

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

ZTRÁTA STABILITY LAMINÁTOVÝCH DESEK
BUCKLING OF COMPOSITE PLATES

2018

ONDŘEJ STUDNIČNÝ

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Studničný** Jméno: **Ondřej** Osobní číslo: **458494**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojího inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Ztráta stability laminátových desek

Název bakalářské práce anglicky:

Buckling of Composites Plates

Pokyny pro vypracování:

Pomocí klasické laminátové teorie vyřešte kritickou sílu pro ztrátu stability zadaných případů kompozitových desek a porovnejte mezi sebou

Seznam doporučené literatury:

- [1] Gibson, R., F.: Principles of Composite Materials Mechanics, CRC Press, Boca Raton, 2012.
- [2] Whitney, J., M.: Effects of Constituent Material Properties on the Stability of Fiber Reinforced Composite Plates.
- [3] Buragohain, M., J.: Composite Structures - Design, Manufacturing and Testing, CRC Press, Boca Raton, 2017.
- [4] Kassapoglou Ch.: Design and Analysis of Composite Structures with Applications to Aerospace Industry, John Wiley and Sons, Chichester, 2013.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Bc. Zdeněk Padovec, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **19.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Bc. Zdeněk Padovec, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

30/4/2018
Datum převzetí zadání

Studničný
Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Ondřej Studničný
Název bakalářské práce:	Ztráta stability laminátových desek
Název bakalářské práce anglicky:	Buckling of Composite Plates
Akademický rok:	2017/2018
Studijní program:	Teoretický základ strojího inženýrství
Obor studia:	Bez oboru
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí bakalářské práce:	Ing. Bc. Zdeněk Padovec , Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 48 Počet obrázků: 24 Počet grafů: 5
Klíčová slova:	Kompozit, jednosměrný laminát, symetrický laminát, ztráta stability, laminátová teorie
Keywords:	Composite, unidirectional composite, symmetric laminate, buckling of laminated plates, lamination theory
Abstrakt:	Tato práce je založena na odvození kritické síly pro ztrátu stability laminátových desek a porovnání parametru ztráty stability u jednosměrného laminátu se symetrickým kompozitem v závislosti na objemovém podílu vláken.
Abstract:	This thesis is based on derivation of buckling of laminated plates and comparing buckling parameter between unidirectional composite and symmetric laminate depending on the volumetric fiber content.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím konzultací s vedoucím bakalářské práce a literatury v přiloženém seznamu.

V Praze dne:

.....

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Bc. Zdeňku Padovcovi, PhD. za vedení při práci na bakalářské práci, za cenné rady, důležité připomínky a v neposlední řadě za čas a trpělivost.

Dále bych chtěl poděkovat mojí přítelkyni, rodině a přátelům, kteří mě podporovali po celou dobu studia na vysoké škole.

Obsah

Seznam použitých veličin.....	8
Seznam obrázků	9
Seznam tabulek	10
Seznam grafů.....	11
Úvod.....	12
1. Kompozitní materiály	13
1.1 Definice kompozitních materiálů	13
2. Laminát	15
2.1 Kompozitní vlákna	15
2.1.1 Skleněná vlákna.....	16
2.1.2 Aramidová vlákna	17
2.1.3 Uhlíková vlákna	18
2.1.4 Keramická vlákna.....	18
2.1.5 Přírodní vlákna	19
2.2 Kompozitní matrice	19
2.2.1 Polymerní matrice	19
2.2.2 Kovové matrice	20
2.2.3 Keramické matrice	20
2.3 Výroba laminátu	21
2.3.1 Kontaktní laminace	21
2.3.2 Prepreg	21
2.3.3 Technologie RTM	21
2.3.4 Technologie RFI.....	21
2.3.5 Technologie VIP	22
2.4 Ztráta stability laminátových desek.....	23
3. Směšovací pravidlo	23
3.1 Modul pružnosti v podélném směru	24
3.2 Modul pružnosti v příčném směru.....	25
4. Klasická laminátová teorie.....	26

4.1	Základní rovnice laminátové desky [2]	27
4.2	Globální matice tuhostí.....	30
4.3	Způsoby skládání vrstev laminátu	32
4.3.1	Symetrické lamináty.....	32
4.3.2	Symetrické křížově vrstvené lamináty	33
5.	Ztráta stability laminátových desek	34
5.1	Řešení rovnic ztráty stability pro symetrické lamináty	37
6.	Porovnání kritické síly pro ztrátu stability u jednosměrného a symetrického laminátu ...	38
6.1	Zadání příkladu.....	38
6.1.1	Jednosměrný kompozit.....	38
6.1.2	Symetricky křížově vrstvený laminát.....	39
6.2	Nalezení kritické síly pro ztrátu stability pomocí klasické laminátové teorie.....	39
6.3	Porovnání kritické síly pro ztrátu stability	41
6.3.1	Porovnání jednosměrného a symetricky křížově vrstveného laminátu	41
6.3.2	Porovnání parametru ztráty stability u kompozitů s rozdílnými vlákny	43
7.	Závěr	46
	Zdroje	47

Seznam použitých veličin

symbol	jednotka	název
E	[Pa]	modul pružnosti
μ	[-]	Poissonovo číslo
G	[Pa]	smykový modul pružnosti
ρ	[kg·m ⁻³]	hustota
v	[m ³]	objem
ε	[-]	poměrné prodloužení
A	[m ²]	plocha
F	[N]	síla
σ	[Pa]	napětí
h	[m]	tloušťka
u	[m]	posuv v ose x
v	[m]	posuv v ose y
w	[m]	posuv v ose z
ψ	[-]	sklon střední roviny
γ	[-]	zkosení
k	[m ⁻¹]	křivost desky
Q	[Pa]	matice mimoosové tuhosti
N	[N·m ⁻¹]	síla na jednotku délky
M	[N]	moment na jednotku délky
A	[N·m ⁻¹]	matice tahové tuhosti
B	[N]	matice vazební tuhosti
D	[N·m]	matice ohybové tuhosti
X	[N·m ⁻¹]	parametr ztráty stability
N_{cr}	[N·m ⁻¹]	kritická síla pro ztrátu stability
Φ	[-]	natočení vláken
C	[Pa]	matice tuhosti
M	[N·m]	moment

Seznam obrázků

Obr. 1.1 Základní rozdělení kompozitů [2].....	13
Obr. 1.2. Závislost meze pevnosti v tahu na úhlu orientace vlákna v kompozitu [6]	14
Obr. 1.3 Rozdělení vláknových kompozitů dle orientace a délky vláken: a) jednosměrná dlouhá vlákna, b) jednosměrná krátká vlákna, c) dvousměrné vyztužení, d) vícesměrné vyztužení, e) náhodná orientace vláken, f) náhodná orientace krátkých vláken [4].....	14
Obr. 1.4 Skeletový kompozitní materiál [4].....	15
Obr. 2.1 Vliv průměru skleněného vlákna na výsledné meze pevnosti [6]	16
Obr. 2.2 Technologie výroby skleněných vláken [7]	17
Obr. 2.3 Výroba aramidových vláken [6]	18
Obr. 2.4 Porovnání modulu pružnosti a meze pevnosti v tahu u základních uhlíkových vláken [6]	18
Obr. 2.5 Schéma ručního kladení [13]	21
Obr. 2.6 Schéma RFI technologie [14]	22
Obr. 2.7 Schéma VIP technologie [7]	22
Obr. 2.8 Deska, která ztratila stabilitu po smykové zatížení [20]	23
Obr. 3.1 Jednosměrný kompozit v souřadnicovém systému 0 (L, T) [2].....	24
Obr. 4.1 Symetrický laminát [2].....	26
Obr. 4.2 Nesymetrický laminát [2].....	26
Obr. 4.3 Laminát před a po deformaci [2].....	27
Obr. 4.4 Znázornění výsledných sil a momentů [2].....	29
Obr. 4.5 Nespojité zatížení laminátu [2]	29
Obr. 4.6 Laminát, složený z n vrstev [2]	30
Obr. 4.7 Symetrický laminát [2].....	32
Obr. 4.8 Symetrické křížově vrstvené lamináty [2]	33
Obr. 5.1 Obdélníková deska zatížená tlakovými a smykovými silami [21]	34
Obr. 6.1 Jednosměrný kompozit	38
Obr. 6.2 Symetricky řížově vrstvený laminát	39

Seznam tabulek

Tab. 1 Výhody a nevýhody kompozitů [6]	15
Tab. 2 Důležité vlastnosti daných typů vláken [6]	16
Tab. 3 Chemické složení daných sklovin [6]	16
Tab. 4 Porovnání vlastností různých aramidových vláken [9]	17
Tab. 5 Porovnání některých vlastností ve směru vláken a kolmo na vlákna [6]	17
Tab. 6 Porovnání vlastností skleněných a přírodních vláken [6]	19
Tab. 7 Porovnání termoplastických a reaktoplastických matric [6]	20

Seznam grafů

Graf 1 Porovnání jednosměrného a symetrického laminátu se stejným složením, epoxid matrice/E sklo [19].....	42
Graf 2 Porovnání jednosměrného a symetrického laminátu se stejným složením, epoxid matrice/T600 [19].....	42
Graf 3 Porovnání jednosměrných kompozitů s rozdílnými vlákny [19].....	43
Graf 4 Porovnání symetrických kompozitů s rozdílnými vlákny [19].....	44
Graf 5 Porovnání jednosměrných a symetrických kompozitů s rozdílnými vlákny [19].....	44

Úvod

V dnešní době jsou požadavky na nové nekonvenční materiály, které by v určitých případech překonaly stávající materiály. Jedním z těchto typů nových materiálů, které postupně nahrazují konvenční materiály, jsou kompozity. Jejich vlastnosti, například vysoká pevnost při relativně nízké hmotnosti, v mnoha aspektech překonávají stávající materiály a otevírají tím nové možnosti materiálového inženýrství. Jejich nespornou výhodou je velká variabilita, té můžeme docílit výběrem vhodného materiálu a správným poskládáním vrstev a vyrobí tak kompozity, které lépe odpovídají nárokům na konstrukci a tím ji zefektivní. Z tohoto důvodu mají kompozity širokou škálu využití v automobilovém, leteckém, vesmírném, či sportovním průmyslu.

Při práci s kompozity je zapotřebí věnovat velkou pozornost výpočtům. Kvůli tomu je důležitá znalost mechaniky kompozitních materiálů, aby numerické simulace co nejpřesněji napodobily realitu a nedocházelo k žádným nehodám.

Tato práce pojednává o jevu zvaném ztráta stability laminátových desek. Je zde vysvětleno, kdy dochází ke ztrátě stability a jak spočítat kritickou sílu pro ztrátu stability a jak je tento výpočet ovlivněn určitou skladbou vrstev. Dále je zde porovnání dvou typů kompozitových desek.

1. Kompozitní materiály

Úvodem si probereme obecnou problematiku kompozitních materiálů neboli kompozitů. V této části si určíme základní rozdělení kompozitních materiálů, jejich druhy a jejich rozřazení.

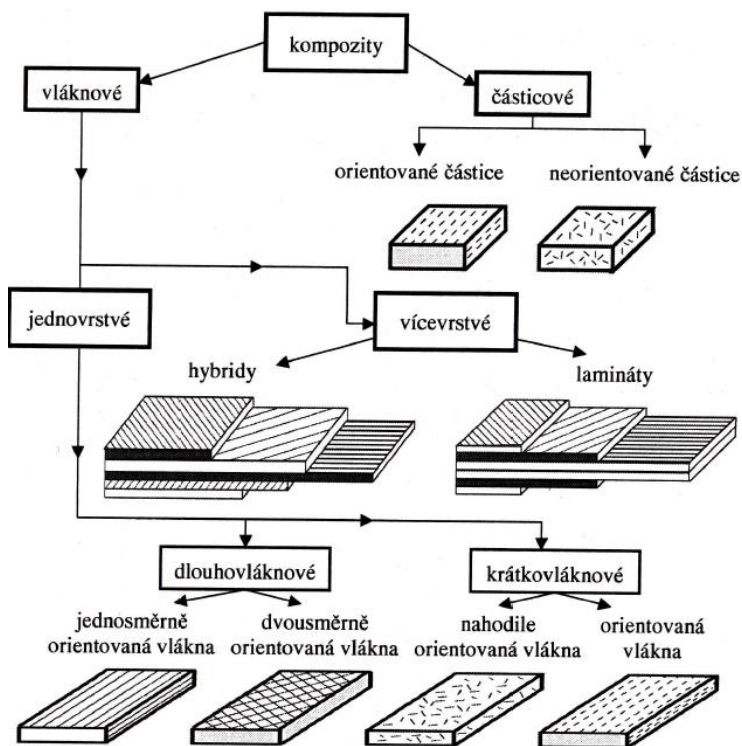
1.1 Definice kompozitních materiálů

Kompozit lze definovat jako materiál sestavený nejméně ze dvou různých složek, které se vzájemně liší svými mechanickými, fyzikálními a chemickými vlastnostmi.

Kompozit je obvykle tvořen jednou spojitou fází, tzv. maticí a nejméně jednou diskontinuální fází, tzv. vyztužením (armatura) [1]. Spojitá fáze je ve většině případů výrazně poddajnější a zastává funkci pojiva vyztuže. Vyztuž je obvykle tvrdší, tužší a pevnější nespojitá složka kompozitu. Pro zařazení materiálu mezi kompozitní materiály musí být splněny určité podmínky, a to konkrétně minimální množství vyztuže (alespoň 5%), zřetelné rozlišení vlastností matrice a vyztuže a nezbytnost přípravy mísením složek [3, 23].

Signifikantní výhodou kompozitních materiálů je variabilita výsledných vlastností kompozitu. Variabilita je způsobena změnou objemového podílu složek, orientací vláken vůči matici a složením několika rozdílně orientovaných vláknových kompozitů, tzv. lamin [2]. Ukázkovou charakteristikou kompozitů je tzv. synergismus - výsledné vlastnosti kompozitu jsou lepší, než by odpovídalo pouhým součtem daných vlastností u jednotlivých složek [5]. Dalším významným prvkem kompozitu je redukce negativních vlastností různých složek v rámci celého kompozitu.

