České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní

**Ústav technické matematiky**
**Obor: Matematické modelování v technice**

# Numerická simulace vlivu fotoionizace na šíření elektrického výboje

# Numerical simulation of effects of photoionization on an electric discharge propagation

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Daniel Bečvář
Vedoucí práce: Ing. Jan Karel, Ph.D.
Rok: 2018

# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Bečvář** Jméno: **Daniel** Osobní číslo: **420526**

Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**

Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**

Studijní program: **Strojní inženýrství**

Studijní obor: **Matematické modelování v technice**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Numerická simulace vlivu fotoionizace na šíření elektrického výboje**

Název diplomové práce anglicky:

**Numerical simulation of effects of photoionization on an electric discharge propagation**

Pokyny pro vypracování:

Popis modelu elektrického výboje - streameru.
Popis modelu fotoionizace.
Popis a naprogramování metody konečných objemů pro řešení fotoionizace.
Rozšíření modelu fotoionizace o komplexnější model produkce fotoelektronů.
Grafické zpracování a popis výsledků.

Seznam doporučené literatury:

Karel J.: Numerical Simulation of Streamer Propagation on Unstructured Dynamically Adapted Grids, dizertace, ČVUT 2014
Blazek J.: Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier 2001
Duarte M., Bonaventura Z., Massot M., Bourdon A.: A numerical strategy to discretize and solve the Poisson equation on dynamically adapted multiresolution grids for time-dependent streamer discharge simulations, Journal of Computational Physics, vol. 289, Elsevier 2015, pages 129-148

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Jan Karel, Ph.D., ústav technické matematiky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **18.04.2018** Termín odevzdání diplomové práce: **19.08.2018**

Platnost zadání diplomové práce: _____

| Ing. Jan Karel, Ph.D. | prof. Ing. Jaroslav Fořt, CSc. | prof. Ing. Michael Valášek, DrSc. |
|---|---|---|
| podpis vedoucí(ho) práce | podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry | podpis děkana(ky) |

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

2. 5. 2018
Datum převzetí zadání

Podpis studenta

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne ..... .....

Daniel Bečvář

**Poděkování**

Tímto bych rád poděkoval panu Ing. Janu Karlovi, Ph.D. za jeho trpělivost, připomínky a cenné rady a za odborné vedení při zpracování diplomové práce.

Daniel Bečvář

*Název práce:*
**Numerická simulace vlivu fotoionizace na šíření elektrického výboje**

*Autor:* Bc. Daniel Bečvář

*Studijní program:* Strojní inženýrství
*Obor:* Matematické modelování v technice
*Druh práce:* Diplomová práce

*Vedoucí práce:* Ing. Jan Karel, Ph.D.
Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení technické v Praze

*Abstrakt:* Tématem práce je numerická simulace elektrického výboje s vlivem fotoionizace. K popisu streameru je použit minimální model, který je složen ze soustavy transportních rovnic pro hustoty elektricky nabitých částic doplněných o zdrojový člen fotoionizace a vztahy pro výpočet elektrického potenciálu a intenzity elektrického pole. Rovnice jsou diskretizovány metodou konečných objemů a výpočet probíhá na nestrukturovaných dynamicky adaptovaných sítích. V práci je uvedeno rozšíření Kulikovského modelu fotoionizace o komplexnější model produkce fotoelektronů lineární interpolací tabulkových hodnot. V poslední části jsou uvedeny výsledky numerického testování pro deskovou a parabolickou anodu.

*Klíčová slova:* Numerická simulace, elektrický výboj, model fotoionizace, metoda konečných objemů

*Title:*
**Numerical simulation of effects of photoionization on an electric discharge propagation**

*Author:* Bc. Daniel Bečvář

*Abstract:* Theme of this work is a numerical simulation of an electrical discharge with respect to the photoionization. The minimal model is used for the streamer description. This model contains system of transport equations for densities of electrically charged particles supplemented by photoionization source term and formulas for the electric potential and the intensity of the electric field. The numerical solution is realized by finite volume method on dynamically adaptive unstructured (triangular) grid. There is an extension of photoionization model by a more complex model of photoelectrons production. Results of numerical testings for two types of anoda are presented in the last part of this work.

*Key words:* Numerical simulation, electric discharge, photoionization model, finite volume method

# Seznam použitých symbolů

| | | |
|---|---|---|
| $c$ | $[\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$ | rychlost světla |
| $D_e$ | $[\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$ | difuzní koeficient |
| $D_{\sigma_{ij}}$ | | duální objem |
| $e$ | [C] | elementární elektrický náboj |
| $\vec{E}$ | $[\mathrm{V} \cdot \mathrm{cm}^{-1}]$ | intenzita elektrického pole |
| $I$ | | emisivita iontů |
| $l$ | [cm] | diskrétní vlnová délka |
| $\vec{n}$ | | jednotkový normálový vektor |
| $N$ | $[\mathrm{cm}^{-3}]$ | hustota neionizovaného plynu |
| $n_e$ | $[\mathrm{cm}^{-3}]$ | hustota elektronů |
| $n_i$ $(n_p)$ | $[\mathrm{cm}^{-3}]$ | hustota pozitivních iontů |
| $n_n$ | $[\mathrm{cm}^{-3}]$ | hustota negativních iontů |
| $p$ | [Torr] | celkový tlak |
| $p_{O_2}$ | [Torr] | parciální tlak kyslíku |
| $p_q$ | [Torr] | quenching pressure |
| $S_e$ | $[\mathrm{cm}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$ | zdrojový člen elektronů |
| $S_i$ | $[\mathrm{cm}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$ | zdrojový člen pozitivních iontů |
| $S_{ph}$ | $[\mathrm{cm}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$ | zdrojový člen fotoionizace |
| $t$ | [s] | čas |
| $\Delta t$ | [s] | časový krok |
| $T_i$ | | buňka |
| $\vec{v}_e$ | $[\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$ | rychlost elektronů |
| $\vec{v}_p$ | $[\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$ | rychlost pozitivních iontů |
| $\vec{v}_n$ | $[\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$ | rychlost negativních iontů |
| $V$ | [V] | elektrický potenciál |
| $x, y$ | [cm] | souřadnice |
| $\alpha$ | $[\mathrm{cm}^{-1}]$ | koeficient ionizace |
| $\epsilon$ | $[\mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}]$ | konstanta dielektrika |
| $\lambda_l$ | $[\mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{Torr}^{-1}]$ | absorpční koeficient |
| $\mu(\Omega_i)$ | $[\mathrm{cm}^2]$ | objem buňky $T_i$ |
| $\nu_i$ | $[\mathrm{s}^{-1}]$ | koeficient ionizace |
| $\nu_u$ | $[\mathrm{s}^{-1}]$ | efektivní koeficient excitace |
| $\xi$ | | účinnost fotoionizace |
| $\sigma_{ij}$ | | stěna buňky $T_i$ |
| $\Omega_i$ | | konečný objem |

# Seznam obrázků


2.1 Průběh paramteru $\xi\nu_u/\nu_i$ [7] . . . . . 17

3.1 Pomocná buňka (*Diamond cell*) [1] . . . . . 22

4.1 Výpočetní oblasti . . . . . 29

4.2 Hustota elektronů pro stejnou pozici čela streameru . . . . . 31

4.3 Hustota elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru . . . . 31

4.4 Porovnání hustoty elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru - řez . . . . . 32

4.5 Porovnání intenzity elektrického pole pro stejnou pozici čela streameru 32

4.6 Hustota elektronů ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}\ s$ . . . . . 33

4.7 Hustota elektrického náboje ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}\ s$ . . . . 33

4.8 Porovnání hustoty elektrického náboje ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}\ s$ 34

4.9 Zdrojový člen fotoionizace ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}\ s$ . . . . . 34

4.10 Porovnání intenzity elektrického pole ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}\ s$ 35

4.11 Hustota elektronů pro stejnou pozici čela streameru . . . . . 36

4.12 Hustota elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru . . . . 36

4.13 Porovnání hustoty elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru - řez . . . . . 37

4.14 Porovnání intenzity elektrického pole pro stejnou pozici čela streameru 37

4.15 Hustota elektronů ve stejném čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}\ s$ . . . . . 38

4.16 Hustota elektronů v různých časech . . . . . 38

4.17 Hustota elektrického náboje ve stejném čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}\ s$ . . . . 39

4.18 Hustota elektrického náboje v různých časech . . . . . 39

4.19 Hustota elektrického náboje v různých časech - řez . . . . . 40

4.20 Porovnání zdrojového členu fotoionizace ve stejném čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}\ s$ . . . . . 40

4.21 Porovnání zdrojového členu fotoionizace v různých časech . . . . . 41

4.22 Intenzita elektrického pole . . . . . 41

4.23 Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 8.405 \cdot 10^{-8}$ . . . . . 42

4.24 Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 8.815 \cdot 10^{-8}$ . . . . . 42

4.25 Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 9.225 \cdot 10^{-8}$ . . . . . 43

4.26 Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 9.43 \cdot 10^{-8}$ . . . . . 43

4.27 Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ . . . . . 44

4.28 Vývoj hustoty elektronů (vlevo) a vývoj hustoty elektrického náboje (vpravo) . . . . . 44

4.29 Vývoj zdrojového členu fotoionizace . . . . . 45

# Seznam tabulek

2.1 Parametry tří systémového modelu [5] . . . . . 17
2.2 Závislost parametru $\xi\nu_u/\nu_i$ na redukovaném elektrickém poli [8] . . . 17

# Obsah

**1 Úvod** **11**

**2 Streamer** **12**
2.1 Matematický model . . . . . 12
2.1.1 Počáteční a okrajové podmínky . . . . . 14
2.2 Model fotoionizace . . . . . 15
2.2.1 Komplexnější model . . . . . 17

**3 Numerická aproximace** **19**
3.1 Metoda konečných objemů . . . . . 20
3.1.1 Diskretizace rovnice pro hustotu elektronů . . . . . 20
3.1.2 Diskretizace rovnice pro pozitivní ionty . . . . . 22
3.1.3 Diskretizace Poissonovy rovnice . . . . . 23
3.1.4 Diskretizace rovnic popisujících fotoionizaci . . . . . 24
3.2 Dynamická adaptace sítě . . . . . 27

**4 Výsledky numerických testů** **29**
4.1 Počáteční a okrajové podmínky . . . . . 29
4.2 Oblast s rovinnými elektrodami . . . . . 31
4.3 Oblast s parabolickou anodou . . . . . 35

**5 Závěr** **46**

**Literatura** **47**

# Kapitola 1

# Úvod

Pokud jsou neionizované nebo málo ionizované látky vystaveny účinku elektrického pole s vysokým potenciálem, dochází k nerovnovážnému ionizačnímu procesu, tzv. výboji, který se vyskytuje v různých formách v závislosti na elektrickém poli, tlaku a objemu látky. Ionizace způsobí rozklad elektricky neutrálních částic na elektrony a ionty. Elektrony, které mají výrazně nižší hmotnost než ionty, jsou snadno urychlovány vlivem elektrického pole směrem k anodě. Oproti tomu ionty jsou kvůli své hmotnosti urychlovány mnohem pomaleji a jsou přitahovány katodou. Elektrické výboje lze rozdělit do dvou základních skupin a to na stacionární (tmavé, zářivé, obloukové) a nestacionární (streamery, leadery) [1], [2].
V této práci je dále uveden pouze streamer, jehož pohyb lze popsat pomocí různých modelů, které se liší svojí komplexností.
Při numerických simulacích se často uvažuje obdélníková oblast se dvěma rovinnými elektrodami (případně se zakřivenou anodou). Simulace je možné realizovat na strukturovaných nebo na nestrukturovaných sítích. Co se týče strukturovaných sítí, tak na nich lze snadněji použít schémata vyšších řádů přesnosti. Na druhou stranu se špatně popisuje obecná geometrie (výpočetní oblast, její vysíťování). Naproti tomu na nestrukturovaných sítích se schémata hůře rozšiřují na vyšší řády přesnosti (vyšší než 2. řád), ale jsou vhodnější pro obecné geometrie.
Při numerickém řešení je potřeba zachytit oblasti velkých gradientů neznámých co nejjemnější sítí, ale na druhou stranu by globální zjemnění sítě výrazně ovlivnilo dobu výpočtu. Lze tedy použít sítě, které jsou lokálně zjemněné v oblastech velkých gradientů. Vzhledem k tomu, že streamer je nestacionárním výbojem, je nutné síť adaptovat dynamicky. Tento postup je možný jak pro strukturované sítě [10], [11], tak pro nestrukturované sítě, které jsou použity v této práci.
Cílem této práce je numerická simulace elektrického výboje s vlivem fotoionizace a otestování tvaru anody na šíření elektrického výboje.

# Kapitola 2

# Streamer

Streamer lze použít v různých technických aplikacích, jakými jsou např. povrchové úpravy materiálů (vytvrzování, odolnost proti korozi, leptání) nebo čištění kontaminovaných látek, kterými jsou bioplyn, znečištěná voda, výfukové plyny atd. Čištění těchto látek je možné díky reakci mezi nečistotami a radikály, které jsou emitovány při ionizaci. Při zpracování elektroniky lze pomocí streameru nanášet tenké vrstvičky filmu nebo na povrchu vyleptat malé drážky, u kterých je dosaženo přesnějšího tvaru geometrie oproti standardním metodám. Další velmi perspektivní oblastí použití streameru je oblast biomedicíny, jelikož se podílí na produkci různých biocidních činidel. Pomocí plazmových trysek je možné zanést reaktivní radikály pod kůži a tímm lze léčit neinvazivně, bez narušení kůže. Další různé možnosti použití lze najít např. v [1], [2].

## 2.1 Matematický model

Nejběžnější a nejúčinnější model pro studium dynamiky streameru je složen z rovnic konvekce-difuze-reakce pro elektricky nabité částice, Poissonovy rovnice pro elektrický potencíál a Helmholtzovy rovnice pro fotoionizaci [3]

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = S_{ph} + n_e\alpha|\vec{v}_e| - n_e\eta|\vec{v}_e| - n_e n_p\beta_{ep} - \nabla\cdot(n_e\vec{v}_e) - \nabla\cdot(D_e\nabla n_e), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = S_{ph} + n_e\alpha|\vec{v}_e| - n_e n_p\beta_{ep} - n_p n_n\beta_{pn} - \nabla\cdot(n_p\vec{v}_p), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial n_n}{\partial t} = n_e\eta|\vec{v}_e| - n_p n_n\beta_{pn} - \nabla\cdot(n_n\vec{v}_n), \tag{2.3}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{q}{\epsilon_0}(n_p - n_e - n_n), \quad \vec{E} = -\nabla V, \tag{2.4}$$

$$\nabla^2 S_{ph} - (\lambda p_{O_2})^2 S_{ph} = -A p_{O_2}^2 I, \tag{2.5}$$

kde $n_e$, $n_p$, $n_n$ jsou hustoty elektronů, pozitivních a negativních iontů; $\vec{v}_e$, $\vec{v}_p$, $\vec{v}_n$ jsou rychlosti elektronů, pozitivních a negativních iontů. Symboly $\alpha$, $\eta$, $D_e$, $\beta_{ep}$,

$\beta_{pn}$ jsou koeficienty ionizace, ulpění, difuze, rekombinace elektronů a pozitivních iontů, rekombinace pozitivních a negativních iontů. $V$ je elektrický potenciál a $\vec{E}$ je intenzita elektrického pole. $S_{ph}$ označuje zdrojový člen fotoionizace, který je vyjádřen pomocí Helmholtzovy rovnice (2.5), $p_{O_2}$ je parciální tlak kyslíku a $I$ označuje emisi fotonů, která je vyjádřena jako $I = A \cdot n_e \cdot \vec{v}_e \cdot \lambda$. Parametry $A$ a $\lambda$ jsou uvedeny v Tabulce 2.1.
V této práci je použit nejjednodušší minimální model streameru, který je schopen popsat dynamiku výboje. Tento model zanedbává zdrojové členy v rovnicích (2.1) - (2.3) mimo člen $n_e\alpha|\vec{v}_e|$, který reprezentuje ionizaci. Dále je zanedbána rychlost šíření pozitivních iontů, jelikož rychlost šíření elektronů je o mnoho řádů vyšší. Minimální model rovněž neuvažuje negativní ionty. Po těchto úpravách lze získat minimální model ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e\vec{v_e} - D_e\vec{\nabla}n_e) &= S_e, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} &= S_i^+, \end{aligned} \tag{2.6}$$

kde $n_e$, $\vec{v}_e$, $D_e$ mají stejný význam jako v rovnicích (2.1) - (2.5), $n_i$ představuje hustotu pozitivních iontů, $t$ je čas a $S_e = S_i^+$ označují zdrojové členy. Tento systém (2.6) reprezentuje vývoj veličiny v čase (tzv. evoluční rovnice) a je propojen s Poissonovou rovnicí pro elektrický potenciál $V$

$$\Delta V = Q, \tag{2.7}$$

kde $Q = -\frac{e}{\epsilon}(n_i - n_e)$, $e$ značí elementární elektrický náboj, $\epsilon$ je konstanta dielektrika. Elektrický potenciál je funkcí nabitých částic, jelikož hustoty těchto částic jsou obsaženy v pravé straně rovnice (2.7). Oproti tomu parametry šíření výboje závisí na intenzitě elektrického pole, které je vyjádřeno jako záporný gradient elektrického potenciálu

