

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

FAKULTA STROJNÍ

**ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A
MECHATRONIKY**



DIPLOMOVÁ PRÁCE

2018

HANA CAMBELOVÁ

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Cambelová** Jméno: **Hana** Osobní číslo: **408620**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Biomechanika a lékařské přístroje**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Optimalizace porézní struktury vytvořené 3D tiskem titanové slitiny

Název diplomové práce anglicky:

Optimization of 3D printed porous titanium alloy structure

Pokyny pro vypracování:

1. Přehled metod 3D tisku pro vytváření porézních struktur
2. Přehled výpočetních metod pro odhad pevnosti porézní struktury
3. Návrh metody založené na analýze prutové konstrukce
4. Porovnání s analytickým modelem
5. Využití modelu pro určení pevnosti porézní struktury

Seznam doporučené literatury:

1. Lorna J. Gibson, Michael F. Ashby, Cellular Solids_ Structure and Properties (Cambridge Solid State Science Series), Cambridge University Press, 1999.
2. Gibson LJ. Biomechanics of cellular solids. J Biomech. 2005 Mar;38(3):377-99.
3. Zadpoor AA, Hedayati R. Analytical relationships for prediction of the mechanical properties of additively manufactured porous biomaterials. J Biomed Mater Res A. 2016 Dec;104(12):3164-3174.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

prof. RNDr. Matej Daniel, Ph.D., odbor biomechaniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **20.04.2018**

Termín odevzdání diplomové práce: **17.08.2018**

Platnost zadání diplomové práce: _____



prof. RNDr. Matej Daniel, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce



prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomantka bere na vědomí, že je povinna vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

14. 5. 2018

Datum převzetí zadání

Cambelová

Podpis studentky

Anotační list

Jméno autora:	Hana CAMBELOVÁ
Název DP:	Optimalizace porézní struktury vytvořené 3D tiskem titanové slitiny
Anglický název:	Optimization of 3D printed porous titanium alloy structure
Rok:	2018
Obor studia:	Biomechanika a lékařské přístroje
Ústav/Odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Vedoucí:	prof. RNDr. Matěj Daniel, Ph.D.
Konzultant:	-
Bibliografické údaje:	počet stran: 128 počet obrázků: 51 počet tabulek: 8 počet příloh: 1

Anotace

Metody aditivní výroby nám umožňují výrobu trabekulárních struktur. V současnosti se výpočty deformací těchto struktur řeší analyticky nebo pomocí MKP. Analytické metody jsou omezeny na opakující se tvar základní buňky, zatímco MKP výpočty umožňují i řešení nepravidelných struktur. MKP výpočty jsou výpočtově náročné, proto se v této práci zabýváme tvorbou metody založené na přímé metodě tuhosti, která může poskytnout rychlý odhad. Ověřili jsme použití této metody pro výpočet deformací trabekulárních struktur. Pro pravidelnou trojúhelníkovou síť jsme ukázali, že chyba v odhadu modulu pružnosti sítě je řádově do 20% v porovnání s analytickým modelem. Námí navržená metoda je taky vhodná pro výpočet nepravidelné trojúhelníkové sítě.

Klíčová slova

Přímá metoda tuhosti, 3D tisk ve zdravotnictví, porézní struktury, 2D voštiny a jejich deformace

Abstract

Methods of additive manufacturing enable production of trabecular structures. Currently, calculations of deformations of these structures are solved analytically or using FEM. Analytical methods are limited to patterns composed of repeating basic cells, while FEM calculations can be used for irregular structures. The FEM calculations are demanding on computation resources, thus this work deals with creation of a method based on the direct stiffness method that can provide fast approximation of the result. We have verified usage of this method for calculation of deformation of trabecular structures. For regular triangular network we have showed that an inaccuracy in modulus of elasticity is roughly within 20% compared to the analytical model. The method we propose is also suitable for calculation of irregular triangular mesh.

Keywords

Direct stiffness method, 3D print for medical purposes, porous structures, 2D honeycombs and their deformations

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem svojí diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V _____, dne _____

(podpis autora)

Poděkování

Vedoucímu své diplomové práce prof. RNDr. Matějovi Danielovi, Ph.D., bych chtěla poděkovat za odborné vedení mé práce, za čas strávený konzultacemi a za množství cenných rad a připomínek.

Dále bych chtěla poděkovat svým rodičům, kteří mě po celou dobu studia podporovali a dohlíželi na mou psychickou pohodu během zkouškových období. Speciálně bych chtěla poděkovat mamince, která vždy dohlížela, abych před zkouškou měla dostatek spánku a tatínkovi za pomoc s učením na zkoušky z elektrotechnických předmětů.

A nakonec bych chtěla poděkovat svému milovanému snoubenci, za jeho vlídnost, podporu a lásku.

Obsah

Seznam zkratk a symbolů	9
1 Úvod	11
2 Přehled metod 3D tisku používaných ve zdravotnictví	12
2.1 Fused Deposition Modeling (FDM)	12
2.2 Selective Laser Sintering (SLS)	13
2.3 Electron Beam Melting (EBM)	14
2.4 ProMetal 3D Printing	15
2.5 Titanová slitina Ti6Al4V.....	16
3 Trabekulární struktury.....	18
4 Metody výpočtu deformací porézních 2D struktur.....	20
4.1 Analytické metody výpočtu deformací porézních struktur v rovině	20
4.1.1 Analytické řešení rovinné šestiúhelníkové porézní struktury	20
5 Cíl práce.....	29
6 Metody práce	30
6.1 Přímá metoda tuhosti (Direct Stiffness Method)	30
6.1.1 Globální soustava rovnic.....	32
6.1.2 Fáze přímé metody tuhosti	32
6.2 Analytické řešení rovinné trojúhelníkové porézní struktury	44
6.2.1 Jednoosé zatížení rovnostranné trojúhelníkové buňky v rovině	45
6.3 Analytické řešení rovinné kloubově spojené trojúhelníkové porézní struktury ..	53
6.3.1 Zatížení smykem	54
6.3.1 Zatížení tlakem ve směru osy y	63
6.3.2 Zatížení tlakem ve směru osy x.....	71
6.4 Analytické řešení kontrolních úloh	73

6.4.1	Staticky určitá (SU) úloha	74
6.4.2	Staticky neurčitá (SN) úloha	82
7	Implementace přímé metody tuhosti	89
7.1	Kontrolní úlohy	89
7.1.1	Vstupní hodnoty	89
7.1.2	Okrajové podmínky	90
7.1.3	Silové zatížení	90
7.1.4	Globální matice tuhosti soustavy	91
7.1.5	Řešení	92
7.2	Úloha čtvercové 2D sítě s příčkami.....	94
7.3	Úloha pravidelné trojúhelníkové 2D sítě	97
7.3.1	Youngův modul pružnosti ve směru osy y.....	99
7.3.2	Youngův modul pružnosti ve směru osy x.....	100
7.3.3	Modul pružnosti ve smyku	101
7.4	Úloha nepravidelné trojúhelníkové sítě	103
7.4.1	Optimalizace nepravidelné trojúhelníkové sítě.....	104
8	Výsledky.....	107
8.1	Grafické výsledky 2D sítí	110
8.1.1	Pravidelná trojúhelníková síť.....	111
8.1.2	Nepravidelná trojúhelníková síť	113
9	Diskuse	119
10	Závěr	122
	Použitá literatura	123
	Přílohy.....	127
	Příloha A: Úloha 2D mostu.....	127

Seznam zkratek a symbolů

Značka	Jednotka	Název
A	[m ²]	Plocha průřezu, plocha
$A^{(e)}$	[m ²]	Plocha průřezu prutu e
b	[m]	Tloušťka
c	[-]	Relativní hustota
d	[m]	Prodloužení/zkrácení
$d^{(e)}$	[m]	Prodloužení/zkrácení prutu e
DSM	-	Přímá metoda tuhosti (Direct Stiffness Method)
E	[Pa]	Youngův modul pružnosti
E_i^*	[Pa]	Youngův modul pružnosti celé konstrukce ve směru osy i
$E^{(e)}$	[Pa]	Youngův modul pružnosti prutu e
E_s	[Pa]	Youngův modul pružnosti plného materiálu
f	[N]	Globální vektor uzlových sil celé soustavy
\bar{f}	[N]	Lokální vektor uzlových sil celé soustavy
F	[N]	Aplikovaná/zátěžná síla
f^a	[N]	Vektor aplikovaných sil
$f^{(e)}$	[N]	Globální vektor uzlových sil prutu e
$\bar{f}^{(e)}$	[N]	Lokální vektor uzlových sil prutu e
f^r	[N]	Vektor reakčních sil
G	[Pa]	Modul pružnosti ve smyku (vztažen k objemu)
h	[m]	Výška elementárního trojúhelníku
J	[mm ⁴]	Kvadratický moment průřezu
K	[N·m ⁻¹]	Globální matice tuhosti celé konstrukce
\bar{K}	[N·m ⁻¹]	Lokální matice tuhosti celé konstrukce
$K^{(e)}$	[N·m ⁻¹]	Globální matice tuhosti prutu e
$\bar{K}^{(e)}$	[N·m ⁻¹]	Lokální matice tuhosti prutu e
$K_r^{(e)}$	[N·m ⁻¹]	Rozšířená matice tuhosti prutu e
k_s	[N·m ⁻¹]	Tuhost pružiny
K_S	[N·m ⁻¹]	Modul pružnosti ve smyku pro tenkostěnné struktury
K_T	[N·m ⁻¹]	Modul pružnosti v tahu/tlaku pro tenkostěnné struktury
L	[m]	Délka prutu (pružiny)
$L^{(e)}$	[m]	Délka prutu e
M	[N·m]	Moment
MKP	-	Metoda konečných prvků
$N^{(e)}$	[N]	Vnitřní/normálová síla prutu e
N_s	[N·m ⁻¹]	Smyková síla působící na jednotkovou délku
r	[m]	Poloměr kruhového průřezu
R_{Ax}	[N]	Reakční síla působící na kloub A rovnoběžně s osou x

S	[N]	Slepá síla
t	[m]	Šířka prutu
T	[1]	Transformační matice pole posunutí
$T^{(e)}$	[1]	Transformační matice pole posunutí prutu e
$(T^{(e)})^T$	[1]	Transformační matice uzlových sil prutu e
T^T	[1]	Transformační matice uzlových sil
u	[m]	Globální vektor uzlových posuvů celé soustavy
\bar{u}	[m]	Lokální vektor uzlových posuvů celé soustavy
U	[J]	Deformační energie
$u^{(e)}$	[m]	Globální vektor uzlových posuvů prutu e
$\bar{u}^{(e)}$	[m]	Lokální vektor uzlových posuvů prutu e
V	[m ³]	Nezdeformovaný objem
w_a	[N·m ⁻¹]	Deformační energie na jednotkovou plochu
γ	[°]	Zkos
δ	[m]	Posuv
$\Delta l^{(e)}$	[N]	Prodloužení/zkrácení prutu e
Δw_a	[N·m ⁻¹]	Změna hustoty deformační energie vztažená na plochu
Δw_v	[N·m ⁻²]	Změna hustoty deformační energie vztažená k objemu
ΔW	[N·m]	Změna deformační energie
ΔW_s	[N·m]	Změna deformační energie pružiny
ε	[-]	Deformace (poměrné prodloužení/zkrácení)
$\varphi^{(e)}$	[°]	Úhel natočení prutu e od osy x proti směru hodinových ručiček

1 Úvod

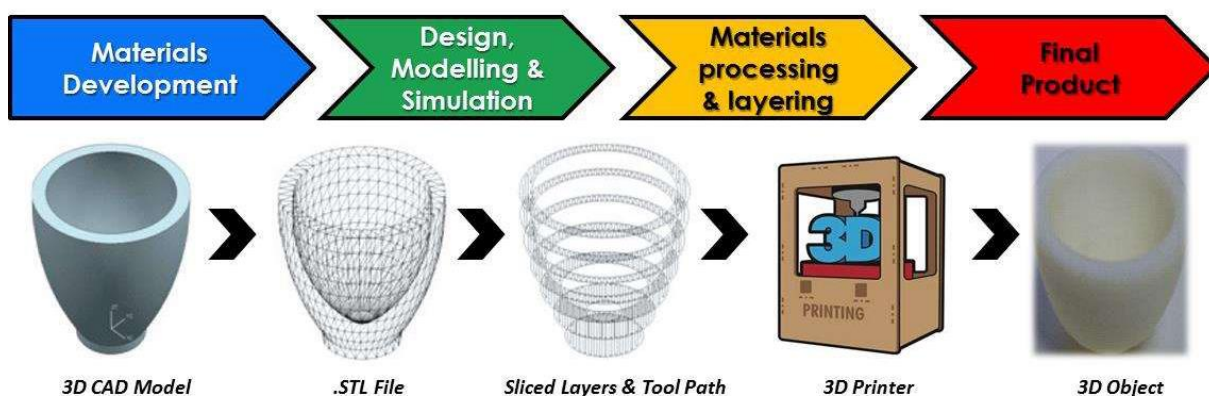
V dnešní době, kdy se mladí lidé zaměřují především na zážitky, cestování nebo kariéru zbývá jen málo času pro založení rodiny. Přičemž počet dětí v rodinách stále klesá v porovnání s minulostí. Proto nám populace stárne a je potřeba stále více implantátů, které seniorům prodlouží aktivní způsob života. Technologie prochází neustálým vývojem. V medicíně je velice důležité rychlé zhotovení implantátů. Proto v tomto odvětví nastoupil 3D tisk jako revoluční technologie ve tvorbě zdravotnických implantátů a pomůcek. Díky němu můžeme vyrábět individualizované implantáty složitých geometrických tvarů na míru v rychlých časech. V současnosti je 3D tisk v implantologii již hojně využíván. V poslední době se objevuje trend vytvářet implantáty s trabekulární strukturou, která by nahradila reálnou strukturu kostní spongiózy. Přičemž veškeré trabekulární struktury v lidském těle jsou nepravidelné. V současné době se často dává přednost vytváření pravidelných struktur z důvodu snadnějšího výpočtu. Vytvořit trabekulární nepravidelnou strukturu pomocí 3D tisku není náročné. Ovšem vytvořit ji tak, aby byla ideální, je již komplikované, protože nám chybí simulační nástroje, které by optimalizovaly její strukturu, a proto jsme v této oblasti odkázáni na experimentální data. Proto vznikla poptávka po optimalizaci a výpočetních metodách nepravidelných porézních struktur.

Na začátku této práce je představen přehled metod 3D tisku využívaných ve zdravotnictví. Dále se tato práce zabývá výpočetními metodami deformací porézních struktur v rovině (sítí). Cílem práce je navrhnout metodu výpočtu pro pravidelné i nepravidelné sítě. V závěru se práce zabývá optimalizací nepravidelné sítě s využitím přímé metody tuhosti (DSM).

2 Přehled metod 3D tisku používaných ve zdravotnictví

3D tisk patří mezi aditivní metody výroby. Pro výrobu porézních struktur je 3D tisk často volenou metodou. Zhotovení výrobku touto metodou můžeme rozdělit do jednotlivých kroků, které si popíšeme následovně. Prvním krokem je zhotovení CAD modelu, který je vstupem. Tento model je softwarem tiskárny rozčleněn na tenké vrstvy, které jsou postupně „tisknuty“, viz obr. 1. [1, 2]

Při tvorbě geometricky složitých modelů je 3D tisk rychlejší metodou výroby než konvenční obrábění. Díky tomu našel 3D tisk uplatnění ve zdravotnictví, při tvorbě individualizovaných implantátů. 3D tisk se hojně používá také v leteckém, elektrotechnickém a automobilovém průmyslu, pro výrobu prototypů, ale i finálních součástí. V následujícím textu si ukážeme metody 3D tisku používané při výrobě implantátů. [1, 2]

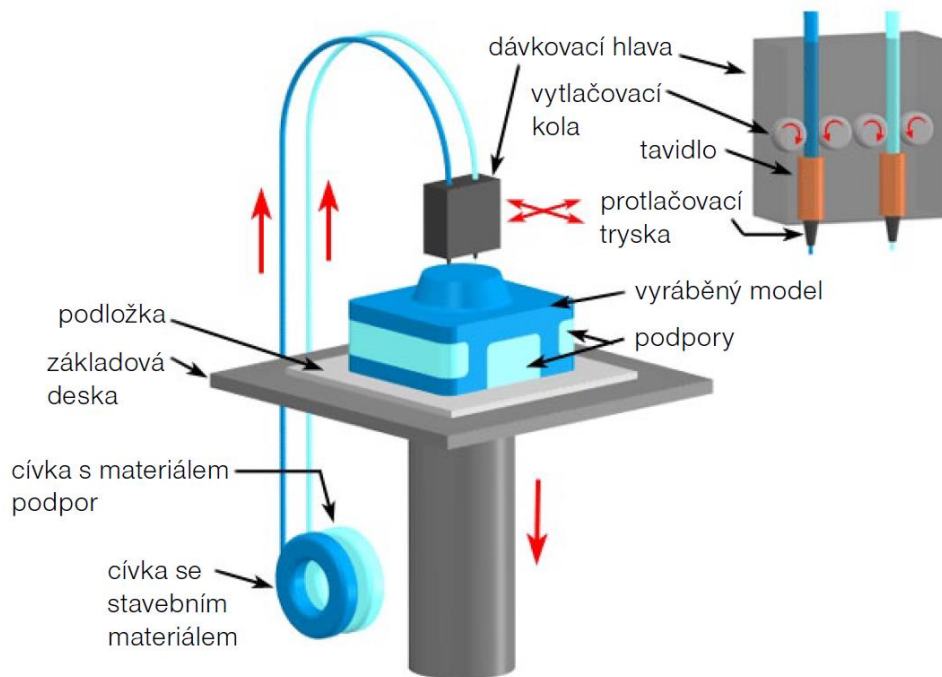


Obrázek 1 Jednotlivé kroky zhotovení modelu 3D tiskem [2]

2.1 Fused Deposition Modeling (FDM)

Tato metoda je jednou z nejrozšířenějších metod 3D tisku. Vlákno je odvíjeno z cívky a dávkováno do dávkovací hlavy, kde se vlákno taví a již natavené je protlačeno protlačovací tryskou pomocí vytlačovacích kol. Po vytlačení z trysky je natavené nanášeno ve vrstvách na podložku, kde po nanesení okamžitě chladne, viz obr. 2. Kromě cívky se stavebním materiálem může tiskárna založená na metodě FDM mít i cívku s materiálem pro stavbu podpor. Stavba podpor není vždy nutností. Záleží na geometrii dílu. Podpory mohou být i ze stejného materiálu, tudíž není třeba sekundární cívka pro stavbu podpor. Záleží na vstupních požadavcích. Po dokončení tisku se od modelu oddělí podpory. Tyto

podpory se oddělují mechanicky nebo chemicky. Materiál vláken je termoplastický. Nejčastěji se používá ABS, polykarbonát, elastomer, polyamid nebo PPSF. [2, 1]



Obrázek 2 Princip metody FDM [1]

2.2 Selective Laser Sintering (SLS)

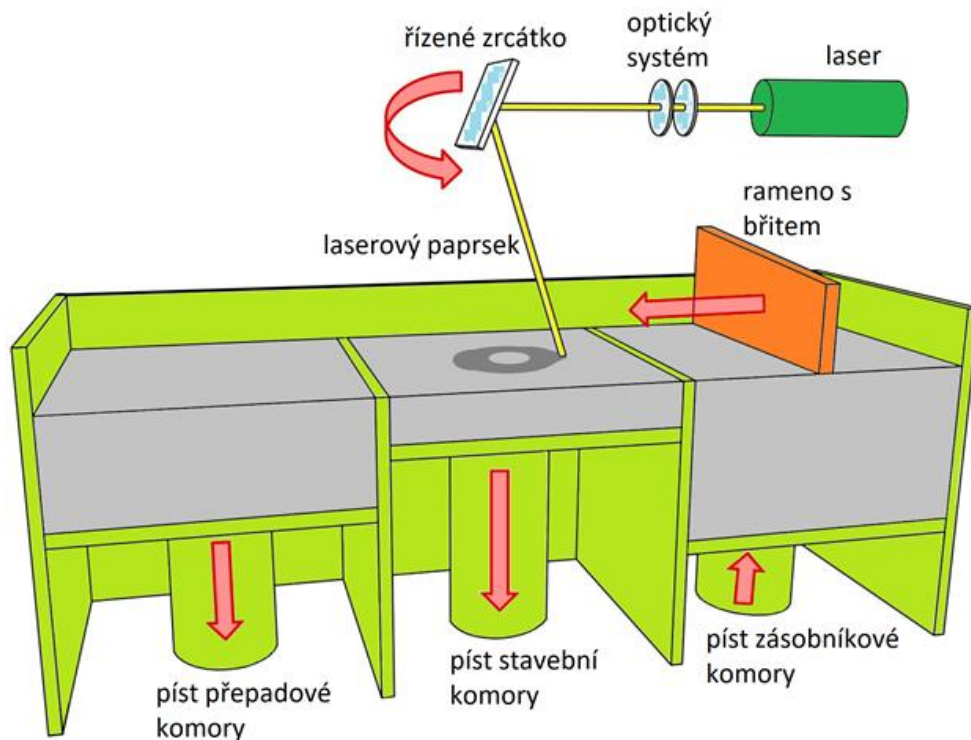
Selective Laser Sintering - SLS je technologií 3D tisku, která umožňuje zhotovení výrobků náročných geometrických tvarů bez nutnosti obrábění. [1, 2, 3]

Stejně jako pro jiné metody 3D tisku je potřeba mít CAD model. Ten je v průběhu výroby rozdělen na jednotlivé vrstvy, které jsou postupně tištěny následujícím způsobem. Na dno pracovní komory je nanášena rovnoměrná vrstva jemného prášku. Tato vrstva prášku je spečena laserem jen v místech, které odpovídají tvaru požadovaného výrobku v dané vrstvě. Poté se proces opakuje – je nanášena další vrstva prášku a opět laser speče odpovídající místa této vrstvy. Nespečená místa ve vrstvách prášku slouží jako podpora. Poté co spečeme poslední vrstvu, navrstvíme navrch ještě pár vrstev prášku, aby docházelo k rovnoměrnému chladnutí výrobku. Po vychladnutí můžeme hotový výrobek vyjmout a oklepat od nespečeného kovového prášku. Tento nespečený prášek, který zbyl v nádobě, použijeme pro další tištění. [1, 2, 3]

Tato metoda používá jako stavební materiál ve formě jemného prášku polyamidy, nerezovou ocel, bronz, slitiny CoCrMo, titanové slitiny, slévárenský písek nebo keramiku. Dle materiálu, ze kterého je spékáný prášek můžeme tuto technologii rozdělit do těchto kategorií [1]:

- Laser Sintering - Plastic
- Laser Sintering - Metal
- Laser Sintering - Foundry Sand
- Laser Sintering - Ceramic

Každá z těchto kategorií vyžaduje svůj vlastní přístroj na zhotovování modelů (tisknutí), protože vytvrzení modelů z různých materiálů vyžaduje různé podmínky. [1, 2, 3]



Obrázek 3 Princip metody SLS [4]

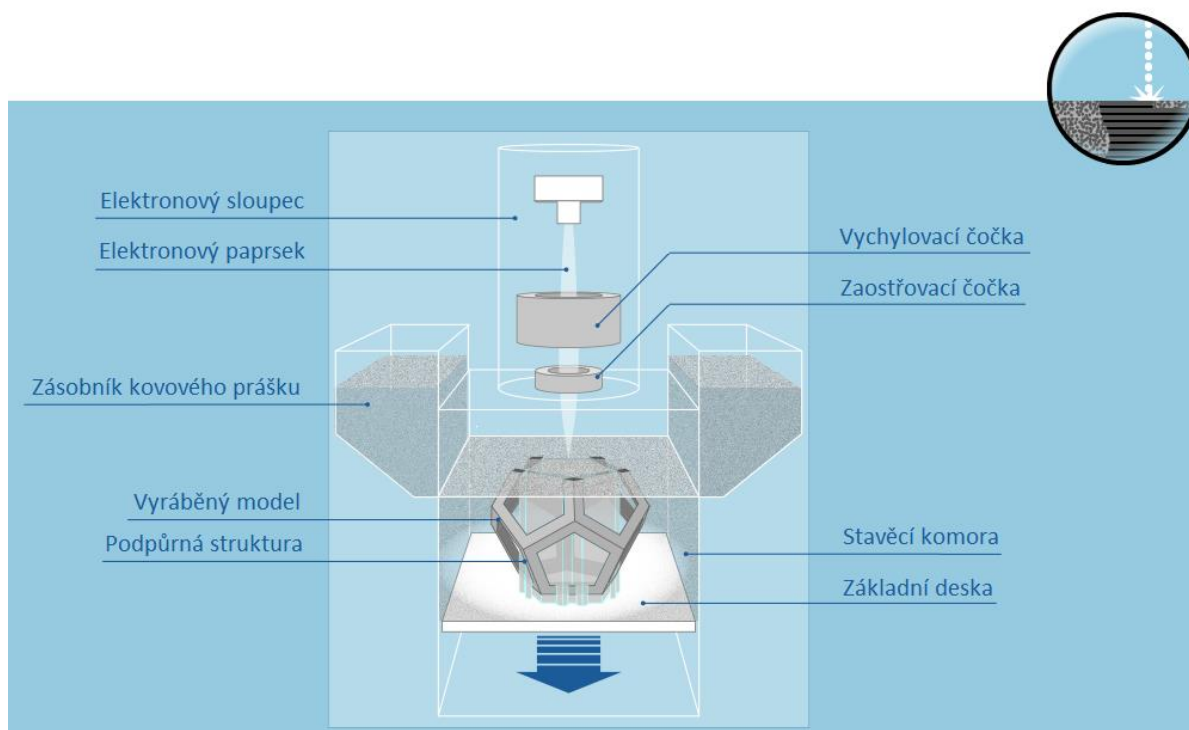
2.3 Electron Beam Melting (EBM)

Tato metoda pracuje analogicky jako metoda tisku Metal Laser Sintering s rozdílem, že místo natavování prášku laserem natavuje kovový prášek elektronovým paprskem. Vyzařované elektrony o vysoké kinetické energii narážejí do kovového prášku.

Při nárazu se kinetická energie přemění na tepelnou, což způsobuje tavení kovového prášku. Díly jsou tisknuty v tlakové komoře s vakuem při vysokých teplotách. Tím se eliminuje vnitřní prnutí a díky vakuu nedochází k oxidačnímu materiálu, ztrátě energie a vychylování elektronového paprsku. [1, 2]

Touto metodou můžeme zpracovávat nástrojové oceli, legované oceli, titan a jeho slitiny, hliník a jeho slitiny nebo slitiny kobalt-chromu. [1, 2]

Kvalita zhotovených výrobků touto metodou dosahuje stejných hodnot jako výrobky zhotovené konvenčními metodami. Oproti laserové technologii dosahujeme touto metodou kratších výrobních časů. [1, 2]



Obrázek 4 Princip metody EBM [5]

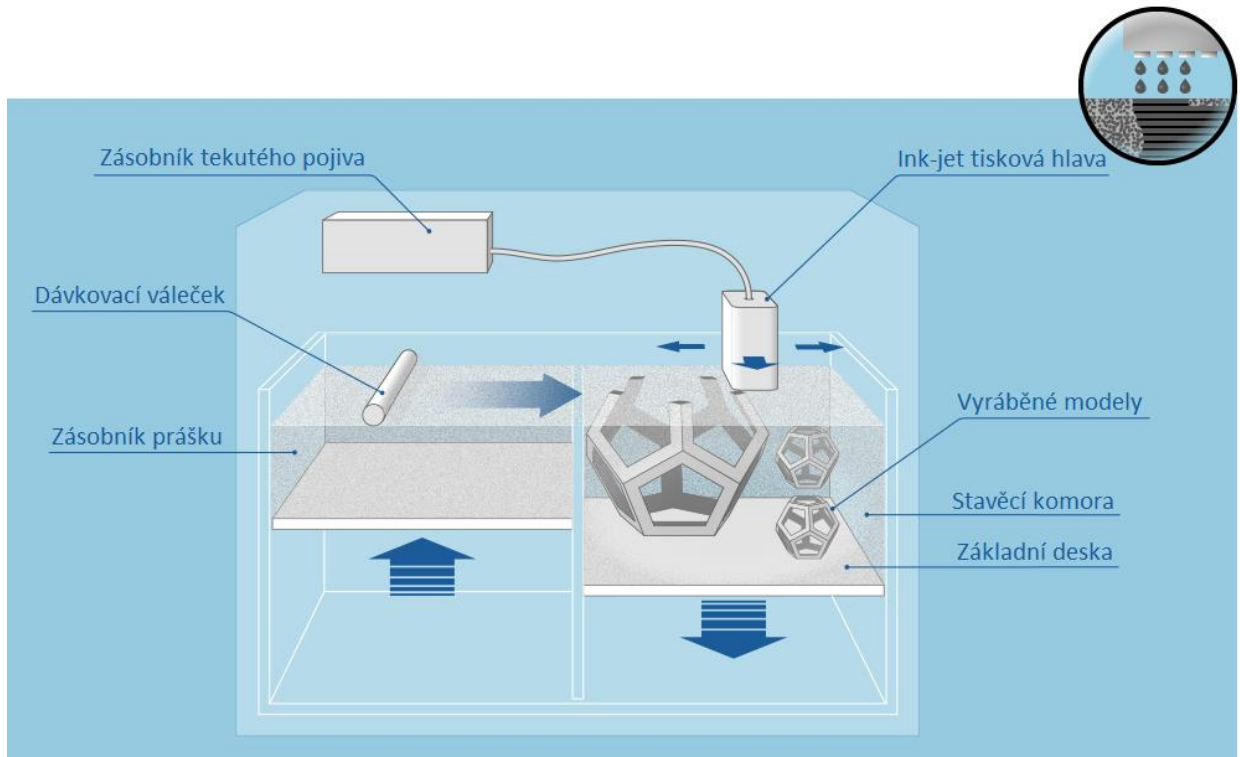
2.4 ProMetal 3D Printing

Tato technologie stejně jako předchozí metody pracuje na principu výroby modelu po vrstvách. Jedná se o inkoustový 3D tisk, který používá principu ink-jet počítačových tiskáren a tiskových hlav s vysokým rozlišením. [1, 2, 6, 7]

Tisková hlava nanáší tekuté pojivo na jednotlivé vrstvy ultrajemných kovových, keramických, cermentových nebo kompozitních prášků. Tím je prášek slepen. Slepené

vrstvy prášku vytváří požadovaný model dle CAD dat. Ten je pak dále tepelně zpracován. Při tepelném zpracování dochází k vyhoření pojiva a slnutí kovového prášku na porézní strukturu, která je zpevněna pronikáním kovu. [1, 2, 6, 7]

Zhotovený výrobek dosahuje vysoké pevnosti a téměř stoprocentní teoretické hustoty. [1, 2, 6, 7]



Obrázek 5 Princip metody ProMetal [7]

2.5 Titanová slitina Ti6Al4V

Tato slitina je také označována jako Titan Grade 5 a je hojně využívaným materiálem pro 3D tisk. Je nejrozšířenější titanovou slitinou. Tvoří přibližně 70 % všech titanových slitin. Používá se především v letectví, kosmickém průmyslu, loďařství a v medicíně. Procentuální zastoupení prvků v této slitině můžeme nalézt v tabulce 1. [8]

Ti	88 – 91 %
Al	5,50 – 6,76 %
V	3,50 – 4,50 %
Fe	max. 0,40 %

O	max. 0,20 %
C	max. 0,08 %
N	max. 0,05 %
H	max. 0,015 %

Tabulka 1 Procentuální zastoupení prvků titanové slitiny Ti6Al4V [8, 9]

V tabulce 2 jsou uvedené některé fyzikální vlastnosti titanové slitiny Ti6Al4V, přičemž první dvě byly nezbytné pro analytické a numerické výpočty.

