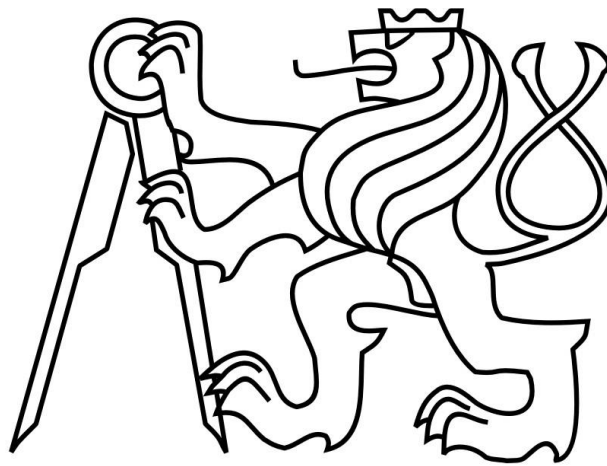


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY



ANALÝZA NAPJATOSTI NALISOVANÝCH ROTUJÍCÍCH
GYROSKOPICKÝCH KOTOUČŮ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Vasyliov** Jméno: **Oleh** Osobní číslo: **453151**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Analýza napjatosti nalisovaných rotujících gyroskopických kotoučů

Název bakalářské práce anglicky:

Stress of state analysis of the gyroscope rotated compound pressed discs

Pokyny pro vypracování:

Bakalářská práce bude obsahovat části:

- 1) Rešerše teorie nalisovaných spojů a jejich uplatnění v praxi
- 2) Analytické numerické experimenty
- 3) Analýza stavu napjatosti pro konstrukční úpravy
- 4) Závěry

Seznam doporučené literatury:

- [1] MICHALEC, Jiří a kolektiv. Pružnost a pevnost I. Praha: ČVUT, 2006.
- [2] MICHALEC, Jiří a kolektiv. Pružnost a pevnost II. Praha: ČVUT, 2006.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Karel Víték, CSc., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **24.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Karel Víték, CSc.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

3.5.2018

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Oleh Vasyliiev
Název BP:	Analýza napjatosti nalisovaných rotujících gyroskopických kotoučů.
Anglický název:	Stress of state analysis of the gyroscope rotated compound pressed discs.
Rok:	2018
Odbor studia:	Teoretický základ strojního inženýrství
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky / Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí práce:	Ing. Karel Vítek, CSc.
Bibliografické údaje:	počet stran: 38 počet obrázků: 24 počet tabulek: 1 počet příloh: 1
Klíčová slova:	Deformace, tlak, rotační těleso, osově napětí, tečné napětí a radiální napětí, gyroskop, setrvačnick.
Keywords:	Deformation, pressure, rotation solid, axial stress, tangential stress and radial stress, gyroscope, flywheel.
Anotace:	Cílem této bakalářské práce bylo analyzovat chování napětí rotujících gyroskopických kotoučů sestavených ze dvou částí — vnitřního kotouče a vnější objímky, spojených pomocí technologie nalisování.

Abstract:

The goal of this bachelor's theses was to analyze behavior of tangential and radial stress of rotating gyroscope compound pressed discs.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem

„Analýza napjatosti nalisovaných rotujících gyroskopických kotoučů.“

vypracoval samostatně, veškerou použitou literaturu a podkladové materiály uvádím v příloženém seznamu literatury.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze 15. 8. 2018

.....

Oleh Vasyliiev

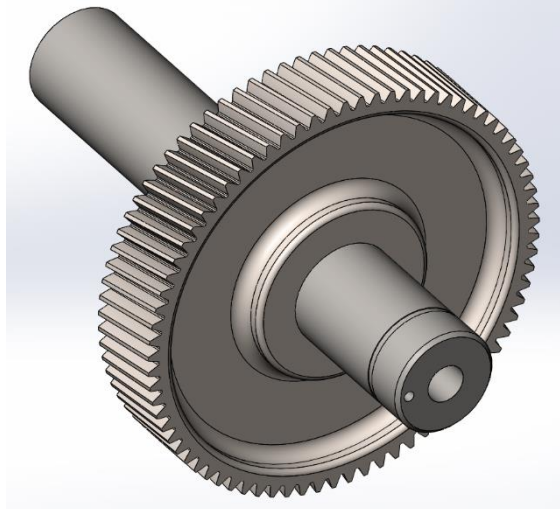
PODĚKOVÁNÍ

Děkuji především svému vedoucímu bakalářské práce, panu Ing. Karlu Vítkovi, za cenné rady a připomínky, které mi pomohly zvládnout jak teoretické výpočty, tak i jazykovou bariéru.

Obsah

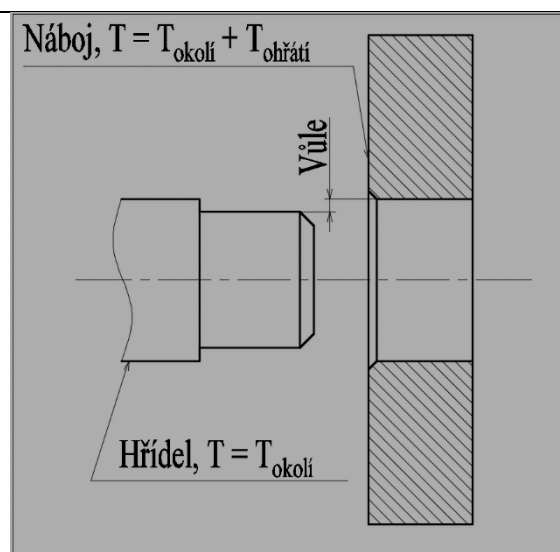
<i>Nalisované spoje a jejich využití ve strojích.....</i>	2
<i>Setrvačnick a jeho využití v technice.....</i>	4
Silové gyroskopy.....	5
<i>Teorie rotujících kotoučů, odvození tečného a radiálního napětí.....</i>	7
<i>Tenký rotující kotouč.....</i>	10
Základní výpočet.....	10
Vliv vlastností materiálu na měrný kinetický moment.....	14
Vliv geometrie kotouče na měrný kinetický moment.....	15
<i>Sestavný setrvačnick.....</i>	17
Teorie rotujících kotoučů.....	18
Změna poloměru r^2 kotouče a objímky v důsledku rotace.....	19
Korekce zadaného přesahu.....	20
Teorie tlustostěnných nádob.....	20
Přesah (výpočet tlaku p_2).....	21
Průběhy napětí.....	22
Výsledné napětí.....	22
Vyhodnocení výsledků.....	23
Posouzení praktického využití sestavného setrvačnicku.....	26
Využití kompozitu pro zvýšení jakosti objímky.....	27
<i>Minimalizace změny přesahu Δr^2 od rotace.....</i>	30
<i>Vliv lopatek na měrný kinetický moment.....</i>	32
<i>Závěr.....</i>	36
<i>Seznam užitých označení.....</i>	37
<i>Seznam použité literatury.....</i>	38

Nalisované spoje a jejich využití ve strojích.