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V. \tag{2.8}$$

Jak již bylo zmíněno výše, rychlost šíření elektronů $\vec{v}_e$ je funkcí elektrického pole a stejně tak i difuzní koeficient $D_e$ a zdrojové členy $S_e$, $S_i^+$. Tyto parametry lze určit ze vztahů (2.9) - (2.12) [1], [4]

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_e &= -\left[7.4\cdot 10^{21}\cdot\frac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}+7.1\cdot 10^{6}\right]\frac{\vec{E}}{\parallel \vec{E} \parallel};\ \text{pro}\ \frac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}>2\cdot 10^{-15},\\
\vec{v}_e &= -\left[1.03\cdot 10^{22}\cdot\frac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}+1.3\cdot 10^{6}\right]\frac{\vec{E}}{\parallel \vec{E} \parallel};\ \text{pro}\ 10^{-16}<\frac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}<2\cdot 10^{-15},\\
\vec{v}_e &= -\left[7.2973\cdot 10^{21}\cdot\frac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}+1.63\cdot 10^{6}\right]\frac{\vec{E}}{\parallel \vec{E} \parallel};\ \text{pro}\ 2.6\cdot 10^{-17}<\frac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}<10^{-16},\\
\vec{v}_e &= -\left[6.87\cdot 10^{22}\cdot\frac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}+3.38\cdot 10^{4}\right]\frac{\vec{E}}{\parallel \vec{E} \parallel};\ \text{pro}\ \frac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}\leq 2.6\cdot 10^{-17},
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

kde $N$ je hustota neionizovaného plynu ($N = 2.5\cdot 10^{19}\ cm^{-3}$). Difuzní koeficient $D_e$ dále závisí na rychlosti šíření elektronů $\vec{v}_e$

$$
D_e = \left[0.3341\cdot 10^{9}\cdot\left(\frac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}\right)^{0.54069}\right]\frac{\parallel \vec{v}_e \parallel}{\parallel \vec{E} \parallel}. \tag{2.10}
$$

Zdrojový člen je dán vztahem

$$
S_e = \frac{\alpha}{N}\cdot \parallel \vec{v}_e \parallel \cdot n_e\cdot N, \tag{2.11}
$$

a poměr $\frac{\alpha}{N}$ [cm$^2$] je vypočten pomocí následujícího vztahu

$$
\frac{\alpha}{N} = \begin{cases} 2\cdot 10^{-16}\cdot\exp\left(\dfrac{-7.248\cdot 10^{-15}}{\parallel \vec{E} \parallel /N}\right), & \text{pro}\ \dfrac{\parallel \vec{E} \parallel}{N}>1.5\cdot 10^{-15},\\ 6.619\cdot 10^{-17}\cdot\exp\left(\dfrac{-5.593\cdot 10^{-15}}{\parallel \vec{E} \parallel /N}\right), & \text{pro ostatní případy.}\end{cases} \tag{2.12}
$$

### 2.1.1 Počáteční a okrajové podmínky

Elektrické pole je situováno mezi dvěma elektrodami, kterými jsou na levé straně anoda a na pravé katoda.

***Počáteční podmínky***
Minimální model (2.6) zanedbává vliv fotoionizace, který je nezbytný k rozběhnutí streameru. Z toho důvodu je vliv fotoionizace nahrazen hustotou pozadí. Porucha v elektrickém poli je zajištěna Gaussovým pulsem, který nahrazuje hrot elektrody používaný v experimentu pro definici místa vzniku výboje

$$
\begin{aligned}
n_e(x,y,0) &= 10^{12}\, e^{-\frac{(x-0.2)^2+(y-0.25)^2}{\sigma^2}} + 10^5\ [\mathrm{cm}^{-3}], \quad \sigma = 0.01, \\
n_i(x,y,0) &= n_e(x,y,0).
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

***Okrajové podmínky***
Pro hustotu elektronů je na všech stěnách předepsána Neumannova homogenní podmínka

$$
\frac{\partial n_e}{\partial \vec{n}} = 0. \tag{2.14}
$$

Pro elektrický potenciál je předepsána Dirichletova podmínka pro anodu a katodu

$$
\begin{aligned}
V &= 25000\ [\mathrm{V}], \quad \text{pro anodu}, \\
V &= 0\ [\mathrm{V}], \quad \text{pro katodu},
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

a na zbylých hranicích pak Neumannova homogenní podmínka

$$
\frac{\partial V}{\partial \vec{n}} = 0. \tag{2.16}
$$

## 2.2 Model fotoionizace

V této práci je minimální model (2.6) doplněn fotoionizací, což je vyjádřeno přidáním zdrojového členu $S_{ph}$ do evolučních rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial n_e}{\partial t} + \mathrm{div}(n_e \vec{v_e} - D_e \vec{\nabla} n_e) &= S_e + S_{ph}, \\
\frac{\partial n_i}{\partial t} &= S_i^+ + S_{ph}.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Zdrojový člen fotoionizace $S_{ph}$ je určen pomocí tří systémového modelu SP3. Vzhledem k tomu že rozptyl fotonů není uvažován a že časový rozsah šíření fotonů je vzhledem k šíření streameru velmi malý, pak funkce popisující rozložení fotonů $\Psi_l(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega})$ v pozici $\mathbf{x}$ a směru $\mathbf{\Omega}$ splňuje radiační transportní rovnici [5]

$$
\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Psi_l(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}) + \lambda_l p_{O_2} \Psi_l(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \frac{p_q}{p + p_q} \left( \xi \frac{\nu_u}{\nu_i} \right) \frac{\nu_i n_e}{c\xi}, \quad l = 1, \cdots, N_g, \tag{2.18}
$$

kde $l$ značí diskrétní vlnové délky, $\lambda_l$ je absorpční koeficient, $p_{O_2}$ je parciální tlak kyslíku (150 $Torr$ při atmosferickém tlaku), $p$ je celkový tlak, $p_q = 30\ Torr$ je v literatuře označován jako tzv. *quenching pressure*, $\xi = 0,1$ značí účinnost fotoionizace, $\nu_u$ je efektivní koeficient excitace pro $N_2$, $\nu_i$ je koeficient ionizace, $n_e$ značí hustotu elektronů a $c$ je rychlost světla. Člen $(\xi\nu_u/\nu_i)$ reprezentuje produkci fotoelektronů a bude rozebrán později. Tento model uvažuje $N_g = 3$.
Rovnice (2.18) mají různé absorpční koeficienty, ale stejný zdrojový člen, který závisí na redukovaném elektrickém poli $(E/N)$, měnícího se v prostoru a v čase. Obecně SPN aproximace je založena na propojených systémech eliptických rovnic závisejících na prostorové proměnné, čase a frekvenci, nikoli však směru. SP3 aproximace rovnice (2.18) vede tedy na sadu dvou eliptických rovnic pro funkce $\phi_{1,l}(\mathbf{x})$ a $\phi_{2,l}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{1,l}(\mathbf{x}) - \frac{\lambda_l^2 p_{O_2}^2}{\kappa_1^2}\phi_{1,l}(\mathbf{x}) &= -\frac{\lambda_l p_{O_2}}{\kappa_1^2}\frac{p_q}{p+p_q}\left(\xi\frac{\nu_u}{\nu_i}\right)\frac{\nu_i n_e}{c\xi},\\ \Delta\phi_{2,l}(\mathbf{x}) - \frac{\lambda_l^2 p_{O_2}^2}{\kappa_2^2}\phi_{2,l}(\mathbf{x}) &= -\frac{\lambda_l p_{O_2}}{\kappa_2^2}\frac{p_q}{p+p_q}\left(\xi\frac{\nu_u}{\nu_i}\right)\frac{\nu_i n_e}{c\xi},\end{aligned} \tag{2.19}$$

kde $\kappa_{1,2} = (1/7)(3\pm2\sqrt{6/5})$. Na hranici, kde není uvažována reflexivita ani emisivita, musí funkce $\phi_{1,l}(\mathbf{x})$ a $\phi_{2,l}(\mathbf{x})$ splňovat tzv. Larsenovy okrajové podmínky, kterými je sada rovnic (2.19) provázána [5]

$$\begin{aligned}\nabla\phi_{1,l}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n_s} &= -\lambda_l p_{O_2}\alpha_1\phi_{1,l}(\mathbf{x}) - \lambda_l p_{O_2}\beta_2\phi_{2,l}(\mathbf{x}),\\ \nabla\phi_{2,l}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n_s} &= -\lambda_l p_{O_2}\alpha_2\phi_{2,l}(\mathbf{x}) - \lambda_l p_{O_2}\beta_1\phi_{1,l}(\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{2.20}$$

kde $\mathbf{n_s}$ je jednotková vnější normála, $\alpha_{1,2} = (5/96)(34\pm11\sqrt{6/5})$ a $\beta_{1,2} = (5/96)(2\pm\sqrt{6/5})$.
Lineární kombinací $\phi_{1,l}(\mathbf{x})$ a $\phi_{2,l}(\mathbf{x})$ lze vyjádřit izotropní část funkce popisující distribuci fotonů

$$\Psi_l(\mathbf{x}) = \frac{\gamma_2\phi_{1,l}(\mathbf{x}) - \gamma_1\phi_{2,l}(\mathbf{x})}{\gamma_2 - \gamma_1}, \tag{2.21}$$

kde $\gamma_{1,2} = (5/7)(1 \pm 3\sqrt{5/6})$.
Fotoionizační zdrojový člen nyní lze vyjádřit jako [5]

$$S_{ph}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{N_g} A_l\xi p_{O_2} c\Psi_l(\mathbf{x}), \tag{2.22}$$

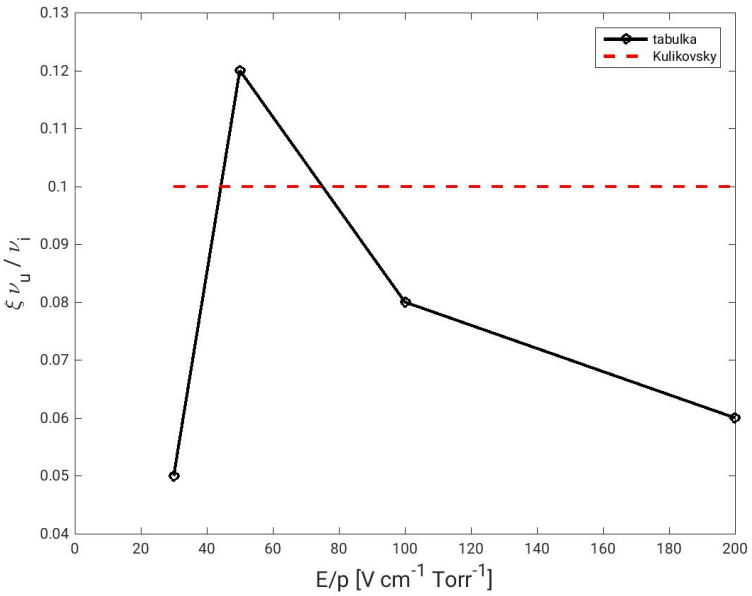
kde parametry $A_l$ a $\lambda_l$ jsou uvedeny v Tabulce 2.1

| $l$ | $A_l[\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{Torr}^{-1}]$ | $\lambda_l[\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{Torr}^{-1}]$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.0067 | 0.0477 |
| 2 | 0.0346 | 0.1127 |
| 3 | 0.3059 | 0.5994 |

Tabulka 2.1: Parametry tří systémového modelu [5]

### 2.2.1 Komplexnější model

Model fotoionizace, který je uveden v této práci, vychází z Kulikovského modelu [6]. Tento model vyjadřuje rychlost produkce fotoelektronů z hlediska ionizační rychlosti za předpokladu $\xi\nu_u/\nu_i = 0.1$ (viz Obrázek 2.1).




Obrázek 2.1: Průběh paramteru $\xi\nu_u/\nu_i$ [7]

Komplexnější model produkce vyjadřuje člen $\xi\nu_u/\nu_i$ pomocí hodnot uvedených v Tabulce 2.2 jako funkci redukovaného elektrického pole.

| $E/p$ $[\mathrm{V}\cdot\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{Torr}^{-1}]$ | 30 | 50 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|---|
| $\xi\nu_u/\nu_i$ | $5\cdot10^{-2}$ | 0.12 | $8\cdot10^{-2}$ | $6\cdot10^{-2}$ |

Tabulka 2.2: Závislost parametru $\xi\nu_u/\nu_i$ na redukovaném elektrickém poli [8]

Pro určení hodnot, které nejsou uvedeny v Tabulce 2.2 (tj. pro hodnoty mezi body vyznačenými v Obrázku 2.1) je použita lineární interpolace.

# Kapitola 3

# Numerická aproximace

Šíření streameru je popsáno evolučními rovnicemi, které jsou propojené s Poissonovou rovnicí pro elektrický potenciál. Evoluční rovnice jsou řešeny explicitním schématem na dynamicky adaptované nestrukturované síti. Základní variantou je numerické schéma prvního řádu přesnosti v prostoru i v čase. Vyššího řádu přesnosti je dosaženo lineární rekonstrukcí společně s Bartovým-Jespersenovým limiterem (vyšší řád přesnosti v prostoru) a tří krokové metody Runge-Kutta (vyšší řád přesnosti v čase). Řešení Poissonovy rovnice vede na soustavu algebraických lineárních rovnic, které jsou řešeny v každém časovém kroku.
Celý algoritmus výpočtu je možné přiblížit v několika hlavních bodech [1]

- vypočtení nových hodnot hustoty elektronů $n_e$ a hustoty pozitivních iontů $n_i$ explicitním schématem;
- stanovení elektrického potenciálu z nových hodnot $n_e$ a $n_i$ numerickým řešením Poissonovy rovnice;
- vypočtení intenzity elektrického pole $\vec{E}$ z elektrického potenciálu;
- vypočtení rychlosti elektronů $\vec{v}_e$ a difuzního koeficientu $D_e$, jelikož jsou funkcí elektrického pole $\vec{E}$;
- stanovení nové časové vrstvy $\rightarrow$ nové hodnoty $n_e$ a $n_i$;
- vytvoření nové zjemněné sítě;
- interpolace hodnot ze staré sítě na novou.

Tato práce je zaměřena na fotoionizaci a její vliv při šíření elektrického výboje (streameru), z toho důvodu je zde uveden pouze stručný popis diskretizace ostatních členů.

## 3.1 Metoda konečných objemů

K diskretizaci rovnic je použita metoda konečných objemů. Tyto rovnice jsou řešeny v oblasti $\Omega$. Aby bylo možné tyto rovnice numericky řešit, je třeba oblast $\Omega$ nahradit oblastí $\Omega^h$

$$\Omega \approx \Omega^h, \tag{3.1}$$

kde $\Omega^h$ je oblast s lomenou hranicí, kterou už je možno rozdělit na konečný počet podoblastí

$$\Omega^h = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i, \tag{3.2}$$

kde $\Omega_i$ jsou jednotlivé podoblasti (konečné objemy), které pokrývají celou oblast $\Omega^h$ a jsou navzájem disjunktní (tj. $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$).