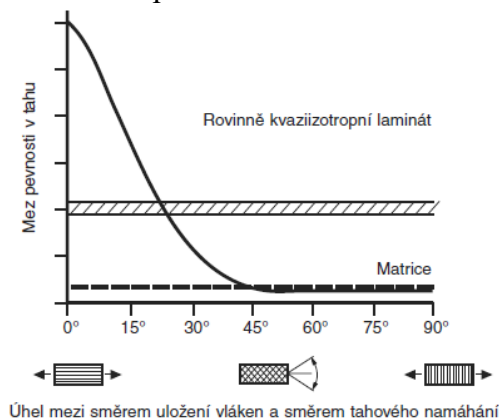
Kompozity můžeme rozdělit na základě geometrie vyztužení na vláknové, částicové a skeletové [4].



Obr. 1.1 Základní rozdělení kompozitů [2]

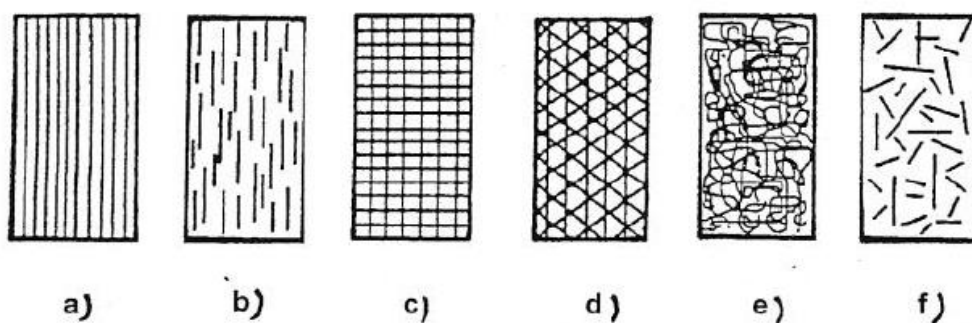
Částicové kompozity obsahují částice různých tvarů, které nejsou příliš dlouhé. Tyto částice mohou mít tvar koule, kvádrů, krychle nebo mohou být nepravidelné. U tohoto typu se využívá především ke zlepšení mechanických vlastností, například chemické, či tepelné odolnosti, úprava tepelné a elektrické vodivosti, snížení koeficientu tření nebo zvýšení tvrdosti. Orientace částic v kompozitu závisí na požadovaných výsledných vlastnostech; mohou být orientovány náhodně nebo mít přednostní orientaci.

Vláknové kompozity používají jako výztuž vlákna. Podle poměru průměru vůči délce vlákna se kompozity rozdělují na krátkovláknové a dlouhovláknové. Podle množství vrstev se kompozity rozdělují na jednovrstvé a vícevrstvé. Orientace vláken zásadně ovlivňuje mechanické vlastnosti výsledného kompozitu.



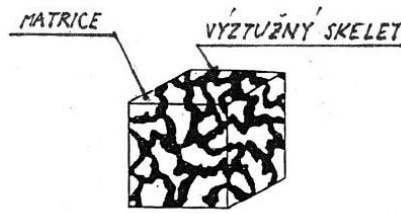
Obr. 1.2. Závislost meze pevnosti v tahu na úhlu orientace vláken v kompozitu [6]

Důležitým pojmem u vláknových kompozitů je tzv. lamina, což je tenký kompozit s jednosměrně orientovanými vlákny. Při spojení více vrstev různě orientovaných lamin, které jsou ze stejných materiálů, vzniká laminát. V případě vícevrstevných různě orientovaných lamin z jiného materiálu vzniká hybridní laminát [3, 23].



Obr. 1.3 Rozdělení vláknových kompozitů dle orientace a délky vláken: a) jednosměrná dlouhá vlákna, b) jednosměrná krátká vlákna, c) dvousměrné vyztužení, d) vicesměrné vyztužení, e) náhodná orientace vláken, f) náhodná orientace krátkých vláken [4]

Skeletový kompozitní materiál obsahuje pórovitou matici prostoupenou souvislým nosným skeletem [4].



Obr. 1.4 Skeletový kompozitní materiál [4].

Výhody a nevýhody kompozitních materiálů jsou uvedeny v Tab. 1.

Výhody	Nevýhody
Velká pružnost při deformaci	Nízká mez v tahu v příčném směru vláken
Velká pevnost a tuhost, která je přizpůsobitelná směru namáhání	Komplikované nedestruktivní zkoušky materiálu
Nízká hmotnost	Náročný konstrukční návrh
Odolnost vůči dynamickému namáhání	Ztížené rozpoznávání místního poškození
Malá teplotní roztažnost	Nízká odolnost vůči vlhkosti
Velká variabilita kombinací vláken a matrice	Specifické vlastnosti materiálu a technologie výroby
Tepelná, chemická odolnost, odolnost proti korozi	Absence standartního kompozitu

Tab. 1 Výhody a nevýhody kompozitů [6]

2. Laminát

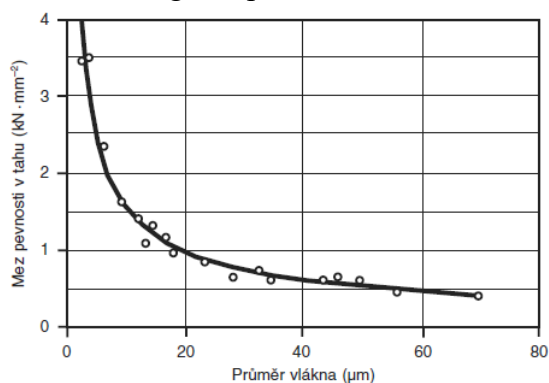
Jak již bylo výše uvedeno, laminát vzniká spojením většího množství lamin, které mají různě orientovaná vlákna. Při následujících výpočtech budeme pracovat se spojovacími mezivrstvami, které jsou nekonečně tenké a odolné proti smyku, tj. tyto mezivrstvy budou schopné přenést deformace jedné vrstvy na vrstvu sousední. Při zatížení v rovině bude zajištěna stejná deformace všech vrstev laminátu.

Možností při skládání jednotlivých vrstev na sebe je mnoho, ale je doporučeno respektovat určitá pravidla. Jedním z nich je vytvořit laminát, který bude symetrický vzhledem ke střední rovině. Dalším pravidlem je mít u lamin ze stejného nebo podobného materiálu podobnou tloušťku a uložit tyto laminy souměrně k rovině symetrie. Dále je nutné uložit dostatečné množství vrstev do směru největších namáhání [4, 23].

2.1 Kompozitní vlákna

Vlákna představují nosný prvek kompozitního materiálu. Pevnost v tahu je výrazně nižší v kompaktní formě než ve formě vláken, tzv. Griffithův paradox. Z tohoto důvodu je snaha

vyrábět vlákna o průměru cca 14 μm . Při menším průměru je nebezpečí proniknutí vláken do plic, kde by mohly způsobovat karcinogenní potíže.



Obr. 2.1 Vliv průměru skleněného vlákna na výsledné mezi pevnosti [6]

2.1.1 Skleněná vlákna

Celým názvem *textilní skleněná vlákna* je společný název pro vlákna tažená z roztavené skloviny při pravidelném kruhovém průřezu. Tyto vlákna jsou amorfní a předpokládá se, že vlastnosti v příčném a podélném směru jsou shodné. Pevnost je zásadně ovlivněna kvalitou a strukturou povrchu. Například při nasáknutí vzdušné vlhkosti se mez pevnosti snižuje až o 50 % [4, 6].

Sklovina	E	R nebo S	C	ECR	AR
Hustota ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	2,6	2,53	2,52	2,72	2,68
Mez pevnosti v tahu *) ($\text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$)	3400	4400	2400	3440	3000
E-modul ($\text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$)	73000	86000	70000	73000	73000
Poměrné prodloužení při přetržení *) (%)	< 4,8	< 4,6	< 4,8	< 4,8	< 4,4
Součinitel teplotné roztažnosti (K^{-1})	$5,0 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$	$6,3 \cdot 10^{-6}$	$5,9 \cdot 10^{-6}$	$6,5 \cdot 10^{-6}$
Teplota měknutí ($^{\circ}\text{C}$)	850	980	750	880	770

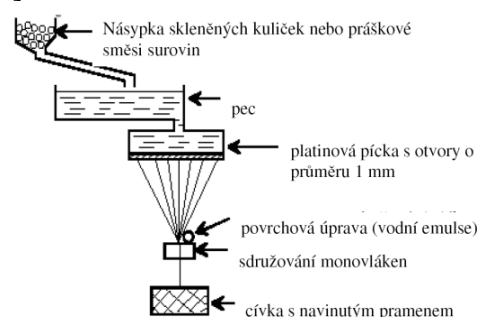
Tab. 2 Důležité vlastnosti daných typů vláken [6]

Nejpoužívanějším typem je E-sklovina, která je skvělým elektrickým izolantem a má vysokou prostupnost záření. Tento typ se využívá až v 90 % případů. Sklovina, která má větší obsah SiO_2 , MgO a Al_2O_3 se nazývá ve Spojených státech S-sklovina, v Evropě R-sklovina a v Japonsku T-sklovina. Tato sklovina má vyšší pevnost (až o 70%) a tuhost. Při požadavcích na vysokou odolnost proti kyselinám a proti chemicky agresivním látkám se používá C-sklovina. Pro vyztužení betonu se používají bezalkalické AR-vlákna.

Sklovina	E	R nebo S	C	ECR	AR
Složení (%)					
SiO_2	54	60	60 až 65	54 až 62	62
Al_2O_3	14 až 15	25	2 až 6	12 až 13	–
CaO	–	14	14	21	5 až 9
MgO	20 až 24	3	1 až 3	4,5	1 až 4
B_2O_3	6 až 9	< 1	2 až 7	< 0,1	< 0,5
K_2O	< 1	< 1	8	0,6	ZrO_2 ; 17
Na_2O	–	–	–	–	12 až 15

Tab. 3 Chemické složení daných sklovin [6]

Výroba skleněných vláken probíhá tažením z taveniny pomocí spřádacích trysek. Vlákna jsou po výstupu z trysky navíjena a zmenšuje se průměr vlákna z původních 2 milimetrů na požadovaný průměr. Při navíjení zároveň probíhá lubrikace (vodní emulze) daných vláken pro ochranu citlivého povrchu [6].



Obr. 2.2 Technologie výroby skleněných vláken [7]

2.1.2 Aramidová vlákna

Aramidová vlákna jsou organické polymery s kovalentními vazbami orientovanými ve směru vlákna. Tyto vlákna jsou silně anizotropní, mají velmi malou hustotu ($\rho=1,45 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$) a jsou vhodné převážně pro konstrukce zatěžované tahovým namáháním. Nevýhodou je horší adheze vláken k matrici, špatná obrobitelnost a malá odolnost vůči vysokým teplotám. Aramidová vlákna se v USA prodávají u společnosti Du Pont pod jménem Kevlar a u japonské firmy Teijin pod jmény Twaron a Technora [6, 8]. Kevlar je jako vlákno dostupný ve variantách Kevlar 29 a Kevlar 49 Kevlar 149. Tyto Kevlary mají 20 krát větší modul pružnosti než obyčejné polyamidy (např. nylon) a velmi dobrou mez pevnosti [9].

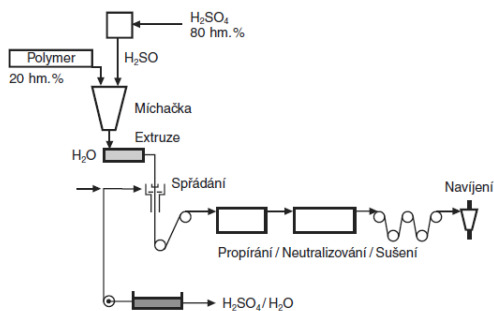
Property	Akzo Twaron	Twaron [®] HM	Kevlar [®] -29	Kevlar [®] -49	Teijin HM-50
Density (g/cm ³)	1.44	1.45	1.44	1.44	1.39
Tensile strength (MPa)	2800	2800	2758	2758	3030
Tensile modulus (GPa)	80	125	62	124	74
Tensile strain (%)	3.3	2.0	3.5	2.5	4.2
Coefficient of thermal expansion, 10 ⁻⁶ °C					
Longitudinal					
0-100°C	—	—	-2.0	—	—
100-200°C	—	—	-4.1	—	—
200-260°C	—	—	-5.3	—	—
Radial					
0-100°C	—	—	59	—	—

Tab. 4 Porovnání vlastností různých aramidových vláken [9]

Vlastnosti	Ve směru vláken ()		Kolmo na vlákno (⊥)	
	Tah	Tlak	Tah	Tlak
E-modul (N·mm ⁻²)	80 000	80 000	6 500	5 100
Pevnost (N·mm ⁻²)	1 800	230	8	53
Tažnost (%)	2,2	0,5	0,16	1,4
Příčné smrštění	0,3	0,3	0,025	0,02
Součinitel teplotní roztažnosti (K ⁻¹)	-2·10 ⁻⁶		70·10 ⁻⁶	
Vodivost (S·m ⁻¹)	~2·10 ⁻¹³		—	

Tab. 5 Porovnání některých vlastností ve směru vláken a kolmo na vlákna [6]

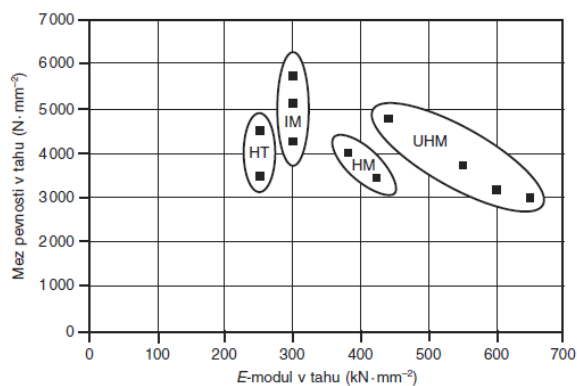
Výroba probíhá spřádáním krystalických vláken v koncentrované kyselině sírové a následným spojováním vláken a jejich následném propírání a neutralizování [6].