Obrázek 1, nalisované ozubené kolo

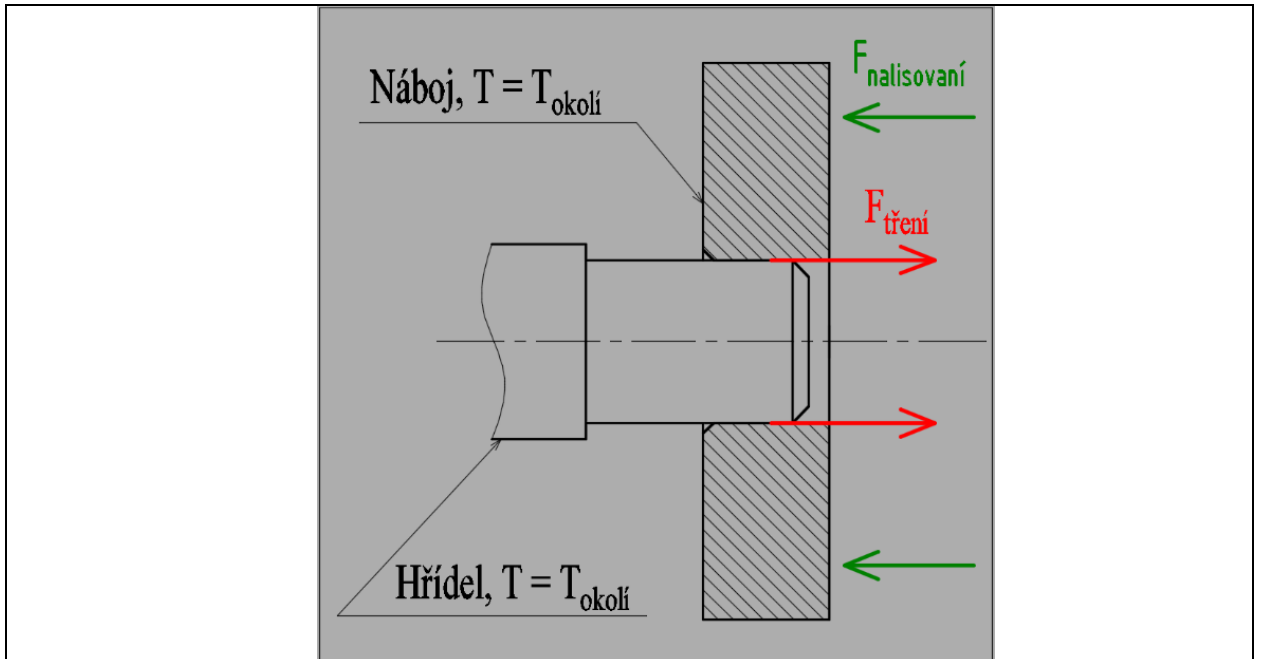
Tlakové spoje jsou typickým představitelem nerozebíratelných silových spojů. Nejčastěji se využívají pro spojení náboje s hřídelem, viz obr. 1, kde funkci náboje může plnit ozubené kolo, řemenice, ložisko nebo jiná součást. Zásadní vliv na její funkce má tření, které vzniká na stykových plochách spojovaných částí. Velikost síly tření je závislá na spojované ploše a tlaku, a proto podmínkou vzniku dostatečně tuhého a pevného spoje je přesah spojovaných částí. Přesah je definován jako rozdíl velikostí kontaktních poloměrů spojovaného hřídele a náboje. Hřídel musí mít vždy větší rozměr než náboj, jinak kvůli vzniklé vůli spoj začne plnit funkci ložiska.



Obrázek 2, nalisování za tepla

Existují dva základní druhy nalisování: nalisování za tepla (viz obr. 2), a nalisování za studena. Při nalisování za tepla je náboj ohřátý, kdežto hřídel má teplotu okolí nebo je ochlazen na nižší teplotu. Díky tomu se náboj roztáhne a hřídel se smrští nebo zůstane stejným. Takže přesah se změní na vůli a umožní spojení součástí bez nutnosti zavádění velké osové lisovací síly.

Při nalisování za studena je k překonání tření nutné uplatnit lisovací sílu (viz obr. 3). Pro úspěšné složení spoje bez rizika poškození se spojované součásti opatřují náběhovými kužely, což je nejčastěji sražení hran pod úhlem 45 stupňů.

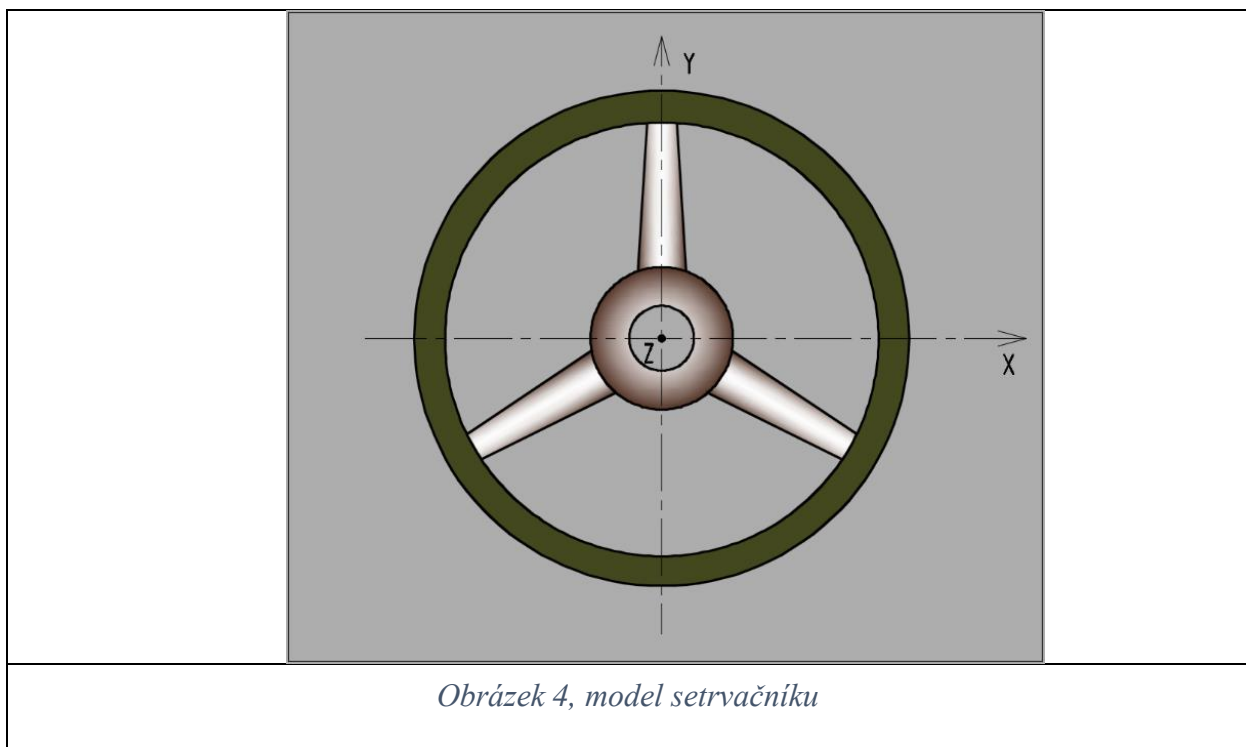


Obrázek 3, nalisování za studena

Výhodou nalisovaných spojů je jejich jednoduchost a spolehlivost. Nevyžadují vytváření tvarových ploch jako například u drážkování nebo polygonických spojů. Spoje vznikají bezprostředně, bez nutnosti využití přídavného materiálu. Používají se zejména pro spojování součástí kruhového průřezu, které pak mohou přenášet nejenom velké krouticí momenty, ale i axiální síly.

Hlavní nevýhodou nalisovaných spojů kromě jejich nesnadné rozebíratelnosti jsou velké požadavky na přesnost rozměrů spojovaných součástí, což se ale v poslední době stává méně závažné, protože se zvýšila přesnost obráběcích strojů. Při využití nalisování je nutné respektovat vzniklé napětí v náboji a v hřídeli. Zvláště je důležité si uvědomit, že pokud hřídel a objímka jsou vyrobeny z odlišných materiálů, tak dojde ke změně přesahu také při odchylce provozní teploty od jmenovité hodnoty.

Setrvačník a jeho využití v technice.



Setrvačník tvoří rotující těleso, které se využívá jako akumulátor kinetické energie nebo za účelem vytvoření gyroskopického momentu. Nejčastěji má formu disku, usazeného na hřídeli (viz obr. 4), ale ve skutečnosti za setrvačník můžeme považovat jakékoliv hmotné těleso, konající rotační pohyb, například kliková hřídel spalovacího motoru. Základními parametry setrvačníku je jeho hmotnost m a moment setrvačnosti J , který je definován jako $J = mr^2$ pro hmotný bod anebo $J = \iiint \rho \cdot (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, kde ρ je hustota materiálu setrvačníku (v daném případě osa z je považovaná za osu rotace).

Kinetická energie rotujícího tělesa je definovaná: [1], (str. 80)

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (1)$$

Zde ω je úhlová rychlost. Takže u setrvačníku s určitým momentem setrvačnosti je jeho mechanická energie závislá jenom na otáčkách, které jsou ve většině případů limitovány pevností materiálu kotouče a jenom někdy dalšími faktory. Takovými faktory mohou být například maximální přípustné otáčky ložisek nebo elektromotoru, který pohání daný setrvačník.