### 3.1.1 Diskretizace rovnice pro hustotu elektronů

První rovnice ze systému (2.6) je integrována přes konečný objem $\Omega_i$

$$\iint_{\Omega_i} \frac{\partial n_e}{\partial t}\, dV + \iint_{\Omega_i} \operatorname{div}(n_e \vec{v}_e)\, dV - \iint_{\Omega_i} \operatorname{div}(D_e \vec{\nabla} n_e)\, dV = \iint_{\Omega_i} S_e\, dV + \iint_{\Omega_i} S_{ph}\, dV. \tag{3.3}$$

S použitím Greenovy věty a věty o střední hodnotě integrálu [2] lze rovnici (3.3) přepsat do tvaru

$$\frac{dn_e}{dt} + \frac{1}{\mu(\Omega_i)} \oint_{\partial\Omega_i} n_e \vec{v}_e \vec{n}\, ds - \frac{1}{\mu(\Omega_i)} \oint_{\partial\Omega_i} D_e \vec{\nabla} n_e \vec{n}\, ds = S_e + S_{ph}, \tag{3.4}$$

kde $\mu(\Omega_i)$ je objem buňky $T_i$ a $\vec{n}$ je jednotkový normálový vektor k hranici $\partial\Omega_i$ buňky $T_i$. Křivkové integrály přes hranici buňky $i$ jsou aproximovány sumami

$$\frac{dn_e}{dt} = -\frac{1}{\mu(\Omega_i)} \sum_{j=1}^{m} \left( n^n_{e_{ij}} \vec{v}_{e_{ij}} \vec{n}_{ij} |\sigma_{ij}| - D_{e_{ij}} \vec{\nabla} n^n_{e_{ij}} \vec{n}_{ij} |\sigma_{ij}| \right) + S_e + S_{ph}, \tag{3.5}$$

kde $m$ je počet stěn buňky $T_i$, $\vec{n}_{ij}$ je jednotkový normálový vektor na stěně mezi buňkou $T_i$ a $T_j$ a $|\sigma_{ij}|$ označuje délku této stěny. Časová derivace je dále nahrazena tří krokovou metodou Runge - Kutta

$$
\begin{aligned}
n_{e_i}^{(0)} &= n_{e_i}^{n}, \\
n_{e_i}^{(k)} &= n_{e_i}^{n} + \alpha_{(k)} \mathrm{Res}\left(n_{e_i}^{(k-1)}\right), \\
n_{e_i}^{n+1} &= n_{e_i}^{(3)},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

kde $k = 1, 2, 3$ , koeficienty $\alpha_{(1)} = 0.5,\ \alpha_{(2)} = 0.5,\ \alpha_{(3)} = 1$ a Res značí residuum, které je dáno vztahem

$$
\mathrm{Res}\left(n_{e_i}^{(k-1)}\right) = -\frac{\Delta t}{\mu(\Omega_i} \sum_{j=1}^{m} \left( n_{e_i}^{(k-1)} \vec{v}_{e_{ij}} \vec{n}_{ij} |\sigma_{ij}| - D_{e_{ij}} \vec{\nabla} n_{e_i}^{(k-1)} \vec{n}_{ij} |\sigma_{ij}| \right) + \Delta t (S_{e_i}^{(k-1)} + S_{ph_i}^{(k-1)}),
\tag{3.7}
$$

kde $\Delta t$ značí časový krok [1].

***Konvektivní člen***

Konvektivní člen (1. výraz obsažen v sumě rovnice (3.5)) se vypočítá pomocí schématu upwind, kde je počítáno s hodnotou hustoty elektronů $n_e$ buďto z buňky $T_i$ nebo ze sousední buňky

$$
n_{e_{ij}} = \begin{cases} n_{e_i} & \text{pro } (\vec{v}_{e_{ij}} \cdot \vec{n}_{ij}) \geq 0, \\ n_{e_j} & \text{pro ostatní případy,} \end{cases}
\tag{3.8}
$$

kde $n_{ij}$ je normálový vektor orientovaný z buňky $T_i$ na buňku $T_j$. Toto schéma je prvního řádu přesnosti, což má za následek velkou numerickou disipaci. Z toho důvodu je použita lineární rekonstrukce společně s Bartovým-Jespersenovým limiterem, což zvýší řád přesnosti v prostoru [9].

Hodnota na stěně $\sigma_{ij}$ buňky $T_i$, získaná lineární rekonstrukcí, je vypočítaná pomocí vztahu

$$
\begin{aligned}
n_{e_L} &= n_{e_i} + \psi_i (\vec{\nabla} n_{e_i} \cdot \vec{r}_i), \\
n_{e_R} &= n_{e_j} + \psi_j (\vec{\nabla} n_{e_j} \cdot \vec{r}_j),
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

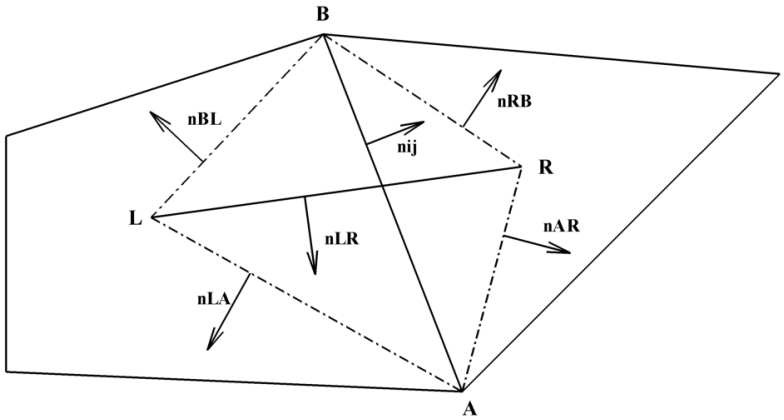
kde $\vec{\nabla} n_{e_i}$, $\vec{\nabla} n_{e_j}$ jsou gradienty hustoty elektronů v buňkách $T_i$, $T_j$ a $\psi_i$ značí Barthův-Jespersenův limiter, který je dán vztahem [9]

$$
\psi_i = \begin{cases} \min\left(1, \dfrac{n_{e_{\max}} - n_{e_i}}{\Delta_2}\right), & \Delta_2 > 0, \\ 1, & \Delta_2 = 0, \\ \min\left(1, \dfrac{n_{e_{\min}} - n_{e_i}}{\Delta_2}\right), & \Delta_2 < 0, \end{cases}
\tag{3.10}
$$

kde $n_{e_{\max}}$ je maximální hodnota hustoty elektronů z buňky $T_i$ a všech jejích sousedních buněk, které mají společnou stěnu s buňkou $T_i$, $n_{e_{\min}}$ je minimální hodnota hustoty elektronů z buňky $T_i$ a všech jejích sousedních buněk, které mají společnou stěnu s buňkou $T_i$, $\Delta_2$ je dán vztahem $\Delta_2 = \vec{\nabla} n_{e_i} \cdot \vec{r}$, kde $\vec{r}$ je vzdálenost z těžiště buňky ke stěně buňky $T_i$, $\psi_i$ je minimum přes stěny. Bližší popis a vyjádření vztahů je možné najít v [1].

***Difuzní člen***

Difuzní člen (2. výraz v sumě rovnice (3.5)) obsahuje člen $\vec{\nabla} n_{e_{ij}}$, který reprezentuje gradient hustoty elektronů na stěně $\sigma_{ij}$. Tento člen je aproximován na pomocné buňce (tzv. *diamond cell*), která je zkonstruována spojením těžišť (L; R) buněk $T_i$ a $T_j$, které mají společnou stěnu $\sigma_{ij}$ a její koncové body (A; B) (viz Obrázek 3.1). Objem této pomocné buňky je označen symbolem $D_{\sigma_{ij}}$. Hodnoty hustoty elektronů ve vrcholech (A; B) jsou vypočítány metodou nejmenších čtverců z hodnot v buňkách obklopujících dané vrcholy. Podrobnější popis a vyjádření vztahů je uveden v [1].




Obrázek 3.1: Pomocná buňka (*Diamond cell*) [1]

### 3.1.2 Diskretizace rovnice pro pozitivní ionty

Druhá rovnice ze systému (2.6) je integrována přes konečný objem $\Omega_i$

$$\iint_{\Omega_i} \frac{\partial n_i}{\partial t}\, dV = \iint_{\Omega_i} S_i^+\, dV + \iint_{\Omega_i} S_{ph}\, dV. \tag{3.11}$$

Integrací přes objem buňky $\Omega_i$ přejde parciální diferenciální rovnice v obyčejnou diferenciální rovnici, kde je časová derivace, obdobně jako v rovnici (3.5), aproximována pomocí tří stupňové metody Runge - Kutta

$$
\begin{aligned}
n_{i_i}^{(0)} &= n_{i_i}^{n}, \\
n_{i_i}^{(k)} &= n_{i_i}^{n} + \alpha_{(k)} \mathrm{Res}\left(n_{i_i}^{(k-1)}\right), \\
n_{i_i}^{n+1} &= n_{i_i}^{(3)},
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

kde koeficienty $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_{(3)}$ mají stejné hodnoty jako ve vztahu (3.6) a residuum je dáno vztahem

$$
\mathrm{Res}\left(n_{i_i}^{(k-1)}\right) = \Delta t(S_{i_i}^{(k-1)} + S_{ph_i}^{(k-1)}). \tag{3.13}
$$

### 3.1.3 Diskretizace Poissonovy rovnice

Diskretizace Poissonovy rovnice vede na soustavu lineárních rovnic

$$
\boldsymbol{A} \cdot \vec{V}^{n+1} = \vec{b}^{n+1}, \tag{3.14}
$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matice koeficientů, $\vec{V}$ je vektor neznámých, jehož rozměr je roven celkovému počtu buněk a $\vec{b}$ je vektor neznámých. Tuto soustavu lze řešit různými metodami, které je možné rozdělit do dvou základních skupin a to na přímé a iterační metody. Mezi iterační metody patří např. Jacobiova, Gaussova-Seidelova nebo SOR (super-relaxační) metoda, která je podobná Gaussově-Seidelově metodě, ale navíc využívá vhodný součinový parametr. Mezi přímé metody patří např. Gaussova eliminační metoda nebo LU rozklad. Vzhledem k tomu, že výpočet probíhá na kvazi-stacionární adaptované síti (síť je neměnná po určitý počet časových kroků), je matice $\boldsymbol{A}$ po určitou dobu konstantní a mění se pouze vektor pravých stran $\vec{b}$. Z toho důvodu je pro řešení soustavy zvolen LU rozklad, který se jeví jako vhodnější volba.
K diskretizaci rovnice (2.7) je opět použita metoda konečných objemů. Rovnice je integrována přes konečný objem $\Omega_i$ a dále použitím věty o střední hodnotě integrálu a Greenovy věty je upravena na tvar

$$
\frac{1}{\mu(\Omega_i)} \oint_{\partial\Omega_i} \vec{\nabla} V \vec{n} \, ds = Q. \tag{3.15}
$$

Integrál přes hranici je aproximován sumou přes všechny stěny dané buňky

$$
\Delta V \approx \frac{1}{\mu(\Omega_i)} \sum_{j=1}^{m} \vec{\nabla} V_{ij} \vec{n}_{ij} |\sigma_{ij}|. \tag{3.16}
$$

Aproximace gradientu $\vec{\nabla} V_{ij}$ je provedena na duálním objemu (*diamond cell*, viz Obrázek 3.1)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} V_{ij} = \frac{1}{D_{\sigma_{ij}}} \Bigg[ & \frac{1}{2}(V(A) + V(R)) \cdot \vec{n}_{AR} |\sigma_{AR}| + \\ & + \frac{1}{2}(V(R) + V(B)) \cdot \vec{n}_{RB} |\sigma_{RB}| + \\ & + \frac{1}{2}(V(B) + V(L)) \cdot \vec{n}_{BL} |\sigma_{BL}| + \\ & + \frac{1}{2}(V(L) + V(A)) \cdot \vec{n}_{LA} |\sigma_{LA}| \Bigg].\end{aligned} \tag{3.17}$$

Platnost následujících vztahů je zřejmá (viz Obrázek 3.1)

$$\begin{aligned}\vec{n}_{LA}|\sigma_{LA}| + \vec{n}_{AR}|\sigma_{AR}| &= \vec{n}_{LR}|\sigma_{LR}|, \\ \vec{n}_{AR}|\sigma_{AR}| + \vec{n}_{RB}|\sigma_{RB}| &= \vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}|, \\ \vec{n}_{RB}|\sigma_{RB}| + \vec{n}_{BL}|\sigma_{BL}| &= -\vec{n}_{LR}|\sigma_{LR}|, \\ \vec{n}_{BL}|\sigma_{BL}| + \vec{n}_{LA}|\sigma_{LA}| &= -\vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}|.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Dosazením rovnice (3.17) společně s vyjádřením (3.18) do vztahu (3.16) lze zapsat

$$\begin{aligned}\Delta V = \sum_{j=1}^{m} \Bigg[ & \frac{1}{2\mu(\Omega_i) D_{\sigma_{ij}}} \cdot \vec{n}_{LR}|\sigma_{LR}| \cdot \vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}| \cdot V(A) - \\ & - \frac{1}{2\mu(\Omega_i) D_{\sigma_{ij}}} \cdot \vec{n}_{LR}|\sigma_{LR}| \cdot \vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}| \cdot V(B) + \\ & + \frac{1}{2\mu(\Omega_i) D_{\sigma_{ij}}} \cdot \vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}| \cdot \vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}| \cdot V(R) - \\ & - \frac{1}{2\mu(\Omega_i) D_{\sigma_{ij}}} \cdot \vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}| \cdot \vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}| \cdot V(L) \Bigg],\end{aligned} \tag{3.19}$$

kde se hodnoty elektrického potenciálu v krajních bodech $V(A), V(B)$ vypočítají metodou nejmenších čtverců [1].

### 3.1.4 Diskretizace rovnic popisujících fotoionizaci

Diskretizace rovnic popisujících fotoionizaci vede na šest soustav (respektive tři páry) lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{1,l} \cdot \vec{\phi}_{1,l}^{n+1} &= \vec{b}_{1,l}, \\ \boldsymbol{A}_{2,l} \cdot \vec{\phi}_{2,l}^{n+1} &= \vec{b}_{2,l},\end{aligned} \tag{3.20}$$

přičemž každý pár je provázán přes okrajové podmínky.
Zdrojový člen fotoionizace $S_{ph}$ je dán vztahem (2.22), který lze pro buňku $T_i$ zapsat ve tvaru

$$S^n_{ph_i} = \sum_{l=1}^{N_g} A_l \xi p_{O_2} c \Psi^n_{l_{ij}}, \tag{3.21}$$

kde parametr $A_l$ je dán Tabulkou 2.1, $\xi = 0.1$, $p_{O_2} = 150\ Torr$, $c = 3 \cdot 10^{10}\ cm \cdot s^{-1}$ a člen $\Psi^n_{l_{ij}}$ je vyjádřen jako

$$\Psi^n_{l_{ij}} = \frac{\gamma_2 \phi^n_{1,l_{ij}} - \gamma_1 \phi^n_{2,l_{ij}}}{\gamma_2 - \gamma_1}, \tag{3.22}$$

kde $\gamma_{1,2}$ jsou uvedeny v odstavci 2.2 a hodnoty $\phi^n_{1,l_{ij}}$ a $\phi^n_{2,l_{ij}}$ jsou určeny pomocí rovnic (2.19) a (2.20), které je pro numerické řešení třeba diskretizovat. Sada dvou eliptických rovnic (2.19) má podobnou strukturu jako Poissonova rovnice pro elektrický potenciál (2.7) a lze ji tedy řešit stejným způsobem jako v předchozím odstavci 3.1.3, kde je použita metoda konečných objemů. První z rovnic ze systému (2.19) je integrována přes konečný objem $\Omega_i$

$$\iint_{\Omega_i} \Delta\phi_{1,l}\, dV - \iint_{\Omega_i} \frac{\lambda_l^2 p_{O_2}^2}{\kappa_1^2} \phi_{1,l}\, dV = - \iint_{\Omega_i} \frac{\lambda_l p_{O_2}}{\kappa_1^2} \frac{p_q}{p + p_q} \left( \xi \frac{\nu_u}{\nu_i} \right) \frac{\nu_i n_e}{c\xi}\, dV. \tag{3.23}$$

Použitím Greenovy věty a věty o střední hodnotě integrálu lze rovnici (3.23) přepsat do tvaru

$$\frac{1}{\Omega_i} \oint_{\partial\Omega_i} \vec{\nabla}\phi_{1,l} \vec{n}\, ds - \frac{\lambda_l^2 p_{O_2}^2}{\kappa_1^2} \phi_{1,l} = - \frac{\lambda_l p_{O_2}}{\kappa_1^2} \frac{p_q}{p + p_q} \left( \xi \frac{\nu_u}{\nu_i} \right) \frac{\nu_i n_e}{c\xi}. \tag{3.24}$$