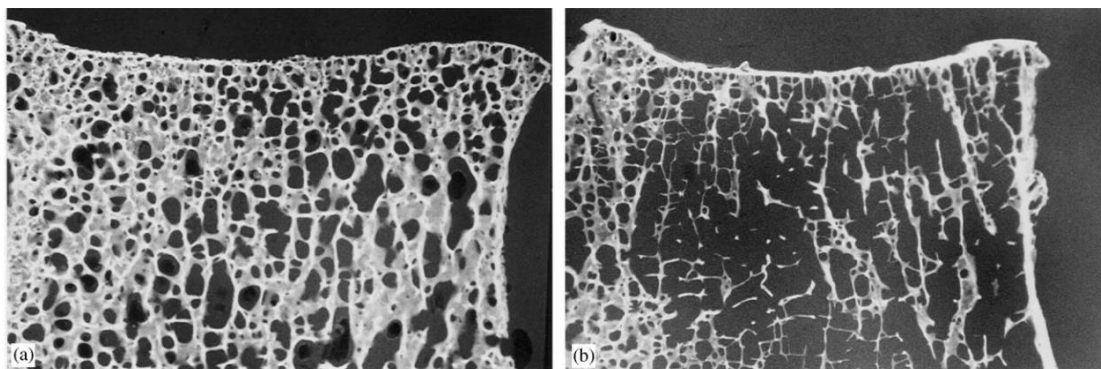
Mez pevnosti	1000 MPa
Youngův modul pružnosti	114 GPa
Hustota	4,43 kg/dm ³
Poissonovo číslo	0,30 – 0,33
Teplota tání	1650 °C

Tabulka 2 Vybrané fyzikální vlastnosti titanové slitiny Ti6Al4V [8, 10]

Všechny výpočty, které budou provedeny v následujících kapitolách, budou modelovány pro tuto slitinu. Tato slitina byla vybrána pro svou rozšířenost v implantologii a pro svou vysokou biokompatibilitu a korozivzdornost. [9]

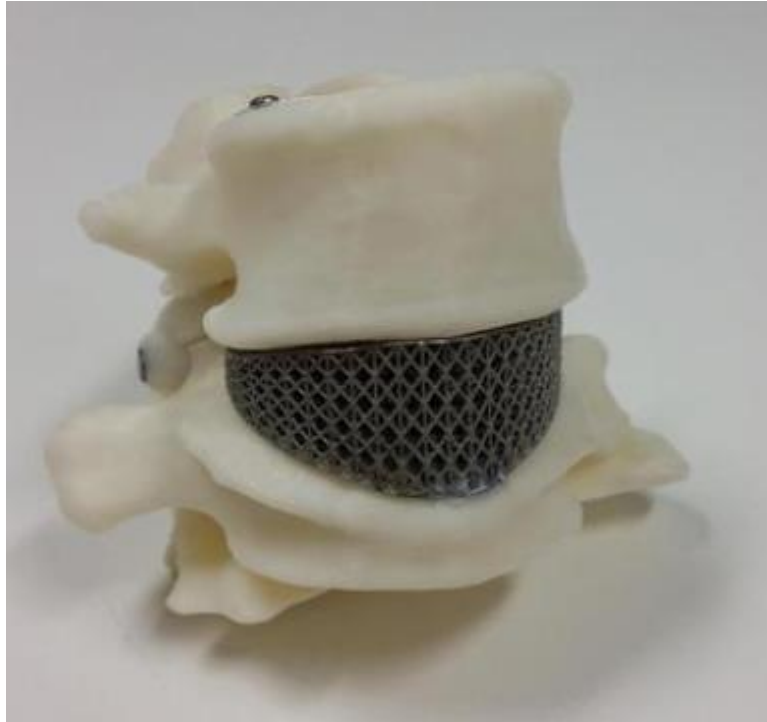
3 Trabekulární struktury

Trabekulární struktury jsou v přírodě velice rozšířené. A to jak pravidelného, tak nepravidelného uspořádání. Nacházejí se například v listech a stoncích rostlin, nebo také v kostech, rozích a ostnech živočichů. Nás zajímají především trabekulární struktury lidských kostí. Hustota kostní tkáně s přibývajícím věkem klesá, viz obr. 6, kde je znázorněna kostní tkáň bederního obratle u ženy s normální kostní tkání vlevo (stáří ženy 55 let) a vpravo kostní tkáň bederního obratle ženy trpící osteoporózou vyvolanou vysokým věkem (stáří ženy 86 let). Proto u seniorů vznikla potřeba po implantátech nahrazujících postiženou tkáň. Tato potřeba se nemusí týkat jen seniorů, ale například i sportovců, kteří příliš zatěžují své tkáně, čímž může docházet k jejich dřívějšímu poškození. Nebo jedinců s rozličnými poruchami ať už vrozenými nebo v důsledku zranění, nehledě na věk. [11]



Obrázek 6 Řez bederním obratlem, vlevo žena stará 55 let s normální kostí, vpravo žena stará 86 let trpící osteoporózou [11]

Implantáty se v dnešní době snaží co nejvíce napodobit původní tkáň. Nejdříve se začalo s odlehčováním materiálu pomocí pravidelné trabekulární struktury. Implantáty s porézní strukturou mají výhodu nejen v odlehčení materiálu, ale také se lépe začleňují do lidského těla. Lidská tkáň může porézní strukturou prorůstat a lépe ji upevnit v těle. Postupem času se začaly vyrábět i implantáty s nepravidelnou trabekulární strukturou. Proto vznikla poptávka po výpočetních metodách takovýchto nepravidelných struktur. Metody výpočtu porézních struktur budou představeny v následujících kapitolách.



Obrázek 7 Ukázka páteřního implantátu s pravidelnou trabekulární strukturou vytvořenou 3D tiskem [12]

4 Metody výpočtu deformací porézních 2D struktur

Porézní 2D struktury můžeme počítat buď analyticky, nebo numericky. Analytické metody výpočtu můžeme rozdělit na energetické a silové. Tyto metody si blíže ukážeme dále.

Numericky se dají porézní struktury řešit pomocí softwarů založených na metodě konečných prvků (MKP). Kdy je model rozdělen na konečné množství prvků s jednoduchou geometrií, na kterých je již možné spočítat požadované veličiny. Výsledky výpočtu jednoho prvku ovlivní vstupní hodnoty sousedních prvků. Tak je postupně propočítán celý model. [13]

Vymodelovat pravidelné struktury je v těchto softwarech jednoduché. Ovšem modelovat nepravidelnou trabekulární strukturu by bylo časově náročné. Metoda konečných prvků zobrazuje jen stav vymodelované struktury bez návrhu optimalizace.

Oproti tomu přímá metoda tuhosti, se kterou se dají rychle počítat deformace pravidelných i nepravidelných struktur je vhodná pro návrhy optimalizace. Jedná se o numerickou metodu výpočtu prutových konstrukcí, která je založena na předpokladu, že veškerá spojení jsou považována za ideální kloubové spoje. A dále, že pruty konstrukce jsou zatíženy jen tahem/tlakem. Tato metoda bude blíže nastíněna v kapitole metod práce. [14]

4.1 Analytické metody výpočtu deformací porézních struktur v rovině

V této kapitole se budeme zabývat analytickým řešením tuhosti porézních dvoudimenzionálních struktur. Analýzu provedeme vždy pomocí zkoumání jedné elementární buňky, kterou z pravidelné struktury vyjmeme. [11, 15]

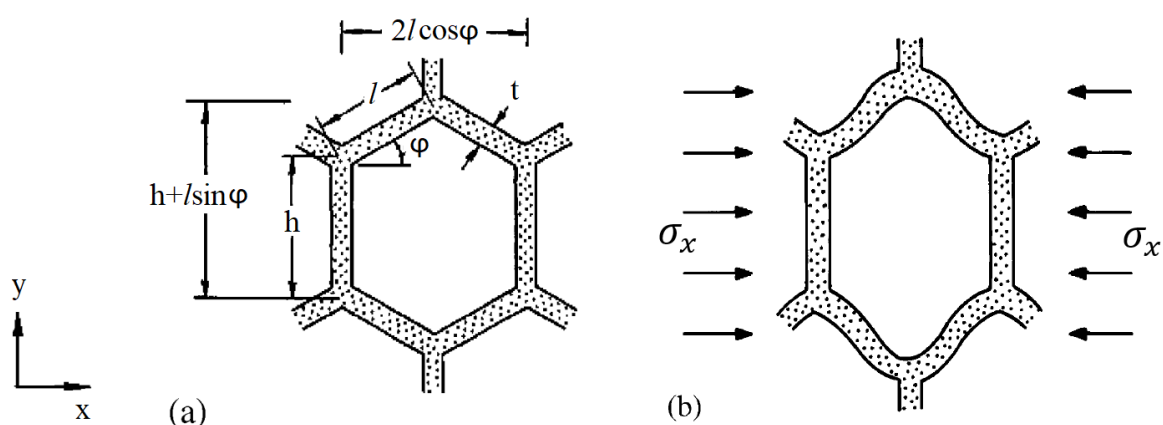
4.1.1 Analytické řešení rovinné šestiúhelníkové porézní struktury

Analytické řešení, které je popsáno v této kapitole popsala ve svých pracích Lorna Gibson [11, 15]. Podle její práce provedeme analogicky v dalších sekcích řešení pravidelné trojúhelníkové struktury.

4.1.1.1 Jednoosé zatížení šestiúhelníkové buňky v rovině

V této podkapitole byla zkoumána dvojrozměrná porézní struktura, typu včelí plástve, při rovinném zatížení. Z této struktury byla vyjmuta jedna buňka (jeden šestiúhelník). Tato buňka byla zatížena a její deformace byla podrobena analytickému zkoumání. [11, 15]

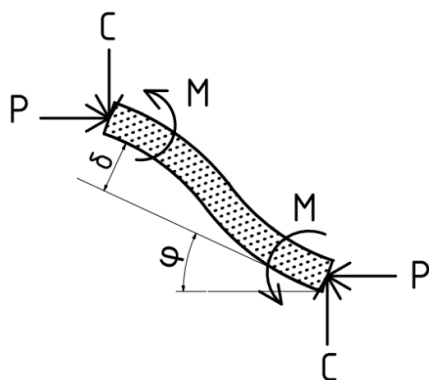
4.1.1.1.1 Zatížení ve směru osy x



Obrázek 8 (a) nezdeformovaná buňka s rozměry, (b) lineární elastická deformace buňky ve směru osy x [11, 15]

Napětí σ_x , působící ve směru osy x je vyvoláno silou P , která působí na roh buňky. Velikost této síly vyjadřuje vztah [11]:

$$P = \sigma_x (h + l \sin \varphi) b \quad (4.1)$$



Obrázek 9 Vyjmutý element lineárně elasticky zdeformované struktury, překresleno dle [15]

Pro výpočet posuvu δ , který je znázorněn na obr. 9 použijeme diferenciální rovnici průhybové čáry [16, 17, 18, 19]:

$$\frac{d^2 \delta(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E_s(x) \cdot J(x)} \quad (4.2)$$

Síla C , znázorněná na obr. 9, je nulová, dle [15]. Do rovnice (4.2) dosadíme za moment [15]:

$$M\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right) = -\frac{P \sin \varphi}{2} \cdot \frac{x}{\cos \varphi} \quad (4.3)$$

A dostaneme:

$$\frac{d^2 \delta\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)}{d\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)^2} = \frac{\frac{P \sin \varphi}{2} \cdot \left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)}{E_s\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right) \cdot J\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)} \quad (4.4)$$

Protože Youngův modul pružnosti $E\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)$ a kvadratický moment průřezu $J\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)$ jsou po celé délce libovolného prutu z konstrukce konstantní, přepíšeme vztah (4.4) tak, že E a J již nebudou funkcemi $\frac{x}{\cos \varphi}$:

$$\frac{d^2 \delta\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)}{d\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)^2} = \frac{Px \sin \varphi}{2E_s J \cos \varphi} \quad (4.5)$$

Abychom získali vztah pro posuv $\delta\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)$, tak musíme diferenciální rovnici (4.5) zintegrovat:

$$\iint d^2 \delta\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right) = \iint \frac{Px \sin \varphi}{2E_s J \cos \varphi} d\left(\frac{x}{\cos \varphi}\right)^2 \quad (4.6)$$

Po integraci rovnice (4.6) dostáváme:

$$\delta\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right) + C_1 = \frac{P \sin(\varphi) \left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^3}{12E_s J} + C_2 \left(\frac{x}{\cos\varphi}\right) + C_3 \quad (4.7)$$

Konstanty C_1 a C_3 sloučíme do jedné konstanty C_4 :

$$\delta\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right) = \frac{P \sin(\varphi) \left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^3}{12E_s J \cos^3\varphi} + C_2 \frac{x}{\cos\varphi} + C_4 \quad (4.8)$$

Do rovnice (4.8) dosadíme okrajovou podmínku, která říká, že pro $\frac{x}{\cos\varphi} = 0$ je posuv $\delta\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)$ nulový:

$$\delta(0) = 0 = \frac{P \sin(\varphi) \cdot 0^3}{12E_s J} + C_2 \cdot 0 + C_4 \quad (4.9)$$

Ze vztahu (4.9) vidíme, že konstanta C_4 je nulová:

$$C_4 = 0 \quad (4.10)$$

Rovnici (4.8) zderivujeme, abychom dostali natočení prutu $\varphi\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)$:

$$\delta'\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right) = \frac{P \sin(\varphi) x^2}{4E_s J \cos^2\varphi} + C_2 \quad (4.11)$$

Abychom se zbavili zbylé konstanty C_2 dosadíme do vztahu (4.11) okrajovou podmínku, která říká, že natočení $\varphi\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)$ v místě $\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right) = 0$ je nulové:

$$\varphi(0) = 0 = \frac{P \sin(\varphi) \cdot 0^2}{4E_s J} + C_2 \quad (4.12)$$

Ze vztahu (4.12) vidíme, že poslední zbylá konstanta C_2 je rovněž nulová:

$$C_2 = 0 \quad (4.13)$$

Do rovnice posuvu (4.8) dosadíme vztahy nulových konstant (4.10) a (4.13) a dostaneme vztah pro posuv osvobozený od dvou členů obsahujících konstanty:

$$\delta \left(\frac{x}{\cos \varphi} \right) = \frac{P \sin(\varphi) x^3}{12 E_s J \cos^3 \varphi} \quad (4.14)$$

Pro $y = l \cdot \sin \varphi$ dostáváme posuv [11]:

$$\delta = \frac{P L^3 \sin \varphi}{12 E_s J} \quad (4.15)$$

Kde kvadratický moment průřezu bude pro naší plástev, jejíž průřez je obdélník o tloušťce b a šířce t [11]:

$$J = \frac{b t^3}{12} \quad (4.16)$$

4.1.1.1.1 Vlastnosti ve směru osy x

Ze získaného vztahu (4.15) dostaneme vztah pro deformaci ve směru osy x [11]:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta \sin \varphi}{L \cos \varphi} = \frac{P L^3 \sin^2 \varphi}{12 E_s J L \cos \varphi} \quad (4.17)$$

Do této rovnice dosadíme za sílu P vztah (4.1) a získáme výsledný vztah pro výpočet deformace ve směru osy x :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x (h + L \sin \varphi) b L^2 \sin^2 \varphi}{12 E_s J \cos \varphi} \quad (4.18)$$

Když už máme spočtenou deformaci, můžeme dle Hookova zákona spočítat i Youngův modul pružnosti [17, 18]:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4.19)$$

Výsledný Youngův modul pružnosti porézní struktury budeme pro přehlednost značit v horním indexu hvězdičkou. Proto vztah (4.19) přepíšeme do tvaru [15]:

$$E_x^* = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad (4.20)$$

Do této rovnice dosadíme vztah pro výpočet deformace (4.18) a dostaneme vztah vyjadřující Youngův modul pružnosti porézní šestiúhelníkové struktury ve směru osy x [15]:

$$E_x^* = \frac{12 E_s J \cos \varphi}{(h + L \sin \varphi) b L^2 \sin^2 \varphi} \quad (4.21)$$

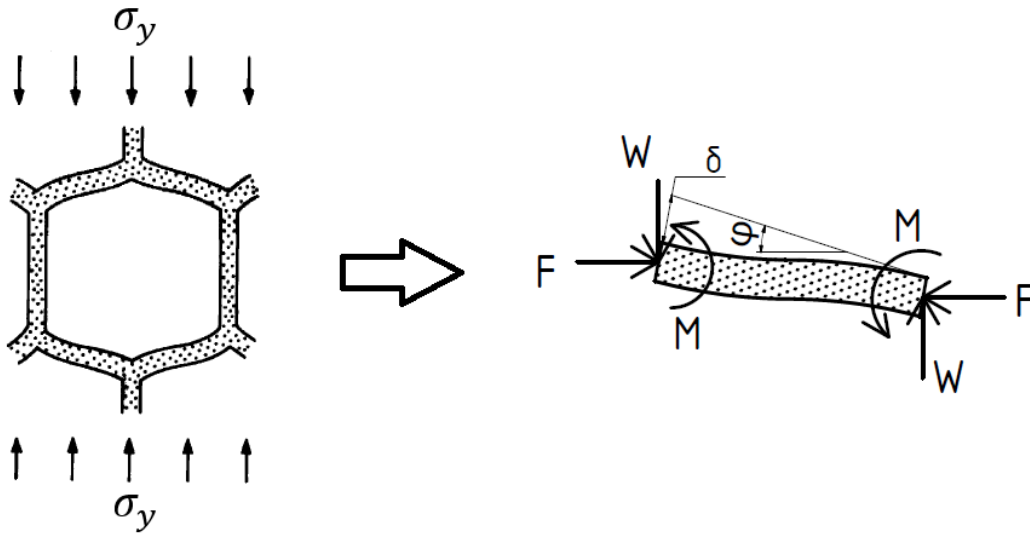
Do této rovnice dosadíme za kvadratický moment průřezu J vztah (4.16) a dostaneme výsledný vztah vyjadřující Youngův modul pružnosti porézní šestiúhelníkové struktury ve směru osy x [11, 15]:

$$E_x^* = \left(\frac{t}{L}\right)^3 \frac{E_s \cos \varphi}{\left(\frac{h}{L} + \sin \varphi\right) \sin^2 \varphi} \quad (4.22)$$

Kde t , h a l jsou rozměry šestiúhelníkové buňky, viz obr. 8 (a), E_s je Youngův modul pružnosti pevných stěn sítě a φ je úhel, který svírá šikmá stěna buňky s osou x . [11, 15]

4.1.1.1.2 Zatížení ve směru osy y

V této podkapitole se budeme věnovat zatížení šestiúhelníkové buňky jednoosou napjatostí ve směru osy y .



Obrázek 10 Vlevo lineární elastická deformace buňky ve směru osy y [11, 15], vpravo vyjmutý element z této buňky, překresleno dle [15]

Síla F , viz obr. 10, bude nulová, dle [15]. Všechny vztahy pro směr y budeme tvořit analogicky, jako jsme již tvořili pro směr x . Nejdříve si vyjádříme sílu W pomocí napětí [15]:

$$W = \sigma_y b l \cos \varphi \quad (4.23)$$

Pro výpočet posuvu δ , který je znázorněn na obr. 10, použijeme opět diferenciální rovnici průhybové čáry (4.2) ve tvaru:

$$\frac{d^2 \delta \left(\frac{y}{\sin \varphi} \right)}{d \left(\frac{y}{\sin \varphi} \right)^2} = - \frac{M \left(\frac{y}{\sin \varphi} \right)}{E_s \left(\frac{y}{\sin \varphi} \right) \cdot J \left(\frac{y}{\sin \varphi} \right)} \quad (4.24)$$

Do rovnice (4.24) dosadíme za moment [15]:

$$M \left(\frac{y}{\sin \varphi} \right) = - \frac{W \cos \varphi}{2} \cdot \frac{y}{\sin \varphi} \quad (4.25)$$

Provedeme stejný postup integrace jako v předchozí podkapitole, který je totožný a vyjde nám vztah pro výpočet posuvu δ [15]:

$$\delta \left(\frac{y}{\sin \varphi} \right) = \frac{W \cos(\varphi) y^3}{12 E_s J \sin^3 \varphi} \quad (4.26)$$

Pro $y = L \cdot \sin \varphi$ dostáváme posuv [15]:

$$\delta = \frac{W \cos(\varphi) L^3}{12 E_s J} \quad (4.27)$$

4.1.1.1.2.1 Vlastnosti ve směru osy y

Ze získaného vztahu (4.27) dostaneme vztah pro deformaci ve směru osy y [15]:

$$\varepsilon_y = \frac{\delta \cos \varphi}{h + l \sin \varphi} = \frac{W \cos^2(\varphi) L^3}{12 E_s J (h + l \sin \varphi)} \quad (4.28)$$

Do této rovnice dosadíme za sílu W vztah (4.23) [15]:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y b \cos^3(\varphi) L^4}{12 E_s J (h + l \sin \varphi)} \quad (4.29)$$

Youngův modul pružnosti porézni struktury ve směru osy y pak bude [15]:

$$E_y^* = \frac{12 E_s J (h + l \sin \varphi)}{b \cos^3(\varphi) L^4} \quad (4.30)$$

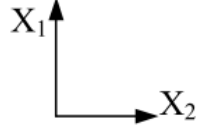



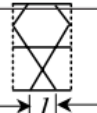

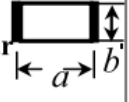
Do této rovnice dosadíme za kvadratický moment průřezu J vztah (4.16) a dostaneme výsledný vztah vyjadřující Youngův modul pružnosti porézni šestiúhelníkové struktury ve směru osy y [15]:

$$E_y^* = \left(\frac{t^3}{L^3} \right) \frac{E_s \left(\frac{h}{L} + \sin \varphi \right)}{\cos^3 \varphi} \quad (4.31)$$

Což je pro rovnostranný šestiúhelník stejný výsledek Youngova modulu pružnosti jako výsledný Youngův modul pružnosti ve směru osy x .

Lorna Gybson [11, 15] ve svých pracích zanedbala vliv tlakových a smykových složek působících na výše uvedenou šestiúhelníkovou strukturu, protože oproti ohybovým složkám mají zanedbatelný vliv. [11, 15]

Pomocí klasické nosníkové teorie mohou být spočteny různé sítě pravidelných tvarů vystavené jednoosé napjatosti, nebo smykovému napětí. Přehled vzorců pro výpočet modulů pružnosti pro různé tvary sítí jsou uvedeny v tabulce 3. Vzorce jsou platné pro obdélníkový průřez příček.

	Relative density $c = \rho^* / \rho_s$	E_1^* / E_s or E_2^* / E_s	G_{12}^* / E_s
Square Cell 	$2 t/l$	$0.5 c$	$0.0625 c^3$
Hexagonal Cell 	$(2/\sqrt{3}) t/l$	$1.50 c^3$	$0.375 c^3$
Triangular Cell 	$2\sqrt{3} t/l$	$\frac{c}{3}$	$0.125 c$
Kagome Cell 	$\sqrt{3} t/l$	$\frac{c}{3}$	$0.125 c$
Diamond Cell 	$(5/\sqrt{3}) t/l$	$0.4 c$ $0.2 c$	$0.15 c$
Rectangular Cell 	$\frac{at_2 + bt_1}{ab}$	t_1 / a t_2 / b	$\frac{t_1^3 t_2^3}{ab(at_1^3 + bt_2^3)}$

Tabulka 3 Přehled analytických vzorců pro výpočty pravidelných porézních struktur pro obdélníkový průřez příček [20]

Tabulka 3 pracuje s veličinou c nazývanou relativní hustota. Jedná se o podíl hustoty porézní struktury a hustoty pevných částí struktury. Vypočítává se z geometrie. A je zde dána do přímé souvislosti s výpočtem modulů pružnosti. [11]

5 Cíl práce

Ve zdravotnictví vznikla poptávka po implantátech s trabekulární strukturou vytvořenou 3D tiskem. Proto vznikla i poptávka po metodách výpočtu deformací takovýchto struktur. Dosavadní metody analytického výpočtu deformací porézních struktur uvažují jen pravidelnou strukturu. Na rozdíl od toho pomocí přímé metody tuhosti můžeme počítat i deformace struktur nepravidelného uspořádání. Protože jsou okrajové podmínky těchto metod odlišné, nevíme, na kolik se tyto metody liší. Proto je cílem práce navrhnout metodu založenou na přímé metodě tuhosti, která by řešila struktury libovolného uspořádání a srovnat tuto metodu s analytickým řešením.

6 Metody práce

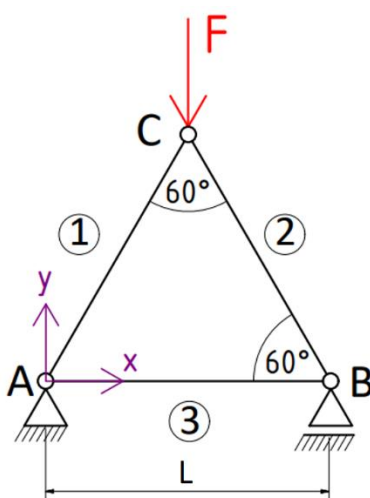
Tato kapitola je pokračováním kapitoly o výpočtu deformací porézních 2D struktur s rozdílem, že zde budou uvedeny metody, které byly v práci aplikovány a srovnány mezi sebou.

6.1 Přímá metoda tuhosti (Direct Stiffness Method)

Přímá metoda tuhosti se zabývá vyšetřováním posuvů a silových účinků prutových konstrukcí. Tuto metodu můžeme dát do souvislosti s metodou konečných prvků, nahradíme-li pojmy prut elementem a kloub uzlem. [14, 21]

Nejdříve si musíme nahradit reálný model modelem idealizovaným (matematickým). V matematickém modelu uvažujeme jen axiální zatížení a neuvažujeme tření v kloubech, proto se reálnému modelu jen blížíme. Napětí a deformace vypočítané pomocí tohoto jednoduchého idealizovaného modelu jsou často používány inženýry pro účely předběžného návrhu, jako je například dimenzování průřezu prutů. [14]

Pro vysvětlení této metody budeme uvažovat jednoduchou prutovou konstrukci sestávající ze tří prutů, viz obr. 11. Každý tento prut bude mít konstantní průřez A a Youngův modul pružnosti v tahu E . Je potřeba zavést si pojem, který budeme často používat. A to **globální souřadnicový systém**, což bude kartézský souřadnicový systém s počátkem v kloubu A . [14, 21]



Obrázek 11 Jednoduchá prutová konstrukce, upraveno dle [14, 21]

Klíčové složky pro použití přímé metody tuhosti jsou síly a posuvy v kloubech. V idealizované prutové konstrukci mohou externí síly stejně tak jako reakční síly působit pouze na klouby. Všechny síly všech prutů mohou být rozepsány na silovou složku f_x rovnoběžnou s osou x a f_y rovnoběžnou s osou y . Dále je potřeba přiřadit tyto silové složky ke konkrétnímu kloubu prutové konstrukce, což budeme značit dle zvyklosti dolním indexem k , kde k představuje označení daného kloubu. Pro naší tří-kloubovou modelovou úlohu se $k = A, B, C$ ¹. Soubor všech silových účinků působících na kloub budeme zapisovat do vektoru \mathbf{f} . [14, 21]

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{xA} \\ f_{yA} \\ f_{xB} \\ f_{yB} \\ f_{xC} \\ f_{yC} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Posuvy v jednotlivých kloubech budeme obdobně zapisovat složkovým zápisem na u_{xk} a u_{yk} . Kde k je opět označení příslušného kloubu. Soubor všech posunutí nazveme vektorem posunutí \mathbf{u} . [14, 21]

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Těchto 6 posuvů je pro nás prozatím neznámých. Dále specifikujeme okrajové podmínky někdy označované jako vazbové podmínky. Tyto hodnoty známe dopředu a můžeme je rovnou specifikovat ve vektoru posunutí, ale z výpočetního hlediska to můžeme nechat až jako poslední krok před výpočtem soustavy rovnic, kdy se posunutí, která působí na klouby ukotvené podporami, nahradí nulovými posuvy ve směrech, ve

¹ Pro prutové konstrukce o více členech se používá číselné značení kloubu. My ovšem zde pro přehlednost budeme klouby označovat písmeny, aby nedocházelo k záměně s číselným označením prutů. Při programování procesu budeme používat již číselné značení kloubů.

kterých je zamezeno pohybu kloubu. Pro náš konkrétní případ, viz obr. 11, vynulujeme posunutí u_{xA} , u_{yA} a u_{yB} . [14, 21]

6.1.1 Globální soustava rovnic

Globální soustava rovnic vyjadřuje vztah mezi uzlovými silami \mathbf{f} a uzlovými posuvy \mathbf{u} celé konstrukce před určením okrajových podmínek. Předpokládáme lineární chování prutů, proto i vztah mezi těmito veličinami bude lineární. Při vynulování uzlových posuvů se vynulují i uzlové síly. Předpětí zanedbáváme. Výsledná soustava lineárních rovnic bude mít tvar [14, 21]:

$$\begin{bmatrix} f_{xA} \\ f_{yA} \\ f_{xB} \\ f_{yB} \\ f_{xC} \\ f_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

V maticovém zápisu [14, 21]:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (6.4)$$

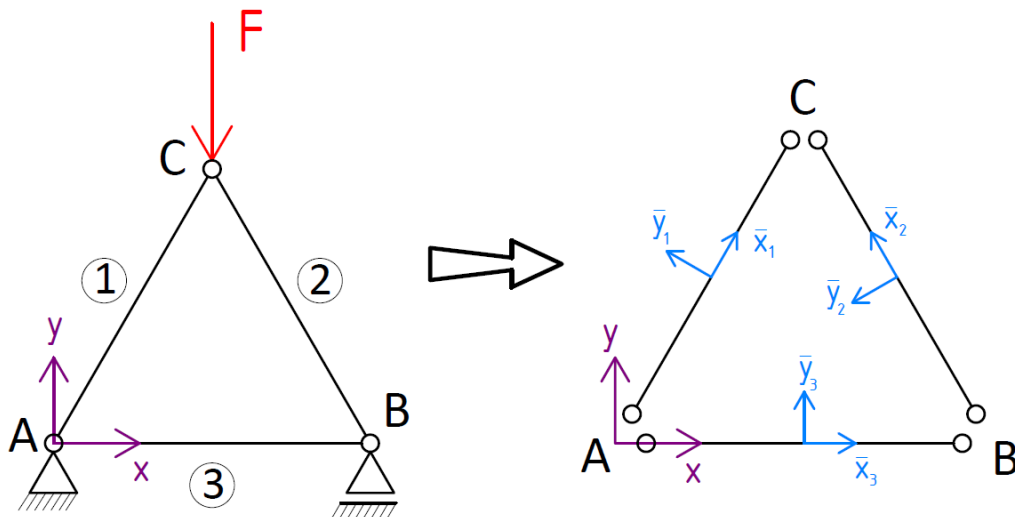
Kde \mathbf{K} je **globální matice tuhosti** a je symetrická. [14, 21]

6.1.2 Fáze přímé metody tuhosti

Přímou metodu tuhosti si můžeme rozdělit na tři fáze: 1. fázi rozpadu, 2. fázi sestavení a 3. fázi řešení. Tyto fáze se dále dělí na jednotlivé kroky, které si ukážeme. Po poslední fázi ještě provádíme následné zpracování (postprocessing), který není formálně zařazen do fází přímé metody tuhosti. [14, 21, 22]

6.1.2.1 Fáze rozpadu

Fáze rozpadu sestává ze tří kroků: 1. uvolnění, 2. lokalizace a 3. výpočet rovnic tuhosti pro jednotlivé členy. První dva kroky jsou jen koncepční. Ve výpočtovém programu je reálně neprogramujeme. [14, 21]



Obrázek 12 Uvolnění jednotlivých prutů idealizované konstrukce a zavedení lokálních souřadnicových systémů, upraveno dle [14]

6.1.2.1.1 Uvolnění a lokalizace

Nejprve odstraníme všechna zatížení a podpory, viz obr. 12. Dále uvolníme jednotlivé pruty. Každému prutu přiřadíme jeho vlastní kartézský souřadnicový systém, který budeme nazývat **lokálním souřadnicovým systémem prutu** $[\bar{x}_p; \bar{y}_p]$, kde dolní index p značí číslo prutu. Pro prut, který začíná v kloubu i a končí v kloubu j , kde $i < j$ bude mít osa x kladný směr ve směru od kloubu i do kloubu j . Tento lokální souřadný systém může být umístěn například v prostředku prutu nebo v jednom z jeho kloubů. Osa x je umístěna podélně s osou prutu. [14, 21]

Úhel φ_p , který mezi sebou svírají globální a lokální souřadnicový systém, je kladný, pokud lokální souřadnicový systém dostaneme natočením globálního souřadnicového systému proti směru hodinových ručiček. [14, 21]

Obecný rovinný nosník nebo prut, jak je vidět z obrázku 13, má v každém svém kloubu 2 složky síly a 2 složky posuvu rovnoběžné s lokálním souřadnicovým systémem. [14, 21]

6.1.2.1.2 Rovnice tuhosti členu

Lokální soustava rovnic popisuje vztah mezi lokálními uzlovými posuvy $\bar{\mathbf{u}}$ a lokálními uzlovými silami $\bar{\mathbf{f}}$ [14, 21]:

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{u}} \quad (6.5)$$

Kde \bar{K} je lokální matice tuhosti. Po rozepsání [14, 21]:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} \\ \bar{K}_{41} & \bar{K}_{42} & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Je několik způsobů, jak sestavit matici tuhosti \bar{K} vyjádřenou pomocí Youngova modulu pružnosti E , průřezu A a délky prutu L . Jednou z cest je představit si prut jako lineární pružinu o ekvivalentní tuhosti k_s . Pokud jsou vlastnosti prutu konstantní po jeho celé délce pak [14, 21]:

$$k_s = \frac{EA}{L} \quad (6.7)$$

Tento vztah použijeme pro vyjádření vnitřní normálové síly prutu N [14, 21]:

$$N = k_s d = \frac{EA}{L} d \quad (6.8)$$

Kde d je prodloužení/zkrácení prutu. Normálovou sílu i prodloužení můžeme vyjádřit pomocí uzlových sil a posunutí. [14, 21]

$$N = \bar{f}_{xj} = -\bar{f}_{xi} \quad (6.9)$$

$$d = \bar{u}_{xj} - \bar{u}_{xi} \quad (6.10)$$

Vztah (6.9) vychází ze silových rovnic rovnováhy kloubu i a j . Dosazením vztahů (6.9) a (6.10) do rovnice (6.8) dostáváme [14, 21]:

$$\bar{f}_{xj} = -\bar{f}_{xi} = \frac{EA}{L} (\bar{u}_{xj} - \bar{u}_{xi}) \quad (6.11)$$

Což můžeme zapsat maticově [14, 21]:

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{u}} \quad (6.12)$$

Z čehož vidíme, že lokální matice tuhosti bude [14, 21]:

