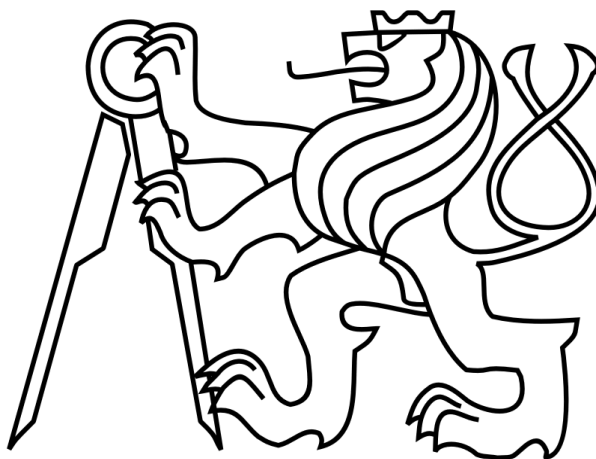


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

Ústav výrobních strojů a zařízení



Diplomová práce

Kalibrace robotu laser trackerem

2018

Jan Baláš

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Baláš** Jméno: **Jan** Osobní číslo: **419961**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav výrobních strojů a zařízení**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Výrobní stroje a zařízení**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Kalibrace robotu laser trackerem

Název diplomové práce anglicky:

Robot Calibration via Laser Tracker

Pokyny pro vypracování:

Popis tématu: Kalibrace průmyslového robotu pomocí laser trackeru, kdy budou měřeny osy rotace jednotlivých kloubů samostatně v souřadném systému laser trackeru. Měření bude probíhat postupnou rotací každého ramene s koutovým odražečem umístěným na přírubě/rameni. Ze změřené kružnice bude vyhodnocena osa rotace kloubu a následně vypočteny přesné rozměry robotu; Osnova práce: Rešerše v oblasti kalibrace průmyslových robotů, Tvorba simulačního modelu kinematiky průmyslového robotu, Návrh měření laser trackerem, Tvorba vlastního algoritmu zpracování naměřených dat, Simulační verifikace na zachybovaném robotu; Rozsah grafické části: grafy a průběhy součástí textové části; Rozsah textové části: 60-80 stran;

Seznam doporučené literatury:

TALÁCKO, Jaroslav. Automatizace výrobních zařízení. Vyd. 2. Praha: ČVUT, 2000. ISBN 80-01-02160-2; ŠÍKA, Z. et al. Calibrability as Additional Design Criterion of Parallel Kinematic Machines. Elsevier, 2012, č. 50, s. 48-63. ISSN 0094-114X; STEJSKAL, V. a M. VALÁŠEK. Kinematics and Dynamics of Machinery. New York: Marcel Dekker, 1996. ISBN 0824797310; RAGHAVAN, M. a B. ROTH. Inverse Kinematics of the General 6R Manipulator and Related Linkages. The American Society of Mechanical Engineers, 1993, č. 115, s. 502-08. ISSN 1050-0472;

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Jiří Švéda, Ph.D., ústav výrobních strojů a zařízení FS

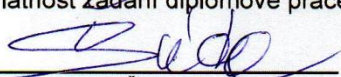
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:


Ing. Štěpán Chládek, Ph.D., ústav výrobních strojů a zařízení FS

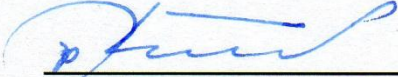
Datum zadání diplomové práce: **17.04.2018**

Termín odevzdání diplomové práce: **13.07.2018**

Platnost zadání diplomové práce: **30.09.2018**


Ing. Jiří Švéda, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


Ing. Petr Kolář, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

30.4.2018

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl v příloženém seznamu veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací, vydaným ČVUT v Praze 1. 7. 2009.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 25. 5. 2018

.....
podpis

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu diplomové práce Ing. Jiřímu Švédovi, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce. Dále bych chtěl poděkovat rodině a všem blízkým za podporu během celého studia.

Anotace

Autor:	Bc. Jan Baláš
Název DP:	Kalibrace robotu laser trackerem
Rozsah práce:	69 str., 24 obr., 5 tab., 3 grafy
Školní rok vyhotovení:	2018
Škola:	ČVUT v Praze – Fakulta strojní
Ústav:	Ú 12135 – Ústav výrobních strojů a zařízení
Vedoucí DP:	Ing. Jiří Švéda, Ph.D.
Konzultant:	Ing. Štěpán Chládek, Ph.D.
Zadavatel:	ČVUT FS
Využití:	Kalibrace robotu laser trackerem metodou postupné identifikace os pohybu v souřadném systému laser trackeru.
Klíčová slova:	robot, průmyslový robot, laser tracker, kalibrace, osa rotace
Anotace:	Diplomová práce se zabývá popisem kalibrace průmyslového robotu pomocí laser trackeru. Kalibrace je založena na postupné identifikaci os rotace jednotlivých kloubů. Následně jsou z identifikovaných os rotace stanoveny přesné rozměry robotu. Celý postup je simulován na vytvořeném simulačním modelu robotu.

Annotation

Author: Bc. Jan Baláš

Title of master dissertation: Robot Calibration via Laser Tracker

Extent: 69 p., 24 fig., 5 tab., 5 graphs

Academic year: 2018

University: CTU in Prague – Faculty of Mechanical Engineering

Department: Ú12135 – Department of Production Machines and Equipment

Supervisor: Ing. Jiří Švéda, Ph.D.

Consultant: Ing. Štěpán Chládek, Ph.D.

Submitter of the Theme: CTU FME

Application: Robot Calibration via Laser Tracker by the method of sequential identification of movement axes in the laser tracker coordinate system.

Key words: robot, industrial robot, laser tracker, calibration, rotation axis

Annotation: The master thesis deals with description of industrial robot calibration using laser tracker. The calibration is based on the sequential identification of the rotation axes of the individual joints. Subsequently, the exact dimensions of the robot are determined from the identified rotation axes. The whole process is simulated on the robot's simulation model.

Obsah:

1. Úvod	10
2. Cíl práce.....	11
3. Stav problematiky	12
3.1. Průmyslové roboty	12
3.2. Kalibrace robotů	17
3.3. Měření přesnosti robotu	20
4. Použité metody a postupy	22
4.1. Metody modelování kinematiky robotů	22
4.2. Metoda nejmenších čtverců.....	28
4.3. Analytická geometrie	33
5. Simulační model průmyslového robotu.....	36
5.1. Kinematický model.....	36
5.2. Zavedení chyb robotu do kinematického modelu	38
5.3. Měření laser trackerem.....	40
6. Návrh kalibrace	42
6.1. Vyhodnocení os kružnic z naměřených bodů.....	43
6.2. Vyhodnocení DH parametrů z os kružnic.....	50
6.3. Vyhodnocení polohy koncové příruby	57
7. Verifikace	61
7.1. Simulační verifikace bez chyby měření	61
7.2. Simulační verifikace s chybou měření.....	62
8. Závěr.....	64
Seznamy	65

Použité symboly

Malá písmena značí skalární proměnné, malá písmena tučně značí vektory, velká písmena označují body, velká písmena tučně značí matice.¹

a_i [mm]	parametr translace v Denavit-Hartenbergově metodě
A_i	matice transformace mezi systémy x_i, y_i, z_i a $x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}$ daná Denavit-Hartenbergovou metodou
b_0, b_1, b_2	parametry rovnice roviny
c_0, c_1, c_2, c_3	parametry rovnice kulové plochy
d_i [mm]	parametr translace v Denavit-Hartenbergově metodě
d	rozměry mechanismu
\bar{d}	návrhové hodnoty rozměrů mechanismu
e_0, e_1, e_2	parametry rovnice kružnice
f_0, f_1, f_2, f_3	parametry obecné rovnice roviny
i_a	jednotkový vektor osy x souřadného systému a
j_a	jednotkový vektor osy y souřadného systému a
J_d	Jacobiho matice parciálních derivací
k_a	jednotkový vektor osy z souřadného systému a
O_i	počátek souřadného systému x_i, y_i, z_i
p	parametr parametrické rovnice přímky
p_p	hodnota parametru parametrické rovnice přímky v průsečíku
q	souřadnice v kloubech
r_{aM}	rozšířený radiusvektor bodu M v souřadném systému a
r	poloměr kružnice nebo kulové plochy
S	střed kružnice
S_{ab}	matice směrových kosinů
T_{ab}	transformační matice mezi systémy a a b
T_r	transformační matice popisující transformaci do souřadného systému ležícího v rovině popsané rovnicí roviny
$T_x(x)$	matice posuvného pohybu ve směru osy x o vzdálenost x

¹ Osy souřadných systémů jsou označovány tučně, aby bylo odlišeno označení souřadné osy od hodnoty souřadnice.

$\mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x)$	matice rotačního pohybu kolem osy x o úhel φ_x
\mathbf{u}_{aM}	radiusvektor bodu M v souřadném systému a
v_k	výška koutového odražeče
X popisu přímky	souhrnné označení pro kartézské souřadnice např. parametrického
α_i	parametr rotace v Denavit-Hartenbergově metodě
β_i	parametr popisující rotaci mezi souřadnými systémy
θ_i	parametr rotace v Denavit-Hartenbergově metodě

1. Úvod

Přesnost je jednou ze základních užitečných vlastností průmyslového robotu, která umožňuje široké spektrum použití. V této práci se budu zabývat kalibrací průmyslového robotu, tedy postupem, který vede ke zvýšení přesnosti polohování robotu v celém pracovním prostoru. Cílem kalibračních postupů je zjištění přesných rozměrů robotu. Důvodem zvýšení přesnosti polohování robotů pomocí kalibrace je možnost použití přesných rozměrů v řídicím systému robotu. Rozměry jsou využity pro výpočet inverzní kinematické úlohy při řízení robotu v kartézském souřadném systému.

Tato práce se bude zabývat postupem kalibrace založeným na měření jednotlivých os rotace. Měření bude probíhat postupnou rotací jednotlivých ramen s koutovým odražečem umístěným na koncové přírubě robotu. Poloha koutového odražeče bude měřena laser trackerem. Ze změřených kružnic budou vyhodnoceny osy rotace a následně vypočteny hledané přesné rozměry robotu.

2. Cíl práce

Cílem práce je popsat kalibraci průmyslového robotu pomocí laser trackeru, kdy budou měřeny osy rotace jednotlivých kloubů samostatně v souřadném systému laser trackeru. Vznikne matematický nástroj pro zpracování naměřených dat, který bude zahrnovat vyhodnocení osy rotace jednotlivých kloubů a následné zjištění přesných rozměrů robotu.

Dále vznikne simulační model průmyslového robotu pro simulační testování navrženého kalibračního postupu. Simulační model průmyslového robotu bude doplněn o simulaci měření laser trackerem a bude zahrnovat chybu měření.

3. Stav problematiky

3.1. Průmyslové roboty

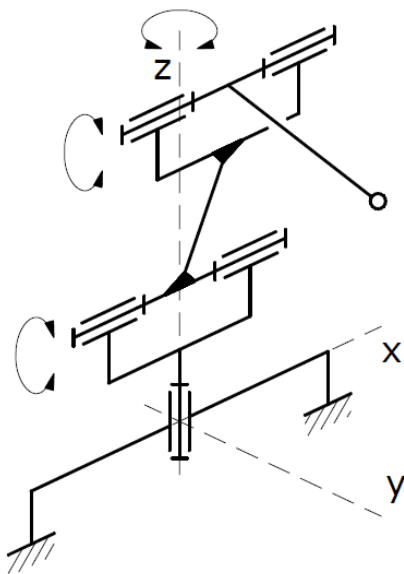
Podle ISO 8373:2012 je průmyslový robot definován, jako: automaticky řízený, reprogramovatelný, víceúčelový manipulační stroj programovatelný ve třech a více osách, který může být stacionární nebo pohyblivý, určený pro použití v průmyslové automatizaci. [5]

Roboty mohou být klasifikovány podle různých kritérií-podle počtu stupňů volnosti, kinematické struktury, geometrie pracovního prostoru, použitých pohonů aj. Z hlediska počtu stupňů volnosti robotu rozlišujeme univerzální robot, redundantní robot a deficitní robot. Šest stupňů volnosti univerzálního robotu umožňuje řídit polohu i orientaci efektoru (výstupní hlavice). Redundantní robot má více než 6 stupňů volnosti, což může být využito například pro obcházení překážek nebo zvýšení tuhosti. Deficitní robot s méně než šesti stupni volnosti naopak může být využit např. pro práci v rovině. [1]

3.1.1. Kinematiky robotů

Podle kinematické struktury rozdělujeme roboty na sériové (Obr. 1-Obr. 6), které se vyznačují otevřeným kinematickým řetězcem, paralelní (Obr. 7), které využívají uzavřených kinematických řetězců a hybridní, které jsou kombinací paralelní a sériové kinematiky.

Sériové roboty se z hlediska kinematiky rozdělují podle uspořádání 3 „základních“ kinematických dvojic tj. kinematických dvojic, které jsou nejbližší k rámu a nejvíce se podílí na polohování koncového bodu. Roboty mohou mít další kinematické dvojice, které slouží převážně k orientaci efektoru. Možných kombinací kinematických dvojic je mnoho, proto uvedu pouze nejvýznamnější. Největší počet robotů pracuje pouze s rotačními členy, označují se jako angulární (Obr. 1, Obr. 2). Tyto roboty se využívají k širokému spektru aplikací. [1] [2]

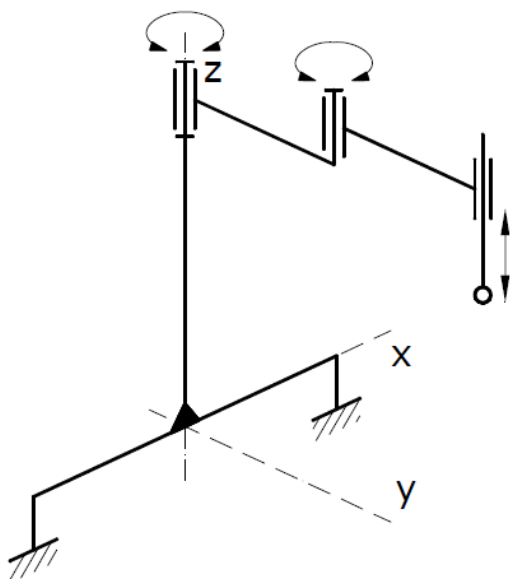


Obr. 1: Drátový model angulární (úhlové) kinematické struktury [1]



Obr. 2: Angulární robot Staubli TX 200 [3]

Kinematické uspořádání SCARA (Obr. 3, Obr. 4) využívá pouze pohybů okolo svislých os. Tyto roboty se používají například k šroubování závitů, montáži.

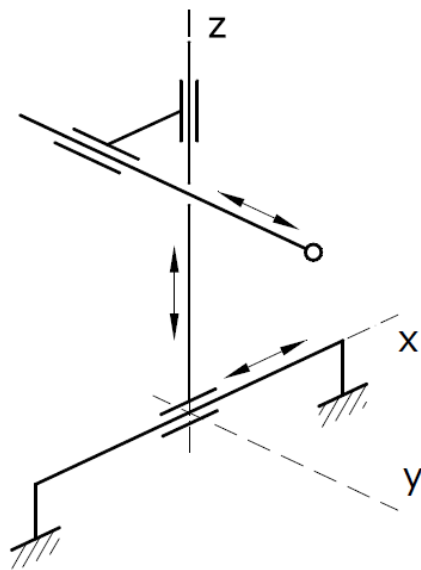


Obr. 3: Drátový model kinematické struktury SCARA [1]



Obr. 4: Kinematická struktura SCARA [4]

Kinematickou strukturu, která využívá převážně posuvů, označujeme jako kartézskou (Obr. 5, Obr. 6).



Obr. 5: Kartézská kinematická struktura [1]



Obr. 6: Kartézský robot [5]

Paralelní kinematická struktura (Obr. 7), se oproti sériové vyznačuje vyšší tuhostí a přesností a nižší hmotností. Díky tomu může být použita pro vysoce dynamické aplikace například pro rychlou manipulaci. Nevýhodami paralelní kinematické struktury je horší poměr velikosti pracovního prostoru k velikosti zástavbového prostoru a složitější řízení.



Obr. 7: Robot s paralelní kinematikou FANUC M-3 iA/12 [6]

3.1.2. Programování robotů [7] [8]

Roboty svou činnost vykonávají na základně dopředu připraveného programu, který je definován jako posloupnost příkazů vedoucích k vykonání požadované úlohy. Programování tedy lze definovat jako sestavování jednotlivých příkazů dle daného algoritmu a jejich formování do koncové podoby – programu.

Každý výrobce používá pro své roboty specifický programovací jazyk. Z tohoto důvodu není možné jednoduše postihnout danou problematiku na obecné úrovni, proto se dále zaměříme pouze na způsoby programování robotů.

V současné době je stále nejpoužívanější metoda on-line. Obecný princip spočívá v tom, že obsluha/programátor pomocí uživatelského rozhraní pendant či tech-pendant (Obr. 8) navádí robot nebo programuje konkrétní aplikaci přímo na pracovišti, kde je robot fyzicky přítomen. Programování je vykonáváno naváděním robotu přes požadované manipulační body, které jsou zapisovány do řídicího systému robotu. Po navádění do jednotlivých pozic pak následuje logické řízení koncového efektoru, nástroje nebo případných periferních zařízení.



Obr. 8: Tech-pendanty (Fanuc, ABB, Staubli)

Výhodou této metody programování je znalost trajektorie robotu a práce v reálném prostředí s možností současné kontroly funkčnosti programu. Mezi nevýhody pak lze zařadit poměrně dlouhou dobu programování při složitějších manipulačních pohybech nebo cyklech. Hlavní nevýhodou však představuje odstávka pracoviště.

Další možný způsob je tzv. off-line. Tato metoda je obecně založena na softwarovém systému umožňujícím 3D virtuální simulaci konkrétního robotizovaného pracoviště, kde je možné definovat pohyby a dráhy robotu a ty pak exportovat do příslušného formátu programovacího jazyku.

