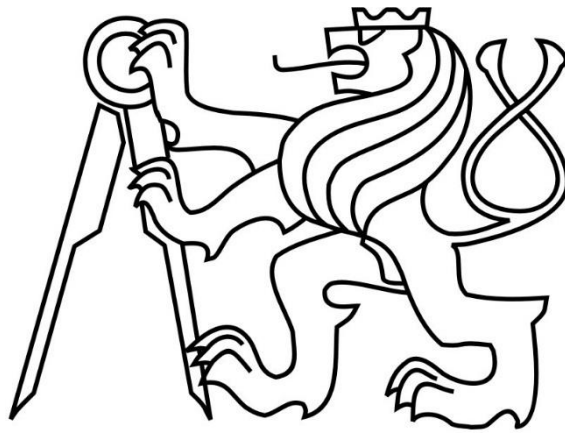


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Odhad parametrů hyperelastického materiálového modelu
s využitím MKP

2018

Jakub NOVÁK

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Novák** Jméno: **Jakub** Osobní číslo: **419932**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Biomechanika a lékařské přístroje**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Odhad parametrů hyperelastického materiálového modelu s využitím MKP

Název diplomové práce anglicky:

FEM based estimation of hyperelastic material model parameters

Pokyny pro vypracování:

- (1) Popište metodiku identifikace materiálových modelů polymerů
- (2) Vysvětlete navýhody analytického přístupu k identifikaci materiálových modelů
- (3) Demonstrujte možnosti využití MKP při odhadu materiálových parametrů
- proveďte vlastní experiment
- využijte MKP model v optimalizační proceduře odhadu parametrů
- (4) Porovnejte výsledky při využití MKP s analytickým přístupem

Seznam doporučené literatury:

Holzapfel G.A. (2000) Nonlinear Solid Mechanics: Continuum Approach for Engineering. John Wiley and Sons, Chichester.
Abaqus Documentation, dostupné online z <https://www.3ds.com/products-services/simulia/support/>

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D., odbor biomechaniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Ing. Petr Tichý, Ph.D., ústav mechaniky, biomech.a mechatr. FS

Datum zadání diplomové práce: **18.04.2018**

Termín odevzdání diplomové práce: **17.08.2018**

Platnost zadání diplomové práce: _____

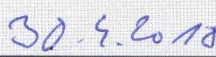

doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

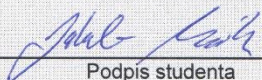

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.


Datum převzetí zadání


Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Jakub Novák
Název diplomové práce:	Odhad parametrů hyperelastického materiálového modelu s využitím MKP
Anglický název:	FEM based estimation of hyperelastic material model parameters
Akademický rok:	2017/2018
Studijní program:	Strojní inženýrství
Obor studia:	Biomechanika a lékařské přístroje
Ústav:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Odbor:	Odbor biomechaniky člověka
Vedoucí diplomové práce:	doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D.
Konzultant specialista:	Ing. Petr Tichý, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stránek: 56 Počet obrázků: 45 Počet rovnic: 64

Klíčová slova:

Akrylonitril-butadienová pryž, materiálové modely, odhad parametrů, analytický přístup, numerická simulace, MKP, optimalizace,

Key words:

Acrylonitrile butadiene rubber, material models, parameters estimation, analytical approach, numeric simulation, FEM, optimization

Anotace:

V práci je popsán postup odhadu parametrů materiálových modelů pomocí analytického a numerického přístupu. Pro oba přístupy byly provedeny experimenty O-kroužku a pásku z akrylonitril-butadienové pryže. Výsledky přístupů byly mezi sebou porovnány.

Abstract:

In this thesis is described process of estimation of material models parameters with analytical and numerical approach. For both approaches were carried out experiments of O-ring and strip from nitril-butadien rubber. Results of both approaches were compared between each other.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne

.....

Jakub Novák

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé DP panu doc. Ing. Lukáši Hornému, Ph.D. za ochotu, odborný přístup a cenné rady, které mi v průběhu vypracování DP poskytl.

Poděkování také patří konzultantovi mé DP panu Ing. Petrovi Tichému, Ph.D. za výraznou pomoc a odborné rady při vytváření MKP modelu a následné optimalizace

Obsah

Seznam použitých symbolů	7
1. Úvod	9
2. Polymery.....	11
2.1. Struktura	11
2.2. Tvar	11
2.3. Uspořádání	12
2.4. Vlastnosti.....	13
2.5. Dělení	13
2.5.1. Elastomery.....	14
3. Nelineární mechanika.....	15
3.1. Deformace	15
3.1.1. Tenzory deformace.....	16
3.1.2. Hlavní invarianty, hlavní streže	17
3.2. Nestlačitelnost.....	18
3.3. Napětí	20
3.4. Konstitutivní rovnice.....	21
3.5. Modely hustoty deformační energie.....	22
3.5.1. Polynomický model	23
3.5.2. Ogdenův model	24
3.5.3. Model Arrudy-Boyceové	24
4. Experiment	26
4.1. Měření - O-Kroužek.....	27
4.2. Měření – Pásek.....	29
5. Analytický přístup	32
5.1. Polynomický model	33
5.2. Ogdenův model	36
5.3. Model Arrudy-Boyceové	39
6. Numerická simulace	41
6.1. Polynomický model	44
6.2. Ogdenův model	45
6.3. Model Arrudy-Boyceové	47
7. Porovnání / Vyhodnocení	48
8. Závěr.....	54
Bibliografie	55
Seznam obrázků.....	57

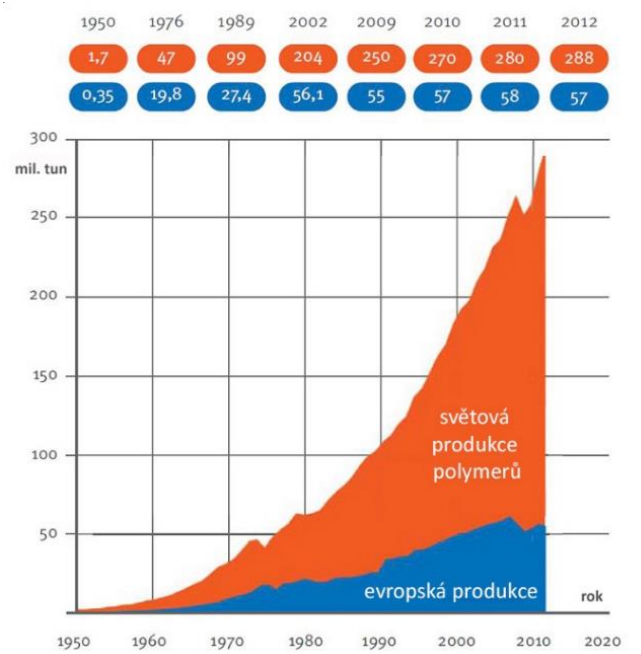
Seznam použitých symbolů

Označení	Jednotka ve skalárním vyjádření	Název
E_i	mm	bázový vektor ve směru i v referenční konfiguraci
X	mm	polohový vektor v referenční konfiguraci
e_i	mm	bázový vektor ve směru i ve zdeformované konfiguraci
x	mm	polohový vektor ve zdeformované konfiguraci
F	1	deformační gradient
R	1	tenzor rotace
U	1	pravý tenzor strečů
v	1	levý tenzor strečů
C	1	pravý Cauchyho-Greenův tenzor deformace
E	1	Greenův (Lagrangeův) tenzor deformace
ε	1	inženýrský tenzor deformace
b	1	levý Cauchyho-Greenův tenzor deformace
e	1	Eulerův (Almansiho) tenzor deformace
$\ln(U)$	1	logaritmický tenzor deformace
I_1, I_2, I_3	1	hlavní invarianty tenzoru deformace
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	1	hlavní streče
J	1	objemový poměr
W	N/mm ² MPa	hustota deformační energie
p	N/mm ² MPa	neurčitý Lagrangeův multiplikátor
f	N	vektor vnitřních sil
t	N/mm ² MPa	vektoru plošné intenzity sil
σ	N/mm ² MPa	Cauchyův (skutečný) tenzor napětí
T	N/mm ² MPa	smluvní vektor napětí
P	N/mm ² MPa	tenzor smluvního napětí
P^T	N/mm ² MPa	1. Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí
T_S	N/mm ² MPa	2. Piolův-Kirchhoffův vektor napětí
F	N	zatěžovací síla
u	mm	posuv

Označení	Jednotka ve skalárním vyjádření	Název
OF	MPa^2	úcelová funkce
L	mm	původní délka vzorku
S	mm^2	původní průřez
l	mm	délka po deformaci
s	mm^2	průřez po deformaci

1. Úvod

Využívání polymerních materiálů je jednoznačný trend dnešní doby. Díky vlastnostem jako je nízká hustota, vysoká odolnost vůči korozi nebo nižší náročnost technologie výroby jsou stále více využívány i jako konstrukční prvky. Syntetické polymerní materiály stále patří mezi mladší materiály, ale přesto se řadí k materiálům s největším objemem výroby ze všech materiálů. V roce 2015 se světově vyrobilo 288 milionů tun polymerů. Evropská produkce v tomto roce činila 57 mil. tun. [1]



Obrázek 1: Vývoj produkce polymerů od roku 1950 [1]

Struktura polymerních materiálů je tvořena dlouhými vzájemně propojenými makromolekulami. Což má v některých případech za následek, že je možné je deformovat řádově i o stovky procent v téměř plně elastickém stavu. V důsledku vnitřní struktury mají polymerní materiály nelineární závislost napětí na deformaci. Pro popis takových materiálů se využívají modely pro hustotu deformační energie. Tyto modely mívají často více parametrů, proto je výhodné provést při experimentu více druhů mechanických zkoušek, aby se minimalizovalo riziko vzájemné závislosti těchto parametrů. U všech nelineárních materiálů platí, že mají omezené možnosti extrapolace mimo zkušební obor. Zejména při extrapolaci do víceosých stavů napjatosti, když původní materiálové parametry byly získány na základě jednoosé tahové zkoušky. Z toho plynou vyšší požadavky na zkušební laboratoř i pracovníky. [2]

Alternativní cesta bude popsána v této práci. Stanovení parametrů tří materiálových modelů pro popis akrylonitril-butadiénové pryže (NBR) bude provedeno na základě dat z jednoosé tahové zkoušky, která bude doplněna numerickou simulací s využitím metody konečných prvků. Následně bude provedena optimalizace získaných parametrů materiálových modelů a jejich porovnání.

Cíle práce byly stanoveny takto:

- popište metodiku identifikace materiálových modelů polymerů,
- vysvětlete nevýhody analytického přístupu k identifikaci materiálových modelů,
- demonstруйте možnosti využití MKP při odhadu materiálových parametrů, proveďte vlastní experiment a využijte MKP model v optimalizační proceduře odhadu parametrů,
- porovnejte výsledky při využití MKP s analytickým přístupem.

2. Polymery

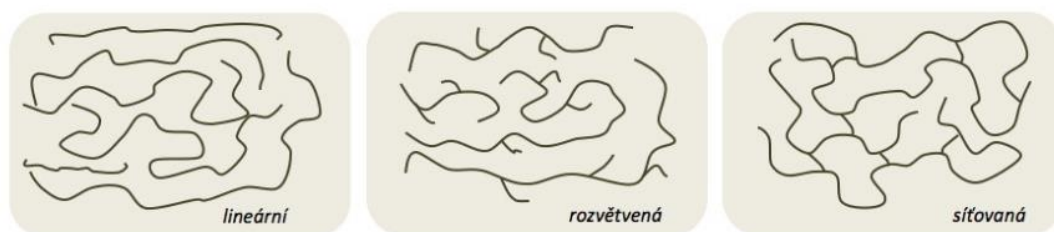
Polymery jsou přírodní či syntetické látky. Jedná se o dlouhé řetězce molekul tzv. makromolekul. Proces výroby makromolekuly se nazývá polymerace. Jedná se o propojování monomerních jednotek kovalentními vazbami. Mer je základní opakující se jednotka polymeru. Polymer je většinou organická sloučenina, jež obsahuje atomy uhlíku spolu s vodíkem, kyslíkem, dusíkem apod. Výjimku tvoří organicko-anorganické polymerní sloučeniny zvané silikony, které ve svém obecném vzorci $[R_2SiO]_N$ neobsahují atom uhlíku, ale jen organický substituent označen písmenem R. [3]

2.1. Struktura

Zásadní vliv na vlastnosti polymerů má jejich struktura. Ať už se jedná o tvar a uspořádání makromolekul nebo chemické složení.

2.2. Tvar

Makromolekuly polymerů mají tvar dlouhých řetězců, které mohou být lineární, rozvětvené nebo zesíťované. Každá z těchto tvarových variant ovlivňuje výsledné chování polymerního komponentu.



Obrázek 2: Tvar makromolekul [4]

Lineární tvar vzniká při spojování monomerních jednotek se dvěma funkčními skupinami. Monomerní jednotky tak mají možnost řadit se pouze postupně za sebou, a vytváří tak lineární strukturu. Lineární polymery jsou rozpustné v některých rozpouštědlech. Mají vyšší hustotu a jsou obvykle dobře zpracovatelné. [4]

Rozvětvené polymery mají ke svému hlavnímu dlouhému řetězci navázány krátké boční řetězce. Kvůli přítomnosti bočních řetězců vzniká mezi hlavními řetězci větší mezera a tím dochází ke slábnutí makromolekulárních sil. To je důvodem zhoršení některých mechanických vlastností jako jsou pevnost, tuhost nebo teplotní odolnost oproti lineárním polymerům. Naopak rozvětvené polymery vykazují vyšší tažnost. [1]

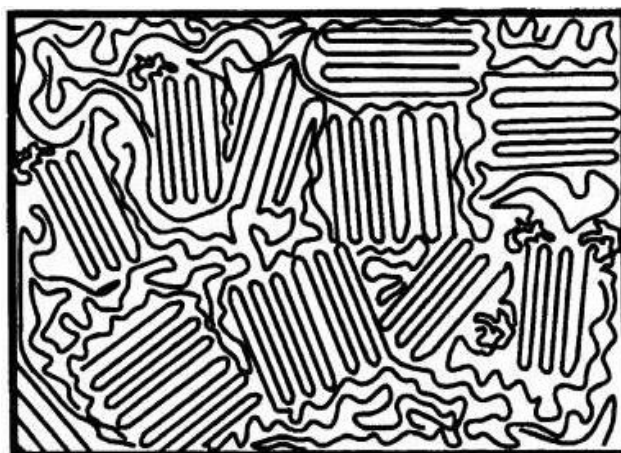
Zesíťované polymery obsahují lineární řetězce, kde jsou sousední řetězce spojené příčnými chemickými vazbami. Na rozdíl od lineárních a rozvětvených polymerů se u zesíťovaných polymerů vytváří prostorová síť, která má za následek vyšší tuhost, pevnost, teplotní odolnost. Nedostatkem zesíťovaných polymerů je jejich horší tažnost, tavitelnost a mají vyšší křehkost. Jsou nerozpustné, ale pouze absorbují tekutiny a tím zvětšují svůj objem. [5]

2.3. Uspořádání

Polymerní materiály mají obecně vysokou molekulovou hmotnost. Vazebná energie mezi mery má tu vlastnost, že množství energie pohlcené při ohřevu způsobí, že dříve dosáhne hodnoty rozpadu řetězců na mery než hodnoty nutné k odpaření řetězců. Proto polymerní materiály neexistují v plynném stavu. V tuhém skupenství se podle uspořádání makromolekulárních řetězců vyskytují v amorfním, semikrystalickém nebo krystalickém stavu.

Amorfní uspořádání je chaotické, nepravidelné uspořádání makromolekul, které jsou náhodně vinuty a propleteny. Morfologickým znakem rozlišitelným v tomto strukturním stavu jsou z dlouhých řetězců tvořené globuly (klubka). Amorfní polymery jsou měkčí, mají nižší bod tavení, jsou více ředitelné rozpouštědly. [6] [7]

V krystalickém stavu se makromolekuly seskupují do pravidelné krystalové mřížky a vytváří tím útvary zvané lamely. Uspořádání zvyšuje bod tavení, pevnost, tvrdost a odolnost vůči rozpouštědlům. Takovéto polymery jsou však křehčí. Polymer, jenž je zcela v krystalickém stavu, je však idealizovaný stav, který se běžně nevyskytuje. Nejčastější stav, ve kterém se polymery vyskytují, je stav semikrystalický. [7]



Obrázek 3: Schématické zobrazení semikrystalické struktury [8]

Semikrystalický stav se vyznačuje tím, že makromolekuly jsou uspořádány jak amorfním, tak i v krystalickém stavu. Kombinuje tím i vlastnosti obou těchto stavů. Jejich podíl je charakterizován stupněm krystalinity. [8]

2.4. Vlastnosti

Vývoj či inovace jakéhokoliv technického výrobku mají vždy několik požadavků jako např. požadavek na nízkou hmotnost, vysokou životnost, vhodné povrchové vlastnosti, ekonomickou výhodnost nebo estetický vzhled. Jelikož polymerní materiály vyhovují těmto požadavkům, stále více se využívají jako konstrukční materiály v celém spektru průmyslových odvětví. V konkurenci klasických materiálů, zejména kovů, polymery mají několik výhodných vlastností, které jsou na obrázku (4). [1]

Přednosti

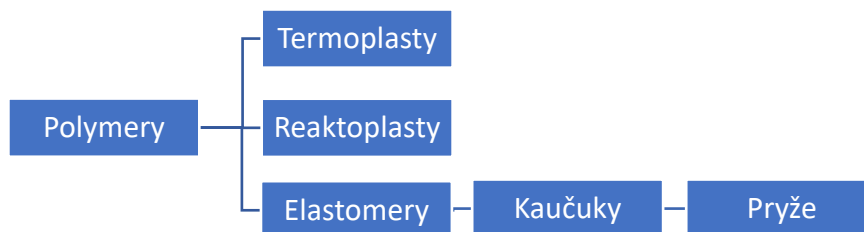
- nízká hustota materiálu
- tepelný a elektrický izolant
- odolnost vůči korozi
- chemický stálý
- lehce zpracovatelný

Nedostatky

- nižší odolnost vůči teplu
- vysoká teplotní roztažnost
- degradace při vystavení UV záření

Obrázek 4: Přehled vlastností polymerů

2.5. Dělení



Obrázek 5: Základní dělení polymerů

Polymerní materiály se dají dělit podle různých kritérií, jako např. podle původu vzniku, podle typu strukturní jednotky, účelu využití apod. Základní rozdělení polymerů je na

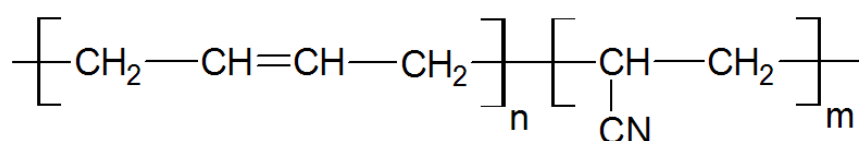
obrázku 5. Termoplasty bývají obvykle tvrdé, běžně i křehké. Při vystavení zvýšeným teplotám se stávají plastickými. Jejich změna do plastického stavu a zpět je opakovatelně vratná. Pokud se nejedná o vratnou změnu jde se o reaktoplasty.

2.5.1. Elastomery

Další kategorii představují elastomery. Jedná se o vysoce poddajné materiály. Elastomery obsahují několik podskupin. Jednou z nich jsou termoplastické elastomery. Termoplastické elastomery obsahují tvrdé části z termoplastů a měkké části z elastomerů. Stejně jako termoplasty mohou být termoplastické elastomery opakovaně tepelně zpracovávány. Dominantní podskupinou elastomerů jsou však kaučuky. Kaučuky mají velký význam v průmyslu, neboť se z nich vyrábí pryže. Stejně jako ostatní polymerní materiály mohou být kaučuky přírodního nebo organického původu.