Křivkový integrál je dále aproximován sumou přes všechny stěny dané buňky

$$\oint_{\partial\Omega_i} \vec{\nabla}\phi_{1,l} \vec{n}\, ds = \sum_{j=1}^{m} \vec{\nabla}\phi^n_{1,l_{ij}} n_{ij} |\sigma_{ij}|. \tag{3.25}$$

Aproximace gradientu $\vec{\nabla}\phi_{1,l_{ij}}$ je realizována na pomocné buňce (*diamond cell*, viz Obrázek 3.1)

$$\vec{\nabla}\phi_{1,l_{ij}} = \frac{1}{D_{\sigma_{ij}}}\Bigg[\frac{1}{2}(\phi_{1,l}(A) + \phi_{1,l}(R)) \cdot \vec{n}_{AR}|\sigma_{AR}| + \\ + \frac{1}{2}(\phi_{1,l}(R) + \phi_{1,l}(B)) \cdot \vec{n}_{RB}|\sigma_{RB}| + \\ + \frac{1}{2}(\phi_{1,l}(B) + \psi_{1,l}(L)) \cdot \vec{n}_{BL}|\sigma_{BL}| + \\ + \frac{1}{2}(\phi_{1,l}(L) + \phi_{1,l}(A)) \cdot \vec{n}_{LA}|\sigma_{LA}|\Bigg], \tag{3.26}$$

kde $\phi_{1,l}(A)$, $\phi_{1,l}(B)$, $\phi_{1,l}(L)$, $\phi_{1,l}(R)$ označují hodnoty funkce $\phi_{1,l}$ v krajních bodech pomocné buňky ($A$, $B$, $L$, $R$), $\vec{n}_{AR}$ je jednotkový normálový vektor ke stěně pomocné buňky $\sigma_{AR}$ a $|\sigma_{AR}|$ je její délka. Ostatní stěny a jednotkové normály jsou značeny analogicky.
Dosazením vztahů (3.18) do rovnice (3.26) ji lze upravit do tvaru

$$\vec{\nabla}\phi_{1,l_{ij}} = \frac{1}{2D_{\sigma_{ij}}}\Bigg[(\phi_{1,l}(A) - \phi_{1,l}(B)) \cdot \vec{n}_{LR}|\sigma_{LR}| + (\phi_{1,l}(R) - \phi_{1,l}(L)) \cdot \vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}|\Bigg]. \tag{3.27}$$

Hodnoty funkce $\phi_{1,l}(A)$ a $\phi_{1,l}(B)$ v koncových bodech pomocné stěny $\sigma_{ij}$ jsou vypočteny metodou nejmenších čtverců

$$\phi_{1,l}(A) = \sum_{p=1}^{N(A)} \alpha_p(A)\phi_{1,l_p}, \quad \phi_{1,l}(B) = \sum_{p=1}^{N(B)} \alpha_p(B)\phi_{1,l_p}, \tag{3.28}$$

kde $\phi_{1,l_p}$ jsou hodnoty v buňce $T_p$, $N(A)$ resp. $N(B)$ je počet buněk obklopující vrchol $A$ resp. $B$, $\alpha_p(A)$ resp. $\alpha_p(B)$ jsou váhy z metody nejmenších čtverců

$$\alpha_p(A) = \frac{1 + \lambda_x(x_p - x_A) + \lambda_y(y_p - y_A)}{N(A) + \lambda_x R_x + \lambda_y R_y}, \tag{3.29}$$

kde váhové parametry jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{p=1}^{N(A)}(x_p - x_A), \quad R_y = \sum_{p=1}^{N(A)}(y_p - y_A), \\ I_{xx} &= \sum_{p=1}^{N(A)}(x_p - x_A)^2, \; I_{yy} = \sum_{p=1}^{N(A)}(y_p - y_A)^2, \; I_{xy} = \sum_{p=1}^{N(A)}(x_p - x_A)(y_p - y_A) \\ \lambda_x &= \frac{I_{xy}R_y - I_{yy}R_x}{D}, \quad \lambda_y = \frac{I_{xy}R_x - I_{xx}R_y}{D}, \; D = I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dosazením rovnice (3.27) do rovnice (3.25) lze zapsat konečný tvar aproximace členu $\Delta\phi_{1,l}$

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{1,l} = \sum_{j=1}^{m}\Bigg[&\frac{1}{2\mu(\Omega_i)D_{\sigma_{ij}}}\cdot\vec{n}_{LR}|\sigma_{LR}|\cdot\vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}|\cdot\phi_{1,l}(A)-\\ &-\frac{1}{2\mu(\Omega_i)D_{\sigma_{ij}}}\cdot\vec{n}_{LR}|\sigma_{LR}|\cdot\vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}|\cdot\phi_{1,l}(B)+\\ &+\frac{1}{2\mu(\Omega_i)D_{\sigma_{ij}}}\cdot\vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}|\cdot\vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}|\cdot\phi_{1,l}(R)-\\ &-\frac{1}{2\mu(\Omega_i)D_{\sigma_{ij}}}\cdot\vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}|\cdot\vec{n}_{ij}|\sigma_{ij}|\cdot\phi_{1,l}(L)\Bigg].\end{aligned} \tag{3.31}$$

Zcela analogicky se diskretizuje i druhá rovnice ze systému (2.19).
Nyní zbývá diskretizovat okrajové podmínky (2.20), kterými jsou předchozí rovnice propojeny. Levá část těchto okrajových podmínek vyjadřuje derivaci funkce $\phi$ ve směru normály $\mathbf{n_s}$, kterou lze aproximovat dopřednou diferencí ve směru normály

$$\nabla\phi_{1,l}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n_s} = \frac{\partial\phi_{1,l}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n_s}} = \frac{\phi_{1,l}(R)-\phi_{1,l}(L)}{dS}, \tag{3.32}$$

kde $dS$ je vzdálenost těžišť (L; R) buněk $T_i$ a $T_j$ (viz Obrázek 3.1). Dosazením této aproximace do okrajových podmínek (2.20) lze zapsat

$$\begin{aligned}\frac{\phi_{1,l}(R)-\phi_{1,l}(L)}{dS} &= -\lambda_l p_{O_2}\alpha_1\phi_{1,l}(L) - \lambda_l p_{O_2}\beta_2\phi_{2,l}(L),\\ \frac{\phi_{2,l}(R)-\phi_{2,l}(L)}{dS} &= -\lambda_l p_{O_2}\alpha_2\phi_{2,l}(L) - \lambda_l p_{O_2}\beta_1\phi_{1,l}(L),\end{aligned} \tag{3.33}$$

kde na pravé straně rovnic je použita jednostranná aproximace, tj. pro vyjádření hodnot na pravé straně rovnic jsou uvažovány hodnoty z vnitřku výpočetní oblasti.

## 3.2 Dynamická adaptace sítě

Při numerickém řešení streameru je třeba zachytit podstatné jevy, které řídí dynamiku elektrického výboje. To má za následek použití velmi jemné sítě, ale použití takové sítě v celé výpočetní oblasti vede k nárůstu výpočetní náročnosti a tím i doby výpočtu. Tento problém lze vyřešit pomocí lokálního zjemnění sítě v místech čela streameru (oblast velkých gradientů). S ohledem na to, že streamer patří mezi nestacionární elektrické výboje, je třeba zjemněnou oblast a její polohu dynamicky adaptovat v průběhu výpočtu. Pro adaptaci sítě je možné použít různá kritéria, která jsou složena z několika parametrů (z hustoty elektronů, zdrojových členů apod.) Jako

adaptační kritérium bylo vybráno maximum z velikosti gradientu hustoty elektronů a velikosti zdrojového členu

$$crit = \max(|\text{grad } n_e|, S_e). \tag{3.34}$$

Algoritmus dynamické adaptace sítě je možné přiblížit v několika hlavních bodech

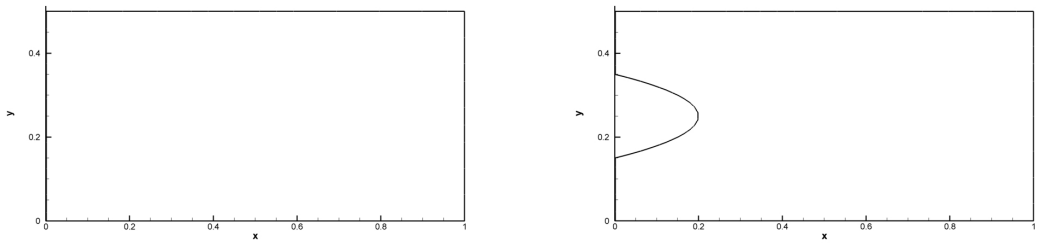
- na referenční síti je vypočteno adaptační kritérium;
- adaptační kritérium je znormováno na interval $< 0, 1 >$;
- adaptační kritérium je vyhlazeno pomocí několika iterací difuzní rovnice;
- po vyhlazení je kritérium opět znormováno na interval $< 0, 1 >$ ;
- podle hodnoty kritéria je určeno, na kolik úrovní budou zjemněny jednotlivé buňky.

Zároveň je nutné splnit důležitou podmínku adaptace sítě, která udává, že úroveň zjemnění mezi sousedními buňkami, které mají společnou stěnu, se může lišit maximálně o jednu úroveň.
Po určitém počtu iterací je vypočteno nové kritérium na referenční síti a vytvoří se nová zjemněná síť. Hodnoty ze staré zjemněné sítě jsou interpolovány na novou.
Více informací o dynamické adaptaci sítě je uvedeno v [1].

# Kapitola 4

# Výsledky numerických testů

Simulace odpovídají šíření 2D rovinného výboje v homogenním elektrickém poli, který je popsán rovnicemi (2.6), (2.7) a (2.17). Výpočty byly provedeny na dvou výpočetních oblastech se dvěma elektrodami, kde levá hranice simuluje anodu a pravá katodu. První oblastí je obdélník $< 0; 1 > \times < 0; 0.5 >$ [cm] s rovinnými elektrodami (viz Obrázek 4.1 vlevo). Druhá oblast má levou hranici částečně nahrazenou parabolou, která má vrchol v bodě $[0.2; 0.25]$ a prochází body $[0; 0.15]; [0; 0.35]$ (průsečíky s osou $y$) jak je zobrazeno na Obrázku 4.1 vpravo.




Obrázek 4.1: Výpočetní oblasti

## 4.1 Počáteční a okrajové podmínky

***Počáteční podmínky bez vlivu fotoionizace***
Pro hustoty elektricky nabitých částic v oblasti s rovinnými elektrodami je počáteční podmínkou Gaussův puls

$$\begin{aligned} n_e(x,y,0) &= 10^{12}\, e^{-\frac{(x-0.2)^2+(y-0.25)^2}{\sigma^2}} + 10^5\ [\mathrm{cm}^{-3}], \quad \sigma = 0.01, \\ n_i(x,y,0) &= n_e(x,y,0), \end{aligned} \tag{4.1}$$

který vytváří poruchu v elektrickém poli nezbytnou pro vyvolání ionizačního procesu. Konstanta $10^5\ cm^{-3}$ je hustota pozadí a nahrazuje zde fotoionizaci.

V druhé oblasti (oblast s parabolickou anodou) jsou předepsány následující počáteční podmínky

$$\begin{aligned} n_e(x,y,0) &= 10^5\ [\mathrm{cm}^{-3}], \\ n_i(x,y,0) &= n_e(x,y,0), \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde již není předepsán Gaussův puls, jelikož poruchu v elektrickém poli zajišťuje tvar anody.

***Počáteční podmínky s vlivem fotoionizace***
Ve výpočetní oblasti s rovinnými elektrodami je počáteční podmínkou pro hustotu elektronů i pozitivních iontů opět Gaussův puls, nyní však bez hustoty pozadí, která fotoionizaci nahrazuje

$$\begin{aligned} n_e(x,y,0) &= 10^{12}\ e^{-\frac{(x-0.2)^2+(y-0.25)^2}{\sigma^2}}\ [\mathrm{cm}^{-3}], \quad \sigma = 0.01, \\ n_i(x,y,0) &= n_e(x,y,0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pro oblast s parabolickou anodou je z důvodu matematického vyjádření zdrojových členů, které závisejí na hustotě elektricky nabitých částic, třeba předepsat nízkou hodnotu Gaussova pulsu

$$\begin{aligned} n_e(x,y,0) &= 100\ e^{-\frac{(x-0.2)^2+(y-0.25)^2}{\sigma^2}}\ [\mathrm{cm}^{-3}], \quad \sigma = 0.01, \\ n_i(x,y,0) &= n_e(x,y,0). \end{aligned} \tag{4.4}$$

***Okrajové podmínky***
Okrajové podmínky jsou shodné pro obě dvě oblasti. Na horní a dolní hranici jimi jsou Neumannovy homogenní podmínky pro hustotu elektronů a pro elektrický potenciál

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial \vec{n}} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \vec{n}} &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Pro anodu a katodu platí následující okrajové podmínky

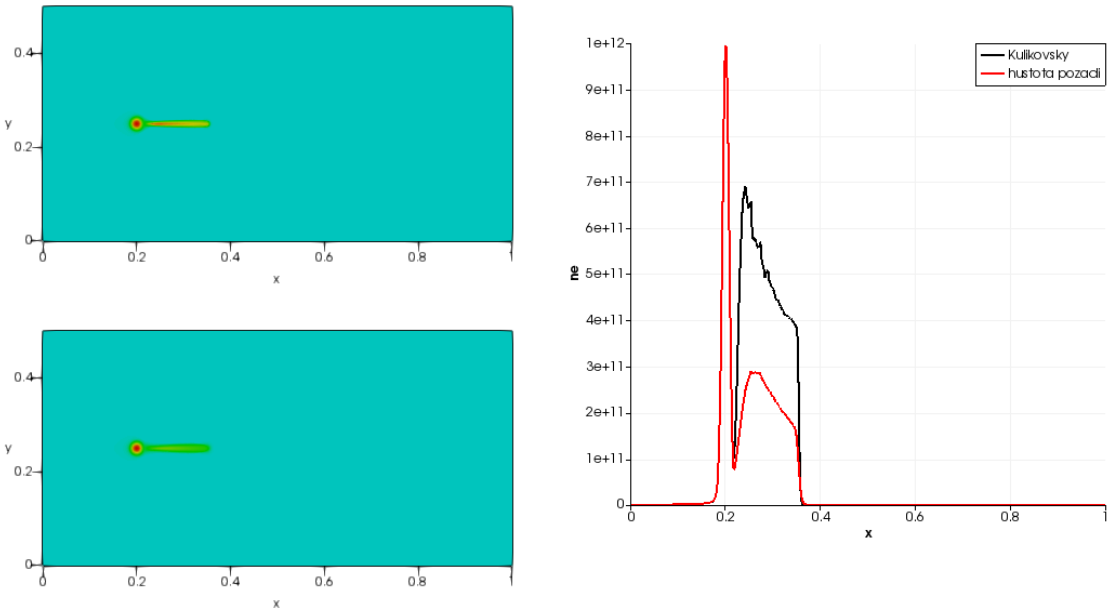
$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial \vec{n}} &= 0, && \text{pro obě elektrody} \\ V &= 25000\ [\mathrm{V}], && \text{pro anodu,} \\ V &= 0\ [\mathrm{V}], && \text{pro katodu.} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Okrajové podmínky pro rovnici fotoionizace jsou popsány v odstavci 2.2.

## 4.2 Oblast s rovinnými elektrodami

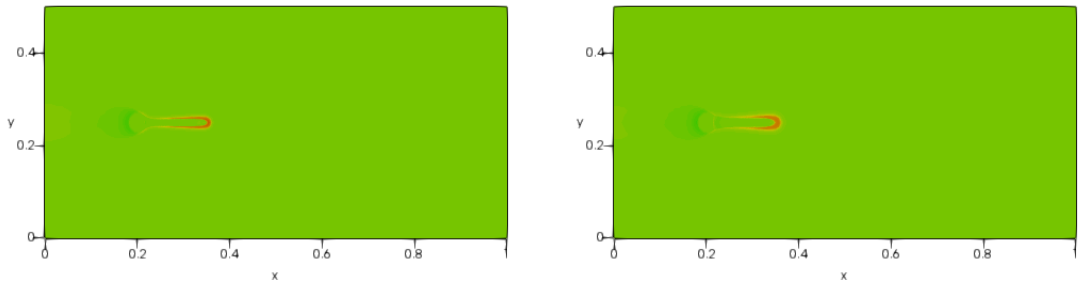
Výsledky v této části odpovídají numerickým testům, které byly provedeny na obdélníkové oblasti s rovinnými elektrodami, kde je počáteční podmínkou Gaussův puls.