Obr. 2.3 Výroba aramidových vláken [6]

2.1.3 Uhlíková vlákna

Uhlíková vlákna mají vysokou pevnost a tuhost, ale nízkou tažnost. Jsou silně anizotropní a ze všech hojně užívaných vláken nejdražší. Mají vysokou korozní odolnost a dobrou tepelnou a elektrickou vodivost. Zároveň jsou ale za normálních podmínek velmi křehká a mají omezenou dobu skladování. Uhlíková vlákna se vyrábějí ze tří výchozích materiálů a těmi jsou celulóza, polyakrylonitril (PAN) a smola. Uhlíková vlákna se pak dělí na HT – standartní, IM – středně modulová, HM – vysokomodulová a UHM – ultravysokomodulová [6].



Obr. 2.4 Porovnání modulu pružnosti a meze pevnosti v tahu u základních uhlíkových vláken [6]

2.1.4 Keramická vlákna

Keramická vlákna můžeme rozdělit na oxidová a neoxidová. Klasickým příkladem oxidové keramiky vhodné pro vlákna je kombinace Al_2O_3 a SiO_2 . Oxidová keramika se využívá především kvůli velké tepelné odolnosti (až $1100\text{ }^\circ\text{C}$), dobré chemické odolnosti, relativně nízké ceně a menší měrné hustotě. Příkladem neoxidové keramiky je SiC. [10]

2.1.5 Přírodní vlákna

Pro vyztužování matrice z plastu lze použít především přírodní vlákna, která mají jako základ celulózu. Mezi ně se řadí len, konopí, sisal, juta, ramie a bavlna. Mezi výhody těchto vláken patří nízká měrná hustota a odolnost proti stárnutí a dobrá recyklace materiálů. Nevýhodami jsou pak omezená délka vláken, absorpce vlhkosti, nákladná předběžná úprava pro lepší adhezi k matrici a omezená možnost ovlivnit růst těchto vláken [6].

Vlastnosti \ Vlákn	Sklo	Konopí	Len	Juta	Sisal
E-modul ($N \cdot mm^{-2}$)	75 000	70 000	30 000	55 000	20 000
Mez pevnosti v tahu ($N \cdot mm^{-2}$)	3 500	600	750	550	600
Tažnost (%)	4	1,6	2,0	2,0	2,0
Hustota ($g \cdot cm^{-3}$)	2,54	1,45	1,48	≈ 1,4	1,45

Tab. 6 Porovnání vlastností skleněných a přírodních vláken [6]

2.2 Kompozitní matrice

Matrici definujeme jako materiál, který je prosycen systémem vláken a má za úkol zajistit geometrii kompozitu, dobrý přenos sil, ochranu vláken a převod namáhání na vlákna. Pro výsledný kompozit je důležitá dobrá přilnavost mezi matricí a vlákny. Z tohoto důvodu je potřebná vhodná viskozita a povrchové napětí matrice pro dobré a úplné smočení bez bublin. Dále je nutná předúprava a lubrikace vlákna [6].

2.2.1 Polymerní matrice

Největší množství vyrobených kompozitů má polymerní matrici. Polymery se dělí na termoplasty a termosety (reaktoplasty). Markantní rozdíl mezi těmito skupinami je možná recyklovatelnost, kterou mají pouze termoplasty.

Do termosetů se řadí i reaktivní pryskyřice, které se při výrobě kompozitů využívají nejčastěji. Mezi reaktivními pryskyřicemi nalezneme *Nenasycené polyesterové pryskyřice* (UP-R), *Vinylesterové pryskyřice* (VE-R), *Epoxidové pryskyřice* (EP-R), či *Fenolické pryskyřice* (PF-R). Pro vytvoření kompozitu z reaktivních pryskyřic je nezbytné tzv. vytvrzení, což je proces tepelného zpracování, při kterém se mění mechanické vlastnosti. Termosety mají poměrně nízkou viskozitu a výroba proto není příliš energeticky náročná. Navíc jsou při normální teplotě většinou tekuté, a proto se snadněji zpracovávají [6].

Výhodou termoplastů vůči termosetům je houževnatost, tepelná odolnost a odolnost proti chemickým vlivům. Mezi termoplasty řadíme *Termoplastické elastomery* (TPE) a *Polyamidy* (PA) [6, 11]

	Termoplasty	Termosety
Matrice	Polymerovaná, vysokoviskózní tavenina, špatně se spojuje lepením	Nevytvrzená, nízkoviskózní, dobře se spojuje lepením a opatřuje nátěrem
Cena matrice	Nízká, ale i vysoká	Nízká
Předimpregnace	obtížné smáčení a prosvycování	Snadné
Cena předimpregnace	Vysoká	Nízká
Skladování	Neomezeně skladovatelné	Omezená skladovatelnost (v chladu), reakce pomalu pokračuje
Polotovary	Termoplasty vyztužené skleněnou rohoží (GMT), pásky	Lisovací hmoty SMC (prepregy)
Přímé zpracování	Granulát (krátká vlákna), přímo zpracovatelný dlouhovláknitý polotovary (D-LFT)	Výztuž a reaktivní pryskyřice
Teplota při zpracování	Teplota taveniny	Teplota okolí
Tvarování	Vhodné pro velké série	Nevhodné
Ruční kladení	Nevhodné	Vhodné pro velkoplošné díly
Kladení pásů	Vysoká automatizace, malá lepidlost, svařování	Vysoká automatizace, dobrá lepidlost, citlivé vytvrzování
Teplota nástroje při lisování	Teplota taveniny 150 až 180 °C	Reakční teplota 140 až 160 °C
Lisovací tlak	GMT: 200 až 300 N · mm ⁻² D-LFT: 30 až 100 N · mm ⁻²	SMC: 20 až 50 N · mm ⁻²
Plocha povrchu	Příměřená, svařitelná	Dobrá, tvrdá; lze ji lepit a natírat
Mechanické chování	Houževnaté, sklon ke křepu	Dynamicky zatížitelné, křehký lom
Chování za tepla	Výrazné změknutí při T _g	Méně závislé na teplotě
Stárnutí	Málo odolné až odolné	Velmi odolné proti stárnutí
Možnost opravy	Omezená	Dobrá

Tab. 7 Porovnání termoplastických a reaktoplastických matic [6]

2.2.2 Kovové matrice

Kovové matrice se využívají při požadavku na elektrickou, či tepelnou vodivost. Mezi jejich další výhody patří vysoká chemická odolnost, dobrá tvárnost a odolnost proti vlhkému prostředí a povrchovému poškození. Při porovnání s polymery ale nedosahuje kovová matrice takové tuhosti a pevnosti. Nejčastěji se využívá matrice z hliníku a jeho slitin v kombinaci s borovými, uhlíkovými, křemíkokarbidovými nebo safírovými vlákny. Oblíbenost tohoto materiálu je především kvůli nízké ceně. Dalšími často používanými kovy jsou slitiny titanu s vlákny z boru nebo křemíkokarbidu.

Zásadním aspektem při tvorbě kompozitu s kovovou maticí je, především ve vyšších teplotách, chemická kompatibilita mezi maticí a vláknem. Při vysokých teplotách může dojít k negativním metalurgickým reakcím ve styku. Tento aspekt můžeme omezit přidáním příměsí do matrice, opatřit vlákna povlaky a zvolit správný výrobní proces [12].

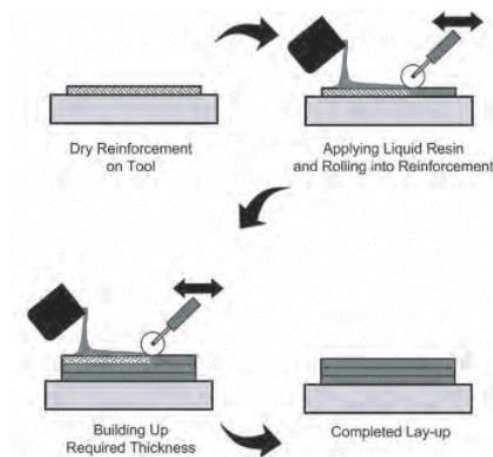
2.2.3 Keramické matrice

Keramická matrice se používá kvůli své pevnosti při vysokých teplotách, dobré chemické odolnosti a nízké měrné hustotě. Nevýhodami jsou křehkost a problematická adheze mezi maticí a vláknem. Pokud je součinitel teplotní roztažnosti vlákna větší než u matrice, může kvůli špatné přilnavosti dojít k úplnému oddělení vlákna od matrice. Pro matrice se nejčastěji využívají oxidy, nitridy nebo karbidy některých prvků (například Al, Si, Mg). Mezi oblíbené sloučeniny patří Al₂O₃, ZrO₂, ThO₂ a UO₂. Vlákna jsou velmi často z molybdenu, tungstenu, kolumbia nebo oceli [12].

2.3 Výroba laminátu

2.3.1 Kontaktní laminace

Kontaktní laminace je vhodná pro malosériovou výrobu středních a velkých ploch. Tato metoda je silně ovlivněna schopnostmi a zkušenostmi pracovníka, který daný laminát ručně vyrábí. Hlavní výhodou jsou minimální náklady na nástroje a schopnost vyrobit komplikované tvary. Objemový podíl vláken je závislý na schopnostech pracovníka (rozmezí 10 – 38%). Nejprve se na povrch nanese tzv. gelcoat, což je vrstva separátoru a na ni vrstva pryskyřice. Gelcoat zamezuje proražení struktury výztuže na povrch výrobku. Následně se do vrstvy pryskyřice kladou výztuže, které jsou prosyceny pryskyřicí pomocí válečku, štětce, stěrky nebo stříkací pistole [6, 12].



Obr. 2.5 Schéma ručního kladení [13]

2.3.2 Prepreg

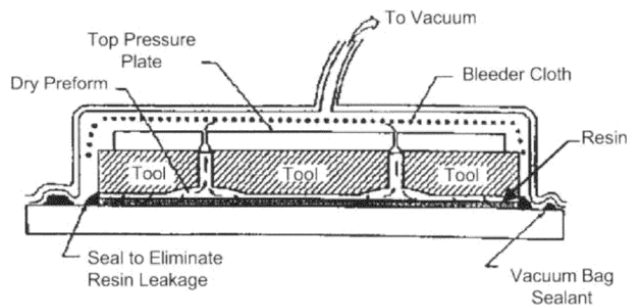
Prepreg (preimpregnated fibers) se nejčastěji používá při výrobě kompozitů lisováním. U prepregu je odděleno zpracování od procesu prosycování výztuže pojivem. Tímto postupem je zajištěna dobré prosycení kompozitu výztuží. Jednosměrný prepreg je vyroben na speciálním zařízení a poté je skladován při teplotě kolem $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ do doby dalšího zpracování. Skladovat se může pouze omezenou dobu, která je závislá na reaktivitě použitého pojiva (maximálně 6 měsíců). Při dalším zpracování je potřeba prepreg rozmrazit a zamezit přístupu vzduchu k prepregu kvůli případnému srážení vzdušné vlhkosti. Poté se vyrobí potřebné přířezy a výrobek se následně vytvrdí pomocí autoklávu nebo lisování. Objemový podíl vláken je v rozmezí mezi 50 – 70 % [6].

2.3.3 Technologie RTM

RTM (resin-transfer-moulding = vysokotlaké vstřikování) je vhodná pro opakovanou výrobu výlisků. Tyto výlisky mají velmi nízký obsah bublin a velmi vysoké parametry. Tato metoda spojuje technologické zvláštnosti lisování a vstřikování. Funguje na principu vstřikování pryskyřice, pod tlakem až 5 baru, do formy, kde je již připravena výztuž. Poté pomocí vakua dochází k prosycení výztuže s pryskyřicí a dochází také k odstranění většiny bublin. Při některých případech se formy vytápějí. Toto vytápění zaručuje snížení viskozity pojiva, což prodlužuje zatékačí dráhu. Objemový podíl vláken je mezi 55 – 65 % [6, 17].

2.3.4 Technologie RFI

RFI (resin film infusion) je technologie, která se vyvinula z RTM technologie. Principem této metody je to, že se do spodní části formy se dá tenký povlak z potřebné matrice a na něj se položí vrstva vybraných vláken. Poté se celá forma zahřeje a odebere se vzduch, aby mohlo vzniknout vakuum. Po zahřátí se matrice roztaví, nasytí se vlákna a zaplní celou formu. Při vrstvení povlaku matrice s vrstvami vláken vzniká tzv. SPRINT[®], který má výhodu v lepším prosycení vláken maticí [15, 17].

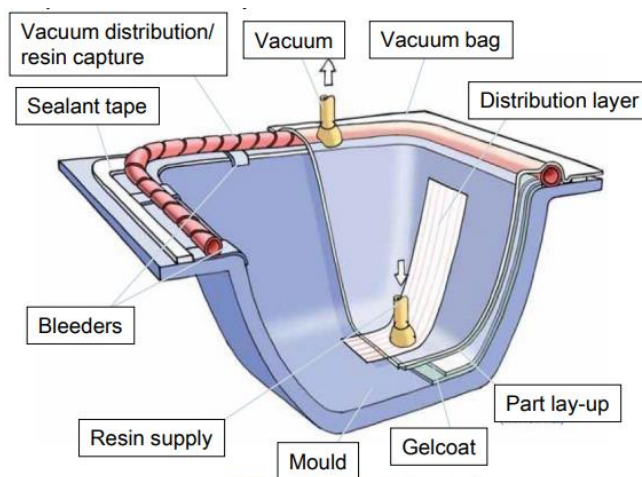


Obr. 2.6 Schéma RFI technologie [14]

U této technologie můžeme na rozdíl od RTM využít matrice s vysokou viskozitou. Také není zapotřebí tolik speciálních přístrojů a při výrobě je mnohem lepší pronikání vláken do matrice. Nevýhodami RFI jsou vysoké náklady na výrobu povlaku matrice a nutnost schopného pracovníka při nánosu matrice do formy [15, 16, 17].