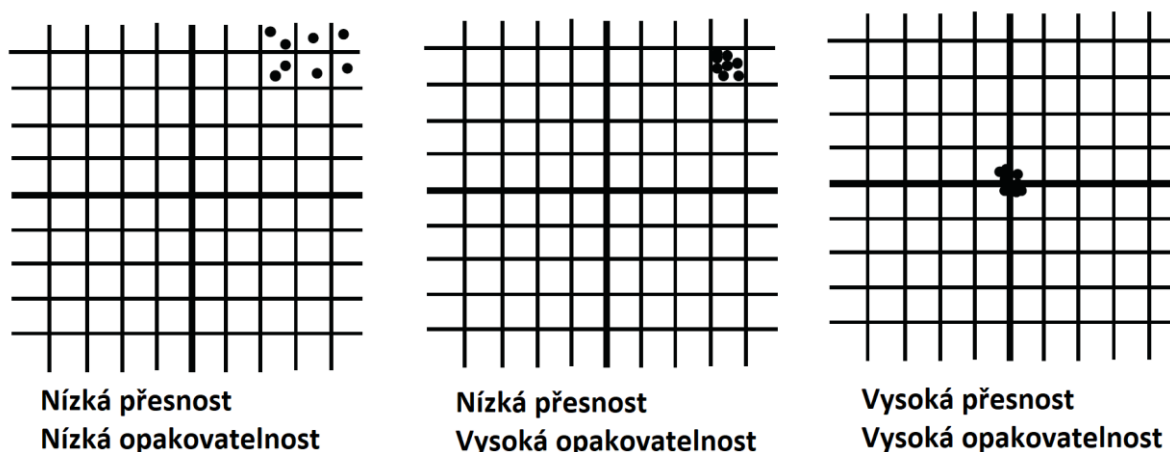
3.2. Kalibrace robotů

Kalibrace robotů je prováděna za účelem zvýšení přesnosti polohování robotů pomocí změn v softwaru robotu namísto změn v kinematické struktuře. Vlivy, které působí na přesnost robotů, jsou podobné jako u jiných mechanických zařízení například výrobní tolerance použitých komponent, opotřebení součástí a přesnost montáže. Některé z těchto vlivů mohou být kalibrací různou měrou eliminovány. Na opakovatelnost kalibrace vliv nemá. [9]

3.2.1. Přesnost a opakovatelnost robotů

Přesnost definujeme jako míru shody mezi požadovanou a dosaženou polohou. Faktory ovlivňující přesnost robotů zahrnují zejména přesnost jednotlivých komponent, přesnost montáže a tíhové deformace. [10]

Opakovatelnost je definována jako míra schopnosti systému vracet se do stejné pozice. Nezávisí na přesnosti požadované pozice (Obr. 9). Vysoce opakovatelné systémy vykazují nízký rozptyl při opakovaných pohybech na danou pozici bez ohledu na směr, ze kterého byla daná pozice dosažena. Dále můžeme definovat jednosměrnou opakovatelnost jako schopnost systému vracet se do stejné pozice z daného směru. [10]



Obr. 9: Znárodnění přesnosti a opakovatelnosti [10]

Faktory ovlivňující opakovatelnost jsou zejména vůle v polohovacím systému, tepelné deformace a ostatní náhodné chyby.

Roboty obvykle mají významně vyšší hodnotu opakovatelnosti než přesnosti (Tabulka 1), nebo výrobci hodnotu absolutní přesnosti vůbec neuvádí.

Robot	Maximální zatížení	Maximální dosah	Absolutní přesnost	Opakovatelnost (ISO 9283)
Fanuc R-2000iC/165F	165 kg	2655 mm	-	0,05mm
Kuka KR 150 R 2700	150 kg	2696mm	-	0,06 mm
ABB IRB 6620	150 kg	2200 mm	0,95 mm	0,03 mm
Stäubli TX 200	150 kg	2194 mm	-	0,06 mm

Tabulka 1: Dosahované přesnosti a opakovatelnosti robotů [11][12][13][3]

Vztah přesnosti a opakovatelnosti významně ovlivňuje možnosti použití a programování robotů. Pokud je robot programován pomocí navádění do jednotlivých pracovních pozic, problém absolutní přesnosti odpadá. Obsluha totiž v průběhu programování v podstatě kalibruje robot v jednotlivých pracovních pozicích.

Naopak pokud je robot programován v předstihu před umístěním na pracoviště (tzv. off-line), absolutní přesnost polohování je zásadní. Absolutní přesnost polohování je tedy zásadní pro možnosti virtuálního oživení nebo pro realizaci výrobní technologie přímo robotem (např. aplikace, kdy robot nese vřeteno).

3.2.2. Kalibrační postupy [14]

Základní kalibrační procedura vychází z rovnice popisující splnění vazbových podmínek jednotlivých kinematických vazeb v daném poloze mechanismu:

$$f(\mathbf{d}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) = 0 \tag{3.1}$$

kde \mathbf{d} jsou rozměry mechanismu, \mathbf{q} jsou vstupní souřadnice v kloubech a vedeních a \mathbf{v} jsou výstupní souřadnice tj. souřadnice efektoru (měřené). Základní kalibrační algoritmus užívá Newtonovu metodu modifikovanou pro přeuročený systém nelineárních algebraických rovnic (více rovnic, než neznámých). Kalibrace je založena na faktu, že rozměry \mathbf{d} jsou stejné pro všechny pozice. Reálné hodnoty \mathbf{d} se však liší od návrhových hodnot $\bar{\mathbf{d}}$ vlivem přesnosti výroby a montáže jednotlivých komponent robotu. Jediné neznámé v rovnici (3.1) jsou skutečně vyrobené rozměry \mathbf{d} . Newtonova metoda je dána Taylorovým rozvojem (3.1),

$$f(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) + J_d \delta \mathbf{d} + \dots = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

kde J_d je Jacobiho matice parciálních derivací rovnic vazbových podmínek podle kalibrovaných rozměrů \mathbf{d} .

$$J_d \delta \mathbf{d} = -f(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) = \delta \mathbf{r} \quad (3.3)$$

Potom i -tý iterační krok Newtonovy metody je

$$\delta \mathbf{d}_i = (J_{di}^T J_{di})^{-1} J_{di}^T \delta \mathbf{r}_i \quad (3.4)$$

Kde J_{di} je jakobito matice a $\delta \mathbf{d}_i = -f(\mathbf{d}_i, \mathbf{q}, \mathbf{v})$ je vektor spočítaný z měřených veličin a kalibrovaných hodnot \mathbf{d}_i z předchozího kroku. Následně jsou spočteny nové hodnoty rozměrů

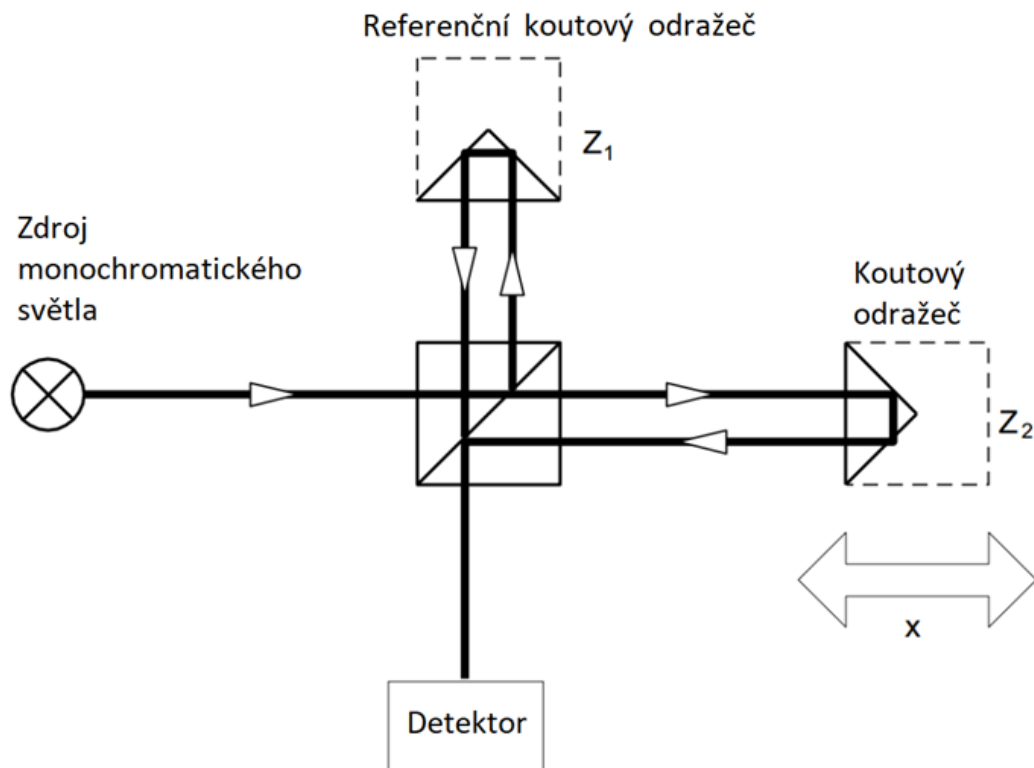
$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \delta \mathbf{d}_i \quad (3.5)$$

iterace pokračují, dokud odchylka od splnění vazbových rovnic $\delta \mathbf{d}$ klesá. Tato metoda poskytuje výsledky, které mohou záviset na počátečních hodnotách \mathbf{d} , protože Newtonova metoda může konvergovat k minimu, které není globálním minimem.

3.3. Měření přesnosti robotu

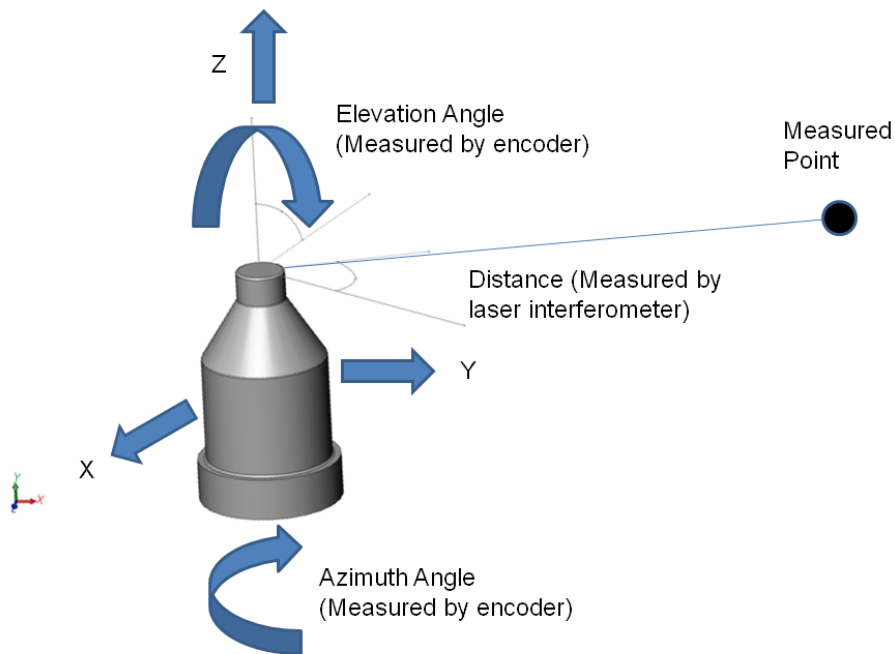
3.3.1. Laser tracker

Princip laser trackeru je umístění laserového interferometru na dvě vzájemně kolmé rotační osy, pomocí kterých laser tracker sleduje koutový odražeč. Laser interferometr slouží pro měření vzdálenosti a spolu s měřením úhlového natočení umožňuje určení polohy koutového odražeče v prostoru. Na obrázku (Obr. 10) je popsán princip laser interferometru. Ze zdroje vychází paprsek monochromatického světla s následujícími vlastnostmi: přesně známá vlnová délka záření, velmi malá vlnová délka umožňující měřit s vysokým rozlišením. Paprsek dopadá na polopropustnou vrstvu nastavenou pod úhlem 45° ke směru paprsku. Na destičce se paprsek rozdělí na dva vzájemně kolmé paprsky. Paprsek, který projde destičkou, následně dopadá na koutový odražeč umístěný na měřeném objektu. Odražený paprsek dopadá na referenční koutový odražeč. Po odrazu se oba paprsky vrátí na polopropustnou vrstvu, odkud postupují směrem k detektoru s fotocitlivými prvky, kde se detekuje interference paprsků.



Obr. 10: Princip funkce interferometru [15]

Laser tracker dále odečítá 2 úhlové souřadnice sondy (Obr. 11). Tím je získán kompletní popis polohy koutového odražeče v polárních souřadnicích. Poloha měřeného bodu je vyhodnocována přímo v řídicím systému trackeru. [17]



Obr. 11: Měření laser trackerem [16]

4. Použité metody a postupy

4.1. Metody modelování kinematiky robotů

K popisu kinematiky mechanismů je možné použít několik přístupů. Tyto přístupy můžeme rozdělit na syntetické (vektorová metoda, trigonometrická metoda) a analytické (maticová metoda, popis pomocí kvaternionů).

V této práci se budu zabývat pouze maticovou metodou, která je pro popis kinematiky robotů nejpoužívanější. Základem maticové metody je požití transformačních matic, které popisují vztahy mezi rozšířenými radiusvektory bodu v různých souřadných systémech. Vyjádříme rozšířené radiusvektory \mathbf{r}_{aM} a \mathbf{r}_{bM} bodu M v souřadných systémech a a b

$$\mathbf{r}_{aM} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{aM} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{bM} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{bM} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

, kde \mathbf{u}_{aM} a \mathbf{u}_{bM} jsou radius vektory bodu M v systémech a a b . Potom obecný prostorový pohyb mezi systémy může být vyjádřen

$$\mathbf{r}_{aM} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{bM} \quad (4.2)$$

detailněji

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{aM} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ab} & \mathbf{u}_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{bM} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

, kde \mathbf{S}_{ab} je matice směrových kosinů, vyjadřující po sloupcích složky jednotkových vektorů $\mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b$ promítnuté do systému a a \mathbf{u}_{ab} je radius vektor počátku souřadného systému a vyjádřený v systému b . [18]

4.1.1. Základní pohyby [18]

Předpokládejme, že systémy a a b jsou na začátku pohybu identické. Pohyb (posuvný nebo k rotační), při kterém dvojice stejně označených os obou systémů zůstává totožná, nazýváme základním pohybem. V tomto případě mají transformační matice zvláště jednoduchý tvar. Důležitost základních pohybů spočívá ve skutečnosti, že libovolný prostorový pohyb může být složen ze základních pohybů. Následné transformační matice jsou jednoduché a každá

transformační matice obecného pohybu může být vyjádřena jako produkt násobení transformačních matic základních pohybů.

Pro posuvný pohyb se směru osy x označme posunutí x . Matice posuvného pohybu ve směru osy x bude

$$\mathbf{T}_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Pro posuvný pohyb ve směru osy y označme posunutí y . Matice posuvného pohybu ve směru osy y bude

$$\mathbf{T}_y(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Pro posuvný pohyb ve směru osy z označme posunutí z . Matice posuvného pohybu ve směru osy z bude

$$\mathbf{T}_z(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Pro rotační pohyb kolem osy x označme natočení φ_x . Matice rotačního pohybu okolo osy x bude

$$\mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x & 0 \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Pro rotační pohyb kolem osy y označme natočení φ_y . Matice rotačního pohybu okolo osy y bude

$$T_{\varphi_y}(\varphi_y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

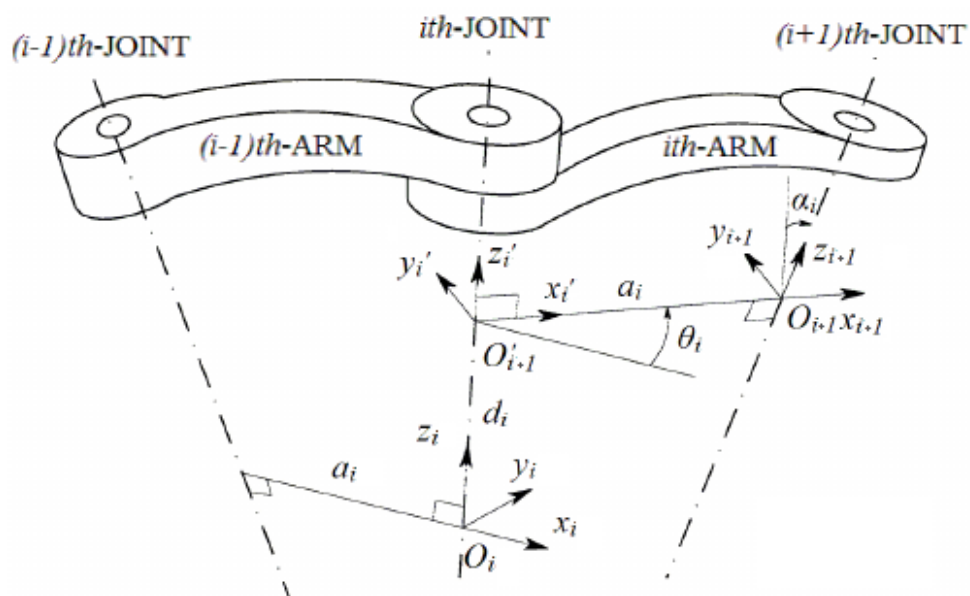
Pro rotační pohyb kolem osy z označme natočení φ_z . Matice rotačního pohybu okolo osy z bude

$$T_{\varphi_z}(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

4.1.2. Denavit-Hartenbergova metoda [18][19]

Jedna z maticových metod pro řešení kinematiky otevřených mechanismů je Denavit-Hartenbergova metoda. Metoda je založena na systematickém zavedení souřadných systémů v jednotlivých prvcích mechanismu a parametrů popisujících vzájemnou polohu těchto souřadných systémů.

Jednotlivá tělesa mechanismu včetně rámu očísujeme od 0 do n tak, že začneme od rámu a tělesa $i - 1$ a i jsou spojena i -tou kinematickou dvojicí. Na každém tělese zavedeme souřadný systém x_i, y_i, z_i (Obr. 12). Pro zavedení souřadných systémů předpokládejme, že osy rotace kloubů jsou obecně mimoběžné.



Obr. 12: Zavedení souřadných systémů

Polohu a orientaci souřadných systémů i zjistíme takto:

- najdeme osy rotace \mathbf{z}_{i+1} a \mathbf{z}_i a jejich společnou normálu, jedná se o spojnicí dvou nejbližších bodů přímk, také označovanou jako osa mimoběžek
- tím jsou dány body O_{i+1} a O'_{i+1}
- osu \mathbf{x}_{i+1} zvolíme jako prodloužení společné normály a ve směru od kloubu i do kloubu $i + 1$
- osu \mathbf{y}_{i+1} doplníme do pravotočivé souřadnicové soustavy

Nyní již můžeme zjistit čtyři DH parametry

- d_i - vzdálenost mezi body O'_{i+1} a O_i
- a_i - vzdálenost mezi body O_{i+1} a O'_{i+1}
- α_i - úhel mezi osami \mathbf{z}_i a \mathbf{z}_{i+1} okolo osy \mathbf{x}_{i+1} (kladný směr určen osou \mathbf{x}_{i+1})
- θ_i - úhel mezi osami \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_{i+1} okolo \mathbf{z}_i

Transformace \mathbf{A}_i mezi systémy i a $i + 1$ je dána rotací kolem osy \mathbf{z}_i o úhel θ_i , posuvem podél osy \mathbf{z}_i o vzdálenost d_i , posuvem podél osy \mathbf{x}_{i+1} o vzdálenost a_i a rotací kolem osy \mathbf{x}_{i+1} o úhel α_i . Transformaci můžeme vyjádřit pomocí matic základních pohybů

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\theta_i)\mathbf{T}_z(d_i)\mathbf{T}_x(a_i)\mathbf{T}_{\varphi_x}(\alpha_i) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Pro rotační kinematickou dvojici je proměnnou úhel θ_i , pro posuvnou kinematickou dvojici je proměnnou vzdálenost d_i . Denavit-Hartenbergova metoda je velmi populární v robotice. Tato metoda je speciálním případem maticové metody popsané výše.