***Model s vlivem fotoionizace v porovnání s modelem bez vlivu fotoionizace*** V této části jsou uvedeny testy pro dva modely. První model uvažuje vliv fotoionizace, kdežto ten druhý tento jev zanedbává a pro numerické výpočty jej nahrazuje hustotou pozadí. Cílem těchto testů je porovnání obou modelů a vyhodnocení získaných dat.

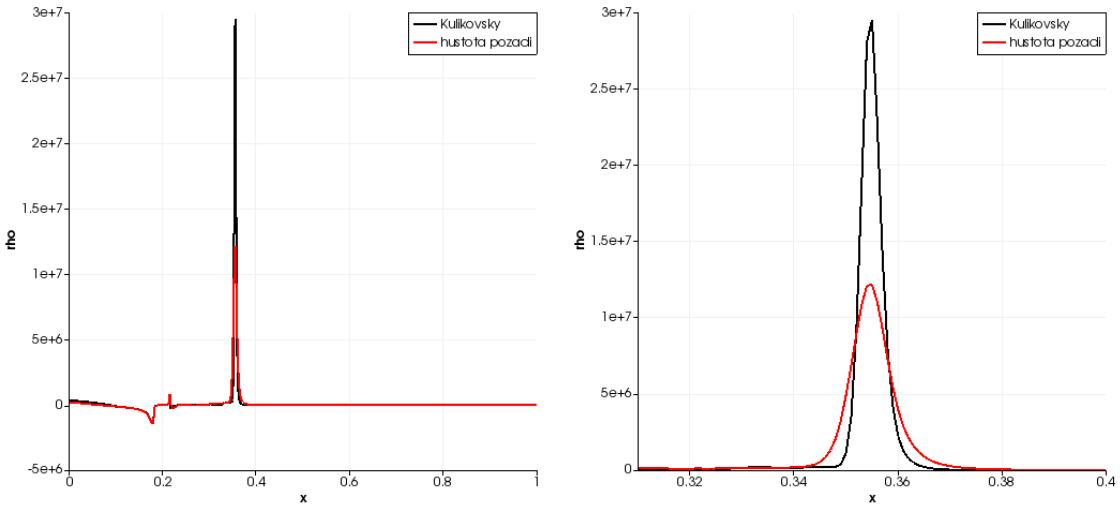



Obrázek 4.2: Hustota elektronů pro stejnou pozici čela streameru

Na Obrázku 4.2 jsou zobrazeny hustoty elektronů pro stejnou pozici čela streameru. Model s vlivem fotoionizace je v čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo nahoře) a model bez vlivu fotoionizace (vlevo dole) je v čase $t = 5.0078 \cdot 10^{-8}$ $s$. Na pravé straně je zobrazen řez osou výboje ($y = 0.25$).

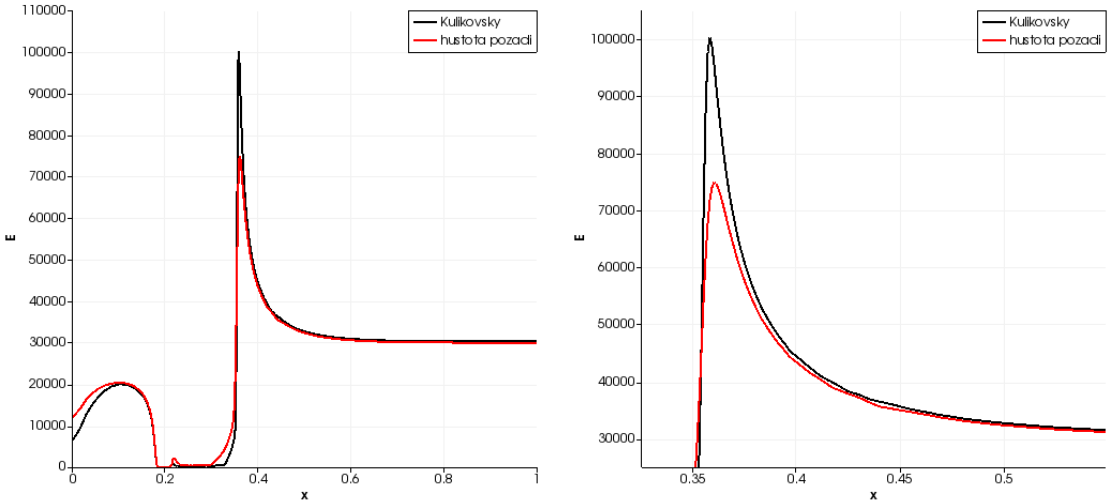



Obrázek 4.3: Hustota elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru




Obrázek 4.4: Porovnání hustoty elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru - řez

Na Obrázku 4.3 jsou zobrazeny hustoty elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru. Model s vlivem fotoionizace je v čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo) a model bez vlivu fotoionizace (vpravo) je v čase $t = 5.0078 \cdot 10^{-8}$ $s$. Obrázek 4.4 zobrazuje řez osou výboje ($y = 0.25$), kde pravá část je přiblížení oblasti maxima.

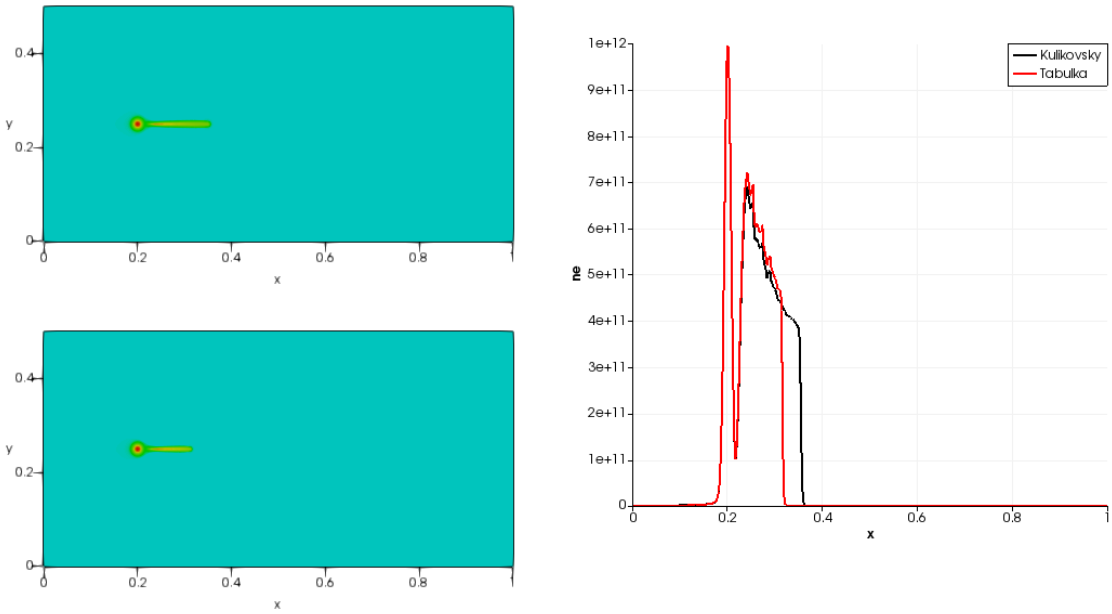



Obrázek 4.5: Porovnání intenzity elektrického pole pro stejnou pozici čela streameru

Na Obrázku 4.5 je zobrazena intenzita elektrického pole pro stejnou pozici čela streameru, kde pravá část je přiblížení oblasti maxima.

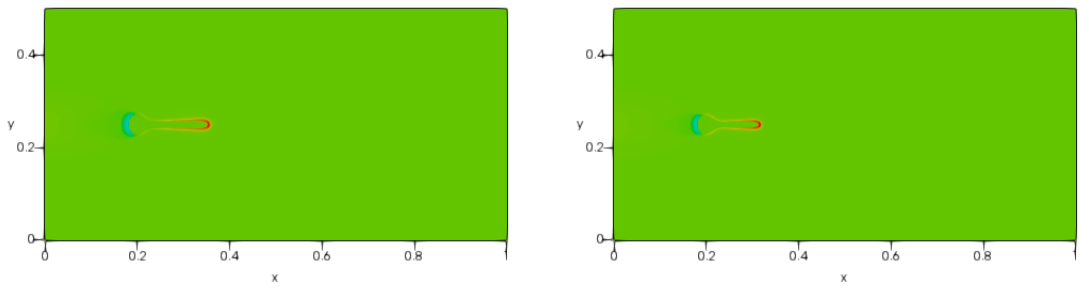
***Porovnání modelů fotoionizace***

V této části jsou uvedeny testy pro dva modely, které se liší hodnotami parametru reprezentujícího produkci fotoelektronů. Prvním je Kulikovského model a druhým je model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami. Výsledky byly zobrazeny ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$. Cílem těchto testů je porovnání obou modelů a vyhodnocení získaných dat.

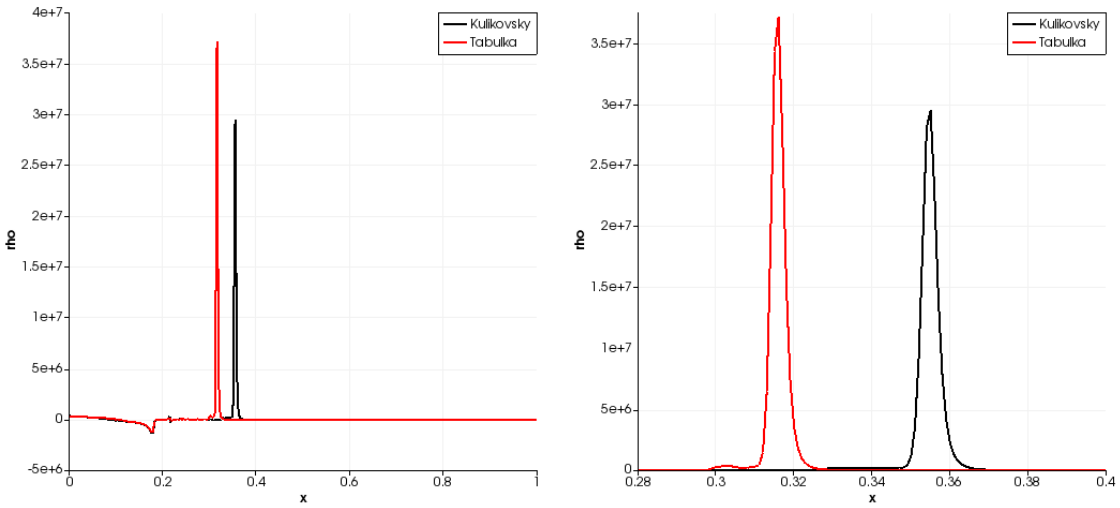



Obrázek 4.6: Hustota elektronů ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}\ s$

Na Obrázku 4.6 jsou zobrazeny hustoty elektronů pro Kulikovského model (vlevo nahoře) a pro model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami (vlevo dole). Na pravé straně je zobrazen řez osou výboje ($y = 0.25$).

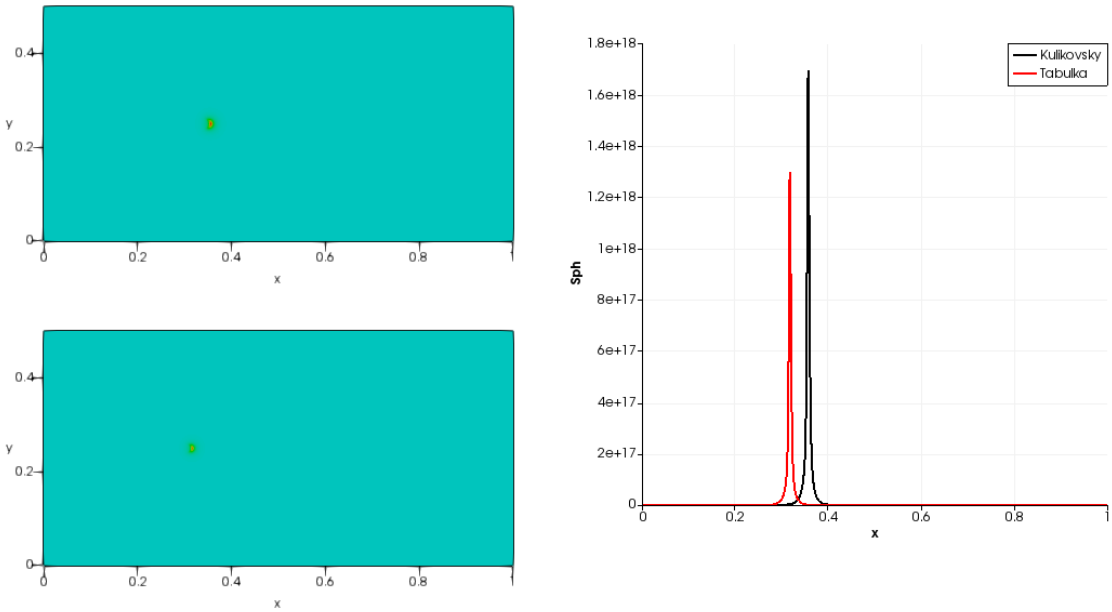



Obrázek 4.7: Hustota elektrického náboje ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}\ s$



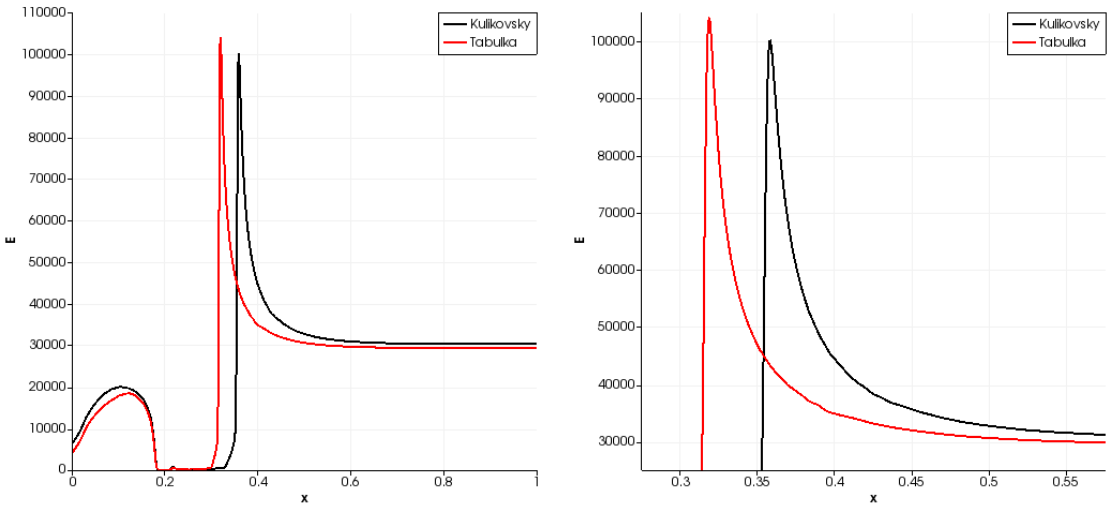

Obrázek 4.8: Porovnání hustoty elektrického náboje ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$

Na Obrázku 4.7 jsou zobrazeny hustoty elektrického náboje pro Kulikovského model (vlevo) a model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami (vpravo). Na Obrázku 4.8 je zobrazeno porovnání hustot elektrického náboje získaného řezem osou výboje ($y = 0.25$).




Obrázek 4.9: Zdrojový člen fotoionizace ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$

Na Obrázku 4.9 jsou zobrazeny zdrojové členy fotoionizace pro Kulikovského model (vlevo nahoře) a model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami (vlevo dole). Na pravé straně je zobrazen řez osou výboje ($y = 0.25$).




Obrázek 4.10: Porovnání intenzity elektrického pole ve stejném čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$

Na Obrázku 4.10 je zobrazeno porovnání intenzity elektrického pole pro Kulikovského model a model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami, kde pravá část je přiblížení oblasti maxima.