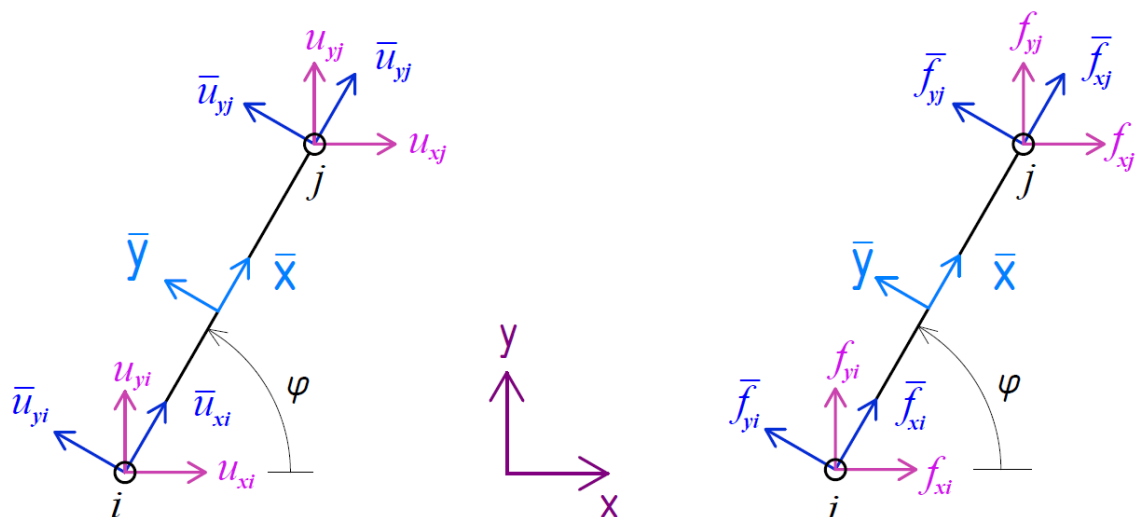
$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

6.1.2.2 Fáze sestavení

Fázi sestavení si můžeme představit jako spojení rozpojených prutů z předchozí fáze rozpadu a důsledky vyplývající z tohoto spojení. Tuto fázi již reálně programujeme na rozdíl od fáze rozpadu, která je pouze teoretická. [14, 21]

6.1.2.2.1 Globalizace

Prvním krokem Fáze sestavení a řešení je **globalizace**. Tato operace je prováděna na jednotlivých prutech. Globalizace přepočítává lokální rovnice tuhosti do globálního souřadnicového systému, aby je mohla poskládat do globální matice tuhosti. Přepočet lokálních vztahů na globální je prováděn pomocí transformačních matic. [14, 21]



Obrázek 13 Transformace uzlových posuvů a sil z lokálního souřadného systému $[\bar{x}; \bar{y}]$ do globálního $[x; y]$, překresleno dle [14, 21]

6.1.2.2.2 Transformace sil a posuvů

Transformační rovnice pro přechod sil a posuvů mezi lokálním souřadným systémem a globálním souřadným systémem odvodíme z obrázku 13 [14, 21]:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{xi} &= u_{xi} \cos \varphi + u_{yi} \sin \varphi \\ \bar{u}_{yi} &= -u_{xi} \sin \varphi + u_{yi} \cos \varphi \\ \bar{u}_{xj} &= u_{xj} \cos \varphi + u_{yj} \sin \varphi \\ \bar{u}_{yj} &= -u_{xj} \sin \varphi + u_{yj} \cos \varphi\end{aligned}$$

Kde φ je úhel, který svírá lokální souřadnicový systém s globálním souřadnicovým systémem. [14, 21]

Maticový zápis [14, 21]:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Matice sinů a cosinů se nazývá **transformační matice pole posunutí** a budeme ji značit \mathbf{T} . [14, 21]

Obdobně z obrázku 13 vytvoříme rovnice pro transformaci uzlových sil. Což zapíšeme už rovnou maticově [14, 21]:

$$\begin{bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{xj} \\ f_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Vidíme, že **transformační matice uzlových sil** odpovídá transpozici transformační matice pole posunutí. Proto ji jako tuto transpozici budeme i zapisovat \mathbf{T}^T . [14, 21]

6.1.2.2.3 Globální rovnice tuhosti pro jednotlivé pruty

Pro přehlednost budeme veličiny vztahující se k prutu značit horním indexem (e). Tuto terminologii zavádíme z metody konečných prvků, kde je prut označován jako

element. Rovnice tuhosti pro prut v globálních souřadnicovém systému budeme zapisovat [14, 21]:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (6.16)$$

A pro lokální souřadnicový systém budeme zapisovat obdobně [14, 21]:

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \bar{\mathbf{u}}^{(e)} \quad (6.17)$$

Transformace posuvů a sil mezi globálním a lokálním souřadnicovým systémem bude mít tvar [14, 21]:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^T \bar{\mathbf{f}}^{(e)} \quad (6.19)$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice (6.17) a dostaneme [14, 21]:

$$\mathbf{f}^{(e)} = [(\mathbf{T}^{(e)})^T \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}] \mathbf{u}^{(e)} \quad (6.20)$$

Při porovnání rovnice (6.20) s rovnicí (6.16) vidíme, že vztah v hranaté závorce z rovnice (6.20) bude odpovídat globální matici tuhosti elementu. [14, 21]

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^T \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \quad (6.21)$$

Roznásobíme-li mezi sebou pravou stranu rovnice (6.21) dostaneme [14, 21]:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} c^2 \varphi^{(e)} & s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & -c^2 \varphi^{(e)} & -s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} \\ s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & s^2 \varphi^{(e)} & -s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & -s^2 \varphi^{(e)} \\ -c^2 \varphi^{(e)} & -s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & c^2 \varphi^{(e)} & s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} \\ -s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & -s^2 \varphi^{(e)} & s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & s^2 \varphi^{(e)} \end{bmatrix}$$

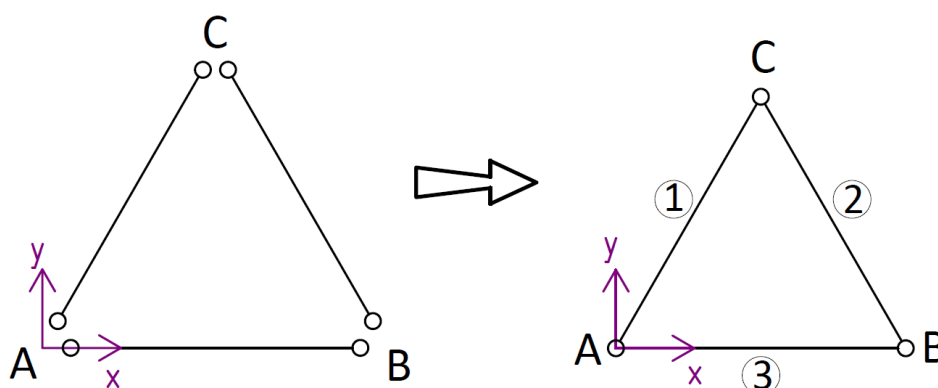
Kde $s \varphi^{(e)}$ je zkráceným zápisem funkce $\sin \varphi^{(e)}$ a $c \varphi^{(e)}$ je zkrácením funkce $\cos \varphi^{(e)}$. Toto zkrácení budeme používat i v následujících vztazích. Pro nulový úhel $\varphi^{(e)}$

dostáváme lokální matici tuhosti $\bar{K}^{(e)}$, viz rovnice (6.13). Rovnice (6.16) bude mít tedy po rozepsání tvar [14, 21]:

$$\begin{bmatrix} f_{xi}^{(e)} \\ f_{yi}^{(e)} \\ f_{xj}^{(e)} \\ f_{yj}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} c^2 \varphi^{(e)} & s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & -c^2 \varphi^{(e)} & -s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} \\ s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & s^2 \varphi^{(e)} & -s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & -s^2 \varphi^{(e)} \\ -c^2 \varphi^{(e)} & -s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & c^2 \varphi^{(e)} & s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} \\ -s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & -s^2 \varphi^{(e)} & s \varphi^{(e)} c \varphi^{(e)} & s^2 \varphi^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi}^{(e)} \\ u_{yi}^{(e)} \\ u_{xj}^{(e)} \\ u_{yj}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

6.1.2.2.4 Sloučení

Sloučení je krokem, ve kterém se globální matice tuhosti jednotlivých elementů sloučí do jedné globální matice tuhosti celé konstrukce. Sloučení můžeme vnímat jako spojení uvolněných prutů. [21, 22]



Obrázek 14 Sloučení: uvolněné pruty se opět spojí, upraveno dle [22]

Hlavním úkolem sestavení je umístění příspěvků každého členu do globální matice tuhosti. Tento proces se nazývá sloučení jednotlivých členů. Z matematického hlediska je třeba, aby byly splněny následující dvě podmínky [21, 22]:

1. Kompatibilita posunutí: uzlové posuny všech členů spojených v jednom kloubu musí být stejné. Znovu spojené klouby se pohybují jako jeden předmět. [21, 22]
2. Silová rovnováha: součet vnitřních sil všech prutů setkávajících se v jednom kloubu, vyvažuje působení vnějších sil na tento kloub. [21, 22]

Aplikaci těchto podmínek si ukážeme na kloubu C, viz obr. 15. Z první podmínky dostáváme [21, 22]:

$$u_{xC}^{(1)} = u_{xC}^{(2)}, \quad u_{yC}^{(1)} = u_{yC}^{(2)}, \quad (6.23)$$

Kde horní index (1) a (2) značí číslo prutu.

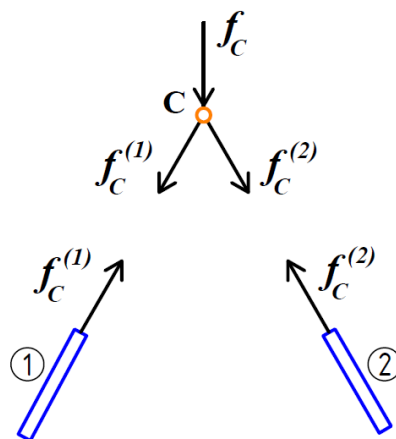
A aplikací druhé podmínky obdržíme [21, 22]:

$$f_{xC} = f_{xC}^{(1)} + f_{xC}^{(2)}, \quad f_{yC} = f_{yC}^{(1)} + f_{yC}^{(2)} \quad (6.24)$$

Tuto podmínku můžeme zapsat maticově [21, 22]:

$$f = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} \quad (6.25)$$

Za prut, který nevstupuje do vyšetřovaného kloubu, dosazujeme nulu. [21, 22]



Obrázek 15 Silová rovnováha kloubu C, upraveno dle [21, 22]

6.1.2.2.5 Sestavení pomocí rozšíření a umístění

Rovnice (6.22), která se vztahuje vždy jen k jednomu prutu, tedy ke dvěma kloubům na koncích tohoto prutu, má matici tuhosti velikosti 4x4. Abychom vytvořili globální matici celé konstrukce je potřeba tuto matici 4x4 rozšířit na matici 6x6, která bude zahrnovat všechny klouby naší modelové konstrukce, tj. 3 klouby, viz obr. 11. Rozměr této rozšířené matice odpovídá dvojnásobku počtu kloubů, jelikož na každý kloub působí dvě složky sil a dvě složky posuvů rovnoběžně se souřadnicovým systémem. Rozšíření učiníme přidáním nulových sloupců a řádků na místa odpovídající posuvům a silám nepatřícím k řešenému prutu. Pro prut č. 1 bude tato soustava rovnic [21, 22]:

$$\begin{bmatrix} f_{xA}^{(1)} \\ f_{yA}^{(1)} \\ f_{xC}^{(1)} \\ f_{yC}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(1)}A^{(1)}}{L^{(1)}} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xA}^{(1)} \\ u_{yA}^{(1)} \\ u_{xC}^{(1)} \\ u_{yC}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Pro prut č. 2 bude mít soustava rovnic tvar [21, 22]:

$$\begin{bmatrix} f_{xB}^{(2)} \\ f_{yB}^{(2)} \\ f_{xC}^{(2)} \\ f_{yC}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xB}^{(2)} \\ u_{yB}^{(2)} \\ u_{xC}^{(2)} \\ u_{yC}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

A pro prut č. 3 obdobně [21, 22]:

$$\begin{bmatrix} f_{xA}^{(3)} \\ f_{yA}^{(3)} \\ f_{xB}^{(3)} \\ f_{yB}^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(3)}A^{(3)}}{L^{(3)}} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xB}^{(3)} \\ u_{yB}^{(3)} \\ u_{xC}^{(3)} \\ u_{yC}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Kde pro zkrácení a přehlednost zápisu $c = \cos \varphi^{(e)}$, $s = \sin \varphi^{(e)}$. Rozšíření těchto rovnic provedeme následovně. Prut 1 je ohraničen klouby A a C. Kloub B se na tomto prutu nenachází, proto řádky a sloupce příslušející tomuto sloupci v matici tuhosti budou nulové [21, 22]:

$$\begin{bmatrix} f_{xA}^{(1)} \\ f_{yA}^{(1)} \\ f_{xB}^{(1)} \\ f_{yB}^{(1)} \\ f_{xC}^{(1)} \\ f_{yC}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(1)}A^{(1)}}{L^{(1)}} \begin{bmatrix} c^2 & sc & 0 & 0 & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & 0 & 0 & -sc & -s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & -sc & 0 & 0 & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & 0 & 0 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

V této rovnici jsme už u posuvů vynechali identifikaci prutu. To jsme si dovolili díky podmínce (6.23). V maticovém zápisu [21, 22]:

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{K}_r^{(1)} \mathbf{u} \quad (6.30)$$

Vznikla nám rozšířená matice tuhosti $\mathbf{K}_r^{(1)}$, která se vztahuje k prutu 1. Rozšířenou matici tuhosti vytvoříme stejným způsobem pro zbylé dva pruty konstrukce [21, 22]:

$$\mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{K}_r^{(2)} \mathbf{u}, \quad \mathbf{f}^{(3)} = \mathbf{K}_r^{(3)} \mathbf{u} \quad (6.31)$$

Po rozepsání dostáváme pro prut 2 [21, 22]:

$$\begin{bmatrix} f_{xA}^{(2)} \\ f_{yA}^{(2)} \\ f_{xB}^{(2)} \\ f_{yB}^{(2)} \\ f_{xC}^{(2)} \\ f_{yC}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ 0 & 0 & sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ 0 & 0 & -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ 0 & 0 & -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

A pro prut 3 [21, 22]:

$$\begin{bmatrix} f_{xA}^{(3)} \\ f_{yA}^{(3)} \\ f_{xB}^{(3)} \\ f_{yB}^{(3)} \\ f_{xC}^{(3)} \\ f_{yC}^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(3)}A^{(3)}}{L^{(3)}} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc & 0 & 0 \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 & 0 & 0 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc & 0 & 0 \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Následně použijeme podmínku (6.25) [21, 22]:

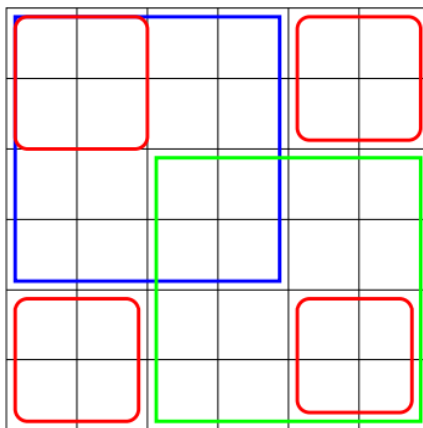
$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)} + \mathbf{f}^{(3)} = \left(\mathbf{K}_r^{(1)} + \mathbf{K}_r^{(2)} + \mathbf{K}_r^{(3)} \right) \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (6.34)$$

Kde \mathbf{K} je globální matice tuhosti celé konstrukce. Po rozepsání bude mít tato rovnice tvar [21, 22]:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(1)} + K_{12}^{(3)} & K_{13}^{(3)} & K_{14}^{(3)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} \\
 K_{21}^{(1)} + K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(3)} & K_{24}^{(3)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\
 K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{11}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{12}^{(2)} + K_{34}^{(3)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\
 K_{41}^{(3)} & K_{42}^{(3)} & K_{21}^{(2)} + K_{43}^{(3)} & K_{22}^{(2)} + K_{44}^{(3)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\
 K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{34}^{(2)} \\
 K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(1)} + K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{44}^{(2)}
 \end{bmatrix}$$

(6.35)

Kde $K_{ab}^{(e)}$, jsou složky matic tuhosti pro jednotlivé pruty. [21, 22]



Obrázek 16 Grafické znázornění sestavení globální matice tuhosti [21]

Tento způsob sestavení globální matice tuhosti jsme si ukázali hlavně kvůli pochopení. Při programování procesu se tento způsob nepoužívá, protože pro větší prutové konstrukce by to bylo paměťově náročné. V programu se rozšířené matice tuhosti nekonstruují, aby se ušetřilo místo v paměti počítače. Místo toho se nejprve vytvoří globální matice tuhosti obsahující samé nuly. Prvky matice tuhosti jednotlivých prutů se postupně přičítají k odpovídajícím prvkům globální matice tuhosti. [21, 22]

6.1.2.3 Fáze řešení

Když už máme spočtenou globální matici tuhosti, tak je třeba specifikovat okrajové podmínky a vyřešit soustavu lineárních rovnic. V této části je popsána technika vhodná pro ruční výpočet. [21, 22]

6.1.2.3.1 Aplikace okrajových podmínek redukci

Soustava rovnic (6.34) je neřešitelná, pokud nespecifikujeme okrajové podmínky, jelikož matice tuhosti je singulární. Z obr. 11 vidíme, že díky podporám není možný pohyb po ose x a y v kloubu A a po ose y v kloubu B . Tedy, že [21, 22]:

$$u_{xA} = u_{yA} = u_{yB} = 0 \quad (6.36)$$

Dále specifikujeme vektor vnějších sil [21, 22]:

$$f_{xB} = 0, \quad f_{xC} = 0, \quad f_{yC} = F \quad (6.37)$$

Dosažením okrajových podmínek do soustavy rovnic (6.34) dostáváme novou redukovanou soustavu rovnic. Okrajové podmínky aplikujeme tak že odstraníme řádky a sloupce odpovídající stanoveným nulovým posunům. [21, 22]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2\varphi^{(2)} + c^2\varphi^{(3)} & c^2\varphi^{(2)} & -s\varphi^{(2)}c\varphi^{(2)} \\ -c^2\varphi^{(2)} & c^2\varphi^{(1)} + c^2\varphi^{(2)} & s\varphi^{(1)}c\varphi^{(1)} + s\varphi^{(2)}c\varphi^{(2)} \\ -s\varphi^{(2)}c\varphi^{(2)} & \varphi^{(1)}c\varphi^{(1)} + s\varphi^{(2)}c\varphi^{(2)} & s^2\varphi^{(1)} + s^2\varphi^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Vniklá matice tuhosti se nazývá redukovaná matice tuhosti, která již není singulární. Tato soustava 3 rovnic obsahuje už jen 3 neznámé, které dopočítáme například Gaussovou eliminační metodou. Tím obdržíme hodnoty všech posuvů. [21, 22]

6.1.2.4 Fáze následného zpracování (Postprocessing)

Posledním krokem je postprocessing, ve kterém dostáváme ze získaných posuvů reakční síly v podporách a také vnitřní síly v jednotlivých prutech. [21, 22]

6.1.2.4.1 Výpočet vnitřních sil

V prutové konstrukci jsou vnitřní síly rovny normálovým silám jednotlivých členů. Průměrné axiální napětí $\sigma^{(e)}$ obdržíme podílem vnitřní síly $N^{(e)}$ prutu a plochou průřezu $A^{(e)}$ tohoto prutu. Vnitřní sílu prutu můžeme spočítat ze vztahu [21, 22]:

$$N^{(e)} = \frac{E^{(e)}A^{(e)}}{l^{(e)}}d^{(e)} \quad (6.39)$$

Kde $d^{(e)}$ je prodloužení/zkrácení prutu, viz (6.10). [21, 22]

6.1.2.4.2 Výpočet reakčních sil

Přenásobením vypočtených posuvů \mathbf{u} maticí tuhosti \mathbf{K} získáme vektor uzlových sil \mathbf{f} . Předpokládáme, že tyto uzlové síly \mathbf{f} jsou součtem reakčních sil \mathbf{f}^r a aplikovaných sil \mathbf{f}^a [21, 22]:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} = \mathbf{f}^a + \mathbf{f}^r \quad (6.40)$$

Aplikované síly známe od začátku a reakční síly obdržíme v postprocessingu.

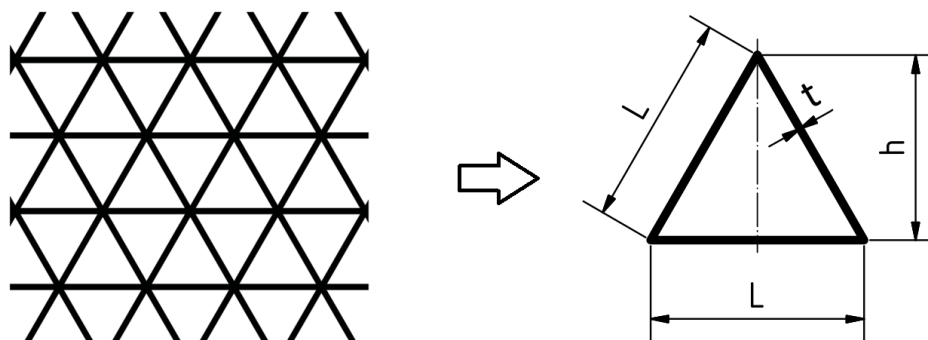
Konkrétně pro naši ukázkovou konstrukci platí [21, 22]:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{xA}^r \\ f_{yA}^r \\ 0 \\ f_{yB}^r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xA}^r \\ f_{yA}^r \\ 0 \\ f_{yB}^r \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Vyřešením rovnice sestavené před postprocessingem získáme všechny zbývající neznámé reakční síly. [21, 22]

6.2 Analytické řešení rovinné trojúhelníkové porézni struktury

V této podkapitole byla zkoumána dvojrozměrná porézni pravidelná struktura trojúhelníkového typu, při rovinném zatížení. Z této struktury byla vyjmuta jedna buňka (jeden trojúhelník), viz obr. 17. Tato buňka byla zatížena a její deformace byla podrobena analytickému zkoumání. Analytické řešení, které je popsáno v této podkapitole bylo zjištěno analogicky dle práce Lorny Gybson [11, 15], která je popsána výše.



Obrázek 17 Vlevo pevná trojúhelníková síť, vpravo vyjmutý rovnostranný trojúhelník s rozměry, analogicky s [11, 15]

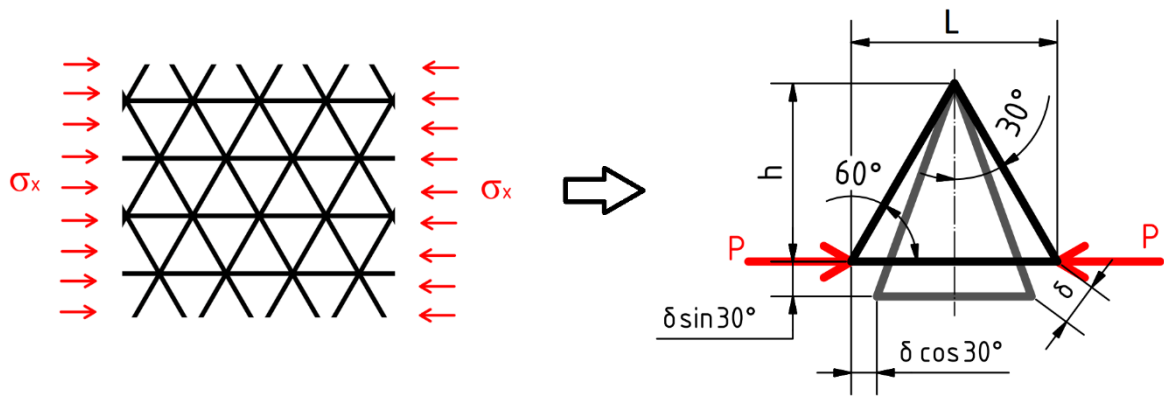
6.2.1 Jednoosé zatížení rovnostranné trojúhelníkové buňky v rovině

Vyjmutý elementární rovnostranný trojúhelník, jsme podrobili jednoosému namáhání ve směru osy x a ve směru osy y . Přičemž jsme se snažili zjistit Youngův modul pružnosti v daném směru. Výpočty budou prováděny pro kruhový průřez příček trojúhelníků.

6.2.1.1 Zatížení ve směru osy x

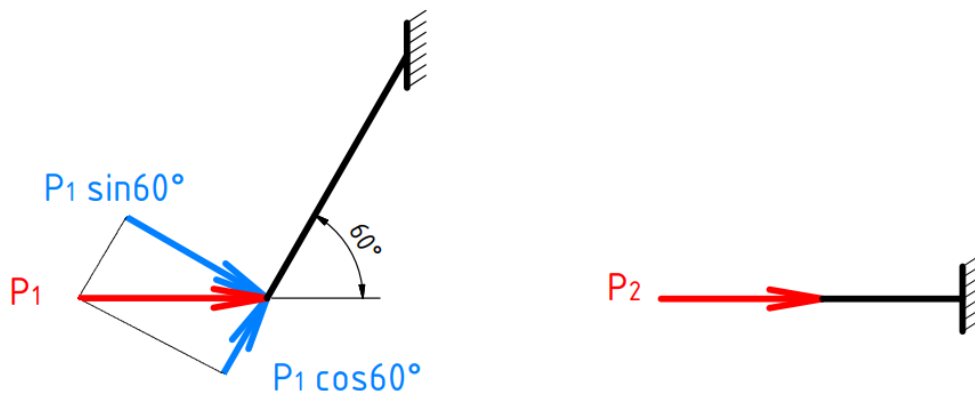
Na obrázku 18 vpravo je zdeformovaný trojúhelník napozicovaný svou špičkou do špičky nezdeformovaného trojúhelníku, kvůli dodržení analogie s prací Lorny Gybson, viz zdroj [15]. Stejně tak tomu bude na obrázku 20.

Většinu zatížení přenáší spodní příčka trojúhelníku. Deformace šikmých příček má ve srovnání s deformací spodní příčky zanedbatelný vliv, jak bude ukázáno.



Obrázek 18 Vlevo zatížení trojúhelníkové sítě podélně s osou x, vpravo elementární nezdeformovaný trojúhelník ve srovnání se zdeformovanou verzí (šedivě), analogicky s [15]

Sílu P si rozdělíme na sílu P_1 a P_2 . Přičemž síla P_1 bude působit na šikmou příčku trojúhelníku a příčka P_2 na rovnou příčku, viz obr. 19.



Obrázek 19 Rozdělení síly P na P_1 a P_2 a jejich působení na příčky

Nejprve si vezmeme šikmou příčku. Její deformaci máme již spočtenou z předchozí kapitoly o šestiúhelníkové buňce. Posuv šikmé příčky δ_{10} vyvolaný ohybovou složkou síly P_1 bude [15]:

$$\delta_{10} = \frac{P_1 L^3 \sin 60^\circ}{12 E_s J \cos^3 60^\circ} \quad (6.42)$$

Kde J je kvadratický moment průřezu. Pro náš trojúhelník nás zajímá jeho vyjádření pro kruhový průřez [17, 18]:

$$J = \frac{\pi r^4}{4}$$

(6.43)

Kde r je poloměr průřezu. Tento vztah dosadíme do rovnice (6.42) a po úpravě dostáváme:

$$\delta_{1o} = \frac{4\sqrt{3}P_1L^3}{3E_s\pi r^4}$$

(6.44)

Tento posuv si vyjádříme pro směr x :

$$\delta_{1xo} = \delta_{1o} \sin 60^\circ$$

(6.45)

Do této rovnice si dosadíme vztah (6.45) a dostaneme:

$$\delta_{1xo} = \frac{2P_1L^3}{E_s\pi r^4}$$

(6.46)

Posuv šikmé příčky způsobený tlakovou složkou síly P_1 bude [17, 18]:

$$\delta_{1t} = \frac{LP_1 \cos 60^\circ}{E_s A}$$

(6.47)

Kde $A = \pi r^2$ je kruhový průřez příčky o poloměru r , který dosadíme do rovnice výše:

$$\delta_{1t} = \frac{LP_1}{2E_s\pi r^2}$$

(6.48)

Tento posuv si vyjádříme pro směr x :

$$\delta_{1xt} = \delta_{1t} \cos 60^\circ \quad (6.49)$$

Do této rovnice si dosadíme vztah (6.48):

$$\delta_{1xt} = \frac{LP_1}{4E_s\pi r^2} \quad (6.50)$$

Celkový posuv šikmé příčky ve směru osy x bude:

$$\delta_{1x} = \delta_{1xo} + \delta_{1xt} \quad (6.51)$$

Do této rovnice dosadíme posuvy (6.46) a (6.50) a dostaneme posuv šikmé příčky ve směru osy x :

$$\delta_{1x} = \frac{2P_1L^3}{E_s\pi r^4} + \frac{LP_1}{4E_s\pi r^2} \quad (6.52)$$

Z rovnice (6.52) si pro pozdější použití vyjádříme sílu P_1 :

$$P_1 = \delta_{1x} \frac{E_s\pi r^2}{4L \left(\frac{L^2}{2r^2} + 1 \right)} \quad (6.53)$$

Následně spočteme posuv přímé příčky, který je vyvolán tlakovou silou P_2 [17, 18]:

$$\delta_{2x} = \frac{\frac{L}{2}P_2}{E_s\pi r^2} \quad (6.54)$$

Z rovnice (6.54) si vyjádříme sílu P_2 :

$$P_2 = \delta_{2x} \frac{2E_s\pi r^2}{L} \quad (6.55)$$

Napětí σ_x působící na elementární trojúhelník si vyjádříme jako (analogicky s [11, 15]):

$$\sigma_x = \frac{P}{2rL \sin 60^\circ} \quad (6.56)$$

Z Hookeova zákona, viz rovnice (4.19), si díky vztahu výše vyjádříme Youngův modul pružnosti pro trojúhelníkovou síť ve směru osy x [17, 18]:

$$E_x^* = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{P_1 + P_2}{2rL \sin(60^\circ) \varepsilon_x} \quad (6.57)$$

Posuv δ_x ve směru osy x bude stejný pro obě příčky:

$$\delta_x = \delta_{1x} = \delta_{2x} \quad (6.58)$$

Deformace ε_x ve směru osy x bude také stejná pro obě příčky [17, 18]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{1x} = \varepsilon_{2x} = \frac{2\delta_x}{L} \quad (6.59)$$

Do rovnice (6.57) dosadíme za síly P_1 a P_2 vztahy (6.53) a (6.55) a za deformaci ε_x dosadíme vztah (6.59):

$$E_x^* = \frac{\delta_{1x} \frac{E_s \pi r^2}{4L \left(\frac{L^2}{2r^2} + 1 \right)} + \delta_{2x} \frac{2E_s \pi r^2}{L}}{2rL \sin(60^\circ) \frac{2\delta_x}{L}} \quad (6.60)$$

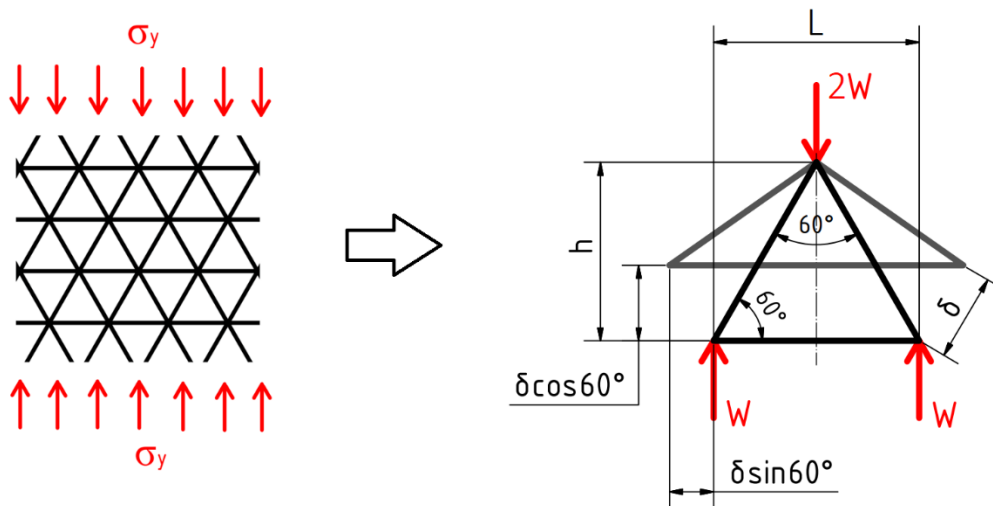
S využitím vztahu (6.58) se posuvy v rovnici (6.60) vykrátí a po úpravě dostáváme výsledný modul pružnosti celé konstrukce ve směru osy x (analogicky s [11, 15]):

$$E_x^* = \frac{E_s \pi r}{L\sqrt{3}} \left[\frac{r^2}{4(L^2 + 2r^2)} + 1 \right] \quad (6.61)$$

6.2.1.2 Zatížení ve směru osy y

Vztahy v této podkapitole budeme řešit stejným způsobem jako v přechozím případě. Síla W , která je vyvolána napětím σ_y bude mít velikost (analogicky s [11, 15]):

$$W = \sigma_y bL \quad (6.62)$$



Obrázek 20 Vlevo zatížení trojúhelníkové sítě podélně s osou y, vpravo elementární nezdeformovaný trojúhelník ve srovnání se zdeformovanou verzí (šedivě), analogicky s [15]

Pro výpočet posuvu δ , který je znázorněn na obr. 20 použijeme diferenciální rovnici průhybové čáry, viz rovnice (4.24).