4.1.3. Přímá a inverzní úloha kinematiky [18]

Při řešení otevřených kinematických řetězcům rozlišujeme dva základní problémy/úlohy:

- Přímá úloha kinematiky
 - Inverzní úloha kinematiky
-

V případě přímé úlohy kinematiky hledáme kartézské souřadnice X (polohu a orientaci) koncového efektoru přičemž známe souřadnice v jednotlivých kinematických dvojicích q . Snažíme se tedy nalézt funkční vztah

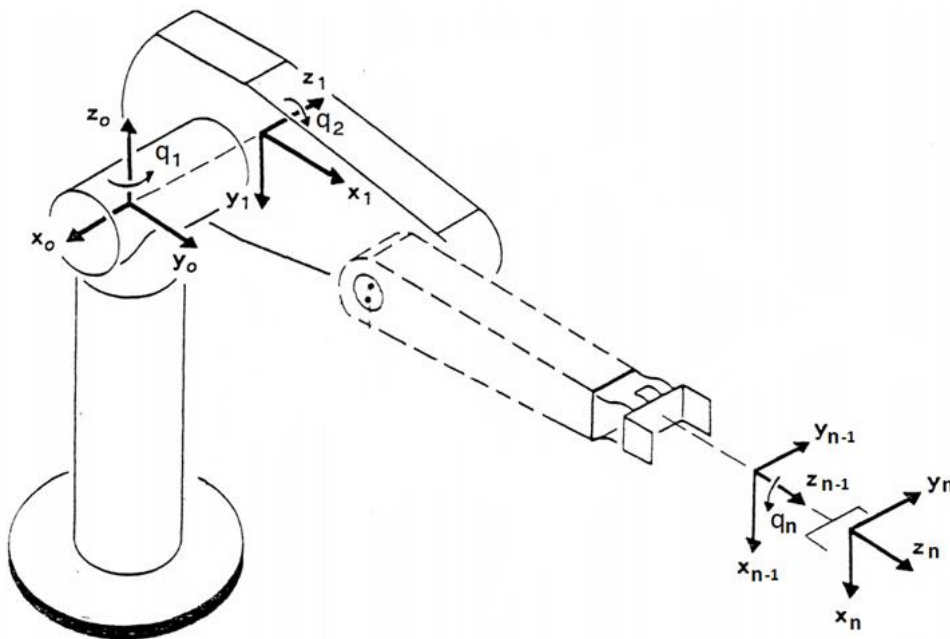
$$X = f(q). \quad (4.12)$$

V případě inverzní úlohy kinematiky hledáme souřadnice q v jednotlivých kinematických dvojicích přičemž známe vektor kartézských souřadnic X (polohu a orientaci) koncového efektoru a rozměry mechanismu. Snažíme se nalézt funkci f^{-1}

$$q = f^{-1}(X) \quad (4.13)$$

Přímá úloha kinematiky

Pro otevřený kinematický řetězec (Obr. 13), který se skládá z n těles, n prostorových vazeb a je popsán $(n + 1)$ souřadnými systémy.



Obr. 13: Obecný otevřený kinematický řetězec s n stupni volnosti [20]

Jsou v kloubech definovány souřadné systémy x_i, y_i, z_i , přičemž poloha a orientace těchto systémů je dána kloubovými souřadnicemi q_i a rozměry mechanismu \mathbf{d} . Můžeme s využitím vztahu (4.2) vytvořit transformační matici mezi systémem n a pevným rámem 0:

$$\mathbf{T}_{n0}(q_1, \dots, q_n) = \mathbf{T}_{10}(q_1)\mathbf{T}_{21}(q_2) \dots \mathbf{T}_{n,n-1}(q_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_{i,i-1} \quad (4.14)$$

, kde matice $\mathbf{T}_{i,i-1}$ je vytvořena násobením matic základních pohybů o úhlové souřadnice q_i a rozměry mechanismu \mathbf{d} .

Nyní můžeme polohu efektoru určit:

$$\mathbf{r}_{0E} = \mathbf{T}_{n0} * \mathbf{r}_{nE} \quad (4.15)$$

A orientaci systému n (koncového efektoru) danou rotační maticí, která je submaticí \mathbf{T}_{n0} podle rovnice (4.3)

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{T}_{n0}(1..3, 1..3) \quad (4.16)$$

Pro přímou kinematickou úlohu polohy mechanismu s otevřeným řetězcem existuje vždy analytické řešení a je snadné jej získat.

Inverzní úloha kinematiky

Inverzní úloha kinematiky je podstatně složitější než úloha přímá. Jde o řešení soustavy silně nelineárních algebraických rovnic a vyjádřit řešení v uzavřeném tvaru (analyticky) je možné pouze ve speciálních případech. V případě, že analytické řešení není možné vyjádřit, musíme použít numerických iteračních metod. Řešení je navíc často víceznačné: i jednoduché mechanismy mohou zaujmout jednu polohu koncového efektoru dvěma či více způsoby. [21]

4.2. Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců se zabývá problémem aproximace dané tabulky hodnot pomocí funkce zvoleného typu, např. polynomu. Necht' je dána tabulka dat x_i, y_i, z_i pro $i = 1, \dots, n$. Kvadratickou odchylkou polynomu $p(x)$ rozumíme

$$\delta^2(p(x, y)) = \sum_{i=1}^n (p(x_i, y_i) - z_i)^2 \quad (4.17)$$

Říkáme, že polynom $\hat{p}(x)$ stupně nejvýše q aproximuje danou tabulku dat nejlépe ve smyslu nejmenších čtverců, pokud

$$\delta^2(\hat{p}(x, y)) \leq \delta^2(p(x, y)) \quad (4.18)$$

pro libovolný polynom stupně nejvýše q . [22]

4.2.1. Odvození soustavy normálních rovnic pro lineární polynom

Uvedené vztahy budou použity v kapitole 6 k nalezení rovnice roviny, která nejlépe aproximuje množinu naměřených bodů.

V tomto případě minimalizujeme kvadratickou odchylku polynomu $p(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y$. Vidíme, že kvadratická odchylka je funkce tří neznámých

$$\delta^2(p(x, y)) = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1x_i + b_2y_i - z_i)^2 = F(b_0, b_1, b_2). \quad (4.19)$$

Jedná se o kvadratickou funkci (tedy spojitou funkci) v proměnných b_i , tato funkce je zdola omezená. Z toho vyplývá, že nabývá minima. Nutná podmínka pro minimum nám dá tři rovnice [22]

$$\frac{\partial F}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1x_i + b_2y_i - z_i) * 1 = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_1} = 2 \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1x_i + b_2y_i - z_i) * x_i = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_2} = 2 \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i - z_i) * y_i = 0. \quad (4.22)$$

Z kterých po úpravě dostáváme soustavu normálních rovnic pro tento případ

$$b_0 \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) + b_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + b_2 \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) = \sum_{i=1}^n z_i \quad (4.23)$$

$$b_0 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + b_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + b_2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) = \sum_{i=1}^n z_i x_i \quad (4.24)$$

$$b_0 \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) + b_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) + b_2 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n z_i y_i. \quad (4.25)$$

Problém byl převeden na problém řešení soustavy lineárních rovnic s maticí, která je symetrická. Lze ukázat, že – za předpokladu na dostatečný počet různých bodů x_i, y_i, z_i - je i pozitivně definitní. Pro snadnější algoritmizaci je vhodné zapsat rovnice (4.23) - (4.25) v maticové podobě:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n z_i \\ \sum_{i=1}^n z_i x_i \\ \sum_{i=1}^n z_i y_i \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

4.2.2. Odvození soustavy normálních rovnic pro rovnici kulové plochy se středem na známé rovině

Uvedené vztahy budou použity v kapitole 6 k nalezení středu kulové plochy, která nejlépe aproximuje množinu naměřených bodů a jejíž střed leží ve vybrané rovině.

Kulová plocha je popsána rovnicí:

$$x^2 + y^2 + z^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_0 = 0 \quad (4.27)$$

Střed takové kulové plochy leží na souřadnicích $[-\frac{c_1}{2}, -\frac{c_2}{2}, -\frac{c_3}{2}]$. Protože střed kulové plochy musí zároveň ležet na rovině, popsané rovnicí (4.28) platí:

$$z = b_0 + b_1x + b_2y \quad (4.28)$$

$$-\frac{c_3}{2} = b_1\left(-\frac{c_1}{2}\right) + b_2\left(-\frac{c_2}{2}\right) + b_0 \quad (4.29)$$

$$c_3 = b_1c_1 + b_2c_2 - 2b_0 \quad (4.30)$$

Po dosažení dostáváme rovnici kulové plochy se středem na rovině popsané rovnicí (4.27):

$$x^2 + y^2 + z^2 + c_1x + c_2y + (b_1c_1 + b_2c_2 - 2b_0)z + c_0 = 0 \quad (4.31)$$

Tato rovnice je pro náš případ polynomem $p(x, y, z)$, jehož kvadratickou odchylku budeme minimalizovat:

$$\begin{aligned} \delta^2(p(x, y, z)) &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + c_1x_i + c_2y_i - (b_1c_1 + b_2c_2 - 2b_0)z_i + c_0)^2 \\ &= F(c_0, c_1, c_2). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Jedná se o kvadratickou funkci (tedy spojitou funkci) v proměnných c_i , koeficienty b_i jsou známé konstanty popisující rovinu. Kvadratická odchylka nabývá minima. Nutná podmínka pro minimum nám dá tři rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + c_1x_i + c_2y_i - (b_1c_1 + b_2c_2 - 2b_0)z_i + c_0) * 1 = 0 \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + c_1x_i + c_2y_i - (b_1c_1 + b_2c_2 - 2b_0)z_i + c_0) \\ &\quad * (x_i + b_1z_i) = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_2} &= 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + c_1x_i + c_2y_i - (b_1c_1 + b_2c_2 - 2b_0)z_i + c_0) \\ &\quad * (y_i + b_2z_i) = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Z kterých po úpravě dostáváme soustavu normálních rovnic pro tento případ. Soustavu zapíšeme v maticové podobě

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n (x_i + b_1 z_i) & \sum_{i=1}^n (y_i + b_2 z_i) \\ \sum_{i=1}^n (x_i + b_1 z_i) & \sum_{i=1}^n (x_i + b_1 z_i)^2 & \sum_{i=1}^n (x_i + b_1 z_i)(y_i + b_2 z_i) \\ \sum_{i=1}^n (y_i + b_2 z_i) & \sum_{i=1}^n (x_i + b_1 z_i)(y_i + b_2 z_i) & \sum_{i=1}^n (y_i + b_2 z_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - 2b_0 z_i) \\ -\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - 2b_0 z_i) * (x_i + b_1 z_i) \\ -\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - 2b_0 z_i) * (y_i + b_2 z_i) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Matice soustavy je opět symetrická. Kulová plocha, která nejlépe aproximuje dané body x_i, y_i, z_i má poloměr

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + (b_1 c_1 + b_2 c_2 - 2b_0)^2 - 4c_0}. \quad (4.37)$$

Souřadnice středu jsou

$$\left[-\frac{c_1}{2}, -\frac{c_2}{2}, -\frac{b_1 c_1 + b_2 c_2 - 2b_0}{2} \right] \quad (4.38)$$

4.2.3. Odvození soustavy normálních rovnic pro rovnici kružnice

Uvedené vztahy budou použity v kapitole 6 k nalezení středu kružnice, která nejlépe aproximuje množinu naměřených bodů.

Předpokládáme tabulku hodnot x_i, y_i , protože kružnice je 2D objekt. Minimalizujeme kvadratickou odchylku obecné rovnice kružnice, tedy polynomu $x^2 + y^2 + e_1 x + e_2 y + e_0$. Kvadratická odchylka je funkcí 3 neznámých

$$\delta^2(p(x, y)) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + e_1 x_i + e_2 y_i + e_0)^2 = F(e_0, e_1, e_2) \quad (4.39)$$

Opět se jedná o kvadratickou funkci proměnných e_i . Tato funkce je zdola omezená. Nutná podmínka pro minimum

$$\frac{\partial F}{\partial e_i} = 0 \quad (4.40)$$

dá tři rovnice. Po úpravě dostáváme soustavu normálních rovnic pro kružnice

$$e_0 \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) + e_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + e_2 \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) = - \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \quad (4.41)$$

$$e_0 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + e_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + e_2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) = - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) * x_i \quad (4.42)$$

$$e_0 \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) + e_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) + e_2 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) * y_i. \quad (4.43)$$

Převedeno do maticové podoby:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \\ - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) * x_i \\ - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) * y_i \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Kružnice, která nejlépe aproximuje dané body x_i, y_i má střed v bodě $[-\frac{e_1}{2}, -\frac{e_2}{2}]$ a poloměr

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - 4e_0}. \quad (4.45)$$

4.3. Analytická geometrie

4.3.1. Nalezení společné kolmice dvou mimoběžných přímek

Předpokládáme dvě přímky: $a(A, \mathbf{u}), b(B, \mathbf{v})$, kde $A = [x_A, y_A, z_A], \mathbf{u} = (x_u, y_u, z_u), B = [x_B, y_B, z_B], \mathbf{v} = (x_v, y_v, z_v)$. Budeme hledat krajní body $P \in a$ a $Q \in b$ nejkratší příčky mimoběžných přímek, příčky, která je k oběma přímkám kolmá. Z parametrických rovnic přímky a :

$$X_a = A + t * \mathbf{u} \quad (4.46)$$

po složkách

$$\begin{aligned} x_a &= x_A + t * x_u \\ y_a &= y_A + t * y_u \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$z_a = z_A + t * z_u$$

a přímky b :

$$X_b = B + s * \mathbf{v} \quad (4.48)$$

Vyjádříme body P a Q :

$$P = A + t_p * \mathbf{u} \quad (4.49)$$

$$Q = B + s_Q * \mathbf{v} \quad (4.50)$$

a vektor \overrightarrow{QP}

$$\overrightarrow{QP} = A - B + t_p * \mathbf{u} - s_Q * \mathbf{v}. \quad (4.51)$$

Pro kolmost vektoru \overrightarrow{QP} k oběma mimoběžkám musí být skalární součiny

$$\mathbf{u} * \overrightarrow{QP} = 0 \quad (4.52)$$

$$\mathbf{v} * \overrightarrow{QP} = 0 \quad (4.53)$$

Dosazením rovnice (4.51) do rovnic (4.52)(4.53) získáváme dvě rovnice pro dva hledané hodnoty parametrů t_p a s_Q . Po úpravě do maticové podoby dostáváme:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} * \mathbf{u} & -\mathbf{u} * \mathbf{v} \\ \mathbf{u} * \mathbf{v} & -\mathbf{v} * \mathbf{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_p \\ s_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(A - B) * \mathbf{u} \\ -(A - B) * \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Z vlastností skalárního součinu vyplývá, že matice soustavy může být singulární v případě, že vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} jsou rovnoběžné. V tomto případě není nejkratší příčka přímek určena jednoznačně, protože rovnoběžné přímky mají nekonečně mnoho nejkratších příček. [23]

4.3.2. Nalezení průsečíku přímky a roviny [23]

Předpokládáme přímku $b(B, \mathbf{v})$, kde $B = [x_B, y_B, z_B]$, $\mathbf{v} = (x_v, y_v, z_v)$ a rovinu popsanou normálovým vektorem $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$ a bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$. Parametrická rovnice přímky b bude

$$X_b = B + p * \mathbf{v}. \quad (4.55)$$

Dosazením souřadnic bodu A a normálového vektoru \mathbf{a} do obecné rovnice roviny

$$f_1x + f_2y + f_3z + f_0 = 0 \quad (4.56)$$

Získáme hodnotu parametru c_4

$$f_0 = -x_a x_A - y_a y_A - z_a z_A \quad (4.57)$$

a můžeme vyjádřit rovnici roviny

$$x_a x + y_a y + z_a z - x_a x_A - y_a y_A - z_a z_A = 0 \quad (4.58)$$

hodnotu parametru pro vyjádření souřadnic průsečíku z parametrické rovnice přímky získáme dosazením rovnice přímky do rovnice roviny:

$$x_a(x_B + p_p x_v) + y_a(y_B + p_p y_v) + z_a(z_B + p_p z_v) - x_a x_A - y_a y_A - z_a z_A = 0 \quad (4.59)$$

$$p_p = -\frac{x_a x_B + y_a y_B + z_a z_B - x_a x_A - y_a y_A - z_a z_A}{x_a x_v + y_a y_v + z_a z_v} \quad (4.60)$$

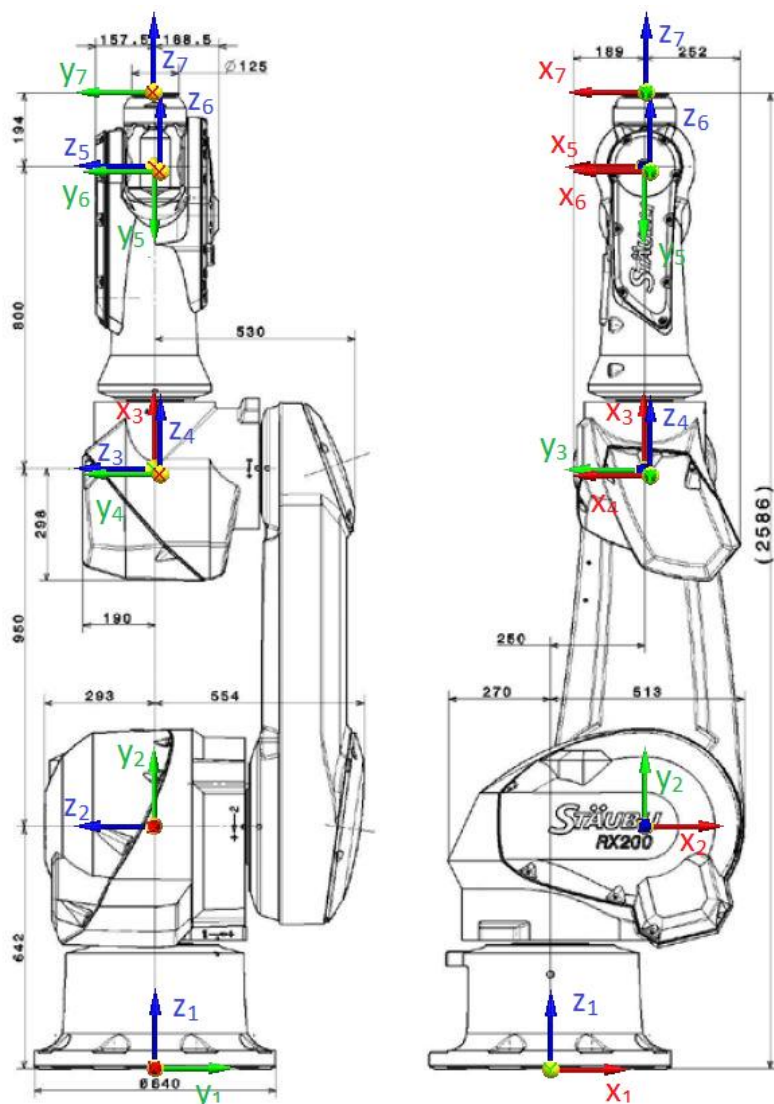
vztah můžeme upravit s využitím skalárního součinu vektorů

$$p_p = -\frac{a \cdot B - a \cdot A}{a \cdot v} \quad (4.61)$$

5. Simulační model průmyslového robotu

5.1. Kinematický model

Pro tvorbu kinematického modelu byly v kinematické struktuře robotu způsobem popsaným v kapitole 4.1.2 zavedeny souřadné systémy (Obr. 14) a odečteny DH parametry pro zobrazenou základní polohu robotu.