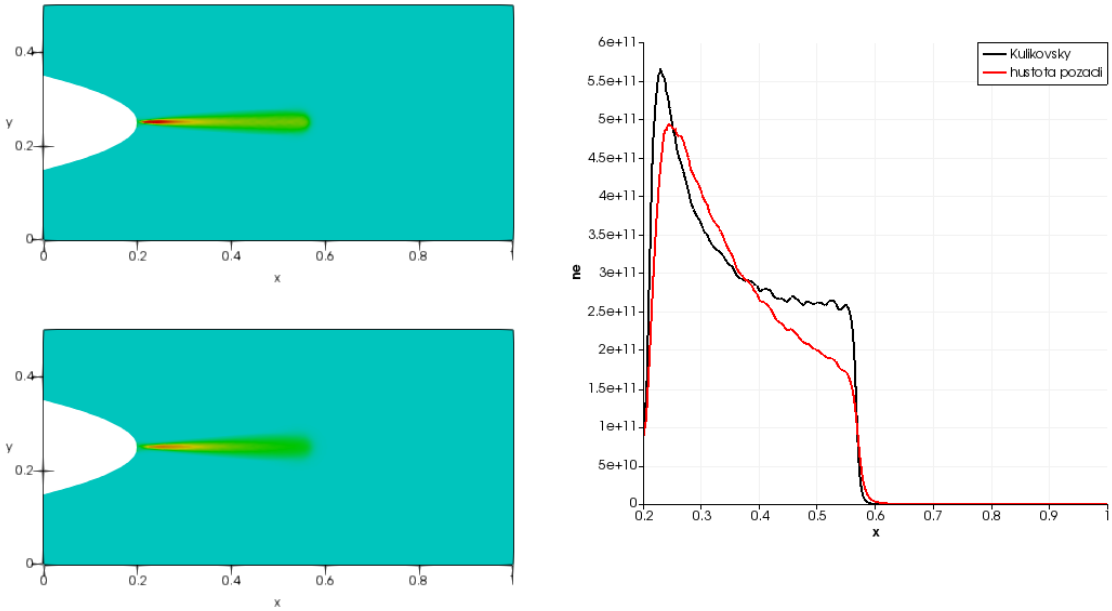
Pro dosažení těchto výsledků bylo třeba provést přibližně 50435 iterací pro Kulikovského model, kdežto počet iterací nutných k dosažení výsledků pro model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami je přibližně 50555.

V této kapitole jsou prezentovány výsledky pro numerické testy, které probíhaly na oblasti s rovinnými elektrodami. Tyto výsledky jsou pro model Kulikovského a modelu, který zanedbává vliv fotoionizace zobrazeny pro stejnou pozici čela streameru. V části, kde je uveden Kulikovského model a model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami, jsou výsledky zobrazeny ve stejném čase.
V místě poruchy ve vysokonapěťovém poli dochází k rozpadu neutrálních částic. V průběhu šíření výboje jsou elektrony přitahovány k čelu streameru, což má za následek další rozklad neutrálních částic. Díky vyšší intenzitě elektrického pole dochází k rozkladu většího počtu částic a proto je pro model s vlivem fotoionizace dosaženo vyšší hodnoty hustoty elektronů (viz Obrázek 4.2), nicméně rychlost šíření je mnohem pomalejší. Naproti tomu je z porovnání modelů, které uvažují vliv fotoionizace, patrné, že hodnota hustoty elektronů je vyšší pro model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami, ale rychlost šíření je vyšší pro Kulikovského model. V oblasti čela a podél streameru (tj. v oblastech velkých rozdílů hustot elektronů a pozitivních iontů) je dosaženo maximální hodnoty elektrického náboje (viz Obrázek 4.3 a 4.7). Zdrojový člen fotoionizace dosahuje vyšších hodnot fotoionizačního členu pro Kulikovského model, což je patrné z Obrázku 4.9.

## 4.3 Oblast s parabolickou anodou

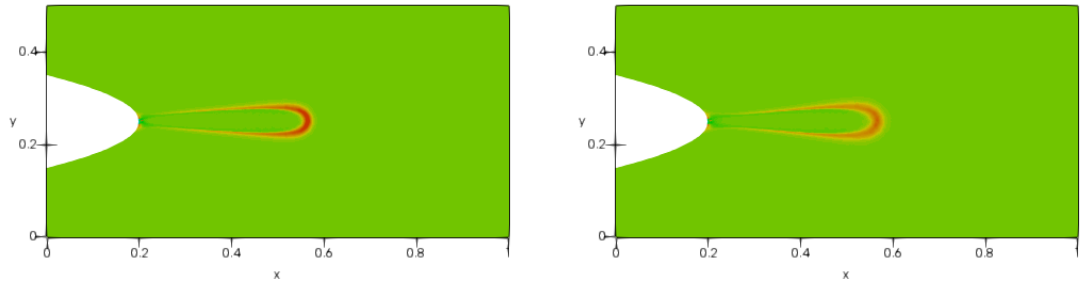
Numerické výsledky v této části odpovídají testům, které byly počítány na oblasti s parabolickou anodou.

***Model s vlivem fotoionizace v porovnání s modelem bez vlivu fotoionizace***
V této části jsou uvedeny testy pro dva modely. První model uvažuje vliv fotoionizace, kdežto ten druhý tento jev zanedbává a pro numerické výpočty jej nahrazuje hustotou pozadí. Cílem těchto testů je porovnání obou modelů a vyhodnocení získaných dat.

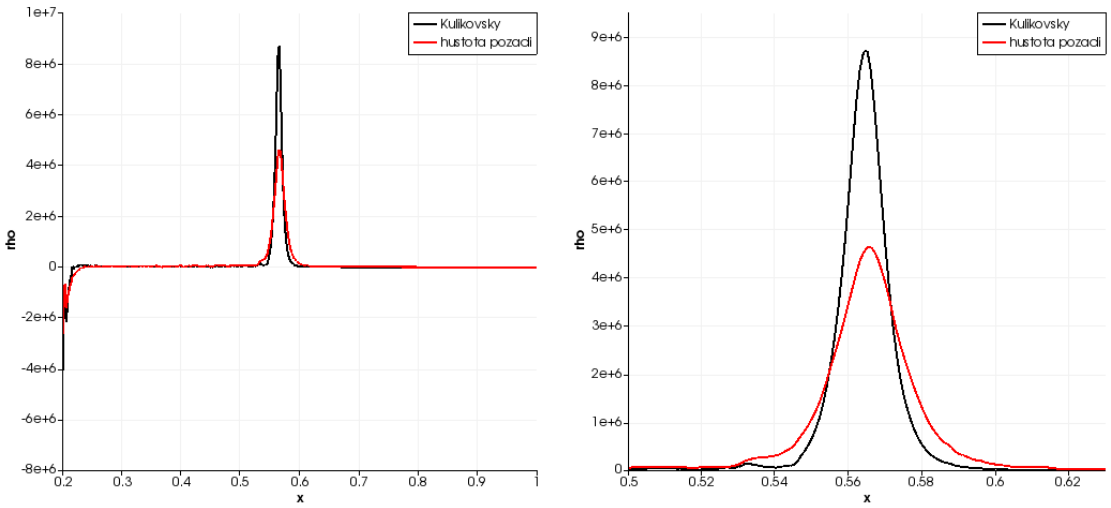



Obrázek 4.11: Hustota elektronů pro stejnou pozici čela streameru

Na Obrázku 4.11 jsou zobrazeny hustoty elektronů pro stejnou pozici čela streameru. Model s vlivem fotoionizace je v čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo nahoře) a model bez vlivu fotoionizace (vlevo dole) je v čase $t = 2.2344 \cdot 10^{-8}$ $s$. Na pravé straně je zobrazen řez osou výboje ($y = 0.25$).

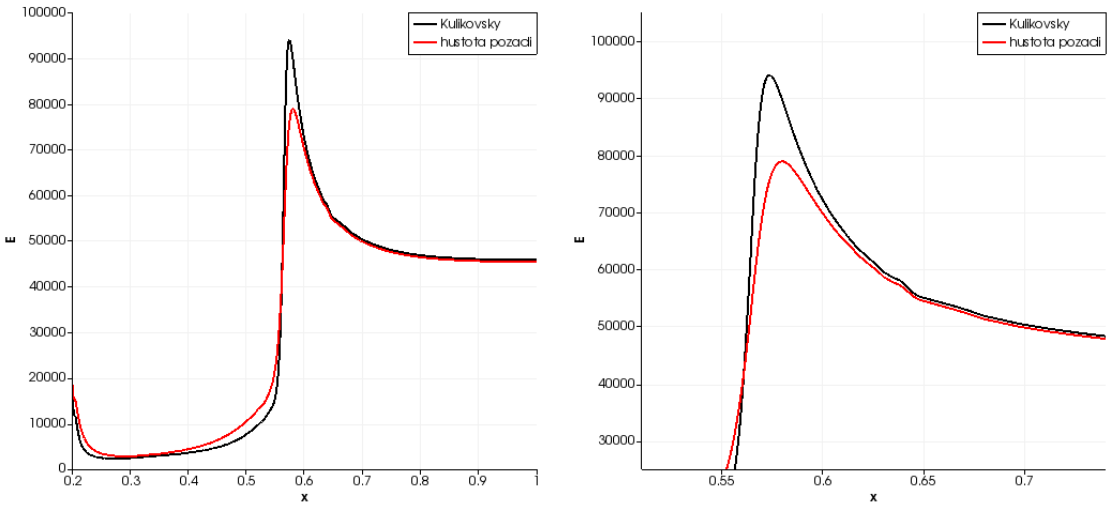



Obrázek 4.12: Hustota elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru




Obrázek 4.13: Porovnání hustoty elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru - řez

Na Obrázku 4.12 jsou zobrazeny hustoty elektrického náboje pro stejnou pozici čela streameru. Model s vlivem fotoionizace je v čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo) a model bez vlivu fotoionizace je v čase $t = 2.2344 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vpravo). Obrázek 4.13 zobrazuje řez osou výboje ($y = 0.25$), kde pravá část je přiblížení oblasti maxima.

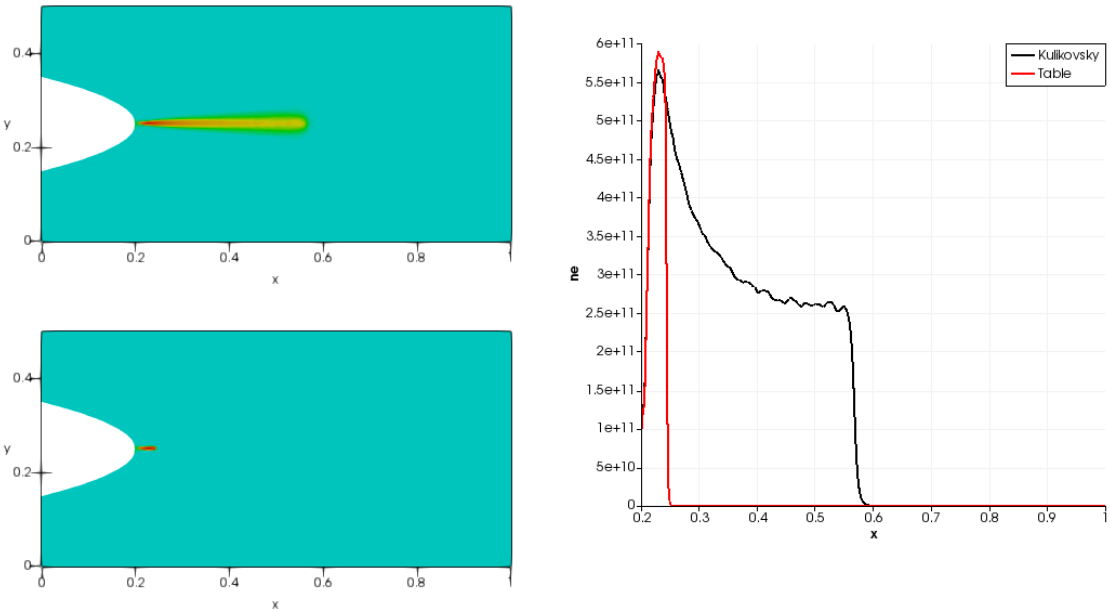



Obrázek 4.14: Porovnání intenzity elektrického pole pro stejnou pozici čela streameru

Na Obrázku 4.14 je zobrazena intenzita elektrického pole pro stejnou pozici čela streameru, kde pravá část je přiblížení oblasti maxima.

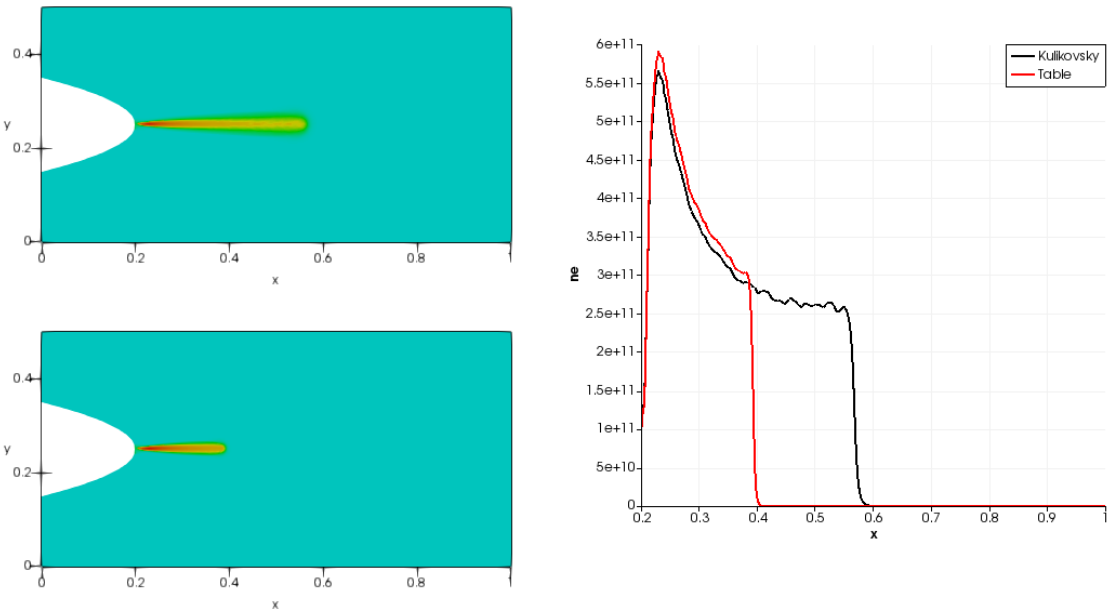
***Porovnání modelů fotoionizace***

V této části jsou uvedeny testy pro dva modely, které se liší hodnotami parametru reprezentujícího produkci fotoelektronů. Prvním je Kulikovského model a druhým je model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami. Výsledky byly zobrazeny ve stejném čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$. Cílem těchto testů je porovnání obou modelů a vyhodnocení získaných dat.




Obrázek 4.15: Hustota elektronů ve stejném čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$

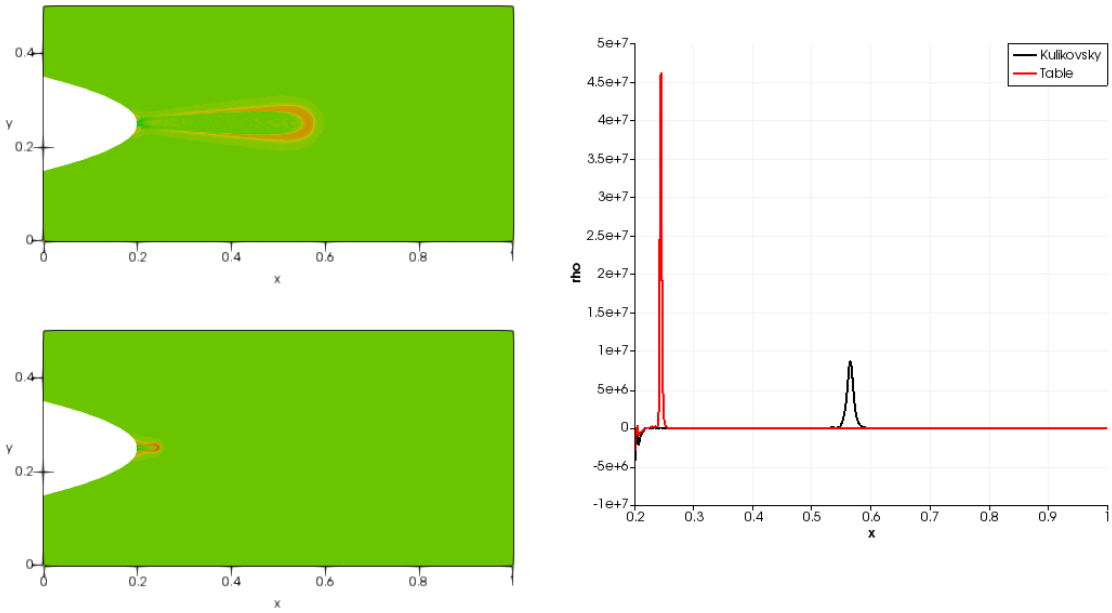
Vzhledem k tomu, že Kulikovského model dosahuje vyšší rychlosti šíření, je zde pro porovnání uveden výsledek v čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$ pro model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami.