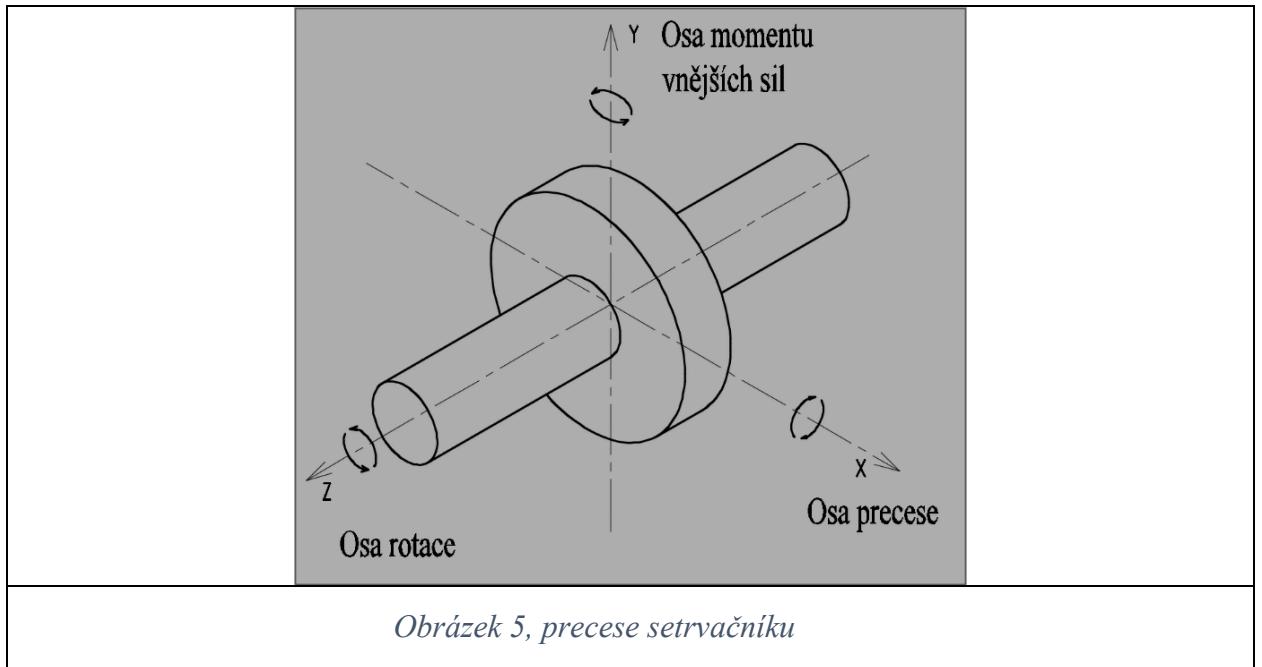
Chování setrvačníku v inerciální soustavě souřadnic můžeme popsat vztahem:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad [1], (str. 21)$$

Kde \vec{L} je kinetický moment, který je pro absolutně tuhé těleso definován jako:

$$\vec{L} = J\omega \quad [1], (\text{str. } 80)$$

Zde \vec{M} je moment vnějších sil.



Změna vektoru kinetického momentu může být vyjádřena nejenom změnou jeho velikosti, ale i směru. Například moment vnějších sil \vec{M} působící kolmo na osu rotace gyroskopu způsobí pohyb, který je kolmý jak na \vec{M} tak i \vec{L} , čili k precesi, viz obr. 5. Úhlová rychlost precese $\vec{\omega}_p$ závisí na kinetickém momentu setrvačnicku a na velikosti momentu vnějších sil \vec{M} :

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \quad [2], (\text{str. } 3)$$

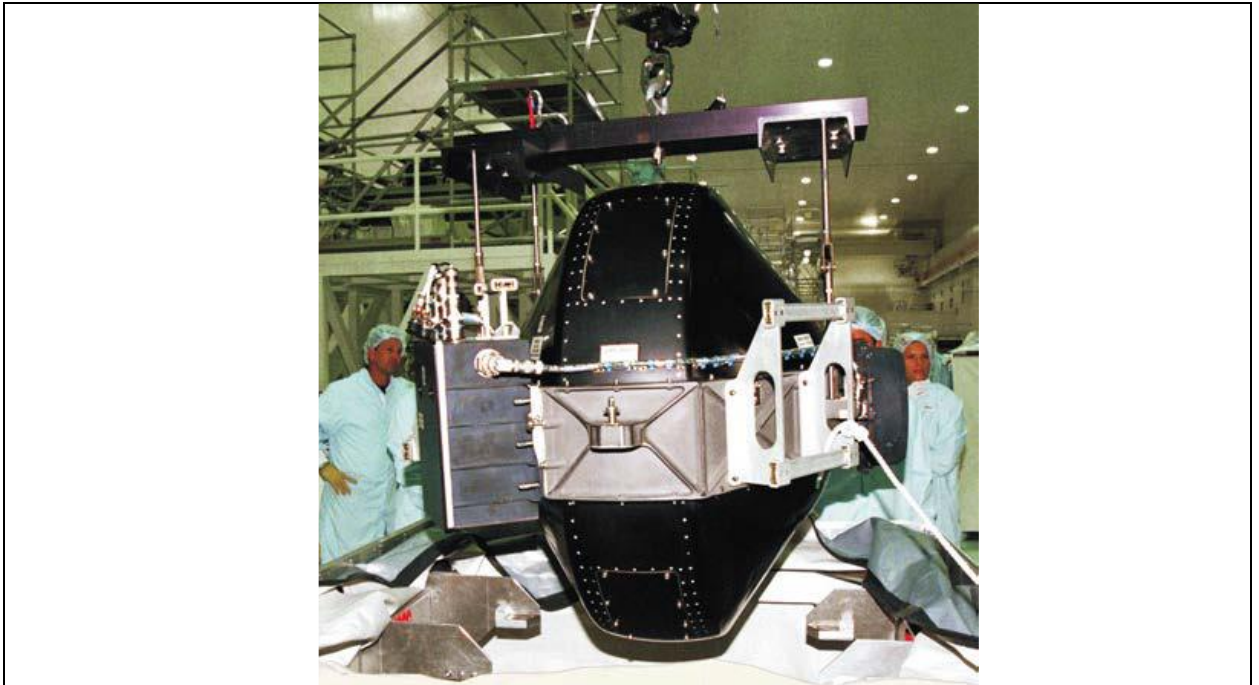
Je zřejmé, že rychlost precese $\vec{\omega}_p$ je nepřímo úměrná kinetickému momentu \vec{L} .

Silové gyroskopy.

Velkou oblastí využití setrvačnicku jsou gyroskopy. Podstatou jejich funkce je schopnost bránit změně polohy své osy rotace (vznik momentu sil při precesi), a proto se často využívají v navigaci.

Zvláštním příkladem využití gyroskopu jsou silové gyroskopy, které v nejčastějším případě tvoří setrvačnick se dvěma stupni volnosti. To znamená, že konstrukce daného setrvačnicku umožňuje pootočení osy rotace disku kolem druhé osy a z toho důvodu i vznik momentu sil působících na rám, ke kterému je připevněn gyroskop (viz vztah (1)). Tato konstrukce gyroskopu

se využívá například v zařízeních systémů řízení letové polohy kosmické lodi, viz obr. 6, kde vznik momentu sil \vec{M} vyvolá pootočení družice v prostoru. Celkový systém řízení pak obsahuje několik takových gyroskopů umístěných v konstrukci družice pod různými úhly nebo kolmo na sebe.



Obrázek 6, silové gyroskopy ISS

[3], (str. 230)

Vztah (1) vyjadřuje, že při nějaké konstantní úhlové rychlosti precese $\vec{\omega}_p$ je moment sil \vec{M} tím větší, čím je větší kinetický moment \vec{L} . Nebo při nějakém požadovaném momentu \vec{M} se rychlost precese dá zmenšit zvětšením kinetického momentu \vec{L} . Je to důležitý závěr, protože úhel precese je obvykle limitovaný (při $\varphi_p = 2\pi$ vektor \vec{M} změní svůj směr na opačný) a menší rychlost precese znamená, že rezultující gyroskopický moment může působit na družici delší dobu.