Za první uživatele přírodního kaučuku se považují indiáni za dob Kryštofa Kolumba v 15. století, kteří si z kapaliny vytékající z poraněných kmenů kaučukovníku vyráběli míče, platná či obuv. První patent a také komerční využití nastalo ale až na konci 18. století, kdy se z kaučuku vyráběly lodní plachty a pytle na poštovní zásilky. Působením vysokých teplot ale kaučuk měknul a byl lepkavý. Naopak za nízkých teplot byl tvrdý a křehký. Tento problém vyřešili nezávisle na sobě Charles Goodyear a Thomas Hancock vynalezením vulkanizace. Vulkanizace spočívá v zahřívání kaučuku a jeho smícháním s přídatnou směsí. Výsledek tohoto procesu jsou pryže. [4]

Druhů pryží existuje velké množství. Stejně jako polymery obecně se pryže dělí na syntetické a přírodní pryže. Z každého typu kaučuku lze vytvořit mnoho různých pryží v závislosti např. na druhu přidané směsi nebo jejího množství. Příspěvy v zásadě zlepšují mechanické vlastnosti, odolnost proti UV záření či odolnost proti tepelnému stárnutí. V této práci bude detailně analyzována akrylonitril-butadienová pryž. (NBR). NBR je syntetický kopolymer tvořen butadienem a akrylonitrilem. (viz Obrázek 6) Typickými vlastnostmi jsou vysoká tažnost, odolnost vůči opotřebení a deformaci v relativně velkém rozsahu teplot, a především odolnost vůči benzínovým a olejovým směsím. Nejčastější použití proto představují palivové hadice a těsnění. [9]



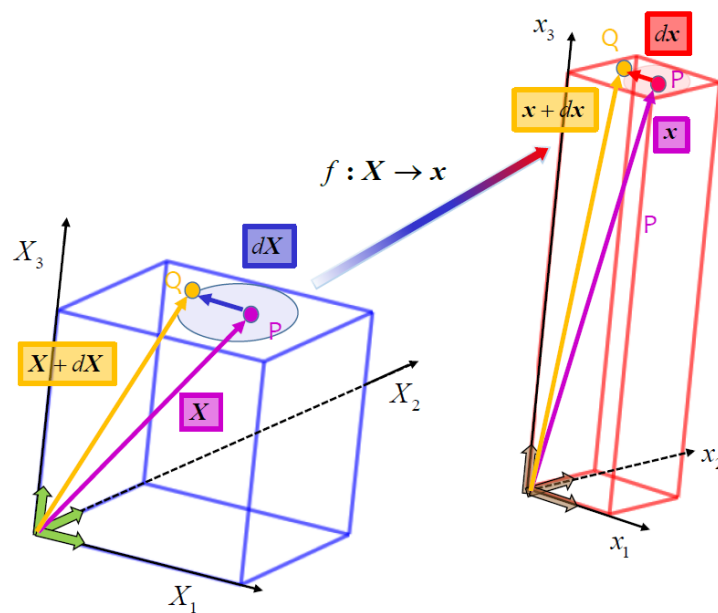
Obrázek 8: Strukturální vzorec NBR [9]

3. Nelineární mechanika

Jak již bylo zmíněno, tak polymerní materiály mohou bez porušení dosahovat deformací řádově i stovky procent a mají nelineární závislost napětí na deformaci. Na takové případy matematické nástroje „klasické“ lineární mechaniky nestačí. Můžeme-li z libovolného důvodu zanedbat viskózní (disipativní) efekty vyskytující se během deformace elastomerů, pak se pro popis jejich chování používají konstitutivní modely založené na hustotě deformační energie. V analýze nelineárních materiálů se využívá lehce odlišných principů a vyskytují se v něm oproti lineární mechanice jiné termíny.

3.1. Deformace

Pro vyjádření míry deformace se u nelineárních materiálů využívá jak referenční konfigurace, tak i zdeformovaná konfigurace. V literatuře bývá používaná konvence, že hodnoty vázané k stavu před deformací se označují velkými písmeny. Hodnoty patřící ke zdeformovanému stavu písmeny malými. Tato konvence bude použita v této práci.



Obrázek 9: Zobrazení referenčního a zdeformovaného stavu [10]

Nechť existuje trojrozměrný geometrický prostor, ve kterém se nachází těleso před deformací. Nechť v tomto prostoru existuje vektorová báze popsána ortonormálními bázovými vektory $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ a \mathbf{E}_3 a je možné v něm určit souřadnice bodů a tyto body zaměřit pomocí polohových vektorů \mathbf{X} . V důsledku silového působení se těleso deformuje, tzn. že přejde do zdeformované konfigurace, která se nalézá v dalším geometrickém prostoru. Tento prostor je vymezen ortonormálními bázovými vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a \mathbf{e}_3 a lze v něm zaměřit body polohovými vektory \mathbf{x} .

3.1.1. Tenzory deformace

Rozdíl mezi stavem před deformací a po deformaci vyjadřuje deformační gradient \mathbf{F} . Deformační gradient je tenzor druhého řádu. Deformační gradient jakožto zobrazení lze vyjádřit rovnicí ve tvaru

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad (1)$$

kde $d\mathbf{x}$ a $d\mathbf{X}$ jsou elementární vektory, které vymezují elementární okolí bodu zaměřeného vektorem \mathbf{x} resp. \mathbf{X} . Zobrazení mezi prostory s užitím deformačního gradientu lze vyjádřit zápisem má tvar

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dX_1} & \frac{dx_1}{dX_2} & \frac{dx_1}{dX_3} \\ \frac{dx_2}{dX_1} & \frac{dx_2}{dX_2} & \frac{dx_2}{dX_3} \\ \frac{dx_3}{dX_1} & \frac{dx_3}{dX_2} & \frac{dx_3}{dX_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Deformační gradient má obecně 9 nezávislých složek. Obsahuje informaci o deformaci, rotaci. Jelikož posuv jako tuhého celku je konstanta stejná pro všechny body tělesa, derivace posuvu se rovná nule, tudíž se v deformačním gradientu nevyskytuje. Při snaze vyjádřit čistě deformaci či rotaci je možno využít polární rozklad, který umožňuje rozložit deformační gradient na tenzor obsahující informace pouze o rotaci tělesa a tenzor obsahující údaje čistě o deformaci.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}, \quad (3)$$

kde \mathbf{R} je tenzor rotace, \mathbf{U} , resp. \mathbf{v} je pravý, resp. levý tenzor strečů. \mathbf{U} i \mathbf{v} jsou symetrické a pozitivně definitní. Na základě tenzorů strečů se definují i jiné tenzory deformace. Pravý Cauchyho-Greenův tenzor deformace je definován jako:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2. \quad (4)$$

Z tenzoru deformace \mathbf{C} vychází Greenův (rovněž Lagrangeův) tenzor deformace \mathbf{E} , který je formulován ve tvaru:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (5)$$

Kromě již zmíněných tenzorů deformace se používají i jiné tenzory deformace např. inženýrský tenzor deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$, levý Cauchyho-Greenův tenzor deformace \mathbf{b} , Eulerův (také Almansiho) tenzor deformace \mathbf{e} nebo logaritmický tenzor deformace $\ln(\mathbf{U})$. Všechny tyto tenzory jsou mezi sebou převoditelné. [10]

$$E_{IK} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_I}{\partial X_K} + \frac{\partial U_K}{\partial X_I} + \frac{\partial U_J}{\partial X_I} \frac{\partial U_J}{\partial X_K} \right) \quad (6)$$

Po rozepsání Greenova tenzoru deformace \mathbf{E} do složkového zápisu vidíme, že obsahuje lineární části a nelineární kvadratickou část. Když jsou posuvy, rotace nebo deformace malé, je kvadratická část vůči lineární části zanedbatelná a můžeme ji z tenzoru vypustit. V takovém případě přejde Greenův tenzor \mathbf{E} v inženýrský tenzor deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$. Jelikož se jedná o malé deformace, je při vyjadřování tenzoru deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$ zanedbatelný rozdíl mezi vyjádření v referenční a zdeformované konfiguraci. Následující vyjádření tenzoru $\boldsymbol{\varepsilon}$ jsou proto pro malé posuvy, rotace a deformace téměř ekvivalentní.

$$\varepsilon_{IK} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_I}{\partial X_K} + \frac{\partial U_K}{\partial X_I} \right) = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

K numerické simulaci bude použit Abaqus 2017, který ve výchozím nastavení pracuje s logaritmickým tenzorem deformace $\ln(\mathbf{v})$, který je definován levým Cauchyovým-Greenovým tenzorem deformace \mathbf{b} , resp. deformačním gradientem \mathbf{F} .

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^T} \quad (8)$$

Složka logaritmického tenzoru deformace ve směru 1 se v Abaqusu označuje $LE11$. Převod na složku inženýrského tenzoru deformace se provádí pomocí formule:

$$\begin{aligned} LE11 &= \ln(1 + \varepsilon_{11}) \\ \varepsilon_{11} &= e^{LE11} - 1 \end{aligned} \quad (9)$$

3.1.2. Hlavní invarianty, hlavní streče

Symetrie zajišťuje reálnost vlastních čísel a kolmost vlastních vektorů. Pozitivní definitnost matice zaručuje existenci kladných vlastních čísel. Při řešení úlohy o vlastních čísel pro obecnou matici \mathbf{A} , která je definována

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad (10)$$

kde \mathbf{u} je vlastní vektor a λ v tomto případě představuje vlastní číslo. Řešení úlohy o vlastních číslech můžeme převést na rovnici

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \quad (11)$$

kterou lze přepsat do tvaru

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \quad (12)$$

kde I_1, I_2 a I_3 jsou hlavní invarianty. Řešením této rovnice pro λ jsou vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Invarianty lze stanovit jako

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\mathbf{A}))^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2) \right) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ I_3 &= \det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \quad (13)$$

V případě, že místo obecné matice \mathbf{A} bude v řešení úlohy tenzor deformace vlastní čísla se nazývají hlavní streče. V některé české literatuře se místo termínu streče užívá pojem protažení. Když místo matice \mathbf{A} bude pravý nebo levý tenzor strečů \mathbf{U} či \mathbf{v} , invarianty zůstanou nezměněny. V případě, že matice \mathbf{A} bude nahrazena Cauchyhoým-Greenovým tenzorem deformace \mathbf{C} , který je definován jako

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad (14)$$

budou i invarianty vyjádřené druhými mocninami hlavních strečů.

$$\begin{aligned} I_1^C &= \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2^C &= \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \\ I_3^C &= \det(\mathbf{C}) = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \end{aligned} \quad (15)$$

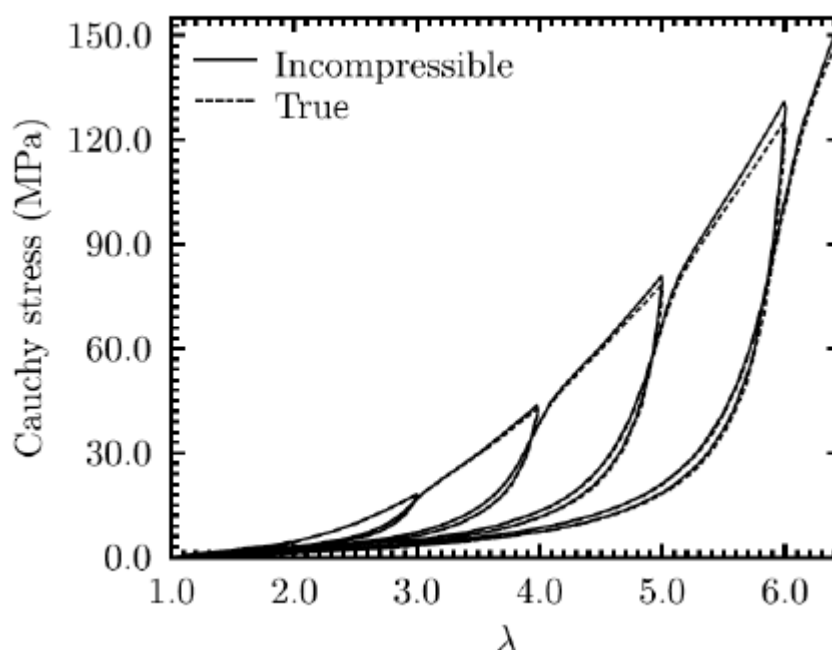
3.2. Nestlačitelnost

Při deformaci některých nelineárních materiálů jako jsou měkké tkáně či elastomery se často uvažuje, že při zatěžování nemění svůj objem, tudíž že jsou nestlačitelné.

Matematicky je nestlačitelnost formulována pomocí objemového poměru J , který se v případě nestlačitelnosti bude rovnat jedné.

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (16)$$

Tento předpoklad experimentálně ověřil např. v roce 2013 Y. Merckel ve své práci [11]. Experiment byl proveden pro cyklické zatěžování styren-butadienového kaučuku. Závěr byl, že pokud se jedná o přijatelně velkou deformaci původní délky (viz obr.10) je rozdíl při a bez uvažování nestlačitelnosti minimální.



Obrázek 10: Rozdíl při uvažování nestlačitelnosti a bez jejího uvažování [11]

Pokud materiál nemění svůj objem, složky hydrostatické napjatosti konají práci na nulových posuvech, pak není možné získat složky hydrostatické napjatosti ze vztahu:

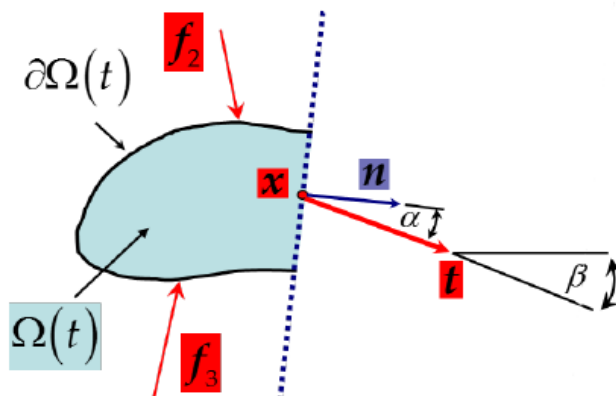
$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad (17)$$

kde W je hustota deformační energie. Hustotu deformační energie je proto nutné rozšířit o neurčitý Lagrangeův multiplikátor p , který se stanoví na základě silových okrajových podmínek. Hustota deformační energie má pak formu:

$$W = W(\mathbf{F}) - p(J - 1), \quad (18)$$

3.3. Napětí

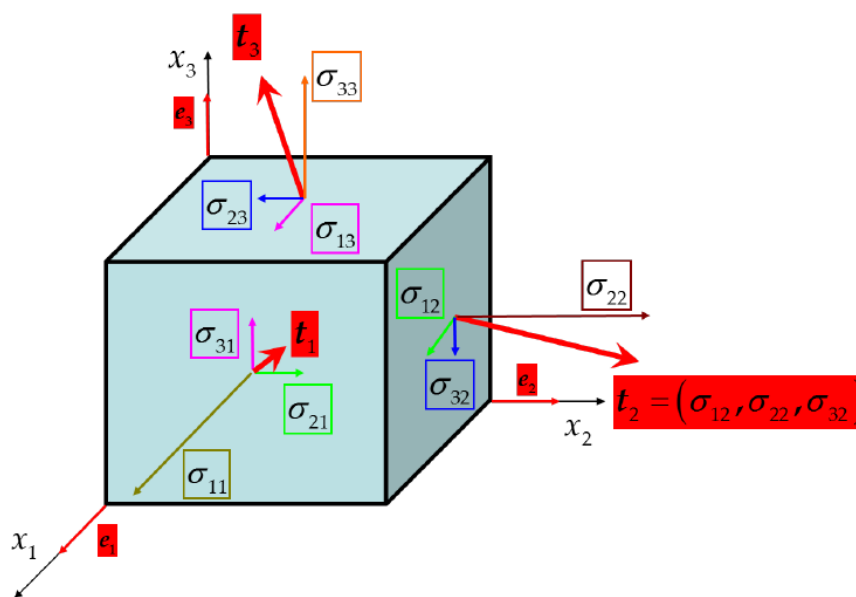
Napjatost je stavová veličina, která vyjadřuje plošnou intenzitu vnitřních sil v bodě tělesa. Vektor vnitřních sil \mathbf{f} obsahuje reakce na vnější vlivy, jako jsou síly, momenty sil, spojitě zatížení, teplota apod. Při stanovení napětí v bodě \mathbf{x} se provádí myšlený řez tělesem, který je charakterizován normálou k rovině řezu \mathbf{n} v bodě \mathbf{x} . Všechny vnější účinky na zbylé části tělesa lze zapsat do vektoru plošné intenzity sil \mathbf{t} tak, že platí:



Obrázek 1112: Schéma zavedení vektoru vnitřních sil [10]

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds. \quad (19)$$

Cauchyovo (neboli skutečné) napětí $\boldsymbol{\sigma}$ je pak zobrazení, které promítá normálu \mathbf{n} na vektor \mathbf{t} . To dává kompletní údaje o napjatosti v bodě \mathbf{x} . Jelikož vektor \mathbf{n} je normála libovolného řezu tělesem a bod \mathbf{x} je libovolný bod v rovině řezu, je možné tímto způsobem získat stav napjatosti v celém zkoumaném tělese. [10]



Obrázek 1211: Napjatost v tělese [10]

Myšlený řez tělesem lze provést také v referenční konfiguraci. Při přenesení výslednice vnitřních sil $d\mathbf{f}$ na referenční konfiguraci platí.

$$d\mathbf{f} = tds = \mathbf{T}dS, \quad (20)$$

kde \mathbf{T} je smluvní vektor napětí. Je to vektor, který se váže na referenční konfiguraci.

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N}. \quad (21)$$

Alternativně se tento vektor nazývá 1. Piolův-Kirchhoffův vektor napětí. Obdobně jako tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ existuje tenzor, který zobrazuje normálu řezu v referenční konfiguraci \mathbf{N} na smluvní vektor napětí \mathbf{T} . Tento tenzor se značí písmenem \mathbf{P} a nazývá se tenzor smluvního napětí. Pak platí, že:

K tenzoru \mathbf{P} existuje transponovaný tenzor \mathbf{P}^T , který se nazývá 1. Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí. V některé literatuře se přímo \mathbf{P} nazývá 1. Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí. Transponovaný tenzor \mathbf{P}^T je pak tenzor smluvního napětí.

V některých případech se využívá 2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí \mathbf{S} . Který splňuje rovnici

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{S}\mathbf{N}, \quad (22)$$

kde \mathbf{T}_S je druhý Piolův-Kirchhoffův napěťový vektor definován:

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}. \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (24)$$

3.4. Konstitutivní rovnice

Konstitutivní rovnice vyjadřují vztah mezi napětím a deformací. V oblasti malých deformací se tato závislost vyjadřuje přímo.