2.3.5 Technologie VIP

VIP (Vacuum Infusion Processing) je technologie využívající vakuum pro lepší prosycení vláken maticí. Nejdříve se do formy dají vlákna, jadřince a žebra, poté se forma utěsní a odebere se vzduch a vznikne vakuum. Po těchto procesech se do formy nalije matrice a forma se zahřeje. Za několik hodin se kompozit speče a vyndá se z formy.

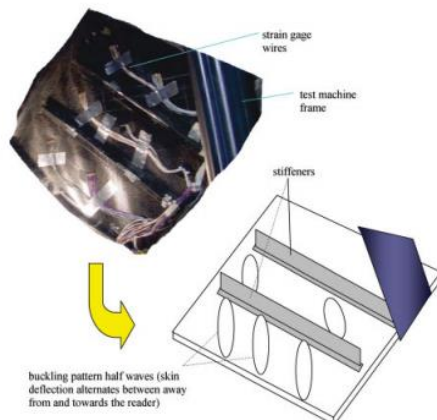


Obr. 2.7 Schéma VIP technologie [7]

Výhodami této metody jsou dobrá spojení mezi vlákny a maticí, dobrá pevnost a tuhost materiálu a kvalitní povrch materiálu. Nevýhodami jsou potřeba nízké viskozity matrice a potřeba odborného personálu, který zvolí správný výrobní proces. Objemový podíl vláken se pohybuje mezi 25 – 50 % [7, 18].

2.4 Ztráta stability laminátových desek

Kompozitní desky jsou zatíženy tlakovými nebo smykovými silami jsou náchylné ke ztrátě stability. Ukázkovým příkladem ztráty stability je Obr. 2.8, kde dochází ke ztrátě stability mezi dvěma výztužemi.



Obr. 2.8 Deska, která ztratila stabilitu po smykové zatížení [20]

Ztráta stability u laminátových desek je rozdílná než ztráta stability u nosníků. Zatímco vzpěr je u nosníku obvykle stav, který nastává těsně před finálním kolapsem, laminátové desky jsou i po ztrátě stability schopné přenášet poměrně velké síly. Při práci s deskami, které ztratily stabilitu, je zapotřebí dobrá znalost případných vad, které mohou v desce vzniknout a jak případně desku ovlivní. Jedna z těchto vad je zobrazena na Obr. 2.8, kde část povrchu má po ztrátě stability tendenci k odloučení se od výztuže. Tento druh vady je poměrně obvyklý a může vést až k předčasnému kolapsu desky. Pokud chceme využít schopnosti desek i po ztrátě stability, je zapotřebí uvažovat při výpočtech velmi konzervativně a být velmi opatrný [22].

3. Směšovací pravidlo

Celá tato kapitola 3. byla převzata z [1].

V následující kapitole bude nastíněna problematika výpočtu modulu pružnosti v podélném a příčném směru. Poissonovo číslo a smykový modul pružnosti lze spočítat analogicky stejně jako u modulu pružnosti v příčném směru a tyto výpočty můžeme najít například ve [1].

U ortotropního materiálu (materiál, který má tři navzájem kolmé roviny symetrie elastických vlastností) je zapotřebí při hledání vztahu mezi napětím a deformací znát čtyři elastické konstanty E_L , E_T , μ_{LT} a G_{LT} .

E_L – modul pružnosti v podélném směru L

E_T – modul pružnosti v příčném směru T

μ_{LT} – Poissonovo číslo v rovině L, T

G_{LT} – smykový modul pružnosti v rovině L, T

V případě úloh s termo-elastickým zatížením jsou nutné také koeficienty teplotní roztažnosti ve směrech L a T.

Při výrobě jednosměrového kompozitu jsou známy materiálové charakteristiky vlákna a matrice, a proto je vhodné vyjádřit elastické konstanty kompozitu pomocí materiálových charakteristik.

M, M_f, M_m - hmotnost kompozitu, vlákna, matrice

ρ, ρ_f, ρ_m - hustota kompozitu, vlákna, matrice

v, v_f, v_m - objem kompozitu, vlákna, matrice

Při součtu hmotností jednotlivých složek nám vychází celková hmotnost kompozitu

$$M = M_f + M_m, \quad (3.1)$$

nebo při použití objemů a hustot

$$\rho v = \rho_f v_f + \rho_m v_m. \quad (3.2)$$

Potom

$V_f = \frac{v_f}{v}$ je objemový podíl vláken

$V_m = \frac{v_m}{v}$ je objemový podíl matrice

Součtem všech objemových složek získáváme celý objem a platí

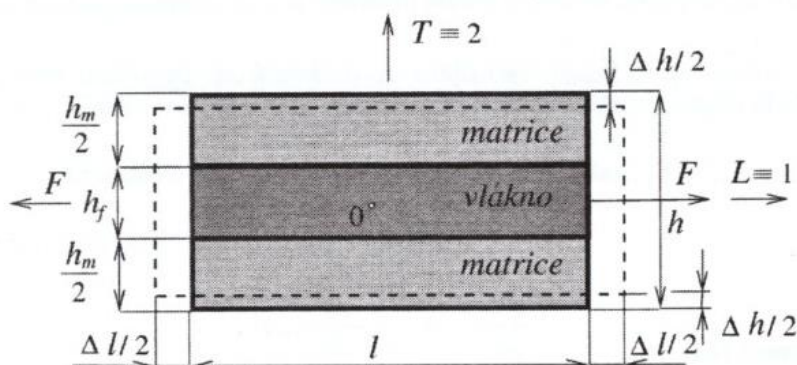
$$V_f + V_m = 1. \quad (3.3)$$

Hustota kompozitu je

$$\rho = V_f \rho_f + V_m \rho_m = V_f \rho_f + (1 - V_f) \rho_m. \quad (3.4)$$

3.1 Modul pružnosti v podélném směru

Uvažujeme o kompozitu v souřadnicovém systému 0 (L, T) (Obr. 3.1). Tento kompozit je složen z matrice a jednoho vlákna a je zatížen silou F v podélném směru L . Při výpočtech platí předpoklad, že prodloužení v podélném směru Δl bude v celém kompozitu stejné, to znamená, že se matrice a vlákno stejně prodlouží.



Obr. 3.1 Jednosměrný kompozit v souřadnicovém systému 0 (L, T) [2]

Poté platí

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_{Lm} \quad (3.5)$$

Dále označíme

E_f, E_m - modul pružnosti vlákna a matrice

A, A_f, A_m - plochy kompozitu, vlákna a matrice kolmé ke směru L

Objemový podíl můžeme pomocí délky l napsat jako

$$V_f = \frac{v_f}{v} = \frac{A_f l}{A l} = \frac{A_f}{A} \quad \text{Analogicky pro matrici} \quad V_m = \frac{A_m}{A} . \quad (3.6)$$

Napětí v tahu u vlákna a matrice

$$\sigma_{Lf} = E_f \varepsilon_{Lf} , \quad \sigma_{Lm} = E_m \varepsilon_{Lm} . \quad (3.7)$$

Tahová síla je dána vztahem

$$F = A_f \sigma_{Lf} + A_m \sigma_{Lm} . \quad (3.8)$$

Tahové napětí v kompozitu

$$\sigma_L = \frac{F}{A} = V_f \sigma_{Lf} + V_m \sigma_{Lm} = (V_f E_f + V_m E_m) \varepsilon_L . \quad (3.9)$$

Z výrazu (3.9) plyne, že modul pružnosti v tahu je

$$E_L = \frac{\sigma_L}{\varepsilon_L} = V_f E_f + V_m E_m = V_f E_f + (1 - V_f) E_m . \quad (3.10)$$

Jestliže je $E_f \gg E_m$, pak je možné vztah (3.10) zjednodušit. Dostaneme

$$E_L = V_f E_f . \quad (3.11)$$

3.2 Modul pružnosti v příčném směru

Uvažujeme o stejném kompozitu ve stejném souřadnicovém systému, jako byl v kapitole 3.1, který je zatěžován silou F ve směru $T \equiv 2$. Kvůli stejnému průřezu v příčném směru platí pro napětí

$$\sigma_T = \sigma_{Tf} = \sigma_{Tm} . \quad (3.12)$$

Poměrné příčné prodloužení vlákna a matrice

$$\varepsilon_{Tf} = \frac{\sigma_T}{E_f} , \quad \varepsilon_{Tm} = \frac{\sigma_T}{E_m} . \quad (3.13)$$

Změna tloušťky

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m = h_f \varepsilon_{Tf} + h_m \varepsilon_{Tm} . \quad (3.14)$$

Poměrné příčné prodloužení

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta h}{h} = V_f \varepsilon_{Tf} + V_m \varepsilon_{Tm} = \left(\frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \right) \sigma_T . \quad (3.15)$$

Příčný modul pružnosti E_T je definován

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\varepsilon_T}{\sigma_T} \Rightarrow E_T = \frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m} = \frac{E_m}{V_m + V_f \frac{E_m}{E_f}}, \quad (3.16)$$

nebo

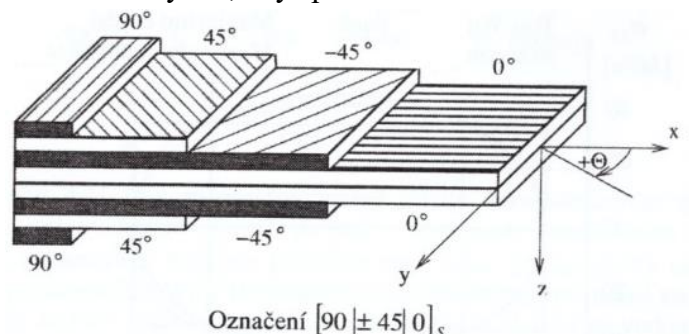
$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}. \quad (3.17)$$

Pro případ, že $E_f \gg E_m$, poté

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f}. \quad (3.18)$$

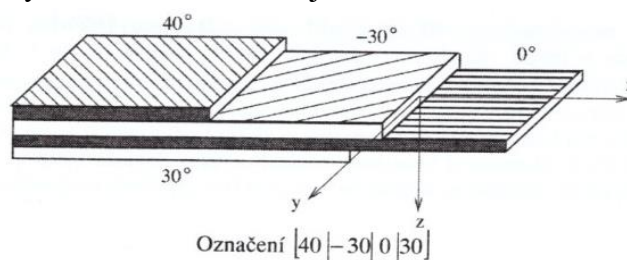
4. Klasická laminátová teorie

Jak bylo uvedeno v Tab. 1, jednou z výhod kompozitů je variabilita výrobků a schopnost účinně řídit vlastnosti výsledného kompozitu. Při správném výběru materiálu vláken a matrice a dobré technologii lze jednoduše získat potřebné vlastnosti v různých směrech. U jednosměrného kompozitu jsou v podélném směru vlastnosti závislé především na vláknech, zatímco v příčném směru jsou řízené vlastnostmi matrice, přičemž vlastnosti v podélném směru jsou o poznání lepší než vlastnosti ve směru příčném. Použití v praxi je proto jen velmi omezené. Z tohoto důvodu se vyrábí lamináty, tvořeny dvěma nebo více navzájem spojenými vrstvami, které jsou konstruovány tak, aby splňovali dané vlastnosti.



Obr. 4.1 Symetrický laminát [2]

Na Obr. 4.1 je znázorněný symetrický laminát s rovinou symetrie xy a označením $[90|\pm 45|0]_s$. Příklad nesymetrického laminátu je na Obr. 4.2 [2].

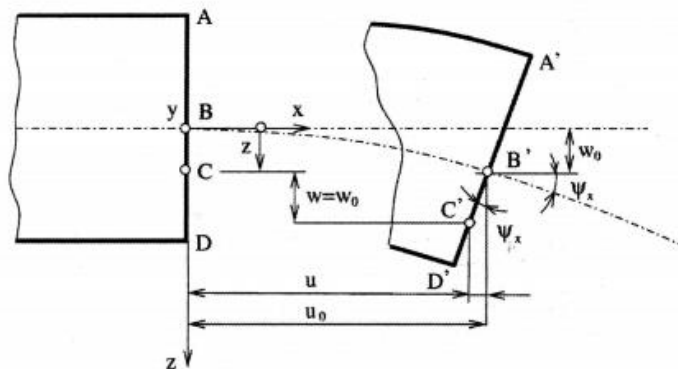


Obr. 4.2 Nesymetrický laminát [2]

4.1 Základní rovnice laminátové desky [2]

U následujících výpočtů budeme uvažovat o laminátu jako o tenké desce a předpokládat že:

- všechny laminy jsou ortotropní a kvazihomogenní
- tloušťka laminy je ve srovnání s délkou a šířkou velmi malá
- posuv jednotlivých bodů je malý ve všech třech směrech
- spojení mezi laminami je dokonalé, nekonečně tenké, a proto jsou posunutí spojitá
- v příčném směru (po tloušťce) se posunutí mění lineárně
- tloušťka laminátu je vůči ostatním rozměrům malá, je možné o problematice uvažovat jako o rovinném stavu napjatosti, a tudíž platí $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz}$
- platí Kirchhoffova hypotéza, která tvrdí, že kolmice ke středové ploše před deformací zůstanou kolmé i po deformaci a budou stále přímkové.
- lze zanedbat přetvoření v příčném směru ε_{zz} z důvodu konstantní normálové vzdálenosti od středové roviny
- závislost mezi jednotlivými složkami napětí a deformací bude lineární



Obr. 4.3 Laminát před a po deformaci [2]

Na Obr. 4.3 je znázorněn kus laminátu v rovině xz . Úsečka AD bude před i po deformaci přímá a kolmá vůči střední ploše laminátu. Kvůli deformaci vznikají na střední rovině v bodu B posuvy u_0 , v_0 a w_0 , které odpovídají směrům os x , y , z . Pro bod C ve směru osy x je posuv definován

$$u = u_0 - z \psi_x , \quad (4.1)$$

kde ψ_x je sklon střední roviny laminátu.