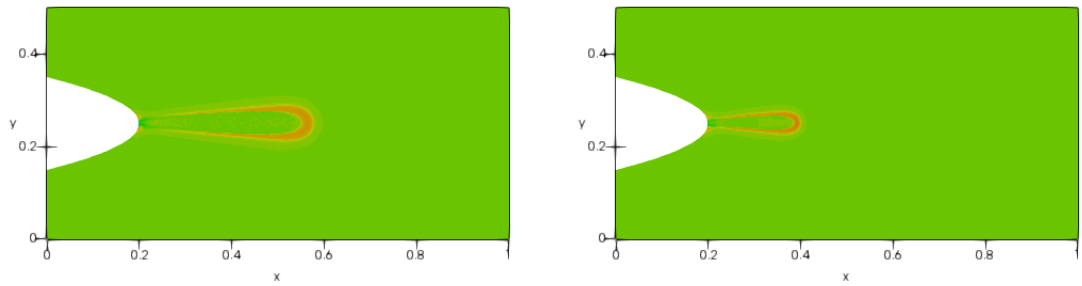

Obrázek 4.16: Hustota elektronů v různých časech

Na Obrázku 4.15 jsou zobrazeny hustoty elektronů ve stejném čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$ pro Kulikovského model (vlevo nahoře) a pro model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami (vlevo dole). Na pravé straně je zobrazen řez

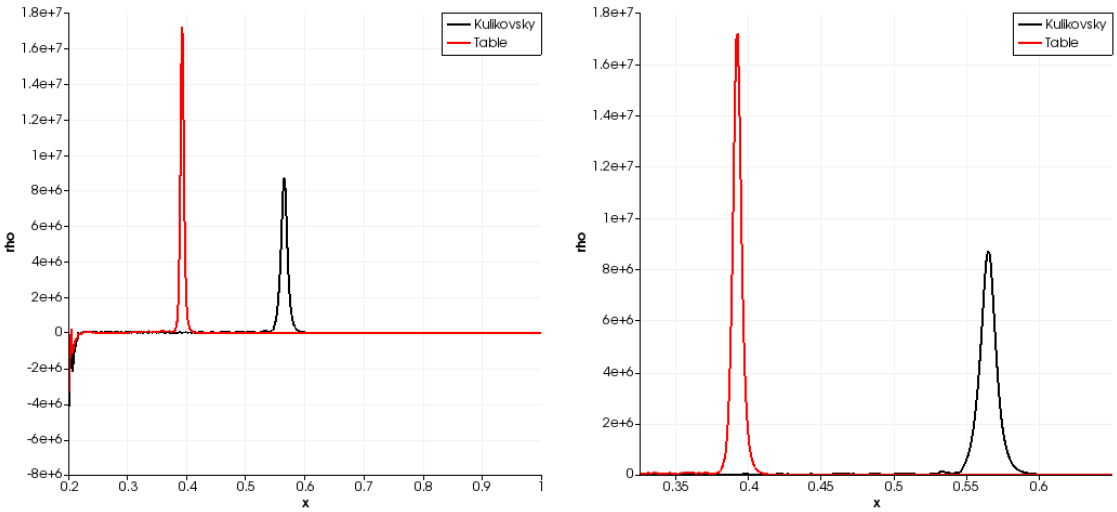
osou výboje ($y = 0.25$). Obrázek 4.16 zobrazuje hustoty elektronů pro Kulikovského model v čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo nahoře) a pro model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami v čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo dole). V pravé části obrázku je opět zobrazen řez osou výboje ($y = 0.25$).




Obrázek 4.17: Hustota elektrického náboje ve stejném čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$

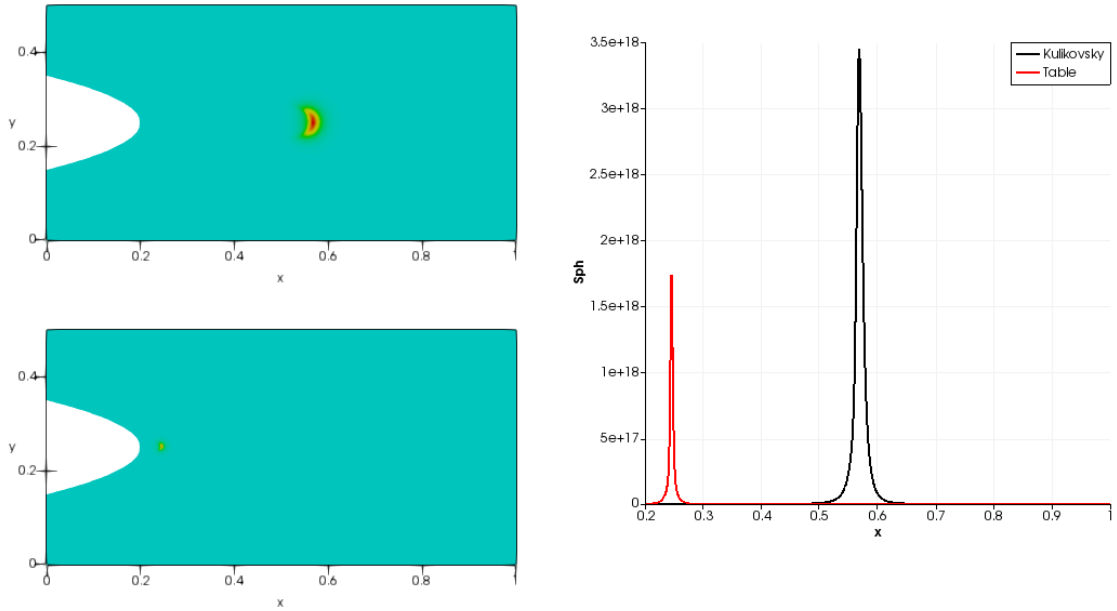



Obrázek 4.18: Hustota elektrického náboje v různých časech

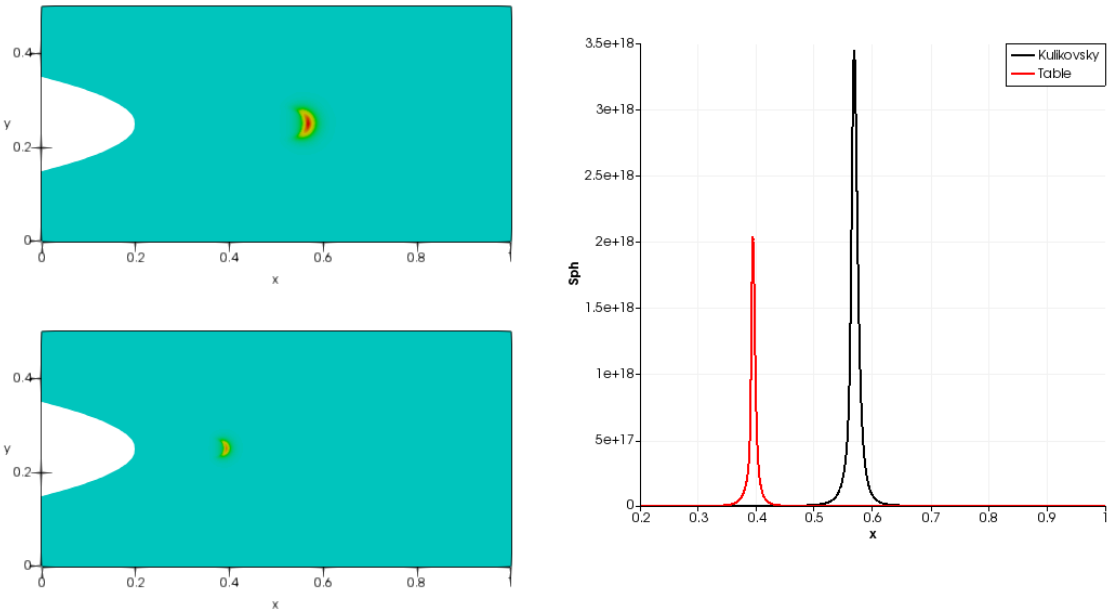



Obrázek 4.19: Hustota elektrického náboje v různých časech - řez

Na Obrázku 4.17 jsou zobrazeny hustoty elektrického náboje pro Kulikovského model (vlevo nahoře) a model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami (vlevo dole). Na pravé straně je zobrazen řez osou výboje ($y = 0.25$). Obrázek 4.18 zobrazuje hustoty elektronů pro Kulikovského model v čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo) a pro model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami v čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vpravo). Na Obrázku 4.19 je zobrazeno porovnání hustot elektrického náboje získaného řezem osou výboje ($y = 0.25$).

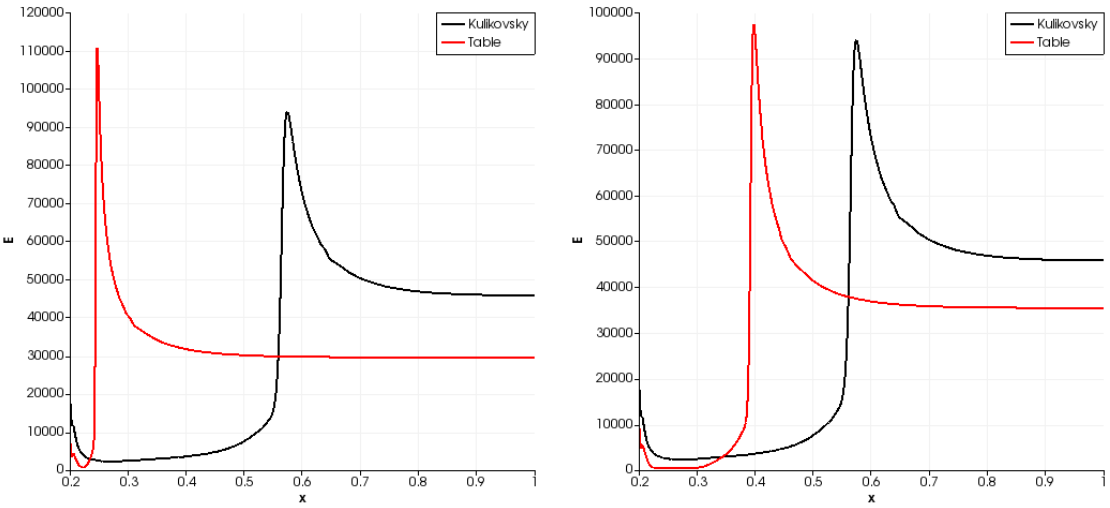



Obrázek 4.20: Porovnání zdrojového členu fotoionizace ve stejném čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$




Obrázek 4.21: Porovnání zdrojového členu fotoionizace v různých časech

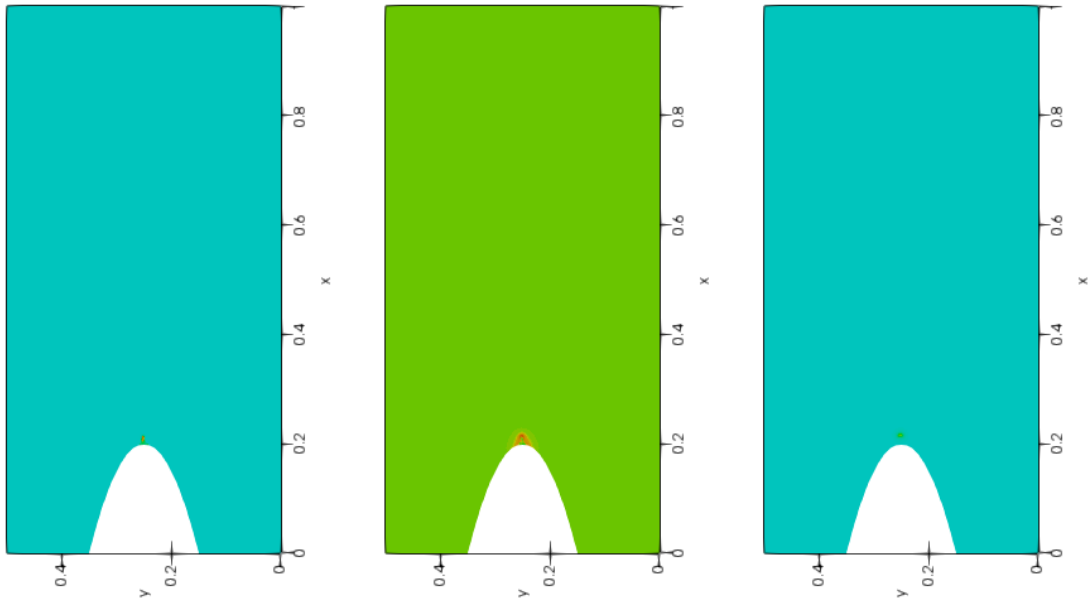
Na Obrázku 4.20 jsou zobrazeny zdrojové členy fotoionizace pro Kulikovského model (vlevo nahoře) a model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami (vlevo dole). Na pravé straně je zobrazen řez osou výboje ($y = 0.25$). Obrázek 4.21 zobrazuje hustoty elektrického náboje pro Kulikovského model v čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo nahoře) a pro model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami v čase $t = 10.25 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo dole). V pravé části obrázku je opět zobrazen řez osou výboje ($y = 0.25$).



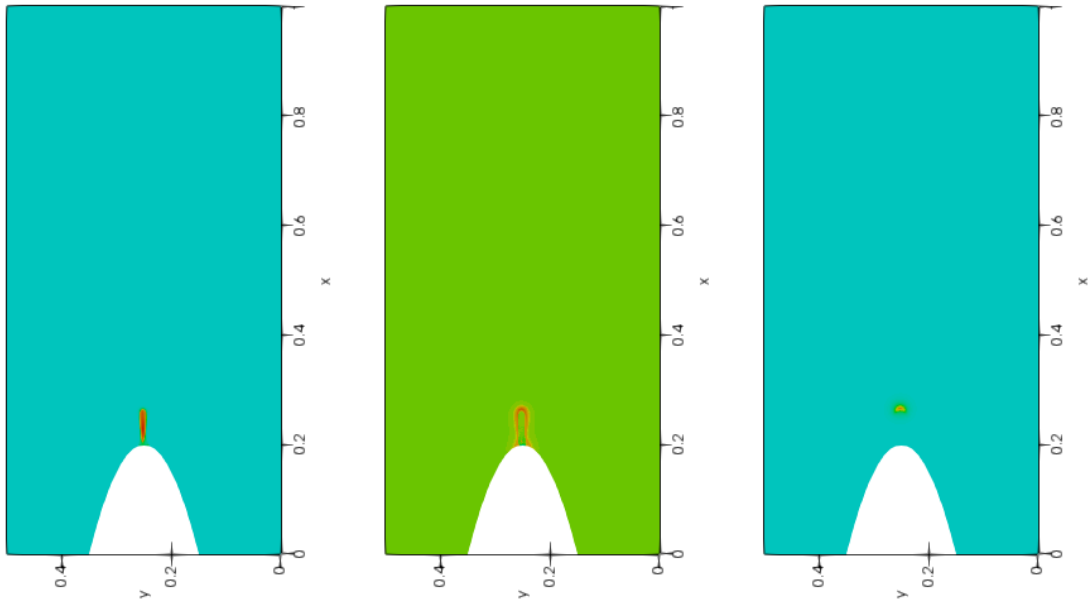

Obrázek 4.22: Intenzita elektrického pole

Na Obrázku 4.22 je zobrazeno porovnání intenzity elektrického pole pro Kulikovského model a model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami ve stejném čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$ $s$ (vlevo) a v různých časech (vpravo).