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (25)$$

Základní vztah pro přímou závislost je Hookeův zákon, který má obecný tvar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (26)$$

kde λ je Lamého konstanta, μ je smykový modul pružnosti a \mathbf{I} je jednotkový tenzor. V nelineární mechanice se však využívá greenovský přístup, který k vyjádření závislosti napětí na deformaci se používá hustota deformační energie W . Vazba mezi napětím a deformací má tedy tvar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (27)$$

Rovnici (25) je možné zapsat v tomto tvaru, jelikož tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ a inženýrský tenzor deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$ jsou energeticky konjugovaný pár. Pro tenzory napětí a deformace platí, že tvoří energeticky konjugovaný pár, jestliže skalárním součinem těchto tenzorů získáme mechanickou práci. Dalšími energeticky konjugovanými páry jsou např. tenzor smluvního napětí \mathbf{P} a deformační gradient \mathbf{F} nebo druhý Piollův-Kirchhoffův tenzor napětí \mathbf{S} a Greenův tenzor deformace \mathbf{E} . Proto vazbu mezi napětím a deformací můžeme zapsat i pro tyto tenzory. [12]

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (28)$$

Konstitutivní rovnice s uvažováním nestlačitelnosti pak mají podobu:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{F} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \right)^T, \quad \mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{S} = -p(2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-1} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (29)$$

Jsou zde uvedeny nejčastější formulace konstitutivních rovnic. Všechny tři tenzory napětí se dají vyjádřit i v závislosti na ostatních tenzorech deformace. [10]

3.5. Modely hustoty deformační energie

V dnešní době jsou formulovány stále nové modely hustoty deformační energie. Formulují se stále nové modely, které přesněji popisují chování zkoumaných materiálů. Neo-hookeovský model pro lineární materiály je formulován takto:

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (30)$$

Průkopníci v tvorbě nelineárních modelů hustoty deformační energie byli Melvin Mooney a Ronald Rivlin, kteří ve 40. letech minulého století představili Mooneyův-Rivlinův model. Po nich přišlo několik dalších významných profesorů, kteří prezentovali své vlastní návrhy tvaru modelu pro hustotu deformační energie jako např. A.N. Gent a jeho model (31) či Y.C. Fung se svým exponenciálním modelem (33) a další.

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m}\right), \quad (31)$$

kde J_m a μ jsou parametry Gentova modelu, pro které platí podmínky:

$$J_m > 0, \quad \mu > 0. \quad (32)$$

$$W = \frac{c}{2}(e^Q - 1), \quad (33)$$

kde parametry modelu jsou c a Q .

V této práci budou k analýze chování zkoušeného materiálu použity tři materiálové modely, a to redukovaný polynomický, Ogdenův a Arruda-Boyce. Tyto modely budou v následujících částech detailněji představeny.

3.5.1. Polynomický model

Polynomický model bývá nazýván Yeohův po svém autorovi O.H. Yeohovi, který model představil v roce 1993 ve své práci [13]. Existuje několik modifikací polynomického modelu. V práci bude použit redukovaný polynomický model. Rozdíl mezi zjednodušeným, redukovaným polynomickým modelem oproti klasickému polynomickému modelu je ten, že v redukovaném polynomickém modelu se vyskytuje pouze první invariant pravého Cauchyova-Greenova tenzoru deformace \mathbf{C} . Při uvažování nestlačitelnosti materiálu bude materiálový model formulován takto:

$$W = \sum_{i=1}^N C_{i0} (I_1 - 3)^i, \quad (34)$$

kde C_{i0} jsou parametry modelu. V práci bude použita třístupňová varianta modelu tzn. $N = 3$. Model tudíž bude mít 3 parametry a to C_{10} , C_{20} a C_{30} .

3.5.2. Ogdenův model

Raymond William Ogden představil svůj model v roce 1972 v práci [14]. Jeho model velmi dobře vystihuje chování pryží. V práci bude použita varianta modelu hustoty deformační energie pro nestlačitelný materiál, který je implementován v Abaqusu.

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i}), \quad (35)$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou hlavní streče. μ_i a α_i jsou parametry modelu. Pro parametr modelu μ platí podmínka:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i > 0 \quad (36)$$

Opět bude použit třístupňový model, $N = 3$. Tudíž model bude mít 6 hledaných parametrů.

3.5.3. Model Arrudy-Boyceové

Ellen Arruda a Mary C. Boyce představily model ve společné práci [15] v roce 1993. Model je také nazývaný model s osmi řetězci a je založen na statistické mechanice. Originální formulace vypadá takto:

$$W = Nk_B\theta\sqrt{n} \left(\beta\lambda_{chain} - \sqrt{n} \ln \left(\frac{\sinh\beta}{\beta} \right) \right), \quad (37)$$

kde n je počet segmentů řetězce, k_B je Boltzmannova konstanta. θ je teplota v Kelvinech, N je počet řetězců. λ_{chain} a β jsou definovány:

$$\lambda_{chain} = \sqrt{\frac{I_1}{3}}, \quad \beta = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_{chain}}{\sqrt{n}} \right), \quad (38)$$

kde I_1 je první invariant levého Cauchyho-Greenova tenzoru deformace \mathbf{C} a \mathcal{L}^{-1} je inverzní Langevinova funkce. V literatuře se tento model vyskytuje v různých modifikacích. V praxi se nejčastěji používá přibližná formulace (39), kterou zároveň uvádí dokumentace k Abaqusu 2017.

$$W = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} (I_1^i - 3^i), \quad (39)$$

kde $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{20}$, $C_3 = \frac{11}{1050}$, $C_4 = \frac{19}{7050}$, $C_5 = \frac{519}{673750}$ a parametry modelu jsou μ a λ_m . Tyto dvě konstanty mají fyzikální význam. μ představuje smykový modul a λ_m reprezentuje maximální protažení, proto tyto konstanty musí nabývat hodnot větších než nula. [16]

4. Experiment

Pro experimentální měření byly jako zkušební vzorky použity O-kroužky s označením 43.5x1.2 NBR70 tzn. kroužky s vnitřním průměrem 43.5 mm, průměrem stěny kroužku 1.2 mm a s tvrdostí Shore A 70. V experimentu byla provedena jednoosá tahová zkouška celého kroužku a pásku, který byl vytvořen rozstříhnutím kroužku. Data získána experimentálním měřením kroužku byla použita jako vstupní hodnoty pro simulaci pomocí MKP. Hodnoty z měření pásku byly využity k odhadu materiálových parametrů pomocí analytického přístupu.



Obrázek 13: Biaxiální zatěžovací stroj [17]

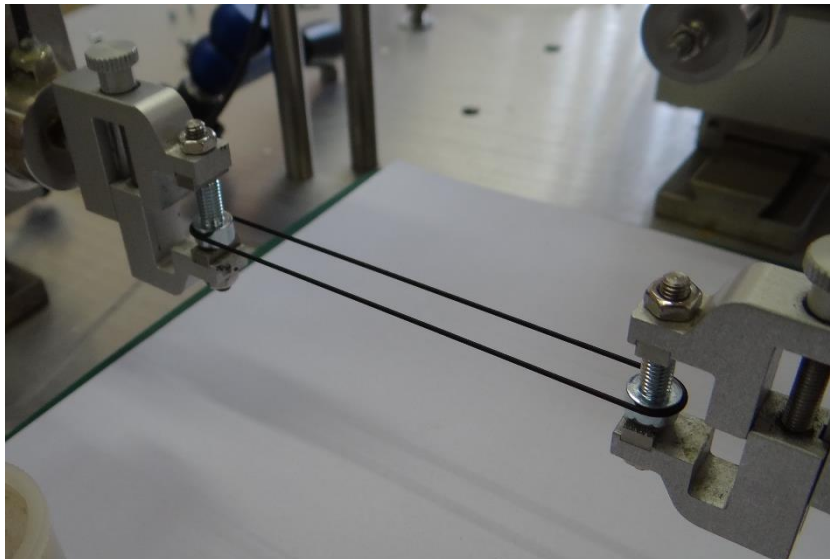
Experiment byl proveden na biaxiálním zatěžovacím stroji od firmy Messphysik v Laboratoři kardiovaskulární biomechaniky na Fakultě strojní ČVUT v Praze. Každá ze 4 čelistí zatěžovacího stroje je polohována vlastním aktuátorem. Při tahové zkoušce je možné zkoušený materiál zatěžovat každým aktuátorem silou +/- 250 N. Aktuátory mají možný posuv až 70 mm, rychlostí do 30 mm/s s rozlišením polohy 1 μ m. Stroj disponuje krytými silovými snímači U9B HBM s rozsahem -250 až 250 N (nebo -25 až 25 N). Vzorkovací frekvence systému je 500 Hz a maximální frekvence zaznamenávání hodnot je 100 Hz. Průběh zatěžovací síly je možno nastavit jak monotónní, tak i mívivý, pulzující či creepový. Stroj je využíván ke zjišťování mechanických vlastností měkkých tkání a elastomerů. [17]

4.1. Měření - O-Kroužek



Obrázek 14: Referenční konfigurace měření O-kroužku

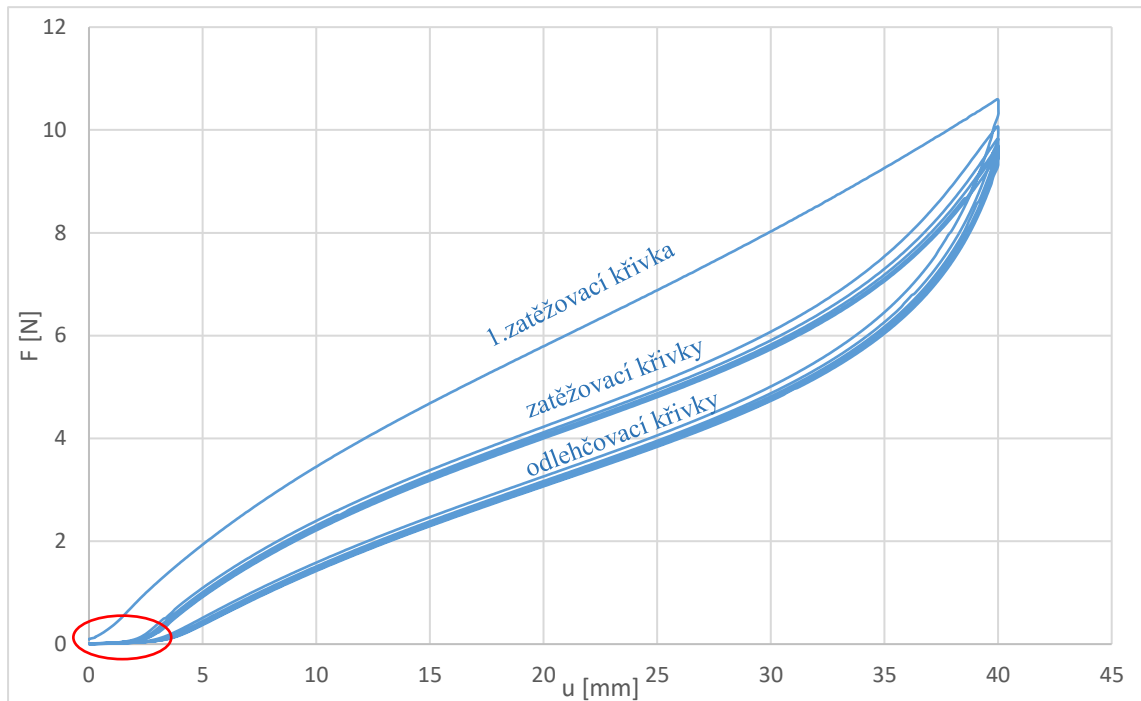
Vzorek byl upevněn do zatěžovacího stroje pomocí šroubů sevřených do čelistí. Hlavy šroubů, které byly v kontaktu s kroužkem, byly válcové a měly průměr 8.4 mm. Počáteční poloha byla nastavena tak, aby kroužek byl lehce předeprnut. Zatěžování bylo kinematické, kdy jedna z čelistí byla nepohyblivá a na druhé byl nastaven posuv 40 mm při rychlosti posuvu 1 mm/s. Zatěžování bylo cyklické, kdy jeden cyklus spočíval v posunutí čelisti o 40 mm a zpět. Cyklus se šestkrát opakoval. Měření s tímto nastavením se provedlo třikrát.



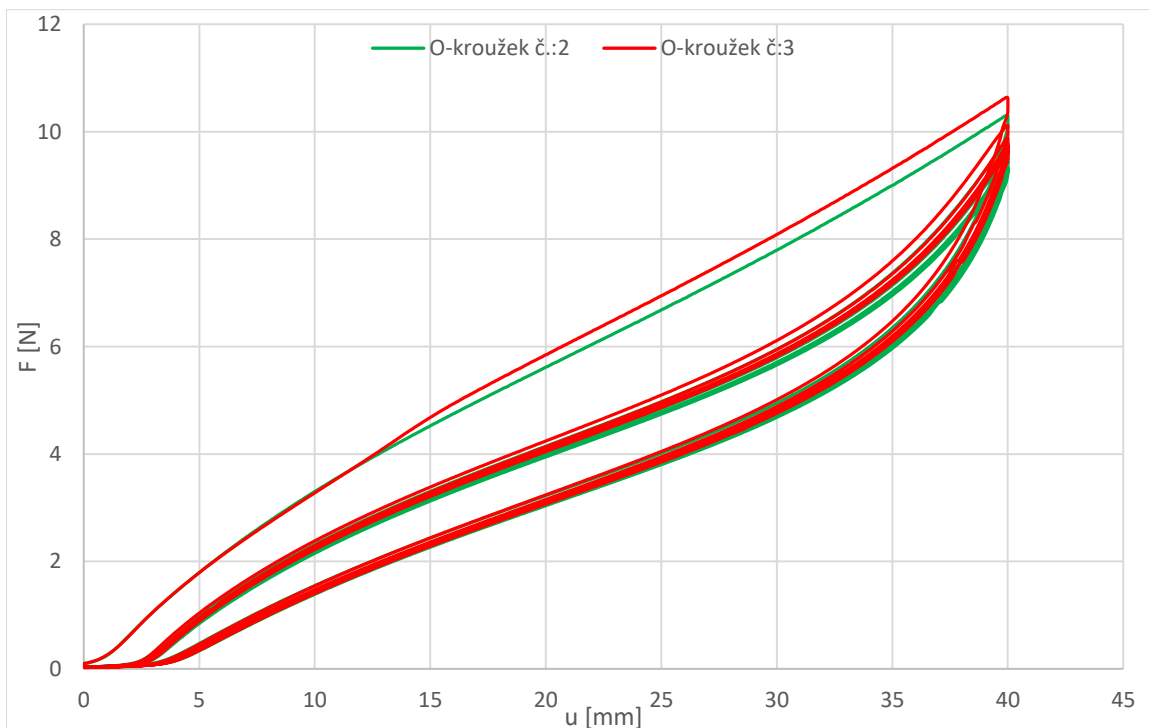
Obrázek 15: Měření O-kroužku

Z měření byly získány síly na jednotlivých čelistech a jejich absolutní poloha. Hodnoty byly přepočítány do závislosti zatěžovací síly F na posuvu u . V datech vidíme projevy viskoelastického chování a cyklické napět'ové změkčení. To znamená, že v následujícím cyklu je při dané hodnotě deformace dosaženo nižšího napětí.

Odlehčovací křivky jsou pro první i další cykly podobné. V počátku naměřených hodnot je červeně vyznačená oblast, kde se projevuje viskoelastické chování zkoumaného materiálu. Navíc se v této oblasti mohlo projevit vliv ohybu resp. narovnávání kroužku nebo tření mezi válečkem a zkoušeným kroužkem.

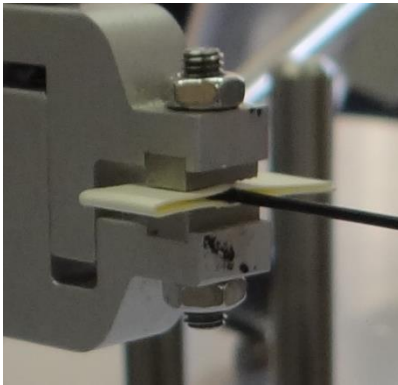


Obrázek 16: Data z měření O-kroužku č.:1 - Závislost F na u

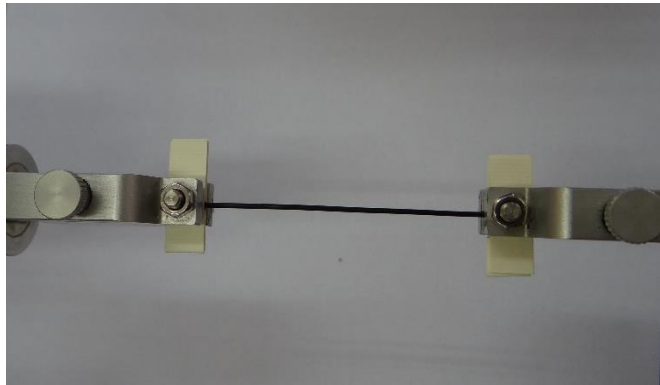


Obrázek 17: Data z měření O-kroužku č.:2 a 3 - Závislost F na u

4.2. Měření – Pásek

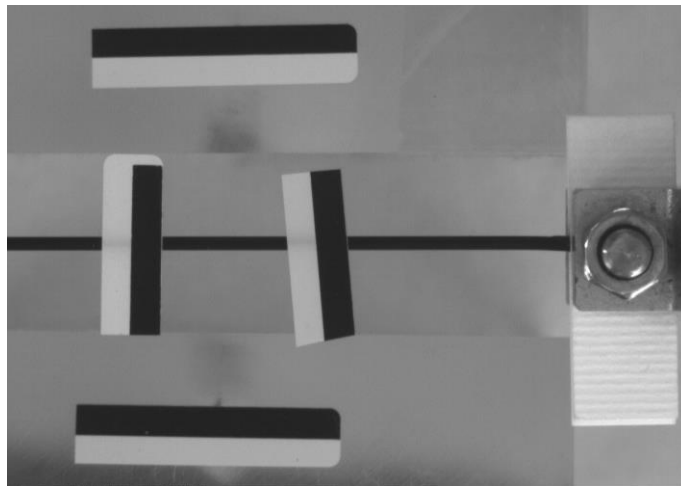


Obrázek 18: Uchycení pásku do čelistí



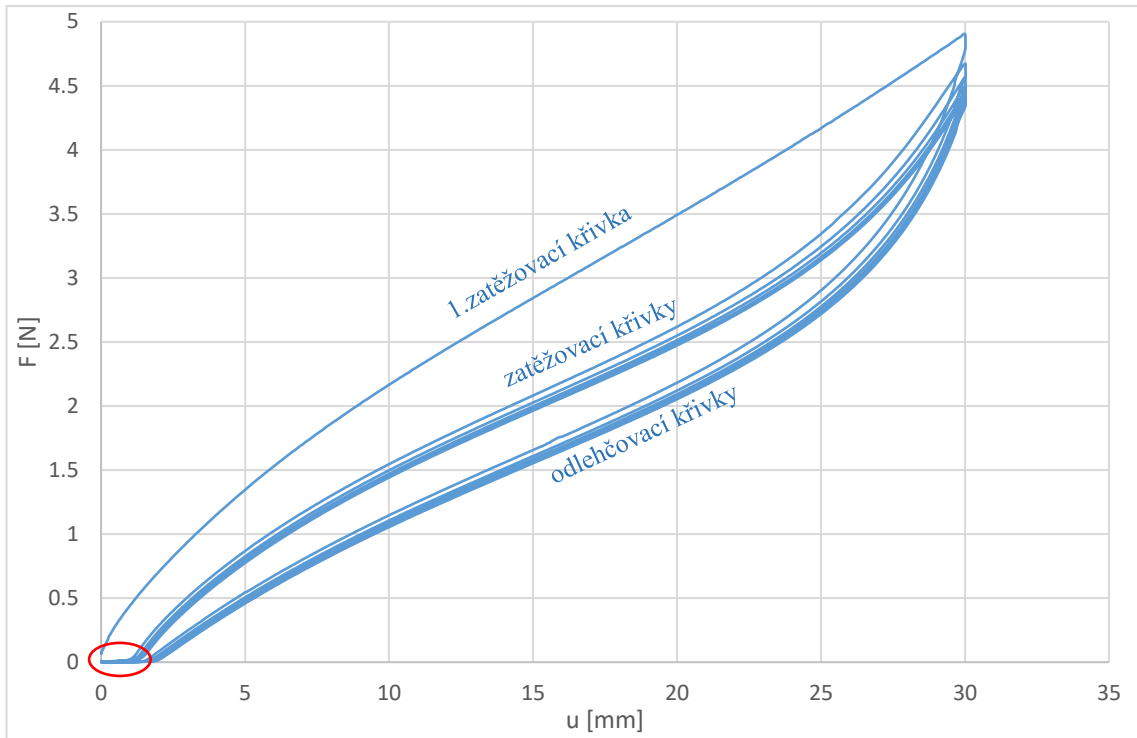
Obrázek 19: Měření pásku

K uchycení zkoumaného pásku z akrylonitril-butadienové pryže se konce, které byly uchyceny v čelistech, zpevnily vrstvou tvrdého papíru. To zabránilo rozmačkání vzorku čelistmi. Na pásek byly poté přilepeny samolepící kontrastní značky, pomocí kterých program vyhodnocoval posuv v místě jejich umístění.