Obr. 14: Zavedení souřadných systémů v kinematické struktuře robotu Staubli TX200 [3]

DH parametry a a d byly číselně určeny pro robot Staubli TX200 (Tabulka 2). Úhlové DH parametry jsou platné pro všechny roboty se stejnou kinematikou ve stejné kinematické konfiguraci.

n [-]	θ_i [rad]	d_i [mm]	a_i [mm]	α_i [rad]
1	0	642	250	$\pi/2$
2	$\pi/2$	0	950	0
3	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$
4	0	800	0	$-\pi/2$
5	0	0	0	$\pi/2$
6	0	194	0	0

Tabulka 2: DH parametry pro robot Stäubli TX 200

Polohu koncového efektoru můžeme nyní určit ze vztahů (4.4) - (4.11), (4.13) a (4.14). Pro získání trajektorie efektoru při řízení ve smyslu přímé kinematiky je možné uvedeným postupem vypočítat polohu každého bodu trajektorie. Řízení ve smyslu přímé kinematiky je kloubové řízení robotu.

5.2. Zavedení chyb robotu do kinematického modelu

V předchozí kapitole byla popsána tvorba kinematického modelu. Jedná se o kinematický model tzv. ideálního robotu. Tento model předpokládá, že jednotlivé kinematické dvojice budou přesně v návrhové konfiguraci. To znamená, že budou zcela dodrženy rovnoběžnosti, kolmosti i vzdálenosti mezi jednotlivými osami. Aby simulační model mohl být použit pro testování algoritmu kalibrace, musí zahrnovat i chyby kinematiky vzniklé například výrobou nebo montáží, aby později bylo možné pomocí kalibrace tyto chyby eliminovat.

Chyby, které se projeví v kinematice robotu, nemusí nutně vyplívat z použití zmetkových dílů nebo nekvalitní montáže. Odchytkou oproti ideálnímu robotu je i např. výroba součástí s výrobní tolerancí. Model ideálního robotu totiž představuje stav, kdy jsou všechny součásti vyrobeny a smontovány přesně ve jmenovitém rozměru a celá struktura tyto rozměry v průběhu pohybu nijak nemění (jedinou proměnnou jsou úhly natočení kinematických dvojic).

Pro tvorbu modelu je možné chyby rozdělit do dvou základních kategorií. Do první kategorie zařadíme chyby, z jejichž fyzikální podstaty vyplývá, že nemění svoji velikost ani směr v průběhu pohybu. Jedná se tedy o chyby nezávislé např. na kinematické konfiguraci, čase a teplotě. Do druhé kategorie zařadíme ty chyby, které ze své podstaty mění svou velikost nebo směr v průběhu pohybu nebo v závislosti na kinematické konfiguraci.

Chyby, které jsou konstantní v průběhu pohybu (pohybů) můžeme modelovat změnou vzájemné polohy jednotlivých souřadných systémů kinematického modelu. Tuto změnu popíšeme upravením hodnoty DH parametru/ů odpovídajícího/ch příslušné chybě. Prakticky je možné tuto změnu popsat přičtením matice chyb k matici nominálních DH parametrů. Tímto způsobem můžeme modelovat zejména chyby způsobené výrobními tolerancemi a montáží. Pro velikost chyby jednotlivých DH parametrů předpokládám náhodný charakter a normální (Gaussovo) rozdělení.²

² Chyba parametru a_i musí být dle postupu zavedení souřadných systémů vždy kladná, tato vlastnost byla zohledněna i v simulačním modelu

Do kategorie proměnných chyb můžeme zařadit zejména silové a teplotní deformace, opotřebení a malé chyby náhodného charakteru způsobené např. vzorkováním čidel pohonů. Silová deformace je u robotu způsobena tíhovými a setrvačnými silami. Rozložení těchto sil a jejich deformační účinek je závislý na kinematické konfiguraci robota. Účinek setrvačných sil dále závisí i na pohybovém stavu. Pro popis deformací robotu by bylo nutné zohlednit rozložení tuhosti a hmotnosti, kinematickou konfiguraci i pohybový stav. Teplotní deformace mohou mít charakter jak chyby v průběhu pohybu konstantní tak chyby proměnné. Pokud se robot nachází v ustáleném stavu z hlediska teploty, rozměry robotu se nemění. V takovém případě můžeme teplotní deformace modelovat stejným způsobem, jako chyby konstantní v průběhu pohybu. Pro zohlednění teplotních deformací by bylo nutné pracovat s teplotními vlastnostmi robotu a zahrnout jako proměnnou čas. Modelovat chyby, které mění svou velikost nebo směr v průběhu pohybu je značně složité. U tohoto typu chyb není možné jednoduše zahrnout různé fyzikální podstaty chyb do kinematického modelu. Tyto chyby jsou navíc jevem, který nelze kalibračním postupem eliminovat. Z tohoto hlediska můžeme chyby robotu proměnné v čase zařadit jako jeden ze zdrojů chyby měření.

5.3. Měření laser trackerem

Aby bylo možné simulační model průmyslového robotu použít pro simulaci procesu kalibrace, je nutné popsat i proces měření laser trackerem. Parametry měření zejména přesnost ovlivní zásadně podobu naměřených dat. Naměřená data jsou vstupem pro kalibrační algoritmus, který v této práci navrhuji.

Kdyby byly pohyby robotu měřeny ideálním měřidlem, shodovala by se skutečná poloha efektoru robotu s polohou změřenou. Při měření skutečným laser trackerem je situace jiná. Robot je v příslušné kinematické konfiguraci, efektor v podobě koutového odražeče je umístěn na koncovou přírubu robotu. Naměřená poloha se neshoduje se skutečnou polohou, ale liší se od skutečné polohy o chybu měření. Chyba měření je náhodným jevem, který se projeví zvláště v každém jednotlivém bodě měření. I v případě, že měříme opakovaně nehybný bod, změřená poloha bodu se může pro jednotlivá měření lišit.

Z kinematického modelu je výstupem poloha koncového efektoru v kartézských souřadnicích x , y , z . Chyba měření se projeví náhodně nejen ve smyslu velikosti ale i ve smyslu směru. Pro modelování těchto vlastností využívám přičtení chyby měření ke každé souřadnici zvláště:

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{ch} \quad (5.1)$$

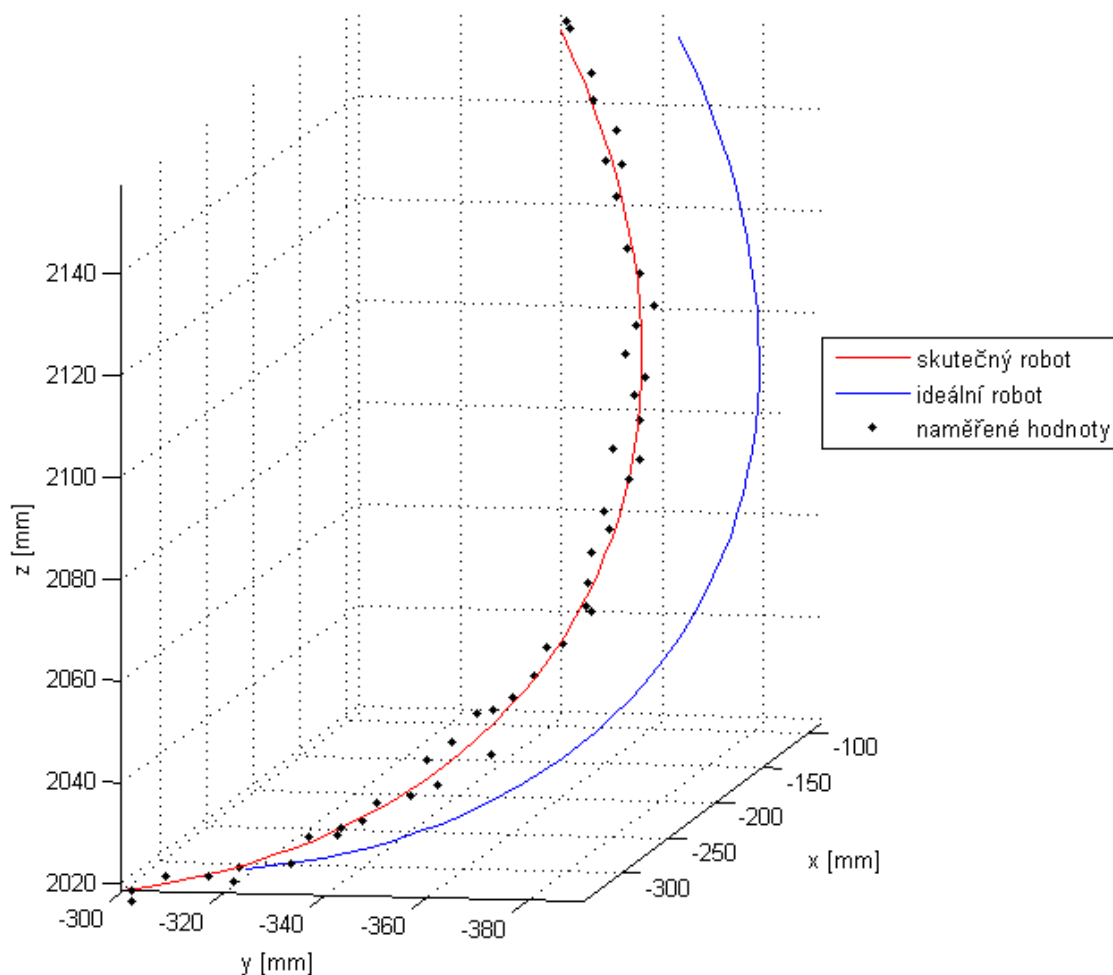
\mathbf{u}_m je radiusvektor naměřené polohy koncového efektoru, \mathbf{u}_E radiusvektor skutečné polohy koncového efektoru a \mathbf{u}_{ch} radiusvektor chyby měření. Rovnici (5.1) je možné rozepsat po složkách

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{ch} \\ y_{ch} \\ z_{ch} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Pro dodržení náhodnosti směru chyby je nutné, aby chyby x_{ch} , y_{ch} , z_{ch} byly náhodná navzájem nezávislá čísla. Předpokládám normální (Gaussovo) rozdělení, čemuž odpovídá i použitá funkce v programu MATLAB.

Pro simulaci měření ve více měřených bodech je možné uvedený postup opakovat pro každý měřený bod zvlášť tak, aby chyba měření pro jednotlivé body měření byla různá. Tedy je nutné pro každý bod měření náhodně vygenerovat chybový vektor zvlášť.

Simulovaný pohyb robotu a měření je zobrazen na (Obr. 15). Simulovaný pohyb byl realizován rotací jedné kinematické dvojice. Trajektorie skutečného robotu se liší od trajektorie ideálního robotu, nicméně trajektorie skutečného i ideálního robotu mají stejný kružnicový charakter. Naměřené body jsou náhodně rozmístěny v okolí trajektorie skutečného robotu.



Obr. 15: Simulovaný pohyb robotu a měření (pro přehlednost chyby výrazně zvětšeny)

6. Návrh kalibrace

Kalibrační postup, kterým se budu zabývat, vychází z měření os rotací jednotlivých kloubů v souřadném systému laser trackeru. Pokud známe osy rotace jednotlivých kloubů, je možné popsat celou kinematickou strukturu pomocí DH parametrů způsobem popsáným v kapitole 4.1.2 , protože jediným vstupem pro získání popisu kinematické struktury pomocí DH parametrů je poloha os pohybu. Polohu osy rotace kloubu je možné změřit tak, že provedeme rotaci daného kloubu, přičemž ostatní pohybové osy budou nehybné. Osa získané kružnicové trajektorie potom bude shodná s osou daného kloubu.

Pro praktické měření polohy os rotací jednotlivých kloubů je nutné postupovat směrem od pevného rámu ke koncovému bodu. Nejprve bude provedena rotace a měření první osy. Následně může být první osa napolohována do polohy vhodné k dalšímu měření. Dále bude provedena rotace a měření druhé osy. Od této chvíle již nesmí být proveden žádný pohyb první osou, protože by došlo ke změně polohy již změřené druhé osy. Další postup bude obdobný. Zásadní je, že po změření dané osy již nesmí dojít k pohybu žádnou z os blíže k pevnému rámu, aby nebyla změněna poloha již změřené osy. Tímto způsobem bude posléze možné popsat polohu všech pohybových os.

Uvedený postup je možné použít pouze pro zařízení s otevřeným kinematickým řetězcem. U zařízení s uzavřeným kinematickým řetězcem není možné dosáhnout potřebného stavu, kdy bude proveden pohyb pouze jednou z pohybových os.

6.1. Vyhodnocení os kružnic z naměřených bodů

Měřením koncového bodu při rotaci jedné kinematické dvojice získáme souřadnice x_i, y_i, z_i jednotlivých měřených bodů. Souřadnice naměřených bodů leží v okolí kružnicové trajektorie koncového bodu robotu. Z těchto souřadnic je nutno získat popis os rotací jednotlivých kloubů, tedy popis přímek v prostoru. Popis přímky v prostoru je možné realizovat parametrickou rovnicí přímky. Pro sestavení parametrické rovnice přímky potřebujeme souřadnice bodu, který na přímce leží a souřadnice směrového vektoru.

Při určování směrového vektoru osy změřené kružnice můžeme využít toho, že směrový vektor osy kružnice má shodný směr s normálovým vektorem roviny, ve které tato kružnice leží. K proložení naměřených bodů rovinou je vhodná metoda nejmenších čtverců (rovnice (4.19) - (4.26). Dosazením naměřených souřadnic do vztahu (4.26) dostáváme soustavu normálních rovnic. Řešením takto získané soustavy rovnic dostáváme koeficienty rovnice roviny ve tvaru:

$$z = b_0 + b_1x + b_2y \quad (6.1)$$

Hledaný normálový vektor roviny potom bude mít souřadnice $[b_1, b_2, -1]$.

Rovnice (6.1) předpokládá, že rovinu je možné vyjádřit jako funkci $z = f(x, y)$, což pro některé soubory naměřených dat nemusí být splněno. Pokud naměřené body leží v rovině rovnoběžné s globální souřadnou osou z , není možné vyjádřit rovnici této roviny jako funkci proměnných x a y (to může nastat např. pro druhý nebo třetí kloub robotu). Matice soustavy normálních rovnic sestavená ze souřadnic takových bodů by byla singulární. Když se poloha roviny, která aproximuje naměřené body, rovnoběžnosti blíží, je matice soustavy normálních rovnic špatně podmíněná.

Stav, kdy je matice soustavy špatně podmíněná je nežádoucí. Tento stav je možné eliminovat vhodnou volbou nezávislých proměnných, jejichž funkci pro popis roviny použijeme. Pro volbu závislé proměnné v rovnici roviny jsou nevhodné souřadné osy, které v případě, že chyby měření jsou menší než poloměr měřené trajektorie, je možné rovnoběžnost vyloučit porovnáním rozdílů největší a nejmenší naměřené hodnoty dané souřadnice:

$$(z_{max} - z_{min}) < (x_{max} - x_{min}) \wedge (z_{max} - z_{min}) < (y_{max} - y_{min})$$

$$\rightarrow \text{vyhodnocení } z = f(x, y) \tag{6.2}$$

$$(x_{max} - x_{min}) < (y_{max} - y_{min}) \wedge (x_{max} - x_{min}) < (z_{max} - z_{min})$$

$$\rightarrow \text{vyhodnocení } x = f(y, z) \tag{6.3}$$

$$(y_{max} - y_{min}) < (z_{max} - z_{min}) \wedge (y_{max} - y_{min}) < (x_{max} - x_{min})$$

$$\rightarrow \text{vyhodnocení } y = f(z, x) \tag{6.4}$$

Při praktické realizaci v programu MATLAB bylo namísto změny nezávislých proměnných při vyhodnocení rovnice kružnice využito cyklické záměny souřadnic naměřených bodů (Tabulka 3). Výhodou tohoto přístupu je, že všechny vztahy potřebné pro výpočet mohou zůstat v původní podobě pro proměnné x a y . Změna je provedena jednodušším způsobem změnou pořadí souřadnic naměřených bodů.

hledaná rovnice	cyklická záměna souřadnic	zpětná cyklická záměna
$z = f(x, y)$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
$x = f(y, z)$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
$y = f(z, x)$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Tabulka 3: Nahrazení změny proměnných ve vztazích cyklickou záměnou naměřených souřadnic

Po provedení příslušných výpočtů dostaneme zpětnou záměnou souřadnic hledané souřadnice směrového vektoru osy rotace. Tuto zpětnou záměnu je možné provést až po vyhodnocení souřadnic bodu ležícího na ose rotace.