Platí

$$\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} . \quad (4.2)$$

Analogicky pro složku posuvu ve směru y

$$v = v_0 - z \psi_y , \quad (4.3)$$

kde

$$\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} . \quad (4.4)$$

Deformace po tloušťce se kvůli předpokladům zanedbává, a proto platí

$$w = w_0 . \quad (4.5)$$

Rovnice (4.1)(4.1 až (4.5) lze zapsat jako pole posuvů ve tvaru

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} , \quad (4.6)$$

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} ,$$

$$w = w_0 .$$

Z derivací posuvů plyne pole poměrných deformací

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (4.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} . \quad (4.9)$$

Rovnice (4.7) až (4.9) lze přepsat do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} , \quad (4.10)$$

kde deformace střední plochy jsou

$$\varepsilon_m^\circ = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} , \quad (4.11)$$

a křivosti desky jsou

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} . \quad (4.12)$$

Napětí v libovolné (k -té) vrstvě pro mimoosově namáhanou laminu se vyjádří

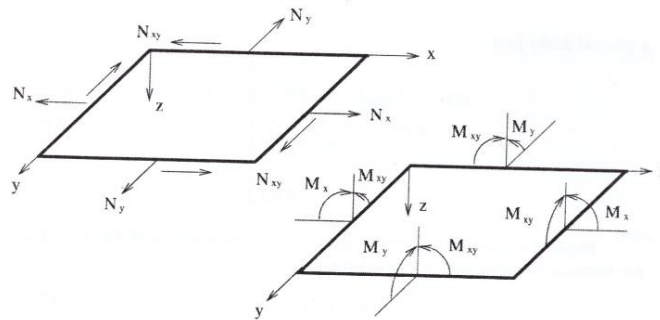
$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}', \quad (4.13)$$

kde \mathbf{Q} je matice mimoosové tuhosti.

Použitím vztahu (4.10) a (4.13) obdržíme výraz pro určení napětí v k -té vrstvě

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Při případném odvozování závislosti mezi vnějším zatížením laminátu a jeho deformací je dobré pracovat s ekvivalentním systémem sil a momentů. Proto zavedeme výsledné síly a momenty na příčný průřez k -té vrstvy o tloušťce $h_k - h_{k-1}$ (Obr. 4.4).



Obr. 4.4 Znárodnění výsledných sil a momentů [2]

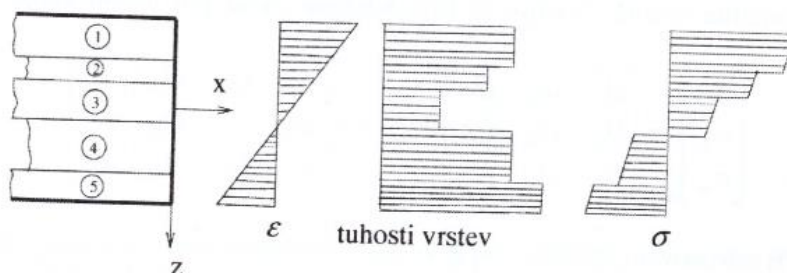
Pro výslednice sil platí

$$N_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} dz, \quad N_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} dz. \quad (4.15)$$

Podobně pro momenty

$$M_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} z dz, \quad M_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} z dz, \quad M_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} z dz. \quad (4.16)$$

Ve vztahu (4.15) mají výslednice sil N_x , N_y , N_{xy} rozměr $[N \cdot m^{-1}]$, tj. síla na jednotku délky pásu a ve vztahu (4.16) mají M_x , M_y , M_{xy} rozměr momentu připadajícího na jednotku délky $[N]$.



Obr. 4.5 Nespojité zatížení laminátu [2]

Na Obr. 4.3 lze vidět, že napětí se po tloušťce laminátu mění nespojitě, a proto je zapotřebí výsledné síly a momenty, působící v průřezu laminátu, vyšetřit jako součet účinků od všech n vrstev. Pro síly platí

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad (4.17)$$

a pro momenty

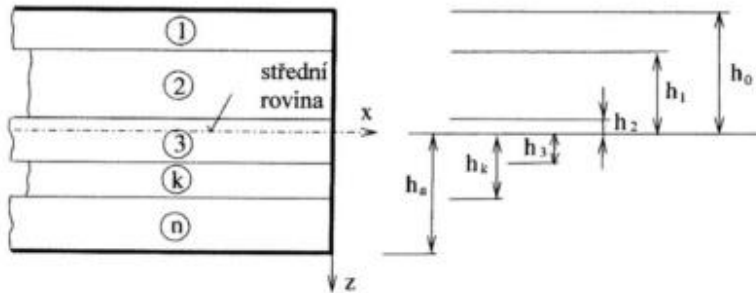
$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz. \quad (4.18)$$

4.2 Globální matice tuhosti

V kapitole 4.1 byly odvozeny vztahy potřebné ke konstitutivnímu vztahu, který vyjadřuje závislost sil a momentů na poměrných deformacích a křivostech. Na Obr. 4.6 je znázorněn laminát, který se skládá z n vrstev. Pro sestavení konstitutivního vztahu dosadíme do rovnic (4.17) a (4.18) rovnice (4.14) při použití vztahu o deformaci střední plochy (4.11) a křivosti desky (4.12). Z těchto úprav získáme následující vztahy

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z dz \right\}. \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} z dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right\}.$$



Obr. 4.6 Laminát, složený z n vrstev [2]

Pro každou vrstvu laminátu je matice mimoosové tuhosti \mathbf{Q} konstantní, a proto můžeme výraz (4.19) přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k=1 \end{bmatrix} Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k=1 \end{bmatrix} Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} .$$

Z rovnice (4.20) je evidentní, že při násobení integrálů s prvky matice \mathbf{Q} a následném součtu jednotlivých vrstev po celé tloušťce laminátu dostaneme výrazy

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} , \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} ,$$

kde prvky jednotlivých matice určíme pomocí výrazů

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) , \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) , \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Oba výrazy v (4.21) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} , \quad (4.23)$$

nebo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \dots \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{B} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{C} & \vdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m^\circ \\ \dots \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} , \quad (4.24)$$

kde \mathbf{A} je matice tahové tuhosti,
 \mathbf{B} je matice vazební tuhosti,
 \mathbf{D} je matice ohybové tuhosti.

Z konstitutivní rovnice (4.24) můžeme pomocí poměrných deformací ve střední rovině a díky křivosti vyjádřit výsledné síly a momenty. Matice, která vyjadřuje vazbu mezi těmito veličinami, se nazývá *matice tuhosti* nebo *globální matice tuhosti*. Z výrazu (4.24) lze vyčíst, že matice \mathbf{A} vyjadřuje vazbu mezi složkami sil a poměrné deformace na střední rovině a matice

D váže složky momentů z křivostí plochy. Matice vazební tuhosti **B** vyjadřuje vazbu mezi složkami momentů a složkami poměrné deformace ve střední rovině, zároveň i složky vektoru vnitřních sil s křivostí plochy. To znamená, že normálové a smykové síly působící ve střední rovině způsobí nejen přetvoření ve střední rovině, ale i ohýbání a zkroucení střední plochy. Zároveň složky ohybového momentu způsobí poměrnou deformaci ve střední rovině laminátu. Z důvodu, že matice **A** a **D** mají všechny prvky nenulové, existuje vazba mezi silami N_x , N_y a smykovou deformací γ_{xy}^0 a zároveň mezi ohybovými momenty M_x , M_y a zkroucením k_{xy} .

U namáhání laminátu je ve většině případů nežádoucí vazba mezi ohybem a tahem, krutem a tahem nebo mezi normálovými silami ve střední vrstvě laminátu a smykovými deformacemi. Těmto vazbám je vhodné se vyhnout již při výrobě pomocí vhodného pořadí daných vrstev [2].

4.3 Způsoby skládání vrstev laminátu

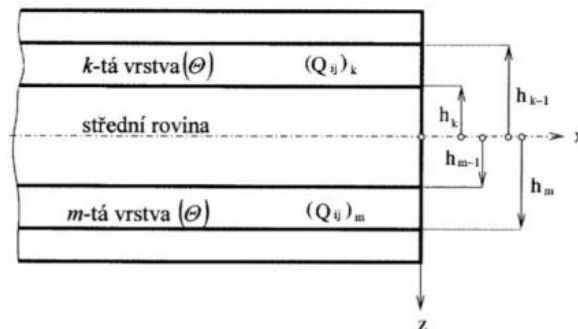
Jak bylo v předchozích kapitolách několikrát zmíněno, vhodným výběrem jednotlivých vrstev laminátu lze docílit požadovaných vlastností materiálu. Důležité je, aby některé prvky v celkové matici tuhosti (4.23) byly nulové. Jedná se především o prvky způsobující přídavné namáhání materiálu, které se například u izotropních materiálů nevyskytuje. Toho se může dosáhnout například vrstvením jednotlivých vrstev ze stejnými mechanickými vlastnostmi pod různými úhly v požadovaném pořadí [2].

4.3.1 Symetrické lamináty

Při namáhání laminátu je vhodné nemít vazbu mezi tahem a ohybem a mezi tahem a krutem. Tohoto docílíme, pokud matice vazební tuhosti **B** bude rovna nule. Kvůli

(4.22) musí platit

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) = 0. \quad (4.25)$$



Každý prvek matice vazební tuhosti bude roven nule v případě, že ke každému příspěvku od laminy nad střední rovinou bude existovat příspěvek od laminy stejných vlastností a orientace ve stejné vzdálenosti pod střední rovinou (Obr. 4.7).

Obr. 4.7 Symetrický laminát [2]

Musí tedy platit

$$(Q_{ij})_k = (Q_{ij})_m, \quad |-h_{k-1}| = h_m, \quad |-h_k| = h_{m-1}. \quad (4.26)$$

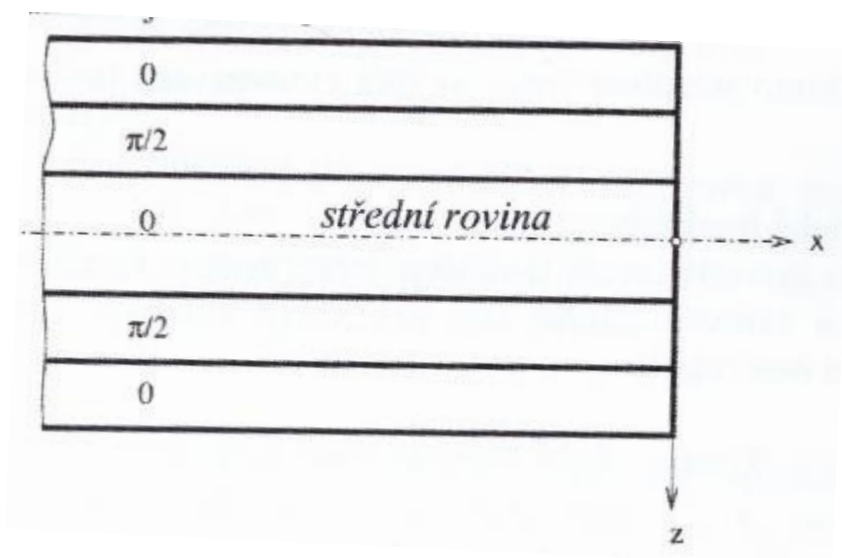
Pokud pro každou vrstvu nad střední plochou bude existovat identická vrstva pod střední plochou, bude se jednat o *symetrický laminát*.

Globální matice tuhosti bude mít tvar

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} [2]. \quad (4.27)$$

4.3.2 Symetrické křížově vrstvené lamináty

Symetricky křížově vrstvený laminát vznikne postupným skládáním stejně tlustých vrstev pod úhly 0° a 90° , které budou symetrické podle střední roviny. Pro prvky mimoosové tuhosti



platí

Obr. 4.8 Symetrické křížově vrstvené lamináty [2]

$$\begin{aligned} Q_{11}(90^\circ) &= Q_{22}(0^\circ), & Q_{11}(0^\circ) &= Q_{22}(90^\circ), & Q_{12}(90^\circ) &= Q_{21}(0^\circ), \\ Q_{66}(90^\circ) &= Q_{66}(0^\circ), & Q_{16}(90^\circ) &= Q_{16}(0^\circ) = Q_{26}(90^\circ) = Q_{26}(0^\circ) &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pomocí vztahu (4.22) získáme prvky z matice tahové tuhosti \mathbf{A}

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = 2 n h [Q_{11}(0^\circ) = Q_{22}(0^\circ)], \\ A_{12} &= A_{21} = 4 n h Q_{12}(0^\circ), \\ A_{66} &= 4 n h Q_{66}(0^\circ), \\ A_{16} &= A_{26} = 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

kde n je počet vrstev laminátu,

h je tloušťka jedné vrstvy.

