m  
- šířka průřezu: b= 0.3 m

Stálé charakteristické zatížení - g: kN/m

Proměnné charakteristické zatížení - q: kN/m

Stálé charakteristické zatížení - G: 5 kN

Proměnné charakteristické zatížení - Q: 3 kN

Vzdálenost bodové síly od levé podpory: 3 m

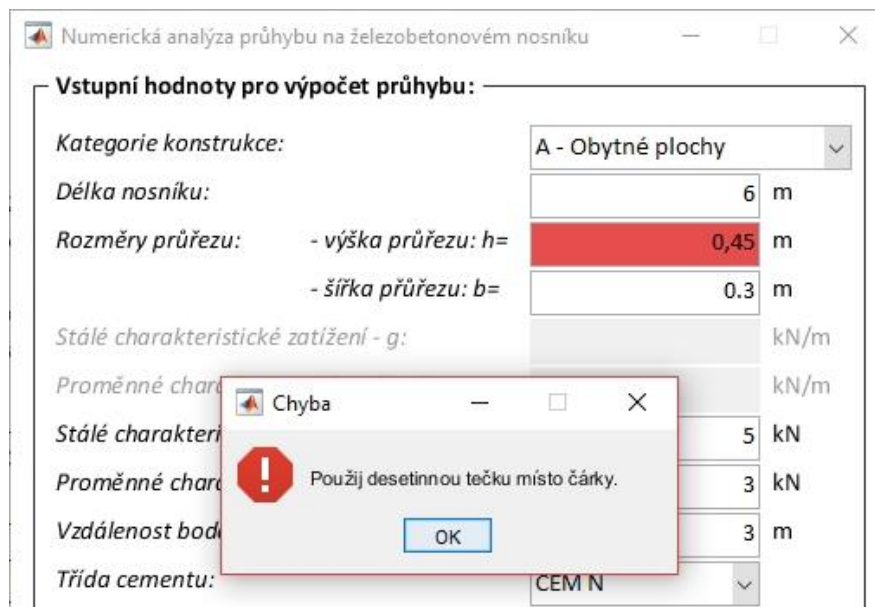
Třída cementu: CEM N

Obr.7.6. Zatížení pouze pro osamělou sílu

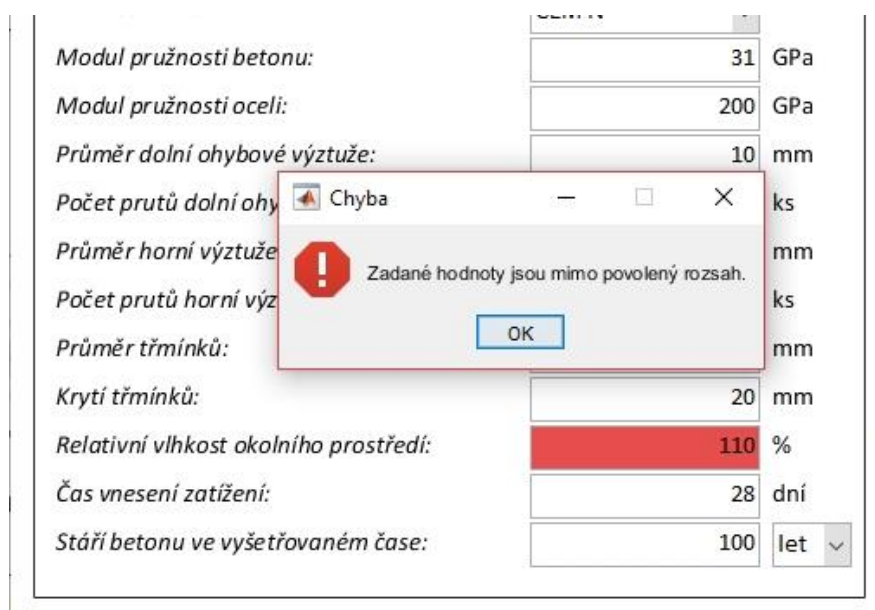
Poté co uživatel zvolí a zadá všechny potřebné informace a stiskne tlačítko výpočet, program zkontroluje vstupní hodnoty zadané uživatelem. Kontrola probíhá ve dvou fázích, první fáze spočívá v kontrole, zdali uživatel používá desetinnou tečku místo desetinné čárky



viz Obr.7.7. Matlab používá desetinnou čárku pro oddělení čísel v matici, a proto je nutné používat desetinnou tečku, která slouží k oddělování desetinného čísla. Druhá fáze je kontrola hodnot, které uživatel zadal. Kontrola se například zabývá tím, zdali uživatel zadal nenulové hodnoty zatížení a množství výztuže, zdali vlhkost okolního prostředí se pohybuje v rozmezí 0 až 100 % apod. Pokud uživatel zadá nějakou hodnotu špatně vyskočí chybová hláška a začervená políčko s chybným vstupem, viz obrázek Obr.7.7. a Obr.7.8.

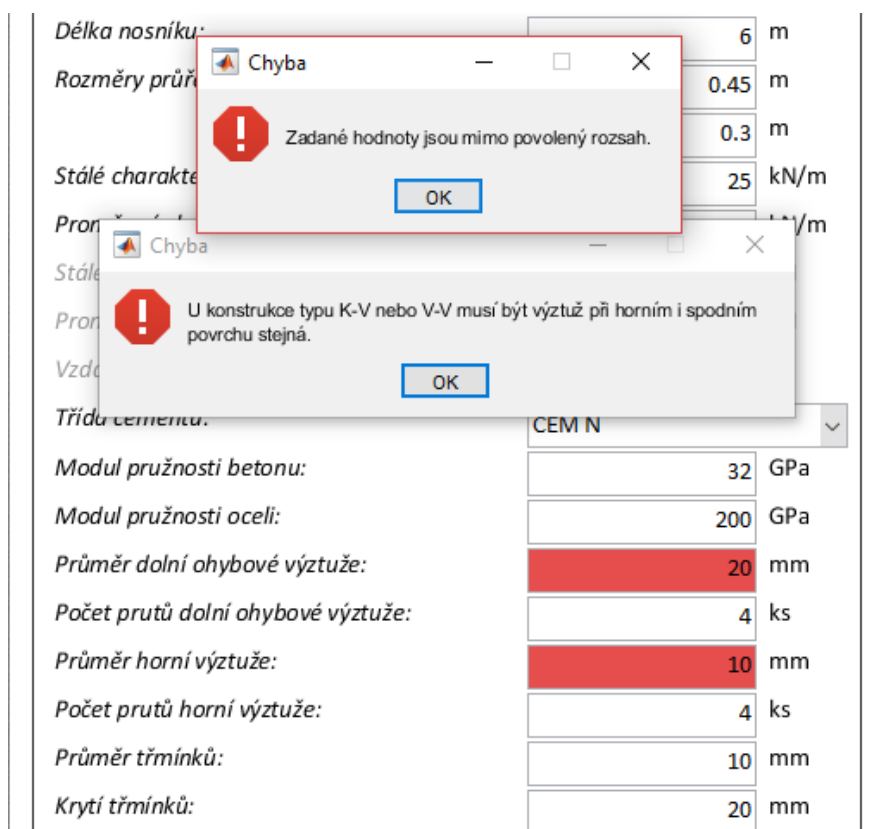


Obr.7.7. Chyba desetinné čárky



Obr.7.8. Hodnota mimo povolený rozsah

V případě, že uživatel zvolí statické schéma uložení nosníku kloub – vetknutí nebo vetknutí – vetknutí, je nutné průřez vyztužit při horním i spodním povrchu stejným množstvím ohybové výztuže. Takový nosník je namáhán momentem při obou površích a program neumožňuje vyztužit nosník po délce více způsoby, proto bylo zvoleno toto opatření. Pokud uživatel průřez nevyztuží stejně, bude vyzván k opravě těchto údajů, viz obrázek Obr.7.9.



Obr.7.9. Chyba vyztužení průřezu

Uživatel před spuštěním výpočtu, musí vyplít všechny políčka nebo si vybrat příslušnou hodnotu z nabídky (Obr.7.4). První údaj je kategorie konstrukce, které jsou převzaty z normy. Pro každou kategorii konstrukce jsou v normě uvedeny hodnoty součinitelů  $\psi$ . V našem případě budeme potřebovat hodnotou součinitele  $\psi_2$ , která se používá pro vytvoření kvazi-stálé kombinace zatížení, která se používá při výpočtu průhybu. Hodnoty těchto součinitelů lze nalézt v Příloze P3. Druhá hodnota je délka nosníku, kterou uživatel musí zadat v metrech. Další dvě políčka jsou průřezové rozměry nosníku. Následující pole se týkají zatížení nosníku. Nosník lze zatížit rovnoměrným spojitým zatížením stálým a užitným a dále osamělým břemenem stálou i proměnnou hodnotou. Umístění osamělé síly se udává vzdáleností od levé podpory, v případě konzoly od levého kraje nosníku. K výpočtu

součinitele dotvarování potřebujeme znát třídu cementu, tu si uživatel volí ze tří variant. Modul pružnosti betonu se vyplní automaticky dle výběru třídy betonu na předchozí stránce. Příslušné hodnoty modulu pružnosti betonu lze nalézt v příloze P5. Tuto hodnotu lze upravit dle potřebám konkrétního výpočtu. Modul pružnosti je předem stanoven na 200 GPa, a i tuto hodnotu uživatel může přepsat. Další políčka se týkají vyztužení průřezu. Uživatel zadává průměr dolní a horní ohybové výztuže a počet kusů těchto prutů. Dále je nutno zadat průměr třmínků, pokud ve výpočtu nechceme uvažovat třmínky, stačí napsat průměr třmínku je roven nule. Následně se zadává krytí těchto třmínků, pokud třmínky se ve výpočtu neuvažují jedná se o hodnotu krytí hlavní ohybové výztuže. Dále k výpočtu součinitele dotvarování potřebujeme znát hodnotu relativní vlhkosti okolního prostředí, která je přednastavena na 50 %, čas vnesení zatížení na vyšetřovaný rám a stáří betonu ve vyšetřovaném čase, kde je možnost vybrat jednoty roky nebo dny.

V případě, že uživatel zadá všechny hodnoty správné, zobrazí se poslední okno programu (Obr.7.10.), kde se zobrazí všechny důležité spočtené hodnoty týkající se této problematiky.

Vstupní hodnoty pro výpočet průhybu:	
Kategorie konstrukce:	A - Obytné plochy
Délka nosníku:	6 m
Rozměry průřezu: - výška průřezu: $h=$	0.45 m
- šířka průřezu: $b=$	0.3 m
Stálé charakteristické zatížení - $g$ :	10 kN/m
Proměnné charakteristické zatížení - $q$ :	5 kN/m
Stálé charakteristické zatížení - $G$ :	kN
Proměnné charakteristické zatížení - $Q$ :	kN
Vzdálenost bodové síly zleva:	m
Třída cementu:	CEM N
Modul pružnosti betonu:	31 GPa
Modul pružnosti oceli:	200 GPa
Průměr dolní ohybové výztuže:	10 mm
Počet prutů dolní ohybové výztuže:	3 ks
Průměr horní výztuže:	10 mm
Počet prutů horní výztuže:	3 ks
Průměr třmínků:	10 mm
Krytí třmínků:	20 mm
Relativní vlhkost okolního prostředí:	50 %
Čas vnesení zatížení:	28 dní
Stáří betonu ve vyšetřovaném čase:	100 let

Výsledky:

zpět      výpočet      ukončit program

Obr.7.10. Výsledky výpočtu

Okno s výsledky (Obr.7.10) se zobrazí vedle zadávacího okna. Uživatel může v tuto chvíli změnit vstupní hodnoty výpočtu a výpočet provést znovu. Okno s výsledky se automaticky nezavře, tudíž je možné jej zavřít křížkem v pravého horním rohu nebo okno ponechat otevřené a výsledky porovnat s novými údaji vstupujícími do výpočtu. Celý program včetně všech oken lze zavřít pomocí tlačítka: ukončit program, které se nachází v posledním okně dole.

## 8. Program č.1 – deformace dle ČSN EN 1992-1-1

První program se zabývá výpočetní metodou, která je uvedena v ČSN EN 1992-1-1 [1]. Norma [1] stanovuje, že nejpřesnější metoda pro stanovení průhybu spočívá ve výpočtu charakteristik v několika průřezích prvku a následně průhyb vypočítat numerickou integrací. Norma [1] dále říká, že ve většině případů stačí tyto charakteristiky spočítat dvakrát. Zaprvé za předpokladu, že prvek není oslaben trhlinami a podruhé pro stav plně rozvinutých trhlin a následně mezi těmito hodnotami interpolovat použitím vztahu (3.1) z kapitoly 3:

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I; \quad (8.1)$$

kde

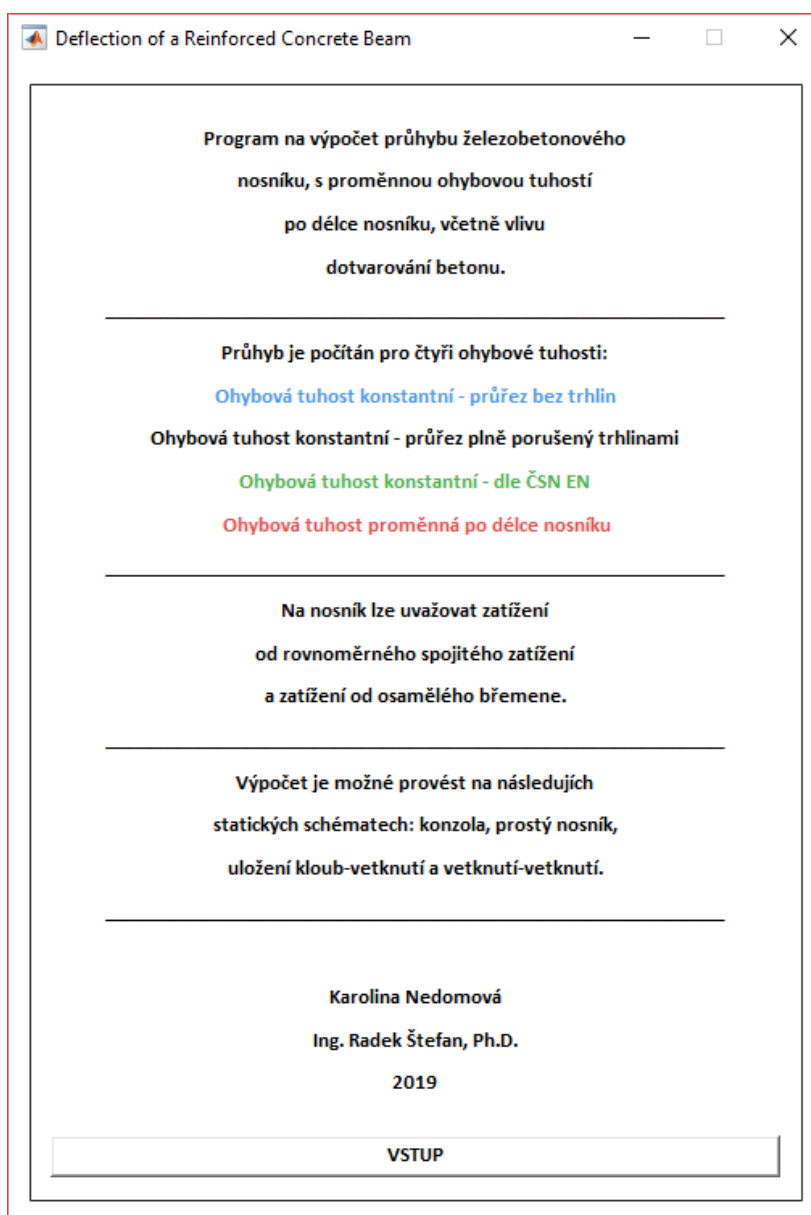
$\alpha$  je uvažovaná přetvárná veličina, např. poměrné přetvoření, křivost nebo pootočení. (zjednodušeně lze za  $\alpha$  považovat i průhyb);

$\zeta$  je rozdělovací součinitel viz kapitola 3.

V této kapitole budeme porovnávat deformace spočtené pro rozdělovací součinitel stanovený pro celý nosník pouze jednou nebo pro nosník, kde budeme stanovovat hodnotu rozdělovacího součinitele pro každý dílek. Rozdělovací součinitel použijeme na stanovení ohybové tuhosti. V prvním případě bude ohybová tuhost konstantní pro celý nosník. Tuto hodnotu zjistíme lineární interpolací pro nosník neporušený trhlinami a pro nosník plně porušen trhlinami dle míry zatížení maximálním ohybovým momentem. Výpočet je popsán v kapitole 4.4.4. V druhém případě si nosník rozdělíme na několik dílků a určíme ohybovou tuhost pro každý dílek dle zatížení ohybovým momentem pro daný interval. Díky tomuto postupu získáme hodnoty ohybové tuhosti, která se bude měnit po délce nosníku. Tomuto výpočtu budeme říkat nosník s proměnnou ohybovou tuhostí po délce nosníku. Výpočet průhybu pro nosník s proměnnou ohybovou tuhostí použijeme diferenciální rovnici průhybové čáry viz kapitola 4.4. Ve výpočtu zohledňujeme vliv dotvarování součinitelem dotvarování dle normy ČSN EN 1992-1-1 [1].

## 8.1. Výpočetní program

Na obrázku Obr.8.1. vidíme úvodní okno programu. V tomto okně je stručný popis programu, stisknutím tlačítka dole lze přejít k dalšímu kroku.



Obr.8.1. Úvodní okno programu č.1

Průhyb je v tomto případě počítán pro čtyři ohybové tuhosti. První ohybová tuhost je stanovena pro nosník, kde neuvažujeme porušení trhlinami – modrá barva, druhý nosník uvažujeme plně porušen trhlinami po celé délce – černá barva. Ve třetí variantě je ohybová tuhost konstantní a stanovena dle normového postupu – zelená barva. Poslední varianta respektuje proměnnou ohybovou tuhost po délce nosníku – červená barva.

## 8.2. Výstupy z programu – prostý nosník

Na statickém schématu prostého nosníku budou prezentovány výsledky porovnání tohoto experimentu. Na obrázku Obr.8.2. vidíme zadání našeho zvoleného nosníku. Na prostém nosníku budeme uvažovat zatížení spojitým rovnoměrným zatížením, které bude představovat zatížení vlastní tíhou a zatížení od stropu. Dále v polovině rozpětí budeme uvažovat zatížení osamělým břemenem, např. od zatížení příčkou. Pevnostní třída betonu byla zvolena standartní pevnost C25/30, která se pro stropní trámy pozemních staveb běžně používá.

Deflection of a Reinforced Concrete Beam

Vyberte statické schéma konstrukce:

Konzola

Prostý nosník

Kloub-Vetknutí

Vetknutí-Vetknutí

Vyberte způsob zatížení konstrukce:

Spojitě rovnoměrné zatížení

Osamělá síla

Vyberte základní vstupní údaje:

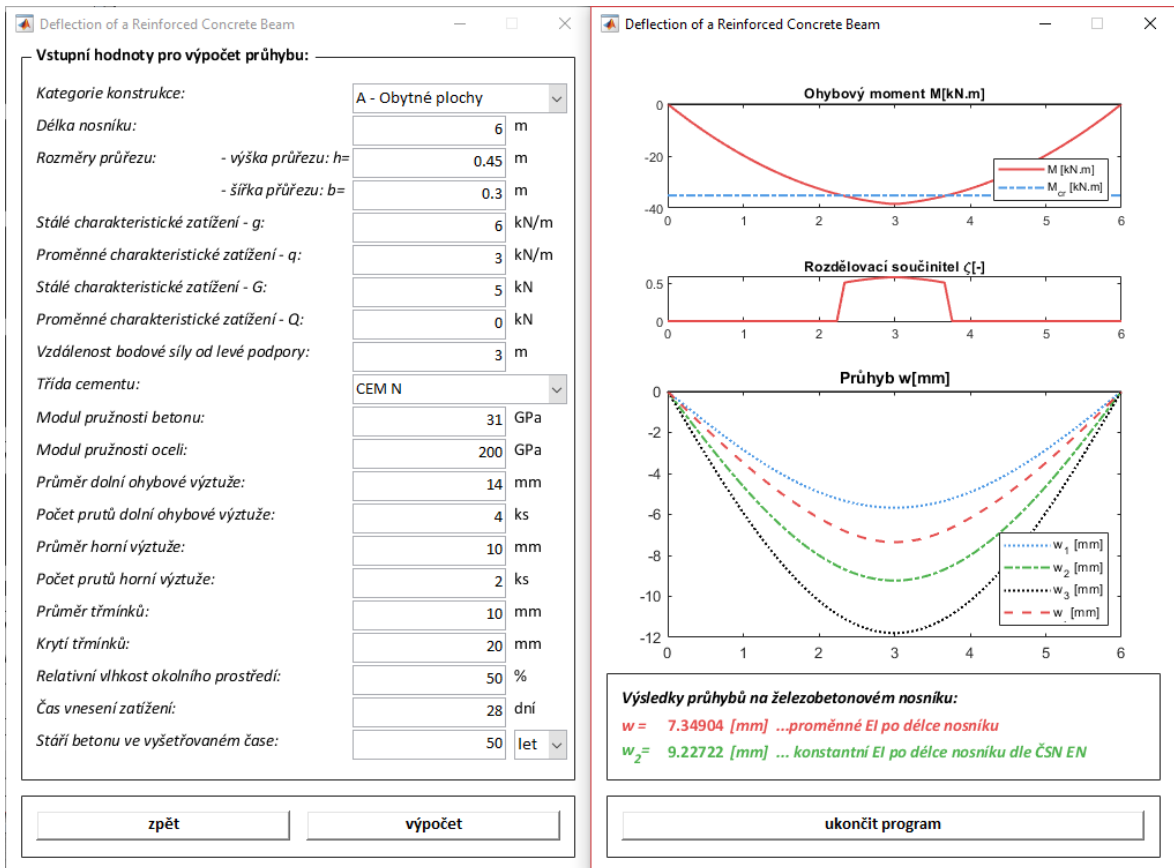
Pevnostní třída betonu: C25/30

Třída výztuže: B 500B

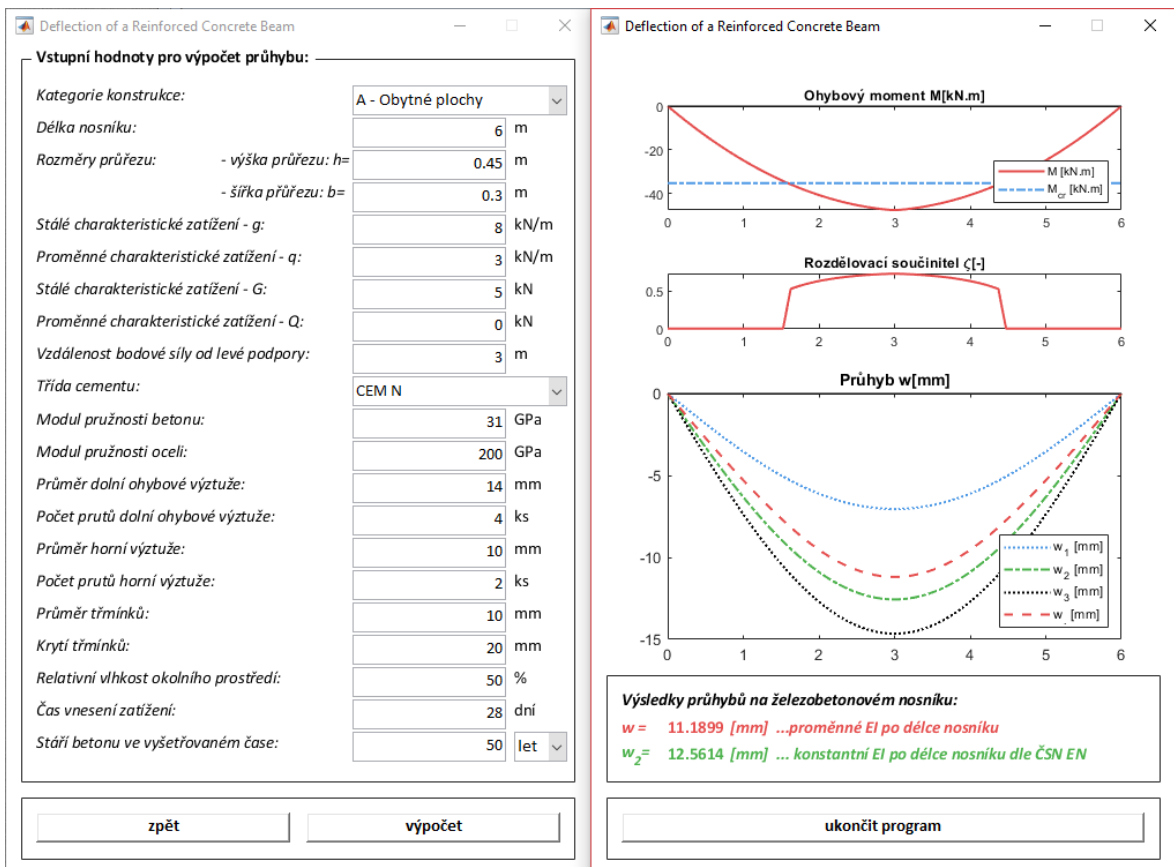
přejít k dalšímu kroku - zadání hodnot pro výpočet průhybu

Obr.8.2. Zadání příklad č.1

Na nosníku budeme zvětšovat zatížení, abychom mohli porovnat výsledky výpočtu průhybu na nosníku pro konstantní a proměnnou ohybovou tuhost viz Obr.8.3. až Obr.8.6.