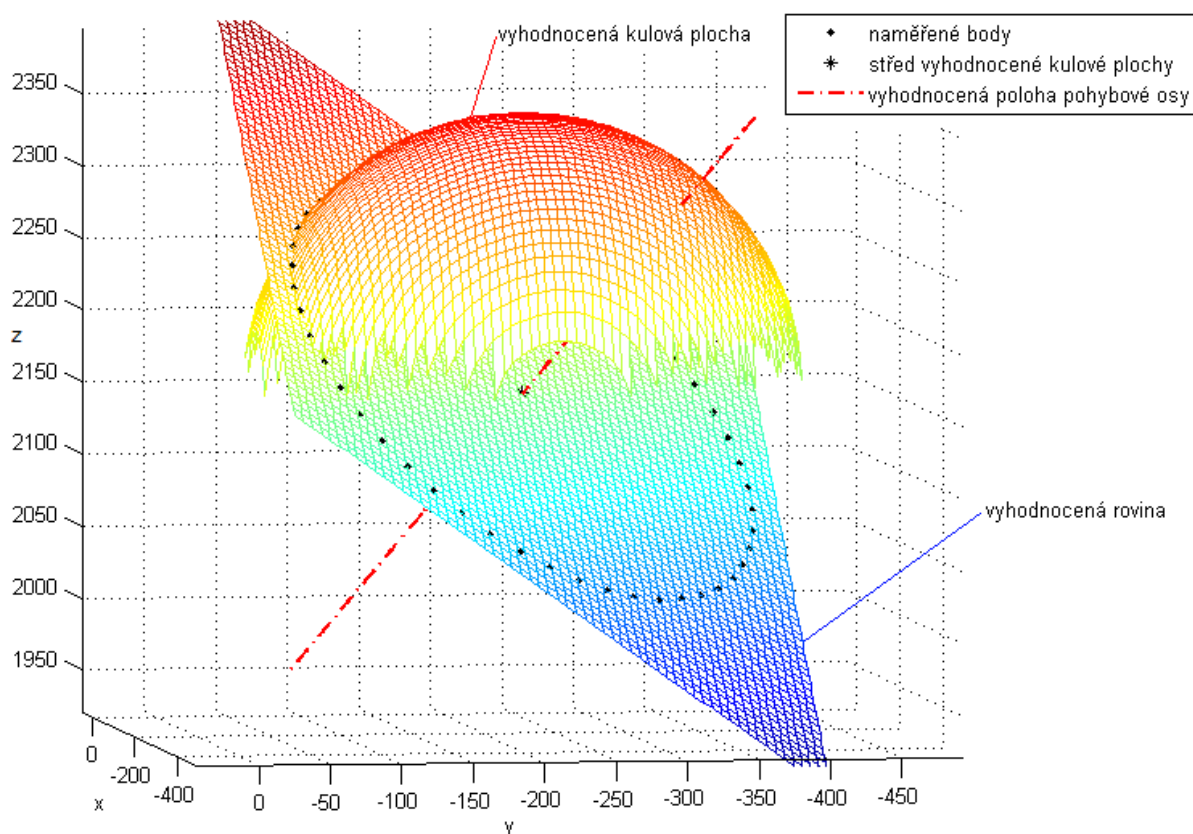
Pro úplný popis polohy osy rotace zbývá získat souřadnice bodu ležícího na ose rotace. Takovým bodem je například střed změřené kružnicové trajektorie. Proložení naměřených bodů kružnicí není možné přímo, protože pro 3D neexistuje vhodná rovnice kružnice. Byly navrženy 2 přístupy pro získání souřadnic středu kružnicové trajektorie: využití rovnice

kulové plochy a využití transformace naměřených dat do souřadného systému ležícího v rovině kružnice, ve kterém se bude jednat o 2D problém.

6.1.1. Výpočet pomocí rovnice kulové plochy

Nalezení nejlepší aproximace naměřených bodů kulovou plochou je podobný problém jako nalezení kulové plochy, jejíž podmnožinou je kružnicová trajektorie koncového bodu. Řešením této úlohy jsou všechny kulové plochy, jejichž střed leží na ose kružnice. Řešení tedy není jednoznačné. Tato nejednoznačnost je nevýhodná, protože hrozí stav, kdy střed vyhodnocené kulové plochy bude výrazně vzdálen od roviny, ve které leží naměřené body. To se v souvislosti s chybou měření může projevit větší odchylkou zjištěného středu kulové plochy od hledané polohy. Dále je nejednoznačnost zjištění nevýhodná i z důvodu porovnatelnosti získaných hodnot.

Pro jednoznačné nalezení rovnice kulové plochy je možné využít rovnice roviny (z předchozího výpočtu) a metodou nejmenších čtverců proložit naměřenými body kulovou plochu, jejíž střed leží v zjištěné rovině. Řešením soustavy rovnic (4.36) získáme rovnici kulové plochy, z které můžeme odečíst hledané souřadnice středu (4.38). Vyhodnocení je znázorněno na Obr. 16.



Obr. 16: Vyhodnocení osy kinematické dvojice s použitím rovnice kulové plochy

6.1.2. Výpočet s transformací do roviny kružnice

Druhý přístup vyhodnocení středu naměřené kružnice využívá transformaci naměřených bodů z globálního souřadného systému do souřadného systému, jehož 2 osy leží v již vyhodnocené rovině. Po transformaci do tohoto nového souřadného systému je možné vyhodnotit střed kružnice pomocí rovnice kružnice pro 2D případ, protože souřadnice ve dvou osách tohoto nového systému popisují kolmý průmět bodů do dříve nalezené roviny.

Pro transformaci do souřadného systému ležícího v dříve vyhodnocené rovině je nutné sestavit příslušnou transformační matici. K sestavení transformační matice je využít normálový vektor roviny ve tvaru $[b_1, b_2, -1]$ a dále vlastnosti skalárního součinu 2 vektorů a vlastnosti transformační matice popsané výše. Jednotkové vektory jednotlivých os můžeme určit ze vztahů (6.5) - (6.7). Jednotkový vektor osy z získáme znormováním normálového vektoru roviny na jednotkovou velikost. Další osy získáme aplikací skalárního součinu, který zaručí kolmost jednotkových vektorů jednotlivých os.

$$\mathbf{k}_r = \left[\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 1}}, \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 1}} \right]^T \quad (6.5)$$

$$\mathbf{i}_r = [0, 1, 0]^T \times \mathbf{k}_r \quad (6.6)$$

$$\mathbf{j}_r = \mathbf{k}_r \times \mathbf{i}_r \quad (6.7)$$

Celkovou transformační matici získáme doplněním o translační souřadnice. Počátek souřadného systému musí ležet ve vyhodnocené rovině. Dále je vhodné umístit počátek souřadného systému do blízkosti skutečného středu kružnice, aby se eliminoval vliv možné chyby určení směrového vektoru roviny v předchozím výpočtu:

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_r & \mathbf{j}_r & \mathbf{k}_r & \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n} \\ & & & \frac{\sum_{i=0}^n y_i}{n} \\ & & & b_0 + \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n} b_1 + \frac{\sum_{i=0}^n y_i}{n} b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Souřadnice naměřených bodů v souřadném systému roviny dostaneme:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_r \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_r^{-1} * \begin{bmatrix} \mathbf{r}_m \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

, kde \mathbf{r}_m jsou souřadnice v globálním souřadném systému. Souřadnice x a y vyjádřené v souřadném systému roviny můžeme nyní dosadit do soustavy rovnic (4.44), získáme rovnici kružnice v souřadném systému roviny. Ze získané rovnice kružnice

$$x^2 + y^2 + e_1 x + e_2 y + e_0 = 0 \quad (6.10)$$

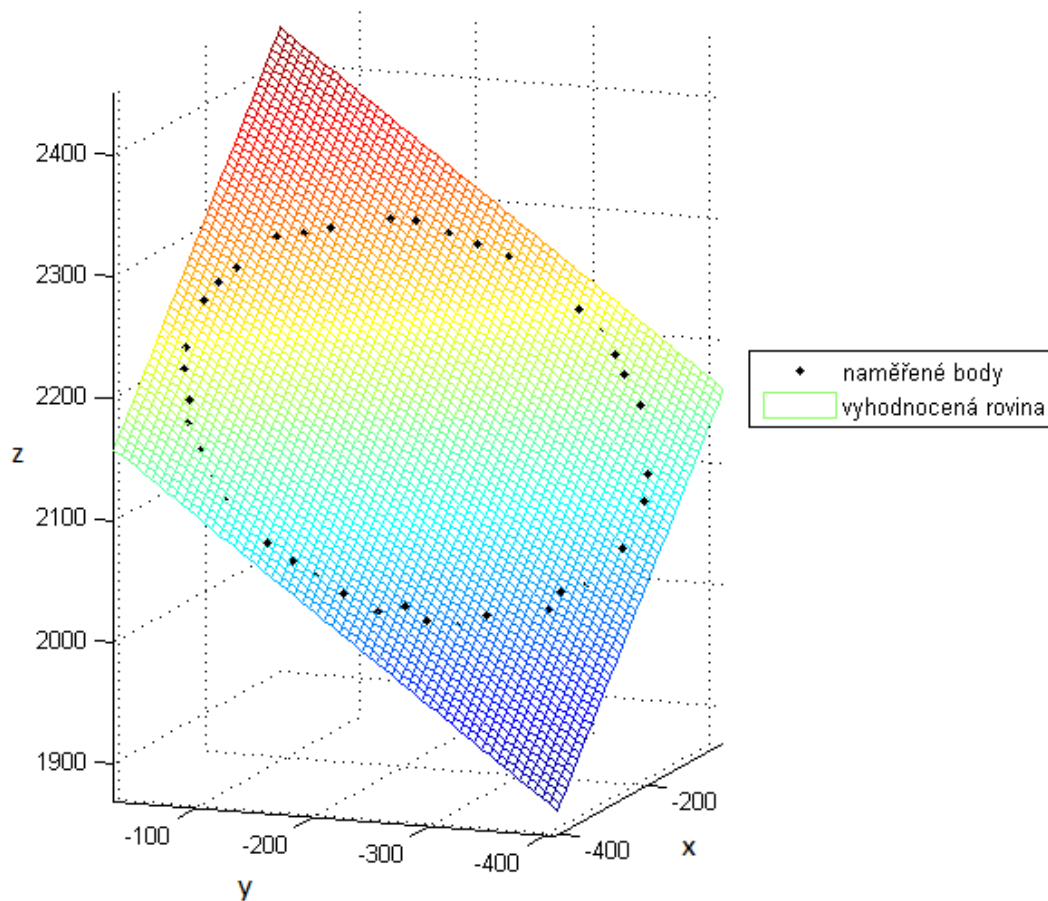
určíme souřadnice středu kružnice v souřadném systému roviny

$$\mathbf{S}_r = \left[-\frac{e_1}{2}, -\frac{e_2}{2}, 0 \right]^T. \quad (6.11)$$

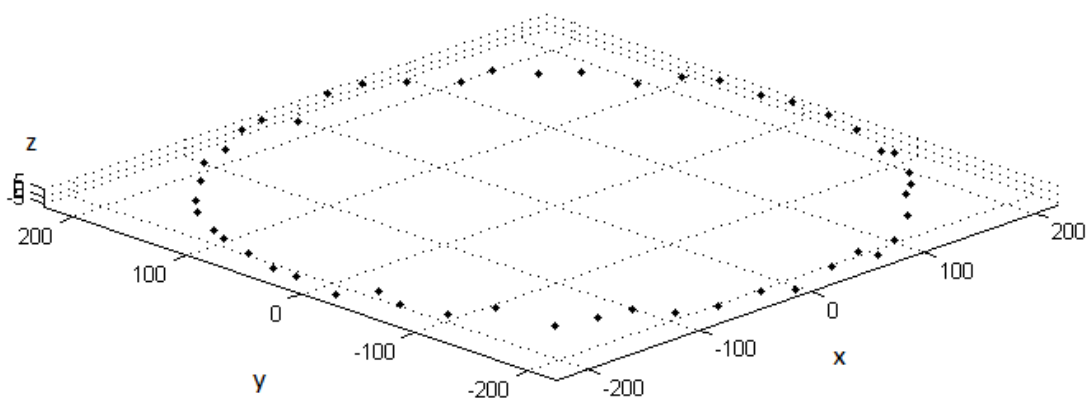
Posledním krokem je transformace zjištěných souřadnic středu kružnice zpět do globálního souřadného systému, tuto transformaci můžeme provést po doplnění na rozšířený radiusvektor:

$$\begin{bmatrix} S \\ 1 \end{bmatrix} = T_r * \begin{bmatrix} S_r \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

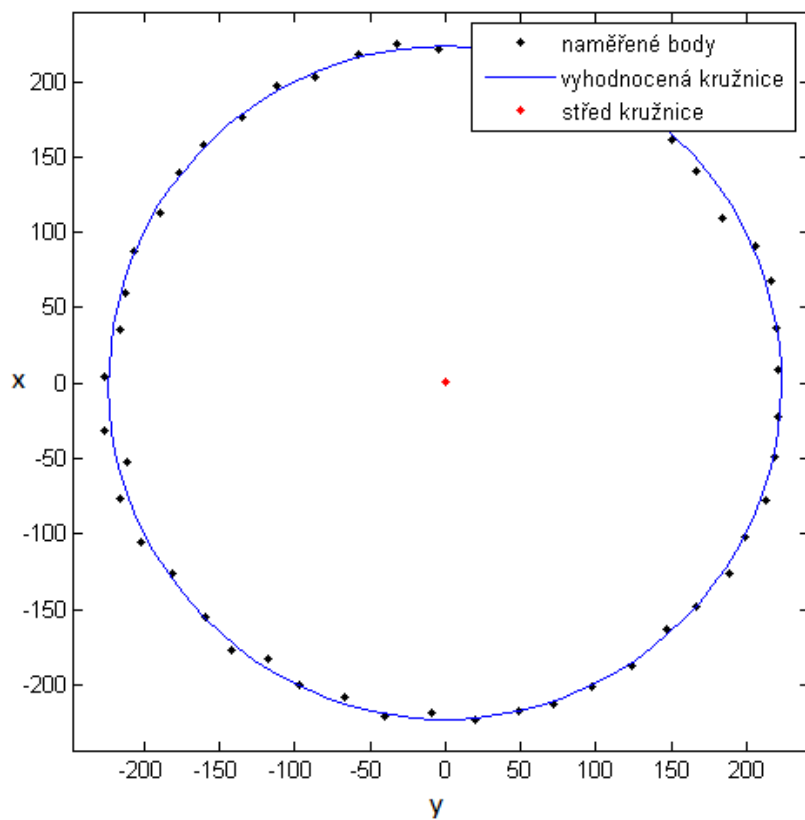
Tím získáme potřebnou polohu bodu pro kompletní popis polohy osy kinematické dvojice. Postup vyhodnocení je zobrazen na Obr. 17, Obr. 18 a Obr. 19.



Obr. 17: Vyhodnocení roviny



Obr. 18: Naměřené body zobrazené v novém souřadném systému



Obr. 19: Nalezení středu kružnice ve vyhodnocené rovině

6.2. Vyhodnocení DH parametrů z os kružnic

Z hodnot získaných předchozím výpočtem je možné sestavit parametrické rovnice os jednotlivých kinematických dvojic ve tvaru

$$X_{z_i} = S_i + \mathbf{z}_i * p \quad (6.13)$$

, kde S_i je bod ležící na i -té pohybové ose, \mathbf{z}_i je směrový vektor i -té osy a zároveň vektor osy z i -tého souřadného systému a p je parametr. Z polohy os kinematických dvojic je možné určit polohu jednotlivých souřadných systémů Denavit-Hartenbergovy metody dle pravidel popsanych v kapitole 4.1.2. Z polohy souřadných systémů je již možné přímo určit hodnoty jednotlivých DH parametrů.

Prvním krokem určení polohy souřadných systémů je nalezení společné normály obou os a bodů společné normály ležících na obou přímkách. Určení společné normály je jednoznačné pro všechny dvojice nerovnoběžných přímek. Rovnoběžnost může nastat pouze mezi osami 2 a 3. Vyhodnocení os 2 a 3 je popsáno v kapitole 6.2.1. Úpravou vztahu (4.54) pro i -tou a $i+1$ osu získáme soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i * \mathbf{z}_i & -\mathbf{z}_i * \mathbf{z}_{i+1} \\ \mathbf{z}_i * \mathbf{z}_{i+1} & -\mathbf{z}_{i+1} * \mathbf{z}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n1} \\ p_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(S_i - S_{i+1}) * \mathbf{z}_i \\ -(S_i - S_{i+1}) * \mathbf{z}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

, řešením této soustavy jsou hodnoty parametrů p_{n1} a p_{n2} . Dosazením hodnot parametrů do parametrických rovnic přímek získáme polohy bodů společné normály na obou přímkách a tedy polohy počátků souřadných systémů

$$O'_{i+1} = S_i + \mathbf{z}_i * p_{p1} \quad (6.15)$$

$$O_{i+1} = S_{i+1} + \mathbf{z}_{i+1} * p_{p2}. \quad (6.16)$$

Protože osa x_{i+1} leží na společné normále obou přímek, můžeme vyjádřit směrový vektor osy x_{i+1} :

$$\mathbf{x}_{i+1} = O_{i+1} - O'_{i+1} \quad (6.17)$$

Tímto způsobem je možno určit polohu souřadných systémů $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2 - \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n$, protože je určen počátek souřadného systému, osa x a osa z . Poloha osy y je dána doplněním do

pravotočivého kartézského systému. Poloha souřadného systému x_1, y_1, z_1 popisuje polohu první kinematické dvojice na pevném rámu. Proto počátek prvního souřadného systému umístím do bodu, kde osa z_1 protíná rovinu xy . Z parametrické rovnice osy z_1 , nalezneme hodnotu parametru pro nulovou složku z a dosadíme:

$$0 = z_{S_1} + p_0 * z_{z_1} \rightarrow p_0 = -\frac{z_{S_1}}{z_{z_1}} \quad (6.18)$$

$$O_1 = [x_{S_1} - x_{z_1} * \frac{z_{S_1}}{z_{z_1}}, y_{S_1} - y_{z_1} * \frac{z_{S_1}}{z_{z_1}}, 0]^T \quad (6.19)$$

Pro další výpočet určíme polohu osy x_1 , osa x_1 musí být kolmá na osu z_1 . Osa x_1 bude dále ležet v rovině xz :

$$x_1 = [0,1,0]^T \times z_1 \quad (6.20)$$

Podle pravidel popsaných v kapitole 4.1.2 můžeme zjistit hodnoty jednotlivých DH parametrů. Velikost parametru d_i je rovna vzdálenosti mezi body O_i a O'_{i+1} :

$$|d_i| = \sqrt{(x_{O'_{i+1}} - x_{O_i})^2 + (y_{O'_{i+1}} - y_{O_i})^2 + (z_{O'_{i+1}} - z_{O_i})^2} \quad (6.21)$$

Pokud pohyb od O_i k O'_{i+1} bude v kladném směru osy z_i , parametr d_i bude kladný. Pokud pohyb bude v záporném směru osy z_i parametr d_i bude záporný:

$$\frac{O'_{i+1} - O_i}{z_i} > 0 \rightarrow d_i = \sqrt{(x_{O'_{i+1}} - x_{O_i})^2 + (y_{O'_{i+1}} - y_{O_i})^2 + (z_{O'_{i+1}} - z_{O_i})^2} \quad (6.22)$$

$$\frac{O'_{i+1} - O_i}{z_i} < 0 \rightarrow d_i = -\sqrt{(x_{O'_{i+1}} - x_{O_i})^2 + (y_{O'_{i+1}} - y_{O_i})^2 + (z_{O'_{i+1}} - z_{O_i})^2} \quad (6.23)$$

Velikost parametru a_i je rovna vzdálenosti mezi body O'_{i+1} a O_{i+1} :

$$a_i = \sqrt{(x_{O_{i+1}} - x_{O'_{i+1}})^2 + (y_{O_{i+1}} - y_{O'_{i+1}})^2 + (z_{O_{i+1}} - z_{O'_{i+1}})^2} \quad (6.24)$$

Znaménko bude vždy kladné, protože osa x_{i+1} je definována jako rozdíl $O_{i+1} - O'_{i+1}$.