Do rovnice (4.24) dosadíme za moment (analogicky s [11, 15]):

$$M\left(\frac{y}{\sin \varphi}\right) = -\frac{W \cos \varphi}{2} \cdot \frac{y}{\sin \varphi}$$

A dostaneme výsledný posuv (analogicky s [11, 15]):

$$\delta \left(\frac{y}{\sin \varphi} \right) = \frac{W \cos(\varphi) y^3}{12 E_s J \sin^3 \varphi}$$

Pro $y = L \cdot \sin \varphi$ dostáváme posuv (analogicky s [11, 15]):

$$\delta = \frac{W \cos(\varphi) L^3}{12 E_s J} \quad (6.63)$$

Dále do této rovnice dosadíme za W vztah (6.62) (analogicky s [11, 15]):

$$\delta = \frac{\sigma_y b L^4 \cos \varphi}{12 E_s J} \quad (6.64)$$

Z odvozeného vztahu (6.64) dostaneme vztah pro deformaci ve směru osy y vyvolanou ohybem (analogicky s [11, 15]):

$$\varepsilon_{y0} = \frac{\delta \cos 60^\circ}{h} = \frac{\frac{\sigma_y b L^4 \cos 60^\circ}{12 E_s J} \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}L}{2}} \quad (6.65)$$

A po úpravě dostáváme výsledný vztah pro deformaci ve směru osy y vyvolanou ohybem (analogicky s [11, 15]):

$$\varepsilon_{y0} = \frac{\sigma_y b L^3}{24 \sqrt{3} E_s J} \quad (6.66)$$

Dále budeme vyšetřovat deformaci způsobenou tlakem. Z obr. 20 vyčteme vztah pro svislou deformaci (analogicky s [11, 15]):

$$\varepsilon_{yt} = \varepsilon_t \sin 60^\circ \quad (6.67)$$

Do této rovnice dosadíme za ε_t Hookův zákon (analogicky s [11, 15]):

$$\varepsilon_{yt} = \frac{\sigma}{E_s} \sin 60^\circ \quad (6.68)$$

V této rovnici si napětí vyjádříme jako sílu působící na plochu (analogicky s [11, 15]):

$$\varepsilon_{yt} = \frac{W \sin 60^\circ}{AE_s} \sin 60^\circ = \frac{3W}{4AE_s} \quad (6.69)$$

Do této rovnice dosadíme vztah (6.62) vyjadřující sílu W (analogicky s [11, 15]):

$$\varepsilon_{yt} = \frac{3\sigma_y bL}{4AE_s} \quad (6.70)$$

Celkovou deformaci ve směru osy y zjistíme součtem deformace způsobené tlakem a deformace způsobené ohybem (analogicky s [11, 15]).

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + \varepsilon_{yt} \quad (6.71)$$

Do této rovnice dosadíme deformace pro ohyb a tlak, viz rovnice (6.66) a (6.70), a dostaneme relativní deformaci pro obecný průřez prutu (analogicky s [11, 15]):

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y bL^3}{24\sqrt{3}E_s J} + \frac{3\sigma_y bL}{4AE_s} \quad (6.72)$$

Do této rovnice dosadíme hodnoty pro kruhový průřez pro pozdější srovnání a dostaneme:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y L^3}{3\sqrt{3}\pi E_s r^3} + \frac{3\sigma_y L}{2\pi E_s r} \quad (6.73)$$

Tuto rovnici si můžeme vyjádřit následovně pomocí ohybové a tlakové konstanty a geometrie:

$$\varepsilon_y = c_0 \left(\frac{L}{r}\right)^3 + c_t \left(\frac{L}{r}\right) \quad (6.74)$$

Přičemž platí, že:

$$\frac{L}{r} > 1 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{L}{r}\right)^3 \gg \frac{L}{r} \quad (6.75)$$

Z čehož vyplývá, že deformace způsobená tlakem je mnohem menší než deformace vyvolaná ohybem. Proto je možné ji zanedbat. (Analogicky s [11, 15])

Když už máme vypočtenou deformaci, můžeme s využitím Hookeova zákona spočítat i Youngův modul pružnosti ve směru osy y pro trojúhelníkovou síť. Pro přehlednost značíme modul pružnosti pro celou síť v horním indexu hvězdičkou (analogicky s [11, 15]):

$$E_y^* = \frac{24\sqrt{3}E_s J}{bL^3} + \frac{4AE_s}{3bL} \quad (6.76)$$

Tato rovnice je platná pro obecný průřez prutu. Pro pozdější srovnání spočteme i Youngův modul pružnosti ve směru osy y , vztažený k celé síti, pro náš kruhový průřez:

$$E_y^* = \frac{\pi E_s r}{L} \left[\frac{3\sqrt{3}r^2}{L^2} + \frac{2}{3} \right] \quad (6.77)$$

6.3 Analytické řešení rovinné kloubově spojené trojúhelníkové porézní struktury

Toto řešení vzniklo na základě analýzy mechanických vlastností cytoskeletu červených krvinek, který si můžeme představit jako strukturu ze sítí biopolymerů. Předpokladem je, že materiál je lineárně elastický. [23]

6.3.1 Zatížení smykem

Mějme obecně kvádr, viz obr. 21. Ten je zatížený smykovým napětím, což se projeví deformací tohoto kvádrů. [23]

Deformace kvádrů vyvolá změnu jeho deformační energie ΔW . Vezmeme-li tuto deformační energii ΔW na jednotku nezdeformovaného objemu V , získáme hustotu deformační energie Δw_v [23]:

$$\Delta w_v = \frac{\Delta W}{V} \quad (6.78)$$

Hustotu deformační energie můžeme také vyjádřit známým vztahem [17, 18, 23]:

$$\Delta w_v = \frac{1}{2} G \gamma^2 \quad (6.79)$$

Kde G je modul pružnosti ve smyku a γ je zkos. Obě tyto veličiny jsou ve vztahu se smykovým napětím, který je vyjádřen Hookovým zákonem pro smyk [17, 18, 23]:

$$\tau = G \gamma \quad (6.80)$$

Zkos, který můžeme interpretovat jako úhel náklonu zdeformované (původně vertikální) stěny od původní nezdeformované, viz obr. 21, si vyjádříme následovně [23]:

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\delta}{h} \quad (6.81)$$

Toto vyjádření platí jen pro malé hodnoty zkosu γ .

Pokud vztah (6.79) dvakrát zderivujeme dle zkosu γ , získáme modul pružnosti ve smyku [23]:

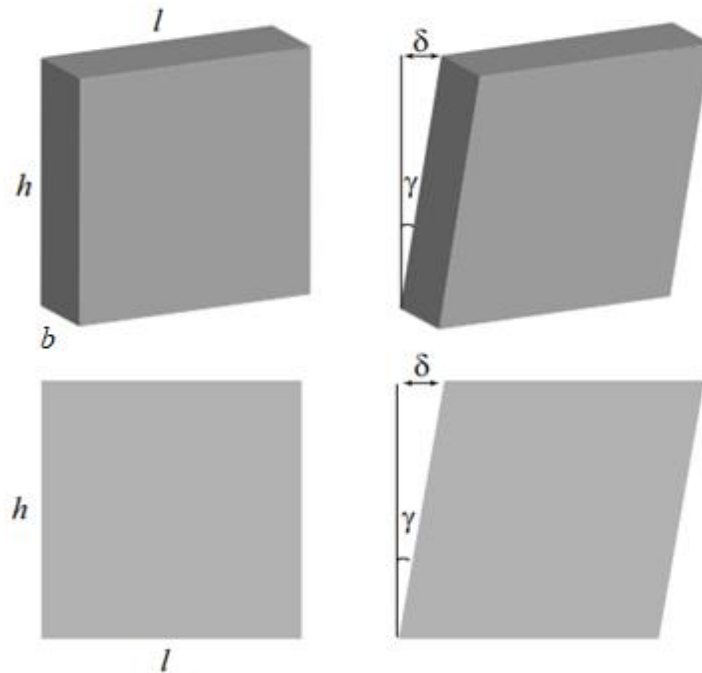
$$\frac{\partial^2 \Delta w_v}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{2} G \gamma^2}{\partial \gamma^2} \quad (6.82)$$

Po výpočtu první derivace pravé strany rovnice dostáváme [23]:

$$\frac{\partial^2 \Delta w_v}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial G \gamma}{\partial \gamma} \quad (6.83)$$

A po druhé integraci pravé strany dostáváme výsledný vztah [23]:

$$\frac{\partial^2 \Delta w_v}{\partial \gamma^2} = G \quad (6.84)$$



Obrázek 21 Nahoře blok zatížený smykovým napětím před a po deformaci, dole tentýž blok ve 2D [23]

Nyní uvažujme, že kvádr, viz obr. 21, je tenký (jeho tloušťka b je malá). U tenkých struktur nás obvykle nezajímá jak se napětí a deformace mění v závislosti na tloušťce. Proto tyto struktury budeme považovat jako dvojrozměrné, což je z matematického hlediska výhodné. Jako důsledek této úvahy si definujeme smykovou sílu N_s , která bude působit na jednotkovou délku [23]:

$$N_s = \tau b \quad (6.85)$$

Předpokládáme, že smykové napětí je konstantní v průběhu celé tloušťky b . Do této rovnice dosadíme Hookův zákon pro smyk a dostaneme [23]:

$$N_s = G\gamma b \quad (6.86)$$

Kde součin Gb odpovídá modulu pružnosti ve smyku K_s pro tenkostěnné struktury, kde jsme zanedbali vliv tloušťky:

$$Gb = K_s \quad (6.87)$$

Takže rovnici (6.86) upravíme do tvaru [23]:

$$N_s = K_s \gamma \quad (6.88)$$

Stejnou analogií upravíme vztahy rovnic (6.78), (6.79) a (6.84). Deformační energie na jednotkovou plochu bude [23]:

$$w_a = \frac{\Delta W}{A} \quad (6.89)$$

Tuto deformační energii můžeme také spočítat dle následujícího vztahu [23]:

$$\Delta w_a = \frac{1}{2} K_s \gamma^2 \quad (6.90)$$

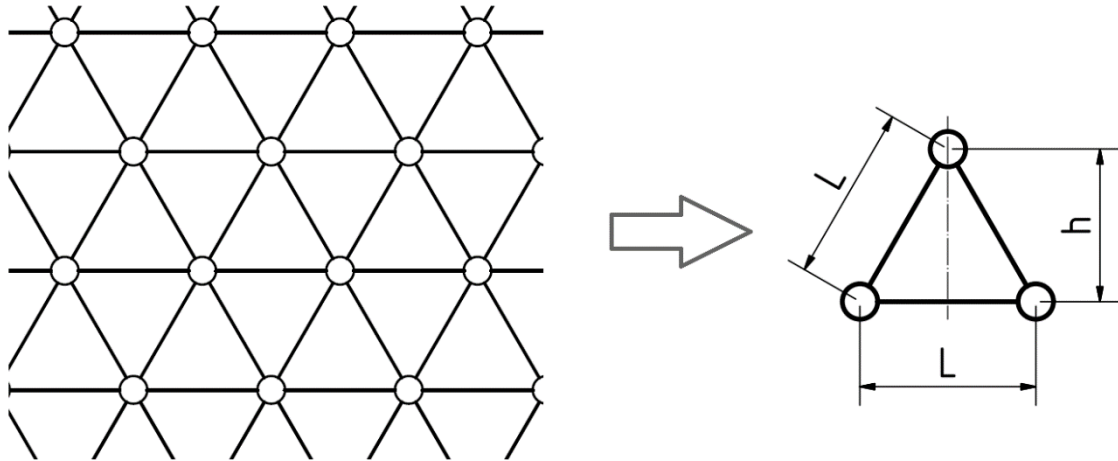
Derivováním rovnice (6.90) obdržíme modul pružnosti ve smyku [23]:

$$\frac{\partial^2 \Delta w_a}{\partial \gamma^2} = K_s \quad (6.91)$$

Tyto vztahy byly navrženy tak, aby nám pomohly dostat se k výpočtu modulu pružnosti ve smyku K_s . Strategií pro jeho finální výpočet je najít celkovou změnu deformační energie ΔW pro daný zkos γ . Tuto celkovou deformační energii pak podělíme nezdeformovanou plochou, čímž získáme jednotkovou deformační energii Δw_a . A tím v závěru získáme hledaný modul pružnosti ve smyku K_s . [23]

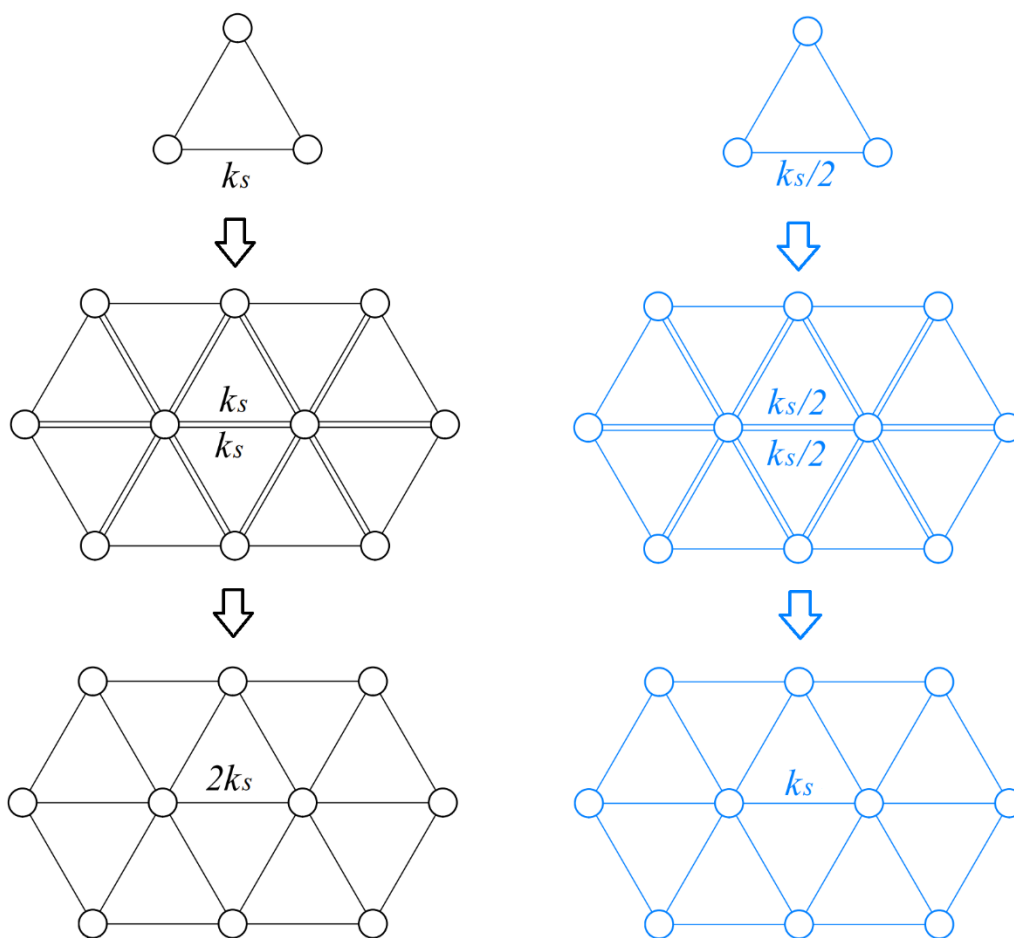
6.3.1.1 Modul pružnosti ve smyku pro trojúhelníkovou strukturu

Máme prutovou soustavu, která má konstrukci ve tvaru sítě z rovnostranných trojúhelníků, viz obr. 22. Tato síť je namáhána smykem. Upraveno dle [23].



Obrázek 22 Vlevo nezatížená trojúhelníková síť, vpravo vyjmutý trojúhelník, upraveno dle [23]

Každý trojúhelník je tvořen třemi vlastními pruty, které si můžeme představit jako lineární pružiny o tuhosti k_s , viz obr. 23. Na obrázku 23 uprostřed vidíme, že díky tomu, že každý trojúhelník je tvořen vlastními pruty, je struktura tvořena vždy zdvojenými pruty vedle sebe. Za předpokladu, že jeden prut má tuhost k_s pak zdvojená struktura, kterou v konečném důsledku vnímáme jako jeden prut o tloušťce dvou původních prutů má tuhost $2k_s$. Což je znázorněno na obrázku 23 černě. Chceme, aby výsledná struktura, viz obr. 23 vpravo dole, měla tuhost zdvojeného prutu k_s , proto budeme počítat s tím, že samostatný nezdojený prut má tuhost $k_s/2$, viz obr. 23 vpravo nahoře. [23]



Obrázek 23 Vlevo základní trojúhelník o tuhosti prutu k_s a jeho umístění v struktuře, vpravo základní trojúhelník o tuhosti prutu $k_s/2$ a jeho umístění v struktuře, upraveno dle [23]

Z obrázku 22 určíme výšku elementárního trojúhelníku h dle Pythagorovy věty [23]:

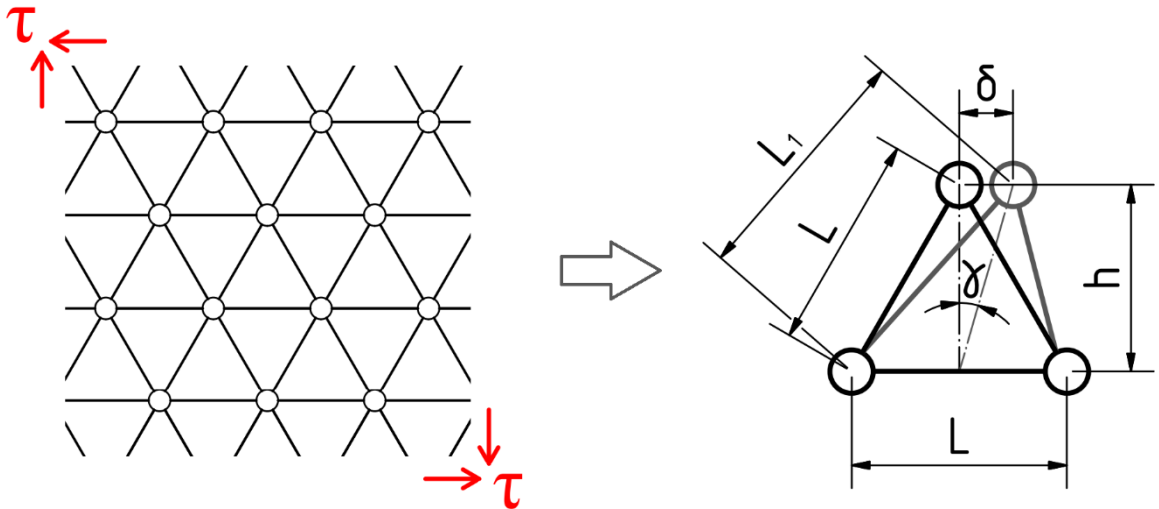
$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}L}{2} \quad (6.92)$$

Po deformaci smykem se horní kloub elementárního trojúhelníku posune o vzdálenost δ , viz obr. 24. O zdeformovaném trojúhelníku platí následující vztah [23]:

$$\tan \gamma = \frac{\delta}{h} \quad (6.93)$$

Do tohoto trigonometrického vztahu dosadíme výšku h vyjádřenou rozměry prutu z rovnice (6.92) [23]:

$$\tan \gamma = \frac{2\delta}{\sqrt{3}L} \quad (6.94)$$



Obrázek 24 Vlevo trojúhelníková síť zatížená smykovým napětím, vpravo deformace elementárního trojúhelníku s rozměry, upraveno dle [23]

Pro malý úhel γ platí $\tan \gamma \approx \gamma$. To dosadíme do rovnice (6.94) a vyjádříme si posun vrcholu elementárního trojúhelníku δ [23]:

$$\delta = \frac{\sqrt{3}L\gamma}{2} \quad (6.95)$$

Po deformaci se levá strana trojúhelníku prodlouží a pravá naopak zkrátí, zatímco spodní strana zůstává nezměněná. Zdeformovanou délku levé strany trojúhelníku L_1 si odvodíme z obrázku 24, vpravo [23]:

$$L_1 = \sqrt{h^2 + \left(\frac{L}{2} + \delta\right)^2} \quad (6.96)$$

Do této rovnice dosadíme vztah pro výšku elementárního trojúhelníku h (6.92), která je vyjádřena pomocí délky L [23]:

$$L_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2} + \delta\right)^2} \quad (6.97)$$

Tento vztah upravíme [23]:

$$L_1 = L \sqrt{1 + \frac{\delta}{L} + \frac{\delta^2}{L^2}} \quad (6.98)$$

Protože posuv vrcholu elementárního trojúhelníku δ je malý, zanedbáme v rovnici (6.98) jeho druhou mocninu [23]:

$$L_1 \approx L \sqrt{1 + \frac{\delta}{L}} \quad (6.99)$$

Tento vztah lze ještě více zjednodušit použitím následujícího vztahu [23]:

$$\left(1 + \frac{\delta}{2L}\right)^2 = 1 + \frac{\delta}{L} + \frac{\delta^2}{4L^2} \quad (6.100)$$

V rovnici (6.100) na pravé straně opět zanedbáme druhou mocninu δ [23]:

$$\left(1 + \frac{\delta}{2L}\right)^2 \approx 1 + \frac{\delta}{L} \quad (6.101)$$

Vztah (6.101) dosadíme do rovnice (6.99) a získáme zjednodušené vyjádření délky zdeformované levé strany elementárního trojúhelníku L_1 , viz obr. 24 [23]:

$$L_1 \approx L + \frac{\delta}{2} \quad (6.102)$$

Z čehož vyplývá, že levá strana elementárního trojúhelníku se po deformaci prodlouží o $\delta/2$. Stejným způsobem lze dokázat, že pravá strana elementárního trojúhelníku se zkrátí o stejnou délku, o kterou se pravá strana prodloužila. [23]

Víme, že změna deformační energie pro pružinu o konstantní tuhosti $k_s/2$, původní délce L a délce po deformaci L_1 je [23, 24]:

$$\Delta W_s = \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) (L_1 - L)^2 \quad (6.103)$$

Celková změna deformační energie je součtem změn deformačních energií všech tří pružin [23]:

$$\Delta W = \Delta W_s^{levá} + \Delta W_s^{pravá} + \Delta W_s^{spodní} \quad (6.104)$$

Do pravé strany rovnice (6.104) dosadíme rovnici (6.103), která vyjadřuje velikost změny deformační energie pro konkrétní pružinu [23].

$$\Delta W = \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) \left(L + \frac{\delta}{2} - L \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) \left(L - \frac{\delta}{2} - L \right)^2 + 0 \quad (6.105)$$

Tuto rovnici upravíme a dostaneme výsledný vztah pro celkovou změnu deformační energie [23]:

$$\Delta W = \frac{k_s \delta^2}{8} \quad (6.106)$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (6.89) vyjadřující hustotu deformační energie a za A dosadíme plochu trojúhelníka, viz obr. 22 vpravo [23]:

$$\Delta w_a = \frac{\frac{k_s \delta^2}{8}}{\frac{1}{2} L h} \quad (6.107)$$

Za h dosadíme vztah (6.92) [23]:

$$\Delta w_a = \frac{\frac{k_s \delta^2}{8}}{\frac{1}{2}L \frac{\sqrt{3}L}{2}} \quad (6.108)$$

Po úpravě dostaneme [23]:

$$\Delta w_a = \frac{k_s \delta^2}{2\sqrt{3}L^2} \quad (6.109)$$

Pro další zpracování si tuto hustotu deformační energie potřebujeme vyjádřit v závislosti na zkosu γ . Proto za δ dosadíme vztah (6.95) [23]:

$$\Delta w_a = \frac{\sqrt{3}k_s \gamma^2}{8} \quad (6.110)$$

Teď, když jsme si konečně vyjádřili hustotu deformační energie, můžeme spočítat i modul pružnost ve smyku K_S díky vztahu (6.91), který říká:

$$K_S = \frac{\partial^2 \Delta w_a}{\partial \gamma^2}$$

Do této rovnice dosadíme za hustotu deformační energie vztah (6.110):

$$K_S = \frac{\partial^2 \left(\frac{\sqrt{3}k_s \gamma^2}{8} \right)}{\partial \gamma^2}$$

Tuto rovnici dvakrát zderivujeme dle zkosu [23]:

$$K_S = \frac{\sqrt{3}k_s}{4} \quad (6.111)$$

Nakonec do této rovnice dosadíme vztah pro tuhost pružiny (6.7) a získáme finální rovnici pro výpočet modulu pružnosti ve smyku pro trojúhelníkovou síť se zanedbáním tloušťky sítě:

$$K_S = \frac{\sqrt{3}E_s A}{4L} \quad (6.112)$$

Kde A je průřez prutu, E_s je Yangův modul pružnosti prutu a L je délka prutu. Tento vyšší vztah dosadíme do rovnice (6.87) a získáme modul pružnosti ve smyku pro trojúhelníkovou strukturu G :

$$G = \frac{K_S}{b} = \frac{\sqrt{3}E_s A}{4Lb} \quad (6.113)$$

Pro naši strukturu tvořenou pruty o kruhovém průřezu A je tloušťka b rovna dvojnásobku poloměru r tohoto kruhového průřezu. Takže rovnici (6.113) upravíme do tvaru:

$$G = \frac{\sqrt{3}E_s \pi r}{8L} \quad (6.114)$$

6.3.1 Zatížení tlakem ve směru osy y

Toto řešení provedeme analogicky jako v předchozím případě, kdy se jednalo o zatížení smykem. A využijeme k tomu již popsané vztahy v předchozí podkapitole.

Opět máme obecně kvádr. Ten je tentokrát zatížen tlakem, což se projeví jeho deformací. Hustotu jeho deformační energie spočteme následujícím vztahem [17, 18]:

$$\Delta w_v = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (6.115)$$

Kde E je Youngův modul pružnosti v tahu/tlaku a ε je relativní prodloužení, které můžeme vyjádřit jako [17, 18]:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (6.116)$$

Kde ΔL je prodloužení prutu a L je původní délka prutu. Dále si vyjádříme Hookův zákon pro tah/tlak [17, 18]:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6.117)$$

Pokud vztah (6.115) dvakrát zderivujeme dle relativního prodloužení, získáme Youngův modul pružnosti v tahu/tlaku E (analogicky s [23]):

$$\frac{\partial^2 \Delta w_v}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{2} E \varepsilon^2}{\partial \varepsilon^2} \quad (6.118)$$

Po zderivování dostáváme (analogicky s [23]):

$$\frac{\partial^2 \Delta w_v}{\partial \varepsilon^2} = E \quad (6.119)$$

Stejně jako v předchozí kapitole budeme od teď uvažovat, že zkoumaný objekt je tenký (jeho tloušťka b je malá). Jako důsledek si opět definujeme tlakovou sílu, která bude působit na jednotkovou délku (analogicky s [23]):

$$N_T = \sigma b \quad (6.120)$$

Kde b je tloušťka zkoumaného objektu. Předpokládáme, že napětí je v průběhu celé tloušťky konstantní. Do (6.120) dosadíme Hookův zákon pro tah/tlak a dostaneme (analogicky s [23]):

$$N_T = E\varepsilon b \quad (6.121)$$

Kde součin Eb odpovídá modulu pružnosti v tahu/tlaku K_T pro tenkostěnné struktury, kde se zanedbává vliv tloušťky:

$$Eb = K_T \quad (6.122)$$

Tuto rovnici tedy upravíme do tvaru (analogicky s [23]):

$$N_T = K_T \varepsilon \quad (6.123)$$

Dále si vyjádříme hustotu deformační energie, která zanedbává vliv tloušťky materiálu (upraveno dle [25]):

$$\Delta w_a = \sum_i \frac{1}{2} K_T \varepsilon_i^2 \quad (6.124)$$

Kde index i vyjadřuje deformaci v konkrétním směru, takže $i = x, y$.

Tuto rovnici pro náš případ elementárního trojúhelníku přepíšeme do tvaru (upraveno dle [25]):

$$\Delta w_a = \frac{1}{2} K_T (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) \quad (6.125)$$

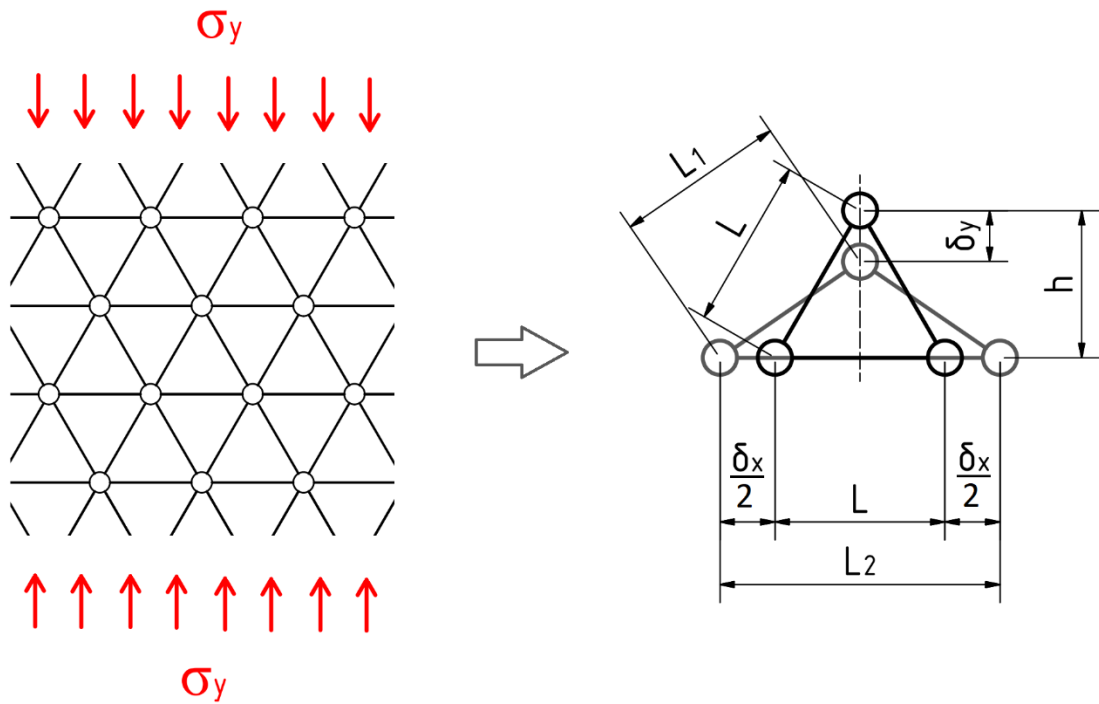
Derivováním této rovnice obdržíme modul pružnosti v tahu/tlaku K_T (analogicky s [23]):

$$\frac{\partial^2 \Delta w_a}{\partial \varepsilon^2} = K_T \quad (6.126)$$

Pro získání finálního vztahu pro modul pružnosti v tahu/tlaku pro trojúhelníkovou síť použijeme stejnou strategii jako v předchozí podkapitole. [23]

6.3.1.1 Modul pružnosti v tlaku pro trojúhelníkovou strukturu

Opět se zaměříme na zkoumání síťové konstrukce složené z rovnostranných trojúhelníků, viz obr. 22. Přičemž na tuto síť bude působit tlakové napětí ve směru osy y . Jednotlivé pruty této sítě si opět představíme jako lineární pružiny o tuhosti k_s . Řešeno analogicky s [23].



Obrázek 25 Vlevo zatížení trojúhelníkové sítě, vpravo deformace elementárního trojúhelníku

Z obrázku 25 si odvodíme délku zdeformované spodní strany trojúhelníku L_2 (analogicky s [23]):

$$L_2 = L + \delta_x \tag{6.127}$$

Do rovnice relativního prodloužení (6.116) si dosadíme naše rozměry, které vyčteme z obrázku 25. Pro relativní prodloužení ve směru osy x dostaneme (analogicky s [23]):

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L} \tag{6.128}$$

A pro relativní prodloužení ve směru osy y dostaneme (analogicky s [23]):

$$\varepsilon_y = -\frac{\delta_y}{h} \tag{6.129}$$

Znaménko mínus na pravé straně rovnice značí, že se jedná o zkrácení.