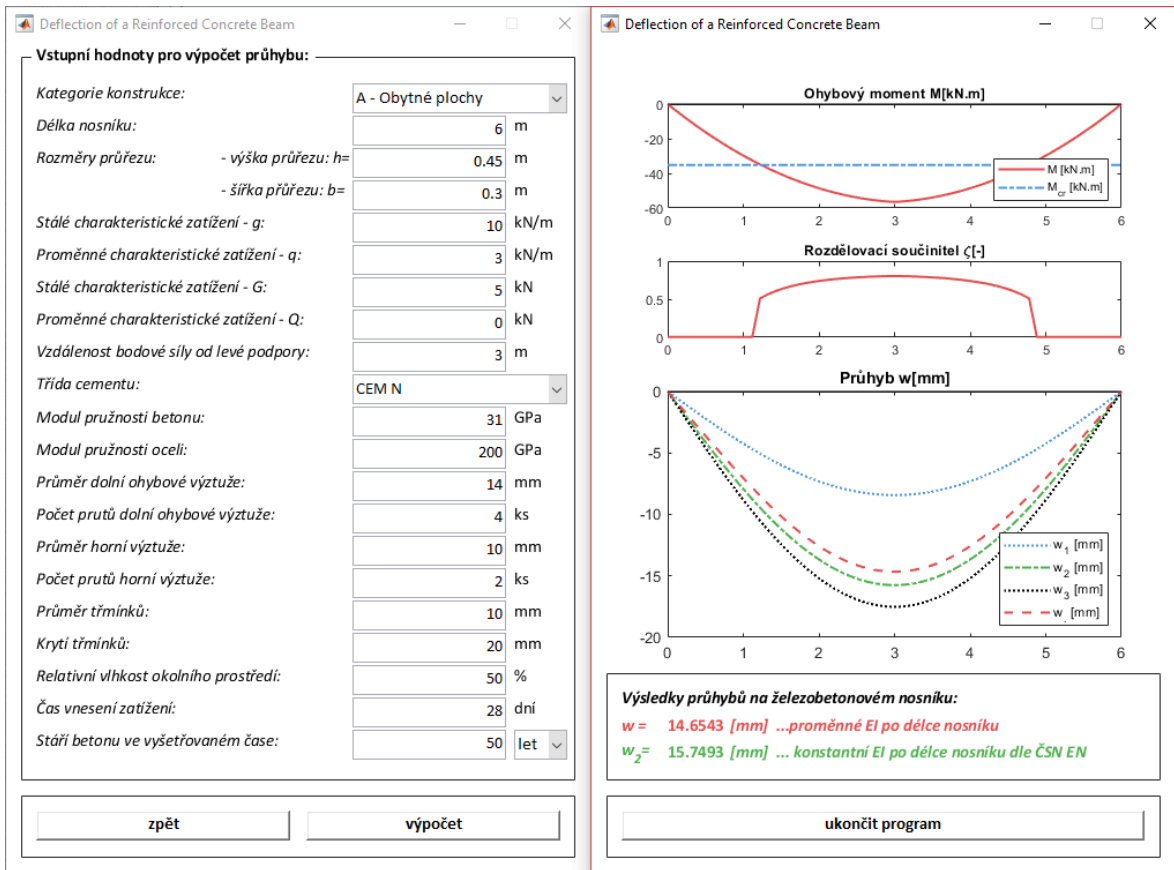


Obr.8.3. Zadání příklad č.1 – zatížení na nosník ( $g = 6$  kN/m)

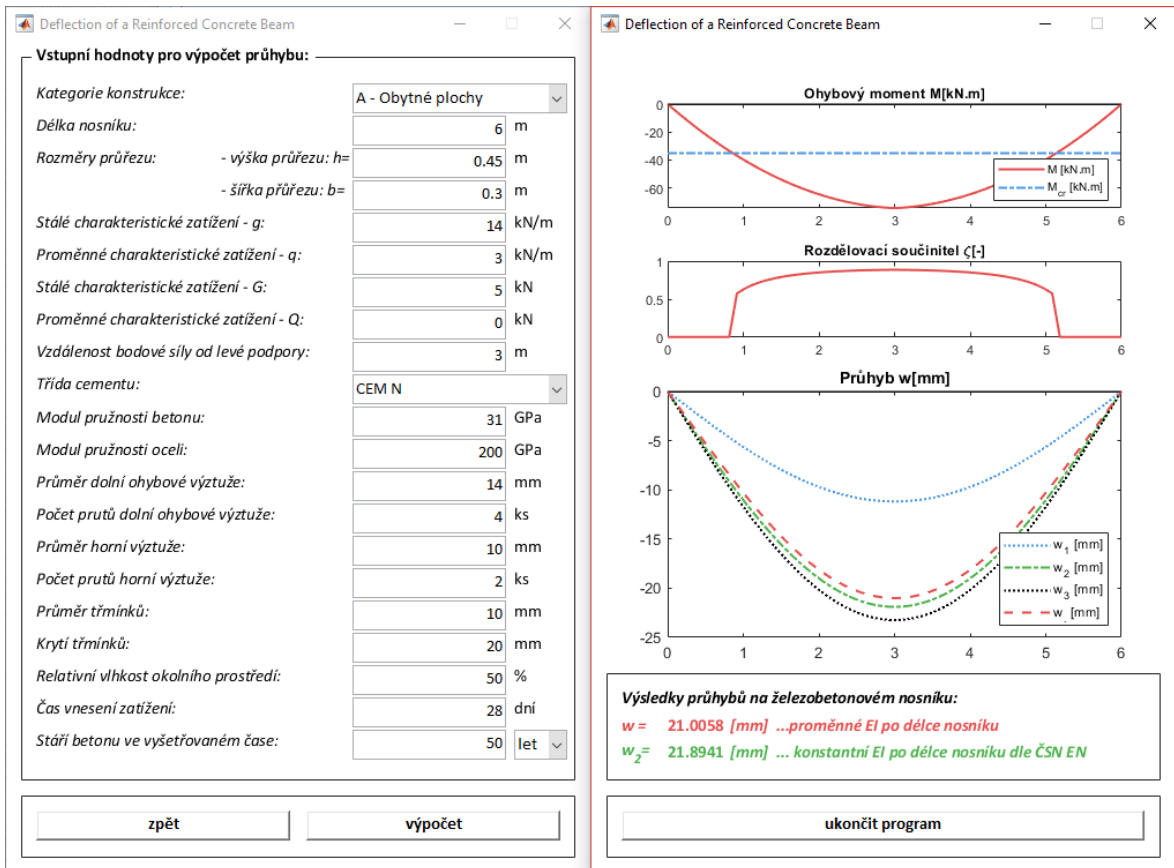


Obr.8.4. Zadání příklad č.1 – zatížení na nosník ( $g = 8$  kN/m)





Obr.8.5. Zadání příklad č.1 – zatížení na nosník ( $g = 10$  kN/m)



Obr.8.6. Zadání příklad č.1 – zatížení na nosník ( $g = 14$  kN/m)

Na obrázcích Obr.8.3. až Obr.8.6. vidíme vlevo zadávací okno, kde se zvyšuje postupně hodnota stálého rovnoměrného zatížení a vpravo vidíme okno s výsledky. V okně s výsledky jsou čtyři pole, první pole obsahuje vykreslení ohybového momentu, který působí na konstrukci a zároveň je zde vykreslen kritický moment, který představuje zlomovou hodnotu, kdy se začnou v průřezu tvořit trhliny, a tudíž ohybová tuhost nosníku v tomto místě se začne snižovat. Tento fakt se propisuje do druhého okna, kde je zobrazena hodnota rozdělovacího součinitele  $\zeta$ . V místě, kde hodnota ohybového momentu, která působí na nosník, je menší než kritický moment, uvažujeme nosník neporušený trhlinami a hodnota rozdělovacího součinitele je v tomto místě rovna nule. Čím je větší hodnota ohybového momentu, tím je větší hodnota rozdělovacího součinitele  $\zeta$ . Ve třetím poli se vykreslují průběhy průhybu na nosníku pro čtyři různé hodnoty ohybových momentů. Průběh průhybu  $w_1$  představuje nosník, který po celé své délce není oslaben trhlinami (modrý průběh). Průběh  $w_3$  je naopak pro nosník, u kterého uvažujeme porušení trhlinami po celé délce nosníku (černý průběh). Interpolací průběhů  $w_1$  a  $w_3$  vzniká průběh průhybu  $w_2$  (zelený průběh), který odpovídá průhybu spočtenému dle normy ČSN EN 1992-1-1 [1]. Zároveň je nutné říci, že je důležité uvažovat při výpočtu deformací s vlivem trhlín, protože průhyby, kde není uvažován vliv trhlín je mnohem menší než skutečný průhyb (modrý průběh). V případě navrhování a posuzování konstrukcí pro ohybovou tuhost nosníku potrhaném po celé délce nosníku, návrh bude v některých případech zbytečně předdimenzovaný a neekonomický (černý průběh). Poslední, a to průběh průhybu vykreslován červeně je průběh průhybu spočten s ohybovou tuhostí proměnnou po délce nosníku. V levém okně pod průběhy průhybů je okno s výsledky, kde jsou zapsané největší hodnoty průhybu spočtené pro normový postup s konstantní ohybovou tuhostí  $w_2$  a s proměnnou ohybovou tuhostí  $w$ . Hodnoty z obrázků Obr.8.3. až Obr.8.6. byly zapsány do následující tabulky Tab.8.1:

*Tab.8.1 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm]*

	Obr.8.3.	Obr.8.4.	Obr.8.5.	Obr.8.6.	
$w$	7,35	11,20	14,65	21,01	... průhyb pro proměnné $EI$ po délce nosníku
$w_2$	9,22	12,56	15,75	21,89	... průhyb pro konstantní $EI$ po délce nosníku
$(w_2-w)/w_2$	20,3%	10,8%	7,0%	4,0%	... poměr v procentech mezi $w$ a $w_2$

Z tabulky Tab.8.1 vidíme, že pro nosník, který je málo zatížený, a tudíž porušení po délce nosníku je relativně malé, rozdíly ve výsledcích konečných deformací jsou rozdílné v tomto případě přibližně 20 %. V případě že nosník je dostatečně využitý, tudíž porušení trhlinami snižuje ohybovou tuhost prakticky po celé délce nosníku, rozdíl mezi konečnými výsledky tvoří pouze 4 % rozdíl, což je zanedbatelný rozdíl, a tudíž lze říci, že normový [1] postup s konstantní ohybovou tuhostí po celé délce nosníku je na straně bezpečné a zároveň při dostatečném zatížení rozdíly ve výsledcích jsou téměř zanedbatelné. Zároveň si můžeme povšimnout, že v případě, kdy nosník není příliš zatížen viz Obr.8.3. průběh průhybové čáry pro nosník s proměnnou ohybovou tuhostí se spíše přibližuje průběhu pro nosník neporušený trhlinami, a tudíž tento návrh by byl neekonomický a předimenzovaný. Naopak na obrázku Obr.8.6. vidíme, že průběh deformací se spíše blíží průběhu deformaci pro nosník uvažován po celé délce porušený trhlinami. Tento návrh více odpovídá skutečnosti navrhování nosných konstrukcí v praxi. Zároveň je nutné nosník posoudit, zdali spočtené deformace nepřekračují povolený limit viz kapitola 3.5.

Posouzení průhybu:

$$w_{lt} \leq w_{lim,lt} ; \quad (8.1)$$

kde

$w_{lt}$  je dlouhodobý průhyb od zatížení včetně dotvarování betonu;

$w_{lim,lt}$  je limitní průhyb stanovený v normě nebo požadavkem investora;

=  $1/250 \cdot l$  pro obecnou použitelnost a vzhled konstrukce dle ČSN EN 1992-1-1 [1].

Posouzení průhybu:

$$21,89 \leq \frac{6000}{250} = 24 \text{ mm} ; \quad (8.2)$$

Návrh na průhyb vyhovuje. Posouzení MSÚ není předmětem této práce, ale při navrhování by bylo také nutné nosník posoudit na únosnost.

### 8.3. Výstupy z programu – konzola

Důležitým statickým schématem ve staticce je konzola. Toto statické schéma představuje drtivou většinu uložení balkónových desek. Balkónové desky jsou jednou z nejnáchylnějších konstrukcí a jeden z největších problémů se týká právě deformací balkónových desek. Na obrázku Obr.8.7. vidíme zadání našeho zvoleného nosníku. Na konzole budeme uvažovat zatížení spojitým rovnoměrným zatížením, které bude představovat zatížení vlastní tíhou a zatížení od skladby. Dále ve vzdálenosti 0,1 metru od levého kraje budeme uvažovat zatížení osamělým břemenem, např. od zatížení zábradlím. Pevnostní třída betonu byla zvolena standartní pevnost C25/30.

Deflection of a Reinforced Concrete Beam

Vyberte statické schéma konstrukce:

Konzola

Prostý nosník

Kloub-Vetknutí

Vetknutí-Vetknutí

Vyberte způsob zatížení konstrukce:

Spojitě rovnoměrné zatížení

Osamělá síla

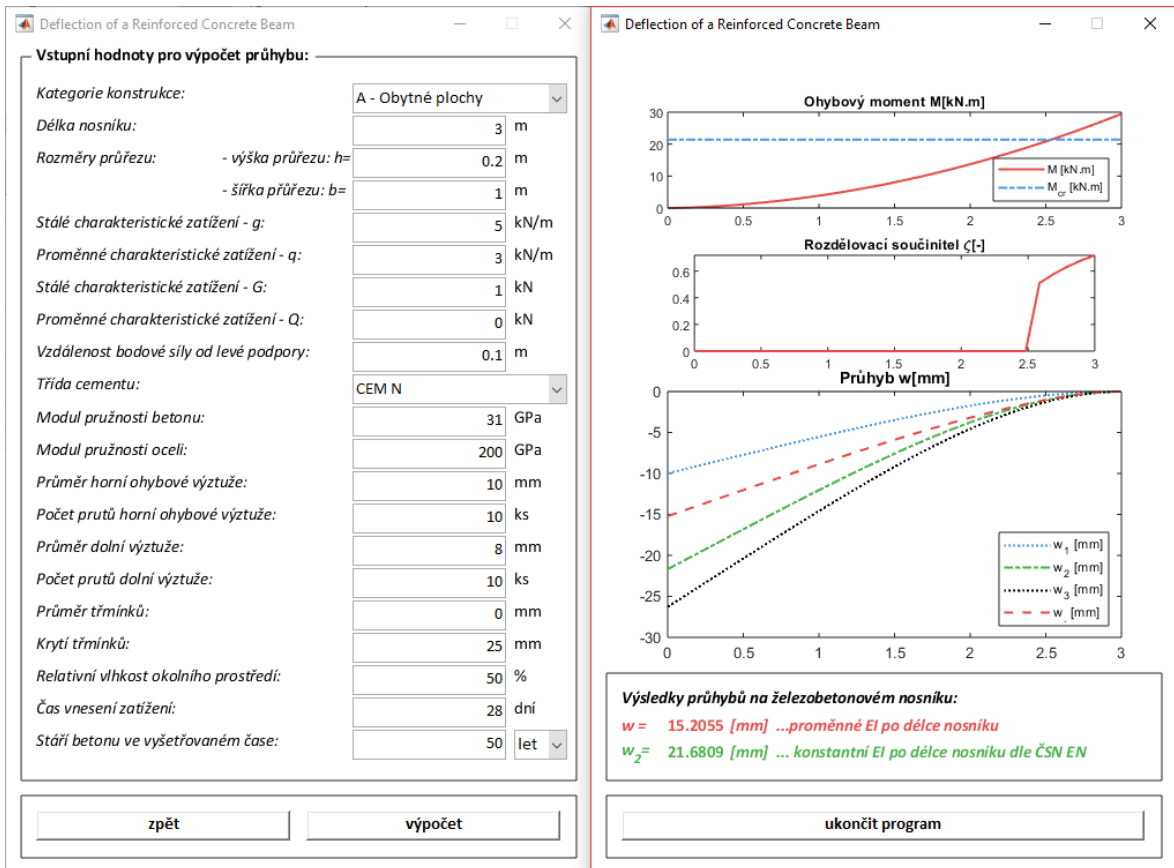
Vyberte základní vstupní údaje:

Pevnostní třída betonu: C25/30

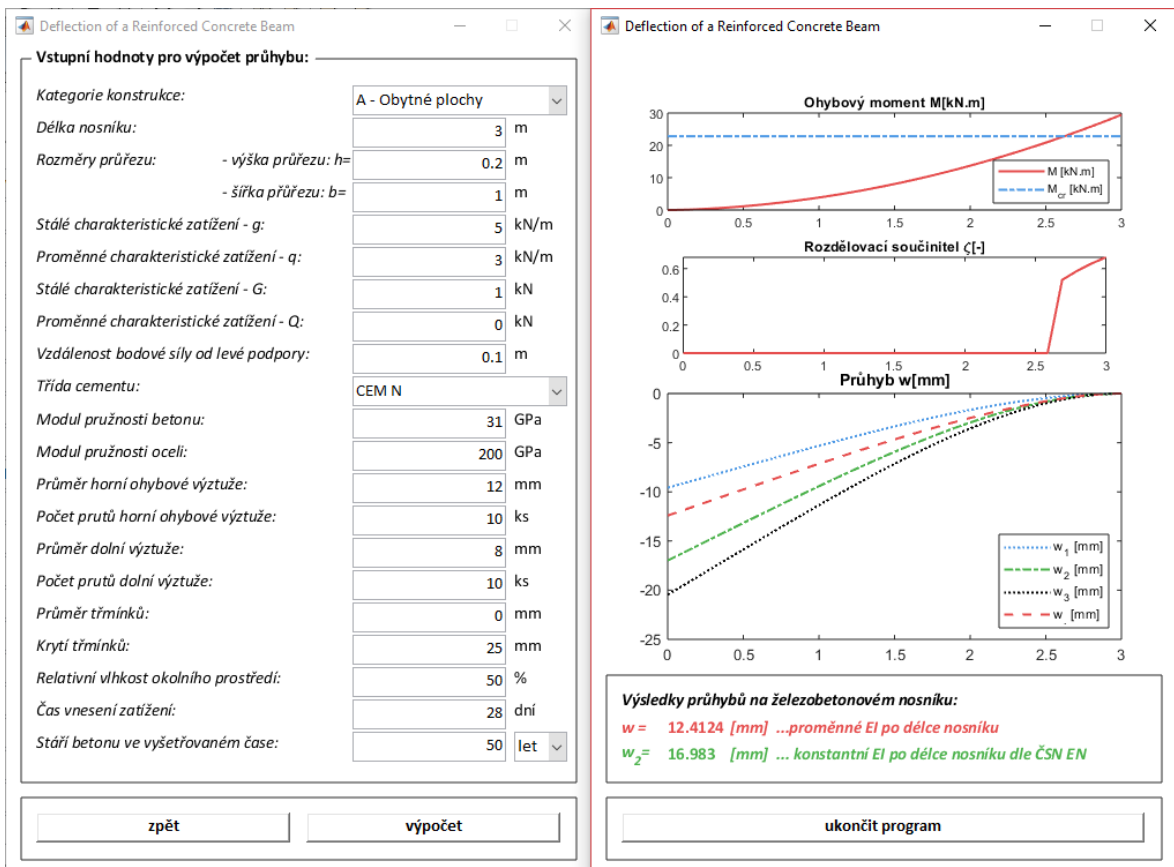
Třída výztuže: B 500B

přejít k dalšímu kroku - zadání hodnot pro výpočet průhybu

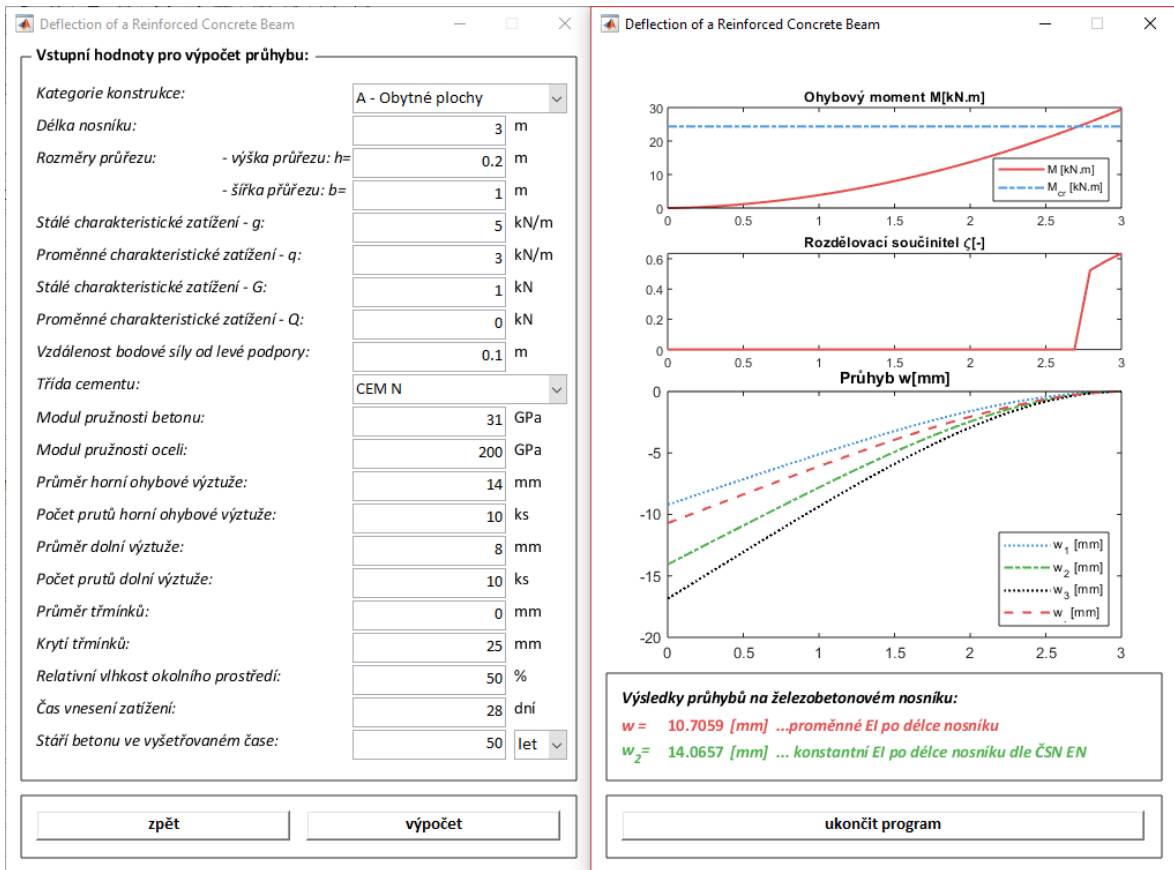
Obr.8.7. Zadání příklad č.2



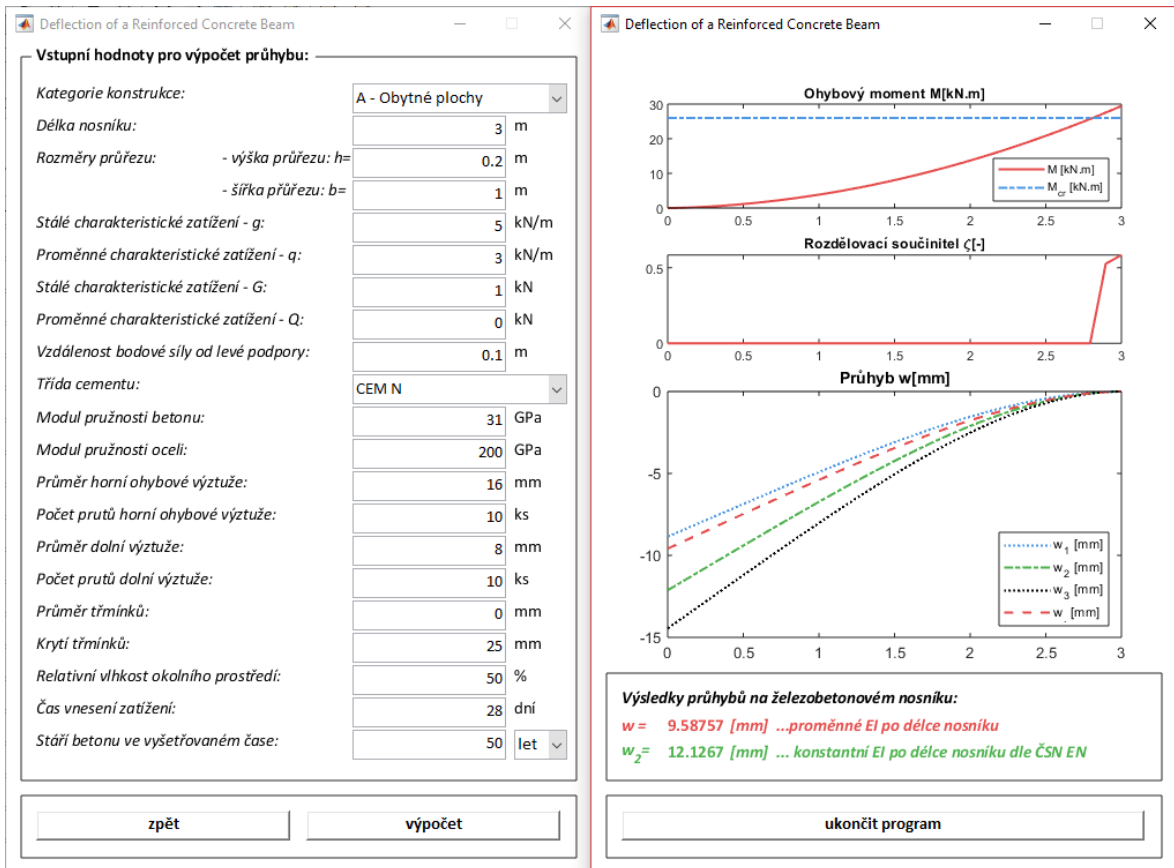
Obr.8.8. Zadání příklad č.2 – horní ohybová výztuž ( $\phi_h = 10$  mm)



Obr.8.9. Zadání příklad č.2 – horní ohybová výztuž ( $\phi_h = 12$  mm)



Obr.8.10. Zadání příklad č.2 – horní ohybová výztuž ( $\varnothing_h = 14$  mm)



Obr.8.11. Zadání příklad č.2 – horní ohybová výztuž ( $\varnothing_h = 16$  mm)

Na obrázcích Obr.8.8 až Obr.8.11 jsou zadány rozměry běžného metru balkónové desky s výškou 0,2 metru a délkou 3 metry. V tomto případě zůstává zatížení, které působí na nosník stejné, ale mění se průměr prutů horní ohybové výztuže. Výsledné hodnoty byly zapsány do následující tabulky Tab.8.2:

Tab.8.2 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm]

	Obr.8.8.	Obr.8.9.	Obr.8.10.	Obr.8.11.	
	Ø10	Ø12	Ø14	Ø16	... průměr horní ohybové výztuže
w	15,21	12,41	10,71	9,59	... průhyb pro proměnné EI po délce nosníku
w <sub>2</sub>	21,68	16,98	14,06	12,13	... průhyb pro konstantní EI po délce nosníku
(w <sub>2</sub> -w)/w <sub>2</sub>	29,8%	26,9%	23,8%	20,9%	... poměr v procentech mezi w a w <sub>2</sub>

Z tabulky Tab.8.2 vidíme, že výsledky pro obě metody se značně liší. Hlavní rozdíl oproti prostému nosníku je, že porušení trhlinami v případě konzoly nastává pouze kolem vetknutí konzoly do konstrukce. Průřezy, které jsou dál od uložení jsou trhlinami skoro nepoškozené, a tudíž mají ve skutečnosti mnohem větší ohybovou tuhost, než vyjde z normového [1] výpočtu pro nosník s konstantní tuhostí. Z průběhů deformací pro různé ohybové tuhosti vidíme (Obr.8.8 až Obr.8.11), že čím je nosník více vyztužen, tím více se zmenšuje oblast porušení trhlinami a průběhy deformací pro ohybovou tuhost bez vlivu trhlin a s proměnnou tuhostí se k sobě více blíží. Dále z tabulky Tab.8.2 také vidíme, že čím více je průřez vyztužený, tím se odchylka výsledků snižuje. To je také způsobeno faktem zmenšování oblasti porušené trhlinami.

V závěru lze říci, že největší rozdíly ve výsledcích budou vždy u konzolových konstrukcí, zároveň jak bylo řečeno v úvodu této kapitoly, konzoly jsou na průhyb nejvíce citlivé a normový postup výpočtu průhybu s konstantní ohybovou tuhostí nechává určitou rezervu.

## 8.4. Výstupy z programu – staticky neurčitá konstrukce

Další dvě statická schémata jsou staticky neurčitá Obr.8.12.

The image shows two identical software windows for calculating the deflection of a reinforced concrete beam. Each window has a title bar 'Deflection of a Reinforced Concrete Beam' and a close button. The interface is divided into several sections:

- Vyberte statické schéma konstrukce:** Four radio button options with corresponding diagrams:
  - Konzola
  - Prostý nosník
  - Kloub-Vetknutí (Left window) /  Kloub-Vetknutí (Right window)
  - Vetknutí-Vetknutí (Left window) /  Vetknutí-Vetknutí (Right window)
- Vyberte způsob zatížení konstrukce:** Two checkboxes:
  - Spojité rovnoměrné zatížení
  - Osamělá síla
- Vyberte základní vstupní údaje:** Two dropdown menus:
  - Pevnostní třída betonu: C25/30
  - Třída výztuže: B 500B
- Buttons:** A button at the bottom of each window reads 'přejít k dalšímu kroku - zadání hodnot pro výpočet průhybu'.

Obr.8.12. Zadání příklad č.3

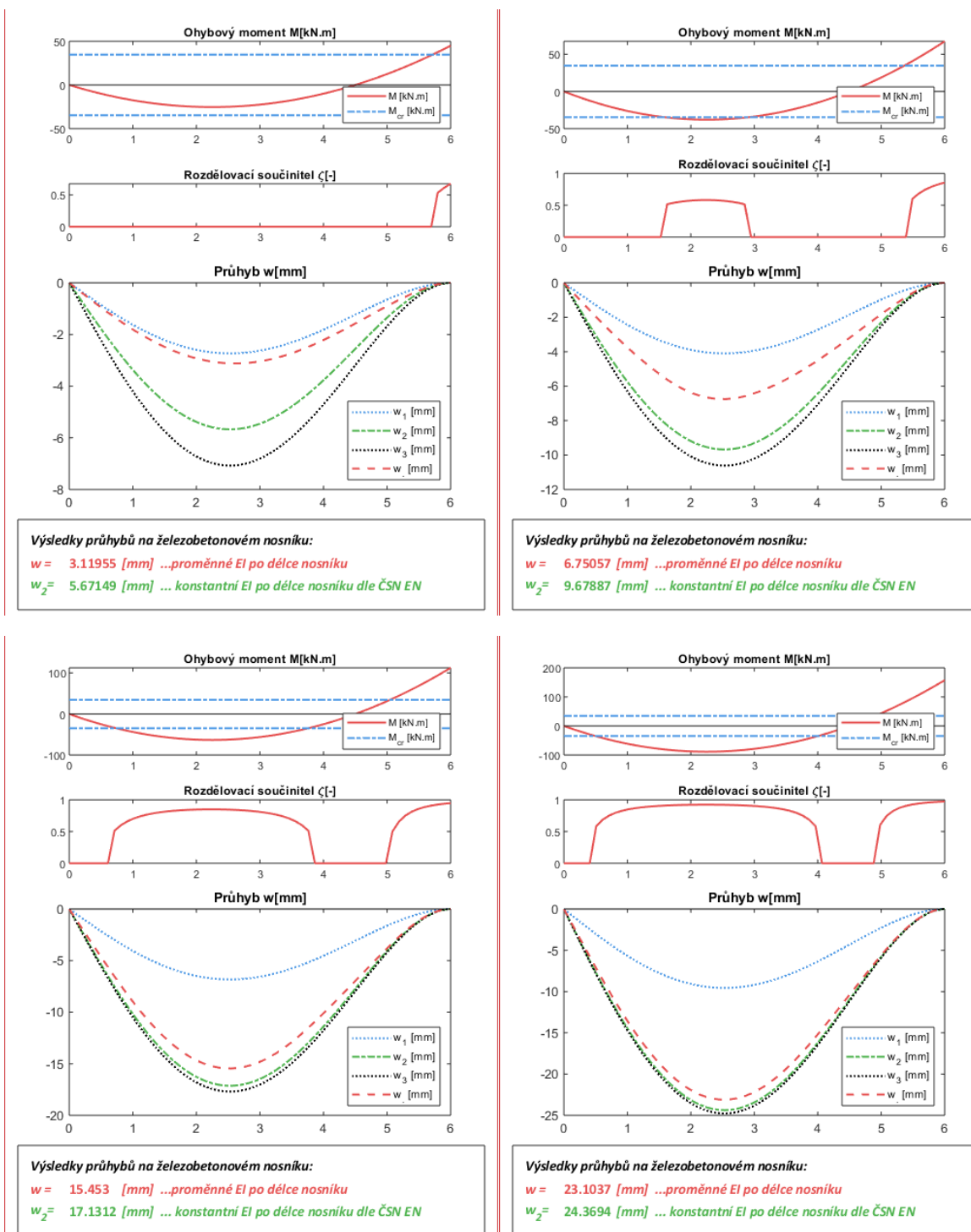
**Vstupní hodnoty pro výpočet průhybu:**

Kategorie konstrukce:	A - Obytné plochy
Délka nosníku:	6 m
Rozměry průřezu: - výška průřezu: $h=$	0.45 m
- šířka průřezu: $b=$	0.3 m
Stálé charakteristické zatížení - $g$ :	15 kN/m
Proměnné charakteristické zatížení - $q$ :	0 kN/m
Stálé charakteristické zatížení - $G$ :	kN
Proměnné charakteristické zatížení - $Q$ :	kN
Vzdálenost bodové síly zleva:	m
Třída cementu:	CEM N
Modul pružnosti betonu:	31 GPa
Modul pružnosti oceli:	200 GPa
Průměr dolní ohybové výztuže:	12 mm
Počet prutů dolní ohybové výztuže:	4 ks
Průměr horní výztuže:	12 mm
Počet prutů horní výztuže:	4 ks
Průměr třminků:	10 mm
Krytí třminků:	20 mm
Relativní vlhkost okolního prostředí:	50 %
Čas vnesení zatížení:	28 dní
Stáří betonu ve vyšetřovaném čase:	50 let

Obr.8.13. Zadání příklad č.3

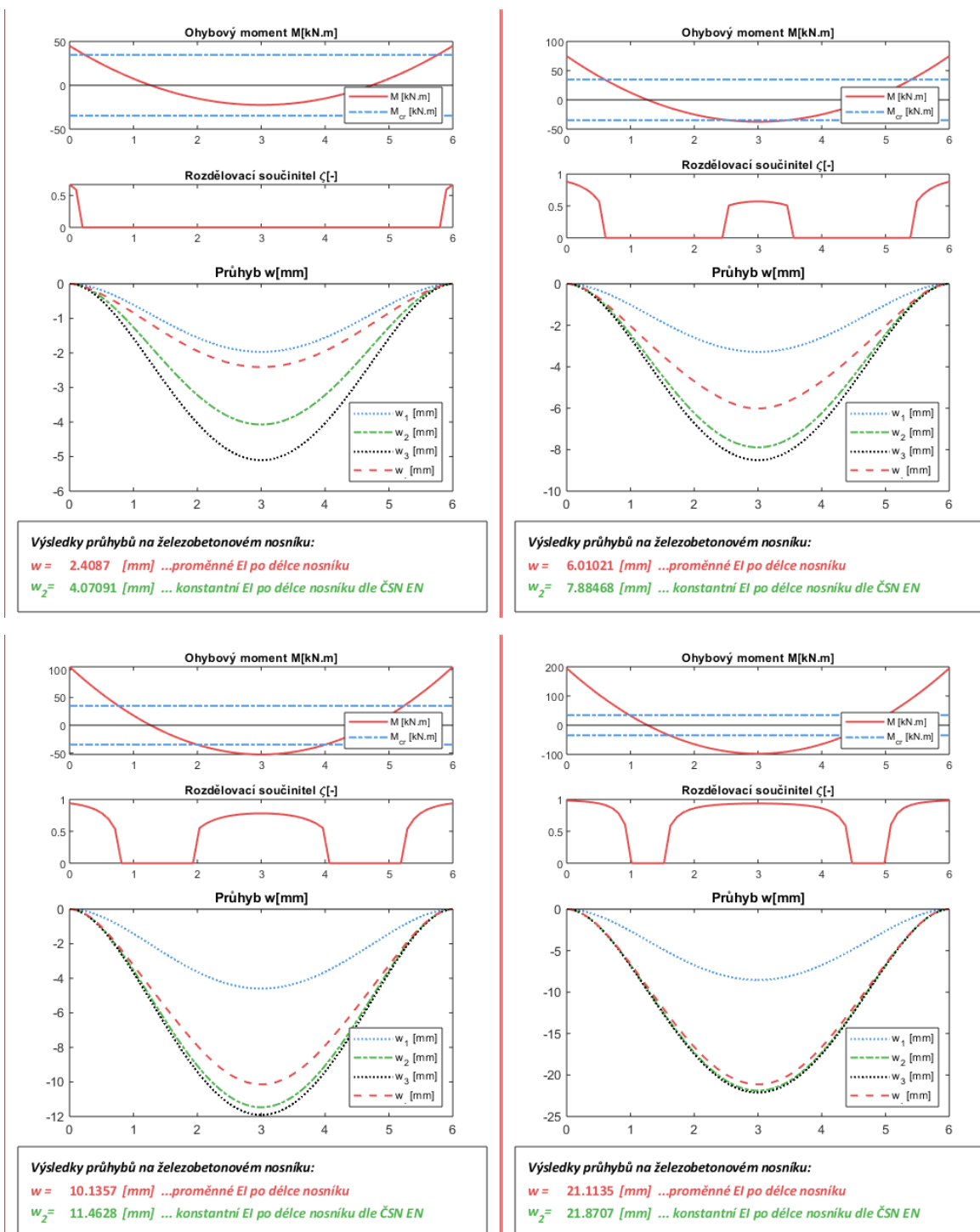


Jedná se o konstrukce typu kloub – vetknutí a vetknutí – vetknutí viz zadání příkladu Obr.8.12. Pro obě tato statická schémata byly použity stejné vstupní hodnoty, které jsou vidět na obrázku Obr.8.13. V tomto případě jako v případě prostého nosníku budeme měnit hodnoty zatížení. Na konstrukci uvažujeme pouze rovnoměrné spojitě stálé zatížení o hodnotách: 10, 15, 25, 35 a 65 kN/m. Výsledky pro typ kloub – vetknutí (Obr.8.14.):



Obr.8.14. Výsledky příklad č.3 – kloub/vetknutí

Výsledky pro typ vetknutí – vetknutí (Obr.8.15.):



Obr.8.15. Výsledky příklad č.3 – vetknutí/vetknutí

V tabulce Tab.8.3 vidíme hodnoty průhybů pro obě staticky neurčené konstrukce, pro nosník o průřezových rozměrech 0,3 m x 0,45 m a délce 6 m:

Tab.8.3 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm]

	kloub - vetknutí					... rovnoměrné stálé spojité zatížení [kN/m]
	10	15	25	35	65	
w	3,11	6,75	15,45	23,10	-	... průhyb pro proměnné EI po délce nosníku
w <sub>2</sub>	5,67	9,68	17,13	24,36	-	... průhyb pro konstantní EI po délce nosníku
(w <sub>2</sub> -w)/w <sub>2</sub>	45,1%	30,3%	9,8%	5,2%	-	... poměr v procentech mezi w a w <sub>2</sub>
	vetknutí - vetknutí					... rovnoměrné stálé spojité zatížení [kN/m]
	10	15	25	35	65	
w	-	2,41	6,01	10,14	21,11	... průhyb pro proměnné EI po délce nosníku
w <sub>2</sub>	-	4,07	7,88	11,46	21,87	... průhyb pro konstantní EI po délce nosníku
(w <sub>2</sub> -w)/w <sub>2</sub>	-	40,8%	23,7%	11,5%	3,5%	... poměr v procentech mezi w a w <sub>2</sub>

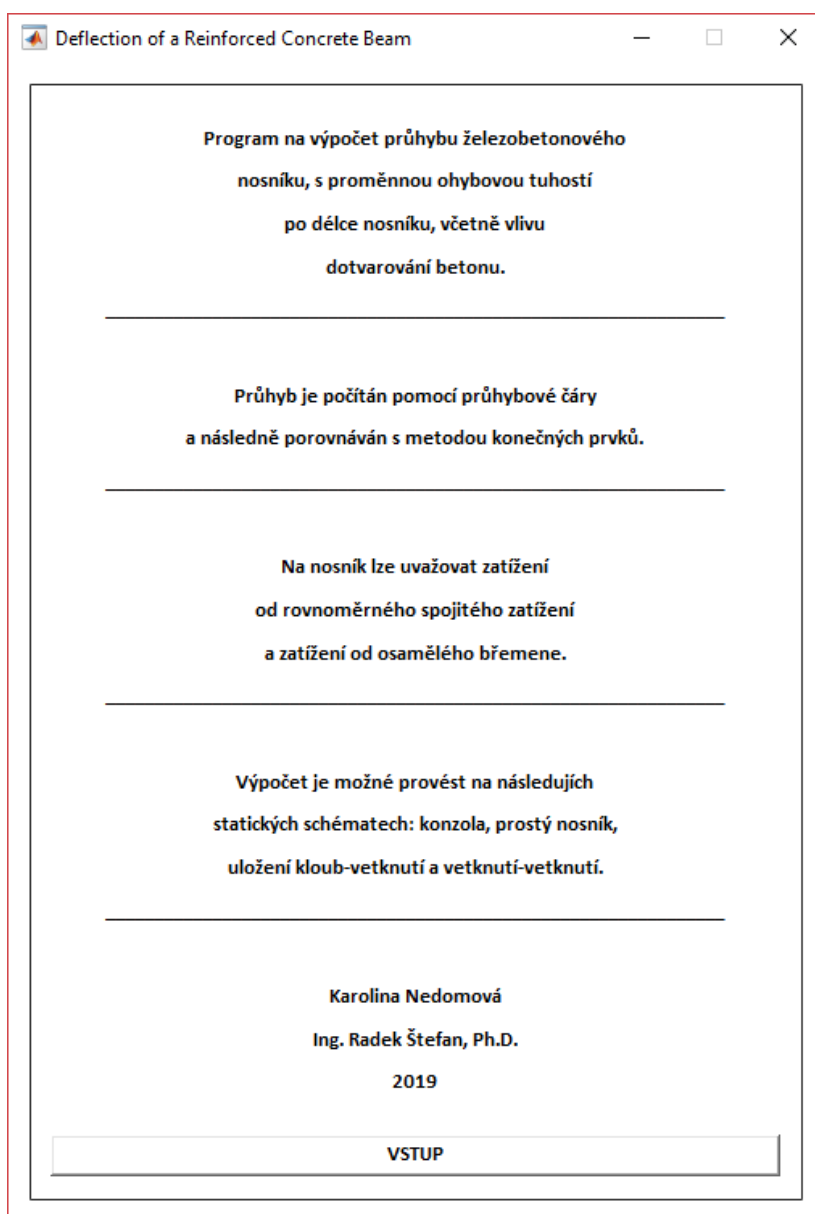
Z tabulky Tab.8.3 je vidět, že chování výsledků je stejné jako u prostého nosníku. Pokud je nosník dostatečně zatížený a skoro po celé jeho délce se tvoří trhliny a tím se snižuje jeho ohybová tuhost tím více se výsledky pro nosník s konstantní a proměnnou ohybovou tuhosti k sobě více blíží.