Při dosažení maximálního úhlu precese je gyroskop jakoby nasycen a pro vrácení do původního (počátečního) stavu polohy satelitu musí na satelit nějakou dobu působit vnější moment sil, který je obvykle vyvolán prací raketového motoru systému řízení letové polohy. Ve většině případů, během vracení gyroskopu do svého počátečního stavu, družice částečně nebo úplně přerušuje své provozní funkce buď kvůli vzniklým vibracím anebo z energetických důvodů.

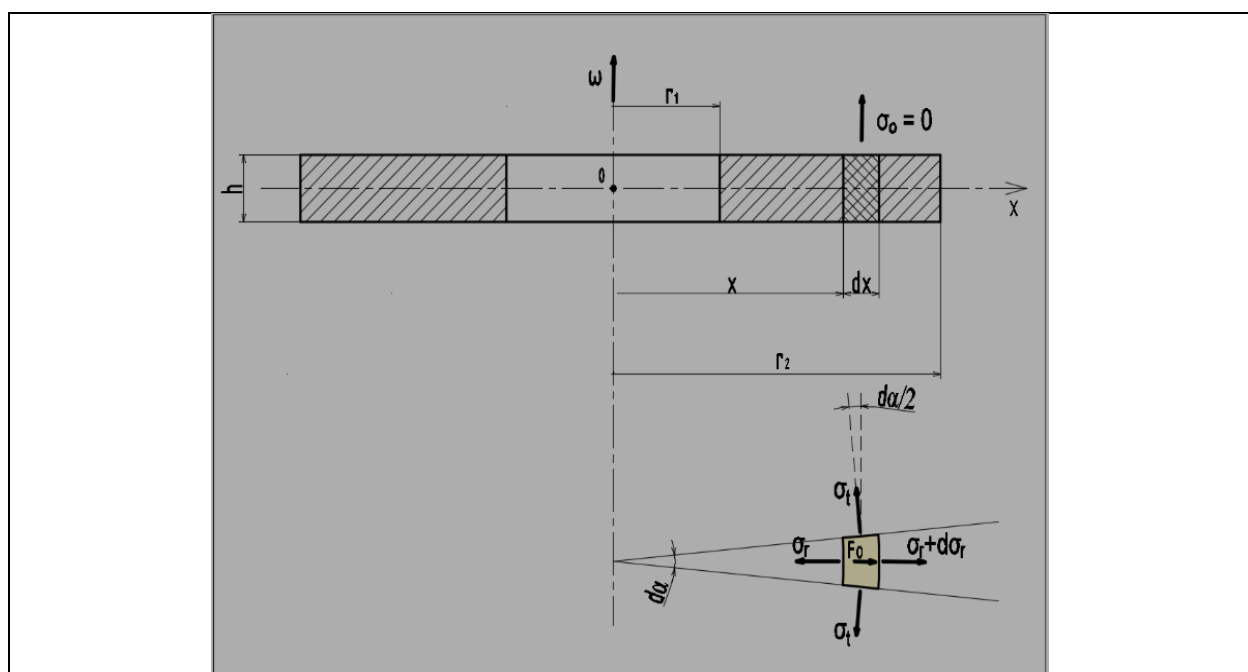
Z výše uvedeného je zřejmé, že kinetický moment \vec{L} je velmi důležitým parametrem setrvačnicku silového gyroskopu, protože umožňuje zvýšení gyroskopického momentu sil nebo prodloužení doby mezi jednotlivými fázemi nasycení gyroskopu. Samozřejmě, nejjednodušším způsobem zvětšení kinetického momentu setrvačnicku je zvětšení jeho rozměru, ale vzrůstá při tom

i hmotnost, takže z praktického hlediska je důležitým měrný kinetický moment, který je vztažený k hmotnosti setrvačníku.

V této bakalářské práci se zabýváme posouzením možnosti zvýšení měrného kinetického momentu setrvačníku jeho rozdělením na části spojené spolu pomocí technologie nalisování. Analýzy realizujeme pro setrvačnick tvaru kotouče konstantní tloušťky, který se skládá z vnitřního kotouče a na něm nalisovaného vnějšího kotouče – vnější objímky. Mechanické vlastnosti použitých materiálů (ocel, titan, wolfram a dural) uvažujeme orientační, protože se jedná o analýzu principu, nikoli o konkrétní konstrukce setrvačníku.

Teorie rotujících kotoučů, odvození tečného a radiálního napětí.

Rotující kotouč je těleso kruhového nebo mezi-kruhového tvaru, které se otáčí kolem své osy úhlovou rychlostí ω . Je proto zatížen po obvodu spojitě rozloženými odstředivými silami a případně silami na vnitřním obvodě r_1 nebo vnějším obvodě r_2 , které vyvolávají radiální napětí σ_{r1} nebo σ_{r2} .



Obrázek 7, sily, působící na element kotouče

Vytkneme symetrický element, který má tloušťku h a rozměry poloměrů x , $x + dx$ a elementární úhel mezi osovými řezy označíme $d\alpha$ (viz obr. 7). Vlivem působení odstředivé síly

při rotaci kotouče vzniknou ve stěnách tohoto elementu radiální a tečná napětí σ_r a σ_t , která jsou zároveň funkcí x . Je-li tloušťka kotouče h malá, můžeme uvažovat osové napětí $\sigma_o = 0$. Výše již bylo zmíněno, že na element také působí odstředivá síla F_o , jejíž velikost je dána vztahem:

$$dF_o = dm \cdot \omega^2 \cdot x = \rho \cdot x \cdot d\alpha \cdot h \cdot dx \cdot \omega^2 \cdot x \text{ kde } \rho \text{ je hustota materiálu kotouče.}$$

Rovnice statické rovnováhy pro daný element pak má tvar:

$$\begin{aligned} (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot h \cdot d\alpha - \sigma_r \cdot x \cdot h \cdot d\alpha + \rho \cdot x^2 \cdot d\alpha \cdot h \cdot dx \cdot \omega^2 &= \\ &= \sigma_t \cdot h \cdot dx \cdot d\alpha \end{aligned}$$

Vydělíme vřah... $h \cdot d\alpha \neq 0$:

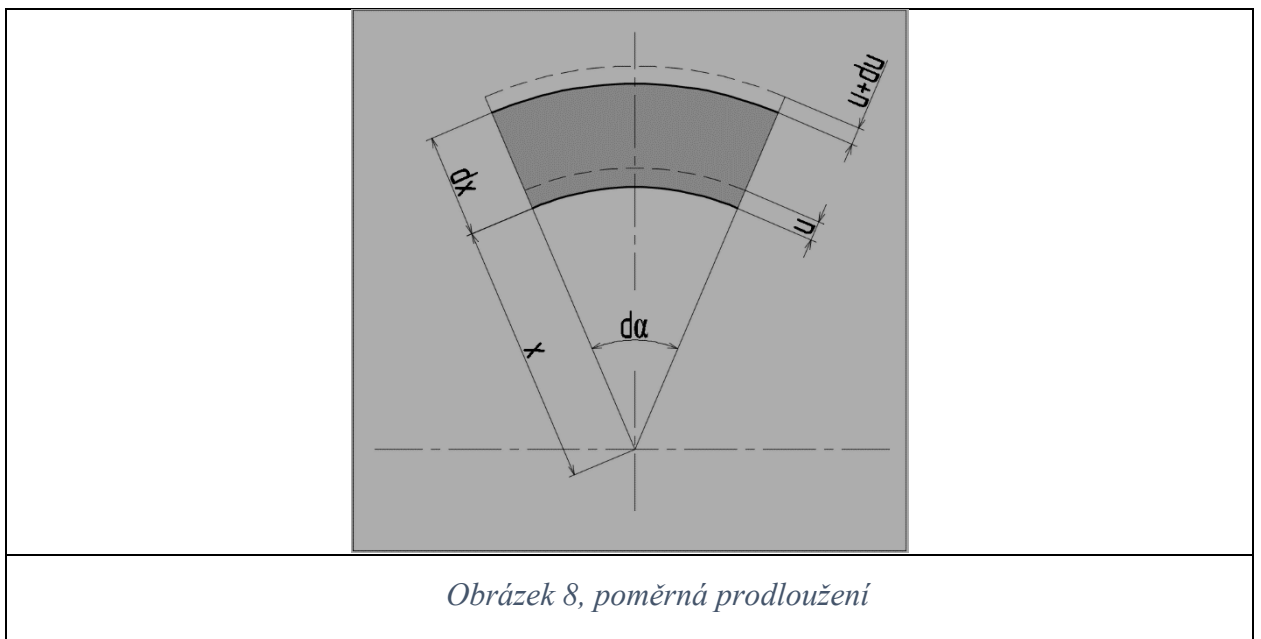
$$(\sigma_r \cdot x + \sigma_r \cdot dx + d\sigma_r \cdot x + d\sigma_r \cdot dx) - \sigma_r \cdot x + \rho \cdot x^2 \cdot dx \cdot \omega^2 - \sigma_t \cdot dx = 0$$

$$\sigma_r \cdot dx + d\sigma_r \cdot x + \rho \cdot x^2 \cdot dx \cdot \omega^2 - \sigma_t \cdot dx = 0$$