Z rovnice (6.128) si vyjádříme δ_x (analogicky s [23]):

$$\delta_x = \varepsilon_x L \quad (6.130)$$

Do rovnice (6.129) dosadíme vztah pro výšku trojúhelníka h (6.92) a vyjádříme si δ_y (analogicky s [23]):

$$\delta_y = -\varepsilon_y \frac{\sqrt{3}L}{2} \quad (6.131)$$

Pro pozdější použití si vyjádříme zdeformovanou délku základny trojúhelníka L_2 pomocí relativního prodloužení ε_x (analogicky s [23]):

$$L_2 = L + \varepsilon_x L \quad (6.132)$$

Dále si z obrázku 25 odvodíme vztah pro délku odvěsen po deformaci (analogicky s [23]):

$$L_1 = \sqrt{\left(\frac{L + \delta_x}{2}\right)^2 + (h - \delta_y)^2} \quad (6.133)$$

Do této rovnice si dosadíme vztah pro výšku trojúhelníku h (6.92) (analogicky s [23]):

$$L_1 = \sqrt{\left(\frac{L + \delta_x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}L}{2} - \delta_y\right)^2} \quad (6.134)$$

Tuto rovnici roznásobíme a obdržíme (analogicky s [23]):

$$L_1 = \sqrt{L^2 + \frac{L}{2}\delta_x + \frac{1}{4}\delta_x^2 - \sqrt{3}L\delta_y + \delta_y^2} \quad (6.135)$$

Protože posuvy δ_x a δ_y jsou malé, jejich druhé mocniny v rovnici výše zanedbáme (analogicky s [23]):

$$L_1 = \sqrt{L^2 + \frac{L}{2}\delta_x - \sqrt{3}L\delta_y} \quad (6.136)$$

Do této rovnice dosadíme za δ_x vztah (6.130) a za δ_y vztah (6.131) (analogicky s [23]):

$$L_1 = \sqrt{L^2 + \frac{L}{2}\varepsilon_x L + \sqrt{3}L\varepsilon_y \frac{\sqrt{3}L}{2}} \quad (6.137)$$

Po úpravě dostáváme (analogicky s [23]):

$$L_1 = L \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{3\varepsilon_y}{2}} \quad (6.138)$$

Tento vztah lze ještě více zjednodušit použitím následujícího vztahu (analogicky s [23]):

$$\left(1 + \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{3\varepsilon_y}{2} + \frac{3\varepsilon_x\varepsilon_y}{8} + \frac{\varepsilon_x^2}{16} + \frac{9\varepsilon_y^2}{16} \quad (6.139)$$

Relativní prodloužení ε_x a ε_y jsou malé, proto na pravé straně rovnice zanedbáme členy obsahující jejich součin (analogicky s [23]):

$$\left(1 + \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4}\right)^2 \approx 1 + \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{3\varepsilon_y}{2} \quad (6.140)$$

Vztah (6.140) dosadíme do rovnice (6.138) získáme zjednodušené vyjádření zdeformované délky odvěsen trojúhelníka L_1 , viz obr. 25 (analogicky s [23]):

$$L_1 = L \left(1 + \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4} \right) \quad (6.141)$$

Dále si připomeneme rovnici (6.103) vyjadřující změnu deformační energie pro pružinu o konstantní tuhosti k_s [23]:

$$\Delta W_s = \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) (L_1 - L)^2$$

Celková změna deformační energie bude součtem změn deformačních energií všech tří pružit, viz rovnice (6.104) [23].

$$\Delta W = \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) (L_1 - L)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) (L_1 - L)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) (L_2 - L)^2 \quad (6.142)$$

Do této rovnice dosadíme vztahy (6.132) a (6.141) vyjadřující délky stran po deformaci L_2 a L_1 (analogicky s [23]):

$$\Delta W = \left(\frac{k_s}{2} \right) \left[L \left(1 + \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4} \right) - L \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) (L + \varepsilon_x L - L)^2 \quad (6.143)$$

Kde po úpravě dostáváme výsledný vztah pro změnu deformační energie (analogicky s [23]):

$$\Delta W = \frac{k_s L^2}{32} (9\varepsilon_x^2 + 9\varepsilon_y^2 + 3\varepsilon_x \varepsilon_y) \quad (6.144)$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (6.89) a dostaneme hustotu deformační energie (analogicky s [23]):

$$\Delta w_a = \frac{\Delta W}{A} = \frac{\frac{k_s L^2}{32} (9\varepsilon_x^2 + 9\varepsilon_y^2 + 3\varepsilon_x \varepsilon_y)}{\frac{1}{2} L \frac{\sqrt{3} L}{2}} \quad (6.145)$$

A po úpravě dostaneme výsledný vztah pro hustotu deformační energie:

$$\Delta w_a = \frac{k_s(9\varepsilon_x^2 + 9\varepsilon_y^2 + 9\varepsilon_x\varepsilon_y)}{8\sqrt{3}} \quad (6.146)$$

Nyní si můžeme vyjádřit modul pružnosti v tlaku K_{Ty} ve směru osy y , ze vztahu (6.126):

$$K_{Ty} = \frac{\partial^2 \Delta w_a}{\partial \varepsilon_y^2} = \frac{\partial^2 \left(\frac{k_s(9\varepsilon_x^2 + 9\varepsilon_y^2 + 9\varepsilon_x\varepsilon_y)}{8\sqrt{3}} \right)}{\partial \varepsilon_y^2} \quad (6.147)$$

Po zderivování rovnice (6.147) dostaneme:

$$K_{Ty} = \frac{3\sqrt{3}k_s}{4} \quad (6.148)$$

Do tohoto vztahu dosadíme za k_s vztah (2.2) a získáme rovnici pro výpočet modulu pružnosti v tlaku pro naši pravidelnou trojúhelníkovou síť při zanedbání tloušťky, pro zatížení působící ve směru osy y :

$$K_{Ty} = \frac{3\sqrt{3}E_s A}{4L} \quad (6.149)$$

Tuto rovnici dosadíme do rovnice (6.122), přičemž Youngův modul pružnosti konstrukce si zde pro přehlednost označíme hvězdičkou v horním indexu:

$$E_y^* = \frac{3\sqrt{3}E_s A}{4L b} \quad (6.150)$$

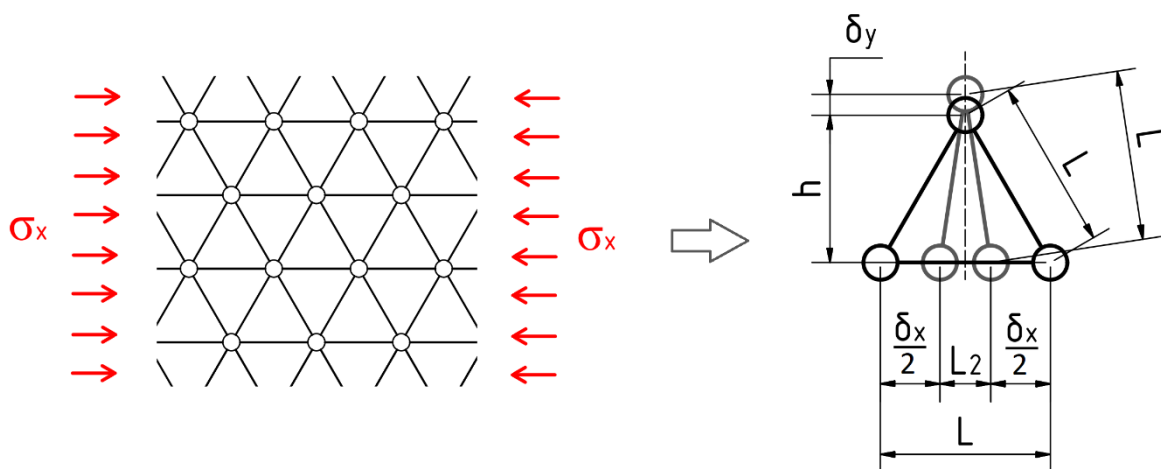
Kde za b opět dosadíme dvojnásobek poloměru průřezu prutu $2r$ a za A dosadíme plochu kruhového průřezu πr^2 a dostaneme výsledný vztah pro modul pružnosti trojúhelníkové struktury při zatížení ve směru osy y :

$$E_y^* = \frac{3\sqrt{3}E_s\pi r}{8L}$$

(6.151)

6.3.2 Zatížení tlakem ve směru osy x

V této podkapitole se budeme zabývat zkoumáním elementárního trojúhelníku, který je namáhán tlakem ve směru osy x . Pro toto řešení použijeme vztahy, které jsme si odvodili v předchozí podkapitole a které jsou pro toto řešení totožné až na výjimky, které si zde popíšeme.



Obrázek 26 Vlevo zatížení trojúhelníkové sítě, vpravo deformace elementárního trojúhelníku, analogicky s [23]

Z obrázku 26 si odvodíme délku zdeformované spodní strany trojúhelníku R (analogicky s [23]):

$$L_2 = L - \delta_x \quad (6.152)$$

Do rovnice relativního prodloužení (6.116) si opět dosadíme naše rozměry, které vyčteme z obrázku 26 (analogicky s [23]):

$$\varepsilon = -\frac{\delta_x}{L} \quad (6.153)$$

Znaménko mínus na pravé straně rovnice nám zde značí, že se jedná o zkrácení.

Celková změna deformační energie bude opět součtem změn deformačních energií všech tří pružin, dle rovnice (6.104) [23]:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) (L - L)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) (L - L)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_s}{2} \right) (L_2 - L)^2 \quad (6.154)$$

Po úpravě dostáváme výsledný vztah pro celkovou změnu deformační energie (analogicky s [23]):

$$\Delta W = \frac{1}{4} k_s \delta_x^2 \quad (6.155)$$

Z rovnice (6.153) si vyjádříme δ_x a dosadíme ho do této rovnice (analogicky s [23]):

$$\Delta W = \frac{1}{4} k_s L^2 \varepsilon_x^2 \quad (6.156)$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (6.89) a dostaneme hustotu deformační energie (analogicky s [23]):

$$\Delta w_a = \frac{\Delta W}{A} = \frac{\frac{1}{4} k_s L^2 \varepsilon_x^2}{\frac{1}{2} L \frac{\sqrt{3} L}{2}} \quad (6.157)$$

Po úpravě dostáváme (analogicky s [23]):

$$\Delta w_a = \frac{k_s \varepsilon_x^2}{\sqrt{3}} \quad (6.158)$$

Nyní si můžeme vyjádřit modul pružnosti v tlaku K_{Tx} ve směru osy x , ze vztahu (6.126), (analogicky s [23]):

$$K_{Tx} = \frac{\partial^2 \Delta w_a}{\partial \varepsilon_x^2} = \frac{\partial^2 \left(\frac{k_s \varepsilon_x^2}{\sqrt{3}} \right)}{\partial \varepsilon_x^2} \quad (6.159)$$

Po zderivování dostaneme (analogicky s [23]):

$$K_{Tx} = \frac{2\sqrt{3}k_s}{3} \quad (6.160)$$

Do této rovnice dosadíme za k_s vztah (2.2) a získáme finální rovnici pro výpočet modulu pružnosti v tlaku ve směru osy x pro trojúhelníkovou síť (analogicky s [23]):

$$K_{Tx} = \frac{2\sqrt{3}E_s A}{3L} \quad (6.161)$$

Tuto rovnici dosadíme do rovnice (6.122), přičemž Youngův modul pružnosti konstrukce si zde opět pro přehlednost označíme hvězdičkou v horním indexu:

$$E_x^* = \frac{2\sqrt{3}E_s A}{3L}$$

Kde za b opět dosadíme dvojnásobek poloměru průřezu prutu $2r$ a za A dosadíme plochu kruhového průřezu πr^2 a dostaneme výsledný vztah pro modul pružnosti trojúhelníkové struktury při zatížení ve směru osy x :

$$E_x^* = \frac{2\sqrt{3}E_s A}{6rL} \quad (6.162)$$

Srovnáme-li vztahy (6.148) a (6.162), vidíme, že moduly pružnosti v tlaku pro náš pravidelný trojúhelníkový systém jsou vyšší při zatížení ve směru osy y .

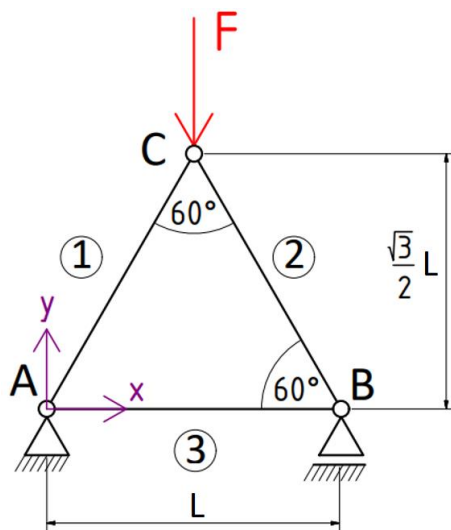
6.4 Analytické řešení kontrolních úloh

Pro kontrolu a porovnání numericky získaných hodnot bylo provedeno analytické řešení jednoduchých úloh, které následně byly spočítány i numericky pomocí DSM v prostředí MatLab. Tím jsme si ověřili, že metoda DSM byla pochopena a správně naprogramována. Složitější úlohy jsme řešili již jen numericky. Analyticky byla řešena jak staticky určitá úloha, tak i staticky neurčitá úloha.

6.4.1 Staticky určitá (SU) úloha

6.4.1.1 Zadání SU úlohy

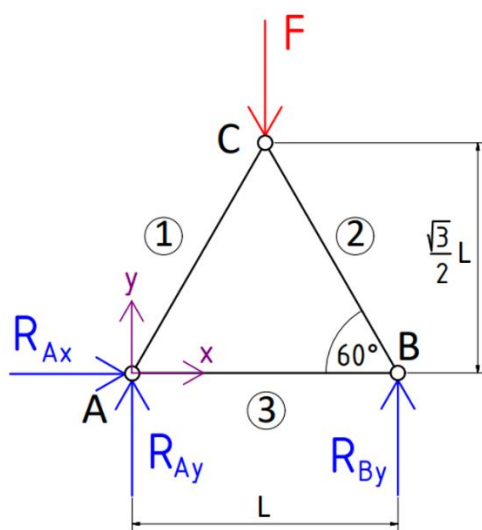
Naším úkolem je vyšetřit posuvy a síly ve styčnicích při známých rozměrech prutů, materiálových vlastnostech a silovém zatížení, viz obr. 27.



Obrázek 27 Model prutové konstrukce staticky určité úlohy

6.4.1.2 Řešení SU úlohy

Nejdříve si prutovou soustavu uvolníme. To uděláme tak, že vazby nahradíme reakcemi ve vazbách, viz obr. 28.



Obrázek 28 Uvolnění staticky určitého modelu

Dále sestavíme rovnice rovnováhy do směru osy x a y pro uvolněný model z obrázku 28.

Rovnice rovnováhy ve směru osy x pro SU uvolněný model:

$$R_{Ax} = 0 \tag{6.163}$$

Rovnice rovnováhy ve směru osy y pro SU uvolněný model:

$$R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \tag{6.164}$$

Poslední rovnicí rovnováhy bude momentová rovnice rovnováhy vztažená ke kloubu A :

$$R_{By} \cdot L - F \cdot \frac{L}{2} = 0 \tag{6.165}$$

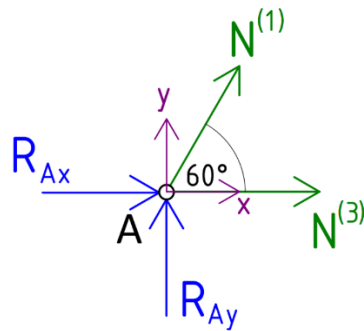
Po úpravě rovnice (6.165) dostáváme:

$$R_{By} = \frac{F}{2} \tag{6.166}$$

Dosazením vztahu (6.166) do rovnice (6.164) dostáváme:

$$R_{Ay} = \frac{F}{2} \tag{6.167}$$

Dále je potřeba vypočítat normálové síly v prutech. To provedeme uvolněním jednotlivých styčniců.



Obrázek 29 Silové účinky ve styčnicku A pro staticky určitou úlohu

Pro styčnick A vyčteme rovnice rovnováhy z obrázku 29. Rovnice rovnováhy ve směru osy x pro styčnick A staticky určité úlohy bude mít následující tvar:

$$R_{Ax} + N^{(3)} + N^{(1)} \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (6.168)$$

Rovnice rovnováhy ve směru osy y pro styčnick A staticky určité úlohy:

$$R_{Ay} + N^{(1)} \cdot \sin 60^\circ = 0 \quad (6.169)$$

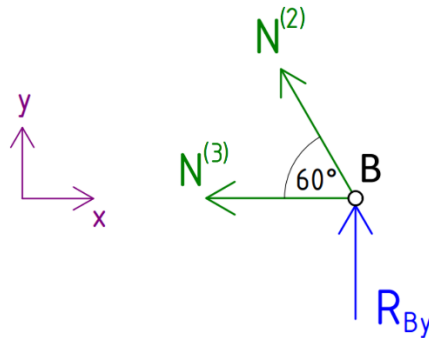
Dosazením vztahu (6.167) do rovnice (6.169) dostáváme normálovou sílu v prutu 1:

$$N^{(1)} = -\frac{F}{\sqrt{3}} \quad (6.170)$$

A dosazením této normálové síly (6.170) spolu se vztahem (6.163) do rovnice (6.168) dostáváme normálovou sílu v prutu 3:

$$N^{(3)} = \frac{F}{2\sqrt{3}} \quad (6.171)$$

Dále si uvolníme styčnick B , viz obr. 30.



Obrázek 30 Silové účinky ve styčnicku B pro staticky určitou úlohu

Rovnice rovnováhy ve směru osy x pro styčnick B staticky určité úlohy:

$$N^{(2)} \cdot \cos 60^\circ + N^{(3)} = 0 \quad (6.172)$$

Do této rovnice rovnováhy (6.172) dosadíme vztah (6.171), čímž dostaneme normálovou sílu v prutu 2:

$$N^{(2)} = -\frac{F}{\sqrt{3}}$$

Rovnice rovnováhy ve směru osy y už nemusíme dělat, jelikož sílu $N^{(3)}$ máme vypočítanou z rovnic rovnováhy styčnicku A .

Stejně tak je zbytečné počítat rovnice rovnováhy pro styčnick C , jelikož už jsme zvládli spočítat všechny vnitřní síly ve styčnicích.

6.4.1.2.1 Celková deformační energie

Celkovou deformační energii popisuje vztah [17, 18]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{N^2(x)}{E \cdot A(x)} \cdot dx \quad (6.173)$$

Tuto rovnici můžeme vzhledem ke konstantnímu průřezu a normálovým silám podél celého prutu upravit do tvaru [17, 18]:

$$U = \sum_{e=1}^m \frac{1}{2} \frac{(N^{(e)})^2 \cdot L}{EA} \quad (6.174)$$

Kde m je počet prutů. V našem případě je $m = 3$. K délce prutu L , průřezu A a Youngovu modulu pružnosti E nepřičítáme již index (e) označující prut, protože jsou tyto veličiny pro všechny pruty stejné.

$$U = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\left(-\frac{F}{\sqrt{3}}\right)^2 L}{EA} + \frac{\left(\frac{F}{2\sqrt{3}}\right)^2 L}{EA} \right] = \frac{3 LF^2}{8 EA} \quad (6.175)$$

6.4.1.2.2 Výpočet posuvů

Svislý posuv v bodě C , u_{yC} , spočteme pomocí *Castiglianovy věty*. Ta říká, že posuv v bodě je roven parciální derivaci celkové deformační energie podle síly působící v tomto bodě rovnoběžně s vyšetřovaným posuvem. [17, 18]

$$u_{yC} = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{3FL}{4EA} \quad (6.176)$$

Tento posuv ovšem není závěrečným výsledkem. Byl by, pokud by síla F mířila opačným směrem, a to ve směru osy y . Síla v naší úloze ovšem míří proti směru osy y , tak je potřeba u posuvu ještě zohlednit znaménko. Z obrázku 27 je vidět, že síla i posuv budou mít stejný směr, tedy proti směru osy y , což značíme záporným znaménkem. Proto výsledný svislý posuv v bodě C bude záporný:

$$u_{yC} = -\frac{3FL}{4EA} \quad (6.177)$$

Z deformačních podmínek víme, že horizontální i vertikální posuv v bodě A je nulový a dále, že vertikální posuv v bodě B je taktéž nulový.

$$u_{xA} = u_{yA} = u_{yB} = 0$$

O horizontálním posuvu v bodě B , u_B , víme, že je roven prodloužení prutu 3. Pro výpočet prodloužení prutu budeme vycházet ze vztahu [17, 18]:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \cdot dx \quad (6.178)$$

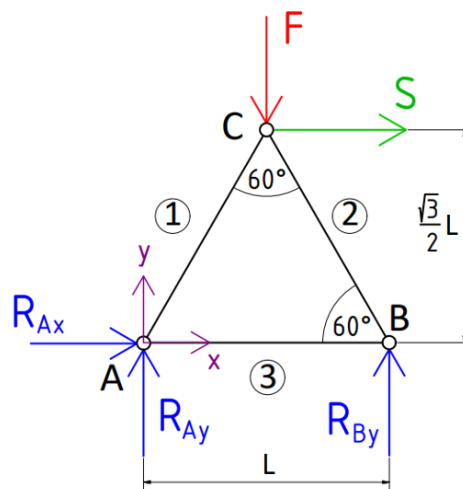
Tento vztah si opět díky konstantním průřezům a vnitřním silám po celé délce jednotlivých prutů upravíme do tvaru [17, 18]:

$$\Delta l^{(e)} = \frac{N^{(e)} \cdot L^{(e)}}{E^{(e)} \cdot A^{(e)}} \quad (6.179)$$

Kde e značí číslo prutu. Takže horizontální posunutí v bodě B bude:

$$u_{xB} = \Delta L^{(3)} = \frac{N^{(3)}L}{EA} = \frac{FL}{2\sqrt{3}EA} = \frac{\sqrt{3}FL}{6EA} \quad (6.180)$$

Horizontální posuv u_C určíme pomocí slepé síly $S = 0$.



Obrázek 31 Uvolněný staticky určitý model s působením slepé síly S

Určíme si rovnice rovnováhy pro uvolněný model SU úlohy se zavedenou slepou silou z obrázku 31. Rovnice rovnováhy ve směru osy x bude mít tvar:

$$R_{Ax} + S = 0 \quad (6.181)$$

Dále sestavíme rovnici rovnováhy ve směru osy y uvolněného modelu se zavedenou slepou silou staticky určité úlohy:

$$R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \quad (6.182)$$

Nakonec sestavíme momentovou rovnici rovnováhy ke kloubu A uvolněného modelu se zavedenou slepou silou staticky určité úlohy:

$$R_{By} \cdot L - F \cdot \frac{L}{2} - S \frac{\sqrt{3}}{2} L = 0 \quad (6.183)$$

Z rovnice rovnováhy (6.181) je patrné, že reakční síla v kloubu A ve směru osy x bude:

$$R_{Ax} = -S \quad (6.184)$$

Stejně tak z rovnice rovnováhy (6.183) úpravou dostáváme, že reakce v kloubu A ve směru osy y bude:

$$R_{By} = \frac{F}{2} + S \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6.185)$$

Nakonec dosazením vztahu (6.185) do rovnice (6.182) dostáváme reakci v kloubu A ve směru osy y :

$$R_{Ay} = \frac{F}{2} - S \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6.186)$$

Dále určíme rovnice rovnováhy pro jednotlivé styčníky staticky určitého modelu se zavedením slepé síly. Styčník A i B budou mít stejné rovnice rovnováhy jako model bez zavedené slepé síly, které jsme již definovali, jelikož slepá síla působí v kloubu C . Dosazením vztahu (6.186) do rovnice rovnováhy (6.169) dostáváme normálovou sílu v prutu 1 pro staticky určitý model se zavedením slepé síly:

$$N^{(1)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}R_{Ay} = -\frac{F}{\sqrt{3}} + S \quad (6.187)$$

A dosazením vztahů (6.184) a (6.187) do rovnice rovnováhy (6.168) obdržíme normálovou sílu v prutu 3 pro staticky určitý model se zavedením slepé síly:

$$N^{(3)} = S - \frac{N_1}{2} = \frac{F}{2\sqrt{3}} + \frac{S}{2} \quad (6.188)$$

Nakonec dosazením vztahu (6.188) do rovnice rovnováhy (6.172) dostaneme normálovou sílu pro prut 2 pro staticky určitý model se zavedením slepé síly:

$$N^{(2)} = -2N^{(3)} = -\frac{F}{\sqrt{3}} - S \quad (6.189)$$

Pro výpočet horizontálního posuvu v bodě C , u_c , je potřeba nejprve spočítat celkovou deformační energii pro model se zavedenou slepou silou. Tu spočteme dle vztahu (6.174):

$$U = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \frac{(N^{(e)})^2 \cdot L}{EA}$$

$$U = \frac{L}{2EA} \left[\left(-\frac{F}{\sqrt{3}} + S \right)^2 + \left(-\frac{F}{\sqrt{3}} - S \right)^2 + \left(\frac{F}{2\sqrt{3}} + \frac{S}{2} \right)^2 \right] \quad (6.190)$$

$$U = \frac{L}{4EA} \left[\frac{3}{2} F^2 + \frac{FS}{\sqrt{3}} + 3S^2 \right] \quad (6.191)$$

Konečně horizontální posuv v bodě C spočteme opět pomocí Castiglianovy věty:

$$u_{xc} = \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\sqrt{3} FL}{12 EA} \quad (6.192)$$

6.4.1.3 Výsledné posuvy:

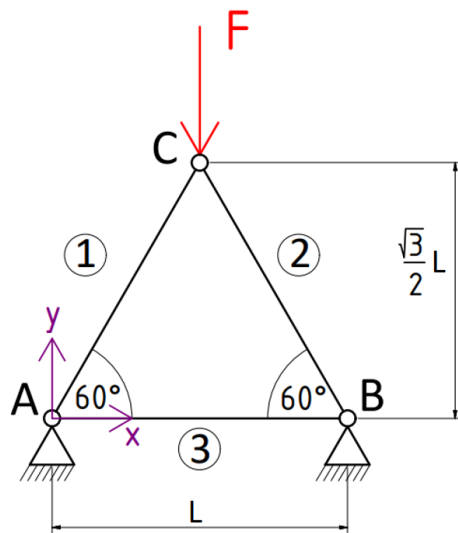
$$\begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}FL}{6EA} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}FL}{12EA} \\ -\frac{3FL}{4EA} \end{bmatrix}$$

Tyto posuvy budeme později porovnávat s numericky získanými daty.

6.4.2 Staticky neurčitá (SN) úloha

6.4.2.1 Zadání SN úlohy

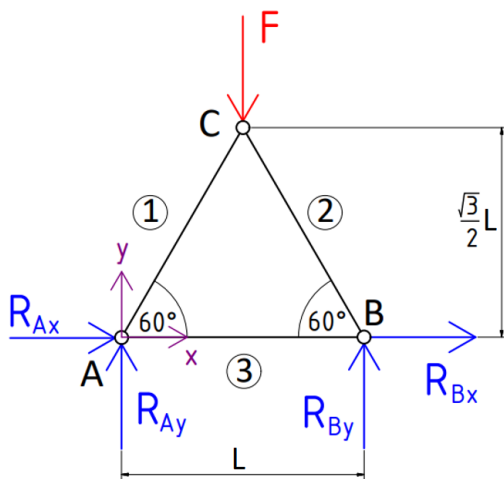
Opět je potřeba, stejně jako u staticky určité úlohy, vyšetřit posuvy a síly ve styčnicích při známých rozměrech prutů, materiálových vlastnostech a silovém zatížení, viz obr. 32.



Obrázek 32 Model prutové konstrukce staticky neurčitě úlohy

6.4.2.2 Řešení SN úlohy

Statically neurčitou úlohu budeme řešit obdobně jako již vyřešenou staticky určitou úlohu. Nejdříve si prutovou soustavu uvolníme, viz obr. 33.



Obrázek 33 Uvolnění staticky neurčitého modelu

Dále sestavíme rovnice rovnováhy pro uvolněný model z obrázku 33. Rovnice rovnováhy ve směru osy x bude mít tvar:

$$R_{Ax} + R_{Bx} = 0$$

Tuto rovnici si upravíme do tvaru:

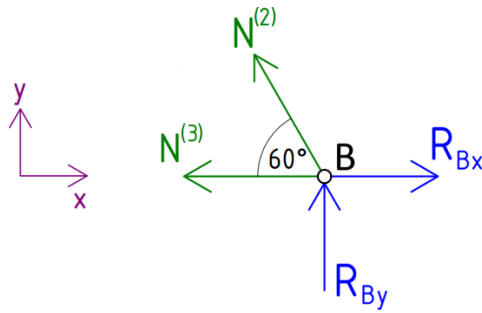
$$R_{Ax} = -R_{Bx}$$

(6.193)

Rovnice rovnováhy ve směru osy y stejně tak jako momentová rovnice ke kloubu A bude mít stejný tvar jako pro staticky určitý model, viz rovnice (6.164) a (6.165). Takže i reakce, které z těchto rovnic vycházejí, budou mít stejný tvar jako pro staticky určitou úlohu, viz rovnice (6.166) a (6.167).

Pak vypočítáme normálové síly v prutech z uvolněných styčniců. Rovnice rovnováhy pro styčník A bude opět shodná s rovnicemi rovnováhy ze staticky určité úlohy, viz rovnice (6.168) a (6.169). Stejně jako ve staticky určité úloze dostáváme pro rovnici rovnováhy stejnou normálovou sílu $N^{(1)}$ pro prut 1, viz vztah (6.170).

Dále si uvolníme styčník B , viz obr. 34.



Obrázek 34 Silové účinky ve styčnicku B pro staticky neurčitou úlohu

Z obrázku 34 vyčteme rovnice rovnováhy. Rovnice rovnováhy ve směru osy x pro styčnick B staticky neurčité úlohy bude mít tvar:

$$-N^{(2)} \cdot \cos 60^\circ - N^{(3)} + R_{Bx} = 0 \quad (6.194)$$

A rovnice rovnováhy ve směru osy y pro styčnick B staticky neurčité úlohy bude mít tvar:

$$R_{By} + N^{(2)} \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (6.195)$$

Z předchozích výpočtů víme, že $R_{By} = \frac{F}{2}$, což nám umožní spočítat z rovnice (6.195) normálovou sílu $N^{(2)}$:

$$N^{(2)} = -\frac{F}{\sqrt{3}} \quad (6.196)$$

Z deformační podmínky dopočteme zbylé síly a reakce. Vzhledem k vazbám víme, že prodloužení prutu 3 musí být nulové.

$$\Delta L^{(3)} = 0 = \frac{N^{(3)}L}{EA} \quad (6.197)$$

Z rovnice (6.197) vyplývá, že normálová síla v prutu 3 bude nulová:

$$N^{(3)} = 0 \quad (6.198)$$

Do rovnice (6.168) už můžeme dosadit teď už známou sílu $N^{(3)}$ a dopočítat reakci R_{Ax} :

$$R_{Ax} = \frac{F}{2\sqrt{3}}$$

A dosazením R_{Ax} do rovnice (6.193) dopočteme poslední dosud neznámou reakci R_{Bx} :

$$R_{Bx} = -\frac{F}{2\sqrt{3}}$$

Díky pevné rotační vazbě v bodě A a B víme, že v těchto bodech nedojde k posuvům, tedy že:

$$u_{xA} = u_{yA} = u_{xB} = u_{yB} = 0$$

Zbývá tedy dopočítat posuvy v bodě C . Vertikální posuv v tomto bodě spočítáme opět přes Castiglianovu větu.

$$u_{yC} = \frac{\partial U}{\partial F} \tag{6.199}$$

Nejdříve si pro tuto úlohu musíme spočítat deformační energii U , dosazením spočtených normálových sil do vztahu (6.174):

$$U = \frac{L}{2EA} \left[2 \left(-\frac{F}{\sqrt{3}} \right)^2 + 0 \right] = \frac{F^2 L}{3EA} \tag{6.200}$$

Dosazením vztahu (6.200) do rovnice (6.199) dostaneme výsledný vertikální posuv v bodě C .

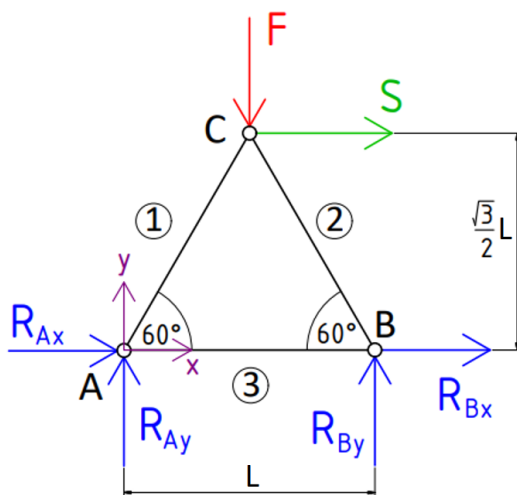
$$u_{yC} = \frac{2FL}{3EA}$$

Tento posuv ovšem opět není závěrečným výsledkem stejně jako ve staticky určité úloze. Síla F v naší úloze míří proti směru osy y takže je potřeba u posuvu zohlednit znaménko. Z obrázku 32 je vidět, že síla i posuv budou mít stejný směr, tedy proti směru osy y , což značíme záporným znaménkem. Takže výsledný vertikální posuv v bodě C bude záporný:

$$u_{yC} = -\frac{2FL}{3EA}$$

Pro výpočet horizontálního posuvu u_{xC} zavedeme opět slepou sílu $S = 0$, viz obr.

35.



Obrázek 35 Uvolněný staticky neurčitý model s působením slepé síly S

Z obrázku 35 vyčteme rovnice rovnováhy pro uvolněný staticky neurčitý model s působením slepé síly S . Rovnici rovnováhy ve směru osy x zapíšeme ve tvaru:

$$R_{Ax} + R_{Bx} + S = 0 \quad (6.201)$$

Z této rovnice si vyjádříme reakci v kloubu A ve směru osy x :

$$R_{Ax} = -R_{Bx} - S \quad (6.202)$$

Rovnice rovnováhy ve směru osy y a momentová rovnice rovnováhy ke kloubu A pro staticky neurčitou úlohu se zavedením slepé síly budou mít stejný tvar jako pro staticky určitou úlohu, viz rovnice (6.182) a (6.183). Stejný tvar budou mít i reakce z nich vzešlé R_{Ay} a R_{By} , viz vztahy (6.185) a (6.186).

Dále si definujeme rovnice rovnováhy uvolněných styčníků A a B staticky neurčitého modelu se zavedením slepé síly S . Rovnice rovnováhy pro uvolněný styčník A zůstávají stejné jak pro staticky určitou úlohu, tak pro staticky neurčitou úlohu, se

zavedením slepé síly i bez jejího zavedení, viz rovnice (6.168) a (6.169). Z těchto rovnic dostáváme opět stejnou hodnotu normálové síly pro prut 1, viz vztah (6.187). Pro uvolněný styčnick B staticky neurčitýho modelu se zavedením slepé síly jsou rovnice rovnováhy stejné jako pro staticky neurčitý model bez zavedení slepé síly, viz rovnice (6.194) a (6.195). Z těchto rovnic dostáváme stejnou hodnotu normálové síly pro prut 2 jako pro staticky určitou úlohu se zavedením slepé síly, viz vztah (6.189).