Velikost parametru α_i je rovna velikosti úhlu mezi osami \mathbf{z}_i a \mathbf{z}_{i+1} okolo osy \mathbf{x}_{i+1} . Velikost úhlu sevřeného dvěma vektory můžeme určit ze vztahu

$$|\cos \alpha_i| = \frac{\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}_{i+1}}{|\mathbf{z}_i| \cdot |\mathbf{z}_{i+1}|} \quad (6.25)$$

Jedná se o orientovaný úhel od \mathbf{z}_i k \mathbf{z}_{i+1} okolo kladného směru osy \mathbf{x}_{i+1} . Pokud tedy chceme pomocí funkce arcus cosinus určit α_i , musíme rozhodnout o znaménku, protože obor hodnot funkce arccos je $\langle 0, \pi \rangle$. Rozhodnout můžeme pomocí vektorového součinu \mathbf{z}_i a \mathbf{z}_{i+1} . Vektorový součin $\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}$ je k oběma vektorům kolmý (stejně jako vektor \mathbf{x}_{i+1}) a jeho směr je takový, že vektory \mathbf{z}_i , \mathbf{z}_{i+1} a jejich vektorový součin $\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}$ tvoří v uvedeném pořadí pravotočivou bázi. To znamená, že rotace od \mathbf{z}_i k \mathbf{z}_{i+1} okolo kladného směru vektorového součinu $\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}$ je v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Pokud je vektorový součin $\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}$ kladným násobkem vektoru \mathbf{x}_{i+1} bude $\alpha_i \in \langle 0, \pi \rangle$. Pokud je vektorový součin $\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}$ záporným násobkem \mathbf{x}_{i+1} bude $\alpha_i \in \langle \pi, 2\pi \rangle$. Určení hodnoty parametru α_i je nyní jednoznačné:

$$\frac{\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}}{\mathbf{x}_{i+1}} > 0 \rightarrow \alpha_i = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}_{i+1}}{|\mathbf{z}_i| \cdot |\mathbf{z}_{i+1}|} \right) \quad (6.26)$$

$$\frac{\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}}{\mathbf{x}_{i+1}} < 0 \rightarrow \alpha_i = -\cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}_{i+1}}{|\mathbf{z}_i| \cdot |\mathbf{z}_{i+1}|} \right) \quad (6.27)$$

Poměrem dvou vektorů je poměr jejich nenulových složek. V případě, že skalární součin $\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_{i+1}$ je nulový, vektory \mathbf{z}_i a \mathbf{z}_{i+1} jsou rovnoběžné, $\cos \alpha_i = \pm 1$ a parametr α_i je také určen jednoznačně.

Velikost parametru θ_i je rovna velikosti úhlu mezi osami \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_{i+1} okolo osy \mathbf{z}_i . Velikost úhlu sevřeného dvěma vektory můžeme určit ze vztahu

$$|\cos \theta_i| = \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_{i+1}}{|\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{x}_{i+1}|} \quad (6.28)$$

Pro jednoznačné určení velikosti orientovaného úhlu mezi osami \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_{i+1} je možné využít vlastnosti skalárního součinu $\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_{i+1}$ obdobně jako při určování parametru α_i :

$$\frac{\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_{i+1}}{\mathbf{z}_i} > 0 \rightarrow \theta_i = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_{i+1}}{|\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{x}_{i+1}|} \right) \quad (6.29)$$

$$\frac{\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_{i+1}}{z_i} < 0 \rightarrow \theta_i = -\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_{i+1}}{|\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{x}_{i+1}|}\right) \quad (6.30)$$

6.2.1. Vyhodnocení parametrů transformace mezi druhou a třetí osou

Jednoznačné určení společné kolmice dvou rovnoběžných přímek není možné, v soustavě rovnic (6.14) by se tato nejednoznačnost projevila singularitou matice soustavy. Polohu počátku souřadného systému O_3 , by bylo možno zvolit na ose z_3 libovolně. Tento případ nastává pro ideální polohu druhé a třetí osy.

U reálného robotu nebude rovnoběžnost druhé a třetí osy dodržena úplně. Tento stav, kdy osy z_2 a z_3 svírají velmi malý úhel je pro vyhodnocení nepříznivý, protože velmi malá změna úhlu mezi osami může způsobit výraznou změnu polohy vyhodnocených souřadných systémů. Tato změna polohy vyhodnoceného souřadného systému x_3, y_3, z_3 se projeví zejména vysokými hodnotami parametru d_2 . Vysoké hodnoty d_2 jsou nevhodné zejména proto, že model kinematické struktury popsany těmito hodnotami neodpovídá realitě.

Řešením, které se používá i v praxi (Obr. 20), je nahrazení parametru d_2 parametrem β_2 .

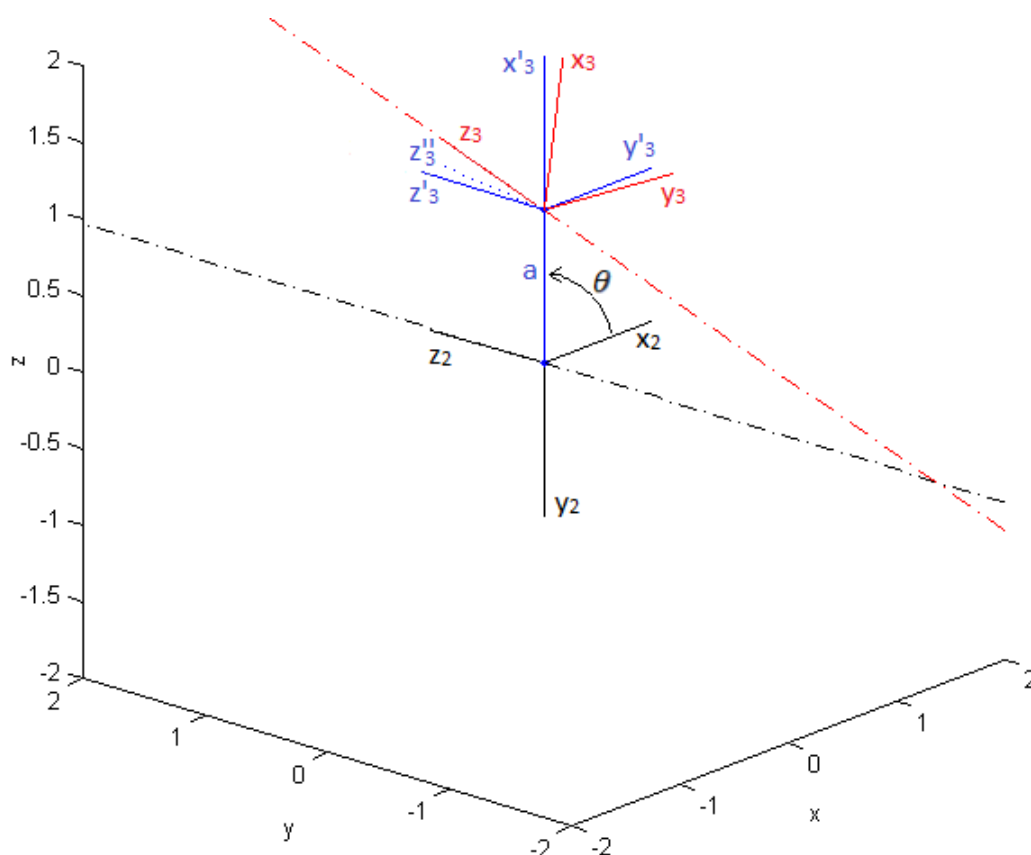
```
<DhArray name="dhOffset">
  <DH index="0" theta="0" d="0" a="0.025874" b="0" alpha="0.012112" beta="0"/>
  <DH index="1" theta="0" d="0" a="0.221567" b="0" alpha="0" beta="-0.009838"/>
  <DH index="2" theta="0" d="0.09309" a="0" b="0" alpha="-0.005882" beta="0"/>
  <DH index="3" theta="0" d="0.149552" a="0" b="0" alpha="-0.00792" beta="0"/>
```

Obr. 20: Hodnoty přičítané k nominálním hodnotám DH parametrů u kalibrovaného robotu Stäubli TX 90

Výsledná transformace mezi souřadnými systémy x_2, y_2, z_2 a x_3, y_3, z_3 bude po nahrazení parametru d_2 parametrem β_2 :

$$\mathbf{T}_{23} = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\theta_2)\mathbf{T}_x(a_2)\mathbf{T}_{\varphi_x}(\alpha_2)\mathbf{T}_{\varphi_y}(\beta_2) \quad (6.31)$$

Toto nahrazení se projeví změnou postupu zavádění souřadných systémů. Počátek souřadného systému x'_3, y'_3, z'_3 bude ležet v průsečíku přímky z_3 a roviny x_2y_2 (Obr. 21).



Obr. 21: Souřadné systémy při vyhodnocení druhé a třetí osy (odchylky os od rovnoběžnosti výrazně zvětšeny)

Úpravou vztahu (4.61) můžeme získat hodnotu parametru p

$$p_p = -\frac{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{S}_3 - \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{O}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_3} \quad (6.32)$$

dosazením hodnoty parametru p získáme souřadnice počátku souřadného systému $O_3 \equiv O'_3$

$$O_3 = S_3 + \mathbf{z}_3 * p_p \quad (6.33)$$

Velikost parametru θ_2 je rovna velikosti úhlu mezi osami \mathbf{x}_2 a \mathbf{x}'_3 okolo osy \mathbf{z}_2 . Velikost úhlu sevřeného těmito vektory můžeme určit ze vztahu

$$|\cos \theta_2| = \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}'_3}{|\mathbf{x}_2| \cdot |\mathbf{x}'_3|} \quad (6.34)$$

Podobně jako v případech popsaných výše využijeme pro jednoznačné určení velikosti orientovaného úhlu mezi osami \mathbf{x}_2 a \mathbf{x}'_3 vlastnosti skalárního součinu $\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}'_3$

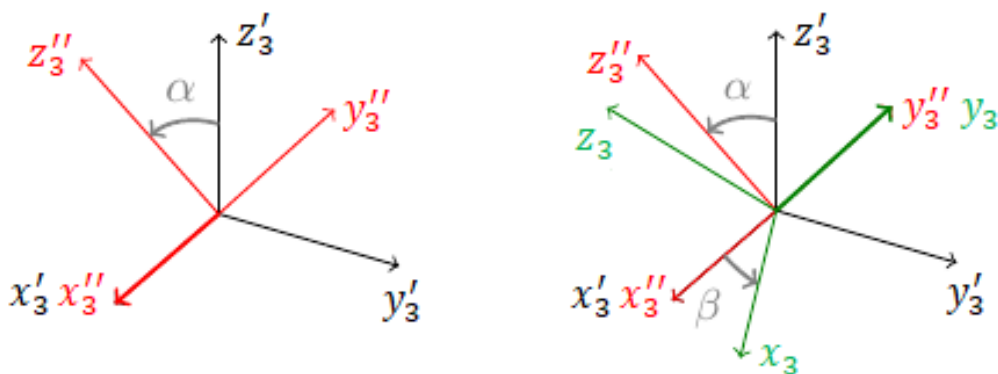
$$\frac{\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}'_3}{z_2} > 0 \rightarrow \theta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}'_3}{|\mathbf{x}_2| \cdot |\mathbf{x}'_3|} \right) \quad (6.35)$$

$$\frac{\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}'_3}{z_2} < 0 \rightarrow \theta_2 = -\cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}'_3}{|\mathbf{x}_2| \cdot |\mathbf{x}'_3|} \right) \quad (6.36)$$

Velikost parametru a_2 je rovna vzdálenosti mezi body O_2 a O_3 :

$$a_2 = \sqrt{(x_{0_2} - x_{0_3})^2 + (y_{0_2} - y_{0_3})^2 + (z_{0_2} - z_{0_3})^2} \quad (6.37)$$

Parametry α_2 a β_2 jsou parametry rotací ze souřadného systému $\mathbf{x}'_3, \mathbf{y}'_3, \mathbf{z}'_3$ postupně do souřadných systémů $\mathbf{x}''_3, \mathbf{y}''_3, \mathbf{z}''_3$ a $\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_3$ (Obr. 22). Parametr α_i je úhel rotace okolo osy \mathbf{x}'_3 do polohy, ze které bude možné rotací okolo osy \mathbf{y}''_3 dosáhnout známé polohy osy \mathbf{z}_3 . Osa \mathbf{y}''_3 musí být kolmá na známou osu \mathbf{x}'_3 , protože rotace \mathbf{y}'_3 okolo \mathbf{x}'_3 na kolmosti os nic nemění. Dále musí být osa \mathbf{y}''_3 kolmá na osu \mathbf{z}_3 , aby bylo později možné rotací okolo osy \mathbf{y}''_3 dosáhnout známé polohy osy \mathbf{z}_3 .



Obr. 22: Postupné rotace souřadného systému o úhly α_2 a β_2

Vektor osy \mathbf{y}''_3 získáme skalárním součinem

$$\mathbf{y}''_3 = \mathbf{z}_3 \times \mathbf{x}'_3 \quad (6.38)$$

Vektor \mathbf{z}''_3 je doplněním vektorů $\mathbf{x}''_3 (\equiv \mathbf{x}'_3 = \mathbf{x}_2)$ a \mathbf{y}''_3 na pravotočivý kartézský souřadný systém:

$$\mathbf{z}''_3 = \mathbf{x}''_3 \times \mathbf{y}''_3 \quad (6.39)$$

Velikost parametru α_2 je rovna velikosti úhlu mezi osami \mathbf{z}'_3 a \mathbf{z}''_3 okolo osy \mathbf{x}'_3 . Směrový vektor osy \mathbf{z}'_3 je totožný se směrovým vektorem osy \mathbf{z}_2 . Velikost úhlu sevřeného těmito vektory můžeme určit ze vztahu

$$|\cos \alpha_2| = \frac{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}''_3}{|\mathbf{z}_2| \cdot |\mathbf{z}''_3|} \quad (6.40)$$

Podobně jako v předchozích případech využijeme pro jednoznačné určení velikosti orientovaného úhlu mezi osami \mathbf{z}_2 a \mathbf{z}''_3 vlastnosti skalárního součinu $\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}''_3$

$$\frac{\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}''_3}{\mathbf{x}'_3} > 0 \rightarrow \alpha_2 = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}''_3}{|\mathbf{z}_2| \cdot |\mathbf{z}''_3|} \right) \quad (6.41)$$

$$\frac{\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}''_3}{\mathbf{x}'_3} < 0 \rightarrow \alpha_2 = -\cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}''_3}{|\mathbf{z}_2| \cdot |\mathbf{z}''_3|} \right) \quad (6.42)$$

Velikost parametru β_2 je rovna velikosti úhlu mezi osami \mathbf{z}''_3 a \mathbf{z}_3 okolo osy \mathbf{y}''_3 . Velikost úhlu sevřeného těmito vektory můžeme určit ze vztahu

$$|\cos \beta_2| = \frac{\mathbf{z}''_3 \cdot \mathbf{z}_3}{|\mathbf{z}''_3| \cdot |\mathbf{z}_3|} \quad (6.43)$$

Opět využijeme pro jednoznačné určení velikosti orientovaného úhlu mezi osami \mathbf{z}''_3 a \mathbf{z}_3 vlastnosti skalárního součinu $\mathbf{z}''_3 \times \mathbf{z}_3$

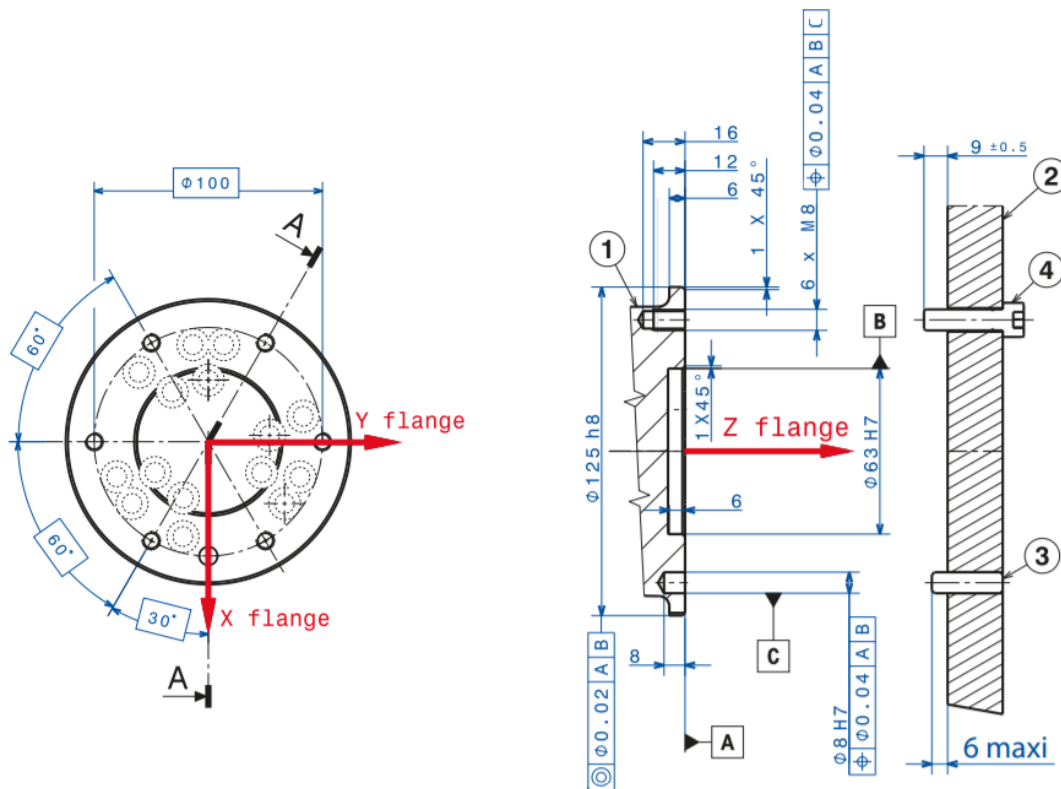
$$\frac{\mathbf{z}''_3 \times \mathbf{z}_3}{\mathbf{y}''_3} > 0 \rightarrow \beta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{z}''_3 \cdot \mathbf{z}_3}{|\mathbf{z}''_3| \cdot |\mathbf{z}_3|} \right) \quad (6.44)$$

$$\frac{\mathbf{z}''_3 \times \mathbf{z}_3}{\mathbf{y}''_3} < 0 \rightarrow \beta_2 = -\cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{z}''_3 \cdot \mathbf{z}_3}{|\mathbf{z}''_3| \cdot |\mathbf{z}_3|} \right) \quad (6.45)$$

6.3. Vyhodnocení polohy koncové příruby

Pro kompletní popis kinematické struktury robotu zbývá vyhodnotit transformaci mezi šestým a sedmým souřadným systémem (z Obr. 14). Jedná se o transformaci ze souřadného systému ležícího v ose rotace šesté kinematické dvojice do souřadného systému koncové příruby robotu. Rozdílnost vyhodnocení parametrů této transformace spočívá zejména v tom, že koncová příruba robotu není samostatnou kinematickou dvojicí. K vyhodnocení polohy koncové příruby můžeme využít pouze data naměřená rotací šestého kloubu robotu.