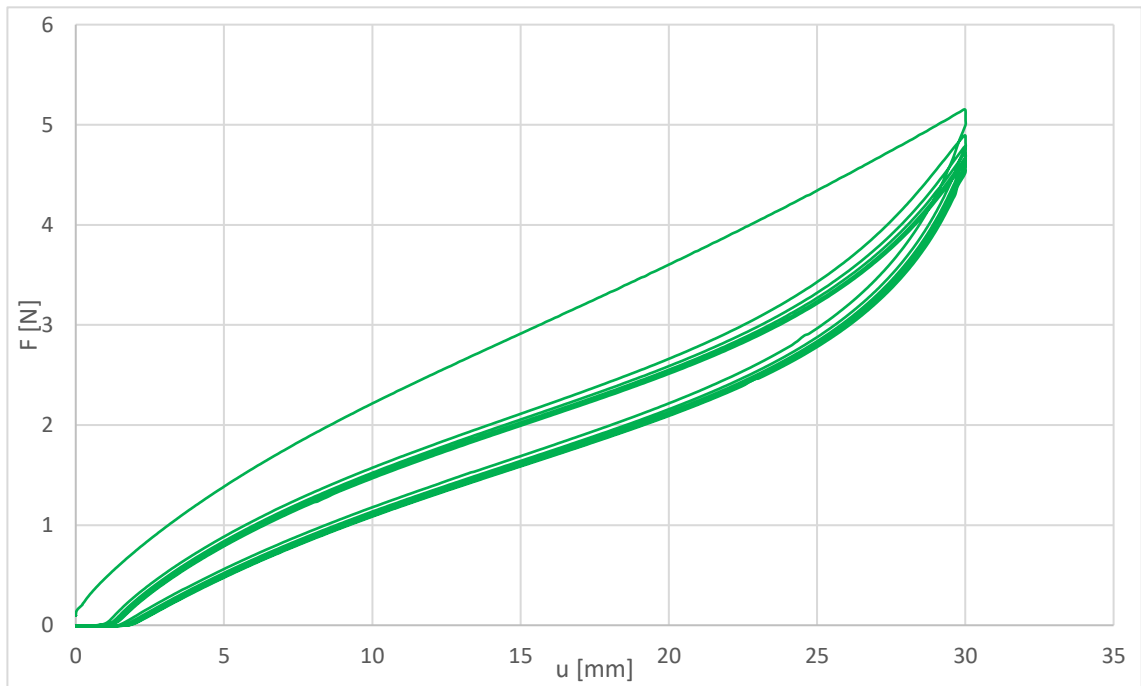


Obrázek 20: Umístění kontrastních značek

V tomto případě byl nastaven posun čelisti 35 mm s rychlostí posuvu 1 mm/s. Jednalo se opět o cyklické zatěžování o šesti cyklech. Měření bylo opět třikrát opakováno. Z měření byla opět získány informace o poloze kontrastních značek a silách na jednotlivých čelistech. Data byly přepočteny na závislost síly F na posuvu u . U naměřených dat je znovu, stejně jako měření O-kroužku, zřetelné viskoelastické chování materiálu. Později použité materiálové modely však popisují elastické chování, proto musely být tyto hodnoty pro analytické zpracování odstraněny. Stejně principy a jevy se vyskytovaly i pro ostatní měření.

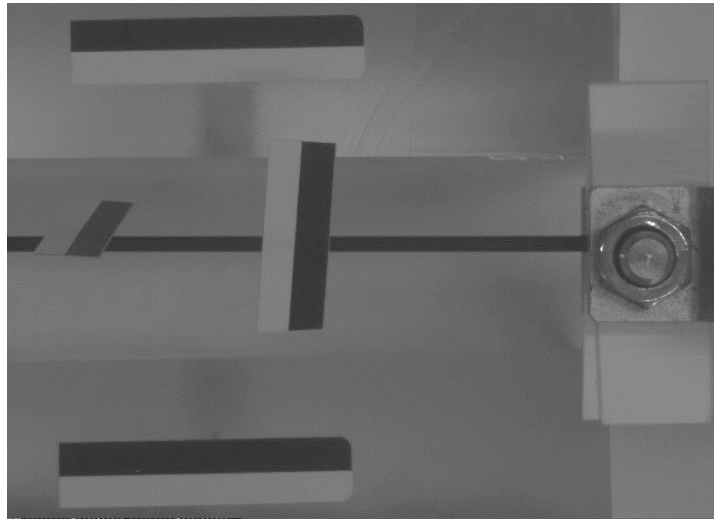


Obrázek 21: Data z měření pásku č.:1– Závislost F na u



Obrázek 22: Data z měření pásku č.:2– Závislost F na u

Při třetím měření došlo ke sklouznutí konstantní značky (viz. obrázek 23), a tím ke znehodnocení dat. Hodnoty z měření č.:3 proto nebyly dál použity.



Obrázek 23: Sklouznutí značky při měření č.:3

5. Analytický přístup

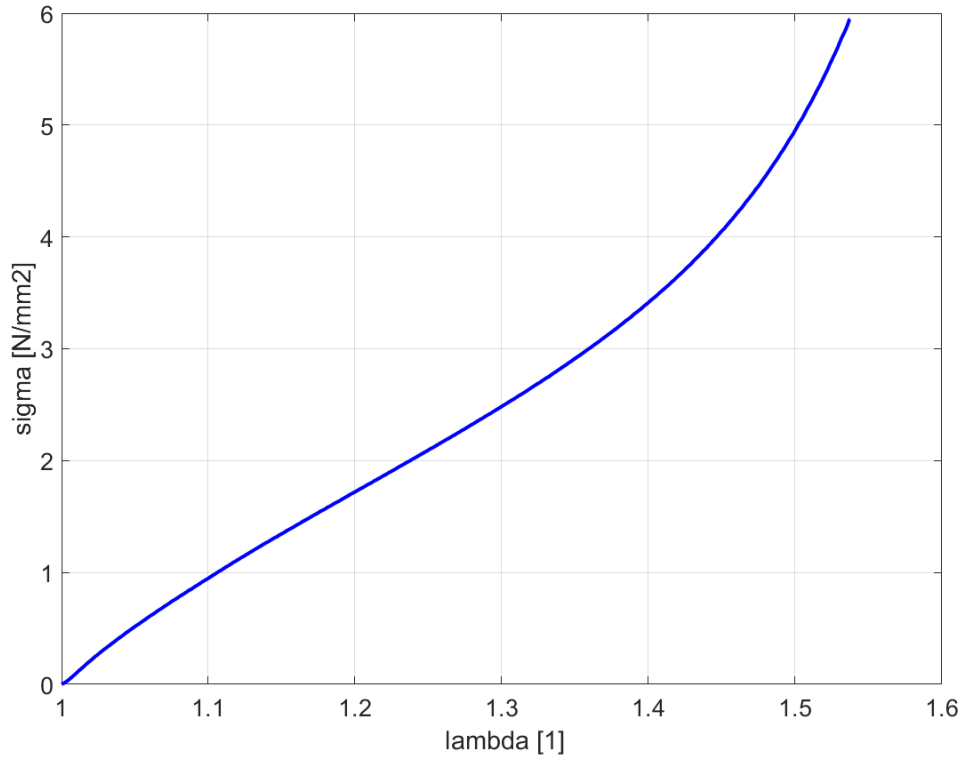
Cílem analytické části práce bylo odhadnout hodnoty parametrů pro tři materiálové modely (definovaných v předchozí části) pomocí regresní analýzy provedené metodou nejmenších čtverců. Výpočet byl proveden v prostředí programu MATLAB R2016b. Matematicky byl tento problém formulován jako minimalizace účelové funkce OF (z angl. objective function), která je definována jako suma čtverců rozdílu experimentálních (σ_{exp}) a vypočtených, modelových (σ_{mod}) hodnot napětí. Minimalizace byla provedena pomocí implementované funkce v MATLABu `fminsearch`.

$$OF = \sum (\sigma_{exp} - \sigma_{mod})^2 \quad (40)$$

Jelikož analytickou přístup lze použít pouze pro jednodušší tvary, byla jako výchozí data pro analytický přístup použity hodnoty z měření pásku. Z dat z cyklické zkoušky byly vybrány hodnoty pro druhou zatěžovací křivku z měření číslo 1, která byla přibližně střední křivka ze všech zatěžovacích křivek. Při znalosti původních rozměrů byla data ze závislosti síly F na posuvu u přepočtena na závislost skutečného napětí σ na protažení λ pomocí vzorců

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{l}{L} = \frac{L + u}{L} \\ \sigma_1 &= \frac{F}{s} = \frac{F}{S\lambda^{-1}} = \frac{F}{S}\lambda, \end{aligned} \quad (41)$$

kde L původní délka vzorku, l je délka po deformaci, S je původní průřez a s je průřez po deformaci. Jako experimentální data byla použita elastická data ze zatěžovací křivky posledního cyklu z měření pásku č.:1. Jak již bylo řečeno v kapitole 4.2., v počátku naměřených dat se projevovalo viskoelastické chování materiálu, proto byla použita data pouze od hodnoty $\sigma_1 = 0.05$ MPa.



Obrázek 24: Graf závislosti smluvního napětí na streči (měření pásku)

Poté byly v rámci vytvořeného skriptu definovány hlavní invarianty pravého Cauchyova tenzoru deformace .

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\
 I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\
 I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Další fáze analytického výpočtu se pro jednotlivé materiálové modely liší, a proto budou popsány samostatně.

5.1. Polynomický model

Rozepsaný třístupňový redukovaný polynomický model pro nestlačitelný materiál má tvar:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3.
 \tag{43}$$

Hledané parametry jsou tedy konstanty C_{10}, C_{20}, C_{30} . V programu byl definován tento model hustoty deformační energie, dále konstitutivní rovnice pro skutečné napětí σ rozepsaná do složek. Do rovnice byl dosazen požadovaný tvar hustoty deformační energie.

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{F} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \right)^T, \quad (44)$$

kde \mathbf{F} má tvar

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Pro jednoosou tahovou zkoušku ve směru 1 platí, že existuje jediná nenulová složka tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$, a to σ_1 .

$$\begin{aligned} \sigma_1 = -p + \lambda_1(2C_{10}\lambda_1 + 4C_{20}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)\lambda_1 + \\ + 6C_{30}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2\lambda_1) \end{aligned} \quad (46)$$

Rovnici $\sigma_2 = 0$ použijeme k vyjádření neurčitého Lagrangeova multiplikátoru p .

$$p = \lambda_2(2C_{10}\lambda_2 + 4C_{20}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)\lambda_2 + 6C_{30}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2\lambda_2) \quad (47)$$

Objemový poměr J je pro nestlačitelný materiál roven jedné. Také platí, že při jednoosé tahové zkoušce isotropního materiálu ve směru 1 budou streče λ_2 a λ_3 stejné. Na základě těchto dvou poznatků lze streče λ_2 a λ_3 lze vyjádřit jako funkci λ_1 .

$$J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1. \quad (48)$$

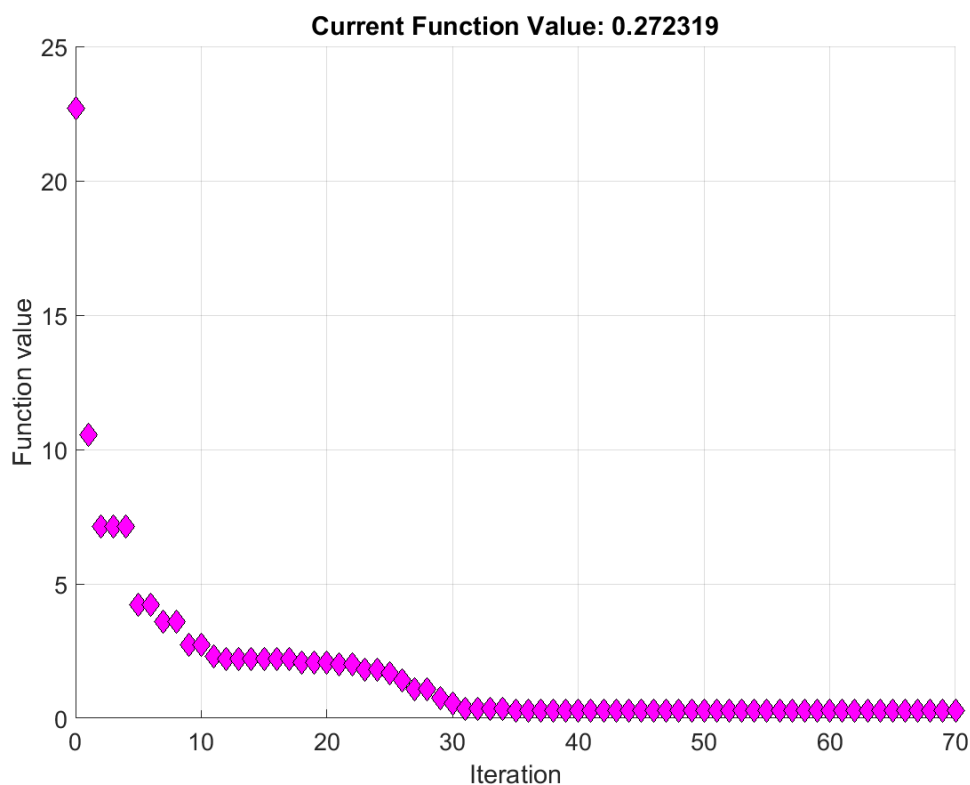
$$\lambda_2 = \lambda_3 \quad (49)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_2 = \lambda_1\lambda_2^2 = 1 \rightarrow \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \quad (50)$$

Po dosazení do rovnice pro napětí σ_1 dostáváme přímou závislost napětí σ_1 na streči λ_1 , kterou lze porovnat s hodnotami z měření.

$$\begin{aligned} \sigma_1 = -\frac{\frac{2C_{10}}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{4C_{20}\left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3\right)}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{6C_{30}\left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3\right)^2}{\sqrt{\lambda_1}}}{\sqrt{\lambda_1}} + \\ + \lambda_1 \left(2C_{10}\lambda_1 + 4C_{20}\lambda_1 \left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3 \right) + 6C_{30}\lambda_1 \left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3 \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (51)$$

Minimalizace účelové funkce se zastavila po přibližně 70 iteracích. Během několika posledních iterací se hodnota OF již neměnila, a proto byl process minimalizace ukončen. Dosažená hodnota účelové funkce OF byla 0.2723 MPa^2 .



Obrázek 25: Průběh účelové funkce pro polynomický model

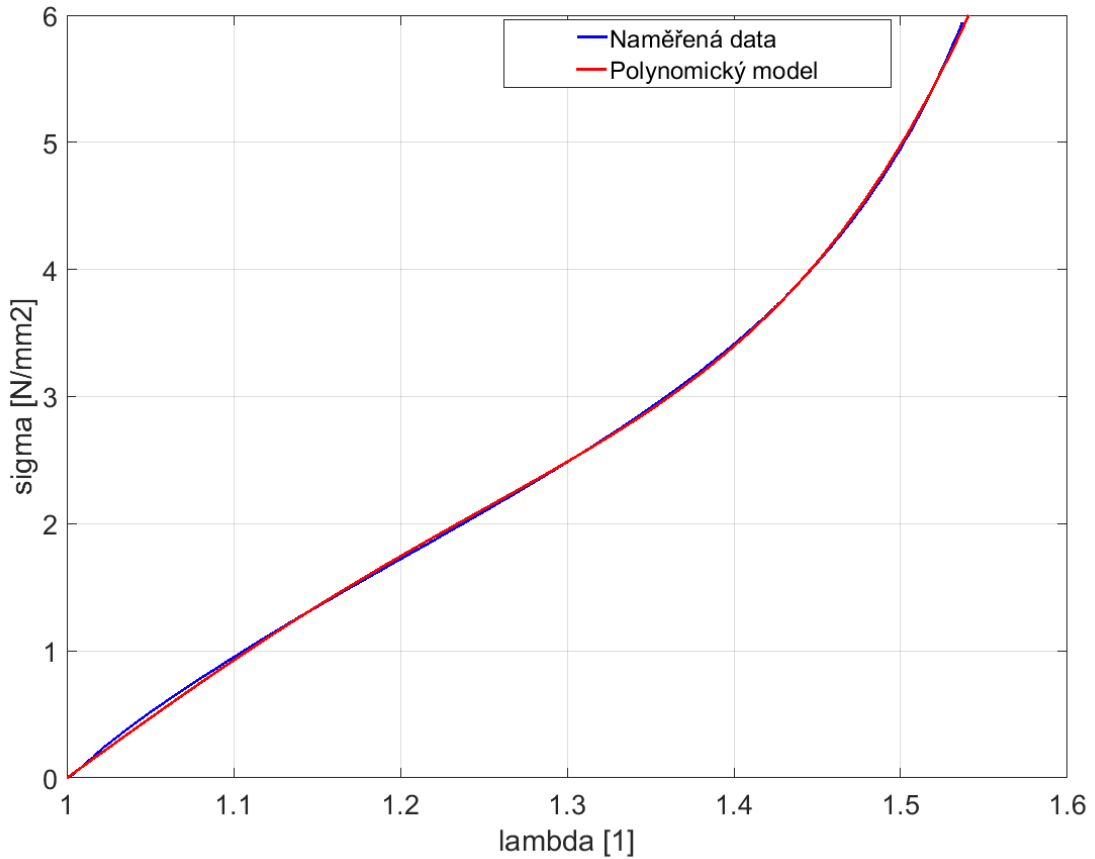
Nejnižší hodnota účelové funkce byla dosažena pro hodnoty parametrů modelu

$$C_{10} = 1.58 \text{ MPa}, \quad C_{20} = -0.827 \text{ MPa}, \quad C_{30} = 0.936 \text{ MPa}. \quad (52)$$

Data polynomického modelu s těmito konstantami proložena s naměřenými hodnotami jsou zobrazeny v následujícím grafu. Vyrovnání dat je na relativně jednoduchý tří parametrový model kvalitní, což potvrzuje i koeficient determinace, který čím více jsou experimentální a teoretická data podobná, tím se blíží koeficient determinace hodnotě jedna. Tento koeficient se vypočítá pomocí vztahu.

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}, \quad (53)$$

kde SS_{res} je residuální součet čtverců a SS_{tot} je celkový součet čtverců. Pro polynomický model je koeficient determinace $R^2 = 0,998$. V grafu jsou viditelná místa, kde se teoretická data na základě polynomického modelu a naměřená data téměř shodují.