Vydělíme vřah ... $dx \neq 0$:

$$\sigma_r + x \cdot \frac{d\sigma_r}{dx} - \sigma_t = -\rho \cdot x^2 \cdot \omega^2 \quad (2)$$

Poměrná prodloužení u elementu vyplývají z obr. 8.



$$\begin{cases} \varepsilon_t = \frac{(x+u) \cdot dx - x \cdot d\alpha}{x \cdot d\alpha} = \frac{u}{x} \\ \varepsilon_r = \frac{dx + (u+du) - u - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u' \end{cases}$$

Z rozšířeného Hookova zákona dosadíme napětí elementu:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \frac{u}{x} = \frac{1}{E}[\sigma_t - \mu\sigma_r] \\ \varepsilon_r = u' = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu\sigma_t] \end{cases} \quad [4], (\text{str. 118})$$

Tečné a radiální napětí pak můžeme vyjádřit jako:

$$\begin{cases} \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_r] = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{u}{x} + \mu \cdot u'\right] \\ \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_r + \mu \cdot \varepsilon_t] = \frac{E}{1-\mu^2}\left[u' + \mu \cdot \frac{u}{x}\right] \end{cases}$$

Dosadíme obě napětí do rovnice statické rovnováhy (2) a dostaneme:

$$x \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[u'' + \mu \cdot \frac{u'}{x} - \mu \frac{u}{x^2} \right] + \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[u' + \mu \cdot \frac{u}{x} \right] - \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[\frac{u}{x} + \mu \cdot u' \right] = -\rho \cdot x^2 \cdot \omega^2$$

Vydělíme vtahem $\frac{E}{1-\mu^2} \neq 0$:

$$x \cdot u'' + \mu \cdot u' - \mu \cdot \frac{u}{x} + u' + \mu \cdot \frac{u}{x} - \frac{u}{x} - \mu \cdot u' = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot (\rho \cdot x^2 \cdot \omega^2) \quad \Rightarrow$$

$$x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot (\rho \cdot x^2 \cdot \omega^2) \quad (3)$$

Homogenní rovnici $x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = 0$ zapíšeme v kvadratuře:

$$x \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot (u \cdot x)' \right]' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{x} \cdot (u \cdot x)' \right]' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} \cdot (u \cdot x)' = C_1 \quad \Rightarrow$$

$$(u \cdot x)' = C_1 \cdot x \quad \Rightarrow$$

$$u \cdot x = C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$u = C_1 \cdot \frac{x}{2} + \frac{C_2}{x} \quad \text{čili máme homogenní řešení ve tvaru } u_H = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

Podle pravé strany odhadneme partikulární integrál u_p ve tvaru:

$$u_p = K \cdot x^3$$

Zapíšeme první a druhou derivaci u_p :

$$u_p' = 3K \cdot x^2$$

$$u_p'' = 6K \cdot x$$

Dosadíme zpět do rovnice (3):

$$x \cdot 6K \cdot x + 3K \cdot x^2 - K \cdot x^2 = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot (\rho \cdot x^2 \cdot \omega^2) \quad \Rightarrow$$

$$K = -\frac{1-\mu^2}{8E} \cdot \rho \cdot \omega^2$$

Pak partikulární řešení má tvar:

$$u_p = -\frac{1-\mu^2}{8E} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot x^3$$

A celkové obecné řešení:

$$u = C_1 x + \frac{C_2}{x} - \frac{1-\mu^2}{8E} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot x^3$$

Po dosazení tohoto řešení do výrazů pro σ_t a σ_r dostaneme:

[5], (str. 82)

$$\begin{cases} \sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 x^2 \\ \sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{x^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 x^2 \end{cases} \quad (4)$$

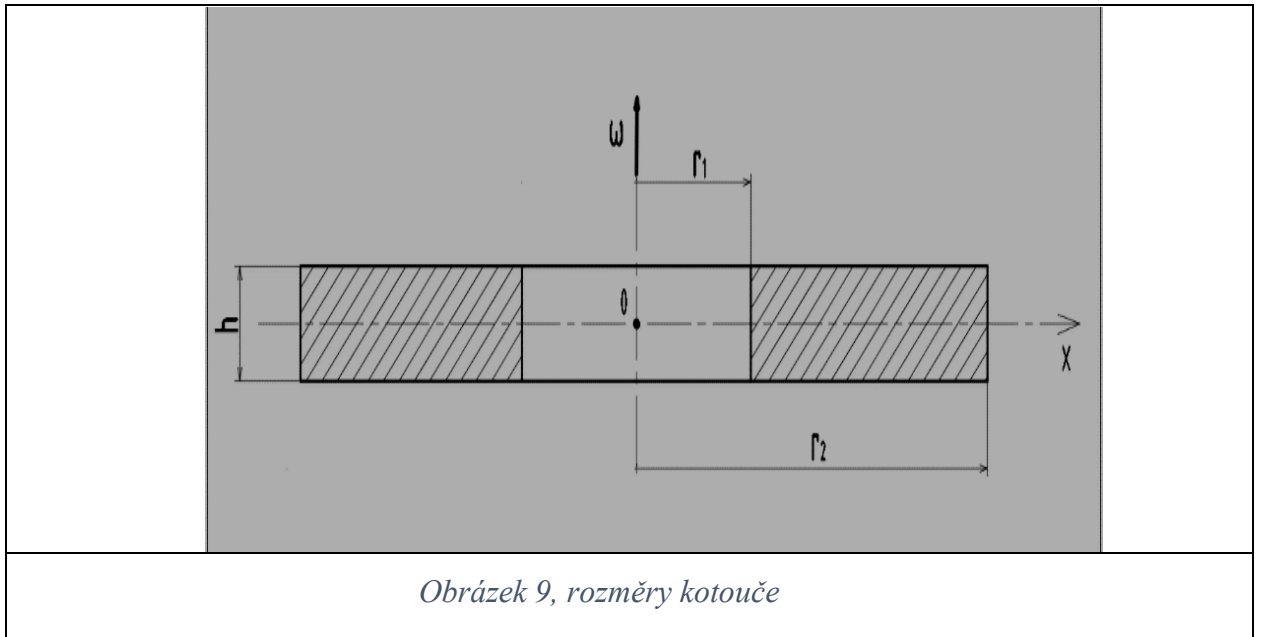
C_1 a C_2 — integrační konstanty.

Je zřejmé, že charakteristiky napětí se s rostoucím x asymptoticky blíží k parabolám, protože druhý člen rovnic $\frac{C_2}{x^2}$ se bude blížit k nule.

Tenký rotující kotouč.

Základní výpočet.

Abychom mohli analyzovat závislost měrného kinetického momentu na zvoleném materiálu a geometrii kotouče, provedeme výpočet volného tenkého rotujícího kotouče dle obr. 9 a navrhne jeho maximální přípustné otáčky, moment setrvačnosti, hmotnost a pak i měrný kinetický moment.