## 9. Program č.2 – porovnání DRPČ s MKP

Druhý program se zabývá porovnáním diferenciální rovnice průhybové čáry s metodou konečných prvků. V obou výpočtech budeme nosník dělit na dílky a stanovovat ohybovou tuhost jednotlivých dílků. Ohybovou tuhost v obou případech budeme stanovovat stejně, a to pomocí rozdělovacího součinitele  $\zeta$ , stejně jako v předešlé kapitole. Ve výpočtu zohledňujeme vliv dotvarování dle normy ČSN EN 1992-1-1 [1].

### 9.1. Výpočetní program

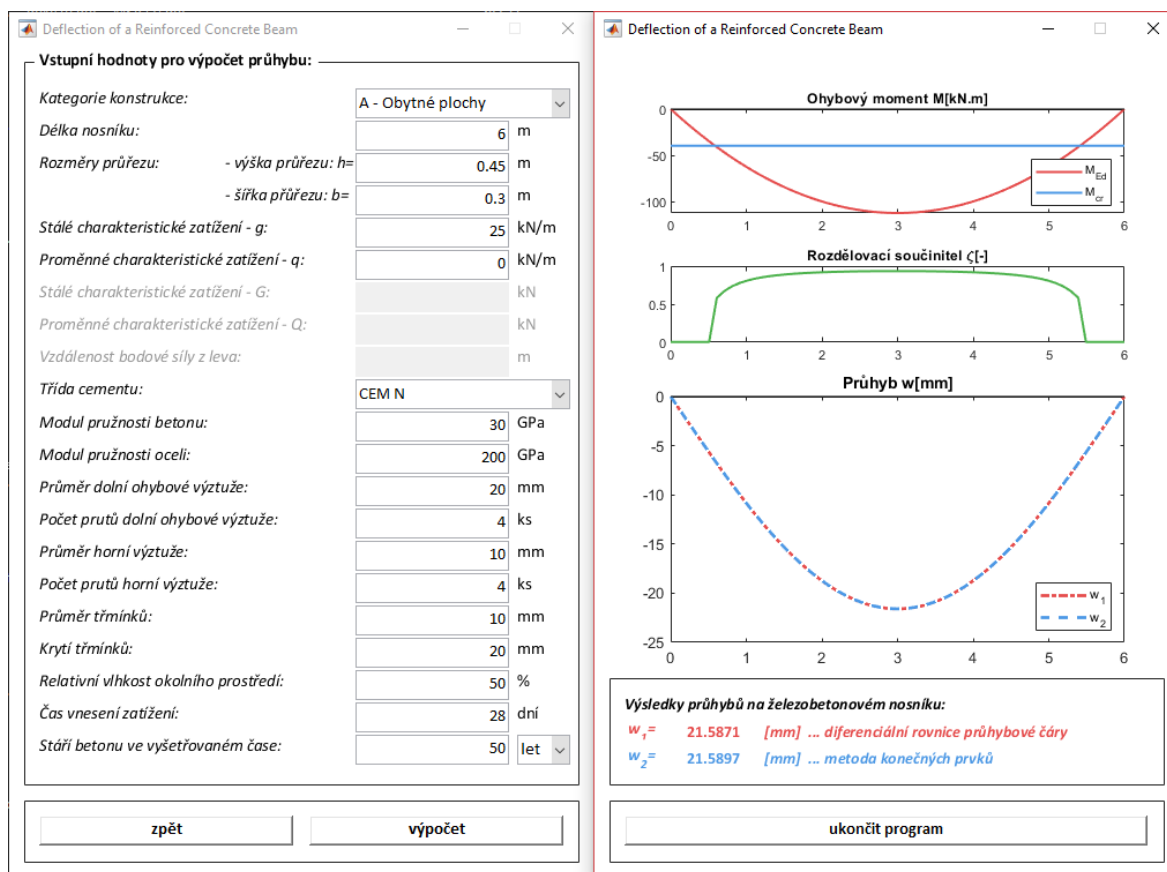
Na obrázku Obr.9.1. vidíme úvodní okno programu. V tomto okně je stručný popis programu, stisknutím tlačítka dole lze přejít k dalšímu kroku.



Obr.9.1. Úvodní okno programu č.2

## 9.2. Výstupy z programu – prostý nosník

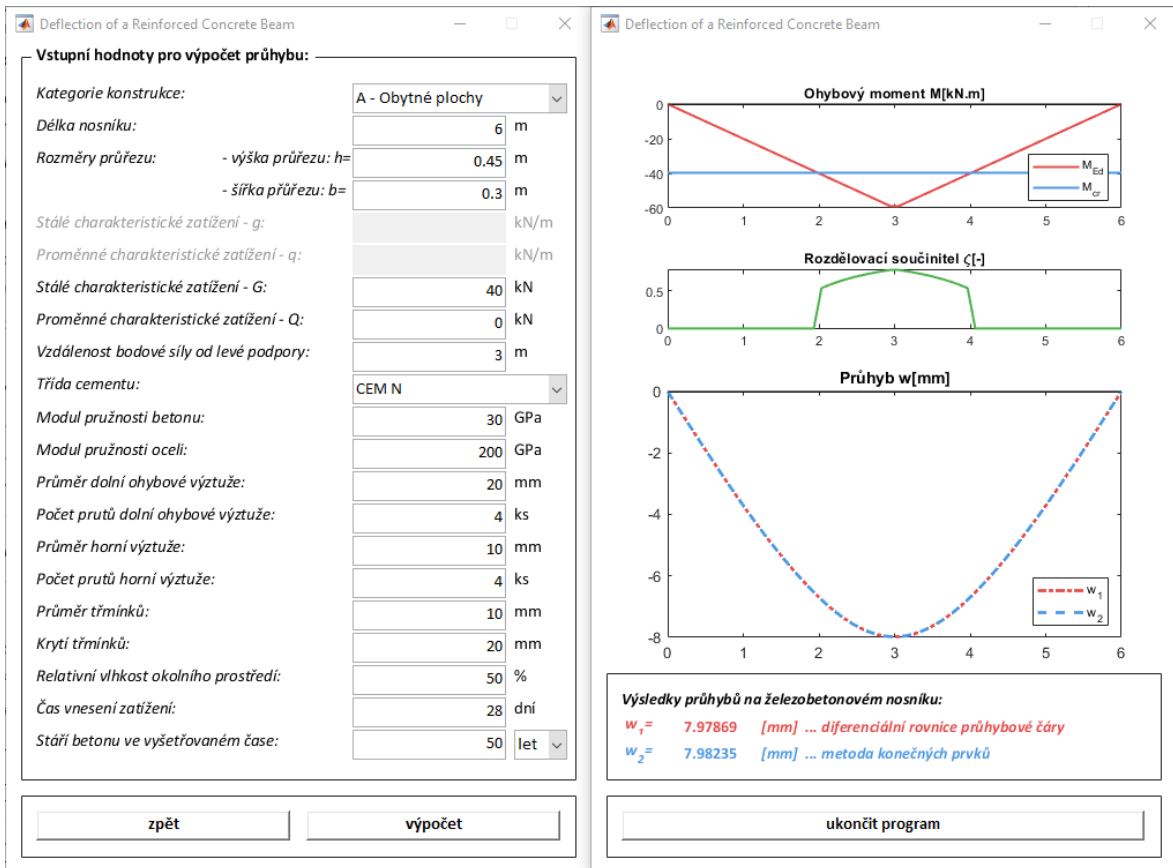
Na statickém schématu prostého nosníku budou prezentovány výsledky porovnání tohoto experimentu. V prvním případě budeme uvažovat nosník zatížený pouze rovnoměrným spojitým zatížením. Na obrázku Obr.9.2. vidíme zadání našeho zvoleného nosníku spolu s výsledky.



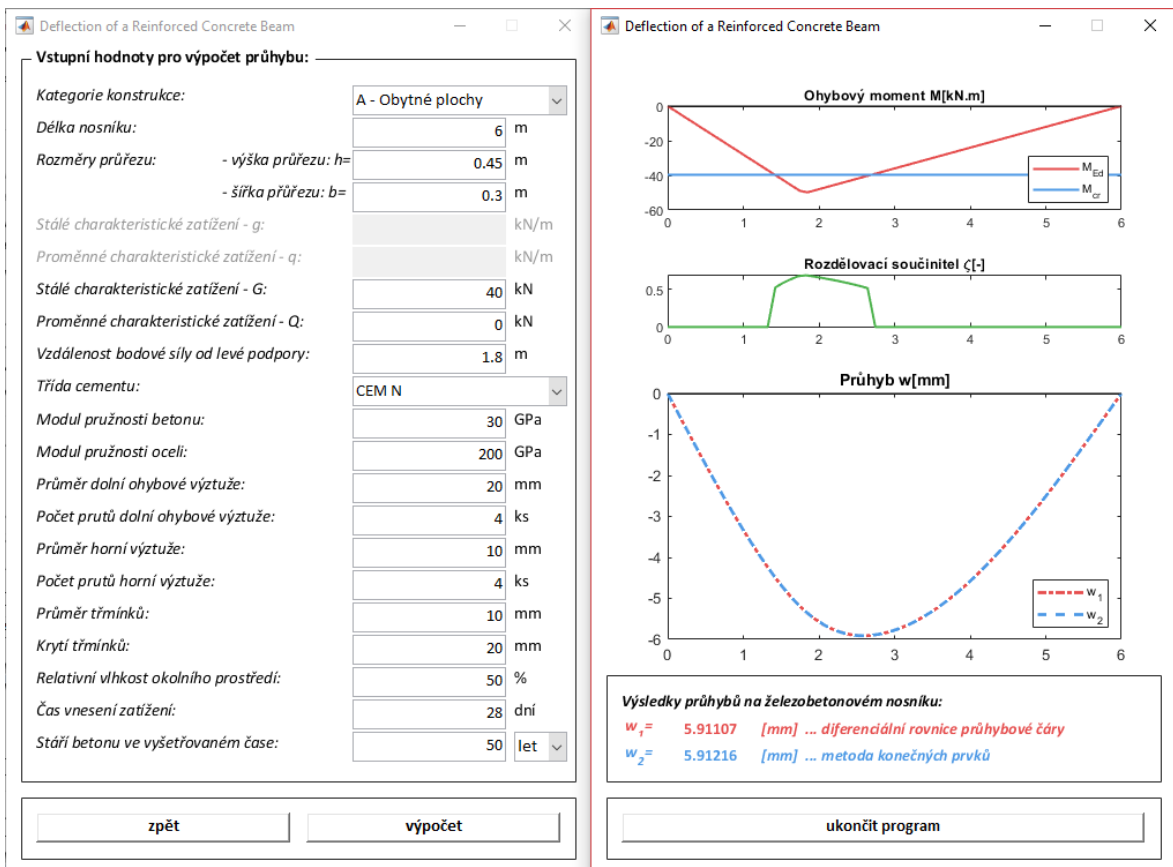
Obr.9.2. Výstup z programu č.2 – rovnoměrné spojitě zatížení

Uspořádání výsledků je v tomto programu stejné jako v předchozím programu. Na pravé straně se nachází okno s výsledky. V horní části okna je vykreslený ohybový moment, který na konstrukci působí. V prostřední části se nachází vykreslení rozdělovacího součinitele  $\zeta$ . Poslední pole slouží k vykreslování průběhu deformací po délce nosníku. Hodnoty maximálních deformací pro obě metody jsou zapsány ve spodní části okna. Na obrázku Obr.9.2. vidíme, že průběhy deformací v tomto případě jsou totožné.

Na obrázku Obr.9.3. vidíme výsledky pro stejný prostý nosník, který ale je zatížen osaměným břemenem v polovině rozpětí.

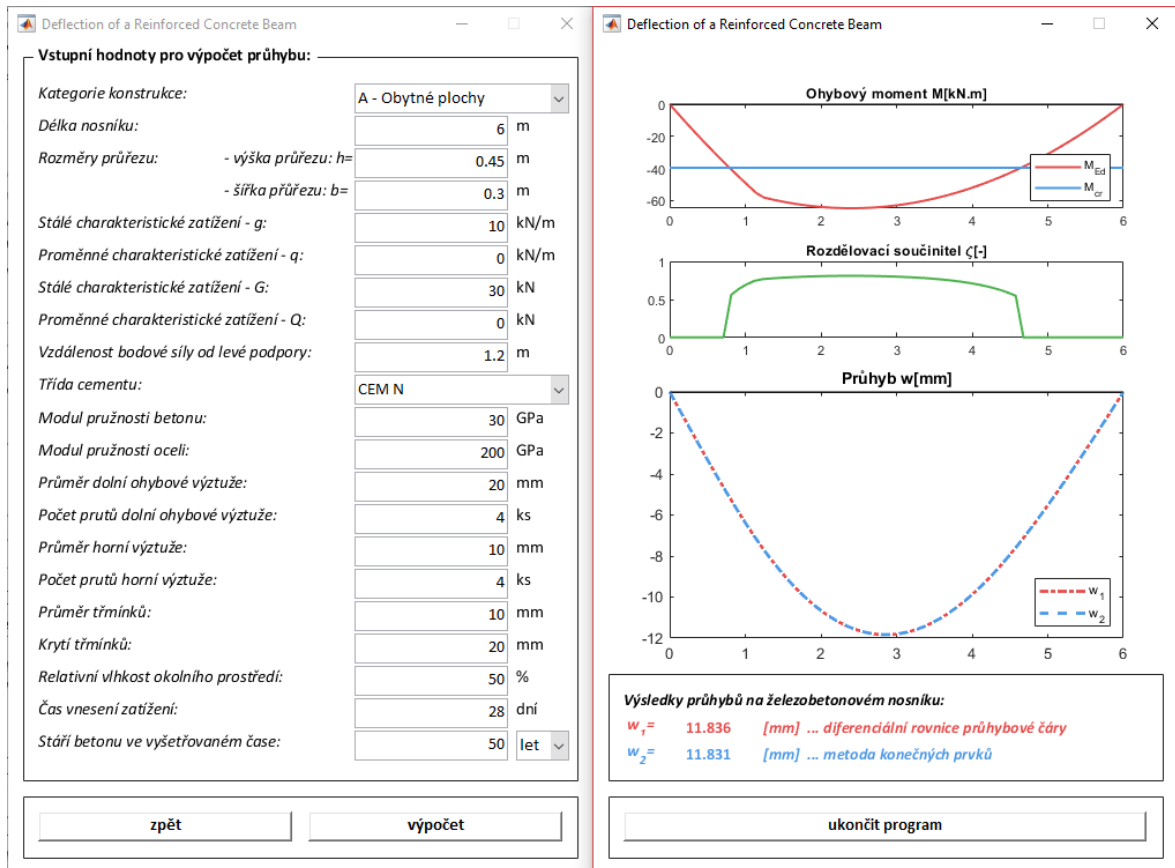


Obr.9.3. Výstup z programu č.2 – osamělé břemeno v polovině rozpětí



Obr.9.4. Výstup z programu č.2 – osamělé břemeno ve vzdálenosti 1,8 m

Na obrázku Obr.9.4. vidíme stejný nosník jako v předchozích dvou výpočtech. Tento nosník je také zatížený osamělým břemenem. Osamělá síla se nachází 1,8 metru od levé podpory. Na obrázku Obr.9.5. je ten samý nosník zatížen rovnoměrným spojitým zatížením a také osamělým břemenem ve vzdálenosti 1,2 metru od levé podpory.



Obr.9.5. Výstup z programu č.2 – oba typy zatížení

Do tabulky Tab.9.1 byly zapsány všechny hodnoty deformací spočtené v této kapitole:

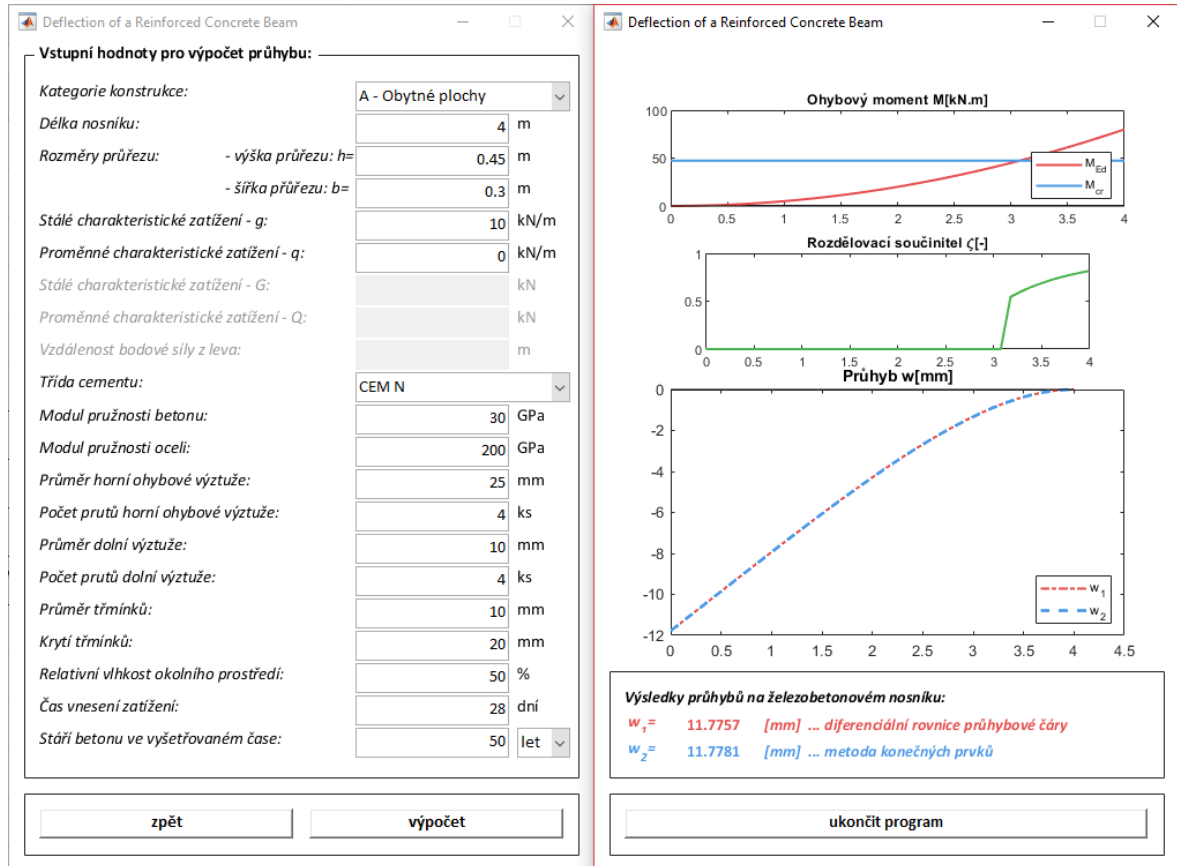
Tab.9.1 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm]

	Obr.9.2.	Obr.9.3.	Obr.9.4.	Obr.9.5.	
$w_1$	21,59	7,98	5,91	11,84	... pro diferenciální rovnici průhybové čáry
$w_2$	21,59	7,98	5,91	11,83	... metoda konečných prvků
$(w_2-w_1)/w_2$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	... poměr v procentech mezi $w_1$ a $w_2$

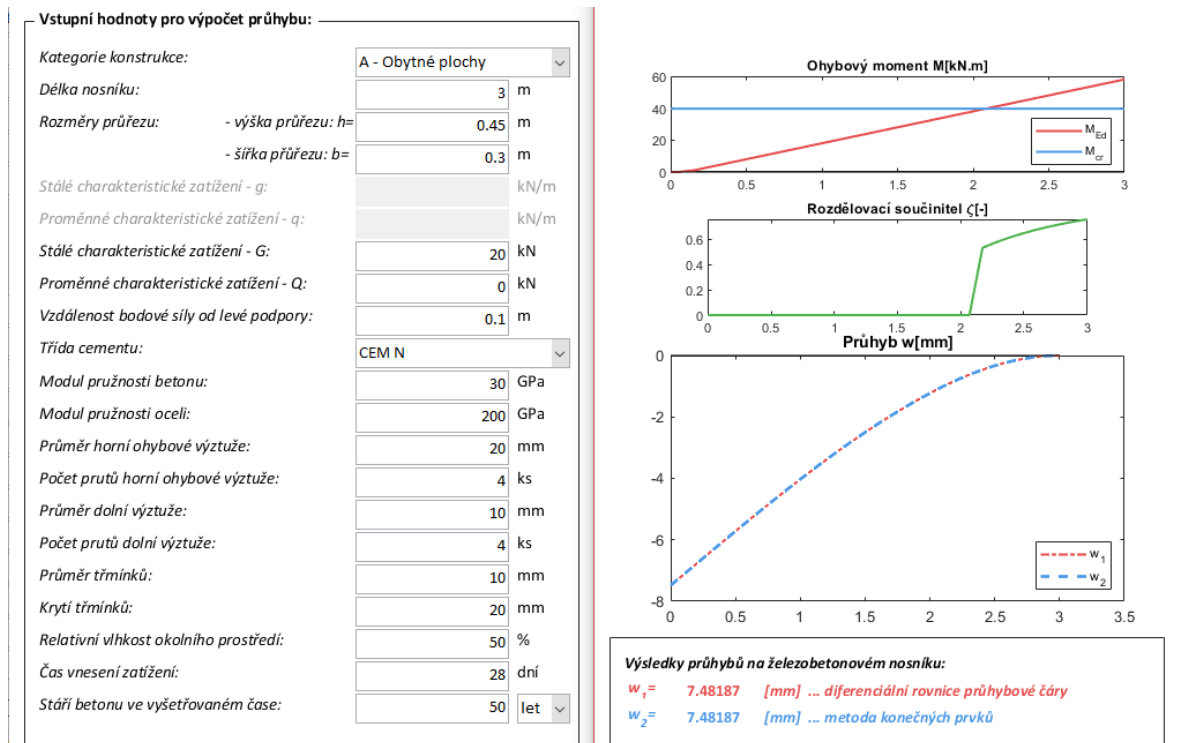
Z tabulky Tab.9.1 je zřejmé, že z obou výpočetních metod získáváme stejné výsledky pro jakýkoli způsob zatížení. Zároveň můžeme říci, že obě výpočetní metody fungují správně, vzhledem k přesnostem výsledků, které z nich získáváme.