Obdobně můžeme pomocí vztahu (4.22) získáme prvky matice ohybové tuhosti \mathbf{D}

$$D_{16} = D_{61} = D_{26} = D_{62} = 0. \quad (4.30)$$

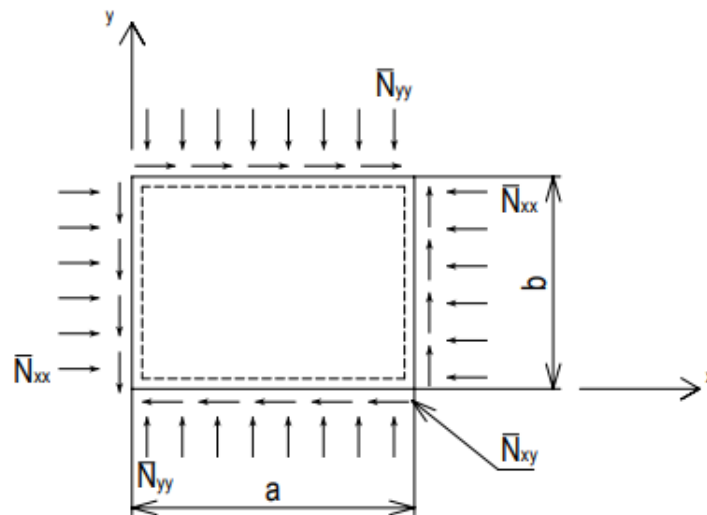
Ostatní koeficienty této matice jsou nenulové. Symetricky křížově vrstvené lamináty jsou jednou z variant symetricky vrstvených laminátů, a proto jsou prvky v matici ohybové tuhosti \mathbf{B} nulové. Globální matice tuhosti má tvar

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Vlastnosti laminátů, které jsou symetricky křížově vrstvené, jsou shodné s ortotropními deskami v hlavních směrech [2].

5. Ztráta stability laminátových desek

U normální ploché desky (Obr. 5.1), která je rovnoměrně zatížena tlakovými a smykovými silami, dochází po dostatečně velkém zatížení k deformaci v podobě poměrného prodloužení a zkosení. U laminátové desky může navíc dojít k ohybu a zkrutu při obyčejném zatížení tlakem. Vše záleží na způsobu vrstvení laminátu. Ale i po tomto zatížení zůstane deska přibližně v rovnovážném stavu. Pokud bude deska stále více zatěžována, dojde při určitém zatížení k destabilizaci a drobným poruchám, které jsou výsledkem nadměrného vychýlení mimo desku.



Tomuto jevu se říká ztráta stability systému.

Obr. 5.1 Obdélníková deska zatížená tlakovými a smykovými silami [21]

Matematické vyjádření ztráty stability je problematikou vlastních čísel. Nejmenšímu z vlastních čísel se říká kritická síla. Diferenciální rovnice pro ztrátu stability lze zderivovat pomocí použití principu minima celkové potencionální energie. Výsledné rovnice jsou

$$\frac{\partial \delta N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} = 0 , \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \delta N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} = 0 , \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 \delta M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_{yy}}{\partial y^2} = \bar{N}_{xx} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + 2 \bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + \bar{N}_{yy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} . \quad (5.3)$$

kde δN_{xx} , δN_{yy} , δN_{xy} jsou odchylky od výslednic sil, které byly vyvolány rovnovážným stavem před ztrátou stability,

δM_{xx} , δM_{yy} , δM_{xy} jsou odchylky od výslednic momentů sil, které byly vyvolány rovnovážným stavem před ztrátou stability,

\bar{N}_{xx} , \bar{N}_{xy} , \bar{N}_{yy} jsou tlakové a smykové síly, kterými se zatížily okraje desky,

δw_0 je odchylka posuvu od střední roviny laminátu.

Rovnice (5.1) až (5.3) jsou rovnice pro ztrátu stability, pokud jde o odchylky způsobené napětím. S cílem zavést odchylky jako náhradu, zapišme tyto konstitutivní rovnice pomocí klasické laminátové teorie s odchylkami výslednic sil a momentů, s deformací střední plochy a křivostí desky. Rovnice klasické laminátové teorie bude

$$\begin{bmatrix} \delta N_x \\ \delta N_y \\ \delta N_{xy} \\ \delta M_x \\ \delta M_y \\ \delta M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{xx} \\ \delta \varepsilon_{yy} \\ \delta \gamma_{xy} \\ \delta k_x \\ \delta k_y \\ \delta k_{xy} \end{bmatrix} . \quad (5.4)$$

Při použití rovnice

(5.4) budou rovnice pro ztrátu stability vypadat

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x \partial y} \\ + A_{26} \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial y^2} \\ - B_{26} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial y^3} = 0 , \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} A_{16} \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x \partial y} \\ + A_{22} \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial y^2} \\ - B_{22} \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial y^3} = 0 , \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 \delta w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 \delta w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4 \delta w_0}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 \delta w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 \delta w_0}{\partial y^4} \\
& - B_{11} \frac{\partial^3 \delta u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 \delta u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \delta u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 \delta u_0}{\partial y^3} \\
& - B_{16} \frac{\partial^3 \delta v_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \delta v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 \delta v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 \delta v_0}{\partial y^3} \\
& = \bar{N}_{xx} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + \bar{N}_{yy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Tyto rovnice mají markantní podobnost rovnicemi rovnováhy pro ohyb na desce. Nicméně si musíme uvědomit, že rovnice pro ztrátu stability nejsou rovnicemi rovnováhy. Výslednice sil \bar{N}_{xx} , \bar{N}_{xy} a \bar{N}_{yy} zatěžovaly pouze okraje desky. Následné napětí je výsledkem posuvu jednotlivých parametrů u_0 , v_0 a w_0 vůči rovnovážnému stavu před ztrátou stability. Pro zjednodušení těchto rovnic, nebudeme nadále uvažovat o odchylce δ . Následné rovnice pro ztrátu stability budou vypadat takto [21]:

Rovnice výsledného napětí:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial^2 \delta M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_{yy}}{\partial y^2} = \bar{N}_{xx} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + \bar{N}_{yy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}. \tag{5.10}$$

Rovnice po nahrazení klasickou laminátovou teorií:

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
& - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
& - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& = \bar{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \bar{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

5.1 Řešení rovnic ztráty stability pro symetrické lamináty

Do této chvíle byly všechny rovnice a výpočty pro ztrátu stability řešeny obecně. Pro různé způsoby skládání vrstev se tyto rovnice zjednodušují. U symetrických křížově vrstvených laminátů se matice vazební tuhosti $\mathbf{B} = 0$ a $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$. Pro případ jednoosového zatížení ve směru x , kdy $\bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yy} = 0$, rovnice (5.11) až (5.13) vypadají takto:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad (5.14)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0, \quad (5.15)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = \bar{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}. \quad (5.16)$$

Řešení rovnice (5.16) pro desku uloženou na podpěrách, které jsou na okrajích desky, je nahrazení funkce w funkcí

$$w = F \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/a). \quad (5.17)$$

Toto nahrazení je vhodné pro jednosměrný a dvousměrný kompozit a navíc je schopné splnit okrajové podmínky v podporách. Po nahrazení získáme rovnici

$$[\pi^2/a^2(n^2 D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2 + m^4/n^2)D_{22} - N] = 0. \quad (5.18)$$

Kritická síla se nachází, když se $n = m = l$ a je

$$N_{cr} = (\pi^2/a^2)[D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}] \quad (5.19)$$

V případě jednosměrného a dvousměrného kompozitu s jednoduchými podporami na kraji desky se kritická síla počítá stejně. Toto si dokážeme v následující diskuzi.

Nechť vlastnosti a koeficienty každé vrstvy z rovnice (5.19) jsou získány z rovnice

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (C_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad (5.20)$$

kde C_{ij} je matice tuhosti,

a necht' všechny mechanické vlastnosti jsou konstantní. Poté koeficienty pro kompozit jsou

$$C_{11} = E_L / (1 - \mu_{LT} \mu_{TL}) \quad (5.21)$$

$$C_{12} = C_{11} \mu_{TL} \quad (5.22)$$

$$C_{22} = E_T / (1 - \mu_{LT} \mu_{TL}) \quad (5.23)$$

$$C_{33} = G_{LT} \quad (5.24)$$

kde $\mu_{TL} = (E_{22}/E_{11})\mu_{LT}$.

Pro jednosměrný kompozit následně platí

$$D_{ij} = (h^3/12)C_{ij}. \quad (5.25)$$

Při dosazení rovnic (5.21) až (5.25) do rovnice (5.19) dostaneme

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 h^3}{12a^2} \left[\frac{E_L + E_T(1 + 2\mu_{LT})}{(1 - \mu_{LT}\mu_{TL})} + G_{LT} \right]. \quad (5.26)$$

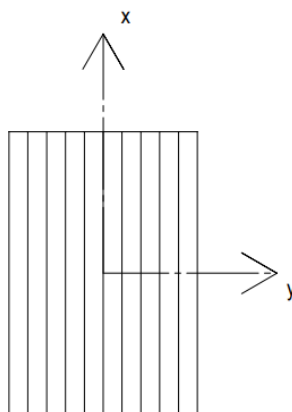
Pokud dosadíme rovnice (5.21) až (5.25) do rovnice (5.20), získáme koeficienty pro dvousměrný kompozit. Tyto koeficienty dosadíme do (5.19) a při porovnání s výsledkem z rovnice (5.26) zjistíme, že kritická síla pro ztrátu stability se vypočítá stejným způsobem [20, 21].

6. Porovnání kritické síly pro ztrátu stability u jednosměrného a symetrického laminátu

V následující kapitole se porovnají dvě laminátové desky a ukáže se závislost objemového podílu na kritické síle pro ztrátu stability.

6.1 Zadání příkladu

Je dána deska o délce 1000 mm a šířce 1000 mm. Tloušťka každé vrstvy je 0,125 mm. Materiál matrice je epoxidová pryskyřice s hustotou $\rho_m = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, s modulem pružnosti v tahu $E_m = 4500 \text{ MPa}$, s modulem pružnosti ve smyku $G_m = 1600 \text{ MPa}$ a Poissonovým číslem $\mu_m = 0,4$.



Obr. 6.1 Jednosměrný kompozit

6.1.1 Jednosměrný kompozit

Jedná se o laminát o jedné vrstvě s orientací vláken 0° . Vlákná jsou ze skloviny typu E, nebo z uhlíkových vláken T600.

6.1.1.1 Jednosměrný kompozit s vlákny ze skloviny typu E

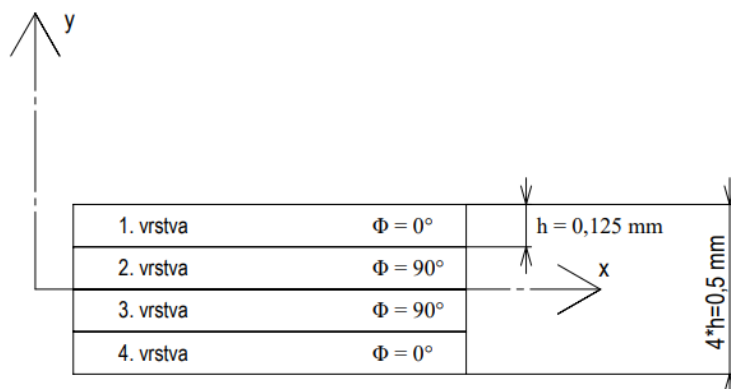
Vlákná ze skloviny mají hustotu $\rho_f = 2600 \text{ kgm}^{-3}$, podélný modul pružnosti v tahu $E_{fL} = 74\,000 \text{ MPa}$, příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 74\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 30\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovo číslo $\mu_f = 0,25$.

6.1.1.2 Jednosměrný kompozit s uhlíkovými vlákny T600

Vlákna typu T600 mají hustotu $\rho_f = 1750 \text{ kgm}^{-3}$, podélný modul pružnosti v tahu $E_{fL} = 230\,000 \text{ MPa}$, příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 15\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 50\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovo číslo $\mu_f = 0,3$.

6.1.2 Symetricky křížově vrstvený laminát

Jedná se o symetrický laminát, který je složen z vrstev $[0/90]_s$. Vlákna tohoto laminátu jsou ze skloviny typu E, nebo z uhlíkových vláken typu T600.



Obr. 6.2 Symetricky křížově vrstvený laminát

6.1.2.1 Symetricky křížově vrstvený laminát s vlákny ze skloviny typu E

Vlákna ze skloviny mají hustotu $\rho_f = 2600 \text{ kgm}^{-3}$, podélný modul pružnosti v tahu $E_{fL} = 74\,000 \text{ MPa}$, příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 74\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 30\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovo číslo $\mu_f = 0,25$.

6.1.2.2 Symetricky křížově vrstvený laminát s uhlíkovými vlákny T600

Vlákna typu T600 mají hustotu $\rho_f = 1750 \text{ kgm}^{-3}$, podélný modul pružnosti v tahu $E_{fL} = 230\,000 \text{ MPa}$, příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 15\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 50\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovo číslo $\mu_f = 0,3$.

6.2 Nalezení kritické síly pro ztrátu stability pomocí klasické laminátové teorie

V této kapitole pomocí programu LamiEx [19] byly spočítány všechny koeficienty pro daný příklad. Pro ilustraci zde bude znázorněn výpočet u symetrického laminátu, který má matici z epoxidové pryskyřice a skleněná vlákna typu E. Objemový podíl vláken bude 45 %.

Epoxidová pryskyřice má vlastnosti $\rho_m = 1200 \text{ kgm}^{-3}$,

$$E_m = 4500 \text{ MPa},$$

$$G_m = 1600 \text{ MPa},$$

$$\mu_m = 0,4.$$

Skleněná vlákna typu E mají vlastnosti $\rho_f = 2600 \text{ kgm}^{-3}$,

$$E_{fL} = 74\,000 \text{ MPa},$$

$$E_{fT} = 74\,000 \text{ MPa},$$

$$G_f = 30\,000 \text{ MPa},$$

$$\mu_f = 0,25.$$

Nejdříve potřebujeme získat elastické konstanty všech vrstev symetrického kompozitu. Pro ilustraci bude znázorněna vrstva, která svírá s osou x 0° . Této problematice jsme se věnovali v kapitole 3, podrobné informace lze nalézt v [1].