Dosazením vztahu (6.189) a deformační podmínky (6.198) do rovnice (6.194) dostaneme Reakci v kloubu B ve směru osy x :

$$R_{Bx} = -\frac{F}{2\sqrt{3}} - \frac{S}{2}$$

Výslednou reakci R_{Bx} dosadíme do rovnice (6.201) a dostaneme reakci R_{Ax} :

$$R_{Ax} = \frac{F}{2\sqrt{3}} - \frac{S}{2}$$

Horizontální posuv spočítáme opět přes deformační energii pomocí Castiglianovy věty.

$$u_{xc} = \frac{\partial U}{\partial S} \tag{6.203}$$

Deformační energii U spočteme opět dosazením vypočtených sil do vztahu (6.174).

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{\left(S - \frac{F}{\sqrt{3}}\right)^2 L}{EA} + \frac{\left(-S - \frac{F}{\sqrt{3}}\right)^2 L}{EA} + 0 \right] = \frac{L}{EA} \left[S^2 + \frac{F^2}{3} \right] \tag{6.204}$$

Dosazením výsledné deformační energie do vztahu (6.203) dostáváme horizontální posuv v bodě C .

$$u_{xc} = \frac{2SL}{EA}$$

Do tohoto vztahu dosadíme hodnotu slepé síly $S = 0$ a vyjde nám, že horizontální posuv v bodě C je nulový.

$$u_{xC} = 0$$

6.4.2.3 Výsledné posuvy:

$$\begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2FL}{3EA} \end{bmatrix}$$

Tyto posuvy budeme opět porovnávat s numericky získanými daty.

7 Implementace přímé metody tuhosti

Numericky budeme úlohy řešit pomocí metody přímé tuhosti (DMS), která je důkladně popsána v kapitole 6. Pro řešení úloh použijeme program napsaný v jazyce MatLab ve verzi R2016a.

7.1 Kontrolní úlohy

Abychom se nejprve s přímou metodou tuhosti seznámili a ověřili si správnost pochopení a aplikace budeme nejdříve řešit jednoduchou konstrukci, kterou jsme již vyřešili analyticky, viz kapitola 6. To nám poslouží pro kontrolu.

7.1.1 Vstupní hodnoty

Pro lepší srovnání výsledků analyticky a numericky získaných dat budeme kontrolní konstrukci řešit v symbolických proměnných. Zavedeme si pro to symbolické hodnoty Youngova modulu pružnosti E , plochy průřezu prutu A , délky prutu L a zatížení F .

```
syms E;  
syms A;  
syms L;  
syms F;
```

Pro každý prut si založíme vlastní strukturu, z které je pak jednoduché zpětně získat potřebnou hodnotu. Struktury pak pro snazší zpracování pomocí cyklů uložíme jako vektor.

```
data = [  
    struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', pi / 3, 'od', 1, 'do', 3),  
    struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', 2 * pi / 3, 'od', 2, 'do', 3),  
    struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', 0, 'od', 1, 'do', 2)  
];
```

V této struktuře jsou kromě fyzikálních parametrů prutu také jeho otočení oproti globálnímu systému souřadnic ϕ a proměnné od a do , kde od znamená počáteční kloub konkrétního prutu a do jeho koncový kloub.

Pro další procesy je potřeba zjistit maximální číslo kloubu. K tomu slouží samostatná funkce `zjisti_max_cislo_kloubu`, která je uložena v samostatném souboru. Ta funguje tak, že postupně projde celý vektor `data` a postupně navyšuje hodnotu

max_kloub původně nastavenou na 0 tak, aby byla rovna nejvyšší nalezené hodnotě *od* nebo *do*. Předpokládá se, že při číslování kloubů nebylo žádné číslo vynecháno.

```
function max_kloub = zjisti_max_cislo_kloubu(data)
    max_kloub = 0;
    for i = 1:numel(data) % Pro kazde i od 1 do poctu prutu
        prut = data(i); % Vezmeme si i-ty prut
        if prut.od > max_kloub % prut.od je kloub
            max_kloub = prut.od; % nastaví aktualni max kloubu od
        end;
        if prut.do > max_kloub % prut.do je kloub
            max_kloub = prut.do; % nastaví aktualni max kloubu do
        end;
    end;
end

% Zjisteni maximalniho indexu kloubu
max_kloub = zjisti_max_cislo_kloubu(data);
```

7.1.2 Okrajové podmínky

Dále definujeme okrajové podmínky. Do vektoru *podpera* si uložíme vybrané indexy řádků a sloupců budoucí globální matice tuhosti. Ty odpovídají nulovým posuvům způsobenými podpěrami. Tyto řádky a sloupce budeme nulovat při aplikaci okrajových podmínek.

```
% ktere klouby jsou ukotvene (vuci matici K)
% x = 2 * kloub - 1
% y = 2 * kloub
podpera = [1, 2, 4]; % Staticky urcita uloha
%podpera = [1, 2, 3, 4]; % Staticky neurcita uloha
```

7.1.3 Silové zatížení

Aplikované síly budeme zapisovat do vektoru, který obsahuje silové složky ve směru osy *x* a *y* pro každý kloub. Celkem máme 3 klouby, takže vektor má rozměr 6x1, viz rovnice (6.1). Tedy $2 * \text{hodnota } \textit{max_kloub}$.

Protože počítáme se symbolickými proměnnými, musí i tento vektor být symbolický. Založíme si nejprve symbolickou proměnnou *f_aplikovana*. Pak ji naplníme šesti nulami, tím se z ní stane symbolický vektor 6x1. Do jeho poslední složky vložíme opět symbolickou aplikovanou sílu *F*.

```
syms f_aplikovana;
```

```
f_aplikovana(1:(2 * max_kloub),1) = transpose((1:(2 * max_kloub)) * 0); %
Nastavi na vektor samych nul
syms F;
f_aplikovana(6) = -F; % nastavi zadane zatizeni (silove) na pozici 6
(fyC)
```

7.1.4 Globální matice tuhosti soustavy

Teoreticky se nejprve pro každý prut sestaví lokální matice tuhosti. Pak se opět pro každý prut sestaví transformační matice pro převod z globálního do lokálního souřadnicového systému. Ta se použije na převod lokálních matic tuhosti na globální matice tuhosti. Ty se pak všechny rozšíří na rozšířené globální matice tuhosti. Nakonec se jednotlivé rozšířené matice tuhosti sečtou na výslednou matici tuhosti celé konstrukce a výsledná soustava rovnic se vyřeší.

V praxi je ale výhodnější postupovat jinak. Teoretický postup je zbytečně náročný na paměť počítače a je i složitější ho naprogramovat. Proto je výhodnější sestavovat globální matici celé konstrukce postupně. Začít s globální maticí tuhosti celé konstrukce sestávající prozatím ze samých nul. Pro každý prut spočítat **lokální matici tuhosti** ze vztahu (6.13) a **transformační matici**, viz rovnice (6.14). Z nich spočítat **globální matici tuhosti prutu** ze vztahu (6.21). Tu rozšířit a přičíst ke **globální matici tuhosti celé konstrukce**.

```
K_globalni = zeros(2 * max_kloub); % K_globalni je matice
(2*max_kloub)x(2*max_kloub) poskladana z jednotlivych rozsirenych matic K

% Postupne spocitame rozsirene K pro jednotlivy pruty a pridame je do
% K_globalni. K_globalni je pak jeste potreba vynulovat v mistech rovnic
% odpovidajicich podperam

for i = 1:numel(data) % Pro kazde i od 1 do poctu prutu
    prut = data(i); % Vezmeme si i-ty prut

    lokalni_K = (prut.E * prut.A / prut.L) * [1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1
0; 0 0 0 0];

    T = [cos(prut.phi) sin(prut.phi) 0 0; -sin(prut.phi) cos(prut.phi) 0
0; 0 0 cos(prut.phi) sin(prut.phi); 0 0 -sin(prut.phi) cos(prut.phi)];
    data(i).T = T; % Ulozime si T do struktury pro pozdejsi pouziti

    global_K_prutu = T^-1 * lokalni_K * T;

% Poskladani celkoveho globalniho K pro vsechny pruty
% prut.od a prut.do je znaceni kloubu
```

```

syms rozsirena_K_prutu; % rozsirena_K je matice nul, do ktere jsme
dali 1 malou 4x4
rozsirena_K_prutu(1:(2 * max_kloub), 1:(2 * max_kloub)) = zeros((2 *
max_kloub));
od = (2 * prut.od - 1):(2 * prut.od);
do = (2 * prut.do - 1):(2 * prut.do);
rozsirena_K_prutu(od, od) = global_K_prutu(1:2, 1:2); % od, od
rozsirena_K_prutu(od, do) = global_K_prutu(1:2, 3:4); % od, do
rozsirena_K_prutu(do, od) = global_K_prutu(3:4, 1:2); % do, od
rozsirena_K_prutu(do, do) = global_K_prutu(3:4, 3:4); % do, do

K_globalni = K_globalni + rozsirena_K_prutu;
end;

```

Dále sestavíme rozšířenou globální matici tuhosti prutu. Protože pracujeme se symbolickými proměnnými je potřeba si nejprve definovat *rozsirena_K_prutu* jako symbolickou proměnnou. Pak do ní přiřadíme jednotlivé prvky nulové matice. Tím vytvoříme symbolickou matici, která obsahuje samé nulové prvky. Globální matice tuhosti prutu má rozměr 4x4. V obecném případě je jí potřeba rozdělit na 4 matice 2x2 a ty umístit do rozšířené matice na pozice odpovídající počátečnímu a koncovému kloubu daného prutu. Cílové rozsahy indexů řádků a sloupců v rozšířené matici si přepočítáme do proměnných *od* a *do* podle čísel počátečního a koncového kloubu prutu. Následně pak provedeme zapsání 4 matic 2x2 původní globální matice prutu do rozšířené matice prutu na pozice určené rozsahy indexů *od* a *do*.

7.1.5 Řešení

Při řešení globální matice tuhosti soustavy je nejprve potřeba zbavit se rovnic (řádků a sloupců matice), které odpovídají zadaným okrajovým podmínkám, viz obrázek 27. Indexy řádků a sloupců, které je potřeba eliminovat máme uložené v proměnné *podpora*. Teoreticky bychom měli z matice tyto řádky a sloupce odstranit, ale v praxi je jednodušší je nahradit řádky a sloupce jednotkové matice. Výsledný efekt je stejný a ušetříme si tak složité rozdělávání a spojování matice.

Následně je už možné pročištěnou globální matici tuhosti soustavy vyřešit a získat vektor posunutí a vektor sil. Reakční síly získáme odečtením vektoru aplikovaných sil od výsledného vektoru všech silových účinků.

```

% Procistovani K
procistena_K = K_globalni; % Zachovani matice K pro zpetne dosazeni
procistena_f = f_aplikovana; % Zachovani sil f pro zpetne dosazeni

```

```

% Budeme nahrazovat radky a sloupce odpovídající nulovým posunům
% odpovídajícími částmi jednotkové matice

jednotkova_matice = eye(2 * max_kloub);
for i = podpera
    % procisteni radku K
    procistena_K(i, :) = jednotkova_matice(i, :);
    % procisteni sloupce K
    procistena_K(:, i) = jednotkova_matice(:, i);
    % procisteni f
    procistena_f(i) = 0;
end;

```

Řešení posuvů

Kompletní řešení posuvů dostáváme ze vztahu (6.38).

```
u = procistena_K^-1 * procistena_f;
```

Postprocessing – obnovení sil

Vektor sil spočítáme pomocí vztahu (6.4).

```
f = K_globalni * u;
```

Vektor reakčních sil dostaneme ze vztahu (6.40).

```
f_reakcni = f - f_aplikovana;
```

7.1.5.1 Výsledky

Pro staticky určitou i neurčitou kontrolní úlohu nám numericky i analyticky vyšly totožné hodnoty posuvů i silových účinků.

Hodnoty posuvů SU úlohy:

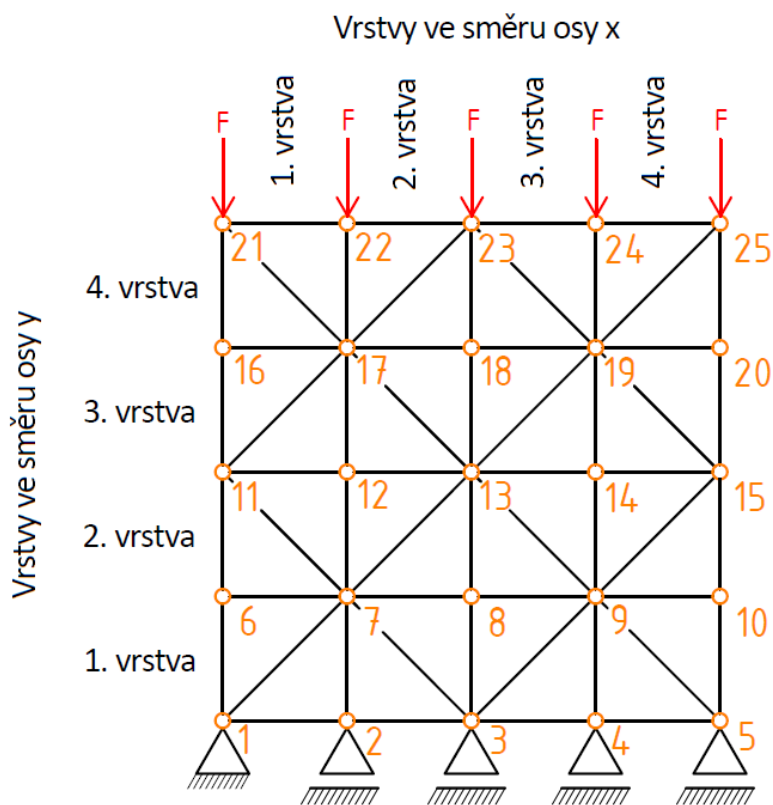
$$\begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}FL}{6EA} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}FL}{12EA} \\ -\frac{3Fl}{4EA} \end{bmatrix}$$

Hodnoty posuvů SN úlohy:

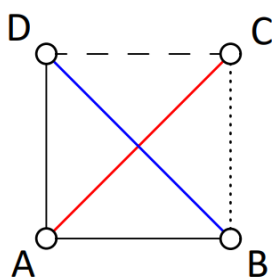
$$\begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ u_{xC} \\ u_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2Fl}{3EA} \end{bmatrix}$$

7.2 Úloha čtvercové 2D sítě s příčkami

Úloha 2D sítě má stejnou výpočetní část jako kontrolní úloha. Budeme se zabývat pouze zadáním prutů, z kterých se síť skládá a okrajových podmínek.



Obrázek 36 Výsledná síť o výšce a šířce 4 vrstev



Obrázek 37 Základní čtverec: Každý čtverec obsahuje jeden diagonální prut (modrý nebo červený). Tečkovaný prut se přidává jen pokud je čtverec v poslední vrstvě ve směru osy x , čárkovaný prut se přidává pouze pokud je čtverec v poslední vrstvě ve směru osy y

Pruty, z kterých se síť skládá, vygenerujeme pomocí dvou vnořených cyklů. Místo trojúhelníka bude základní stavební součástí čtverec s příčným prutem, viz obrázek 37. První cyklus je pro y od 1 do zadané hodnoty $vyska_site - 1$. Tento cyklus tedy postupně projde všechny vrstvy sítě. Druhý cyklus je pro x od 1 do zadané hodnoty $sirka_site - 1$. Druhý, vnořený, cyklus projde v každé vrstvě jednotlivé sloupce. Výslednou síť vidíme na obrázku 36.

Uvnitř vnitřního cyklu postupně konstruujeme aktuální čtverec z prutů. Začneme tím, že vypočítáme čísla kloubů A, B, C a D v rozích čtverce z aktuálních hodnot x a y . Umístění kloubů A, B, C a D je vidět na obrázku 37. Čísla kloubů, která mají vyjít pak na obrázku 36. Následně umístíme pruty $A - B$ a $A - D$, které jsou v každém čtverci. Příčný prut umístíme jako $A - C$ nebo $B - D$ podle toho, jestli jsme v sudém nebo lichém sloupci/řádku. Pokud jsme na konci vrstvy tak umístíme i pravý okraj sítě, tedy prut $B - C$. Pokud jsme v poslední vrstvě, tak umístíme i prut tvořící horní okraj sítě, tedy $D - C$.

```
data = [];
sirka_site = 4;
vyska_site = 4;

% Budeme stavet celkem vyska_site * sirka_site ctvercu
for y = 1:vyska_site % Pro kazde patro y = od 1 do poctu pater
    for x = 1:sirka_site % Pro kazdy ctverec v patre x = od 1 do poctu
        ctvercu na sirku
            % Vypocet cisel kloubu v rozich ctverce
            % Z "Cislovani ctvercu" vypocitavame "Cisla kloubu"

            % levy dolni
            A = x + (y - 1) * (sirka_site + 1);

            % pravy dolni
            B = x + 1 + (y - 1) * (sirka_site + 1);

            % levy horni
            D = x + y * (sirka_site + 1);

            % pravy horni
            C = x + 1 + y * (sirka_site + 1);

            % Umistujeme 4, ktere jsou v kazdem ctverci

            % prut A - B
            data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', 0, 'od', A,
                'do', B)];

            % prut A - D
            data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', pi / 2, 'od',
                A, 'do', D)];
```

```

        % stridani uhloprickek v siti, pro "x+y = sude cislo" mame
uhloricky o uhlu pi / 4, pro "x+y = liche cislo" máme uhlopricky
        % o uhlu 3 * pi / 4
        if mod(x + y, 2) == 0
            % prut A - C
            data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', sqrt(2 * L * L),
'phi', pi / 4, 'od', A, 'do', C)];
        else
            % prut B - D
            data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', sqrt(2 * L * L),
'phi', 3 * pi / 4, 'od', B, 'do', D)];
        end
        % Umistujeme prut B - C - pouze pokud jsme na pravem okraji
vrstvy
        if x == sirka_site % Pokud jsme s x na konci
            % prut B - C
            data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', pi / 2,
'od', B, 'do', C)];
        end;

        % Umistujeme prut D - C - pouze pokud jsme v posledni vrstve
        if y == vyska_site % Pokud jsme s y na konci
            % prut D - C
            data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', 0, 'od',
D, 'do', C)];
        end;
    end;
end;

```

Dále pak zadáme okrajové podmínky. To učiníme opět tak, že do vektoru *podpera* uložíme indexy řádků a sloupců globální matice tuhosti soustavy, které odpovídají nulovým posunům vynuceným podpěrami.

První 2 indexy jsou 1 a 2, stejně jako u kontrolní úlohy a úlohy 2D most je první kloub (levý dolní okraj sítě) ukotven jak svisle, tak vodorovně pevnou kloubovou podporou. Dále chceme svisle ukotvit všechny následující klouby nacházející se ve spodní vrstvě posuvnou kloubovou podporou. Poslední index bude *sirka_site * 2*.

```

% ktere klouby jsou ukotvene (vuci matici K)
% x = 2 * kloub - 1
% y = 2 * kloub
podpera = [1, (2:2:(1 + sirka_site)*2)];

```

Nakonec zadáme působící síly. Ty zadáme jako vektor, ve kterém jsou pro každý kloub 2 hodnoty. Na lichých pozicích jsou síly působící ve směru osy *x*, na sudých pak síly působící ve směru osy *y*. Zadanou sílu *F* chceme nechat působit na celý horní okraj sítě proti směru osy *y*.

```

% Zatizeni po cele horni hrane site ve svislem smeru

```



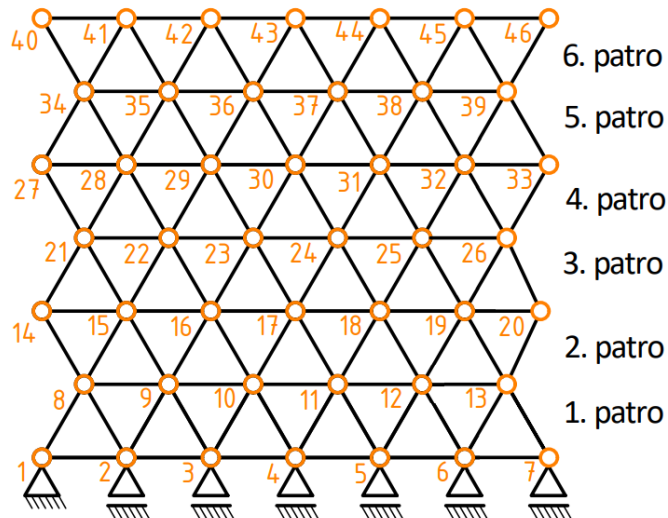
```

for i = ((max_kloub - sirka_site) * 2 :2: (max_kloub * 2))
    f_aplikovana(i) = -F;
end;

```

7.3 Úloha pravidelné trojúhelníkové 2D síť

Úloha pravidelné trojúhelníkové 2D síť je opět založena na výpočtu pomocí DSM. Od ostatních úloh se liší opět jen způsobem rozmístění prutů.



Obrázek 38 Nezatížená pravidelná trojúhelníková síť s označením kloubů a pater

Pruty sítě byly vytvořeny pomocí Delaunayovy triangulace tak, že nejprve bylo vygenerováno umístění kloubů, mezi které se potom umístily pruty. Pozice kloubů byly vygenerovány postupně po patrech, viz obr. 38. Sudá a lichá patra se odlišují počtem kloubů v patře a posunutím začátku patra po ose x .

```

% Vytvoreni kloubu, ktere pak vyplni delaunay
x = [];
y = [];
for patro = 1:(vyska_site+1)
    if mod(patro, 2) == 0
        x = [x,L*(1:sirka_site + 1)];
        y = [y,ones(1, sirka_site + 1) * patro * L * sqrt(3) / 2];
    else
        x = [x,L*((1:sirka_site) + 0.5)];
        y = [y,ones(1, sirka_site) * patro * L * sqrt(3) / 2];
    end
end;
end;

```

Samotné umístění prutů mezi již vytvořené body, které představují klouby, bylo provedeno pomocí funkce delaunayTriangulation. Tato funkce vytvoří triangulaci, z níž je potřeba získat její hrany, které reprezentují jednotlivé pruty.

```

% Triangulace
triangulace = delaunayTriangulation(x', y'); % vytvory to trojuhelniky
hrany = edges(triangulace);

```

Hrany triangulace byly získány jako matice $2 * \text{počet prutů}$, kde vždy dvojice v každém řádku matice obsahovala čísla kloubů, které jsou na krajích prutu. Takto zadané pruty bylo potřeba převést do formátu pro výpočet DSM, ve kterém je kromě čísla počátečního a koncového kloubu uložena i jeho délka, úhel natočení, modul pružnosti v tahu a průřez.

```

% Prevod z triangulace do zadani pro DSM
data = [];
for hrana = hrany'
    i = hrana(1);
    j = hrana(2);

    % Vyhozeni extra hran na krajich, ktere zbytecne pridala triangulace
    if abs(i - j) > sirka_site + 1
        continue
    end;

    dx_ij = x(j)-x(i);
    dy_ij = y(j)-y(i);
    L_ij = sqrt(dx_ij*dx_ij + dy_ij*dy_ij);
    phi_ij = atan2(dy_ij, dx_ij);
    data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', L_ij, 'phi', phi_ij, 'od',
i, 'do', j, 'o', 0)];
end;

```

Tato úloha se bude srovnávat s analytickým řešením. Srovnání bylo provedeno pro tři typy namáhání. A to pro jednoosou napjatost ve směru osy x , dále pro jednoosou napjatost ve směru osy y a nakonec pro zatížení smykovým napětím. Proto byla DSM vypočtena pro tyto tři druhy zatížení pravidelné trojúhelníkové 2D síť. Pro přehlednější zadávání podpěr, aplikovaných sil a vyhodnocení modulu pružnosti byly nejprve vypočítány čísla kloubů na okrajích sítě.

```

% Zjisteni maximalniho indexu kloubu
max_kloub = zjist_max_cislo_kloubu(data);

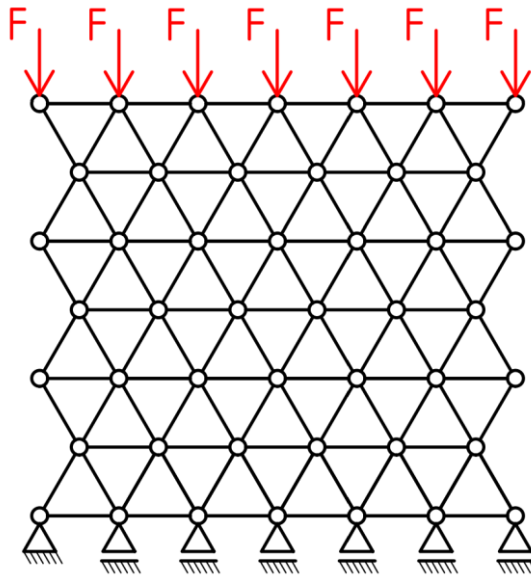
% Vypocet cisel kloubu
klouby_dole = 1:sirka_site
klouby_nahore = max_kloub - sirka_site + 1:max_kloub
klouby_napravo = (1:vyska_site / 2) * (sirka_site + sirka_site + 1)
klouby_nalevo = (1:vyska_site / 2) * (sirka_site + sirka_site + 1) -
sirka_site

```

7.3.1 Youngův modul pružnosti ve směru osy y

Pro výpočet Youngova modulu pružnosti ve směru osy y bylo potřeba podepřít síť v kloubech, které jsou na spodním okraji sítě. Kloub číslo jedna byl podepřen pevnou kloubovou vazbou, zatímco ostatní klouby ve spodní vrstvě byly podepřeny posuvnou kloubovou vazbou.

```
% Podpery  
podpera = [1, klouby_dole*2];
```



Obrázek 39 Model kloubové sítě zatížené ve směru osy x

Zatížení bylo aplikováno na klouby v horním okraji sítě ve směru osy y .

```
% Zatizeni  
f_aplikovana = zeros(max_kloub * 2, 1); % Nastavi na vektor samych nul  
  
% Zatizeni po cele horni hrane site ve svislem smeru  
indexy_zatizeni = klouby_nahore * 2;  
for i = indexy_zatizeni  
    f_aplikovana(i) = -F_y;  
end;
```

Následně byla vypočítána DSM pro zadanou síť, podpěry a zatížení.

```
% Vypocet DSM  
[ u, f, f_reakni ] = dsm(data, f_aplikovana, podpera);
```

Pro výpočet Youngova modulu pružnosti je potřeba vypočítat délku sítě ve směru osy x .

```
% Delka cele site ve smeru osy x
```

```
l_x = sirka_site * L + L;
```

Dále byla vypočtena myšlená plocha, která je kolmým průřezem sítě k ose y .

```
% Plocha, na kterou pusoby napeti ve smeru osy y  
A_y = l_x * 2*r;
```

Posun vrchní hrany sítě, v důsledku působení zátěže, byl vypočten jako průměr posunutí jednotlivých kloubů na horní hraně sítě.

```
% Posunutí vršku site ve smeru osy y, bereme prumer  
vrchni_u = u(indexy_zatizeni)  
u_y = mean(vrchni_u);
```

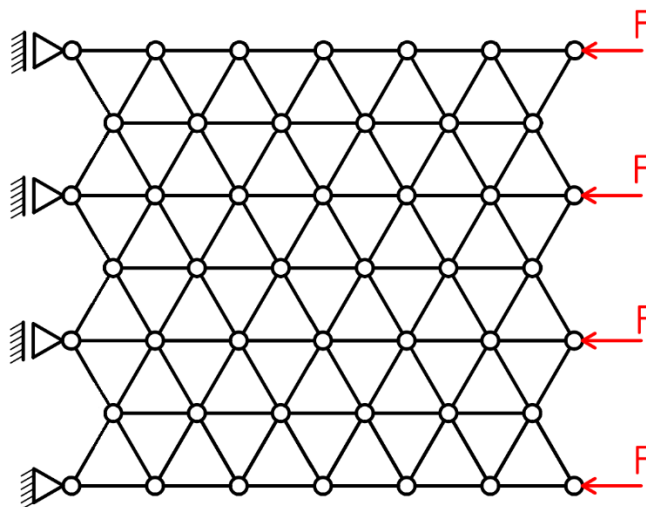
Na základě výše uvedených veličin byl spočten Youngův modul pružnosti ve směru osy y .

```
E_y = abs(sigma_y * l_x / u_y)
```

7.3.2 Youngův modul pružnosti ve směru osy x

Pro výpočet Youngova modulu pružnosti ve směru osy x bylo potřeba podepřít síť v kloubech, které jsou na levém okraji sítě. Kloub číslo jedna byl podepřen pevnou kloubovou vazbou, zatímco ostatní klouby na levém okraji byly podepřeny posuvnou kloubovou vazbou.

```
% Podpery  
podpera = [2*(sirka_site + 1), klouby_nalevo * 2 - 1];
```



Obrázek 40 Model kloubové sítě zatížené ve směru osy x

Zatížení bylo aplikováno na klouby na pravém okraji sítě ve směru osy x .

```
% Zatizeni
f_aplikovana = zeros(max_kloub * 2, 1); % Nastavi na vektor samych nul

% Zatizeni po cele horni hrane site ve svislem smeru
indexy_zatizeni = klouby_napravo * 2 - 1
for i = indexy_zatizeni
    f_aplikovana(i) = -F_x;
end;
```

Následně byla vypočítána DSM pro zadanou síť, podpěry a zatížení.

```
% Vypocet DSM
[ u, f, f_reakcni ] = dsm(data, f_aplikovana, podpera);
```

Pro výpočet Youngova modulu pružnosti je potřeba vypočítat délku sítě ve směru osy y .

```
% Delka cele site ve smeru osy y
l_y = vyska_site * L * sqrt(3)/2;
```

Dále byla vypočtena myšlená plocha, která je kolmým průřezem sítě k ose x .

```
% Plocha, na kterou pusobi napeti ve smeru osy y
A_x = l_y * 2*r;
```

Posun pravé hrany sítě, v důsledku působení zátěže, byl vypočten jako průměr posunutí jednotlivých kloubů na pravé hraně sítě.

```
% Posunutí vrsku site ve smeru osy y, bereme prumer
% Posunutí vrsku site ve smeru osy y, bereme prumer
prave_u = u(indexy_zatizeni);
u_x = mean(prave_u);
```

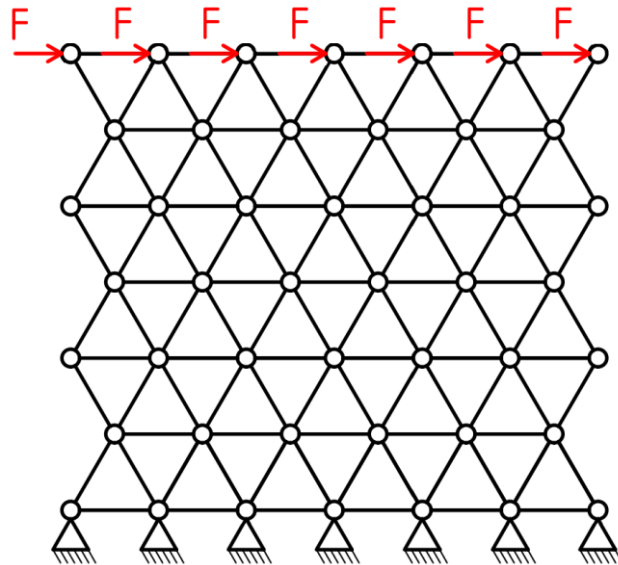
Na základě výše uvedených veličin byl spočten Youngův modul pružnosti ve směru osy x .

```
E_x = abs(sigma_x * l_y / u_x);
```

7.3.3 Modul pružnosti ve smyku

Pro výpočet modulu pružnosti ve smyku bylo potřeba podepřít síť v kloubech, které jsou na spodním okraji sítě pevnou kloubovou vazbou.

```
% Podpery
podpera = [klouby_dole*2 - 1, klouby_dole*2];
```



Obrázek 41 Model kloubové sítě zatížené smykem

Zatížení bylo aplikováno na klouby na horním okraji sítě ve směru osy x .

```
% Zatizeni
f_aplikovana = zeros(max_kloub * 2, 1); % Nastavi na vektor samych nul

% Zatizeni po cele horni hrane site ve svislem smeru
indexy_zatizeni = klouby_nahore * 2 - 1;
for i = indexy_zatizeni
    f_aplikovana(i) = F_smyk;
end;
```

Následně byla vypočítána DSM pro zadanou síť, podpěry a zatížení.

```
% Vypocet DSM
[ u, f, f_reakcni ] = dsm(data, f_aplikovana, podpera);
```

Pro výpočet modulu pružnosti je potřeba vypočítat délku sítě ve směru osy x .

```
% Delka cele site ve smeru osy y
l_y = vyska_site * L * sqrt(3)/2;
```

Úhel zkosení sítě, v důsledku působení zátěže, bylo vypočteno z průměrného posunutí vrchní hrany sítě ve směru osy x .

```
% Posunutí vršku site ve smeru osy x, bereme prumer
vrchni_u = u(indexy_zatizeni);
u_x = mean(vrchni_u);
gamma = atan(u_x / l_y);
```

Na základě výše uvedených veličin byl spočten modul pružnosti ve smyku.

```
G = sigma_smyk/gamma;
```

7.4 Úloha nepravidelné trojúhelníkové sítě

Úloha nepravidelné trojúhelníkové sítě byla řešena podobně jako úloha pravidelné trojúhelníkové sítě a to pomocí DSM a Delaunayovy triangulace. Úloha se liší od úlohy pravidelné sítě pouze zadáním vstupní sítě a jiným výpočtem čísel kloubů na okrajích sítě.