Souřadný systém x_7, y_7, z_7 popisující polohu koncové příruby robotu má následující vlastnosti. Osy x_7 a y_7 leží v rovině koncové příruby robotu. Tato rovina u reálného robotu nemusí být kolmá na osu rotace z_6 , proto ani osa z_7 nemusí být rovnoběžná s osou z_6 . Počátek souřadného systému bod O_7 leží ve středu koncové příruby robotu. Střed koncové příruby předpokládám na ose rotace z_6 tento předpoklad nemusí být vždy zcela splněn nicméně určení fyzického středu příruby s potřebnou přesností je problematické vzhledem ke komplexnosti tvaru koncové příruby (Obr. 23).

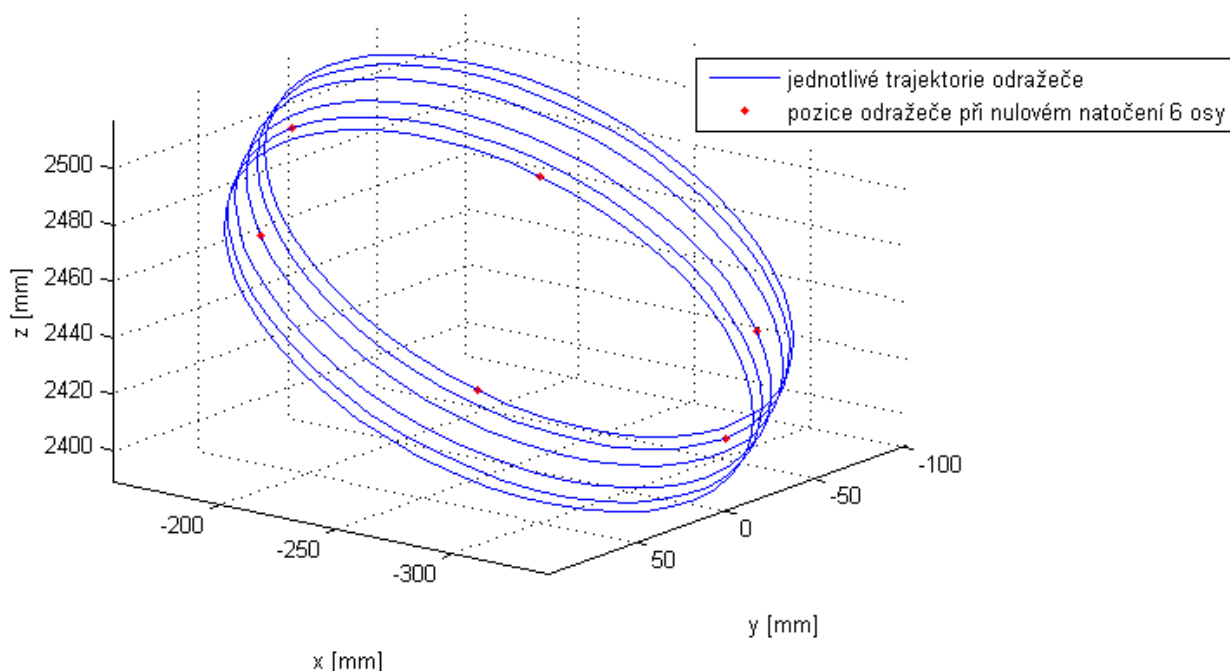


Obr. 23: Koncová příruba robotu Stäbli TX 200 [3]

Transformace mezi systémy 6 a 7 bude tedy popsána transformační maticí

$$\mathbf{T}_{67} = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\theta_6)\mathbf{T}_z(d_6)\mathbf{T}_{\varphi_x}(\alpha_6)\mathbf{T}_{\varphi_y}(\beta_6). \quad (6.46)$$

Pokud umístíme koutový odražeč do jedné pozice na koncové přírubě a provedeme rotaci. Výsledná trajektorie koutového odražeče bude kolmá k ose rotace tedy k ose \mathbf{z}_6 . Měření v jedné pozici koutového odražeče tedy není dostatečné pro zjištění natočení osy \mathbf{z}_7 vzhledem k ose \mathbf{z}_6 . Pro získání polohy roviny příruby musíme provést měření minimálně ve třech pozicích koutového odražeče. Výsledky měření ve více pozicích koutového odražeče jsou zobrazeny na (Obr. 24).



Obr. 24: Simulace pohybu koutového odražeče při různých umístěních na koncové přírubě (úhly α_6 a β_6 výrazně zvětšeny)

Z každého jednotlivého měření získáme trajektorii kolmou na osu rotace \mathbf{z}_6 , ale vinou úhlové odchylky mezi osou rotace \mathbf{z}_6 a osou kolmou na rovinu příruby \mathbf{z}_7 jednotlivé trajektorie nebudou shodné.

Metodou nejmenších čtverců můžeme zjistit rovnice roviny, ve které naměřené trajektorie leží a souřadnice středu trajektorie S_7 . Nyní vyjádříme polohu koutového odražeče při nulovém natočení šesté pohybové osy ze zjištěné rovnice roviny $b_0 + b_1x + b_2y$:

$$B = [x_{m0}; y_{m0}; b_0 + b_1x_{m0} + b_2y_{m0}] \quad (6.47)$$

, kde x_{m0}, y_{m0}, z_{m0} jsou souřadnice bodu naměřeného při nulové rotaci šesté osy. Uvedený postup umožňuje získat polohu koutového odražeče při nulovém (nebo jiném vybraném) natočení šesté osy, zmenšit vliv chyby měření na získání polohy bodu a zohlednit možné kinematické chyby šestého kloubu robotu.

Nyní můžeme množinou bodů B_i pro jednotlivé pozice koutového odražeče proložit rovinu metodou nejmenších čtverců. Získáme rovinu koncové příruby robotu. Normálový vektor nalezené roviny je hledaným směrovým vektorem osy z_7 . Parametry transformace α_6 a β_6 můžeme určit postupem, který již byl popsán pro parametry α_2 a β_2 :

$$y_7'' = z_7 \times x_6 \quad (6.48)$$

$$z_7'' = y_7'' \times x_6 \quad (6.49)$$

$$\frac{z_6 \times z_7''}{x_6} > 0 \rightarrow \alpha_6 = \cos^{-1} \left(\frac{z_6 \cdot z_7''}{|z_6| \cdot |z_7''|} \right) \quad (6.50)$$

$$\frac{z_6 \times z_7''}{x_6} < 0 \rightarrow \alpha_6 = -\cos^{-1} \left(\frac{z_6 \cdot z_7''}{|z_6| \cdot |z_7''|} \right) \quad (6.51)$$

$$\frac{z_7'' \times z_7}{y_7''} > 0 \rightarrow \beta_6 = \cos^{-1} \left(\frac{z_7'' \cdot z_7}{|z_7''| \cdot |z_7|} \right) \quad (6.52)$$

$$\frac{z_7'' \times z_7}{y_7''} < 0 \rightarrow \beta_6 = -\cos^{-1} \left(\frac{z_7'' \cdot z_7}{|z_7''| \cdot |z_7|} \right) \quad (6.53)$$

Parametr d_6 bude vzdálenost počátku O_6 a průsečíku osy z_6 s rovinou příruby. Polohu počátku souřadného systému O_7 získáme obdobou vztahů (6.32) a (6.33):

$$p_p = -\frac{z_7 \cdot O_6 - z_7 \cdot S_7}{z_7 \cdot z_6} \quad (6.54)$$

$$O_7 = O_6 + z_6 * p_p \quad (6.55)$$

$$d'_6 = \sqrt{(x_{07} - x_{06})^2 + (x_{07} - x_{06})^2 + (x_{07} - x_{06})^2} \quad (6.56)$$

Znaménko bude vždy kladné, protože nominální hodnota parametru d_6 je vždy výrazně větší než případná chyba tohoto parametru.

Dosud uvedený výpočet parametru d_6 byl založen na předpokladu, že laser tracker měří přímo polohu bodu na koncové přírubě. Ve skutečnosti je poloha naměřeného bodu vzdálena od roviny příruby robotu o vzdálenost, kterou můžeme nazvat výškou koutového odražeče. Jedná se o vzdálenost mezi rovinou, na které je koutový odražeč připevněn a bodem koutového odražeče, který je laser trackerem změřen. Rovina naměřených bodů je rovnoběžná s hledanou rovinou příruby a vzdálenost těchto rovin v kolmém směru je rovna výšce koutového odražeče v_k . S využitím známých úhlů α_6 a β_6 , které popisují natočení mezi osou \mathbf{z}_6 (na které odečítáme parametr d_6) a osou \mathbf{z}_7 která je kolmá k výšce koutového odražeče v_k můžeme hledanou hodnotu parametru d_6 vyjádřit

$$d_6 = d'_6 - v_k * \cos \alpha_6 * \cos \beta_6 \quad (6.57)$$

7. Verifikace

7.1. Simulační verifikace bez chyby měření

Pro ověření funkčnosti navrženého kalibračního algoritmu byla nejprve v simulačním programu robotu nastavena nulová chyba měření a simulačně byly provedeny potřebné kalibrační pohyby na zachybovaném robotu. Následně byla takto simulačně naměřená data vyhodnocena navrženým algoritmem kalibrace. V tabulkách (Tabulka 4, Tabulka 5) jsou zobrazeny výsledky kalibrace.

$n [-]$	$\theta_i [rad]$	$d_i [mm]$	$a_i [mm]$	$\alpha_i [rad]$
1	0	642,0538	250,04336	1,583457
2	1,570796	0	950,03426	-0,0011
3	1,570796	-0,22588	0,3578397	1,583271
4	0	800,0862	0,2769437	-1,57437
5	1,047198	0,031877	0,1349887	1,56863
6	0	193,8692	0	0,026

Tabulka 4: Hodnoty DH parametrů zachybovaného modelu

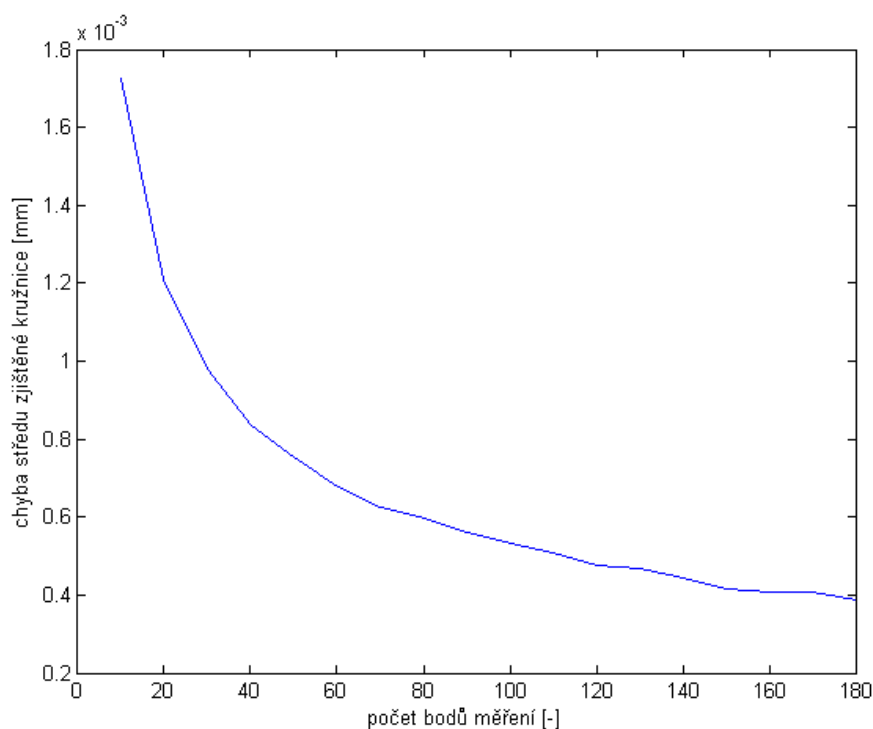
$n [-]$	$\theta_i [rad]$	$d_i [mm]$	$a_i [mm]$	$\alpha_i [rad]$
1	0	2,98E-10	1,66E-10	1,84E-14
2	1,53E-13	0	-2,93E-10	-1,52E-13
3	-2,91E-13	7,09E-12	-4,59E-11	2,44E-15
4	0	-4,91E-10	6,41E-11	1,78E-15
5	1,56E-12	-2,67E-09	1,79E-09	3,84E-14
6	0	2,08E-10	0	-5,27E-13

Tabulka 5: Chyba vyhodnocení jednotlivých DH parametrů navrženým algoritmem při nulové chybě měření

Při uvažování nulových chyb měření (se zahrnutím deformací a dalších nestacionárních chyb robotu do chyby měření) pomocí navrženého algoritmu kalibrace získáme s přesností na zaokrouhlovací chyby hledané DH parametry. Tím byla ověřena funkčnost metody pro zjištění skutečných DH parametrů.

7.2. Simulační verifikace s chybou měření

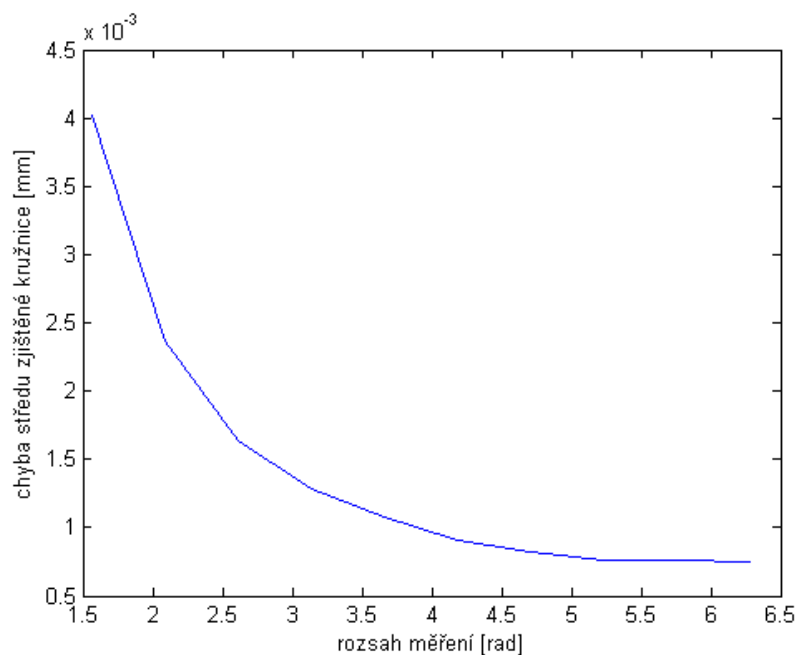
Pokud chyby měření uvažovat budeme, můžeme simulačně určit vliv jednotlivých parametrů měření na přesnost získaných výsledků. Na přesnost určení jednotlivých os pohybu bude mít vliv přesnost měření, počet měřených bodů a rozsah měření v jednotlivé pohybové ose. Ze závislosti přesnosti určení středu kružnicové trajektorie na počtu bodů měření (Graf 1)³, můžeme vidět, že s rostoucím počtem bodů měření chyba klesá.



Graf 1: Přesnost zjištění středu kružnicové trajektorie v závislosti na počtu bodů měření

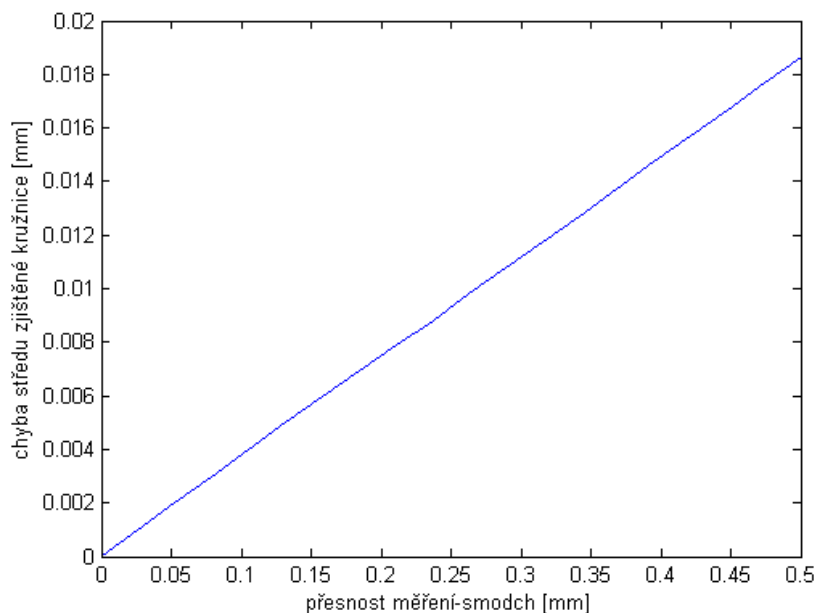
Závislost přesnosti vyhodnocení středu kružnicové trajektorie na celkovém úhlu měření j (Graf 2) ukazuje, že pro následné přesné vyhodnocení je vhodné měřit každou pohybovou osu v rozsahu větším než 180° .