Pro výpočet modul pružnosti v podélném směru použijeme rovnici (3.10)

$$E_L = V_f E_f + (1 - V_f)E_m.$$

Po dosazení získáme

$$E_L = V_f E_f + (1 - V_f)E_m = 0,45 \cdot 74\,000 + (1 - 0,45) \cdot 4500 = 35\,775 \text{ MPa}.$$

Výpočet modulu pružnosti v příčném směru spočteme ze vztahu (3.17)

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}.$$

Dosazením daných parametrů získáme

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} = \frac{4500}{1 - 0,45 \left(1 - \frac{4500}{74\,000}\right)} = 7794 \text{ MPa}.$$

Poissonovo číslo získáme z rovnice, která je uvedena v [1], a má tvar

$$\mu_{LT} = V_f \cdot \mu_f + (1 - V_f)\mu_m.$$

Poissonovo číslo pro tento případ bude

$$\mu_{LT} = 0,45 \cdot 0,25 + (1 - 0,45) \cdot 0,4 = 0,333.$$

Smykový modul pružnosti získáme z rovnice z [1] a má tvar

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)}.$$

Po dosazení

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)} = \frac{1600}{1 - 0,45 \left(1 - \frac{1600}{30\,000}\right)} = 2787 \text{ MPa}.$$

Pro sestavení globální matice tuhosti je zapotřebí spočítat jednotlivé členy matice tuhosti **C**. Jednotlivé členy získáme z rovnic (5.21) až (5.24), které upravíme podle [1] a získáme

$$C_{11} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \mu_{LT}^2}, \quad (6.1)$$

$$C_{22} = \frac{E_T}{E_L} C_{11}, \quad (6.2)$$

$$C_{12} = C_{21} = C_{22} \mu_{LT}, \quad (6.3)$$

$$C_{66} = G_{LT}. \quad (6.4)$$

Po dosazení do vztahů (6.1) až (6.4) získáme matici **C**, která bude symetrická a bude mít tvar

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 36\,657,95 & 2\,655,48 & 0 \\ 2\,655,48 & 7\,986,4 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,787 \end{bmatrix}.$$

Nyní potřebujeme získat prvky matice ohybové tuhosti **D**. Tyto prvky získáme ze vztahu (5.20)

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (C_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3).$$

Při výpočtu pro tloušťku vrstev h postupujeme podle Obr. 4.4 z kapitoly 4.2. Po dosazení získáme matici ohybové tuhosti ve tvaru

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

$$D = \begin{bmatrix} 344,52 & 27,66 & 0 \\ 27,66 & 120,52 & 0 \\ 0 & 0 & 29,04 \end{bmatrix}.$$

Pro výpočet kritické síly pro ztrátu stability dosadíme prvky z matice ohybové tuhosti **D** do vztahu (5.19)

$$N_{cr} = (\pi^2/a^2)[D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}].$$

Kritická síla je v tomto případě

$$\begin{aligned} N_{cr} &= (\pi^2/a^2)[D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}] \\ &= (\pi^2/1000^2)[344,52 + 2(27,66 + 2 \cdot 29,04) + 120,52] \\ &= 6,28 \cdot 10^{-3} N \cdot mm^{-1} \end{aligned}$$

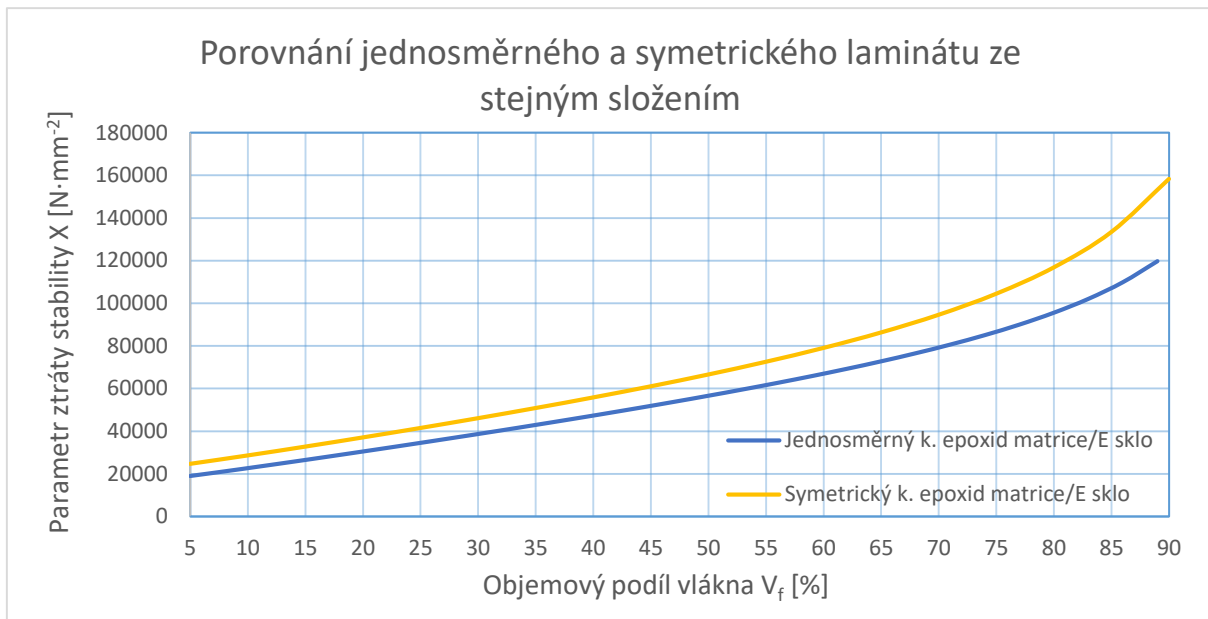
6.3 Porovnání kritické síly pro ztrátu stability

V následující kapitole bude porovnán jednosměrný kompozit ze symetrickým laminátem, který má složení vrstev [0/90]_s. Pro výpočet byl použit program LamiEx a grafy byly vypracovány v programu Microsoft Excel. Pro lepší porovnání jednosměrného a symetrického laminátu, které mají rozdílnou tloušťku, si zadefinujeme takzvaný parametr ztráty stability **X**, který je dán vztahem

$$X = 12a^2 N_{cr} / \pi^2 h^3. \quad (6.7)$$

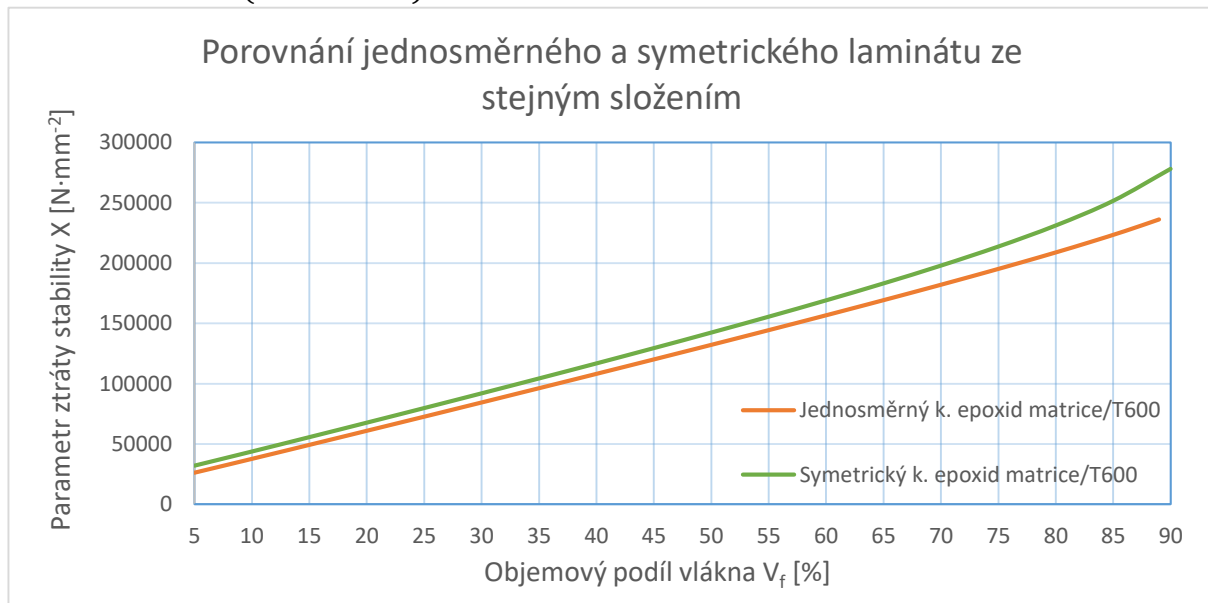
6.3.1 Porovnání jednosměrného a symetricky křížově vrstveného laminátu

Porovnání jednosměrného laminátu a symetricky křížově vrstveného laminátu, kde jsou oba lamináty z epoxidové pryskyřice s vlákny ze skloviny typu E, nebo uhlíkovými vlákny T600. Porovná se závislost parametru ztráty stability na objemovém podílu vláken v kompozitu.



Graf 1 Porovnání jednosměrného a symetrického laminátu se stejným složením, epoxid matrice/E sklo [19]

V Graf 1 porovnáme jednosměrný kompozit se symetricky křížově vrstveným laminátem, které jsou složeny z epoxidové matrice a skleněných vláken typu E. Na první pohled je patrné, že odolnost vůči ztrátě stability roste se zvyšujícím se objemovým podílem vláken. Dále lze vidět, že symetrický kompozit je odolnější než kompozit jednosměrný. Tento trend je patrný především v oblasti $V_f > 50 \%$. Největší rozdíl mezi kompozity je při objemovém podílu vláken kolem 90 %, kde rozdíl v parametru ztráty stability X dosahuje rozdílu $30\,000\ N \cdot mm^{-2}$ (rozdíl 18%).



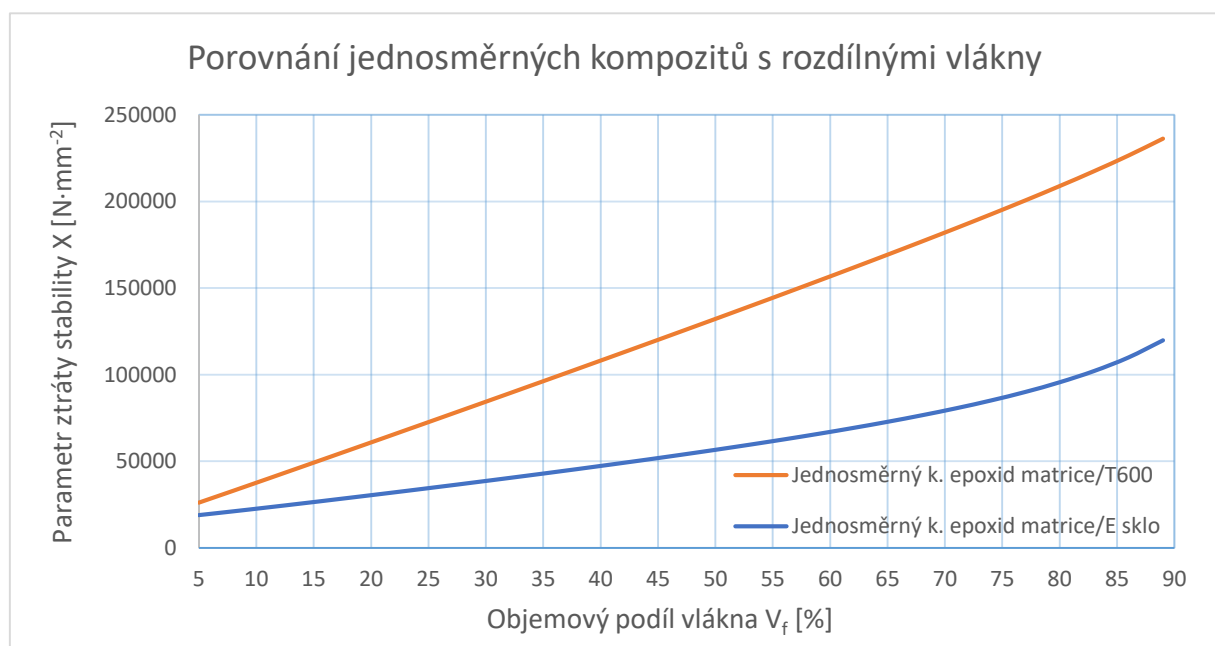
Graf 2 Porovnání jednosměrného a symetrického laminátu se stejným složením, epoxid matrice/T600 [19]

V Graf 2 opět porovnáváme jednosměrný kompozit se symetricky křížově vrstveným laminátem, ale tentokrát jsou kompozity složeny z epoxidové pryskyřice a uhlíkových vláken T600, které mají na rozdíl od skleněných vláken velmi rozdílné vlastnosti v podélném a příčném směru.

Při porovnání grafu 1 a grafu 2 je patrné, že symetricky křížově vrstvený laminát je odolnější vůči ztrátě stability než kompozit jednosměrný. Je také patrné, že laminát s vyšším množstvím objemového podílu vlákna má větší parametr ztráty stability, a tudíž je odolnější vůči ztrátě stability. Růst parametru ztráty stability u kompozitu z epoxidové pryskyřice a vláken T600 je téměř lineárně závislý na objemovém podílu vláken. Lze také vidět, že u symetrického laminátu dramaticky roste parametr ztráty stability při $V_f > 75\%$. Maximální hodnota parametru X nalezneme u symetrického kompozitu s uhlíkovými vlákny T600, a to konkrétně $278\,000\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ (232 % vůči jednosměrnému kompozitu s vlákny z E skloviny se stejným podílem vláken).