Sít byla zkonstruována tak, že byl nejprve vygenerován zadaný počet náhodně umístěných kloubů. Určitý počet kloubů byl umístěn zcela náhodně uvnitř sítě a ostatní klouby byly umístěny na okraje sítě. Poloha kloubů na okrajích sítě je tedy náhodná jen v jedné souřadnici. Tak bylo docíleno toho, že náhodná síť vyplňuje alespoň přibližně určený prostor. Klouby byly propojeny pruty za pomoci Delaunayovy triangulace. Výsledná síť byla zpracována obdobně jako pravidelná trojúhelníková síť.

Souřadnice uzlů byly generovány postupně. Nejprve byly vygenerovány souřadnice uzlů uvnitř sítě:

```
% rand = vygenerovani nahodnych bodu, chci vektor proto "1" v "rand
(1,..."
vnitrek_x = rand(1, vnitrek_pocet_bodu) * sirka_site;
vnitrek_y = rand(1, vnitrek_pocet_bodu) * vyska_site;
```

Následně byly vygenerovány souřadnice uzlů na bocích sítě:

```
% vektor bodu po leve strane site
leva_x = rand(1, pocet_bodu_svisle) * 0;
leva_y = rand(1, pocet_bodu_svisle) * vyska_site;

% vektor bodu po prave strane site
prava_x = (rand(1, pocet_bodu_svisle) * 0 + 1) * sirka_site;
prava_y = rand(1, pocet_bodu_svisle) * vyska_site;
```

Pak byly vygenerovány souřadnice kloubů na horním a spodním okraji sítě:

```
% vektor bodu na horni strane site
horni_x = sort(rand(1, pocet_bodu_vodorovne) * sirka_site);
horni_y = (rand(1, pocet_bodu_vodorovne) * 0 + 1) * vyska_site;

% vektor bodu na dolni strane site
dolni_x = sort(rand(1, pocet_bodu_vodorovne) * sirka_site);
dolni_y = rand(1, pocet_bodu_vodorovne) * 0;
```

Nakonec byly všechny souřadnice spojeny do společných vektorů x a y :

```
% vektor vseh bodu (okrajove i vnitřni body)
x = [horni_x, dolni_x, leva_x, prava_x, vnitrek_x];
y = [horni_y, dolni_y, leva_y, prava_y, vnitrek_y];
```

Z vektorů se souřadnicemi uzlů byla vytvořena síť pomocí Delaunayovy

triangulace:

```
% Triangulace
triangulace = delaunayTriangulation(x', y'); % vytvory to trojuhelniky
hrany = edges(triangulace);
```

Za účelem výpočtu modulů pružnosti byly obdobně jako u pravidelné

trojúhelníkové sítě vypočteny čísla kloubů na hranách sítě:

```
% Zjisteni maximalniho indexu kloubu]
max_kloub = zjist_max_cislo_kloubu(data);

% Vypocet cisel kloubu
klouby_dole = pocet_bodu_vodorovne+1:(2*pocet_bodu_vodorovne)
klouby_nahore = 1:pocet_bodu_vodorovne
klouby_napravo =
(2*pocet_bodu_vodorovne+pocet_bodu_svisle+1):(2*pocet_bodu_vodorovne+2*pocet_bodu_svisle)
klouby_nalevo =
(2*pocet_bodu_vodorovne+1):(2*pocet_bodu_vodorovne+pocet_bodu_svisle)
```

7.4.1 Optimalizace nepravidelné trojúhelníkové sítě

U nepravidelné sítě se často stává, že některé z jejích prutů nevydrží danou zátěž. Prasknutí prutu je pro nás z výpočetního hlediska nevhodný stav. Metoda DSM, která byla aplikována v numerickém výpočtu, nezohledňuje, zda došlo k přetržení prutu, proto by takovýto výsledek byl nereálný. Proto byla snaha se tomuto stavu vyhnout pomocí optimalizace. Předpokládáme, že při odstranění těchto prutů se napětí roznese do ostatních, méně napjatých prutů. Proto byla provedena na náhodné nepravidelné síti optimalizace na principu postupného odstraňování prutů, které jsou natolik napjaté, že by došlo k jejich přerušení.

Optimalizace náhodné sítě byla provedena při zatížení sítě ve směru osy y za pomocí funkce `optimalizuj` popsané níže:


```

% Optimalizace struktury
f_aplikovana = zeros(max_kloub * 2, 1);
indexy_zatizeni = klouby_nahore * 2;
for i = indexy_zatizeni
    f_aplikovana(i) = -sigma_y * A_y / length(indexy_zatizeni);
end;
podpera = [1, klouby_dole*2];
data = optimalizuj(data, f_aplikovana, podpera, mez_pevnosti, 30);

```

Funkce optimalizuj pracuje s daty sítě, aplikovanými silami, zadáním podpěr, mezí pevnosti materiálu, ze kterého jsou vyrobeny pruty, a počtem iterací. Jednotlivé iterace optimalizace se skládají ze čtyř kroků:

Prvním krokem je použití DSM k nalezení napětích v prutech:

```

% Vypocet DSM
[ u, f, f_reakcni ] = dsm(data, f_aplikovana, podpera);
data = vypocet_napeti(data, u);

```

Druhým krokem je nalezení nejnapjatějšího prutu sítě:

```

% Nalezeni prutu s nejvetsim napetim, který jsme jeste nevyhodili
nejvyssi_napeti = 0;
for i = 1:length(data)
    if data(i).o > nejvyssi_napeti && data(i).E ~= 1
        nejvyssi_napeti = data(i).o;
        nejnapjatejsi_prut = i;
    end;
end;

```

Třetím krokem je podmíněčné ukončení optimalizace, pokud žádný prut už není napnut přes mez pevnosti:

```

% Ukonceni optimalizace pri ziskani zadneho ruzoveho/zhrouceneho
% prutu v cele siti

```

```
if nejvyssi_napeti < mez_pevnosti
    break;
end;
```

Posledním krokem iterace je pak nastavení modulu pružnosti nejnapjatějšího prutu na zanedbatelně malou hodnotu. Tímto je daný prut efektivně vyřazen ze sítě:

```
% Eliminace nejnapjatejsiho prutu, nastaveni skoro nuloveho modulu
pruznosti
data(nejnapjatejsi_prut).E = 1;
vyhazov_od = data(nejnapjatejsi_prut).od
vyhazov_do = data(nejnapjatejsi_prut).do
```

Dále byly vypočteny moduly pružnosti ve směru osy x , osy y a modul pružnosti ve smyku stejným způsobem jako v případě pravidelné trojúhelníkové sítě.

8 Výsledky

Nejdříve byl proveden analytický a numerický výpočet kontrolních úloh, pro ověření správnosti implementace přímé metody tuhosti. Výsledky posuvů získané numerickou metodou při použití hodnot z tabulky 4 jsou zapsány v tabulce 5. Hodnoty z tabulky 4 byly dosazeny do analytických vzorců pro výpočet posuvů kontrolních úloh a jejich číselné výsledky jsou pro přehledné srovnání také zaznamenány v tabulce 5. Dále jsme analyticky i numericky řešili složitější 2D struktury.

F [N]	150
L [m]	0,1
E [Pa]	1,14 E+11
A [m ²]	0,005

Tabulka 4 Hodnoty dosazené do analytických vzorců pro výpočet kontrolních úloh

Výsledné posuvy kloubů	Výsledky kontrolních úloh			
	Statically určitá úloha		Statically neurčitá úloha	
	Analyticky	Numericky	Analyticky	Numericky
u_{xA} [m]	0	0	0	0
u_{yA} [m]	0	0	0	0
u_{xB} [m]	7,60 E-09	7,60 E-09	0	0
u_{yB} [m]	0	0	0	0
u_{xC} [m]	3,80 E-09	3,80 E-09	0	0
u_{yC} [m]	-1,97 E-08	-1,97 E-08	-1,75 E-08	-1,75 E-08

Tabulka 5 Srovnání hodnot posuvů kontrolních úloh analytickým a numerickým výpočtem

V tabulce 6 se nachází přehled analyticky získaných vzorců, které byly použity pro výpočet modulů pružnosti pravidelné trojúhelníkové struktury. První tři řádky jsou pro kloubově spojenou strukturu. Zbývající pro pevně spojenou strukturu.

		E_x^*	E_y^*	G^*
Kloubově spojená pravidelná trojúhelníková síť – analyticky, dle [23]	Zatížení σ_x	$\frac{\sqrt{3}E_s\pi r}{3L}$		-
	Zatížení σ_y		$\frac{3\sqrt{3}E_s\pi r}{8L}$	-
	Zatížení τ	-	-	$\frac{\sqrt{3}E_s\pi r}{8L}$
Pevně spojená pravidelná trojúhelníková síť - analyticky, analogicky s [11, 15]	Zatížení σ_x	$\frac{E_s\pi r}{L\sqrt{3}} \left[\frac{r^2}{4(L^2 + 2r^2)} + 1 \right]$		
	Zatížení σ_y		$\frac{\pi E_s r}{L} \left[\frac{3\sqrt{3}r^2}{L^2} + \frac{2}{3} \right]$	
	Zatížení τ			-

Tabulka 6 Přehled analytických vzorců použitých pro výpočet modulů pružnosti

Do této tabulky byly dosazeny následující hodnoty vstupních parametrů:

$$E = 1.14 \cdot 10^{11}; \text{ \% Pa}$$

$$r = 0.3 \cdot 10^{-3}; \text{ \% m}$$

$$A = \pi \cdot r \cdot r; \text{ \% m}^2$$

$$L = 3 \cdot 10^{-3}; \text{ \% m}$$

Výsledné hodnoty modulů pružnosti, po dosazení do vzorců z tabulky 6, jsou přehledně zaznamenáno v tabulce 7, do které byly zaznamenány i hodnoty získané numerickým výpočtem pravidelné trojúhelníkové sítě.

		E_x^* [MPa]	E_y^* [MPa]	G^* [MPa]
Kloubově spojená pravidelná trojúhelníková síť – analyticky, dle [23]	Zatížení σ_x	20 677		-
	Zatížení σ_y		23 262	-
	Zatížení τ	-	-	3 877
Pevně spojená pravidelná trojúhelníková síť - analyticky, analogicky s [11, 15]	Zatížení σ_x	20 728	-	-
	Zatížení σ_y	-	25 737	-
	Zatížení τ	-	-	-
Kloubově spojená pravidelná trojúhelníková síť - numericky	Zatížení σ_x	20 218		
	Zatížení σ_y		20 719	
	Zatížení τ			2 831

Tabulka 7 Přehled vypočtených modulů pružnosti

Numerické výsledky modulů pružnosti z tabulky 7 jsou platné pro následující počty pater sítě:

```
sirka_site = 40;
vyska_site = 46;
```

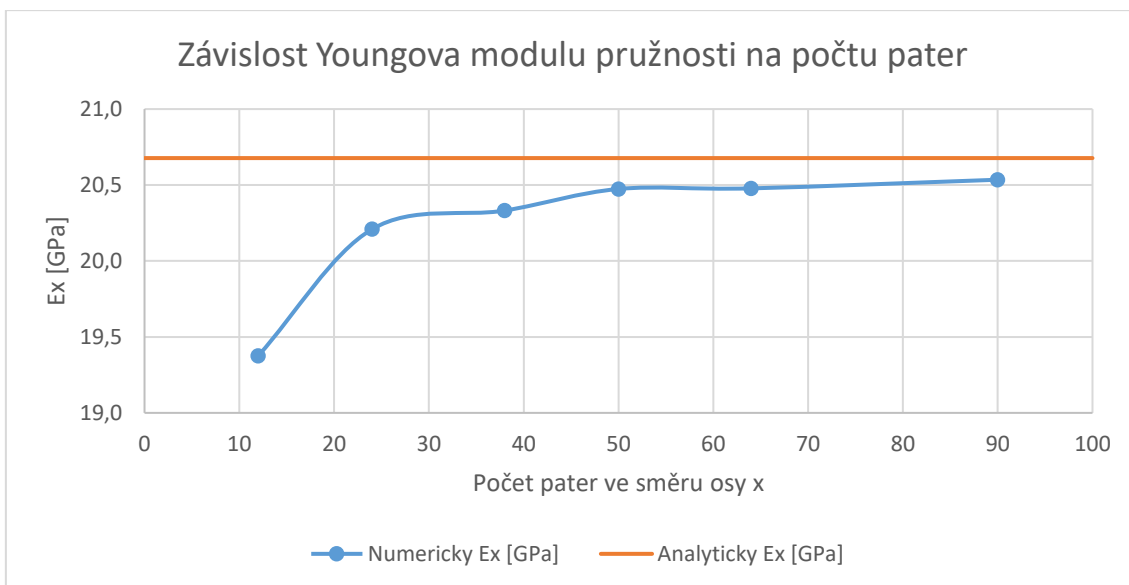
Kde *sirka_site* odpovídá počtu pater ve směru osy *x* a *vyska_site* odpovídá počtu pater ve směru osy *y*.

V tabulce 8 je srovnání modulů pružnosti pro pravidelnou a nepravidelnou síť o stejné výšce a šířce sítě. Konkrétně pro výšku sítě 31,2 mm a šířku sítě 33 mm. Čemuž u pravidelné sítě odpovídá *vyska_site* = 12 a *sirka_site* = 10. Aby srovnání bylo smysluplné, nastavoval se i co nejpodobnější celkový objem prutů v síti. Pro pravidelnou síť byl celkový objem prutů $3,08 \cdot 10^{-7} m^3$ a pro nepravidelnou síť byl celkový objem prutů $3,53 \cdot 10^{-7} m^3$. Nepravidelná síť z této tabulky je znázorněna na obrázku 45.

		E_x^* [MPa]	E_y^* [MPa]	G^* [MPa]
Kloubově spojená pravidelná trojúhelníková síť - numericky	Zatížení σ_x	19 537		
	Zatížení σ_y		19 677	
	Zatížení τ			2 433
Kloubově spojená náhodná trojúhelníková síť - numericky	Zatížení σ_x	15 021		
	Zatížení σ_y		15 114	
	Zatížení τ			1 723

Tabulka 8 Srovnání modulů pružnosti pravidelné a nepravidelné sítě o stejné výšce a šířce sítě

Srovnáme-li numerické výsledky pravidelné trojúhelníkové sítě z tabulky 7 a 8 vidíme, že s počtem přibývajících pater sítě moduly pružnosti stoupají. Což je znázorněno i v grafu 1. Kde oranžově je vyznačena analyticky spočtená hodnota kloubové sítě z tabulky 7 a modře jsou vyznačeny numericky spočtené hodnoty.



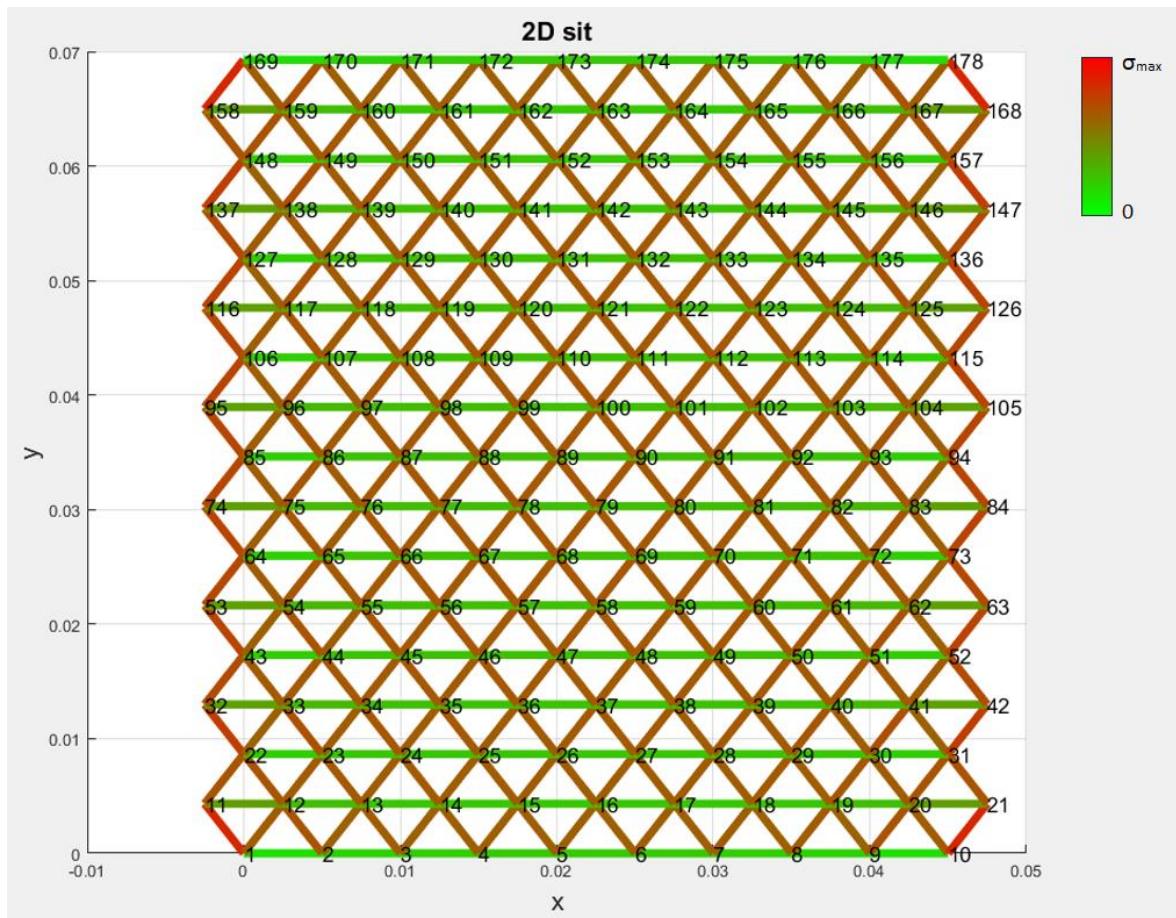
Graf 1 Graf závislosti Youngova modulu pružnosti ve směru osy x celé sítě na počtu pater, při navyšování pater pro „čtvercový“ tvar sítě

Navyšování pater probíhalo následovně. Chtěli jsme vždy mít síť ve tvaru čtverce. To samozřejmě s rovnoramennými trojúhelníky nejde. Proto jsme vždy volili takovou kombinaci pater na výšku a na šířku, abychom se čtvercovému tvaru co nejvíce blížili. Proto je v popisku u grafu 1 dán výraz čtvercový do uvozovek.

8.1 Grafické výsledky 2D sítí

V této sekci si ukážeme rozložení napětí pravidelné a nepravidelné trojúhelníkové sítě při třech typech zatížení. Při zatížení napětím ve směru osy y dále při zatížení napětím ve směru osy x a nakonec při zatížení smykem. Nejdříve si ukážeme rozložení napětí při zatížení pravidelné trojúhelníkové sítě.

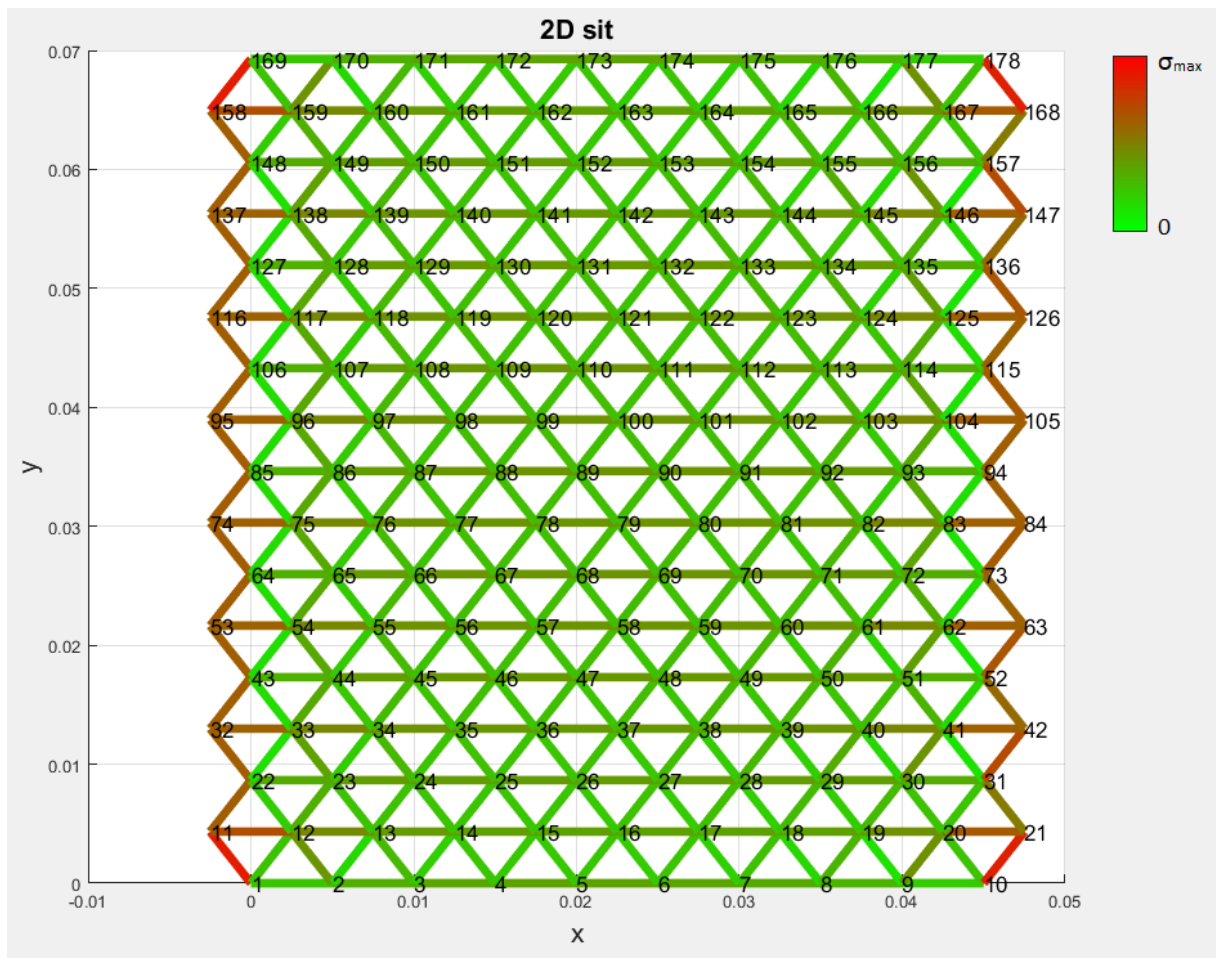
8.1.1 Pravidelná trojúhelníková síť



Obrázek 42 Vizualizace rozložení napětí pravidelné trojúhelníkové sítě při zatížení ve směru osy y

Vizualizace zatížení napětím ve směru osy y viz obr. 42, je platná pro následující sadu parametrů:

```
sirka_site = 10;  
vyska_site = 16;  
E = 1.14*10^11; % Pa  
r = 0.3*10^-3; % m  
A = pi*r*r; % m^2  
L = 3*10^-3; % m  
sigma_y = 12*10^07; % Pa  
mez_pevnosti = 10^9; % Pa
```



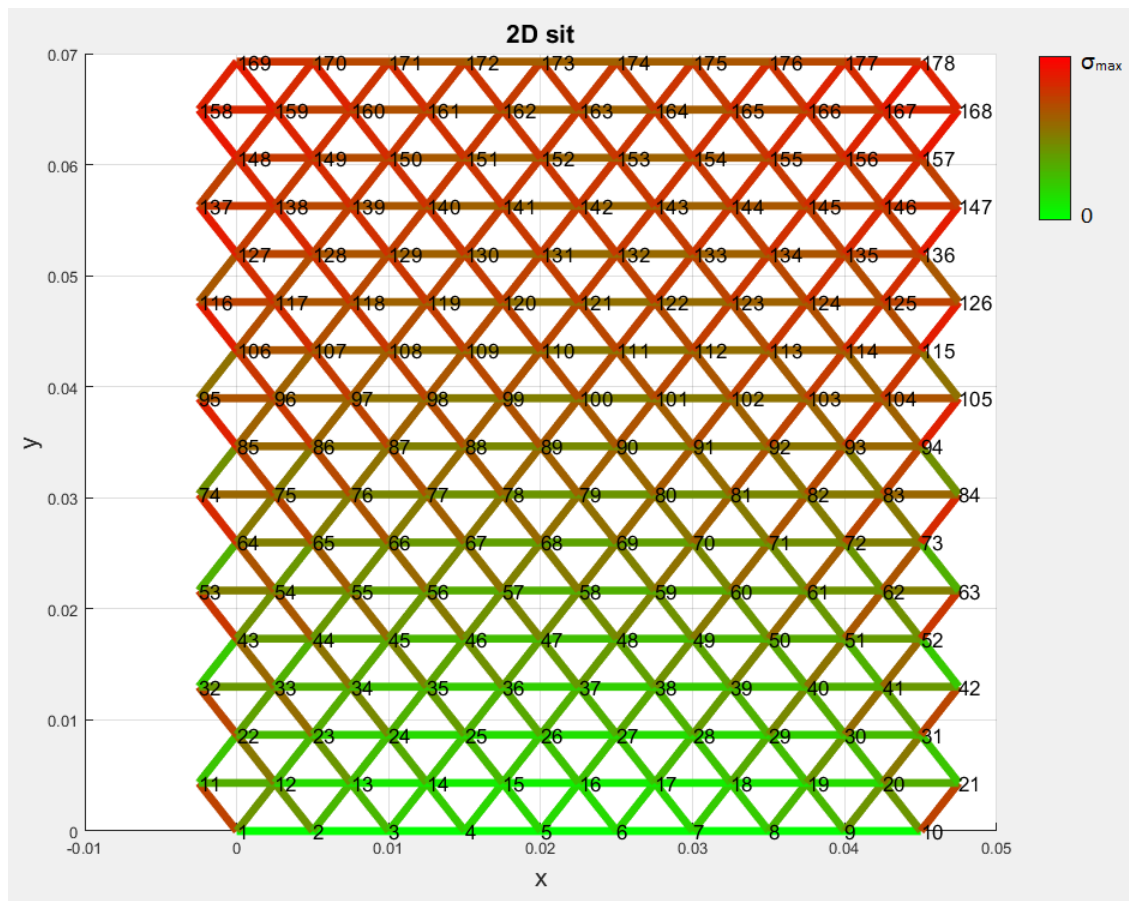
Obrázek 43 Vizualizace rozložení napětí pravidelné trojúhelníkové sítě při zatížení ve směru osy x

Vizualizace zatížení napětím ve směru osy x , viz obr. 43, je platná pro následující sadu parametrů:

```

sirka_site = 10;
vyska_site = 16;
E = 1.14*10^11; % Pa
r = 0.3*10^-3; % m
A = pi*r*r; % m^2
L = 3*10^-3; % m
sigma_x = 7*10^07; % Pa
mez_pevnosti = 10^9; % Pa

```

Obrázek 44 Vizualizace rozložení napětí pravidelné trojúhelníkové sítě při zatížení smykem

Vizualizace zatížení smykem, viz obr. 44, je platná pro následující sadu parametrů:

```

sirka_site = 10;
vyska_site = 16;
E = 1.14*10^11; % Pa
r = 0.3*10^-3; % m
A = pi*r*r; % m^2
L = 3*10^-3; % m
sigma_smyk = 8*10^06; % Pa
mez_pevnosti = 10^9; % Pa

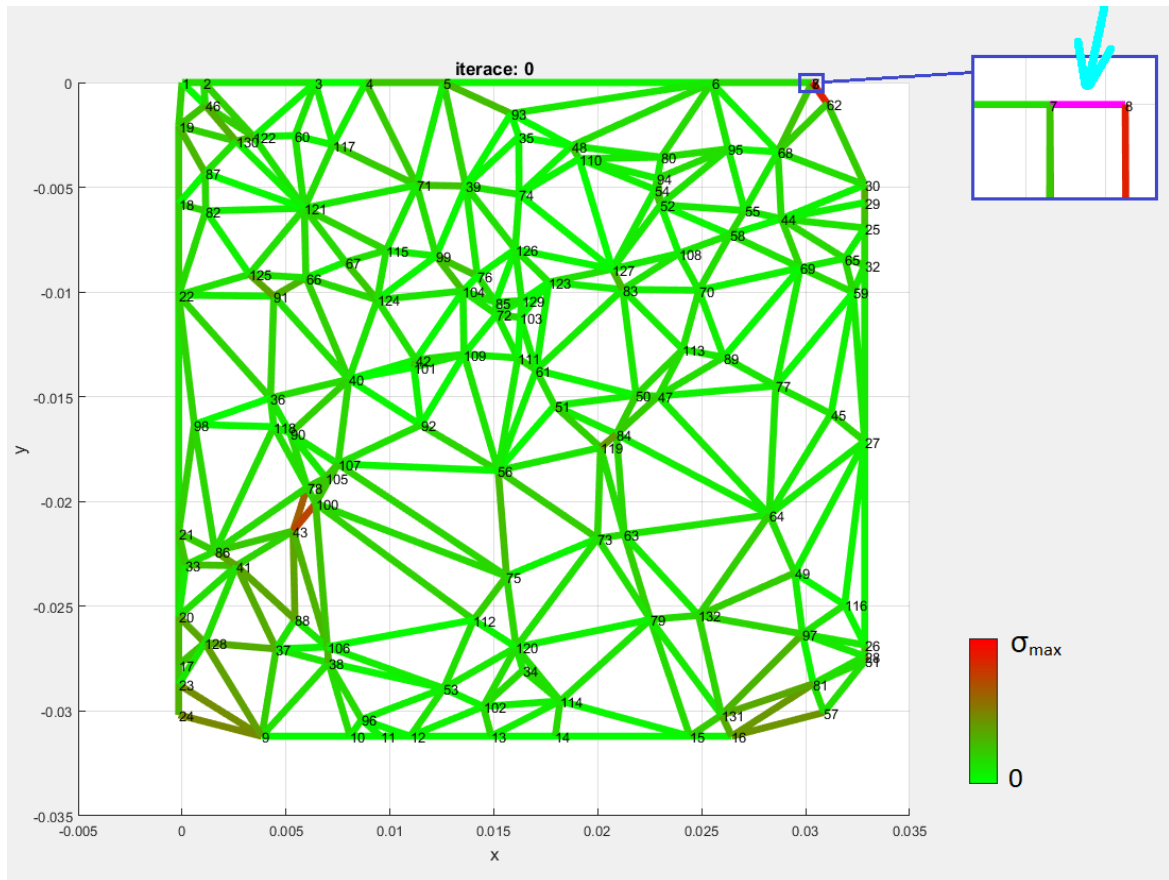
```

Pro vizualizaci smykem bylo použito menší zátěžné napětí, než v předchozích případech, protože síť nevydržela tak vysoké hodnoty napětí ve smyku.

8.1.2 Nepravidelná trojúhelníková síť

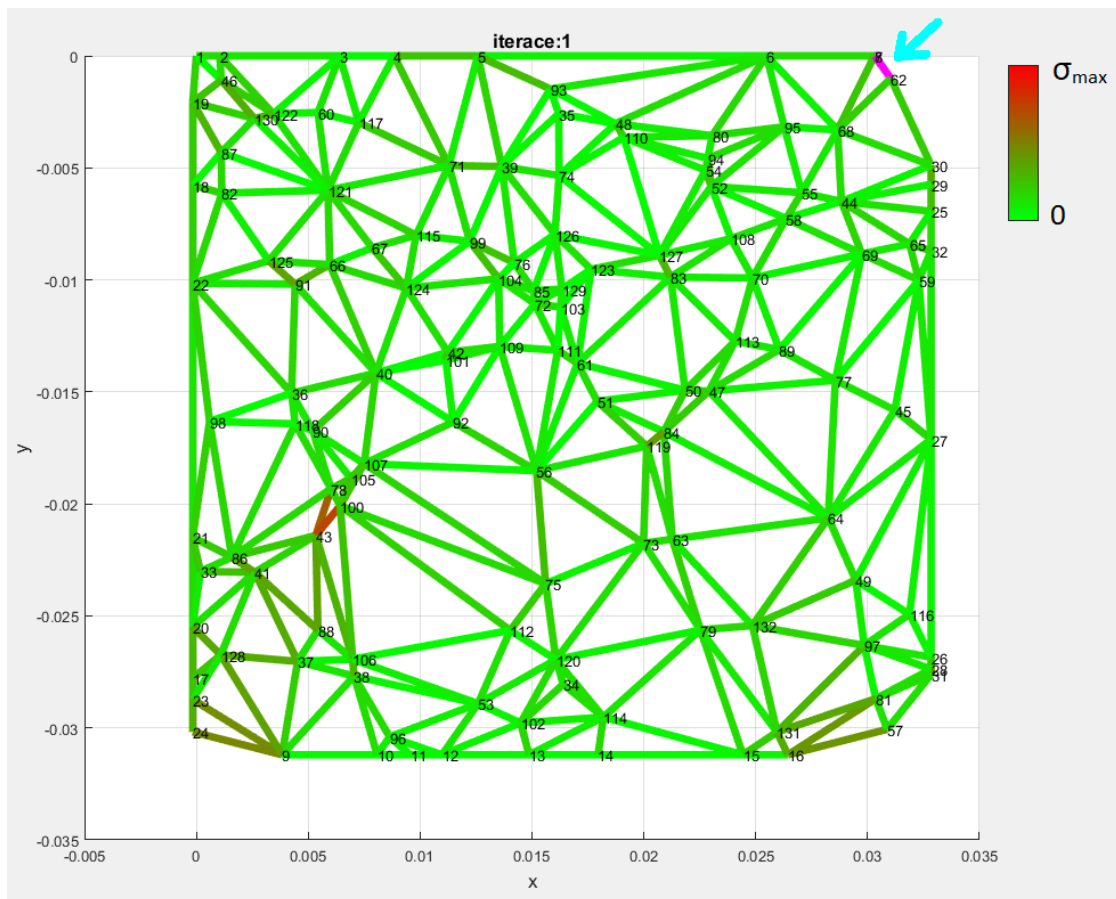
U nepravidelné sítě jsme provedli optimalizaci struktury, která se zakládala na iteračním procesu postupného odbourávání nejnapjatějších prutů. Tím se napětí rozložilo do ostatních méně napjatých prutů. Dokud se nedosáhlo výsledku, kdy všechny pruty snesly zadanou zátěž. Tento proces si v této podkapitole ukážeme graficky. Optimalizace proběhla při zátěži napětím ve směru osy y . Na obrázku 45 vidíme 1. iteraci a její grafický

výsledek. Došlo k prasknutí jednoho prutu, viz detail obrázku. Prasklý prut je značen růžovou barvou.