### 9.3. Výstupy z programu – konzola

V této kapitole porovnáme výsledky deformací pro konzolu (Obr.9.6) až (Obr.9.8):

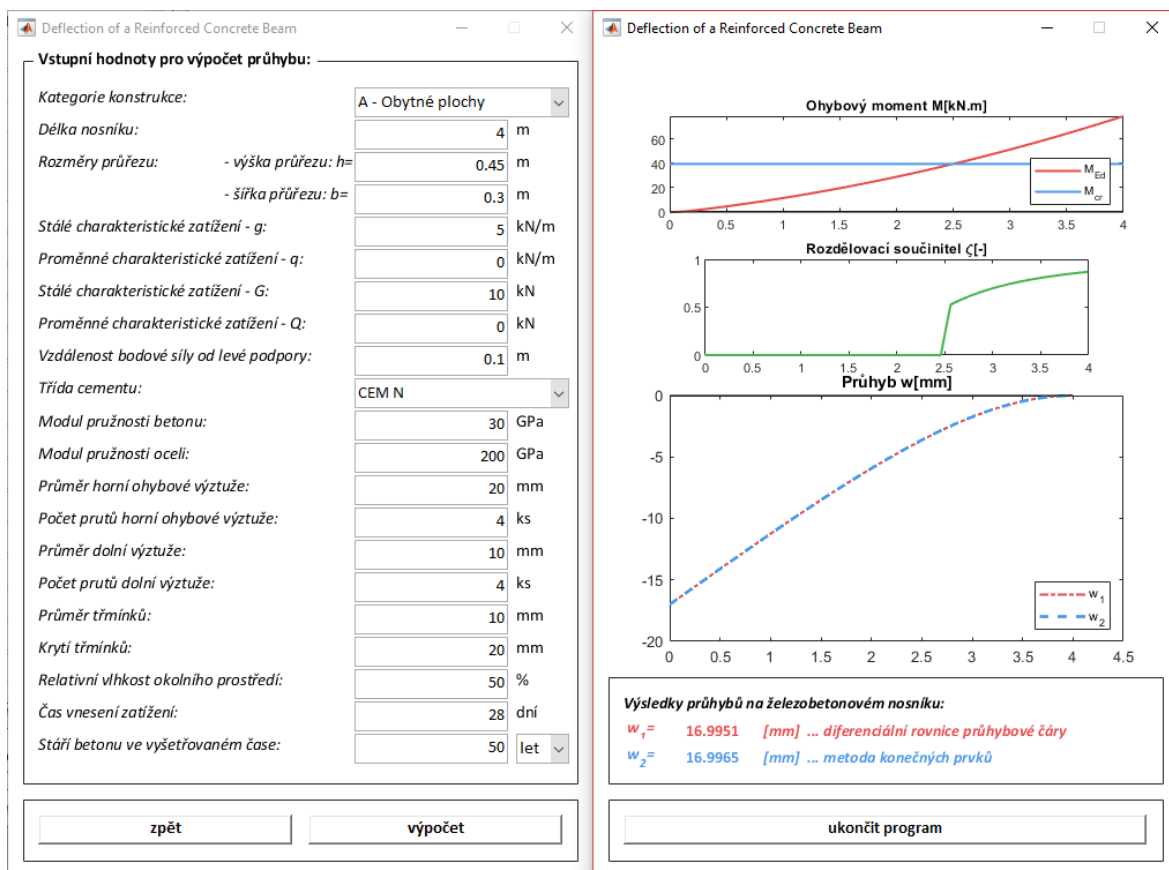


Obr.9.6. Výstup z programu č.2 – spojitě zatížení



Obr.9.7. Výstup z programu č.2 – osamělé břemeno





Obr.9.8. Výstup z programu č.2 – oba typy zatížení

Do tabulky Tab.9.2 byly zapsány všechny hodnoty deformací spočtené v této kapitole:

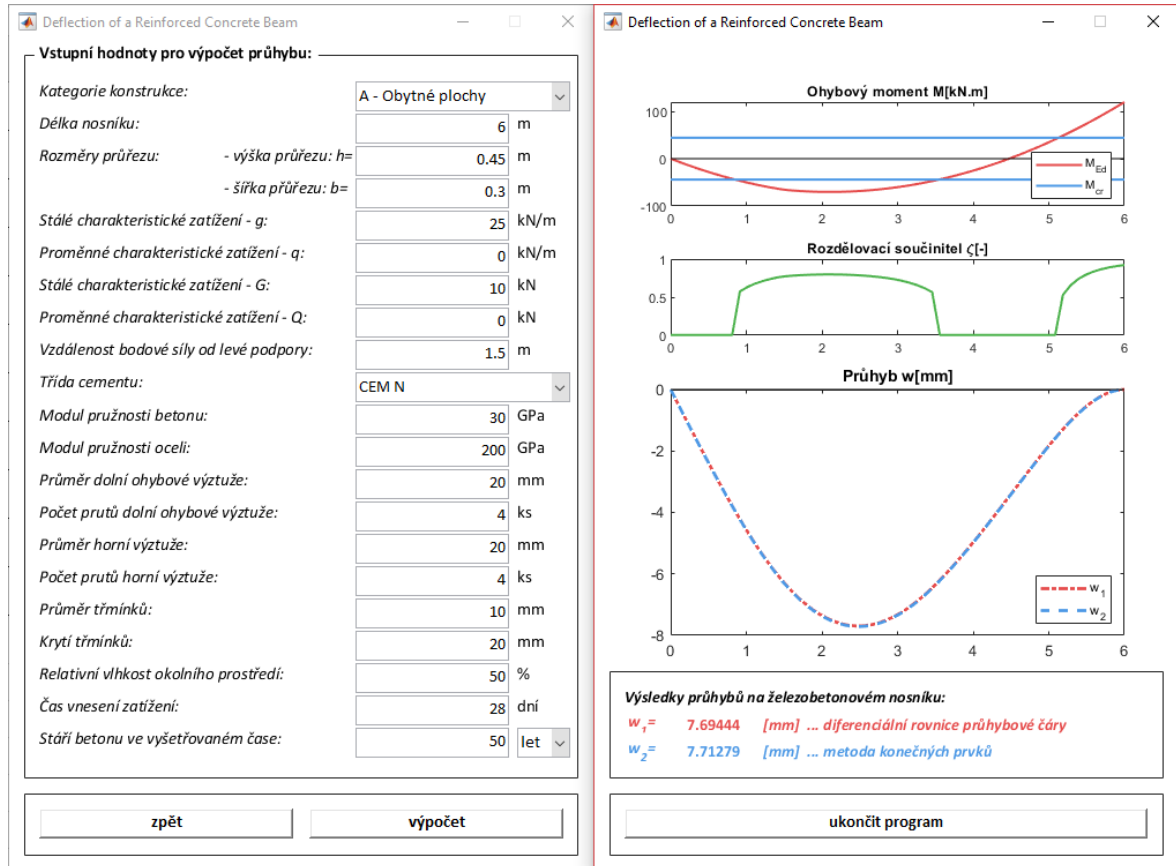
Tab.9.2 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm]

	Obr.9.6.	Obr.9.7.	Obr.9.8.	
$w_1$	11,78	7,48	17,00	... pro diferenciální rovnici průhybové čáry
$w_2$	11,78	7,48	17,00	... metoda konečných prvků
$(w_2-w_1)/w_2$	0,0%	0,0%	0,0%	... poměr v procentech mezi $w_1$ a $w_2$

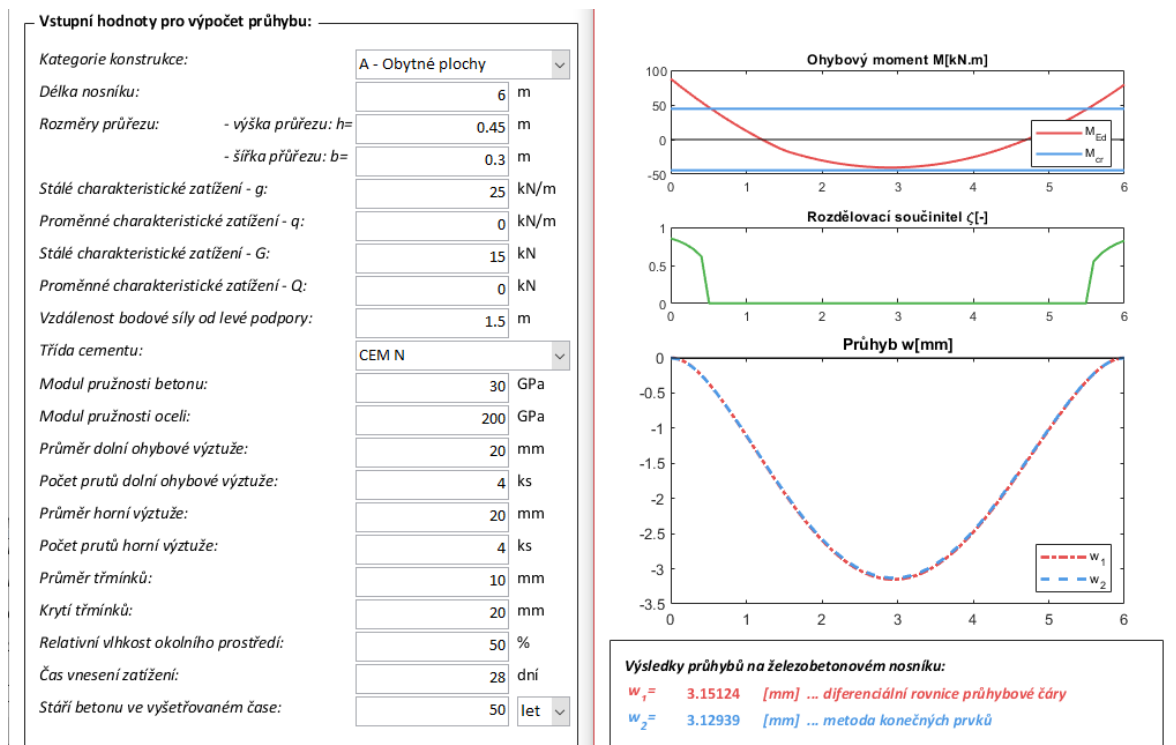
Z tabulky Tab.9.2 je zřejmé, že z obou výpočetních metod získáváme stejné výsledky pro jakýkoli způsob zatížení.

### 9.3. Výstupy z programu – staticky neurčitá konstrukce

V této kapitole porovnáme výsledky deformací pro K-V a V-V (Obr.9.9) a (Obr.9.10):



Obr.9.9. Výstup z programu č.2 – kloub/vetknutí



Obr.9.10. Výstup z programu č.2 – vetknutí/vetknutí

Do tabulky Tab.9.3 byly zapsány všechny hodnoty deformací spočtené v této kapitole:

*Tab.9.3 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm]*

	Obr.9.9.	Obr.9.10.	
$w_1$	7,69	3,15	... pro diferenciální rovnici průhybové čáry
$w_2$	7,71	3,13	... metoda konečných prvků
$(w_2-w_1)/w_2$	0,2%	-0,7%	... poměr v procentech mezi $w_1$ a $w_2$

Z tabulky Tab.9.3 je zřejmé, že z obou výpočetních metod získáme stejné výsledky pro jakýkoli způsob zatížení. Proto můžeme v závěru říci, že nezáleží, kterou z těchto dvou výpočetních metod zvolíme. Oběma postupy se vždy dopočítáme ke stejnému výsledku deformací na nosníku.

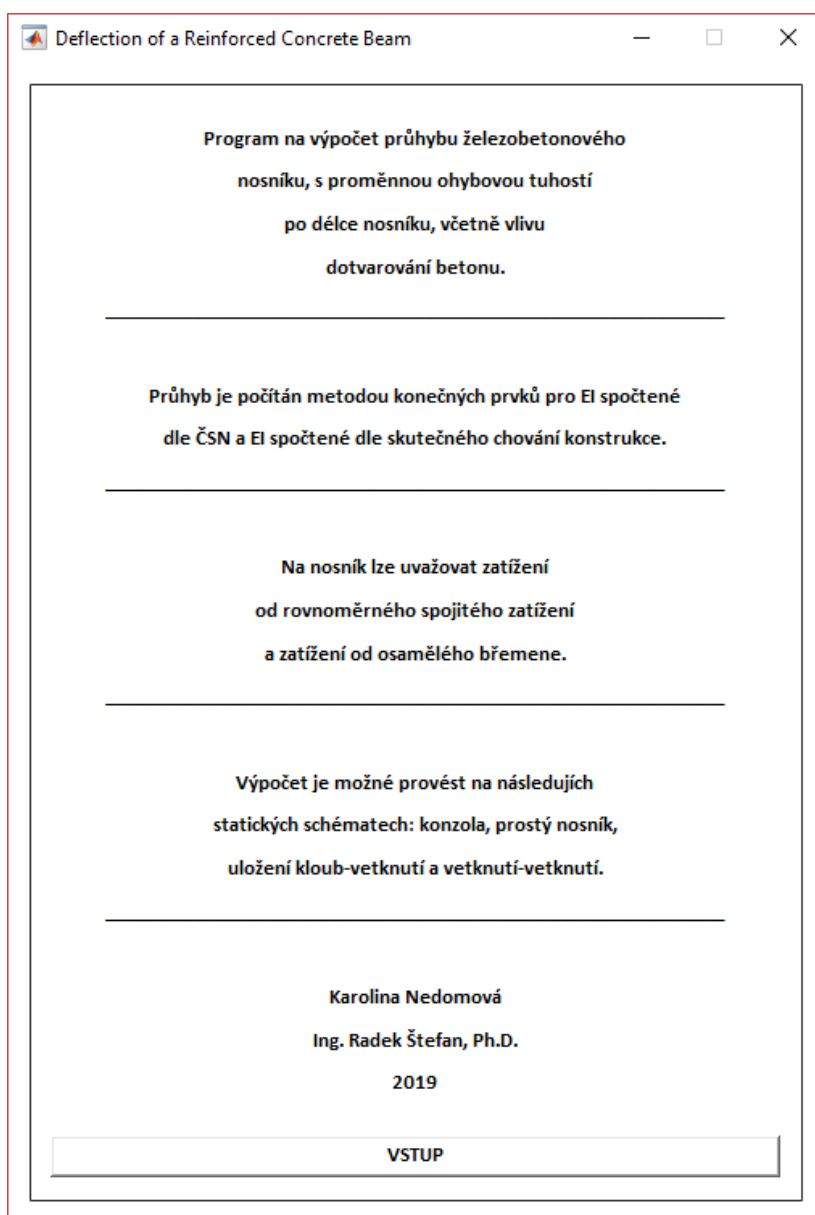
## 10. Program č.3 – metoda konečných prvků

V předchozí kapitole jsme porovnávali výpočet průhybu přes ohybovou čáru a metodou konečných prvků. Z výsledků vidíme, že z obou výpočetních metod jsme získali stejné výsledky. Jediný rozdíl je postup získání těchto výsledků. Ve třetím programu byla použita metoda konečných prvků ke stanovení deformací. Důvodem je, že metoda konečných prvků je univerzálnější a jednodušší. Při posuzování složitějších konstrukcí či posuzování konstrukcí zatížených složitějším zatížením je pro výpočet pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry nutné vždy stanovit novou rovnici pro ohybový moment. Diferenciální rovnici průhybové čáry je vhodnější používat pro jednoduchý typ konstrukce ideálně s jednoduchým zatížením této konstrukce.

Tento program, jak už bylo řečeno používá tedy metodu konečných prvků. Tato metoda je celosvětově rozšířená a využívá jí většina komerčních statických programů používaných po celém světě. Tento program porovnává deformace spočtené pro dva různé způsoby stanovení proměnné tuhosti po délce nosníku pro každý dílek. První způsob stanovení ohybové tuhosti je postup normový [1], který jsme využili v předešlých programech. Druhý způsob stanovuje ohybovou tuhost z materiálových vlastností betonu a oceli viz kapitola 6. V pracovním diagram betonu bylo zohledněno dotvarování betonu (kap.6). Použitím pracovních diagramů těchto materiálů stanovíme pracovní diagram průřezu viz kapitola 6.4. Následně dle zakřivení nosníku způsobené zatížením, které na něj působí odečteme z pracovního diagramu průřezu jeho skutečnou ohybovou tuhost. Jako kontrolu si na nosníku metodou konečných prvků spočteme a vykreslíme průběh ohybových momentů (viz kapitola 5.4.) a porovnáme s ohybovým momentem spočteným na nosníku analyticky.

## 10.1. Výpočetní program

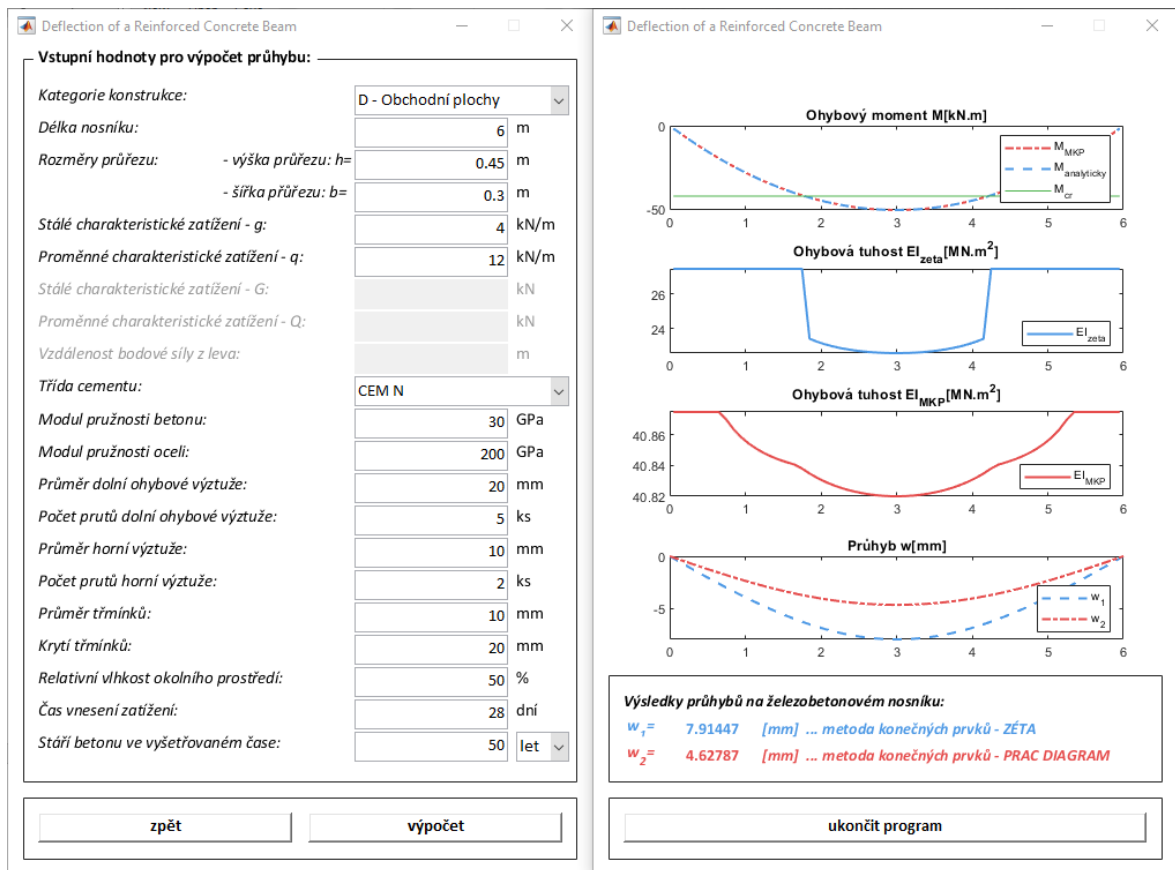
Na obrázku Obr.10.1. vidíme úvodní okno programu. V tomto okně je stručný popis programu, stisknutím tlačítka dole lze přejít k dalšímu kroku.