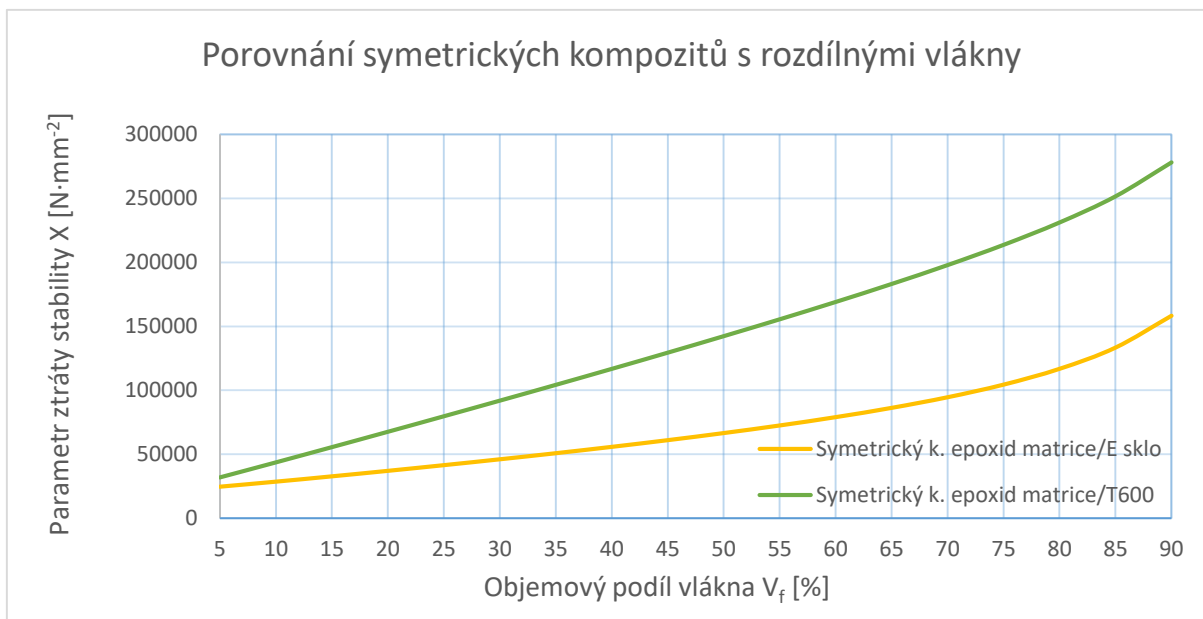
6.3.2 Porovnání parametru ztráty stability u kompozitů s rozdílnými vlákny

V následující kapitole bude porovnána závislost parametru ztráty stability X na podílu objemových vláken V_f u kompozitů s rozdílnými vlákny v epoxidové matrici.



Graf 3 Porovnání jednosměrných kompozitů s rozdílnými vlákny [19]

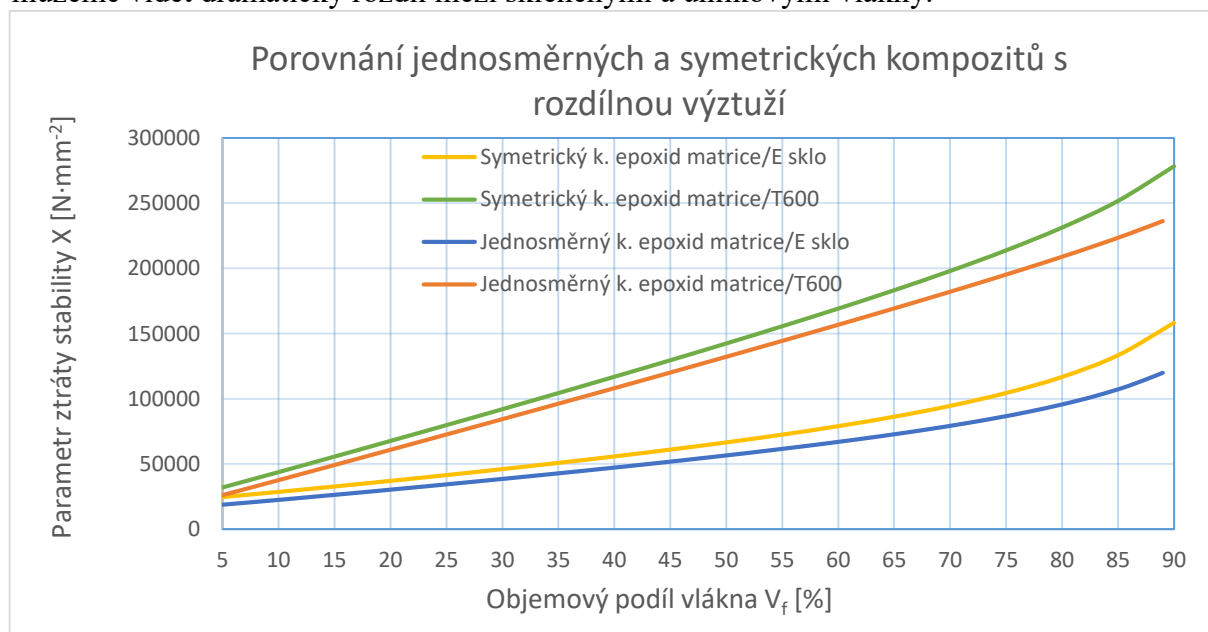
Z Graf 3 je patrné, že uhlíková vlákna T600 jsou odolnější proti ztrátě stability. U uhlíkových vláken lze vidět, že parametr ztráty stability je více závislý na objemovém podílu vlákna. Zatímco u jednosměrného kompozitu s epoxidovou pryskyřicí a vlákny z E skloviny je nárůst parametru ztráty stability, mezi 5 % až 90 % objemového podílu vláken, kolem $100\,000\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ (nárůst o 530 %), u kompozitu s epoxidovou pryskyřicí a uhlíkovými vlákny T600 je nárůst o $210\,000\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ (nárůst o 800 %).



Graf 4 Porovnání symetrických kompozitů s rozdílnými vlákny [19]

Trendy, patrné z Graf 3, lze vypočítat i v **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** Lze vidět, že pro lepší odolnost vůči ztrátě stability je vhodné zvolit uhlíková vlákna T600, která jsou za stejných podmínek schopná odolat větší síle, než ztratí stabilitu. Nárůst parametru ztráty stability, mezi 5 % až 90 % objemového podílu vláken, je u symetrického kompozitu s vlákny z E skloviny $120\,000\ N \cdot mm^{-2}$ (nárůst o 540 %) a u kompozitu s uhlíkovými vlákny T600 o $240\,000\ N \cdot mm^{-2}$ (nárůst o 770 %).

V Graf 5 jsou zobrazeny oba typy jak jednosměrných, tak i symetrických kompozitů. Můžeme zde pozorovat vyšší odolnost vůči ztrátě stability u symetrických laminátů a u výztuže můžeme vidět dramatický rozdíl mezi skleněnými a uhlíkovými vlákny.



Graf 5 Porovnání jednosměrných a symetrických kompozitů s rozdílnými vlákny [19]

Symetricky křížově vrstvené lamináty jsou vůči jednosměrným kompozitům odolnější především z důvodu větší tloušťky kompozitu. Zatímco jednosměrný kompozit měl tloušťku $0,125 \text{ mm}$, symetrický kompozit byl složen ze čtyř vrstev, kde každá vrstva měla také $0,125 \text{ mm}$. Celkově měl symetrický laminát tloušťku $0,5 \text{ mm}$, a když se podíváme na rovnici (6.7)

$$X = 12a^2 N_{cr} / \pi^2 h^3,$$

zjistíme, že je zde třetí odmocnina tloušťky. Na tomto případu můžeme vidět, že při obavě ze ztráty stability je vhodné zvýšit tloušťku kompozitu.

Dramatický rozdíl při porovnání skleněných a uhlíkových vláken je způsobený markantním rozdílem mechanických vlastností materiálů. U uhlíkových vláken T600 je podélný modul v pružnosti v tahu $E_{fL} = 230\,000 \text{ MPa}$, příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 15\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 50\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovo číslo $\mu_f = 0,3$ vlákna ze skloviny mají podélný modul v pružnosti v tahu $E_{fL} = 74\,000 \text{ MPa}$ a příčný modul pružnosti v tahu $E_{fT} = 74\,000 \text{ MPa}$, modul pružnosti ve smyku $G_f = 30\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovo číslo $\mu_f = 0,25$. Při výpočtech kritické síly je z elastických konstant nejzásadnější podélný modul pružnosti v tahu, kde rozdíl mezi danými výztužemi činí $166\,000 \text{ MPa}$. Další dvě elastické konstanty nejsou tak zásadní, a navíc rozdíl těchto konstant mezi oběma materiály není příliš velký. Oba tyto materiály pro výztuže mají své výhody a nevýhody, ale v případě ztráty stability je vhodnější vybrat uhlíková vlákna typu T600.

7. Závěr

Tato práce se zabývala problematikou ztráty stability laminátových desek. Z tohoto důvodu bylo nutné zaměřit se i na oblast vláknových kompozitů a seznámit se se základními materiály, které je vhodné využít na výrobu výztuže a matrice.

Desky z kompozitu jsou využívány kvůli svým mechanickým vlastnostem a nízké hmotnosti vůči ostatním izotropním materiálům. Navíc je u kompozitů možnost velké variability výrobku a díky vhodné skladbě lamin lze korigovat i mechanické vlastnosti. Práce s nimi je ale mnohem komplikovanější a je zapotřebí seznámit se s kompozity podrobněji.

Z tohoto důvodu bylo nutné obeznámit se s *klasickou laminátovou teorií* a na jejím základě si odvodit globální matici tuhosti a seznámit se se základními typy vrstvení lamin, které tuto globální matici tuhosti zjednodušují. Následně byly odvozeny rovnice pro ztrátu stability, které lze u zadaných příkladů zjednodušit, a získali jsme rovnice pro výpočet kritické síly pro ztrátu stability u jednosměrného kompozitu a symetricky křížově vrstveného laminátu.

V příkladové části jsme porovnávali jednosměrné a symetricky křížově vrstvené lamináty s epoxidovou matricí a vlákny ze skloviny typu E, nebo uhlíkovými vlákny T600. Z porovnání nám vyšlo, že čím je deska tlustší, tím je odolnější vůči ztrátě stability. Dále můžeme říct, že uhlíková vlákna mají v těchto příkladech vhodnější kombinaci mechanických vlastností, které lépe zamezují ztrátě stability.

Zdroje

- [1] PETRTÝL, Miroslav. *Mechanika kompozitních těles*. Praha: ČVUT, 1991. ISBN 80-01-00639-5.
- [2] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. 2. přeprac. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 978-80-7043-689-9.
- [3] PTÁČEK, Luděk. *Nauka o materiálu II*. 2., opr. a rozš. vyd. Brno: CERM, 2002. ISBN 80-7204-248-3.
- [4] VRBKA, Jan. *Mechanika kompozitů*. VUT v Brně: ÚMTMB, 2014.
- [5] VOJTĚCH, Dalibor. *Materiály a jejich mezní stavy*. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, 2010. ISBN 978-80-7080-741-5.
- [6] EHRENSTEIN, Gottfried W. *Polymerní kompozitní materiály*. V ČR 1. vyd. Praha: Scientia, 2009. ISBN 978-80-86960-29-6.
- [7] CABRNOCH, Bohuslav. *Composite Materials and their Properties* [online]. In: . [cit. 2018-08-14]. Dostupné z: http://drone.fsid.cvut.cz/mcmfolder/Composite%20materials%20and%20their%20properties_2015.pdf
- [8] MACEK, Karel a Petr ZUNA. *Strojírenské materiály*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-01-02798-8.
- [9] VAIDYA, Uday. *Composites for Automotive, Truck and Mass Transit - Materials, Design, Manufacturing - 3.5 Aramid (Kevlar®) Fibers*. DEStech Publications, 2011. Dostupné také z: <https://app.knovel.com/hotlink/pdf/id:kt010RODBE/composites-automotive/aramid-kevlar-fibers>
- [10] MIRACLE, Daniel B. Donaldson. *ASM handbook*. 10th editon. Materials Park, Ohio: ASM International, 2001. ISBN 978-0871707031.
- [11] AKOVALI, Güneri. *Handbook of composite fabrication*. Shawbury, U.K.: Rapra Technology, 2001. ISBN 978-1859574393.
- [12] BAREŠ, Richard. *Kompozitní materiály*. Praha: SNTL, 1988. "
- [13] CAMPBELL, F. C. *Structural composite materials*. Materials Park, Ohio: ASM International, 2010. ISBN 978-1615030378.
- [14] CAMPBELL, F.C. *Manufacturing processes for advanced composites*. Oxford: Elsevier, 2004. ISBN 18-561-7415-8.
- [15] WANG, Rumin, Shuirong ZHENG a Yaping ZHENG. *Polymer matrix composites and technology*. Beijing: Science Press, 2011. Woodhead Publishing in materials. ISBN 08-570-9221-9.
- [16] ADVANI, Suresh G a Kuang-Ting HSIAO. *Manufacturing techniques for polymer matrix composites (PMCs)*. Cambridge: Woodhead Publishing, 2012. Woodhead Publishing in materials. ISBN 08-570-9625-7.
- [17] STRONG, A. Brent. *Fundamentals of composites manufacturing: materials, methods and applications*. 2nd ed. Dearborn, Mich.: Society of Manufacturing Engineers, 2008. ISBN 978-0872638549.

- [18] *Vacuum Infusion Process (VIP) Guide* [online]. [cit. 2018-08-15]. Dostupné z: <http://www.performancecomposites.com/about-composites-technical-info/125-resin-vacuum-infusion.html>
- [19] POUL, Robin. *LamiEx v.3.0*. 2006.
- [20] Whitney, J., M.: Effects of Constituent Material Properties on the Stability of Fiber Reinforced Composite Plates.
- [21] BURAGOHAİN, Manoj Kumar. *Composite structures: design, mechanics, analysis, manufacturing and testing*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017. ISBN 978-1-138-74667-1
- [22] Kassapogloum Ch.: Design and Analysis of Composite Structures with Applications to Aerospace Industry, John Wiley and Sons, Chichester, 2013.
- [23] MATUŠŮ, Martin. *Analýza průhybu kompozitních nosníků*. 2017. Bakalářská práce. ČVUT.