Uvažujeme rotující kotouč dle obr.9 s následujícími parametry:

- Hustota ρ
- Youngův modul E
- Poissonovo číslo μ
- Dovolené napětí σ_d
- Vnitřní poloměr r_1
- Vnější poloměr r_2
- Tloušťka h

Využijeme rovnice (4) průběhu tečných a radiálních napětí tenkého rotujícího kotouče, viz [10, str.], kde pro určení konstant C_1 a C_2 využijeme počáteční podmínky (uvažujeme kotouč s otvorem a jeho nulové radiální napětí na koncích, poloměrech r_1 a r_2)

$$\begin{cases} \sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1+3\mu}{8}\rho\omega^2x^2 \\ \sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{x^2} - \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2x^2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Počáteční podmínky: } \begin{cases} \sigma_{r1} = 0 \\ \sigma_{r2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{1+3\mu}{8}\rho\omega^2r_1^2 \\ 0 = C_1 - \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2r_2^2 \end{cases}$$

Po odečtení druhé rovnici od první dostaneme:

[5], (str. 83)

$$0 = \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{C_2}{r_1^2} + \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2r_2^2 - \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2r_1^2 \implies$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= C_2 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) \implies \\ \implies C_2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) &= \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) \implies \\ \implies C_2 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \right) &= \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) \implies \\ \implies C_2 &= \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 r_2^2. \end{aligned} \quad (5)$$

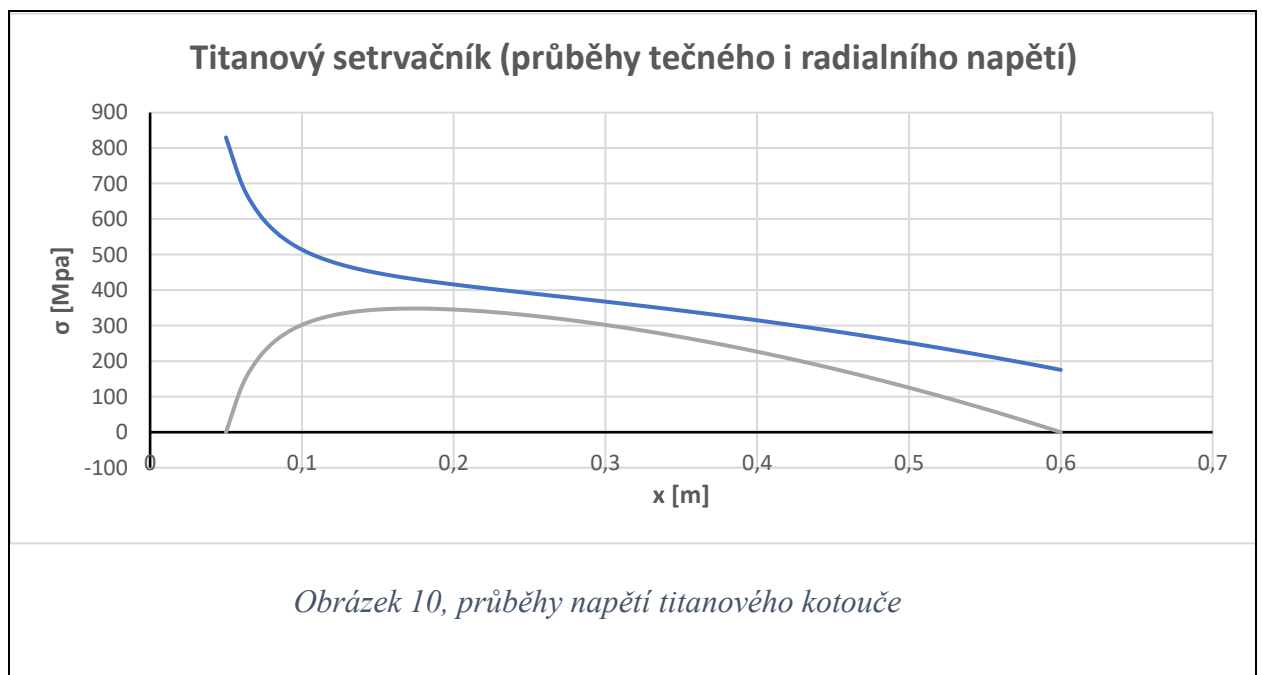
Po dosazení do první rovnice soustavy (4) dostáváme: [5], (str. 83)

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 \implies \\ \implies C_1 &= \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_1^2 + r_2^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Pak vztahy pro tečné a radiální napětí jsou:

$$\begin{cases} \sigma_t = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) + \frac{\frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 r_2^2}{x^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 x^2 \\ \sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) - \frac{\frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 r_2^2}{x^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 x^2 \end{cases} \quad (7)$$

Výsledné grafy napětí jsou znázorněny na obr. 10. V daném případě byl uvažován titanový setrvačnick rotující svými maximálními otáčkami (při $\sigma_d = 830$ [MPa]).



Pokud analyzujeme průběhy tečného a radiálního napětí kotouče, je zřejmé, že podle Trescovy teorie největších tečných napětí je nejnamáhanějším místem poloměr r_1 . Přičemž radiální napětí v daném místě je nulové, a proto redukované napětí se bude rovnat tečnému. Za účelem stanovení měrného kinetického momentu určíme nejdříve z pevnostní podmínky maximální přípustné otáčky. Jejich velikost je ohraničená maximálním dovoleným napětím na poloměru r_1 . (Pro zjednodušení výpočtu uvažujeme bezpečnost $k = 1$.)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{red} = \sigma_d = \sigma_{t1} &= \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega_{max}^2 (r_1^2 + r_2^2) + \frac{\frac{3 + \mu}{8} \rho \omega_{max}^2 r_1^2 r_2^2}{r_1^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \rho \omega_{max}^2 r_1^2 \implies \\
 \implies \sigma_d &= \rho \omega_{max}^2 \left(\frac{3 + \mu}{8} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{3 + \mu}{8} r_2^2 - \frac{1 + 3\mu}{8} r_1^2 \right) \implies \\
 \implies \sigma_d &= \rho \omega_{max}^2 \left(\frac{3 + \mu}{8} (r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1 + 3\mu}{8} r_1^2 \right) \implies \\
 \implies \omega_{max} &= \sqrt{\frac{\sigma_d}{\rho \left(\frac{3 + \mu}{8} (r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1 + 3\mu}{8} r_1^2 \right)}} \quad (8)
 \end{aligned}$$

- Hmotnost setrvačníku (zde V je objem setrvačníku, A je průřez setrvačníku)

$$m = \rho V = \rho A h = \rho \pi h (r_2^2 - r_1^2). \quad (9)$$

- Moment setrvačnosti:

$J = \frac{mr^2}{2}$ pokud se jedná o válec, v případě kotouče vypočte se jako rozdíl momentu setrvačnosti válců o poloměru r_1 a r_2 .

$$J = \frac{1}{2} (\rho \pi r_2^2 h r_2^2 - \rho \pi r_1^2 h r_1^2) = \frac{1}{2} \rho \pi h [r_2^4 - r_1^4] \quad (10)$$

- Kinetický moment:

$$J \omega_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_d}{\rho \left(\frac{3 + \mu}{8} (r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1 + 3\mu}{8} r_1^2 \right)}} \rho \pi h [r_2^4 - r_1^4]$$

- Měrný kinetický moment:

$$H = \frac{J\omega_{max}}{m} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_d}{\rho \left(\frac{3+\mu}{8}(r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1+3\mu}{8}r_1^2 \right)}} \cdot \frac{\rho\pi h[r_2^2 - r_1^2][r_2^2 + r_1^2]}{\rho\pi h(r_2^2 - r_1^2)} \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{J\omega_{max}}{m} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_d}{\rho}} \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{\sqrt{\left(\frac{3+\mu}{8}(r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1+3\mu}{8}r_1^2 \right)}}} \quad (11)$$

Je důležitým faktem, že měrný kinetický moment není závislý na tloušťce kotouče.

Vliv vlastností materiálu na měrný kinetický moment.

Analyzujeme, jak zvolený materiál ovlivňuje měrný kinetický moment. Provedeme výpočet pro čtyři různé setrvačníky stejné geometrie.

Výsledky jsou znázorněné v tabulce 1.