Obr.10.1. Úvodní okno programu č.3

## 10.2. Výstupy z programu – prostý nosník

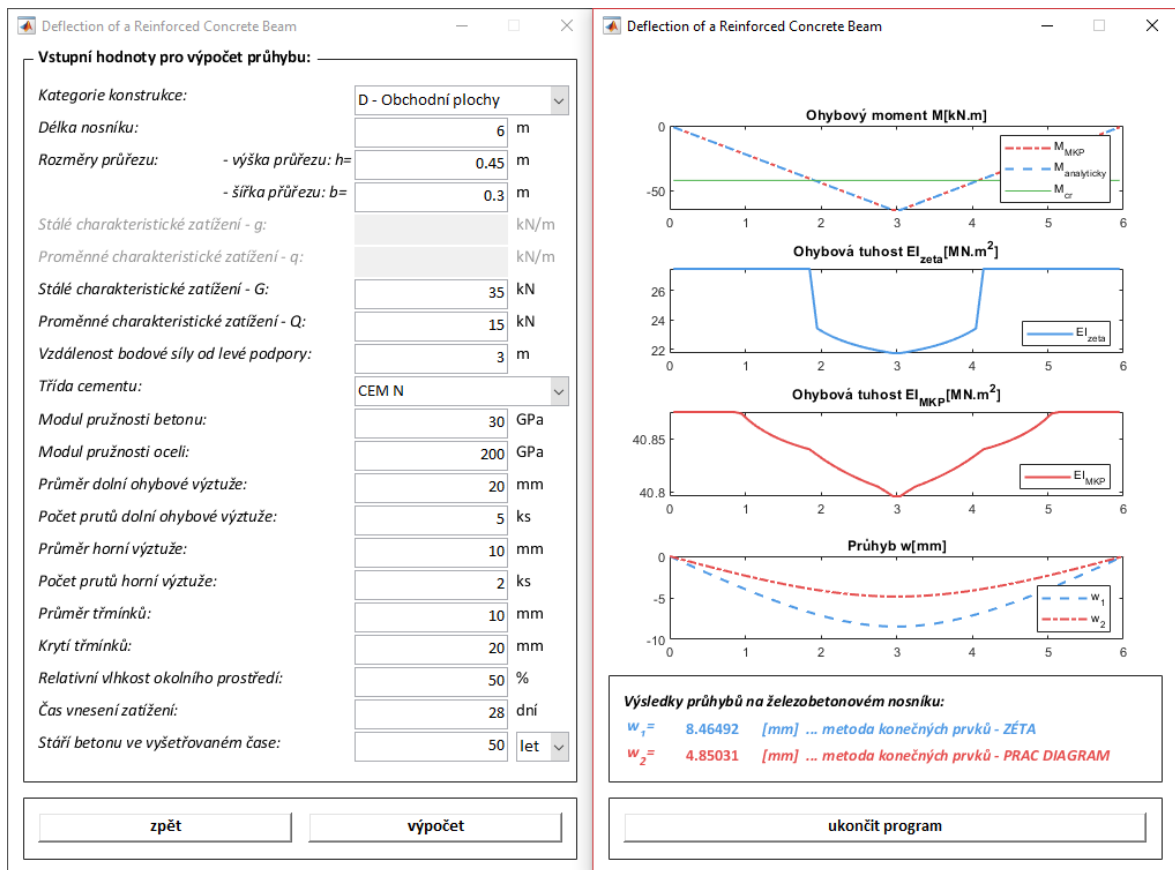
Na statickém schématu prostého nosníku budou prezentovány výsledky tohoto experimentu. Na obrázku Obr.10.2. vidíme zadání našeho zvoleného nosníku spolu s výsledky.



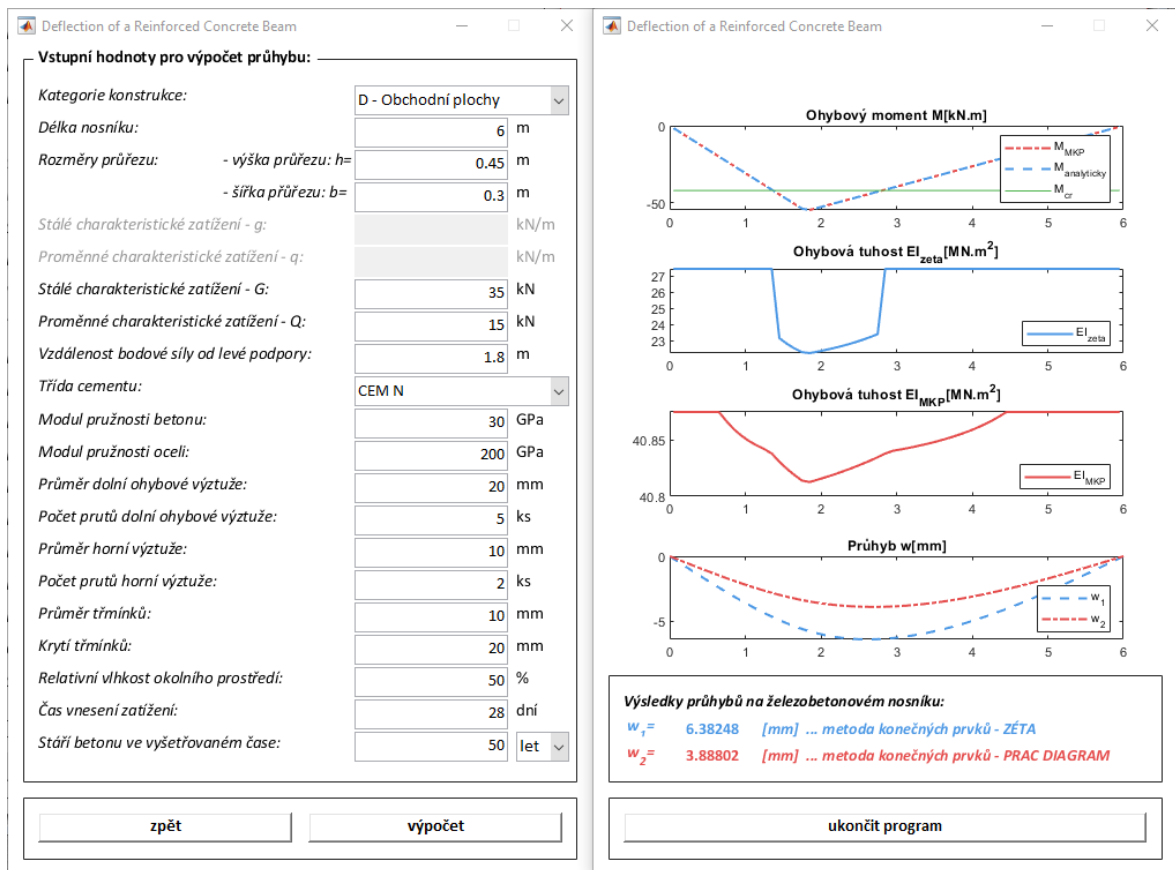
Obr.10.2. Výstup z programu č.3 – rovnoměrné spojitě zatížení

Uspořádání výsledků v tomto programu je podobné jako v předchozích programech. Vlevo se nachází okno se zadávacími políčky. Po stisknutí tlačítka výpočet se zobrazí na pravé okno s výsledky. V horní části okna je vykreslený ohybový moment, který na konstrukci působí. Červeně se vykresluje moment spočten metodou konečných prvků viz kapitola 5.4. Modře se vykresluje moment spočten analyticky. Zeleně se vykresluje hodnota kritického momentu. Průběhy ohybového momentu pro MKP i analytické vyjádření by mělo vždy vycházet stejně. Tyto hodnoty jsou počítané různými metodami, a tudíž pokud průběhy vychází stejně, lze říci, že metody výpočtu fungují správně. Další dvě okna slouží k vykreslení hodnot ohybových tuhostí, které se mění po délce nosníku. V prvním okně se vykresluje tuhost určená přes rozdělovací součinitel  $\zeta$  dle [1]. Ve druhém okně se vykresluje ohybová tuhost spočtená z pracovních diagramů průřezu. V posledním okně vidíme průběhy deformací, spočtené pro normovou tuhost, značíme průhyb  $w_1$  a pro tuhost určenou z pracovního diagramu, značíme  $w_2$ . Maximální hodnoty průhybů jsou zapsány do kolonky pro výsledky v dolní části okna.

Na obrázku Obr.10.3. vidíme výsledky pro stejný prostý nosník, který ale je zatížen osaměným břemenem v polovině rozpětí.



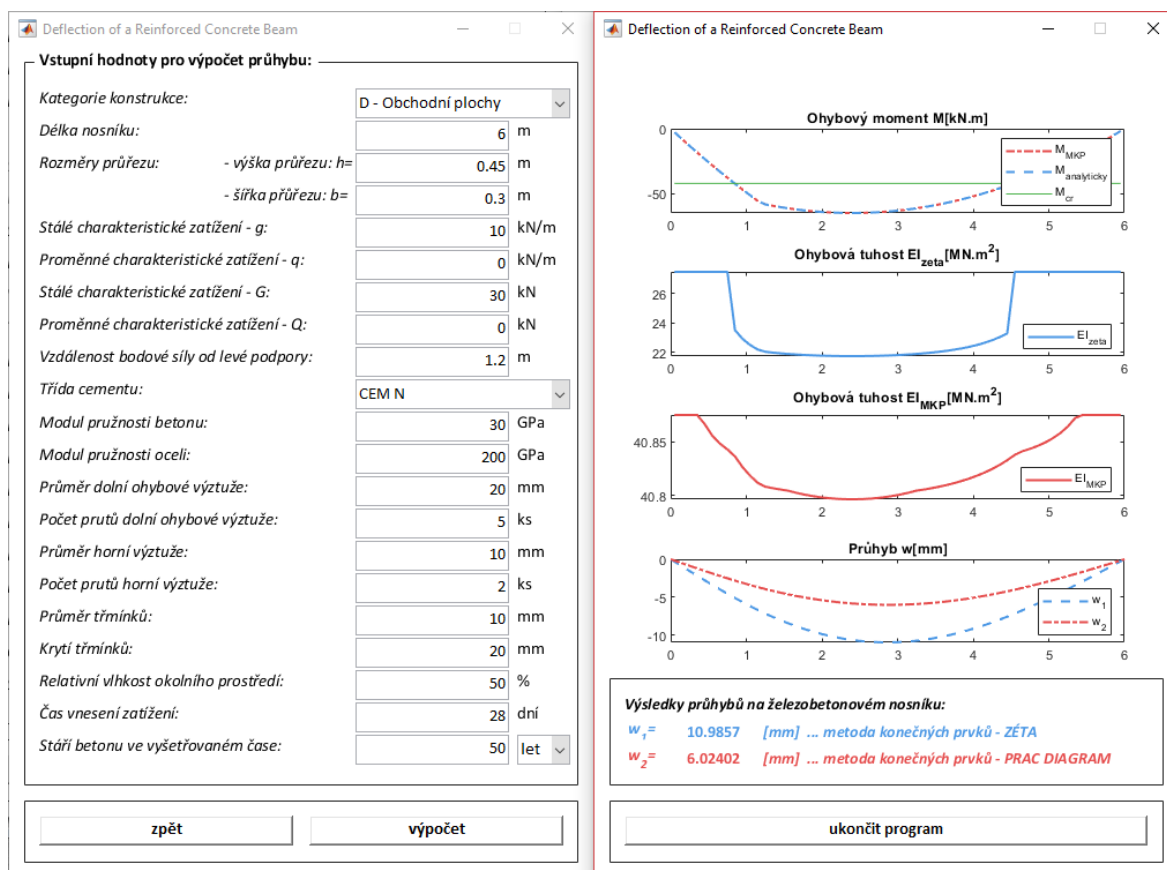
Obr.10.3. Výstup z programu č.3 – osaměné břemeno v polovině rozpětí



Obr.10.4. Výstup z programu č.3 – osamělé břemeno ve vzdálenosti 1,8 m

Na obrázku Obr.10.4. vidíme stejný nosník jako v předchozích dvou výpočtech. Tento nosník je také zatížený osamělým břemenem. Osamělá síla se nachází 1,8 metru od levé podpory.

Na obrázku Obr.10.5. je ten samý nosník zatížený rovnoměrným spojitým zatížením a také osamělým břemenem ve vzdálenosti 1,2 metru od levé podpory.



Obr.10.5. Výstup z programu č.3 – oba typy zatížení

Důležité je, si povšimnout společných vlastností výsledků získaných na obrázcích Obr.10.2 až Obr.10.5. V první řadě je nutné zdůraznit, že průběhy ohybových momentů jsou ve všech případech identické. Za druhé je důležité si povšimnout podobných tvarů křivek představující ohybové tuhosti. Jejich tvar je podobný tudíž princip obou výpočtů pracuje se stejnou myšlenkou. Nosník je uprostřed průřezu nejvíce poničený trhlinami, a tudíž zde se snižuje hodnota ohybové tuhosti. Zároveň je ale nutné říci, že hodnoty ohybových tuhostí, získaných sečnou metodou z pracovního diagramu průřezu jsou mnohem vyšší než u ohybových tuhostí získaných normovým výpočtem [1]. Z toho vyplývá, že pokud hodnoty ohybových momentů jsou stejné a ohybové tuhosti pro normový postup [1] menší než pro tuhosti získané z pracovních diagramů, musí být hodnoty deformací pro normový postup větší než hodnoty deformací  $w_2$ .



### 10.3. Výstupy z programu – konzola

Na statickém schématu konzoly budou prezentovány výsledky pro zadání z kapitoly 8.3, kde jsme porovnávali normové postupy stanovení ohybové tuhosti. Nyní tyto tuhosti porovnáme navíc s ohybovými tuhostmi získanými z pracovních diagramů materiálů. Na obrázku Obr.10.6. vidíme zadání našeho zvoleného nosníku z kapitoly 8.3.

The screenshot shows a software window titled "Deflection of a Reinforced Concrete Beam". The window contains a form for entering input values for a beam deflection calculation. The form is organized into a table-like structure with labels on the left and input fields on the right. At the bottom of the form, there are two buttons: "zpět" (back) and "výpočet" (calculate).

Vstupní hodnoty pro výpočet průhybu:	
Kategorie konstrukce:	A - Obytné plochy
Délka nosníku:	3 m
Rozměry průřezu:	
- výška průřezu: $h=$	0.2 m
- šířka průřezu: $b=$	1 m
Stálé charakteristické zatížení - $g$ :	5 kN/m
Proměnné charakteristické zatížení - $q$ :	3 kN/m
Stálé charakteristické zatížení - $G$ :	1 kN
Proměnné charakteristické zatížení - $Q$ :	0 kN
Vzdálenost bodové síly od levé podpory:	0.1 m
Třída cementu:	CEM N
Modul pružnosti betonu:	31 GPa
Modul pružnosti oceli:	200 GPa
Průměr horní ohybové výztuže:	16 mm
Počet prutů horní ohybové výztuže:	10 ks
Průměr dolní výztuže:	8 mm
Počet prutů dolní výztuže:	10 ks
Průměr třmínků:	0 mm
Krytí třmínků:	25 mm
Relativní vlhkost okolního prostředí:	50 %
Čas vnesení zatížení:	28 dní
Stáří betonu ve vyšetřovaném čase:	50 let

zpět      výpočet

Obr.10.6. Vstupní hodnoty pro program č.1 a č.3

Na obrázku Obr.10.7. vidíme výsledky, které jsme získali z kapitoly 8.3 spočtené Programem č.1. Na obrázku Obr.10.8. vidíme hodnoty spočtené programem MKP, Program č.3.

**Výsledky průhybů na železobetonovém nosníku:**

$w = 15.2055$  [mm] ...proměnné EI po délce nosníku

$w_2 = 21.6809$  [mm] ... konstantní EI po délce nosníku dle ČSN EN

**Výsledky průhybů na železobetonovém nosníku:**

$w = 12.4124$  [mm] ...proměnné EI po délce nosníku

$w_2 = 16.983$  [mm] ... konstantní EI po délce nosníku dle ČSN EN

**Výsledky průhybů na železobetonovém nosníku:**

$w = 10.7059$  [mm] ...proměnné EI po délce nosníku

$w_2 = 14.0657$  [mm] ... konstantní EI po délce nosníku dle ČSN EN

**Výsledky průhybů na železobetonovém nosníku:**

$w = 9.58757$  [mm] ...proměnné EI po délce nosníku

$w_2 = 12.1267$  [mm] ... konstantní EI po délce nosníku dle ČSN EN

Obr.10.7. Výstupní hodnoty Program č.1

**Výsledky průhybů na železobetonovém nosníku:**

$w_1 = 15.2098$  [mm] ... metoda konečných prvků - ZÉTA

$w_2 = 16.6197$  [mm] ... metoda konečných prvků - PRAC DIAGRAM

**Výsledky průhybů na železobetonovém nosníku:**

$w_1 = 12.416$  [mm] ... metoda konečných prvků - ZÉTA

$w_2 = 11.6501$  [mm] ... metoda konečných prvků - PRAC DIAGRAM

**Výsledky průhybů na železobetonovém nosníku:**

$w_1 = 10.7092$  [mm] ... metoda konečných prvků - ZÉTA

$w_2 = 8.65053$  [mm] ... metoda konečných prvků - PRAC DIAGRAM

**Výsledky průhybů na železobetonovém nosníku:**

$w_1 = 9.59056$  [mm] ... metoda konečných prvků - ZÉTA

$w_2 = 6.69842$  [mm] ... metoda konečných prvků - PRAC DIAGRAM

Obr.10.8. Výstupní hodnoty Program č.3

Červené hodnoty Obr.10.7.: průhyb pro normový výpočet (DRPČ) pro proměnnou tuhost

Zelené hodnoty Obr.10.7.: průhyb pro normový výpočet pro konstantní tuhost

Modré hodnoty Obr.10.8.: průhyb pro normový výpočet (MKP) pro proměnnou tuhost

Červené hodnoty Obr.10.8.: průhyb MKP pro proměnnou tuhost dle pracovních diagramů

Tyto hodnoty byly zapsány do tabulky Tab.10.1:

Tab.10.1 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm]

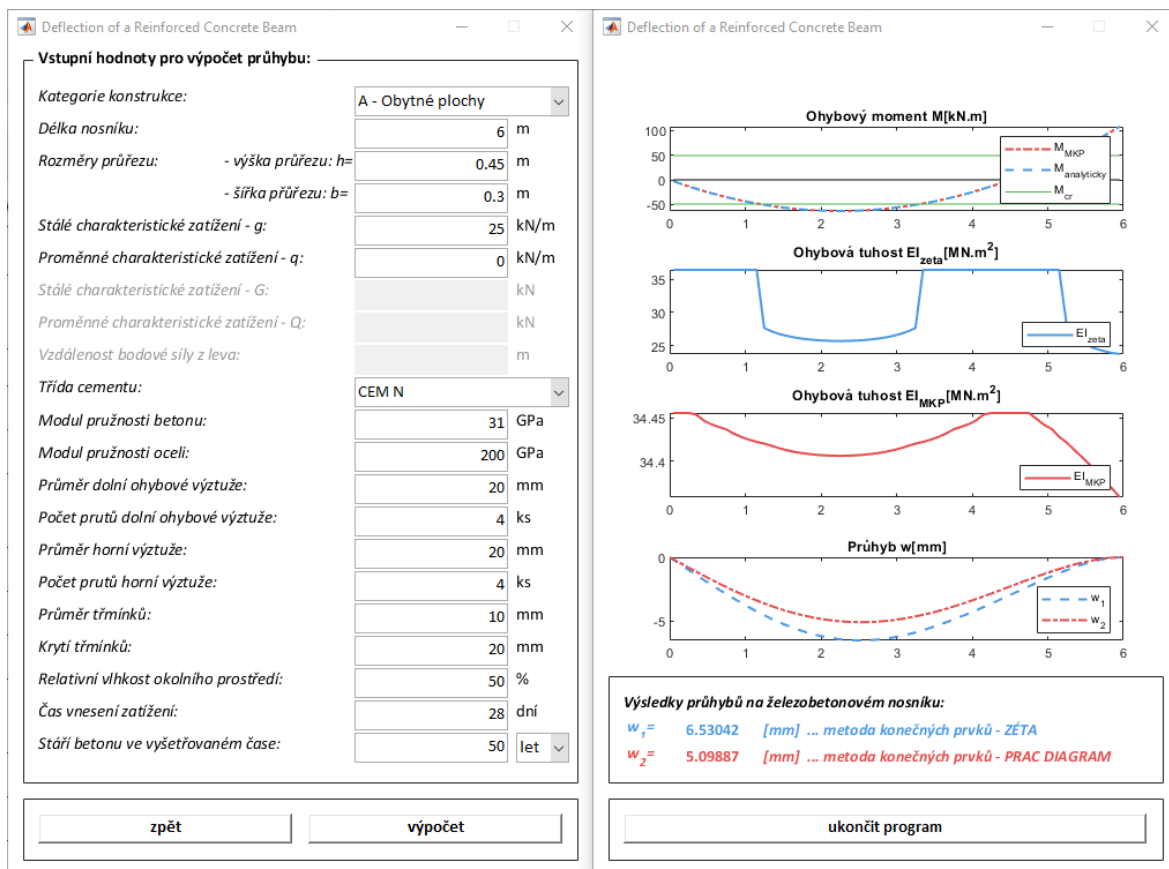
	Obr.10.7.				... průměr horní ohybové výztuže
	Ø10	Ø12	Ø14	Ø16	
w	15,21	12,41	10,71	9,59	... průhyb pro proměnné EI po délce nosníku
w <sub>2</sub>	21,68	16,98	14,06	12,13	... průhyb pro konstantní EI po délce nosníku
	29,8%	26,9%	23,8%	20,9%	... poměr v procentech mezi w a w <sub>2</sub>
	Obr.10.8.				... průměr horní ohybové výztuže
	Ø10	Ø12	Ø14	Ø16	
w <sub>1</sub>	15,21	12,41	10,71	9,59	... průhyb pro proměnné EI po délce nosníku
w <sub>2</sub>	16,62	11,65	8,65	6,70	... průhyb dle pracovních diagramů materiálů
	8,5%	6,1%	19,2%	30,2%	... poměr v procentech mezi w <sub>1</sub> a w <sub>2</sub>
	Porovnání normového výpočtu s EI konstantní s EI stanovenou pomocí pracovních diagramů				
	Ø10	Ø12	Ø14	Ø16	... průměr horní ohybové výztuže
w <sub>2</sub>	16,62	11,65	8,65	6,70	... průhyb dle pracovních diagramů materiálů
w <sub>2</sub>	21,68	16,98	14,06	12,13	... průhyb pro konstantní EI po délce nosníku
	23,3%	31,4%	38,5%	44,8%	... poměr v procentech

Z tabulky vidíme, že vypočtené hodnoty průhybů se velice liší. Zaměříme se na hodnoty spočtené na konzole a vyztužené výztuží Ø16. V první části tabulky porovnáváme normový výpočet pro tuhost konstantní a proměnnou po délce nosníku, poměr těchto deformací činí cca 21 %. Ve druhé části tabulky porovnáváme normový výpočet proměnné tuhosti s tuhostmi stanovenými z pracovních diagramů, zde celkový poměr činí cca 30 %. Také je možné si povšimnout, že hodnoty pro normový výpočet na obrázcích Obr.10.7. a Obr.10.8. se liší v desetinných místech. To je způsobeno, že první program používá výpočet pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry, naopak třetí program používá metodu konečných prvků, což způsobuje drobné odchylky v desetinných místech. Jak jsme ale již porovnali tyto výpočty v minulé kapitole, víme, že rozdíly jsou zanedbatelné. Třetí část tabulky Tab.10.1 porovnává normový postup s konstantní ohybovou tuhostí s deformacemi pro proměnnou ohybovou tuhost stanovenou z pracovních diagramů. Zde lze očekávat největší rozpor mezi výsledky, a v našem případě rozdíl činí cca 45 %.