Obrázek 26: Proložení naměřených dat polynomickým modelem

5.2. Ogdenův model

Ogdenův model třetího stupně obsahuje 6 parametrů a to μ_1, μ_2, μ_3 a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Rozepsaný tvar modelu je

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{2\mu_1}{\alpha_1^2} (\lambda_1^{\alpha_1} + \lambda_2^{\alpha_1} + \lambda_3^{\alpha_1} - 3) + \frac{2\mu_2}{\alpha_2^2} (\lambda_1^{\alpha_2} + \lambda_2^{\alpha_2} + \lambda_3^{\alpha_2} - 3) + \\
 & + \frac{2\mu_3}{\alpha_3^2} (\lambda_1^{\alpha_3} + \lambda_2^{\alpha_3} + \lambda_3^{\alpha_3} - 3)
 \end{aligned} \tag{54}$$

Postup vyrovnání dat Ogdenovým modelem na naměřená data byl analogický s prokládáním polynomickým modelem. Ve výpočetním programu byl definován požadovaný tvar hustoty deformační energie a deformační gradient. Dále byla stanovena konstitutivní rovnice ve tvaru, kde skutečné napětí $\boldsymbol{\sigma}$ je funkcí deformačního gradientu \mathbf{F} . Do ní byl dosazen deformační gradient a derivace hustoty deformační energie podle deformačního gradientu.

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{F} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \quad (55)$$

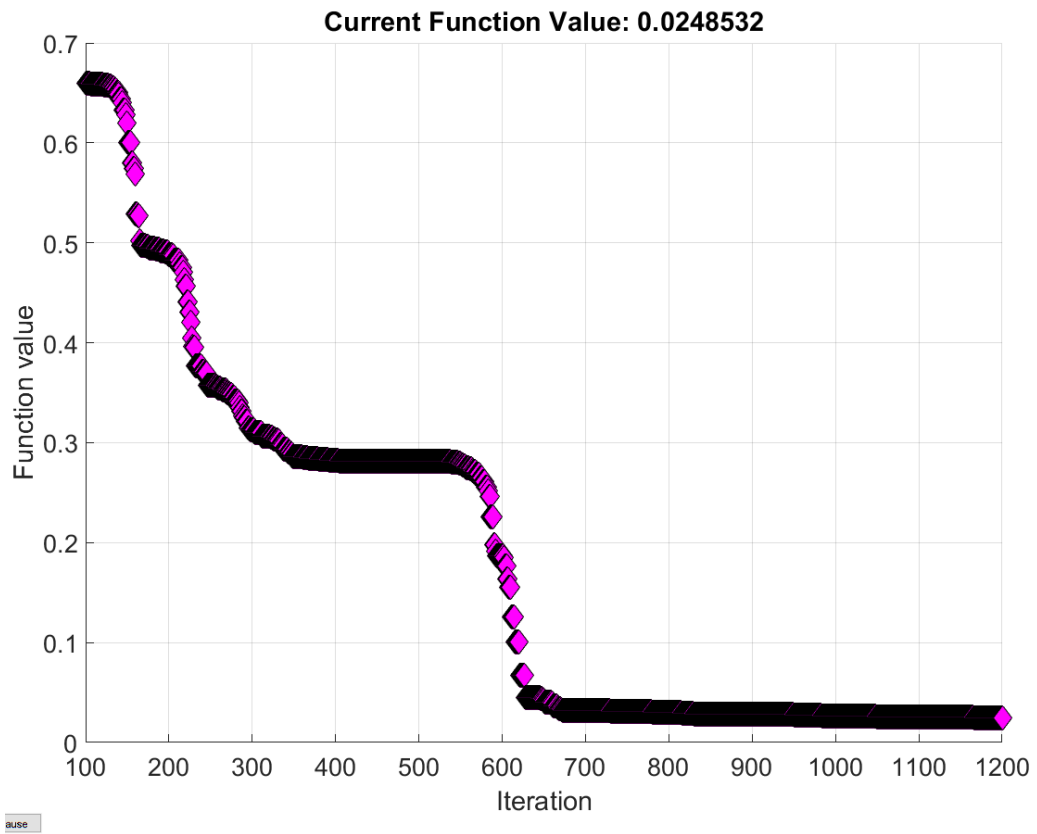
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (56)$$

Následně byla vyjádřena jediná nenulová složka tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ a to σ_1 . Z rovnice pro napětí $\sigma_2 = 0$ opět vyjádříme neurčitý Lagrangeův multiplikátor p . Stejně jako u polynomického modelu se bude uvažovat analyzovaný materiál jako nestlačitelný a jelikož se jedná o jednoosou napjatost ve směru jedna platí, že streč λ_2 se bude rovnat streči λ_3 viz. rovnice (48) až (50). Po dosazení těchto výrazů do vztahu pro σ_1 dostáváme rovnici, která je funkcí pouze protažení λ_1 .

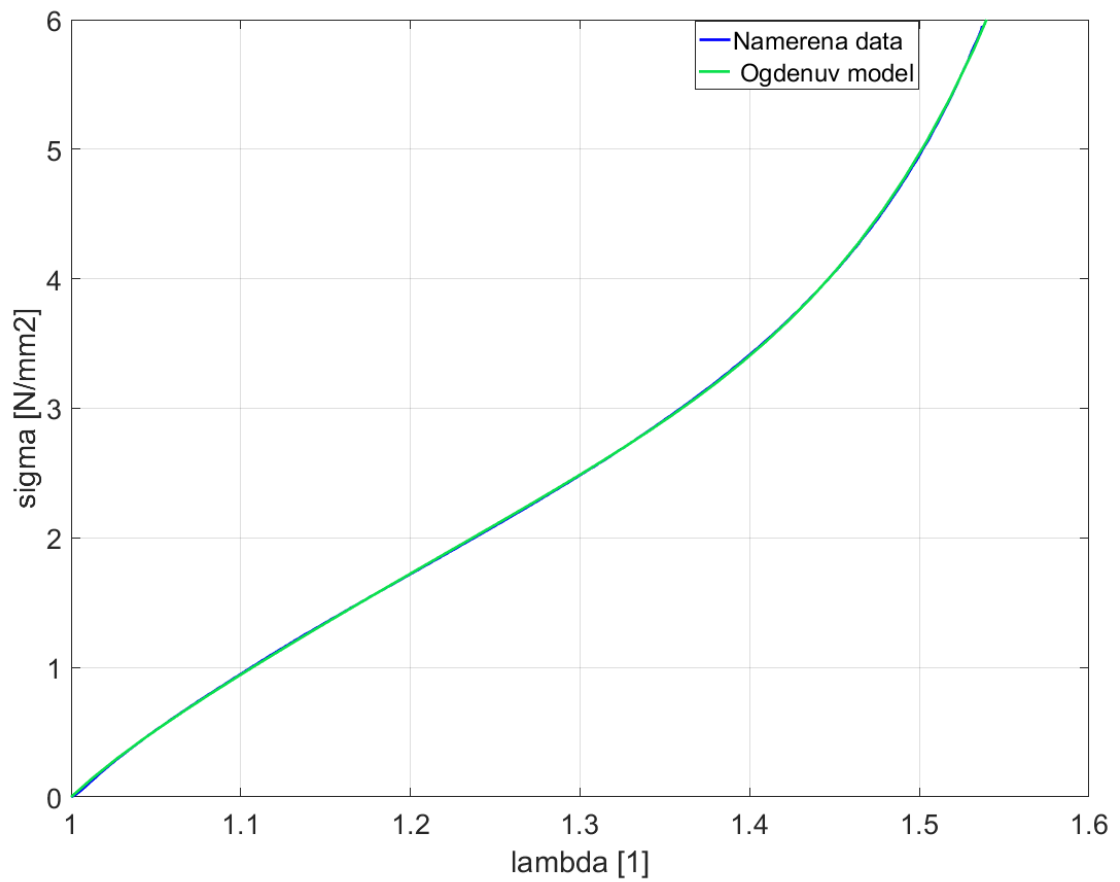
$$\begin{aligned} \sigma_1 = \lambda_1 & \left(\frac{2\mu_1 \lambda_1^{\alpha_1 - 1}}{\alpha_1} + \frac{2\mu_2 \lambda_1^{\alpha_2 - 1}}{\alpha_2} + \frac{2\mu_3 \lambda_1^{\alpha_3 - 1}}{\alpha_3} \right) - \\ & - \frac{2\mu_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{\alpha_1 - 1}}{\alpha_1} + \frac{2\mu_2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{\alpha_2 - 1}}{\alpha_2} + \frac{2\mu_3 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{\alpha_3 - 1}}{\alpha_3} \end{aligned} \quad (57)$$

Jelikož se jedná o 6 parametrový model, trval proces minimalizace déle než u polynomického modelu. Při minimalizaci se provedlo necelých 1200 iterací a konečná hodnota účelové funkce OF byla 0.0248 MPa^2 , což je o řád nižší hodnota než u redukovaného polynomického modelu. Výsledné hodnoty parametrů materiálového modelu jsou zapsány v (58). Tyto hodnoty splňují podmínku (36), jelikož $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 4.05 > 0$. Nízká hodnota účelové funkce a koeficient determinace $R^2 = 0.999$ vypovídá o vysoké kvalitě napasování modelu na naměřená data. Ogdenův model obecně dobře vystihuje chování elastomerů.

$$\begin{aligned} \mu_1 = 1.90 \text{ MPa} \quad \mu_2 = -0.986 \text{ MPa}, \quad \mu_3 = 3.14 \text{ MPa}, \\ \alpha_1 = -27.7, \quad \alpha_2 = 13.7, \quad \alpha_3 = 0.153 \end{aligned} \quad (58)$$



Obrázek 2728: Průběh účelové funkce pro Ogdenův model



Obrázek 2827: Proložení naměřených dat Ogdenovým modelem

5.3. Model Arrudy-Boyceové

Model Arrudy-Boyceové obsahuje sice jen dva parametry, ale tvar modelu obsahuje konstantu λ_m v osmé mocnině a zároveň se v modelu vyskytuje první invariant v páté mocnině. To dává předpoklady pro dobré tvarování modelových dat

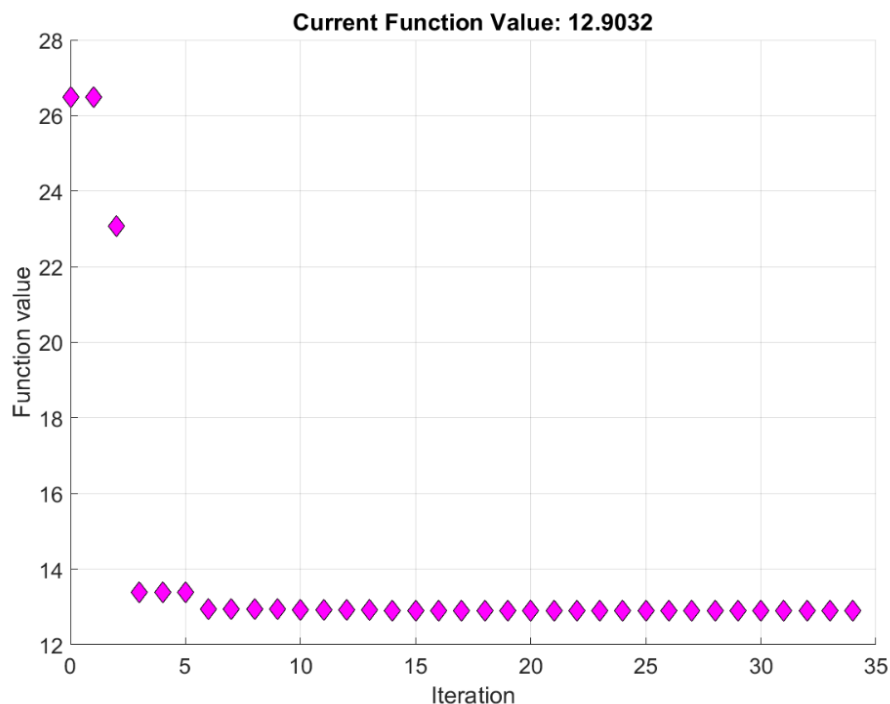
$$W = \mu \left[\frac{1}{2} (I_1 - 3) + \frac{1}{20\lambda_m^2} (I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050\lambda_m^4} (I_1^3 - 27) + \frac{19}{7000\lambda_m^6} (I_1^4 - 81) + \frac{519}{673750\lambda_m^8} (I_1^5 - 243) \right] \quad (59)$$

Výpočtový program měl analogickou strukturu jako u předešlých případů. Definovaly se potřebné vztahy a vyjádřila se rovnice pro $\sigma_1 = f(\lambda_1)$. Pravá strana této rovnice má tvar:

$$\frac{\mu \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{\frac{2}{\lambda_1} + \lambda_1^2}{5\sqrt{\lambda_1}\lambda_m^2} + \frac{11\left(\frac{2}{\lambda_1} + \lambda_1^2\right)^2}{175\sqrt{\lambda_1}\lambda_m^4} + \frac{19\left(\frac{2}{\lambda_1} + \lambda_1^2\right)^3}{875\sqrt{\lambda_1}\lambda_m^6} + \frac{519\left(\frac{2}{\lambda_1} + \lambda_1^2\right)^4}{67375\sqrt{\lambda_1}\lambda_m^8} \right)}{\sqrt{\lambda_1}} \quad (60)$$

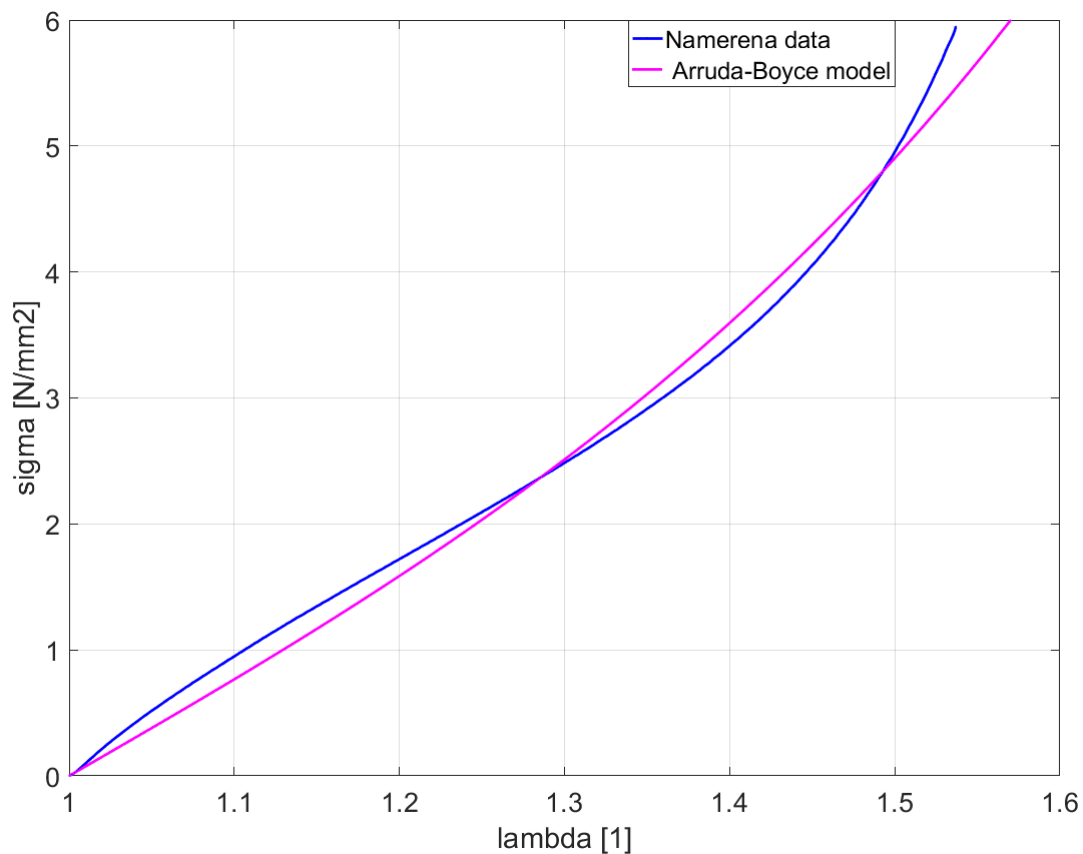
Ze všech tří modelů dokonvergovala účelové funkce k řešení nejrychleji, a to již během necelých 35 iterací. Avšak hodnota OF je ze tří modelů nejvyšší. Koefficient determinace byl v tomto případě $R^2 = 0.989$. Výsledné hodnoty hledaných parametrů jsou:

$$\mu = 1.28 \text{ MPa}, \quad \lambda_m = 1.21. \quad (61)$$



Obrázek 29: Průběh účelové funkce pro model Arruda-Boyce

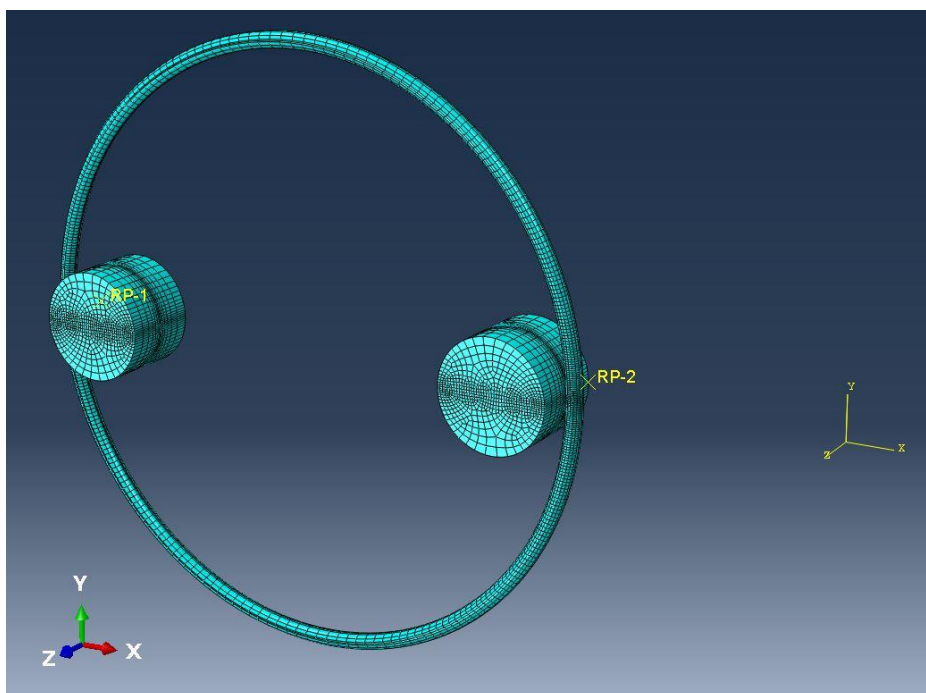
Viditelně se jedná o nejméně vhodný model pro popis chování NBR ze všech tří použitých materiálových modelů.