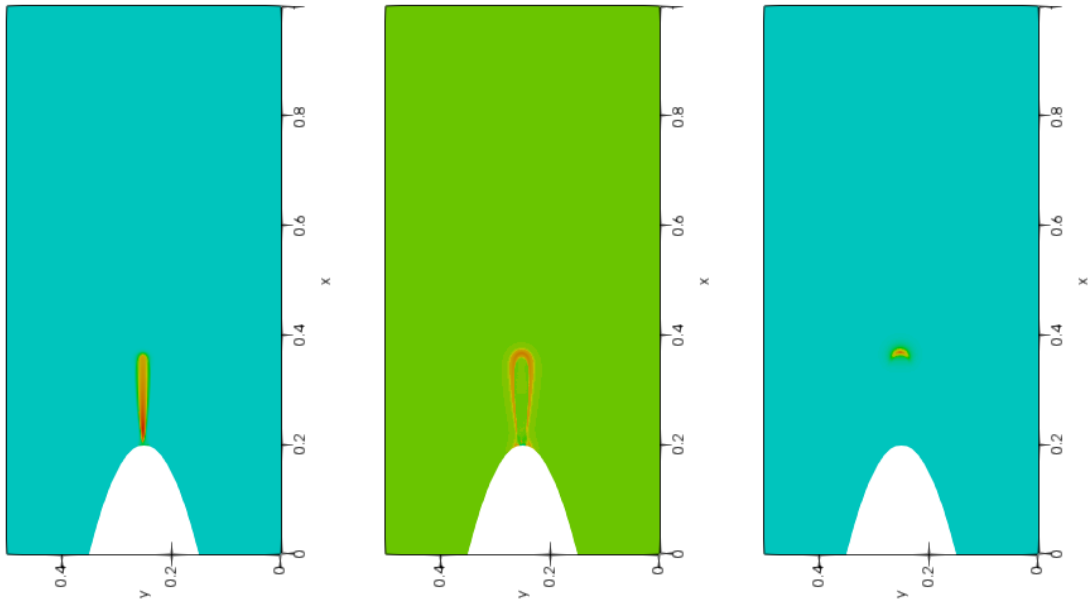
Na Obrázku 4.23 - 4.27 je zobrazen vývoj rovinného výboje ve výpočetní oblasti s parabolickou anodou pro Kulikovského model. Na obrázcích lze vidět vývoj hustoty elektronů, hustoty elektrického náboje a zdrojového členu fotoionizace.



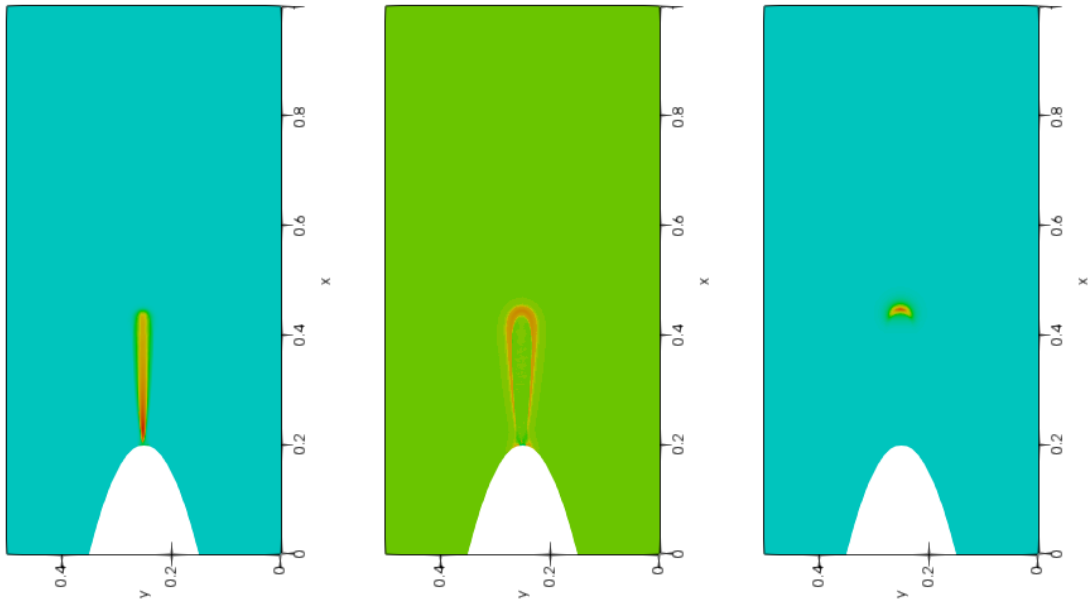

Obrázek 4.23: Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 8.405 \cdot 10^{-8}$



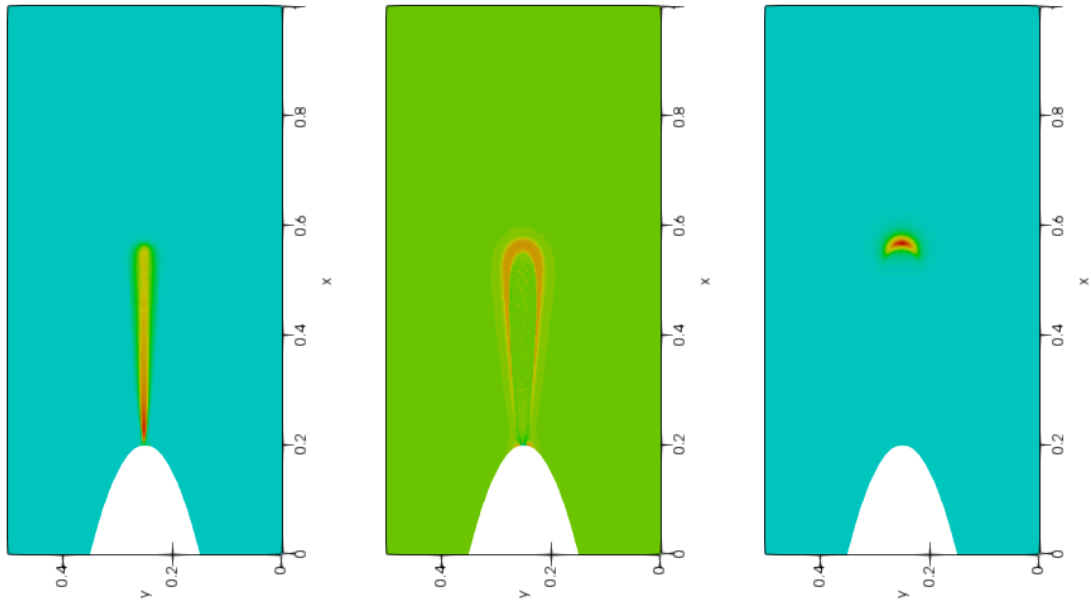

Obrázek 4.24: Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 8.815 \cdot 10^{-8}$




Obrázek 4.25: Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 9.225 \cdot 10^{-8}$

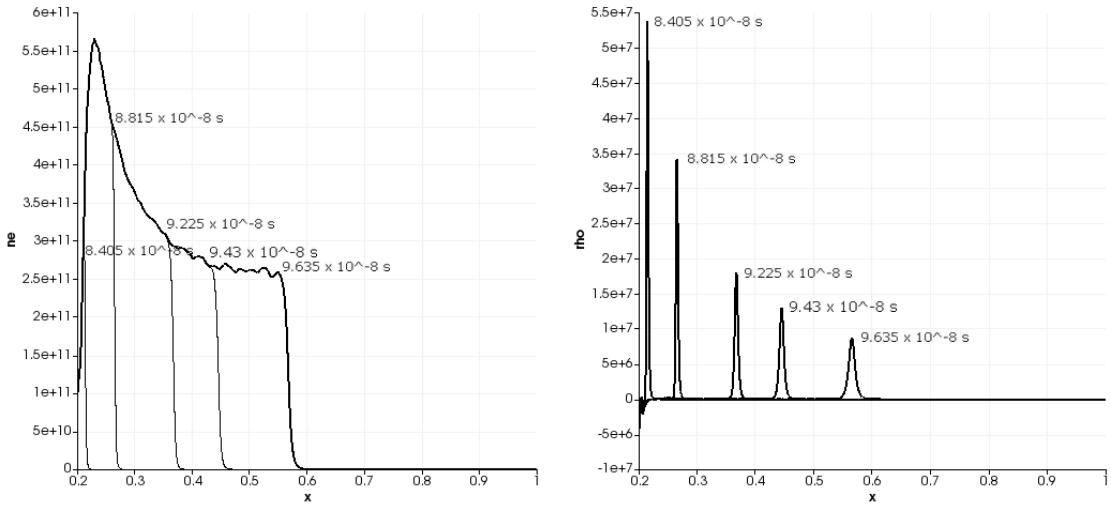



Obrázek 4.26: Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 9.43 \cdot 10^{-8}$

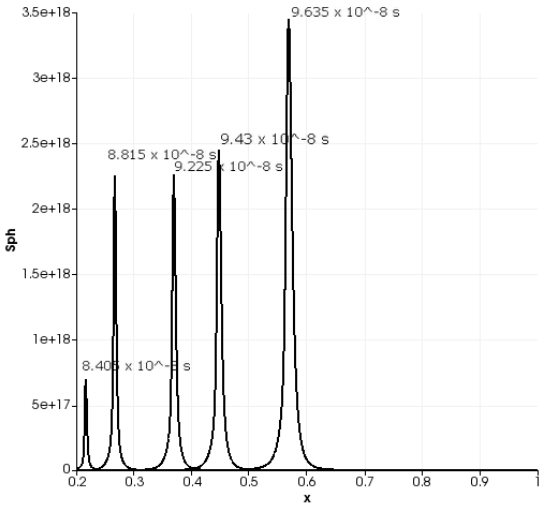



Obrázek 4.27: Hustota elektronů (vlevo), hustota elektrického náboje (uprostřed), zdrojový člen fotoionizace (vpravo) v čase $t = 9.635 \cdot 10^{-8}$

Na Obrázku 4.28 a 4.29 je zobrazen vývoj hustoty elektronů, hustoty elektrického náboje a zdrojového členu fotoionizace podél osy výpočetní oblasti ($y = 0.25$).




Obrázek 4.28: Vývoj hustoty elektronů (vlevo) a vývoj hustoty elektrického náboje (vpravo)




Obrázek 4.29: Vývoj zdrojového členu fotoionizace

V této kapitole jsou prezentovány výsledky pro numerické testy, které probíhaly na oblasti s parabolickou anodou. Tyto výsledky jsou pro model Kulikovského a modelu, který zanedbává vliv fotoionizace zobrazeny pro stejnou pozici čela streameru. V části, kde je uveden Kulikovského model a model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami, jsou výsledky zobrazeny ve stejném čase.
Hustota elektronů je navyšována v místě hrotu anody a výboj se začíná šířit směrem ke katodě. Díky vyšší intenzitě elektrického pole dochází k rozkladu většího počtu částic a proto je opět pro model s vlivem fotoionizace dosaženo vyšší hodnoty hustoty elektronů a navíc nedochází k takovému poklesu hustoty elektronů v průběhu šíření streameru (viz Obrázek 4.11). Na druhou stranu se výboj bez vlivu fotoionizace šíří výrazně rychleji. Z porovnání modelů, které uvažují vliv fotoionizace, je patrné, že oba modely dávají kvalitativně stejně výsledky, ale hodnota hustoty elektronů je nepatrně vyšší pro model, který hodnoty parametru aproximuje tabulkovými hodnotami, ale rychlost šíření je vyšší pro Kulikovského model. Na Obrázku 4.28 lze vidět, že pro podobné hodnoty hustoty elektronů v průběhu času klesají hodnoty hustoty elektrického náboje mnohem rychleji. Jak již bylo zmíněno v sekci 4.2, v oblasti čela a podél streameru je dosaženo maximální hodnoty elektrického náboje. Tato hodnota se v průběhu šíření výboje postupně snižuje, zatímco hodnoty hustoty elektronů klesají mnohem pomaleji (viz Obrázek 4.28). Maximální hodnoty zdrojového členu fotoionizace jsou situovány vždy na čele streameru a s narůstajícím časem dochází k rozšíření tohoto zdrojového členu (viz Obrázky 4.23 - 4.27, 4.29).

# Kapitola 5

# Závěr

V této práci byl formulován matematický model pro popis dynamiky streameru společně s okrajovými a počátečními podmínkami nejprve bez vlivu fotoionizace a poté se zahrnutím tohoto jevu. Pro fotoionozaci byla dále provedena SP3 aproximace společně s formulováním Larsenových okrajových podmínek a rozšířením modelu produkce fotoelektronů komplexnějším modelem. Model fotoionizace byl doprogramován do již stávajícího programu pro výpočet streameru, který je naprogramován v jazyce C++. Další část obsahuje diskretizaci rovnic metodou konečných objemů s použitím třístupňové metody Runge-Kutta a lineární rekonstrukce s Bartovým-Jespersenovým limiterem. Poslední část práce je věnována numerickým testům pro model, kde je zahrnut vliv fotoionizace a pro model, který tento jev zanedbává a při numerických simulacích jej nahrazuje hustotou pozadí. Model fotoionizace byl dále otestován i pro komplexnější model produkce fotoelektronů, kterým byl původní model rozšířen. Výsledky těchto testů ukazují, že rychlost šíření elektrického výboje je mnohem vyšší bez vlivu fotoionizace. Na druhou stranu je pro tento model dosaženo výrazně nižších hodnot hustoty elektronů. Co se týče modelů, které vliv fotoionizace uvažují, tak z kvalitativního hlediska dávají stejné výsledky. Nicméně rychlost šíření výboje je vyšší pro Kulikovského model, ale komplexnější model dosahuje nepatrně vyšších hodnot hustoty elektronů. Tvar anody ovlivňuje rychlost šíření streameru, ale pokud je poloměr zakřivení anody (resp. poloměr oskulační kružnice) větší, než je poloměr Gaussova pulsu, dochází k menšímu nárůstu hustoty elektronů.
Cíle práce byly tedy splněny, nicméně je zde ještě několik různých variant, ze kterých plyne možnost budoucí práce a to například rozšíření modelu na složitější model popisujícího dynamiku streameru nebo jiné varianty aproximace okrajových podmínek.

# Literatura


[1] J. Karel: *Numerical Simulation of Streamer Propagation on Unstructured Dynamically Adapted Grids*, dizertace, ČVUT 2014

[2] D. Trdlička: *Použití metody konečných objemů pro řešení výboje plasmatu*, magisterská, ČVUT 2012

[3] L. Papageorgiou, A. C. Metaxas, G. E. Georghiou: *Three-dimensional numerical modelling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photoionization phenomena Journal of Physics D: Applied Physics*, 44, (2011) 045203

[4] R. Morrow, J. J. Lowke: *Streamer propagation in air, J, Phys. O: Appl. Phys.*, 30, (1997) 614-627.

[5] M. Duarte, Z. Bonaventura, M. Massot, A. Bourdon: *A numerical strategy to discretize and solve the Poisson equation on dynamically adapted multiresolution grids for time-dependent streamer discharge simulations, Journal of Computational Physic*, vol. 289, Elsevier (2015), pages 129-148

[6] A. A. Kulikovsky: *The role of photoionization in positive streamer dynamics, J. Phys. D Appl. Phys.*, 33, (2000) 1514 – 1524.

[7] N.Y. Liu and V.P. Pasko.: *Effects of photoionization on propagation and branching of positive and negative streamers in sprites.* J. Geophys. Res., 109:A04301, (2004).

[8] Zheleznyak, M. B., A. K. Mnatsakanyan, and S. V. Sizykh: *Photoionization of nitrogen and oxygen mixtures by radiation from a gas discharge, High Temp.*, 20, (1982), 357 – 362.

[9] J. Blazek: *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, Elsevier 2001

[10] C. Montijn, W. Hundsdorfer, U. Ebert: *An adaptive grid refinement strategy for the simulation of negative streamers, J. Comput. Phys.* 219 (2) (2006) 801-835.

[11] S. Pancheshnyi, P. Segur, J. Capeillere, A. Bourdon: *Numerical simulation of filamentary discharges with parallel adaptive mesh refinement, J. Comput. Phys.* 227 (13) (2008) 6574-6590.