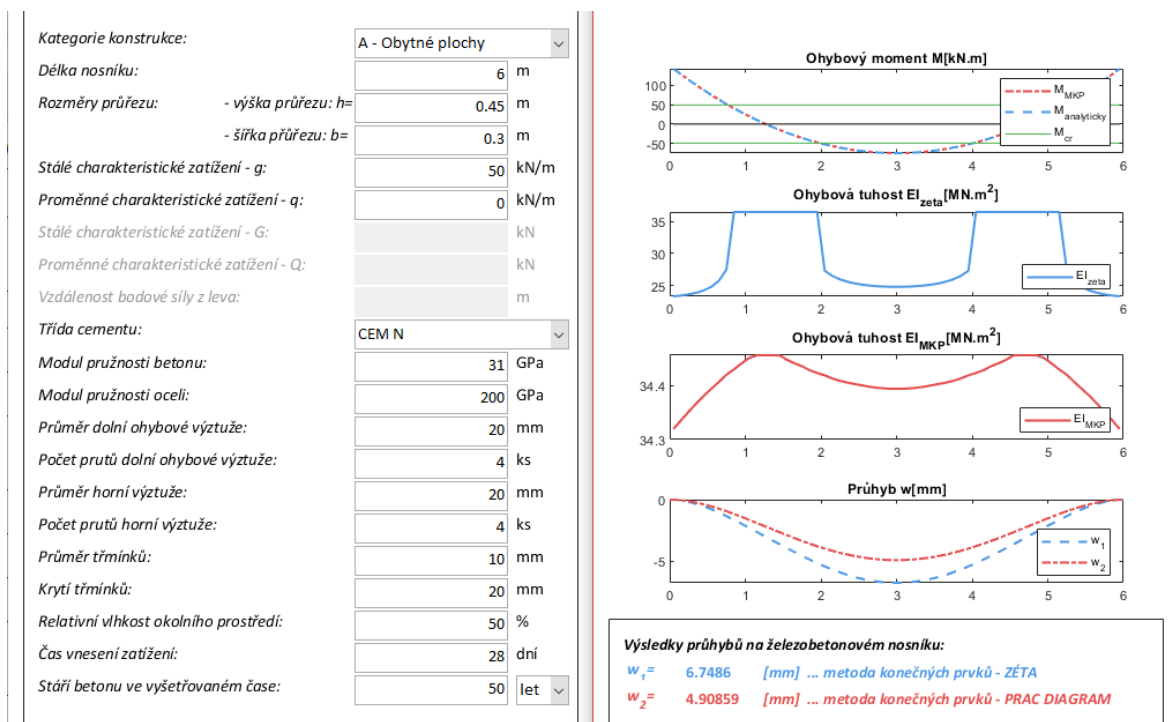
V závěru lze říci, že výpočet deformací na konzole bude vždy vykazovat nejvíce rozporuplné výsledky.

### 10.3. Výstupy z programu – staticky neurčitá konstrukce

V této kapitole porovnáme výsledky deformací pro K-V a V-V (Obr.10.9) a (Obr.10.10):

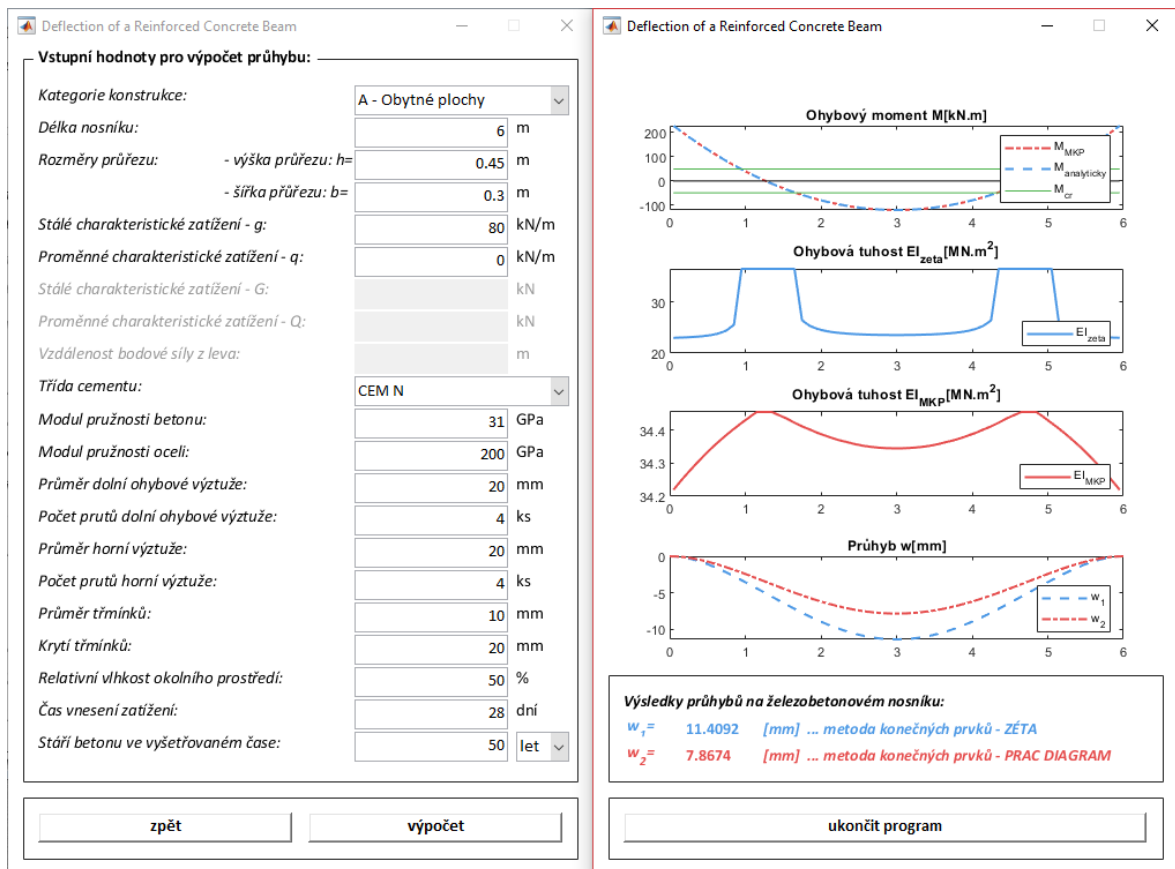


Obr.10.9. Výstup z programu č.3 – kloub/vetknutí



Obr.10.10. Výstup z programu č.3 – vetknutí/vetknutí

Z výsledků na obrázcích Obr.10.9. a Obr.10.10. vidíme, že ze všech statických schémat se výsledky z obou metod vypočtených tuhostí k sobě nejvíce blíží. Tento fakt je způsoben tím, že u konstrukcí staticky neurčitých je konstrukce namáhána při obou površích a konstrukce je relativně hodně trhlinami porušena, na rozdíl od prostého nosníku či konzoly. V závěru lze říci, že normový výpočet stanovení tuhostí pro tyto staticky neurčité konstrukce se nejlépe přibližuje tuhostem spočteným z materiálových vlastností pro běžná zatížení. Pokud budeme takovýto nosník, ale zatěžovat většími silami, rozdíl mezi výsledky a hodnotami ohybové tuhosti bude narůstat (Obr.10.11.)



Obr.10.11. Výstup z programu č.3

## 11. Závěr

Práce se zabývá přímým výpočtem průhybu na železobetonovém prostém nosníku, konzole a na konstrukcích staticky neurčitých typu kloub-vetknutí a vetknutí-vetknutí. Ve výpočtu je uvažováno s vlivem dotvarování betonu. V rámci této práce byl vytvořen popis algoritmu tohoto výpočtu a následně byly vytvořeny tři výpočetní programy v programovacím prostředí Matlab, které tyto algoritmy výpočtu používají. Výpočet průhybu je počítán diferenciální rovnicí průhybové čáry a metodou konečných prvků, kdy jsme zjistili, že z těchto metod získáváme stejné výsledky. V závěru lze říci, že metoda výpočtu průhybu pomocí průhybové čáry je výhodnější pouze pro jednoduché typy konstrukcí a zatížené jednoduchým zatěžovacím schématem. V případě složitějších tvarů konstrukce či složitějšího obrazce zatížení je výhodnější použít metodu konečných prvků, která je ve všech směrech univerzálnější. Z porovnání výpočtu ohybových tuhostí po délce nosníku zjištěné normovým postupem [1] a přesnější numerickou metodou vyplývá, že normový způsob stanovení ohybových tuhostí, je více konzervativní, a tudíž výsledné hodnoty deformací se liší. Míra rozdílů výsledků je pak ovlivněna statickým schématem dané konstrukce a mírou porušení trhlin po délce nosníku. Největší rozdíly ve výsledcích deformací jsou u konzol. Rozdíl těchto výsledků dosahuje až v řádu desítek procent, a to z důvodu porušení průřezu trhlinami pouze v blízkém okolí vetknutí konzoly do nosné konstrukce. Cíle práce byly splněny v plném rozsahu, ale mimo to by bylo možné práci ještě rozšířit. V první radě by bylo možné rozšířit variabilitu průřezů na průřez tvaru T nebo zcela obecný, zároveň by bylo vhodné moci měnit způsob vyztužení po délce nosníku a v neposlední řadě rozšířit program o možnost zadávání nosníků o více polích.

## 12. Seznam zdrojů

- [1] ČSN EN 1992-1-1 Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. Praha: Český normalizační institut, 2016.
- [2] KOHOUTKOVÁ, Alena, Jaroslav PROCHÁZKA a Jitka VAŠKOVÁ. Navrhování železobetonových konstrukcí: příklady a postupy. V Praze: České vysoké učení technické, 2014. ISBN 9788001055878.
- [3] ČSN EN 1990 Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí. Praha: Český normalizační institut, 2015.
- [4] FOGLAR, Marek, Michaela FRANTOVÁ a Pavel JIŘÍČEK. Betonové konstrukce 3: navrhování betonových konstrukcí na MSP, úvod do předpjatého betonu. V Praze: České vysoké učení technické, 2011. ISBN 978-80-01-04943-3
- [5] PROCHÁZKA, Jaroslav. Navrhování betonových konstrukcí 1. Praha: ČBS Servis, 2005. ISBN 80-903502-0-8.
- [6] ŠEJNOHA, Jiří a Jitka BITTNAROVÁ. Pružnost a pevnost 10. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-010-2742-2.
- [7] KADLČÁK, Jaroslav a Jiří KYTÝR. Statika stavebních konstrukcí II. 2. vyd. Brno: VUTIUM, 2004. ISBN 80-214-2631-4.
- [8] SALAJKA, V; HRADIL, P; NEVAŘIL, A. PRUŽNOST A PEVNOST, M02, Teorie namáhání prutů. Brno: VUT v Brně.
- [9] KYTÝR, Jiří a Petr FRANTÍK. STATIKA I. Rozšířený průvodce. Studijní opora. FAST VUT v Brně, 2005.

- [10] JIROUŠEK, Ondřej. Metoda konečných prvků - poznámky k přednáškám [online]. Praha, 2006. Dostupné z:  
[http://mech.fd.cvut.cz/members/jjirousek/download/k618y2m1/ymkp\\_fem.pdf](http://mech.fd.cvut.cz/members/jjirousek/download/k618y2m1/ymkp_fem.pdf)
- [11] KOLLÁR, Lászió P., Bernát CSUKA a Tamás THER. Simplified design of concentrically loaded reinforced concrete columns: Article in Structural Engineer [online]. Budapešť, 2014. Dostupné z:  
[https://www.researchgate.net/publication/271487845\\_Simplified\\_design\\_of\\_concentrically\\_loaded\\_reinforced\\_concrete\\_columns](https://www.researchgate.net/publication/271487845_Simplified_design_of_concentrically_loaded_reinforced_concrete_columns)
- [12] MENN, Christian a Paul GAUVREAU. Prestressed concrete bridges. Boston: Birkhäuser Verlag, 1990. ISBN 3-7643-2414-7.
- [13] SERĘGA, Szymon a Adam WOSATKO. Numerical Prediction of Fire Resistance of RC Beams. Faculty of Civil Engineering, Krakov. Dostupné z:  
<https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.5019131>
- [14] NEDOMOVÁ, Karolina. Numerická analýza průhybů železobetonových nosníků: Bakalářská práce. Fakulta stavební ČVUT, Praha, 2017.
- [15] ŠMEJKAL, Jiří. Dynamická interakce turbosoustruj se základy. Plzeň, 2017. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/319130618>



### 13. Seznam obrázků

Obr.4.1. Ohybová čára rovinného nosníku.....	26
Obr.4.2. Přetvoření prvku nosníku .....	26
Obr.4.3. Nosník s nespojitým zatížením .....	29
Obr.4.4. Schéma uložení staticky neurčitých nosníků.....	30
Obr.4.5. Nosník 1x staticky neurčitý zatížen spojitým rovnoměrným zatížením .....	31
Obr.4.6. Skutečné zatížení.....	31
Obr.4.7. Virtuální zatížení.....	31
Obr.4.8. Skutečné zatížení.....	32
Obr.4.9. Virtuální zatížení.....	32
Obr.4.10. Schéma prostého nosníku, který je rozdělen na 3 integrační intervaly.....	34
Obr.4.11. Schéma prostého nosníku, který je rozdělen na 4 integrační intervaly.....	37
Obr.4.12. Matice pro 4 integrační intervaly .....	39
Obr.4.13. Matice pro 4 integrační intervaly rozdělená do tří oblastí.....	40
Obr.4.14. První dva řádky matice a vektoru pravé strany.....	41
Obr.4.15. Vztah mezi rozdělovacím součinitelem $\zeta$ a ohybovým momentem $M$ .....	42
Obr.4.16. Statická schéma uložení nosníků.....	43
Obr.5.1. Euler-Bernoulliho ohýbaný prut [10] .....	45
Obr.5.2. Bázové (tvarové) funkce ohýbaného prutu [10] .....	46
Obr.5.3. Schéma prostého nosníku, rozdělen na šest dílků .....	54
Obr.5.4. Schéma prostého nosníku, rozdělen na $n=6$ dílků, označen kódovými čísly .....	55
Obr.5.5. Schéma konzoly, kloub-vetknutí, vetknutí-vetknutí a označeny kódovými čísly..	55
Obr.5.6. Materiálové vlastnosti.....	58
Obr.5.7. Statické schéma uložení nosníku a jeho délka .....	58
Obr.5.8. Průřez železobetonového nosníku .....	59
Obr.5.9. Zatěžovací stavy působící na nosník.....	59
Obr.5.10. Nastavení sítě výpočtu .....	60
Obr.5.11. Vstupní hodnoty Matlab – zatěžovací stav 1 .....	60
Obr.5.12. Vstupní hodnoty Matlab – zatěžovací stav 2 .....	60
Obr.5.13. Vstupní hodnoty Matlab – zatěžovací stav 3 .....	61
Obr.5.14. Výsledky SCIA – zatěžovací stav 1 .....	61
Obr.5.15. Výsledky Matlab – zatěžovací stav 1 .....	62

Obr.5.16. Grafické výsledky Matlab – zatěžovací stav 1 .....	62
Obr.5.17. Výsledky SCIA – zatěžovací stav 2 .....	63
Obr.5.18. Výsledky Matlab – zatěžovací stav 2 .....	63
Obr.5.19. Grafické výsledky Matlab – zatěžovací stav 2 .....	63
Obr.5.20. Výsledky SCIA – zatěžovací stav 3 .....	64
Obr.5.21. Grafické výsledky Matlab – zatěžovací stav 3 .....	64
Obr.5.22. Výsledky Matlab – zatěžovací stav 3 .....	65
Obr.6.1. Parabolicko-rektangulární pracovní diagram pro beton namáhaný tlakem [1] ...	66
Obr.6.2. Vliv dotvarování pomocí modifikace pracovního diagramu betonu v tlaku [11]..	67
Obr.6.3. Pracovní diagram betonu v tlaku pro $f_{cd} = 20$ MPa a $\varphi(t, t_0) = 2,5$ .....	68
Obr.6.4. Pracovní diagram betonu [1].....	69
Obr.6.5. Schéma návrhového pracovního diagramu betonářské oceli [1] .....	70
Obr.6.6. Schéma obdélníkového železobetonového průřezu [2] .....	71
Obr.6.7. Schéma pracovního diagramu železobetonového průřezu [13].....	71
Obr.6.8. Schéma železobetonového průřezu .....	73
Obr.6.9. Schéma železobetonového průřezu.....	74
Obr.6.10. Pracovní diagram průřezu spočten v rámci této práce .....	75
Obr.6.11. Vstupní hodnoty výpočtu v programu RCC.exe .....	75
Obr.6.12. Vstupní hodnoty výpočtu v programu RCC.exe .....	75
Obr.6.13. Pracovní diagram průřezu spočtený v programu RCC.exe.....	76
Obr.7.1. Úvodní okno programu .....	77
Obr.7.2. Druhé okno programu .....	78
Obr.7.3. Chybová hláška – chybí typ zatížení konstrukce .....	79
Obr.7.4. Třetí okno programu .....	79
Obr.7.5. Zatížení pouze pro rovnoměrné spojitě zatížení.....	80
Obr.7.6. Zatížení pouze pro osamělou sílu .....	80
Obr.7.7. Chyba desetinné čárky .....	81
Obr.7.8. Hodnota mimo povolený rozsah .....	81
Obr.7.9. Chyba vyztužení průřezu .....	82
Obr.7.10. Výsledky výpočtu .....	83
Obr.8.1. Úvodní okno programu č.1.....	86
Obr.8.2. Zadání příklad č.1 .....	87

Obr.8.3. Zadání příklad č.1 – zatížení na nosník ( $g = 6 \text{ kN/m}$ ).....	88
Obr.8.4. Zadání příklad č.1 – zatížení na nosník ( $g = 8 \text{ kN/m}$ ).....	88
Obr.8.5. Zadání příklad č.1 – zatížení na nosník ( $g = 10 \text{ kN/m}$ ).....	89
Obr.8.6. Zadání příklad č.1 – zatížení na nosník ( $g = 14 \text{ kN/m}$ ).....	89
Obr.8.7. Zadání příklad č.2 .....	92
Obr.8.8. Zadání příklad č.2 – horní ohybová výztuž ( $\varnothing_h = 10 \text{ mm}$ ).....	93
Obr.8.9. Zadání příklad č.2 – horní ohybová výztuž ( $\varnothing_h = 12 \text{ mm}$ ).....	93
Obr.8.10. Zadání příklad č.2 – horní ohybová výztuž ( $\varnothing_h = 14 \text{ mm}$ ).....	94
Obr.8.11. Zadání příklad č.2 – horní ohybová výztuž ( $\varnothing_h = 16 \text{ mm}$ ).....	94
Obr.8.12. Zadání příklad č.3 .....	96
Obr.8.13. Zadání příklad č.3 .....	96
Obr.8.14. Výsledky příklad č.3 – kloub/vetknutí .....	97
Obr.8.15. Výsledky příklad č.3 – vetknutí/vetknutí.....	98
Obr.9.1. Úvodní okno programu č.2.....	100
Obr.9.2. Výstup z programu č.2 – rovnoměrné spojitě zatížení.....	101
Obr.9.3. Výstup z programu č.2 – osaměné břemeno v polovině rozpětí .....	102
Obr.9.4. Výstup z programu č.2 – osamělé břemeno ve vzdálenosti 1,8 m .....	102
Obr.9.5. Výstup z programu č.2 – oba typy zatížení.....	103
Obr.9.6. Výstup z programu č.2 – spojitě zatížení.....	104
Obr.9.7. Výstup z programu č.2 – osamělé břemeno .....	104
Obr.9.8. Výstup z programu č.2 – oba typy zatížení.....	105
Obr.9.9. Výstup z programu č.2 – kloub/vetknutí.....	106
Obr.9.10. Výstup z programu č.2 – vetknutí/vetknutí .....	106
Obr.10.1. Úvodní okno programu č.3.....	109
Obr.10.2. Výstup z programu č.3 – rovnoměrné spojitě zatížení.....	110
Obr.10.3. Výstup z programu č.3 – osaměné břemeno v polovině rozpětí .....	111
Obr.10.4. Výstup z programu č.3 – osamělé břemeno ve vzdálenosti 1,8 m .....	111
Obr.10.5. Výstup z programu č.3 – oba typy zatížení.....	112
Obr.10.6. Vstupní hodnoty pro program č.1 a č.3.....	113
Obr.10.7. Výstupní hodnoty Program č.1.....	114
Obr.10.8. Výstupní hodnoty Program č.3.....	114
Obr.10.9. Výstup z programu č.3 – kloub/vetknutí.....	116

Obr.10.10. Výstup z programu č.3 – vetknutí/vetknutí .....	116
Obr.10.11. Výstup z programu č.3.....	117
Obr.P1.1. Železobetonový obdélníkový průřez dle [2].....	125

## 14. Seznam tabulek

Tab.4.1 – Rovnice natočení a průhybů na prostém nosníku pro 3 int. intervaly .....	35
Tab.4.2 – Rovnice natočení a průhybů na prostém nosníku pro 4 int. intervaly .....	37
Tab.5.1 – Tabulkové porovnání výsledků .....	65
Tab.8.1 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm].....	90
Tab.8.2 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm].....	95
Tab.8.3 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm].....	99
Tab.9.1 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm].....	103
Tab.9.2 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm].....	105
Tab.9.3 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm].....	107
Tab.10.1 – Tabulkové porovnání výsledků průhybu [mm].....	115

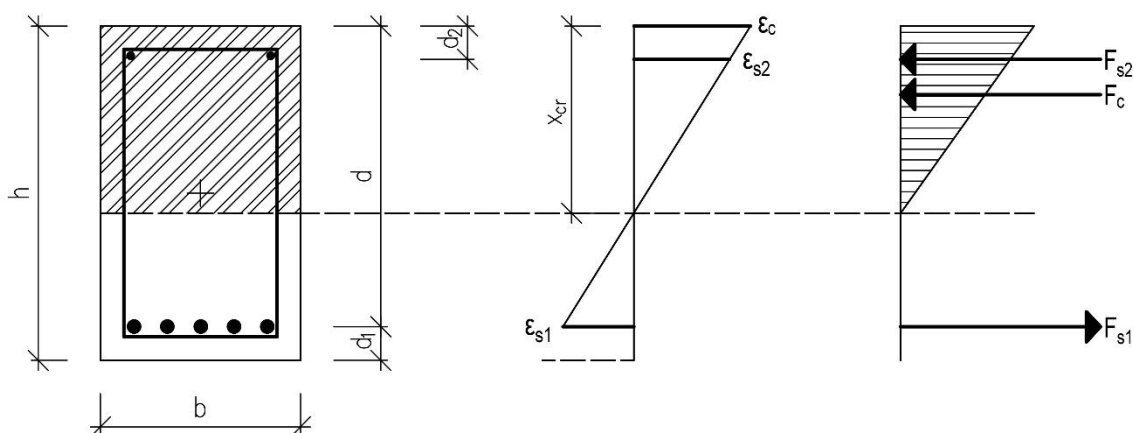
## 15. Použitý software

- ❖ MS Office 2007 (Word, Excel);
- ❖ MATLAB R2018a;
- ❖ AutoCAD 2017;
- ❖ RCC 1.0;
- ❖ SCIA Engineer 16.1.