Tabulka 1

Materiál			Wolfram (slitina)	Ocel	Dural	Titan
Tloušťka	h	[m]	0,02	0,02	0,02	0,02
Vnitřní poloměr	r ₁	[m]	0,05	0,05	0,05	0,05
Vnější poloměr	r ₂	[m]	0,3	0,3	0,3	0,3
Hustota	ρ	[kg/m ³]	18000	7860	2500	4500
Youngův modul	E	[Pa]	4,15E+11	2,1E+11	7,3E+10	1,12E+11
Poissonovo číslo	μ	[-]	0,29	0,28	0,33	0,32
Dovolené napětí	σ _d	[Pa]	900000000	7E+08	4,4E+08	8,3E+08
σ _d /ρ		[Pa*m ³ /kg]	50000	89058,52	158844,8	184444,4
Omega_max.		[ot/min]	7824,73	10458,3	13865,46	14962,8
Kinetický moment		[N*m*s]	5625,5	3283,2	1534	2689,33
Měrný kinetický moment		[m ² *rad/s]	37,9	50,65	67,15	72,5
Hmotnost	m	[kg]	98,96016859	43,21261	15,22887	24,74004
Setrvačnost	J	[kg*m ²]	4,576907797	1,998583	0,704335	1,144227

Dle vztahu (11) je zřejmé, že čím je větší poměr meze pevnosti materiálu k jeho hustotě, tím je vyšší měrný kinetický moment setrvačníku.

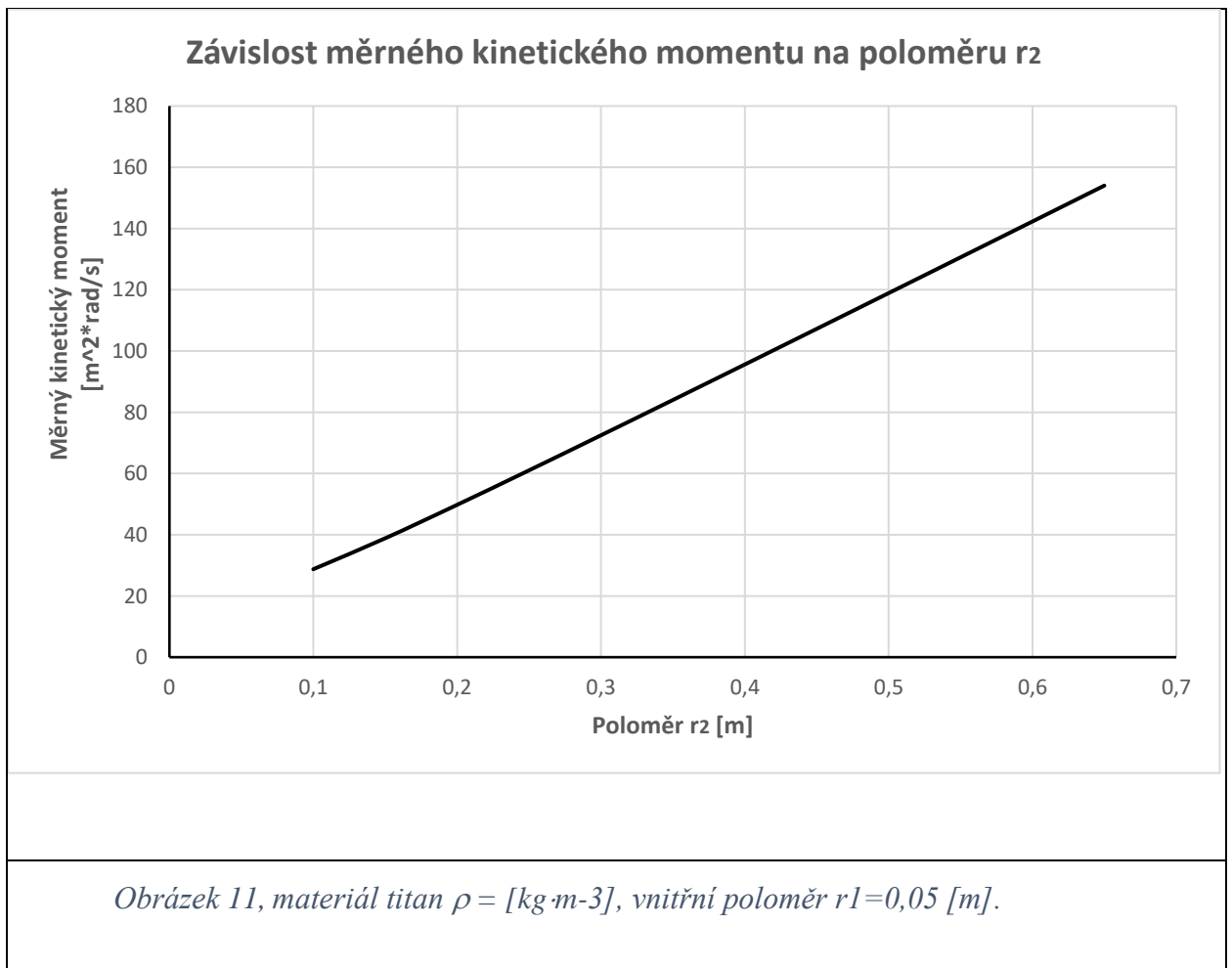
Zde vnitřní a vnější poloměry disku jsou konstanty a Poissonovo číslo se málo mění, proto zlomek $\frac{r_2^2 + r_1^2}{2\sqrt{\left(\frac{3+\mu}{8}(r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1+3\mu}{8}r_1^2\right)}}$ je skoro stejný pro každý materiál. Významný vliv na měrný

kinetický moment má právě poměr $\sqrt{\frac{\sigma_d}{\rho}}$. Důležité je, že těžší materiály mají větší setrvačnost i větší kinetický moment. To znamená, že výběr materiálů pro konkrétní setrvačník závisí na účelu

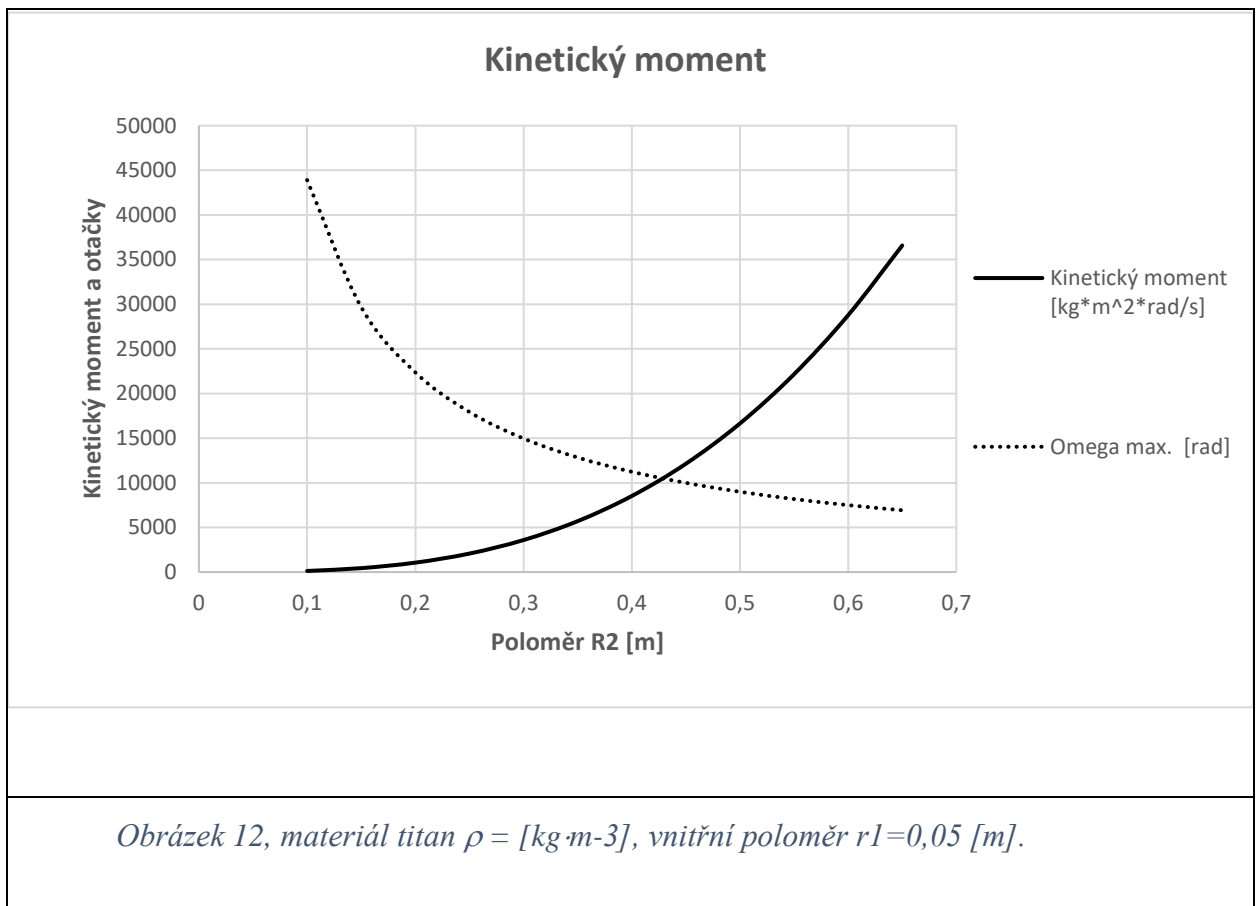
použití a na požadovaných vlastnostech. Pokud větší prioritu má právě setrvačnost a kinetický moment, tak výhodnější jsou těžké materiály s vysokou hustotou, slitiny wolframu nebo oceli. Na jinou stranu, pokud nás zajímá měrný kinetický moment, což se stává u setrvačnicku pro kosmické účely tak je lepší využít nějakou ze slitin duralu nebo titanu.