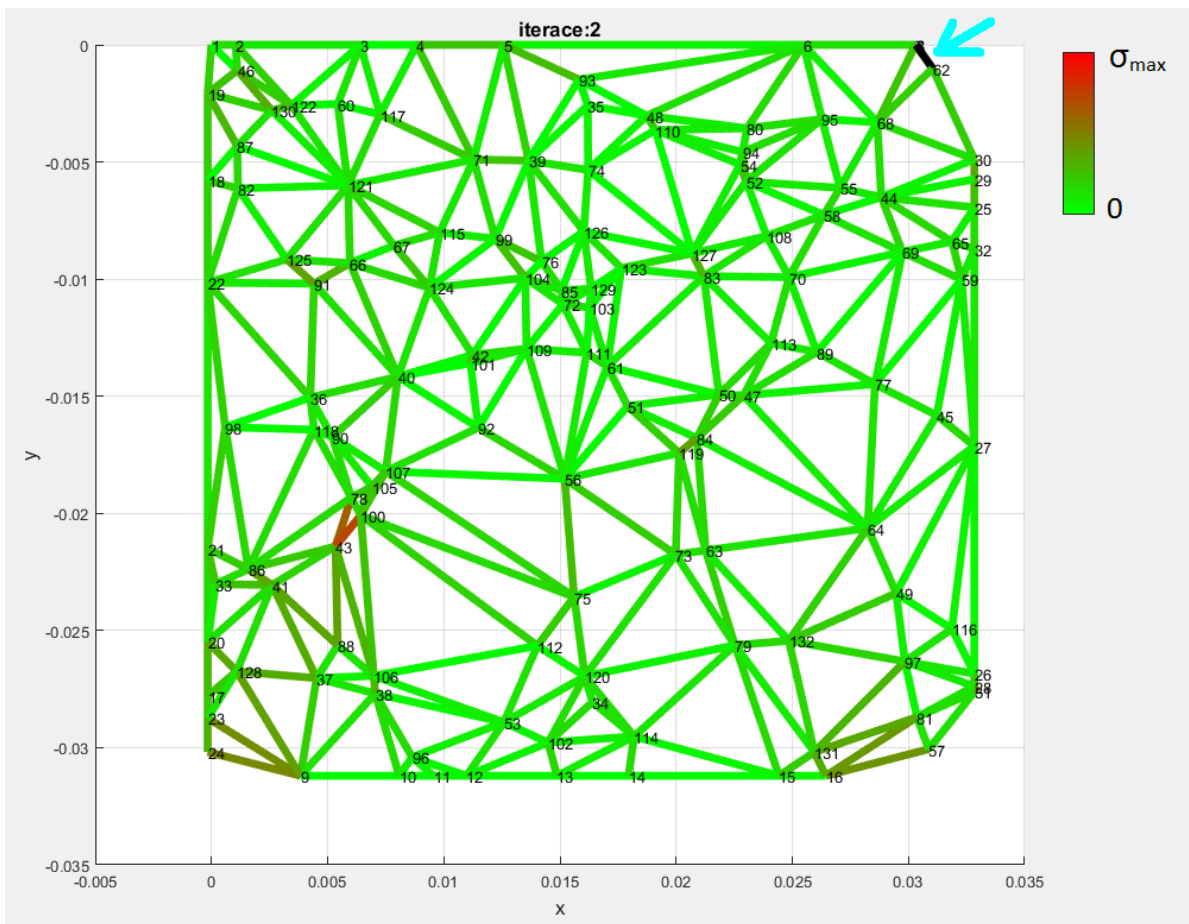
Obrázek 45 Zjištění stavu napjatosti nepravidelné sítě při zatížení napětím ve směru osy y (0. iterace), růžově znázorněn prasklý prut

Protože při nulté iteraci (nultou iteraci nazýváme nultou iterací, protože k iteračnímu procesu ve skutečnosti ještě nedošlo, zatím se jen vyhodnocuje napjatostní stav dané nepravidelné sítě) došlo k přerušení prutu, pokračujeme s iteračním procesem.



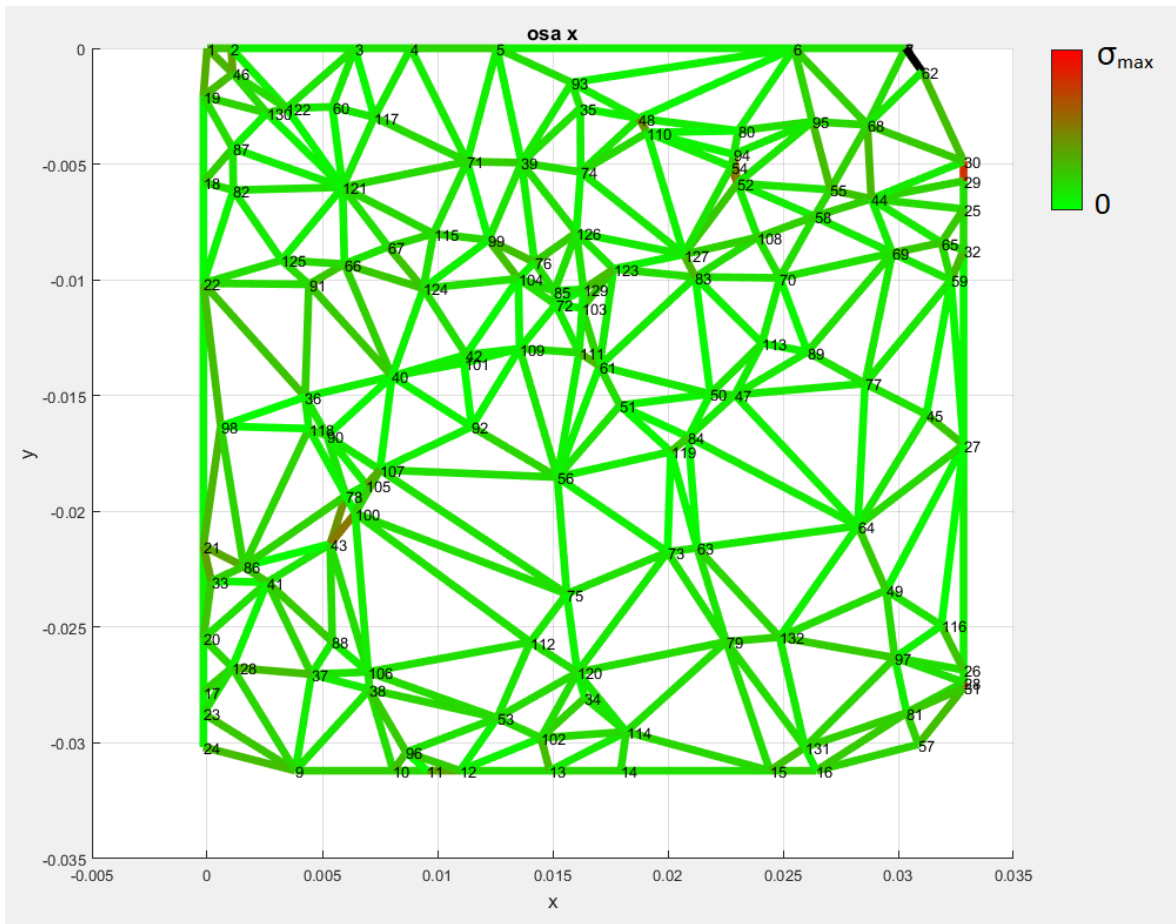
Obrázek 46 Zjištění stavu napjatosti nepravidelné sítě při zatížení napětím ve směru osy y (1. iterace), růžově prasklý prut

Prut z nulté iterace byl vyhozen ze sítě. Znovu se nechal přepočítat napjatostní stav nové sítě pomocí přímé metody tuhosti. Což je znázorněno na obrázku 46, kde vidíme, že došlo k přerušení dalšího prutu. Tento prut bude v iteračním procesu opět vyhozen, což můžeme vidět na obrázku 47, kde je tento již vyhozený prut znázorněn černou barvou.

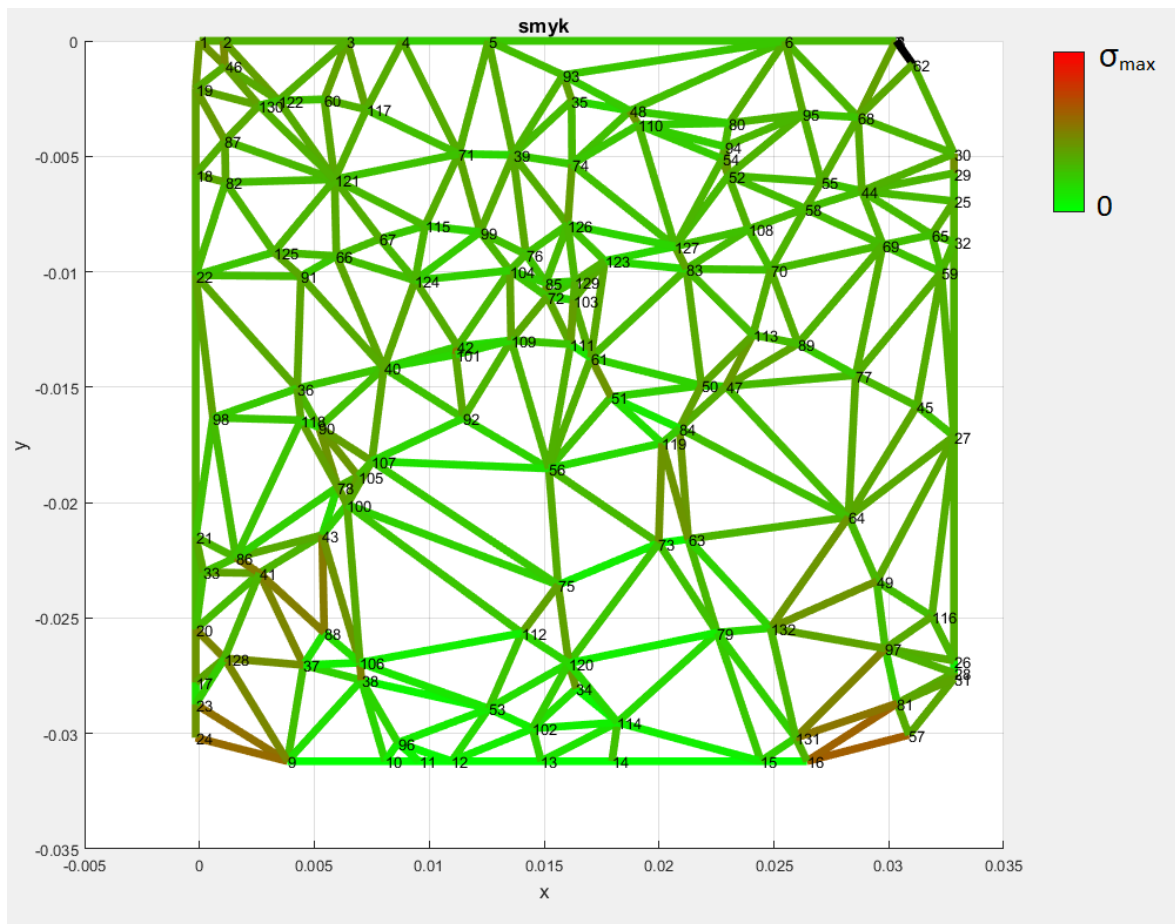


Obrázek 47 Zjištění stavu napjatosti nepravidelné sítě při zatížení napětím ve směru osy y (2./poslední iterace), černě vyřazené pruty

V druhé iteraci již k přerušení žádného prutu nedošlo, proto byla optimalizace ukončena. Tuto zoptimalizovanou síť jsme dále vyšetřili při zatížení napětím ve směru osy x a při zatížení smykovým napětím, což znázorňují obrázky 48 a 49.



Obrázek 48 Vizualizace napjatosti zoptimalizované sítě při zatížení ve směru osy x



Obrázek 49 Vizualizace napjatosti zoptimalizované sítě při zatížení smykovým napětím

Sítě z obrázků 45 až 49 vznikly při volbě parametrů:

```

sirka_site = 0.0330; % m
vyska_site = 0.0312; % m

vnitrek_pocet_bodu = 100;
pocet_bodu_svisle = 8;
pocet_bodu_vodorovne = 8;
E = 1.14*10^11; % Pa
r = 0.3*10^-3; % m
A = pi*r*r; % m^2
sigma_x = 2*10^07; % Pa
sigma_y = 2*10^07; % Pa
sigma_smyk = 5*10^06; % Pa
mez_pevnosti = 10^9; % Pa

```

9 Diskuse

V této práci jsme se zabývali návrhem numerického řešení na základě přímé metody tuhosti. Abychom si ověřili, že v našem návrhu byla použita tato metoda správně, provedli jsme analytický výpočet jednoduché kontrolní úlohy, viz str. 73. Jednalo se o výpočet trojúhelníkové prutové konstrukce se započtením okrajových podmínek. Tato kontrolní úloha byla spočtena i námi navrženou metodou a výsledky se naprosto shodovaly. Proto jsme použili tento návrh výpočtu na složitější struktury.

Vytvořili jsme tedy pravidelnou prutovou trojúhelníkovou konstrukci a zjišťovali jsme její modul pružnosti. Tyto výsledky jsme porovnali i s analyticky získanými hodnotami, viz tabulka 7. Hodnoty analytického výpočtu kloubové pravidelné sítě zjištěné přes energetický stav struktury nám vyšly mírně vyšší než numericky získané hodnoty naší metodou. Což je pravděpodobně způsobeno tím, že tato analytická metoda neuvažuje okrajové podmínky oproti naší numerické metodě, která je uvažuje. V grafu 1 vidíme, že s přidáváním počtu pater (zvětšováním sítě při zachování velikosti elementární jednotky/trojúhelníku) se blížíme analytické hodnotě modulu pružnosti. To je způsobeno tím, že se zvětšováním sítě se zmenšuje vliv okrajových podmínek, které jsou v analytickém výpočtu úplně zanedbány. Numerická metoda výpočtu je značně ovlivněna zadáním uchycení sítě (podpor). A to především při nízkém počtu pater.

Shodu či neshodu mezi analytickým a numerickým výpočtem dále ovlivňuje kromě velikosti sítě i její tvar. Konkrétně výška a šířka sítě. Nejlepší shody s analytickými výpočty dosahuje numerická metoda založená na přímé metodě tuhosti při co nejvyšším počtu pater sítě a zároveň, když se výška a šířka sítě co nejvíce shodují. Tedy při „čtvercovém“ tvaru sítě. Při nízkých počtech pater sítě je těžké dosáhnout dokonale čtvercového tvaru sítě. Při nízkých počtech pater je vždy šířka nebo výška trochu vyšší, protože je síť tvořena rovnoramennými trojúhelníky. Abychom s narůstajícím počtem pater dosahovali v grafu 1 vypovídajících hodnot, dali jsme si pár podmínek. Počet pater jsme vždy zachovávali sudý, aby konce sítě měli vždy stejný tvar, protože jak již bylo řečeno, na tvaru při výpočtu numerickou metodou záleží. Dále víme, že síť dosáhne dokonale čtvercového tvaru až při řádové hodnotě pater 10^{11} . To znamená, že všechny sítě tvořeny nižším počtem pater jsou vždy širší nebo vyšší. Do grafu jsme vynášeli jen hodnoty, které měly tvar velice blízký

čtvercovému a zároveň měly vždy nepatrně vyšší jen šířku sítě. Tím jsme dosáhli blížení se shodě analyticky a numericky získaných hodnot modulu pružnosti sítě. Se jmenovanými omezeními jsme získali poměrně malý počet kombinací, které jsme vynesli do grafu 1. Některé kombinace počtu pater na výšku a na šířku se čtvercovému tvaru blíží o trochu více než jiné, proto jsou v grafu 1 vidět nedokonalosti stoupání křivky.

Výpočet naší numerické metody jsme srovnávali také s analytickým řešením pevně spojené, nekloubové trojúhelníkové struktury. Hodnoty modulů pružnosti pevně spojené struktury nám analyticky vyšly mírně vyšší ve srovnání s hodnotami modulů pružnosti získané numerickou metodou výpočtu kloubové struktury, viz tabulka 7 v kapitole s výsledky. To, že pevně spojená struktura má vyšší hodnoty modulů pružnosti než kloubová struktura, je očekávatelný výsledek. Tento výsledek nám říká, že při výpočtu reálné trabekulární struktury, pomocí námi navržené numerické metody využívající přímé metody tuhosti dosáhneme o něco nižších hodnot modulů pružnosti, než jsou reálné hodnoty. Tyto hodnoty jsou sice odlišné, ale řádově se shodují, viz tabulka 7. S rostoucím počtem pater se rozdílnost výsledků modulů pružnosti snižuje.

Dále jsme vytvořili nepravidelnou síť. Přičemž jsme zjišťovali, která ze struktur, zda pravidelná či nepravidelná, je odolnější. Ve snaze o co nejobektivnější srovnání byla vybrána nepravidelná trojúhelníková síť o stejné výšce a šířce sítě jako pravidelná struktura a dále s co nejpodobnějším objemem prutů, viz obr. 45. Pravidelnou i nepravidelnou síť jsme vystavili třem druhům namáhání. Jednoosou napjatostí ve směru osy x , dále jednoosou napjatostí ve směru osy y a nakonec jsme je zatížili smykem. Naše numerická metoda vypočítala, že nepravidelná síť má menší hodnoty modulů pružnosti než pravidelná síť. Proto je nevýhodné používat jí tam, kde je potřeba snášet vyšší zátěže.

Následně byla provedena optimalizace nepravidelné sítě, aby snesla vyšší zatížení. Optimalizace probíhala iterativním procesem, kdy byl vždy zjištěn stav napjatosti aktuální sítě. Byl vyhodnocen nejnapjatější prut. Pokud napětí v nejnapjatějším prutu přesáhlo mez pevnosti, byl tento prut ze sítě vyhozen a iterativní proces pokračoval opět vyhodnocením stavu napjatosti sítě po vyhození tohoto prutu ze sítě. To se opakovalo do doby, dokud nedošlo k překročení meze pevnosti u žádného prutu. U této metody optimalizace byl předpoklad, že při vyhození prutů napjatých nad mez pevnosti ze sítě

dojde k rozložení napětí do ostatních méně napjatých prutů. Názorná ukázka optimalizace nepravidelné sítě je předvedena v předchozí kapitole. Úmyslně je zde vybrána síť, jejíž iterativní proces netrvá moc dlouho. Pro názornou ukázkou taková síť stačí.

Navržená optimalizace je vhodná jen pro nepravidelné struktury. Při aplikaci této optimalizace na pravidelnou strukturu, která je zatížena nad mez pevnosti, dochází vždy ke zhroucení celé struktury.

Pro navrženou optimalizaci existuje pár úskalí i v rámci nepravidelných sítí. Při nevhodně zvolených počátečních parametrech a zároveň příliš velkému počtu iterací může dojít k eliminaci příliš velkého počtu prutů. Může se také stát, že algoritmus eliminuje pruty na krajích sítě, které připojují zátěž. Proto některé sítě nelze při dané zátěži touto metodou zoptimalizovat.

10 Závěr

V této práci jsme vytvořili numerickou metodu pro výpočet deformací pravidelných i nepravidelných trabekulárních struktur, založenou na přímé metodě tuhosti. Porovnáním s analytickým výpočtem jsme ukázali, že tato metoda dává řádově shodné výsledky. Vzhledem k tomu, že analytická a numerická metoda předpokládá rozdílné okrajové podmínky a vlastnosti spojů, můžeme považovat dosažené výsledky za dostačující. Výhodou námi navržené numerické metody založené na přímé metodě tuhosti je, že se s ní dají lehko a rychle počítat nepravidelné porézní struktury. S využitím této metody můžeme provádět rychlou optimalizaci struktury. Touto metodou jsme zjistili, že pravidelná trojúhelníková struktura vykazuje větší pevnost než nepravidelná trojúhelníková struktura.

Použitá literatura

- [1] V. Sekerka, *Výroba dílů technologií DMLS a jejich porovnání s jinými konvenčními technologiemi z hlediska ekonomické náročnosti*, Brno: VUT, 2011.
- [2] K. Jelen, „3D tisk v ortopedii a traumatologii - stav, možnosti a příležitosti,“ Česká Společnost pro Biomechaniku, Praha.
- [3] E. Palermo, „LIVE SCIENCE,“ 13 Srpen 2013. [Online]. Available: <https://www.livescience.com/38862-selective-laser-sintering.html>. [Přístup získán 25 Červen 2018].
- [4] „3D Sourced,“ 23 Březen 2018. [Online]. Available: <https://3dsourced.com/3d-printing-technologies/direct-metal-laser-sintering-dmls/>. [Přístup získán 21 Červen 2018].
- [5] „Electron Beam Melting,“ Additively, [Online]. Available: <https://www.additively.com/en/learn-about/electron-beam-melting>. [Přístup získán 25 Červen 2018].
- [6] R. Dvořák, „MM, Odborně - vzdělávací a zpravodajský portál z oblasti strojírenství a navazujících oborů,“ MM Průmyslové spektrum, 16 Červenec 2013. [Online]. Available: <https://www.mmspektrum.com/clanek/rapid-manufacturing-technologie-prometal.html>. [Přístup získán 29 Červen 2018].
- [7] „3D Printing,“ Additively, 2018. [Online]. Available: <https://www.additively.com/en/learn-about/binder-jetting>. [Přístup získán 29 Červenec 2018].
- [8] „Nikl a jeho slitiny, Titan a jeho slitiny,“ [Online]. Available: https://www.opi.zcu.cz/Nikl_titan.pdf. [Přístup získán 15 Červenec 2018].

- [9] „Titan Grade 5 (6Al-4V),“ Bibus Metals, [Online]. Available: <https://www.bibusmetals.cz/materialy/titan-slitiny-titanu/titan-grade-5-6al-4v/>. [Přístup získán 15 Červenec 2018].
- [10] „Titan Grade 5,“ [Online]. Available: <http://www.inkosas.cz/download/titanove-slitiny-grade/titan-grade-5.pdf>. [Přístup získán 15 Červenec 2018].
- [11] L. J. Gibson, „Biomechanics of cellular solids,“ *Journal of Biomechanics* 38, pp. 377-399, 29 September 2004.
- [12] „RMIT and Anatomic join forces to produce Australia’s first 3D printed spine implant,“ Open Biomedical Initiative, [Online]. Available: <http://www.openbiomedical.org/rmit-and-anatomic-join-forces-to-produce-australias-first-3d-printed-spine-implant/#>. [Přístup získán 11 Srpen 2018].
- [13] „Software pro výpočty metodou konečných prvků (MKP),“ Dlubal, [Online]. Available: <https://www.dlubal.com/cs/reseni/oblasti-pouziti/software-pro-vypocty-mkp>. [Přístup získán 9 Srpen 2018].
- [14] „The Direct Stiffness Method I,“ University of Colorado Boulder, 4. Srpen 2017. [Online]. Available: <https://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/IFEM.Ch02.d/IFEM.Ch02.pdf>. [Přístup získán 1. Prosinec 2017].
- [15] L. J. Gibson a M. F. Ashby, *Cellular solids*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [16] „TEORIE – OHYB,“ FS ČVUT, [Online]. Available: http://mechanika2.fs.cvut.cz/sources_old/pp1/teor43.htm. [Přístup získán 30 Květen 2018].
- [17] J. Řezníček, *Pružnost a pevnost I. (přednášky)*, Praha: FS ČVUT, 2014.
- [18] J. Řezníček, „Stránky podpory výuky pružnosti a pevnosti na FS ČVUT v Praze,“ 28 Únor 2018. [Online]. Available: pruznost.unas.cz. [Přístup získán 26 Březen 2018].

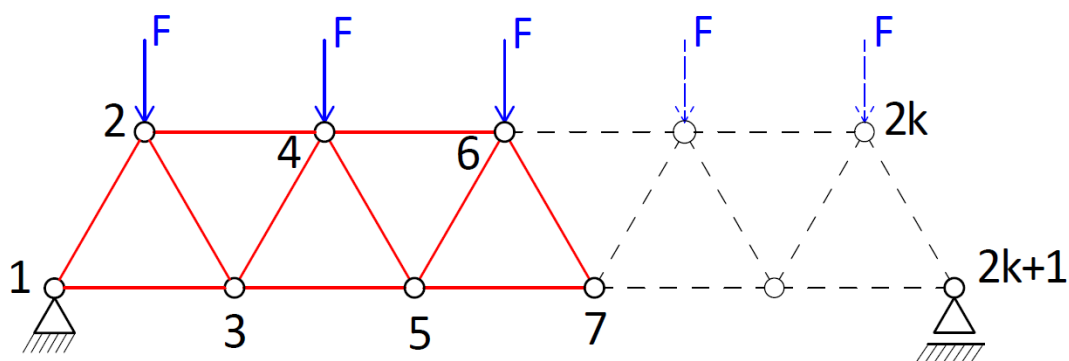
- [19] F. Plánička, M. Zajíček a V. Adámek, „OHYB (Deformace),“ [Online]. Available: <https://www.kme.zcu.cz/kmet/pp/ohyb-a-deformace/shrnuti.pdf>. [Přístup získán 25 Květen 2018].
- [20] A.-J. Wang a M. D. L. , „Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density,“ *International Journal of Plasticity*, pp. 285-320, 12 Duben 2004.
- [21] O. Jiroušek, „Metoda konečných prvků,“ ČVUT FD, 18. Červen 2008. [Online]. Available: http://mech.fd.cvut.cz/members/jirousek/download/k618y2m1/ymkp_fem.pdf. [Přístup získán 1. Prosinec 2017].
- [22] „The Direct Stiffness Method II,“ University of Colorado Boulder, 1. Září 2017. [Online]. Available: <https://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/IFEM.Ch03.d/IFEM.Ch03.pdf>. [Přístup získán 1. Prosinec 2017].
- [23] „Mechanics of the cytoskeleton,“ Stanford University, [Online]. Available: http://biomechanics.stanford.edu/me339_08/me339_s0708.pdf. [Přístup získán 3 Červenec 2018].
- [24] „Mechanické kmitání,“ [Online]. Available: http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/Mechanika_resene_7.pdf. [Přístup získán 7 Červenec 2018].
- [25] M. Růžička, J. Jurenka a Z. Hrubý, „Mechanika,“ [Online]. Available: http://mechanika.fs.cvut.cz/content/files/DPZ/DPZ_2014_Jur03.pdf. [Přístup získán 18 Červenec 2018].
- [26] „Direct Metal Laser Sintering,“ Innomia, 29. Březen 2013. [Online]. Available: <http://www.innomia.cz/faq-vysvetleni-dmls-sls-slm-ebm-laser-cusing>. [Přístup získán 7. Prosinec 2017].

- [27] H. X. Zhu, L. B. Yan, R. Zhang a X. M. Qiu, „Size-dependent and tunable elastic properties of,“ *Acta Materialia*, 2012.
- [28] E. R. N. Romijn a A. N. Fleck, „The fracture toughness of planar lattices: Imperfection sensitivity,“ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, pp. 2538-2564, 26 Duben 2007.
- [29] „Titanium trabecular implants by Novax DMA in the open biomedical initiative,“ NOVAX DMA, [Online]. Available: <http://novaxdma.com/titanium-trabecular-implants-by-novax-dma-in-the-open-biomedical-initiative/?lang=en>. [Přístup získán 10 Srpen 2018].
- [30] D. Systèmes, „Kloubní náhrady díky Solidworks a 3D tisku od firmy ProSpon,“ CAD.cz, [Online]. Available: <https://www.cad.cz/component/content/article/7481.html>. [Přístup získán 11 Srpen 2018].
- [31] „3D printed hip joint prosthesis implant, multi-hole acetabular cup,“ Alibaba, [Online]. Available: https://www.alibaba.com/product-detail/3D-printed-hip-joint-prosthesis-implant_60759656957.html?spm=a2700.7724857.normalList.9.1a0a6d2be5BHL4. [Přístup získán 11 Srpen 2018].

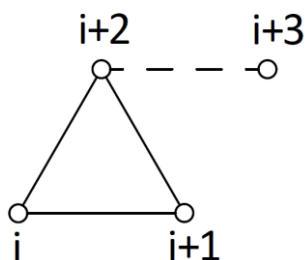
Přílohy

Příloha A: Úloha 2D mostu

Úloha 2D mostu má stejnou výpočetní část jako kontrolní úloha. Liší se jen vstupním popisem prutů a vektorem podpěr.



Obrázek 50 Most o délce 3 červeně a jeho obecné prodloužení čárkovaně o délce k



Obrázek 51 Trojúhelníkový segment mostu s volitelnou spojkou

Popis prutů generujeme podle zadané délky mostu postupně pomocí cyklu po jednotlivých trojúhelnících s volitelnou spojkou na další trojúhelník, viz obrázek 51. Cyklus postupně probíhá pro hodnoty $i = 1, 3, 5, \dots$ tedy čísla kloubů levého dolního vrcholu trojúhelníka. V každém průběhu cyklu se postupně přidají 3 pruty tvořící trojúhelník tak, že spojují klouby $i, i + 1$ a $i + 2$. Pokud ještě nejsme na konci mostu, tak se přidá i prut spojující klouby $i + 1$ a $i + 3$, který tvoří horní spojku s následujícím trojúhelníkem. Po skončení cyklu je most sestaven a parametry jeho prutů jsou uloženy v proměnné *data*. Pro délku mostu rovnou 3 získáme most, který je znázorněn na obrázku 50 červeně. Čísla kloubů mostu s obecnou délkou k jsou na obrázku znázorněny čárkovaně.

```
data = [];  
delka_mostu = 3;
```

```
% Pro kazde i z indexu dolnich kloubu mostu (1,3,5,7,...)  
% Pridavame pruty, popisky jsou vuci prvniku trojuhelniku (1,2,3,(4))
```

```

% generujeme posloupnost i = od:krok:do
for i = 1:2:((delka_mostu - 1) * 2 + 1)
    % prut 1 - 2
    data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', pi / 3, 'od', i,
'do', i + 1)];

    % prut 1 - 3
    data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', 0, 'od', i, 'do',
i + 2)];

    % prut 3 - 2
    data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', 2 * pi / 3, 'od',
i + 2, 'do', i + 1)];

    % Spojku 2 - 4 pridame jen pokud nejsme na konci mostu (uz neni co
pripojit)
    if i ~= ((delka_mostu - 1) * 2 + 1)
        % prut 2 - 4
        data = [data, struct('E', E, 'A', A, 'L', L, 'phi', 0, 'od', i +
1, 'do', i + 3)];
    end;
end;

```

Kromě zadání prutů mostu je potřeba zadat i okrajové podmínky. Ty zadáváme opět jako indexy řádků a sloupců, které budou nakonec eliminovány z globální matice tuhosti soustavy. Tyto indexy uložíme do vektoru *podpera*. Most bude ukotven ve vodorovném i svislém směru na jeho levém okraji pevnou kloubovou podporou a ve svislém směru na jeho pravém okraji posuvnou kloubovou podporou. Na levém okraji je vždy kloub číslo 1, tomu odpovídají indexy 1 ve vodorovném a 2 ve svislém směru. Číslo kloubu na pravém okraji záleží na délce mostu a spočítáme jej jako $1 + 2 * delka_mostu$. Odpovídající index pro svislé posunutí na dolním pravém konci mostu je tedy: $(1 + delka_mostu * 2) * 2$.

```

% ktere klouby jsou ukotvene (vuci matici K)
% x = 2 * kloub - 1
% y = 2 * kloub
podpera = [1, 2, (1 + delka_mostu * 2) * 2];

```

Nakonec zadáme působící síly. Ty zadáme jako vektor, ve kterém jsou pro každý kloub 2 hodnoty. Na lichých pozicích jsou síly působící ve směru osy x , na sudých pak síly působící ve směru osy y . Zadanou sílu F chceme nechat působit na celý horní okraj mostu v záporném směru osy y .

```

f_aplikovana = transpose((1:(2 * max_kloub)) * 0); % Nastavi na vektor
samych nul
for i = 2:2:delka_mostu * 2
    f_aplikovana(i) = -F;
end;

```