## 16. Přílohy

### Příloha P1. – Odvození výšky $x$ tlačené části průřezu [14]

Uvažujeme železobetonový obdélníkový průřez dle Obr.P1.1.



Obr.P1.1. Železobetonový obdélníkový průřez dle [2]

Pro průřez namáhaný pouze ohybovým momentem lze výšku tlačené oblasti betonu vyjádřit ze dvou podmínek. Rovinné přetvoření průřezu způsobuje, že napětí tlačené části průřezu betonu je přímo úměrné napětí ve výztuži, z čehož vychází podmínka přetvoření

$$\frac{\varepsilon_{s1}}{\varepsilon_c} = \frac{d - x_{cr}}{x_{cr}}; \quad (\text{P1.1})$$

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{\varepsilon_c} = \frac{x_{cr} - d_2}{x_{cr}}; \quad (\text{P1.2})$$

druhá podmínka je rovnováha osových sil v průřezu:

$$F_{s1} = F_{s2} + F_c. \quad (\text{P1.3})$$

Pro výslednice sil platí:

$$F_{s1} = A_{s1} \cdot \sigma_{s1}; \quad (\text{P1.4.1})$$

$$F_{s2} = A_{s2} \cdot \sigma_{s2}; \quad (\text{P1.4.2})$$

$$F_c = A_c \cdot \sigma_c; \quad (\text{P1.4.3})$$

také lze zapsat, dle Hookova zákona:

$$F_{s1} = A_{s1} \cdot \varepsilon_{s1} \cdot E_s; \quad (\text{P1.5.1})$$

$$F_{s2} = A_{s2} \cdot \varepsilon_{s2} \cdot E_s; \quad (\text{P1.5.2})$$

$$F_c = A_c \cdot \varepsilon_c \cdot E_c; \quad (\text{P1.5.3})$$

Pomocí pracovního součinitele  $\alpha$  převedeme plochu výztuže na odpovídající plochu betonu:

$$\alpha = E_s/E_c. \quad (\text{P1.6})$$

Dosazením vztahů (P1.5) a (P1.6) do rovnice (P1.3) získáme rovnici:

$$A_{s1} \cdot \varepsilon_{s1} \cdot \alpha \cdot E_c = A_{s2} \cdot \varepsilon_{s2} \cdot \alpha \cdot E_c + A_c \cdot \varepsilon_c \cdot E_c; \quad (\text{P1.7})$$

dále do rovnice (P1.7) dosadíme podmínky přetvoření (P1.1) a (P1.2)

$$A_{s1} \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{d - x_{cr}}{x_{cr}} \cdot \alpha \cdot E_c = A_{s2} \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{x_{cr} - d_2}{x_{cr}} \alpha \cdot E_c + A_c \cdot \varepsilon_c \cdot E_c; \quad (\text{P1.8})$$

rovnici (P1.8) lze dále upravovat na tvar kvadratické rovnice

$$A_{s1} \cdot \alpha \cdot \varepsilon_c \cdot E_c \cdot (d - x_{cr}) = A_{s2} \cdot \alpha \cdot \varepsilon_c \cdot E_c \cdot (x_{cr} - d_2) + \varepsilon_c \cdot E_c \cdot 0,5 \cdot b \cdot x_{cr}^2;$$

$$A_{s1} \cdot \alpha \cdot (d - x_{cr}) = A_{s2} \cdot \alpha \cdot (x_{cr} - d_2) + 0,5 \cdot b \cdot x_{cr}^2;$$

$$A_{s1} \cdot \alpha \cdot d - A_{s1} \cdot \alpha \cdot x_{cr} = A_{s2} \cdot \alpha \cdot x_{cr} - A_{s2} \cdot \alpha \cdot d_2 + 0,5 \cdot b \cdot x_{cr}^2;$$

$$0,5 \cdot b \cdot x_{cr}^2 + A_{s2} \cdot \alpha \cdot x_{cr} + A_{s1} \cdot \alpha \cdot x_{cr} - A_{s2} \cdot \alpha \cdot d_2 - A_{s1} \cdot \alpha \cdot d = 0;$$

$$\frac{b}{2} \cdot x_{cr}^2 + (A_{s1} + A_{s2}) \cdot \alpha \cdot x_{cr} - (A_{s2} \cdot d_2 + A_{s1} \cdot d) \cdot \alpha = 0;$$

$$x_{cr}^2 + \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}) \cdot x_{cr} - \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s2} \cdot d_2 + A_{s1} \cdot d) = 0. \quad (\text{P1.9})$$

Z kvadratické rovnice (P1.9) vyjádříme neznámou veličinu  $x_{cr}$ , hledanou výšku tlačené oblasti betonu:

$$(x_{cr} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}))^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2})\right)^2 - \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s2} \cdot d_2 + A_{s1} \cdot d) = 0;$$

$$(x_{cr} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}))^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2})\right)^2 + \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s2} \cdot d_2 + A_{s1} \cdot d);$$

$$x_{cr} + \frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}) = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2})\right)^2 + \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s2} \cdot d_2 + A_{s1} \cdot d)};$$

$$x_{cr} = -\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2})\right)^2 + \frac{2\alpha}{b} \cdot (A_{s2} \cdot d_2 + A_{s1} \cdot d)};$$

$$\begin{aligned}
x_{cr} &= -\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2})\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2\alpha}{b} \cdot \frac{A_{s2} \cdot d_2 + A_{s1} \cdot d}{\left(\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2})\right)^2}\right)}; \\
x_{cr} &= -\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}) \pm \left|\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2})\right| \cdot \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{b} \cdot \frac{A_{s2} \cdot d_2 + A_{s1} \cdot d}{\left(\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2})\right)^2}}; \\
x_{cr} &= -\frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}) \pm \frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}) \cdot \sqrt{1 + \frac{2b}{\alpha} \cdot \frac{A_{s2} \cdot d_2 + A_{s1} \cdot d}{(A_{s1} + A_{s2})^2}}; \\
x_{cr} &= \frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}) \cdot \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2b}{\alpha} \cdot \frac{A_{s1} \cdot d + A_{s2} \cdot d_2}{(A_{s1} + A_{s2})^2}}\right]. \tag{P1.10}
\end{aligned}$$

Z matematického hlediska z kvadratické rovnice vychází dva kořeny, přičemž jeden vychází záporný a druhý kladný. Z fyzikálního hlediska platí pouze výsledek kladný, proto výsledek (P1.10) zapíšeme ve tvaru:

$$x_{cr} = \frac{\alpha}{b} \cdot (A_{s1} + A_{s2}) \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b}{\alpha} \cdot \frac{A_{s1} \cdot d + A_{s2} \cdot d_2}{(A_{s1} + A_{s2})^2}}\right]. \tag{P1.11}$$

Správnost tohoto vzorce lze zkontrolovat v publikaci [2] Příklad 9.2.

## Příloha P2. – Odvození ohybové tuhosti ideálního průřezu [14]

Dle normy ČSN EN 1992-1-1 [1] lze uvažovanou přetvárnou veličinu vyjádřit následujícím vztahem (P2.1):

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I; \quad (\text{P2.1})$$

kde

$\alpha$  je uvažovaná přetvárná veličina, např. poměrné přetvoření, křivost nebo pootočení. (zjednodušeně lze za  $\alpha$  považovat i průhyb);

$\alpha_I, \alpha_{II}$  jsou hodnoty parametru vypočteného pro stav bez trhlin a s plně rozvinutými trhlínami;

$\zeta$  rozdělovací součinitel (kterým se umožňuje zohlednit tahové zpevnění průřezu).

V našem případě dosadíme křivost za neznámou hodnotu  $\alpha$  ze vztahu (P2.1):

$$\left(\frac{1}{r}\right)_\zeta = \zeta \left(\frac{1}{r}\right)_{II} + (1 - \zeta) \left(\frac{1}{r}\right)_I; \quad (\text{P2.2})$$

kde

$\left(\frac{1}{r}\right)$  je křivost;

$$= M \cdot \frac{1}{EI};$$

a dosazením dále do vztahu (P2.2) získáme následující tvar:

$$M \cdot \frac{1}{EI_\zeta} = M \cdot \left[ (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{EI_I} + \zeta \cdot \frac{1}{EI_{II}} \right]. \quad (\text{P2.3})$$

Ideální moment setrvačnosti  $I_\zeta$  určuje stav prvku lineární interpolací mezi momentem setrvačnosti průřezu bez trhlin  $I_I$  a momentem setrvačnosti pro průřez s plně rozvinutými trhlínami  $I_{II}$ :

$$\frac{1}{EI_\zeta} = \frac{1}{EI_I} (1 - \zeta) + \frac{1}{EI_{II}} \zeta; \quad (\text{P2.4})$$

$$\frac{1}{EI_\zeta} = \frac{(1 - \zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I}{EI_I I_{II}}; \quad (\text{P2.5})$$

$$EI_\zeta = E \cdot \frac{I_I + I_{II}}{(1 - \zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I}. \quad (\text{P2.6})$$



### Příloha P3. – Mechanické vlastnosti materiálů a hodnoty součinitelů [14]

Třídy a mechanické vlastnosti betonu [MPa] dle [1]				
	$f_{ck,cyl}$	$f_{ck,cube}$	$f_{cm}$	$f_{ctm}$
C12/15	12	15	20	1,6
C16/20	16	20	24	1,9
C20/25	20	25	28	2,2
C25/30	25	30	33	2,6
C30/37	30	37	38	2,9
C35/45	35	45	43	3,2
C40/50	40	50	48	3,5
C45/55	45	55	53	3,8
C50/60	50	60	58	4,1

Třídy betonářské oceli [MPa] dle [1]	
	$f_{yk}$
B420 B	400
B500 B	500
B550 B	550
B500 A	500
B550 A	550

Třídy cementu [-] dle [1]			
	$\alpha_{ds1}$	$\alpha_{ds2}$	$\alpha$
S	3	0,13	1
N	4	0,12	0
R	6	0,11	-1

Doporučené hodnoty součinitele $\psi$ pro pozemní stavby [-] dle [3]	$\psi_2$
Kategorie A: obytné plochy	0,3
Kategorie B: kancelářské plochy	0,3
Kategorie C: shromažďovací plochy	0,6
Kategorie D: obchodní plochy	0,6
Kategorie E: skladovací plochy	0,8
Kategorie F: dopravní plochy	0,6
Kategorie G: dopravní plochy	0,3
Kategorie H: střechy	0

Příloha P4. – Tabulka pro zjednodušenou deformační metodu

	$\frac{FL}{8}$ $-\frac{FL}{8}$	$\frac{FL}{16}$ $-\frac{FL}{16}$	$\frac{FL}{8}$ $-\frac{FL}{8}$	$\frac{3FL}{16}$ $-\frac{3FL}{16}$	$\frac{5F}{16}$ $-\frac{5F}{16}$
	$\frac{fL^2}{12}$ $-\frac{fL^2}{12}$	$\frac{fL^2}{8}$ $-\frac{fL^2}{8}$	$\frac{fL}{2}$ $-\frac{fL}{2}$	$\frac{fL^2}{8}$ $-\frac{fL^2}{8}$	$\frac{5fL}{16}$ $-\frac{5fL}{16}$
	$\frac{fL^2}{30}$ $-\frac{fL^2}{30}$	$\frac{7fL^2}{120}$ $-\frac{7fL^2}{120}$	$\frac{fL}{2}$ $-\frac{fL}{2}$	$\frac{3fL}{8}$ $-\frac{3fL}{8}$	$\frac{5fL}{16}$ $-\frac{5fL}{16}$
	$\frac{3fL}{20}$ $-\frac{3fL}{20}$	$\frac{27fL}{120}$ $-\frac{27fL}{120}$	$\frac{7fL}{20}$ $-\frac{7fL}{20}$	$\frac{2fL}{10}$ $-\frac{2fL}{10}$	$\frac{2fL}{10}$ $-\frac{2fL}{10}$
	$\frac{EI}{h} \alpha_t \Delta t$ $-\frac{EI}{h} \alpha_t \Delta t$	$\frac{3EI}{2h} \alpha_t \Delta t$ $-\frac{3EI}{2h} \alpha_t \Delta t$	$-\frac{EI}{h} \alpha_t \Delta t$ $0$	$\frac{3EI}{2h} \alpha_t \Delta t$ $-\frac{3EI}{2h} \alpha_t \Delta t$	$\frac{3EI}{2hL} \alpha_t \Delta t$ $-\frac{3EI}{2hL} \alpha_t \Delta t$
	$\frac{Fab^2}{L^2}$ $\frac{Fb}{L} \left( \frac{a(b-a)}{L^2} - 1 \right)$	$\frac{Fab^2}{2L^2} (b+L)$ $-\frac{Fb}{L} \left( \frac{a(b+L)}{2L^2} + 1 \right)$	$-\frac{Fa^2b}{L^2}$ $\frac{Fa}{L} \left( \frac{b(b-a)}{L^2} - 1 \right)$	$\frac{Fab}{2L^2} (a+L)$ $-\frac{Fa}{L} \left( \frac{b(a+L)}{2L^2} - 1 \right)$	$\frac{Fab}{2L^2} (a+L)$ $-\frac{Fa}{L} \left( \frac{b(a+L)}{2L^2} - 1 \right)$
	$\frac{Mb}{L^2} (2L-3b)$ $-\frac{M}{L} \left( 1 + \frac{b(2L-3b)+a(2L-3a)}{L} \right)$	$\frac{M}{2L^2} (L^2-3b^2)$ $-\frac{M}{L} \left( 1 + \frac{L^2-3b^2}{2L^2} \right)$	$\frac{Ma}{L^2} (2L-3a)$ $\frac{M}{L} \left( 1 + \frac{b(2L-3b)+a(2L-3a)}{L} \right)$	$\frac{M}{2L^2} (L^2-3a^2)$ $-\frac{M}{L} \left( 1 + \frac{L^2-3a^2}{2L^2} \right)$	$\frac{M}{2L^2} (L^2-3a^2)$ $-\frac{M}{L} \left( 1 + \frac{L^2-3a^2}{2L^2} \right)$
	$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k \left( 2\varphi_a + \varphi_b + 3 \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$ $M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k \left( \varphi_a + 2\varphi_b + 3 \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$	$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + \frac{3k}{2} \left( \varphi_a + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$ $M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \frac{3k}{2} \left( \varphi_b + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$	$\frac{2EI}{L}$ $k = \frac{2EI}{L}$	$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + \frac{3k}{2} \left( \varphi_a + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$ $M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \frac{3k}{2} \left( \varphi_b + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$	$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \frac{3k}{2} \left( \varphi_b + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$
	$Z_{ab}^1 = \bar{Z}_{ab}^1 - \frac{3k}{L} \left( \varphi_a + \varphi_b + 2 \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$ $Z_{ba}^1 = \bar{Z}_{ba}^1 + \frac{3k}{L} \left( \varphi_a + \varphi_b + 2 \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$	$Z_{ab}^1 = \bar{Z}_{ab}^1 - \frac{3k}{2L} \left( \varphi_a + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$ $Z_{ba}^1 = \bar{Z}_{ba}^1 + \frac{3k}{2L} \left( \varphi_a + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$	$Z_{ab}^1 = \bar{Z}_{ab}^1 - \frac{3k}{L} \left( \varphi_a + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$ $Z_{ba}^1 = \bar{Z}_{ba}^1 + \frac{3k}{L} \left( \varphi_a + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$	$Z_{ab}^1 = \bar{Z}_{ab}^1 - \frac{3k}{2L} \left( \varphi_b + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$ $Z_{ba}^1 = \bar{Z}_{ba}^1 + \frac{3k}{2L} \left( \varphi_b + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$	$Z_{ab}^1 = \bar{Z}_{ab}^1 - \frac{3k}{2L} \left( \varphi_b + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$ $Z_{ba}^1 = \bar{Z}_{ba}^1 + \frac{3k}{2L} \left( \varphi_b + \frac{w_b^1 - w_a^1}{L} \right)$
	$X_{ab}^1 = \bar{X}_{ab}^1 - n(u_b^1 - u_a^1)$ $X_{ba}^1 = \bar{X}_{ab}^1 + n(u_b^1 - u_a^1)$	$X_{ab}^1 = \bar{X}_{ab}^1 - n(u_b^1 - u_a^1)$ $X_{ba}^1 = \bar{X}_{ab}^1 + n(u_b^1 - u_a^1)$	$n = \frac{EA}{L}$	$X_{ab}^1 = \bar{X}_{ab}^1 - n(u_b^1 - u_a^1)$ $X_{ba}^1 = \bar{X}_{ab}^1 + n(u_b^1 - u_a^1)$	$X_{ab}^1 = \bar{X}_{ab}^1 - n(u_b^1 - u_a^1)$ $X_{ba}^1 = \bar{X}_{ab}^1 + n(u_b^1 - u_a^1)$

(Pozn.: tabulka převzata z [www.mech.fsv.cvut.cz](http://www.mech.fsv.cvut.cz).)

Příloha P5. – Pevnostní a deformační charakteristiky betonu

	Pevnostní třídy betonu													Analytické vztahy/ vysvětlivky	
	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80		90
$f_{ck}$ (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	
$f_{ck,cube}$ (MPa)	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	
$f_{cm}$ (MPa)	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	$f_{cm} = f_{ck} + 8$ (MPa)
$f_{ctm}$ (MPa)	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5	$f_{ctm} = 0,30 \times f_{ck}^{(2/3)} \leq C50/60$ $f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln(1 + (f_{cm}/10)) > C50/60$
$f_{ctk,0,05}$ (MPa)	1,1	1,3	1,5	1,8	2	2,2	2,5	2,7	2,9	3	3,1	3,2	3,4	3,5	$f_{ctk,0,05} = 0,7 \times f_{ctm}$ 5% kvantil
$f_{ctk,0,95}$ (MPa)	2	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6	6,3	6,6	$f_{ctk,0,95} = 1,3 \times f_{ctm}$ 95% kvantil
$E_{cm}$ (GPa)	27	29	30	31	33	34	35	36	37	38	39	41	42	44	$E_{cm} = 22(f_{cm}/10)^{0,3}$ ( $f_{cm}$ v MPa)
$\varepsilon_{c1}$ (‰)	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,25	2,30	2,40	2,45	2,50	2,60	2,70	2,80	2,80	VIZ OBRÁZEK 3.2 $\varepsilon_{c1}(\rho_{100}) = 0,7 f_{cm}^{0,31} < 2,8$
$\varepsilon_{cu1}$ (‰)					3,50					3,20	3,00	2,80	2,80	2,80	VIZ OBRÁZEK 3.2 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{cu1}(\rho_{100}) = 2,8 + 27[(98 - f_{cm})/100]^4$
$\varepsilon_{c2}$ (‰)					2,00					2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	VIZ OBRÁZEK 3.3 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{c2}(\rho_{100}) = 2,0 + 0,085(f_{ck} - 50)^{0,53}$
$\varepsilon_{cu2}$ (‰)					3,50					3,10	2,90	2,70	2,60	2,60	VIZ OBRÁZEK 3.3 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{cu2}(\rho_{100}) = 2,6 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$
$n$					2,00					1,75	1,60	1,45	1,40	1,40	pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $n = 1,4 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4$
$\varepsilon_{c3}$ (‰)					1,75					1,80	1,90	2,00	2,20	2,30	VIZ OBRÁZEK 3.4 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{c3}(\rho_{100}) = 1,75 + 0,55[(f_{ck} - 50)/40]$
$\varepsilon_{cu3}$ (‰)					3,50					3,10	2,90	2,70	2,60	2,60	VIZ OBRÁZEK 3.4 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{cu3}(\rho_{100}) = 2,6 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$

(Pozn.: tabulka převzata z normy ČSN EN 1992-1-1 [1].)