³ Závislosti přesnosti určení středu kružnicové trajektorie a směrového vektoru osy této trajektorie mají stejný tvar, proto je vždy zobrazena pouze jedna z uvedených závislostí



Graf 2: Přesnost zjištění středu kružnicové trajektorie v závislosti na celkovém rozsahu měření

Závislost přesnosti vyhodnocení středu kružnicové trajektorie na přesnosti měření (Graf 3) je lineární.



Graf 3: Přesnost zjištění středu kružnicové trajektorie v závislosti na přesnosti měření

Reálné měření je vždy zatíženo chybou. Ze závislostí uvedených výše je možné stanovit doporučené parametry měření. Měření jedné pohybové osy je vhodné realizovat měřením cca 50 - 80 bodů v úhlovém rozsahu alespoň 225° .

8. Závěr

Hlavním cílem diplomové práce byl návrh a simulační ověření kalibrace robotu pomocí identifikace jednotlivých os rotace kloubů robotu s využitím laser trackeru.

Diplomová práce obsahuje ve svém úvodu rešerši v oblasti kalibrace průmyslových robotů, popis Denavit-Hartenbergovy maticové metody pro popis kinematické struktury mechanismů a popis funkce laser trackeru.

V praktické části diplomové práce byl vytvořen simulační model průmyslového robotu Staubli TX200. Simulační model zahrnuje chyby kinematiky robotu a je doplněn o chyby měření laser trackerem.

Hlavní část diplomové práce je věnována popisu metody kalibrace průmyslového robotu založené na postupné identifikaci polohy os jednotlivých kloubů v prostoru. Měření probíhá samostatnou rotací každého ramene s koutovým odražečem umístěným na koncové přírubě. Byl navržen postup zpracování naměřených dat, který zahrnuje vyhodnocení polohy os rotací jednotlivých kloubů a následný výpočet přesných rozměrů robotu.

V závěru diplomové práce jsou uvedeny výsledky simulační verifikace uvedené metody kalibrace, kde byla ověřena její funkčnost. Navíc díky implementaci simulačního modelu laser trackeru s uvažováním chyby měření byla stanovena doporučení pro experimentální kalibraci reálného robotu.

Seznamy

Použitá literatura

- [1] SKAŘUPA, Jiří. *Průmyslové roboty a manipulátory*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, [2007]. ISBN 978-80-248-1522-0.
- [2] TALÁCKO, Jaroslav. *Automatizace výrobních zařízení*. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000. ISBN 80-010-2160-2.
- [3] STÄUBLI INTERNATIONAL AG. *TX 200* [online]. 2017 [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://www.staubli.com/en/file/5258.show>
- [4] ABB. *IRB 910SC SCARA* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://new.abb.com/products/robotics/cs/prumyslove-roboty/irb-910sc>
- [5] IFR INTERNATIONAL FEDERATION OF ROBOTICS. *Industrial robots - definition and classification* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://ifr.org/img/office/Industrial Robots 2016 Chapter 1 2.pdf>
- [6] FANUC. *M-3 iA /12H* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://www.fanuc.eu/cz/cs/roboty/str%C3%A1nka-filtru-robot%C5%AF/%C5%99ada-m3/m-3ia-12h>
- [7] STROJNÍCKA FAKULTA TU V KOŠICIACH. *Automatizačná a robotická technika* [online]. Košice, 2011 [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: http://www.sjf.tuke.sk/vitralab/files/vystupy/prirucka_sk_final.pdf
- [8] BLECHA, Petr, Zdeněk KOLÍBAL, Radek KNOFLÍČEK, Aleš POCHYLÝ, Tomáš KUBELA, Radim BLECHA a Tomáš BŘEZINA. *Mechatronika Modul 10: Robotika* [online]. [cit. 2018-06-25]. EU – Projekt č. DE/08/LLP-LdV/TOI/147110. Dostupné z: <http://docplayer.cz/8054951-Mechatronika-modul-10-robotika.html>
- [9] An Overview of Robot Calibration. *Information Technology Journal*. **2004**, 74-78. ISSN 1682-6027. Dostupné také z: https://www.researchgate.net/profile/Bahram_Ravani/publication/224729865_An_Overview_of_Robot_Calibration/links/54b803df0cf28faced61c61d.pdf

- [10] *Accuracy in positioning systems* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://pdfs.semanticscholar.org/7bb3/b57aed62dd59f5877b8655a3a67e46cade1e.pdf>
- [11] FANUC. *R-2000iC/165F* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://www.fanuc.eu/cz/cs/roboty/str%C3%A1nka-filtru-robot%C5%AF/%C5%99ada-r-2000/r-2000ic-165f>
- [12] KUKA *KR 150 R2700 Extra* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://www.robots.com/robots/kuka-kr-150-r2700-extra>
- [13] ABB. *IRB 6620* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://new.abb.com/products/robotics/cs/prumyslove-roboty/irb-6620>
- [14] ŠIKA, Zbyněk et al. Calibrability as additional design criterion of parallel kinematic machines. *Elsevier*. 2012, (50), 48-63. ISSN 0094-114X.
- [15] LASERTEX CO. LTD. *The rules of laser displacement measurements* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://lasertex.eu/the-rules-of-laser-displacement-measurements/>
- [16] *5 LASER TRACKER WARM-UP TIPS FOR IDEAL MEASUREMENT CONDITIONS* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <http://www.builditsoftware.com/2015/03/5-laser-tracker-warm-tips-ideal-measurement-conditions/>
- [17] BRIDGES, Bob. *How Laser Trackers Work* [online]. 2009 [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: <https://www.qualitydigest.com/inside/twitter-ed/how-laser-trackers-work.html>
- [18] STEJSKAL, Vladimír. a Michael. VALÁŠEK. *Kinematics and dynamics of machinery*. New York: M. Dekker, 1996. Mechanical engineering (Marcel Dekker, Inc.), 106. ISBN 08-247-9731-0.
- [19] GREPL, Robert. *Kinematika a dynamika mechatronických systémů*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3530-8.
- [20] *Inverse kinematics* [online]. [cit. 2018-06-25]. Dostupné z: https://trmm.net/Inverse_kinematics
-

- [21] RAGHAVAN, M. a B. ROTH. Inverse Kinematics of the General 6R Manipulator and Related Linkages. *Journal of Mechanical Design*. 1993, (115), s. 502-08. ISSN 10500472. Dostupné také z:
<http://MechanicalDesign.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1443664>
- [22] SVÁČEK, Petr. *Poznámky k přednáškám z předmětu Numerická matematika* [online]. 2017 [cit. 2018-06-25]. Dostupné z:
http://marian.fsik.cvut.cz/~svacek/numericka_matematika/pdf/lecture_notes.pdf
- [23] ŘÍHOVÁ, Helena. *Vzdálenosti* [online]. 2006 [cit. 2018-06-25]. Dostupné z:
<http://dagles.klenot.cz/rihova/vzdalenosti.pdf>

Seznam obrázků

Obr. 1: Drátový model angulární (úhlové) kinematické struktury [1].....	13
Obr. 2: Angulární robot Staubli TX 200 [3]	13
Obr. 3: Drátový model kinematické struktury SCARA [1]	13
Obr. 4: Kinematická struktura SCARA [4]	13
Obr. 5: Kartézská kinematická struktura [1]	14
Obr. 6: Kartézský robot [5]	14
Obr. 7: Robot s paralelní kinematikou FANUC M-3 iA/12 [6]	14
Obr. 8: Tech-pendanty (Fanuc, ABB, Staubli).....	15
Obr. 9: Znázornění přesnosti a opakovatelnosti [10].....	17
Obr. 10: Princip funkce interferometru [15]	20
Obr. 11: Měření laser trackerem [16]	21
Obr. 12: Zavedení souřadných systémů	24
Obr. 13: Obecný otevřený kinematický řetězec s n stupni volnosti [20]	26
Obr. 14: Zavedení souřadných systémů v kinematické struktuře robotu Stäubli TX200 [3] ...	36
Obr. 15: Simulovaný pohyb robotu a měření (pro přehlednost chyby výrazně zvětšeny)	41
Obr. 16: Vyhodnocení osy kinematické dvojice s použitím rovnice kulové plochy	46
Obr. 17: Vyhodnocení roviny	48
Obr. 18: Naměřené body zobrazené v novém souřadném systému	48

Obr. 19: Nalezení středu kružnice ve vyhodnocené rovině	49
Obr. 20: Hodnoty přičítané k nominálním hodnotám DH parametrů u kalibrovaného robotu Stäubli TX 90.....	53
Obr. 21: Souřadné systémy při vyhodnocení druhé a třetí osy (odchylky os od rovnoběžnosti výrazně zvětšeny)	54
Obr. 22: Postupné rotace souřadného systému o úhly α_2 a β_2	55
Obr. 23: Koncová příruba robotu Stäubli TX 200 [3]	57
Obr. 24: Simulace pohybu koutového odražeče při různých umístěních na koncové přírubě (úhly α_6 a β_6 výrazně zvětšeny)	58

Seznam tabulek

Tabulka 1: Dosahované přesnosti a opakovatelnosti robotů [11][12][13][3]	18
Tabulka 2: DH parametry pro robot Stäubli TX 200	37
Tabulka 3: Nahrazení změny proměnných ve vztazích cyklickou záměnou naměřených souřadnic.....	44
Tabulka 4: Hodnoty DH parametrů zachybovaného modelu.....	61
Tabulka 5: Chyba vyhodnocení jednotlivých DH parametrů navrženým algoritmem při nulové chybě měření.....	61

Seznam grafů

Graf 1: Přesnost zjištění středu kružnicové trajektorie v závislosti na počtu bodů měření	62
Graf 2: Přesnost zjištění středu kružnicové trajektorie v závislosti na celkovém rozsahu měření	63
Graf 3: Přesnost zjištění středu kružnicové trajektorie v závislosti na přesnosti měření	63

Použitý Software

MATLAB R2013b

Microsoft Office

Paint.net 4.0.9

Seznam Příloh

Textové

Popis souborů zdrojového kódu

Elektronické

analiza_experiment.m

inv_kin.m

koule.m

kruz_kulpl.m

kruz_transf.m

pr_kin_DH.m

rce.m

rovina.m

sim_1osa.m

sim_mereni.m

Tfix.m

Tfiy.m

Tfiz.m

Tx.m

Ty.m

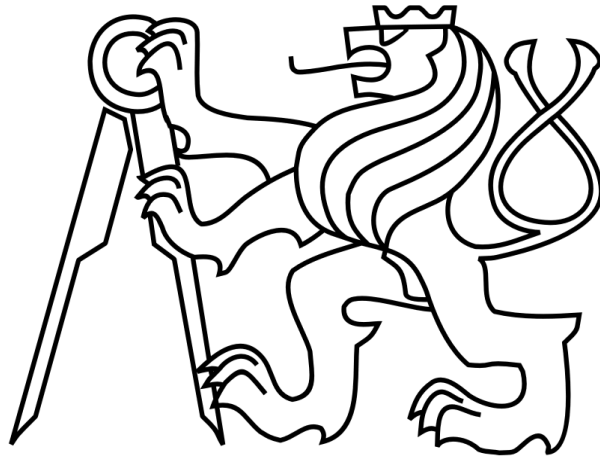
Tz.m

Vyhodnoceni.m

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

Ústav výrobních strojů a zařízení



Diplomová práce

Kalibrace robotu laser trackerem

Přílohy

Popis souborů zdrojového kódu

- **pr_kin_DH.m**

Slouží ke generování požadované polohy a orientace koncového bodu robotu pro **inv_kin.m**. Obsahuje řešení přímé kinematiky robotu. Výslednou polohu a orientaci ukládá ve formě transformačních matic v jednotlivých bodech pohybu.

- **inv_kin.m**

Řeší úlohu inverzní kinematiky robotu pro polohu a orientaci koncového efektoru zadanou pomocí transformačních matic v jednotlivých bodech požadované trajektorie.

- **sim_1osa.m**

Simulační model robotu včetně simulace chyb měření. Slouží pro vygenerování naměřených dat pro pohyb jednou osu s možností ověření vyhodnoceného výsledku. Ukládá naměřené souřadnice bodů a popis osy rotace pro ověření v podobě bod+ směrový vektor.

- **kruz_kulpl.m**

Vyhodnocení polohy jedné osy pohybu s využitím rovnice kulové plochy podle kapitoly 6.1.1. Využívá data vytvořená **sim_1osa.m**. Vypočte rozdíl hledaných a zjištěných hodnot středu kružnice a směrového vektoru osy kružnice.

- **kruz_trans.m**

Vyhodnocení polohy jedné osy pohybu s využitím transformace do roviny kružnicové trajektorie podle kapitoly 6.1.2. Využívá data vytvořená **sim_1osa.m**. Vypočte rozdíl hledaných a zjištěných hodnot středu kružnice a směrového vektoru osy kružnice.

- **sim_mereni.m**

Simulační model robotu včetně simulace chyb měření. Zahrnuje model přímé kinematiky robotu doplněný o chyby robotu. Simuluje postupné měření všech os pohybu. Ukládá naměřené souřadnice bodů a hodnoty DH parametrů pro porovnání s vyhodnocenými. Umožňuje kromě jiného nastavit velikost chyby měření.

- **vyhodnoceni.m**

Kompletní vyhodnocení DH parametrů ze souřadnic naměřených bodů podle kapitoly 6. Využívá data vytvořená **sim_mereni.m**. Nejdříve z naměřených bodů určí polohu os rotace. Následně z poloh os rotace vypočte hodnoty DH parametrů. Do proměnné DHn uloží DH parametry zjištěné algoritmem kalibrace. Na závěr je do proměnné DHer vypočten rozdíl skutečných a vyhodnocených DH parametrů.

- **analyza_experiment.m**

Zdrojový kód připravený pro vyhodnocení reálného měření. Postup vyhodnocení je následující:

- 1) Naměřená data pro jednotlivé osy ukládáme v podobě matic

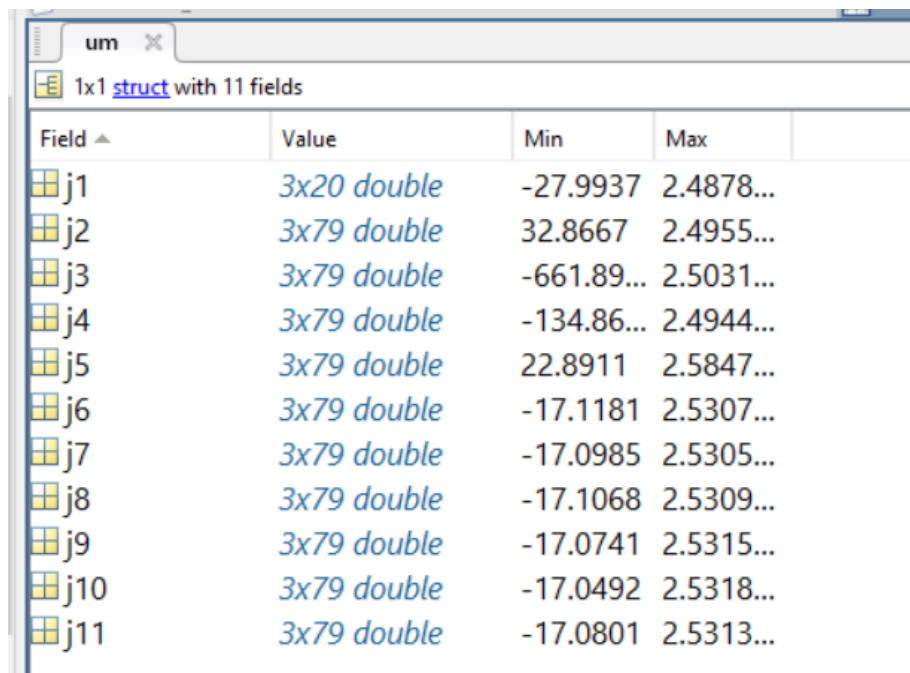
X ₁	X ₂	X ₃	...
Y ₁	Y ₂	Y ₃	...
Z ₁	Z ₂	Z ₃	...

- 2) Naměřené soubory dat pro jednotlivé osy uložíme jako datový typ struct do proměnné *um*

```
um=struct('j1',um(:, :, 1)|,'j2',um(:, :, 2), 'j3',um(:, :, 3), 'j4',um(:, :, 4) )
```

 matice s daty pro měření jedné pohybové osy

Výsledkem je datový typ struct, který obsahuje pod proměnnými *j1 – jn* matice dat naměřených pro jednotlivé osy. Měření osy 6 pro různé polohy koutového odražeče jsou uložena jako *j6 – jn*. Počty naměřených bodů pro jednotlivé osy se mohou lišit.



Field	Value	Min	Max
j1	3x20 double	-27.9937	2.4878...
j2	3x79 double	32.8667	2.4955...
j3	3x79 double	-661.89...	2.5031...
j4	3x79 double	-134.86...	2.4944...
j5	3x79 double	22.8911	2.5847...
j6	3x79 double	-17.1181	2.5307...
j7	3x79 double	-17.0985	2.5305...
j8	3x79 double	-17.1068	2.5309...
j9	3x79 double	-17.0741	2.5315...
j10	3x79 double	-17.0492	2.5318...
j11	3x79 double	-17.0801	2.5313...

Takto vytvořenou proměnnou *um* uložíme do souboru *data_ex.mat*

```
savefile = 'data_ex.mat';
save(savefile, 'um');
```

3) Ve vyhodnocovacím souboru *analiza_experiment.m* upravíme počet měření (počet proměnných *j_n*) na řádku 6

```
5 % !!! Zde upravit
6 - k=11; %počet měřených kružnic
```

4) Spustíme soubor *analiza_experiment.m*. Hodnoty vyhodnocených DH parametrů se uloží do proměnné *DHn*. Vykreslí se vyhodnocené polohy pohybových os.

5) Upravíme proměnnou *on*, která po řádcích obsahuje souřadnice směrových vektorů os pohybu, tak aby vektory měly směr odpovídající kladným směrům *os_{z_i}*. Úpravu provedeme přidáním/odebráním znaménka – na řádcích 263-269.

```
263 - on=[-on(1, :)
264         on(2, :)
265         on(3, :)
266        -on(4, :)
267         on(5, :)
268         on(6, :)
269        -on(7, :)];
```

Po úpravě získáme v proměnné DHn hodnoty DH parametrů odpovídající definici.

- **ostatní**

Soubory typu function slouží při běhu ostatních výše uvedených souborů.