Obrázek 30: Proložení naměřených dat modelem Arrudy-Boyceové

6. Numerická simulace

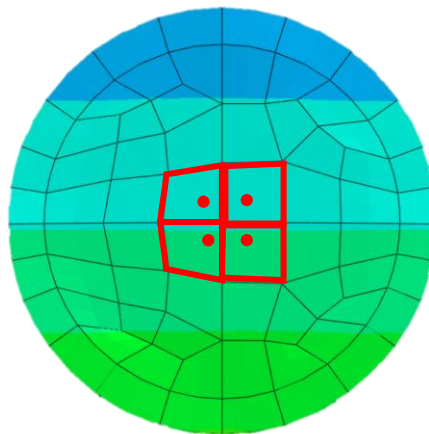
V této části bude popsán postup analýzy zkoušeného akrylonitril-butadienového pryžového kroužku pomocí metody konečných prvků. Následující simulace byly vytvořeny v programu Abaqus CAE 2017. Programy pracující s konečnými prvky jsou v dnešní době hlavním způsobem vývoje a analýzy komponentů. Zásadní výhodou oproti analytickému přístupu je ta, že v těchto programech lze analyzovat komponentu, která bude mít tvar výsledného výrobku. V případě, že jedná o velké a složité modely, může výpočetní technice zabrat vyhodnocení několik hodin, někdy i dnů. Proto se modely určitými způsoby zjednodušují, avšak tak, aby nedošlo ke zhoršení kvality výsledků. Příkladem takového zjednodušení může být například prostší elementová síť či tvarové zjednodušení v oblastech, které pro vyhodnocení nejsou zásadní. Pokud se jedná o symetrické modely je možné analyzovat jen jednu jeho symetrickou část. Výsledky jsou po správné interpretaci, např. poloviční hodnota reakční síly apod., korektní a je tím ušetřen čas.



Obrázek 31: Síť modelu

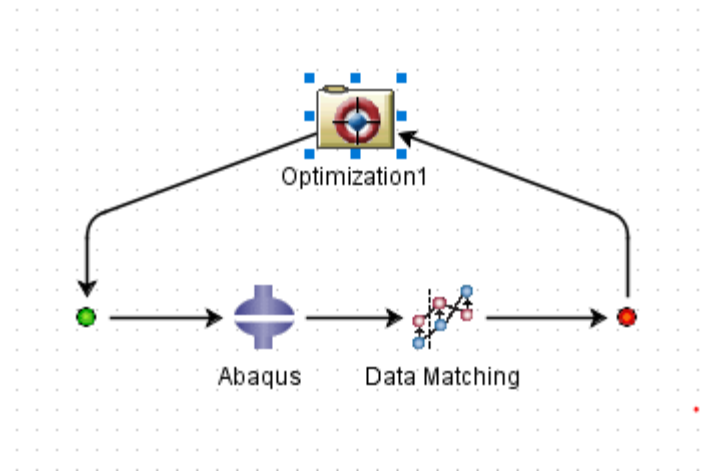
Jelikož se v případě této práce jedná o jednoduchou součást bude modelována kompletně bez zjednodušení pomocí symetrie. Výsledky by tak přímo měly odpovídat naměřeným hodnotám z experimentu. Síť byla zhuštěna v místech kontaktů. Pryžový kroužek měl kruhový průřez s vnitřním průměrem 43.5 mm a průměrem stěny 1.2 mm. Materiál pryže byl definován jako hyperelastický isotropní materiál definován třemi různými materiálovými modely. Parametry materiálových modelů byli nastaveny na

počáteční hodnoty blízké analytickému modelu. Kolíky byly definovány jako ocelové válce o průměru 8.4 mm a výšce 6 mm s Youngovým modulem pružnosti $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ a Poissonovým číslem $\nu = 0.3$. Interakce mezi jednotlivými částmi modelu byla vytvořena obecným kontaktem typu všechno se vším. Zatěžování bylo nuceno kinematicky, a to posuvem pravého kolíku ve směru osy x o 60 mm. Posun byl nastaven výrazně větší, než byl proveden v experimentu, jelikož zaznamenávání hodnot v experimentu začalo v místě, kde se začal kroužek napínat. Toto místo odpovídá v modelu počátku hlavního souřadnicového systému. Elementy použité pro kroužek byly hybridní, kvadratické. Hybridní typ elementů je nutný pro nelineární analýzu. Hybridní elementy totiž kromě uzlových posuvů mají i další báze funkce jako např. napěťové či teplotní. A jelikož pracujeme s nestlačitelným materiálem je nutné počítat i hodnotu hydrostatického tlaku p (neurčitý Lagrangeův multiplikátor). Kolíky byly vysítovány s menší hustotou elementů. Programu byl kromě výchozích hodnot zadán požadavek na výpočet reakční síly ve směru 1 *RFI* a vzdálenosti vektoru posuvů ve směru 1 *COORI*. Tento vektor obsahuje hodnoty vzdálenosti vybraného body od hlavního souřadného systému ve směru osy 1, kde zároveň reprezentuje polohu pohyblivé čelisti v referenční konfiguraci experimentu. Tím se odstranil rozdíl mezi počátkem zatěžování v experimentu a numerické simulaci a vektor posuvů *COORI* se tak pro hodnoty větší než nula shoduje s vektorem posuvů u . Později vynesené závislosti σ_1 na λ_1 byly získány přepočtem dat pro σ_1 a logaritmickou deformaci *LEI*, které byly získány z integračních bodů nejbližě středu průřezu materiálu pro elementy typu C3D20RH uprostřed kroužku (viz obrázek 32). Hodnoty pro elementy na horní, dolní a ve středu se od sebe sice jen nepatrně, ale liší. Proto se vyhodnocovala data pro elementy uprostřed, jelikož jsou to zároveň i střední hodnoty.



Obrázek 32: Vybrané elementy a integrační body O-kroužku pro vyhodnocení napětí

Výstup z Abaqusu sloužil jako vstupní soubor pro optimalizaci materiálových parametrů. Optimalizace probíhala v prostředí programu Isight 2017 od společnosti Dassault Systèmes. Isight je program pro integraci procesů a optimalizace návrhů. Program má v sobě implementováno velké množství procesních i aplikačních komponent pro tvorbu různých variant procesů. Isight obsahuje grafické prostředí, ve kterém se vytváří pracovní postup jednoduchým přetažením ikony do pracovního pole. Proces je tím pádem intuitivní a dá se v něm lehce zorientovat.



Obrázek 33: Nastavení pracovního postupu v Isightu

Pro účely této práce byly využity komponenty Optimization, Abaqus a Data Matching, kde je tok dat zobrazen na obrázku 33. Program v každém kroku iterace stanovil nové hodnoty parametrů a tuto situaci spočetl v Abaqusu. Jako vstupní data komponenty Abaqus se načel cae soubor, ve kterém se jako proměnné vybraly hodnoty parametrů hyperelastického materiálového modelu, které chceme optimalizovat. V komponentě Data Matching se jako cíl optimalizace vybrala experimentální data Okroužku – síla F a posuv u . Ta musí být zapsány v textovém souboru. Na rozdíl od analytického výpočtu se pro optimalizaci nemusela data upravovat, aby závislost napětí na streči měla typický průběh, ale mohla se použít „surová“ data z experimentu. Z těch se pouze vybrala jedna ze zatěžovacích křivek a oblast, ve které měla optimalizace probíhat. Tím se vynechala oblast způsobena creepem, narovnáváním kroužku či třením mezi kroužkem a válečky. Optimalizace byla proto provedena pro hodnoty posuvu od 2 do 36 mm. K optimalizování se nastavil vektor $RF1$. Jako poslední se nastavovala optimalizační komponenta. Nastavena byla Hookeova-Jeevesova optimalizační technika a její parametry jako relativní krok, maximální počet iterací nebo parametr ukončení optimalizace. Dále se v této komponentě zvolily proměnné, které se mají měnit pro dosažení požadované přesnosti. Za tyto proměnné byly nastaveny parametry

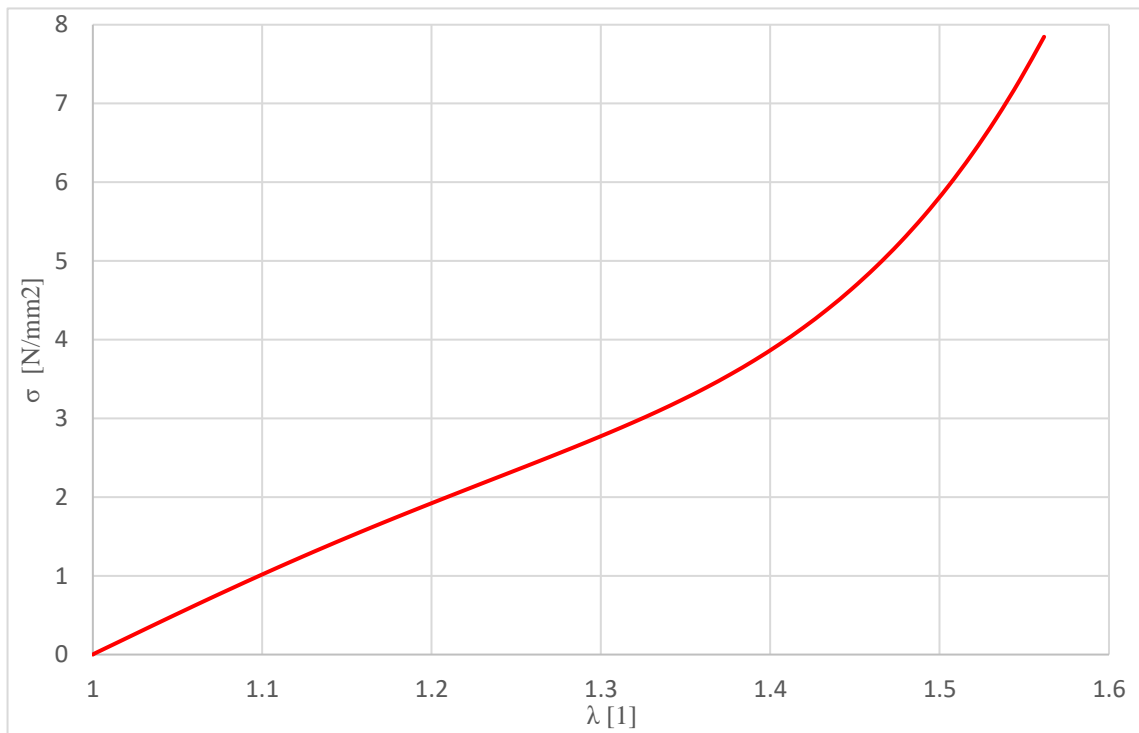
materiálového modelu. Jako parametr optimalizace byla nastavena minimalizace sumy rozdílů čtverců mezi cílem (exp. data) a hodnotami na základě odhadnutých parametrů (hodnoty z num. sim.).

6.1. Polynomický model

Pro polynomický model se po desítkách iterací optimalizace dostala na hodnotu rozdílu součtu čtverců odchylek 0.39 MPa^2 . Tato hodnota byla dosažena pro hodnoty parametrů

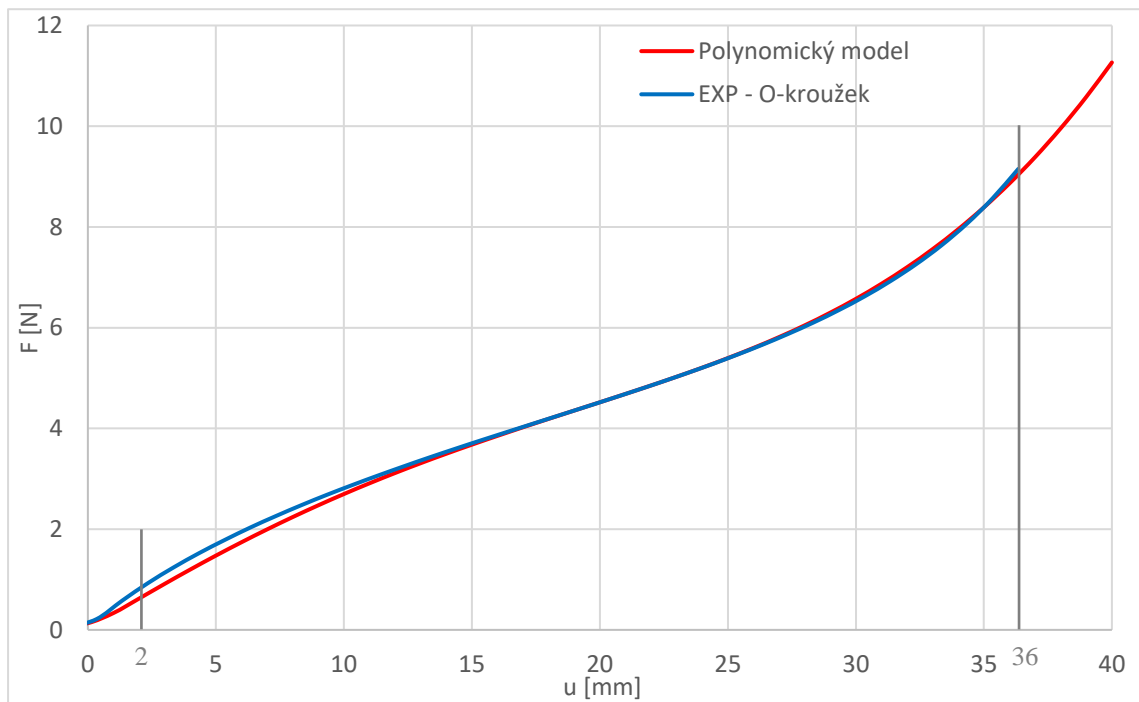
$$C_{10} = 1.73 \text{ MPa}, \quad C_{20} = -0.880 \text{ MPa}, \quad C_{30} = 1.09 \text{ MPa}. \quad (62)$$

Závislost napětí na deformaci je pro iteraci s nejvyšším koeficientem determinace $R^2 = 0.993$ a tedy i nejnižší odchylkou vyobrazena na obrázku (34).



Obrázek 34: Optimalizovaná závislost napětí na protažení pro polynomický model

Závislost po optimalizaci síly F na posuvu u je zobrazena a porovnána se závislostí z experimentu na obrázku (35). Je v něm také naznačena oblast, ve které probíhala optimalizace (posuv 2 až 36 mm).



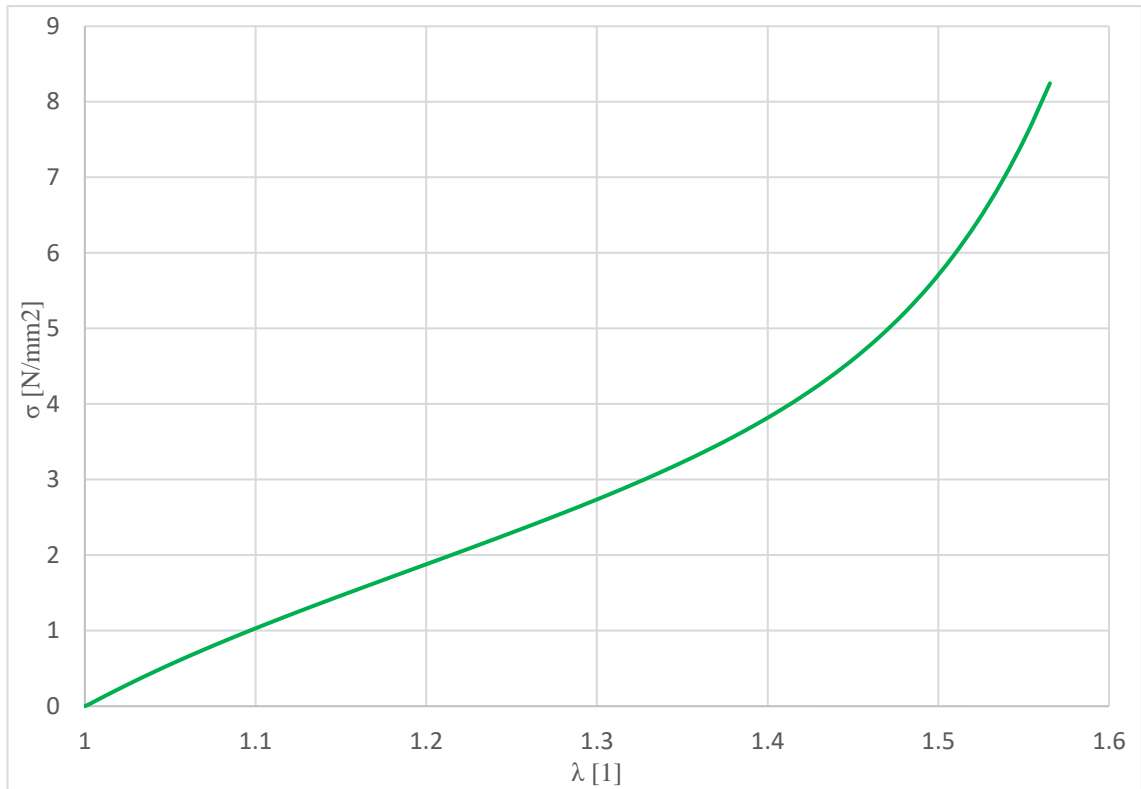
Obrázek 35: Optimalizovaná závislost F na u pro polynomický model

6.2. Ogdenův model

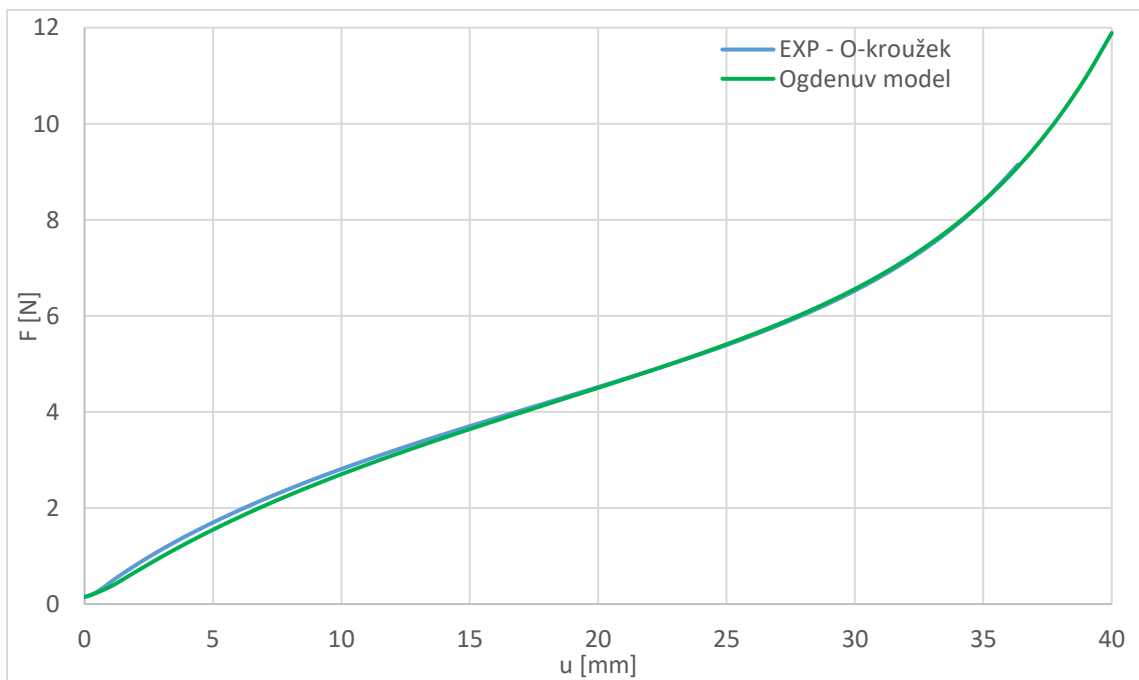
Obdobně se optimalizace prováděla pro Ogdenův model. Optimalizace dospěla ze všech tří modelů k nejnižšímu rozdílu součtu odchylek naměřených a modelových dat. Rozdíl je reprezentován koeficientem determinace $R^2 = 0.995$, což je, stejně jako v analytickém přístupu, nejlepší výsledek. Tento stav nastal pro hodnoty parametrů modelu

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 4.26, \alpha_1 = 6.92, \mu_2 = 0.00200, \\ \alpha_2 &= 21.7, \mu_3 = -0.174, \alpha_3 = -14.5. \end{aligned} \quad (63)$$

Opět je splněna podmínka pro parametr μ , a to $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 11.18 > 0$. Na obrázku (37) je opět vyznačena oblast, ve kterých optimalizace probíhala.



Obrázek 36: Optimalizovaná závislost napětí na protažení pro Ogdenův model

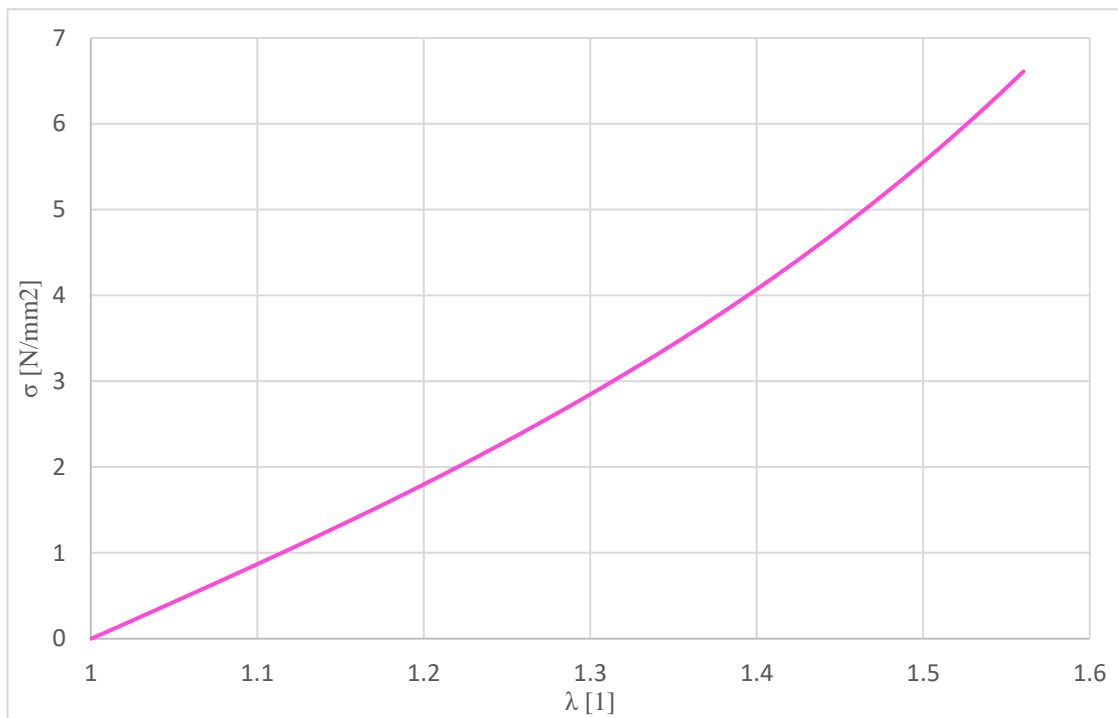


Obrázek 37: Optimalizovaná závislost F na u pro Ogdenův model

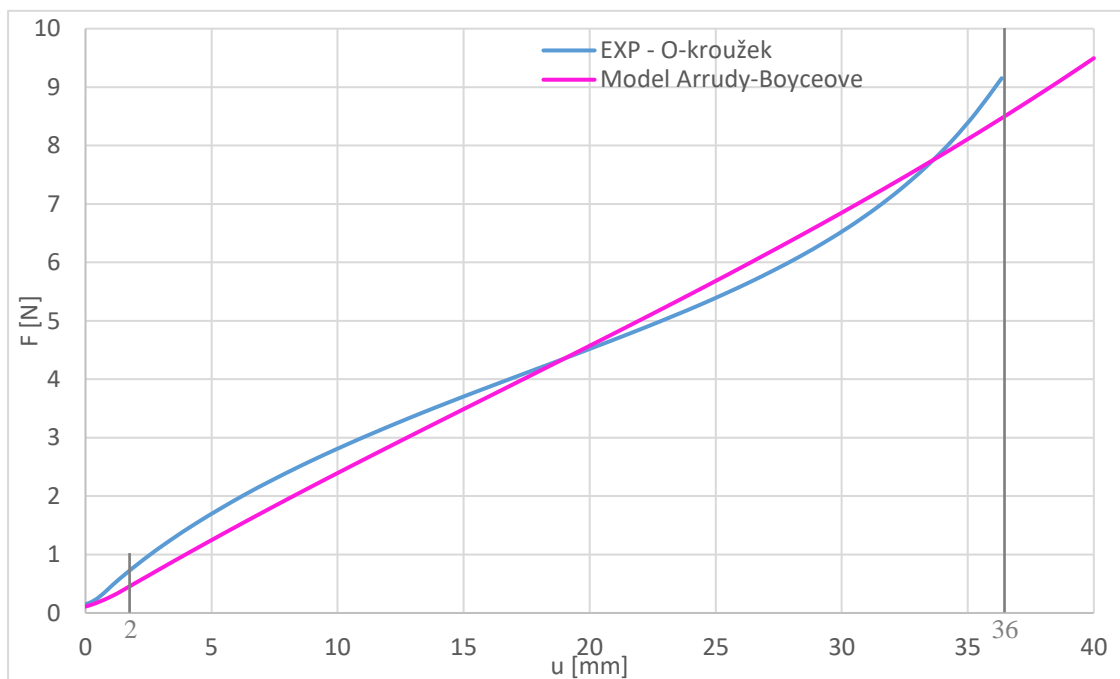
6.3. Model Arrudy-Boyceové

Pro model Arrudy-Boyceové vyšla podle očekávání optimalizace nejméně přesná. Iterace s nejnižší odchylkou, a to 3.72 MPa^2 a $R^2 = 0.987$ byla dosažena pro hodnoty parameterů:

$$\mu = 1.46 \text{ MPa}, \lambda_m = 1.22. \quad (64)$$



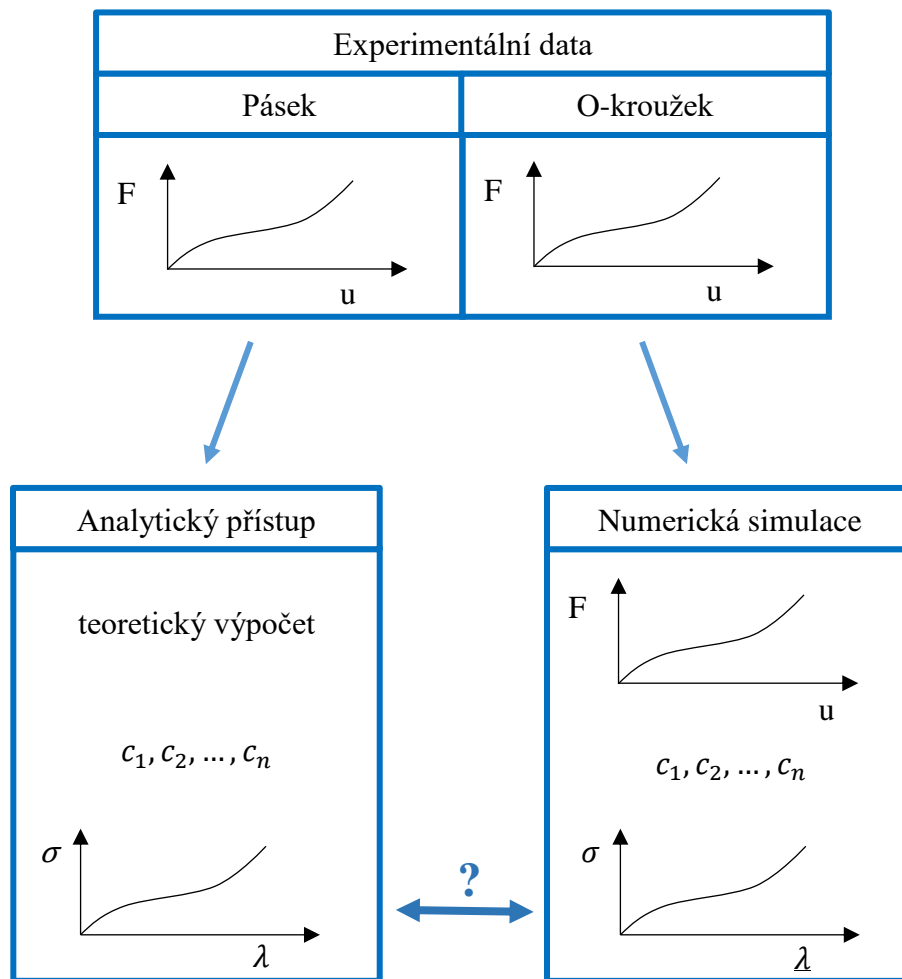
Obrázek 38: Optimalizovaná závislost napětí na protažení pro model Arrudy-Boyceové



Obrázek 39: Optimalizovaná závislost F na u pro model Arrudy-Boyceové

7. Porovnání / Vyhodnocení

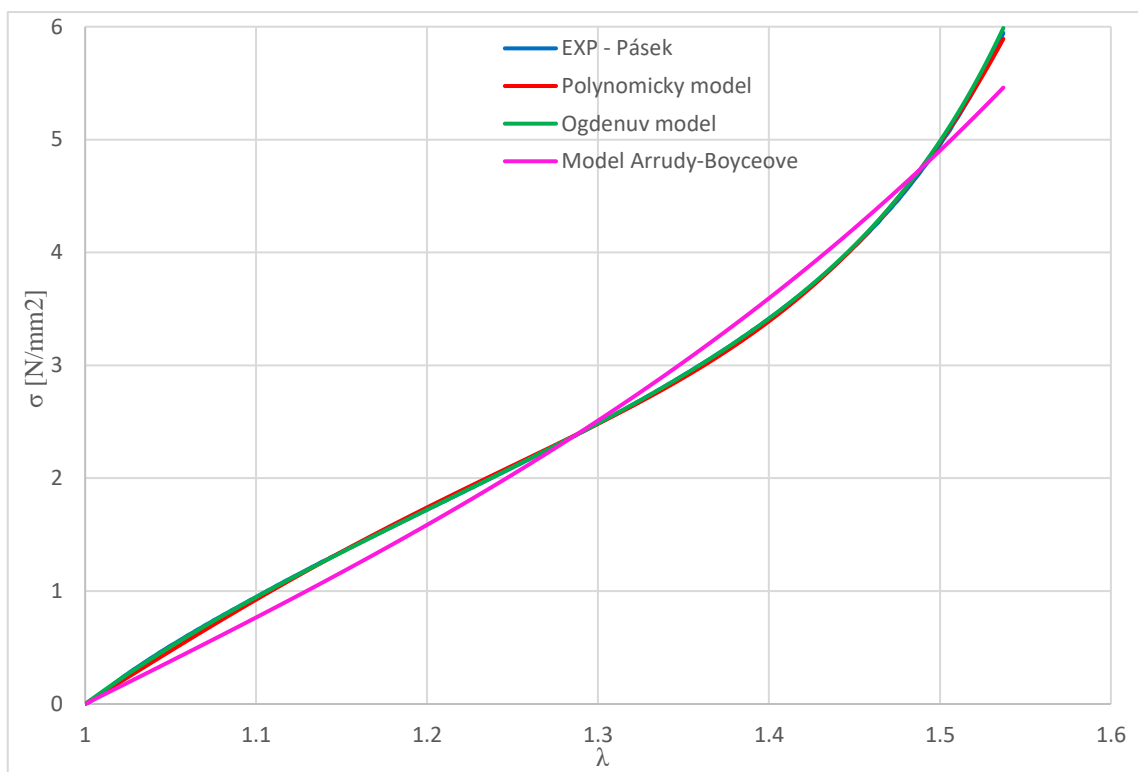
Vyhodnocování vlastností materiálu v celé práci probíhalo podle schématu, který je zjednodušeně vyobrazen na obrázku (40). Na počátku se provedly jednoosé tahové zkoušky O-kroužku a pásku. Z experimentů se získaly cyklické závislosti reakční síly F na posuvu u . Poté se postup rozdělil na analytický přístup a přístup s numerickou simulací a následnou optimalizací. Oba přístupy se použily pro všechny tři zkoumané modely. Oba přístupy zároveň přijímají předpoklady ovlivňující způsob analýzy i jejich vyhodnocení. Tyto dvě analýzy se mezi sebou následně porovnají.



Obrázek 40: Schéma analýzy

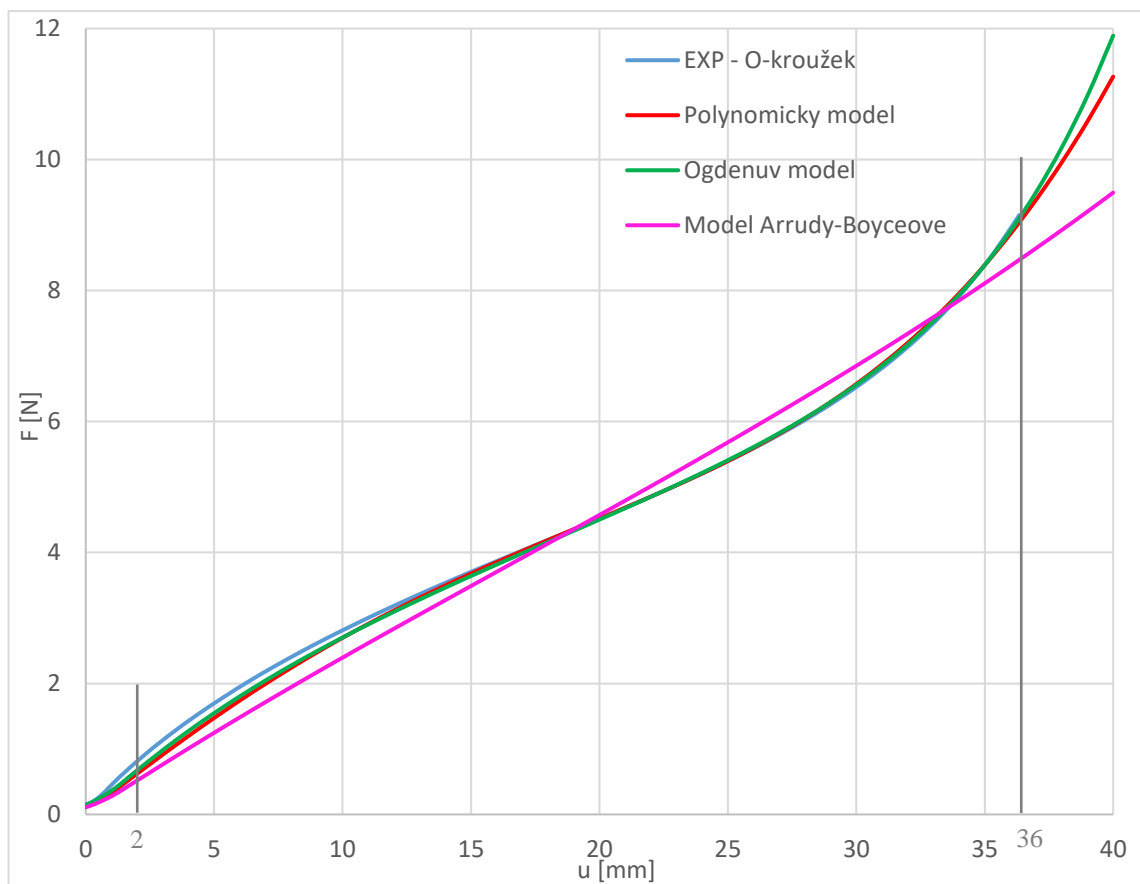
Už nastavení experimentu a jeho zpracování musí být přizpůsobeno pro případný analytický výpočet. Zkoušený vzorek musí mít jednoduchý tvar typu tyče či pásku, což může být problém při snaze analyzovat materiál již hotového výrobku. Pro složitější tvar, např. pro kroužek, vzniká při jednoosé tahové zkoušce kromě tahového napětí ve směru zatěžování i napětí v dalších směrech. Napětí v dalších směrech jsou způsobena např. vznikem ohybového napětí v místě uchycení kroužku. V případech vzniku víceosé

napjatosti by byl analytický výpočet velmi složitý. Zároveň pro složité tvary není možné použít vyhodnocení pomocí kontrastních značek, jelikož pro vyhodnocovací program je nutné, aby značky zůstali po celou dobu měření ve stanovené oblasti. Hodnoty na vnitřní a vnější straně průřezu se mohou lišit, ale analytický přístup přijímá předpoklad homogenního průběhu napětí a deformace po tloušťce i délce zkoušeného materiálu. Získaná data je pak nutno upravit do tvaru, aby počáteční hodnoty byly přímo v nule a závislost skutečného napětí na protažení tak měla tvar charakteristický pro hyperelastické materiály. Při dodržení všech požadavků je pak samotný teoretický výpočet velmi rychlý a účelová funkce v maximální možné míře minimalizuje sumu rozdílu pro teoretické hodnoty. Výpočet se ale provede pouze v oblasti, pro kterou máme naměřená data. Celkově je analytický přístup výhodný ve fázi vývoje, kdy ještě třeba není známá geometrie, ale je dáno, jakému namáhání bude konečný výrobek čelit a je nutné vybrat vhodný materiál. Obecně je ale analytický přístup použitelný jen v případě, když zkoušený vzorek a experimentální podmínky vedou k úloze, kterou umíme. Jen tehdy lze analyticky získat z naměřených hodnot posuvů předpovědět hodnoty působících sil. Srovnání modelů vypočtených analytickým přístupem je vidět na obrázku (41). Je na něm vidět, že naměřená data vystihuje nejlépe Ogdenův model ($R^2 = 0.999$), následuje Polynomický model ($R^2 = 0.998$) a s odstupem model Arrudy-Boyceové ($R^2 = 0.989$).



Obrázek 41: Porovnání modelů a experimentu z analytického přístupu

Pro numerickou simulaci může být experiment proveden přímo na zkoumané součásti, jelikož v konečně prvkovém programu není problém modelovat situaci stejnou jako v experimentu. Případnou modifikaci lze v programu rychle implementovat, což je pro vývoj velice výhodné. Je možné nastavit větší hodnoty zatěžování, a tím předpovídat chování v oblasti, pro které nejsou k dispozici naměřená data. Experimentální data sloužící jako vstupní hodnoty pro optimalizaci není nutné upravovat. Jen se vybere požadovaná zatěžovací křivka. Pro vynechání oblasti s vlivem creepu, narovnávání kroužkou se v optimalizačním softwaru jednoduše nastaví meze, ve kterých má optimalizace probíhat. V tomto případě byly meze nastaveny od 2 do 36 mm posuvu. Místo vyhodnocování lze velmi přesně určit vybráním elementu nebo konkrétního integračního bodu. V tomto místě lze zadat programu požadavek, aby spočítal nejen skutečné napětí ve směru zatěžování, ale i ostatní složky tenzoru napětí nebo další veličiny. Výpočetní doba zabere o poznání větší čas než u analytického přístupu, ale výpočet provádí výpočetní technika samostatně a vývojový pracovník se tak může věnovat dalším činnostem.

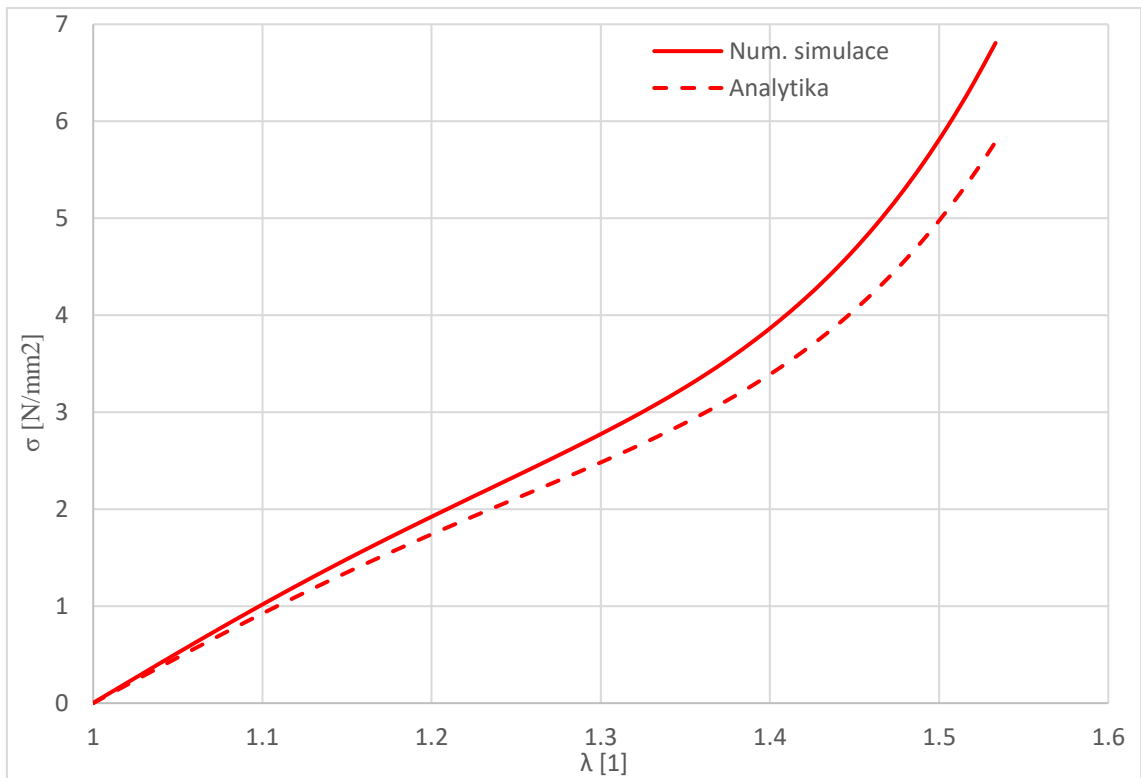


Obrázek 42: Porovnání modelů a experimentu z numerické simulace

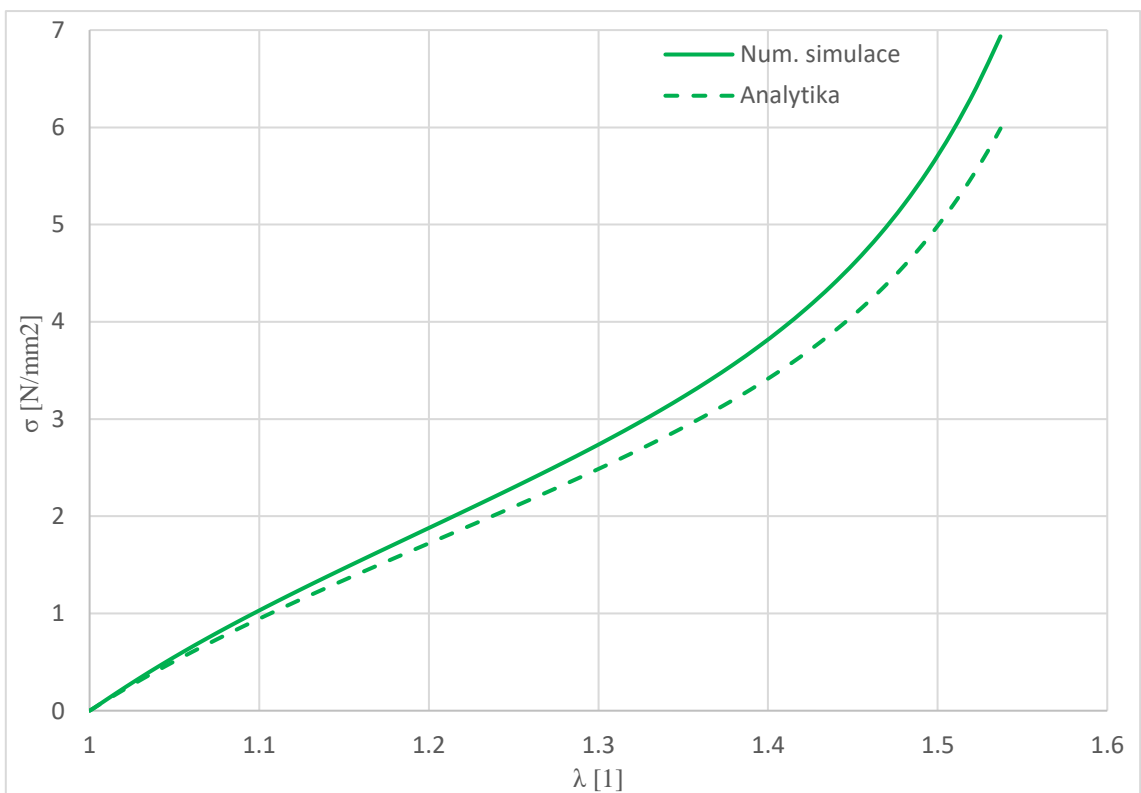
Pro numerickou simulaci z porovnávaných materiálových modelů dle nejmenší velikosti sumy odchylek, resp. nejvyšším koeficientem determinace vyšel podle očekávání nejlépe Ogdenův model s koeficientem determinace 0.995. Méně přesněji vyšel redukovaný polynomický model s koeficientem determinace 0.993. S větším odstupem vyšel model Arrudy-Boyceové, který se dostal na hodnotu 0.987. Jelikož je použitý Ogdenův model šestiparametrový, trvala optimalizace oproti tříparametrovému polynomickému modelu o poznání déle, ale výsledky tolik rozdílné nejsou. Je proto na zvážení, jak přesný výsledek požadujeme a jak rychle ho chceme dosáhnout. Model Arrudy-Boyceové není pro popis chování hyperelastického materiálu příliš vhodný.

Obecný závěr z porovnání analytického a numerického přístupu je, že pro všechny tři tvary materiálových modelů byly závislosti napětí na protažení pro analytický přístup konzervativnější v celém průběhu, tzn. že pro každou hodnotu posuvu vyšla hodnota napětí získaná analyticky nižší než v případě hodnot získaných z numerické simulace. (viz. následující grafy). Rozdíl je však pro maximální hodnotu posuvu nejvýše 1 N, což je procentuálně přibližně 14 %. Vliv na rozdíl má určitě fakt, že analytický přístup vycházel z měření pásku, kdežto hodnoty pro numerickou simulaci byly získány z experimentu kroužku, tedy skutečné součásti, což pro analytiku není možné použít. V obou experimentech dochází k nepřesnostem náhodným či systematickým. Data z experimentu pásku musela být pro analytický přístup upravena. Odhadem musel být zvolen počátek dat neboli místo, kdy začala čistě elastická část deformace. Další hodnoty musely být s ohledem na nový počátek přepočteny. U numerické simulace se mohla použít surová naměřená data a pouze vybrat oblast pro optimalizaci.

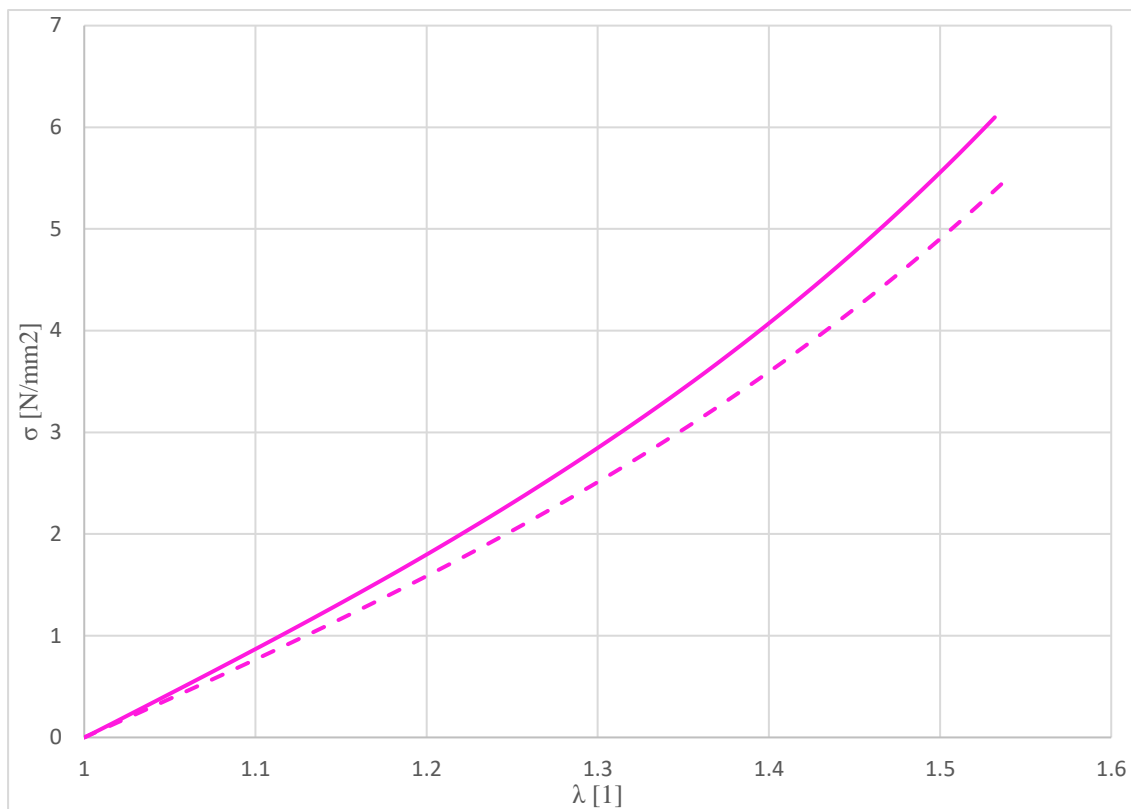
Rozdíl ve vyhodnocovaných datech mohl způsobit předpoklad, že v analytickém přístupu uvažujeme homogenní napjatost a deformaci. Tím zanedbáváme nejen tvar průběhu napětí a deformace po tloušťce, ale také po délce vzorku. V reálném zkušebním tělese vždy dochází vlivem vetknutí k nerovnoměrnému příčné deformaci. V programu využívající MKP tento zjednodušující předpoklad není.



Obrázek 43: Porovnání analytického a numerického přístupu pro polynomický model



Obrázek 44: Porovnání analytického a numerického přístupu pro Ogdenův model



Obrázek 45: Porovnání analytického a numerického přístupu pro model Arrudy-Boyceové

8. Závěr

V této práci byly popsány metody analýzy hyperelastického materiálu pomocí analytického a numerického přístupu. K analýze byly v obou těchto případech použity tři materiálové modely, a to redukovaný polynomický model, Ogdenův model a model Arrudy-Boyceové. Porovnály se mezi sebou jednotlivé materiálové modely, ale i přístupy zjišťování parametrů materiálových modelů.

Nejpřesnější model vyšel pro oba přístupy šestiparametrový Ogdenův model. Naopak nejméně přesný byl viditelně v obou případech dvouparametrový model Arrudy a Boyceové.

Analytický přístup vyšel pro všechny modely jako konzervativnější metoda. Pro vyhodnocení numerického přístupu se vytvořil model odpovídající zkoušené součásti, používala se data naměřená přímo na součásti a přístup jako takový neobsahuje omezující předpoklady, které jsou v analytickém přístupu nezbytné, a proto by měl lépe popisovat reálné chování zkoumaného materiálu.

Bibliografie

- [1] BĚHÁLEK, Luboš. *Polymery* [online]. 1. vydání. Svitavy: Code Creator, s.r.o, 2015 [cit. 2018-06-12]. ISBN 978-80-88058-68-7. Dostupné z: <https://publi.cz/books/180/Cover.html>
- [2] BURŠA, Jiří. *Nehookeovské materiály v inženýrské mechanice: Non-Hookean materials in engineering mechanics : teze přednášky k profesorskému jmenovacímu řízení v oboru aplikovaná mechanika*. Brno: VUTIUM, 2011. ISBN 978-80-214-4250-4.
- [3] STROBL, Gert. *The physics of polymers: concepts for understanding their structures and behavior*. 1. vydání. New York: Springer, 1996. ISBN 35-406-0768-4.
- [4] DUCHÁČEK, Vratislav. *Polymery: výroba, vlastnosti, zpracování, použití*. Vyd. 2., přeprac. Praha: Vydavatelství VŠCHT, 2006. ISBN 80-708-0617-6.
- [5] LENFELD, Petr. *Technologie II*. 3. vyd. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2016. ISBN 978-80-7494-305-8.
- [6] VÁCLAV, Švorčík. *Struktura a vlastnosti polymerů* [online]. In: . Praha: FS ČVUT, b.r. [cit. 2018-06-13]. Dostupné z: http://users.fs.cvut.cz/libor.benes/vyuka/polymvsauto/Struktura%20a%20vlastnosti%20polymeru%20-%20strucne_Svorcik.pdf
- [7] *Polymer Chemistry* [online]. South Carolina, U.S.: University of South Carolina, 2001 [cit. 2018-06-22]. Dostupné z: <https://faculty.uscupstate.edu/llever/polymer%20resources/MainMenu.htm>
- [8] *What-when-how: Electrical Properties of Polymers, Ceramics, Dielectrics, and Amorphous Materials Part I* [online]. b.r. [cit. 2018-06-23]. Dostupné z: <http://what-when-how.com/electronic-properties-of-materials/electrical-properties-of-polymers-ceramics-dielectrics-and-amorphous-materials-part-1/>
- [9] *Gumárenská technologie* [online]. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2005 [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <http://www.home.karneval.cz/0323339201/>
- [10] HORNÝ, Lukáš. *Úvod do nelineární pružnosti* [online]. Praha: ČVUT v Praze, 2016 [cit. 2018-06-27]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Nelinearni-pruznost-projekt-I.pdf>
- [11] MERCKEL, Yannick, Julie DIANI, Mathias BRIEU a Julien CAILLARD. *Mechanics of Materials: Constitutive modeling of the anisotropic behavior of Mullins softened filled rubber*. *Scencedirect.com* [online]. Elsevier, 2013 [cit. 2018-07-05]. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663612001834>
- [12] STRÍŽ, Bohuslav. *Mechanika textilií: Základy mechaniky kontinua*. Liberec: Technická univerzita, 2001. ISBN 80-708-3458-7.

- [13] YEOH, O. H. Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber. *Rubber Chemistry and Technology* [online]. 1993, **66**(5), 754-771 [cit. 2018-07-17]. DOI: 10.5254/1.3538343. ISSN 0035-9475. Dostupné z: <http://rubberchemtechnol.org/doi/abs/10.5254/1.3538343>
- [14] OGDEN, R. W. Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* [online]. 1972, **326**(1567), 565-584 [cit. 2018-07-17]. DOI: 10.1098/rspa.1972.0026. ISSN 1364-5021. Dostupné z: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1972.0026>
- [15] ARRUDA, Ellen M. a Mary C. BOYCE. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* [online]. 1993, **41**(2), 389-412 [cit. 2018-07-17]. DOI: 10.1016/0022-5096(93)90013-6. ISSN 00225096. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0022509693900136>
- [16] *SIMULIA User Assistance 2017: Abaqus 2017* [online]. Dassault Systèmes, 2017 [cit. 2018-07-06]. Dostupné z: https://help.3ds.com/2017/English/DSSIMULIA_Established/SIMULIA_Established_FrontmatterMap/SIMULIA_EstablishedDocSearchOnline.htm?ProductType=DS&Product Name=DSSIMULIA_Established&ContextScope=all
- [17] *Laboratoř biomechaniky člověka* [online]. Praha: FS ČVUT v Praze, 2012 [cit. 2018-07-08]. Dostupné z: <http://www.biomechanika.cz/>

Seznam obrázků

Obrázek 1: Vývoj produkce polymerů od roku 1950 [1]	9
Obrázek 2: Tvar makromolekul [4].....	11
Obrázek 3: Schématické zobrazení semikrystalické struktury [8]	12
Obrázek 4: Přehled vlastností polymerů	13
Obrázek 5: Základní dělení polymerů.....	13
Obrázek 6: Schéma vlastností polymerů.....	13
Obrázek 7: Přehled vlastností polymerů	13
Obrázek 8: Strukturální vzorec NBR [9]	14
Obrázek 9: Zobrazení referenčního a deformovaného stavu [10].....	15
Obrázek 10: Rozdíl při uvažování nestlačitelnosti a bez jejího uvažování [11]	19
Obrázek 11: Schéma zavedení vektoru vnitřních sil [10]	20
Obrázek 12: Napjatost v tělese [10].....	20
Obrázek 13: Biaxiální zatěžovací stroj [17].....	26
Obrázek 14: Referenční konfigurace měření O-kroužku	27
Obrázek 15: Měření O-kroužku	27
Obrázek 16: Data z měření O-kroužku č.:1 - Závislost F na u.....	28
Obrázek 17: Data z měření O-kroužku č.:2 a 3 - Závislost F na u.....	28
Obrázek 18: Uchycení pásku do čelistí	29
Obrázek 19: Měření pásku	29
Obrázek 20: Umístění kontrastních značek.....	29
Obrázek 21: Data z měření pásku č.:1– Závislost F na u.....	30
Obrázek 22: Data z měření pásku č.:2– Závislost F na u.....	30
Obrázek 23: Sklouznutí značky při měření č.:3	31
Obrázek 24: Graf závislosti smluvního napětí na streči (měření pásku).....	33
Obrázek 25: Průběh účelové funkce pro polynomický model	35
Obrázek 26: Proložení naměřených dat polynomickým modelem	36
Obrázek 27: Průběh účelové funkce pro Ogdenův model.....	38
Obrázek 28: Proložení naměřených dat Ogdenovým modelem.....	38
Obrázek 29: Průběh účelové funkce pro model Arruda-Boyce	39
Obrázek 30: Proložení naměřených dat modelem Arruda-Boyce.....	40
Obrázek 31: Síť modelu	41
Obrázek 32: Vybrané elementy a integrační body O-kroužku pro vyhodnocení napětí	42
Obrázek 33: Nastavení pracovního postupu v Isightu	43
Obrázek 34: Optimalizovaná závislost napětí na protažení pro polynomický model	44
Obrázek 35: Optimalizovaná závislost F na u pro polynomický model	45
Obrázek 36: Optimalizovaná závislost F na u pro Ogdenův model.....	46
Obrázek 37: Optimalizovaná závislost napětí na protažení pro Ogdenův model	46
Obrázek 38: Optimalizovaná závislost F na u pro model Arrudy-Boyceové.....	47
Obrázek 39: Optimalizovaná závislost napětí na protažení pro model Arrudy-Boyceové	47
Obrázek 40: Schéma analýzy	48
Obrázek 41: Porovnání modelů a experimentu z analytického přístupu.....	49

Obrázek 42: Porovnání modelů a experimentu z numerické simulace	50
Obrázek 43: Porovnání analytického a numerického přístupu pro Ogdenův model.....	52
Obrázek 44: Porovnání analytického a numerického přístupu pro polynomický model	52
Obrázek 45: Porovnání analytického a numerického přístupu pro model Arrudy-Boyceové.....	53