Vliv geometrie kotouče na měrný kinetický moment.

Připomínáme, že tloušťka setrvačnicku nemá vliv na jeho měrný kinetický moment. A proto v dané kapitole analyzujeme změnu kinetického momentu disku v závislosti na poloměrech r_1 a r_2 . Předpokládejme, že máme daný průměr hřídele, na kterém je usazen kotouč, takže poloměr r_1 má fixovanou hodnotu a nezávisle proměnná je poloměr r_2 . Při zvětšení poloměru r_2 se zvětší moment setrvačnosti disku, ale na druhou stranu vzroste hmotnost disku a poklesnou maximální otáčky, které též mají vliv na měrný kinetický moment.



Analogický graf sestrojíme i pro maximální otáčky a celkový kinetický moment setrvačníku (obr. 12). Z grafu obr. 11 a obr. 12 je zřejmé, že při zvětšení poloměru r_2 , kromě toho, že exponenciálně roste celkový kinetický moment kotouče, vzrůstá současně lineárně i jeho «kvalita», kterou představuje růst velikosti kinetického momentu na jednotku hmoty setrvačníku. Jinou podstatnou výhodou je pokles maximálních a tím pádem i provozních otáček, což má příznivý vliv na životnost ložisek a dále zmenšení tepelných ztrát v ložiskách při poklesu otáček, což má vliv na volbu a konstrukci systému termoregulace.



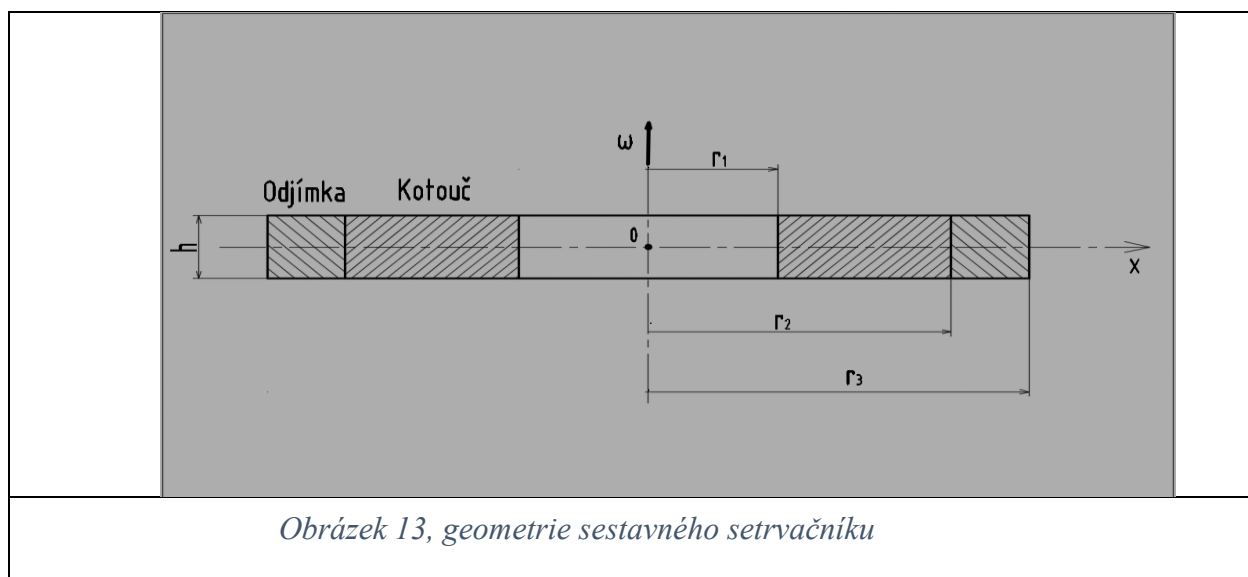
Životnost ložisek je jedním z hlavních limitujících faktorů pro délku provozní doby silových gyroskopů. I přesto, že jsou vyvinuté technologie uložení hřídelů setrvačníků na elektromagnetických bezkontaktních ložiskách, kuličková ložiska se stále používají ve většině případů, protože jsou lehčí.

Je zřejmé, že při návrhu setrvačníku pro silový gyroskop nebo pro konstrukci motor-setrvačník je výhodné maximálně využívat dostupný prostor a volit co největší možný vnější poloměr setrvačníku.

Sestavný setrvačnick.

Za účelem zvětšení měrného kinetického momentu setrvačnicku jej konstruujeme ze dvou částí: kotouče a náboje (objímky), které uvažujeme z odlišných materiálů a jsou spojeny pomocí přesahu (například nalisováním za tepla). Ovlivní to nejenom rozložení hmoty v setrvačnicku, ale i průběhy napětí, které stanovíme superpozicí dvou teorií: teorii tlustostěnných nádob a teorii rotujících kotoučů. Tedy při nulových otáčkách rozložení napětí v kotouči a objímce bude ovlivněno jenom hodnotou přesahu Δr nalisované nádoby a při určité úhlové rychlosti ω , kromě toho vznikne dodatečné napětí od rotace. Takže se změní se i hodnota původního přesahu Δr , protože také kontaktní poloměry objímky a kotouče se budou odlišně měnit v důsledku rotace. Změna hodnoty přesahu způsobí i změnu rozložení napětí podle teorie tlustostěnných nádob, a proto i celkové napětí, které se vypočte sečtením napětí od rotace a nalisování.

Využijeme superpozici nalisovaných nádob a rotujících kotoučů a podle teorie rotujících kotoučů stanovíme průběhy tečného a radiálního napětí podél poloměru x kotouče a objímky (nalisování neuvažujeme a okrajovými podmínkami jsou nulová radiální napětí na okrajích). Vypočteme rozdíl ve změně poloměrů kotouče a objímky v místě nalisování Δr^ω . Podle tohoto rozdílu zkorigujeme původně zadaný přesah pro nalisování Δr a vypočteme skutečný přesah v místě nalisování při dané úhlové rychlosti ω . Tento skutečný přesah ($\Delta r^{sk} = \Delta r - \Delta r^\omega$) využijeme pro výpočet tečného a radiálního napětí od nalisování. Výsledné napětí jsou zde součtem namáhání od rotace a nalisování.



Takže uvažujeme setrvačnick, sestavený ze dvou částí (viz obr. 13), o kterém předpokládáme jeho následující data:

- Vnitřní poloměr kotouče	r_1
- Poloměr nalisování	r_2
- Vnější poloměr objímky	r_3
- Tloušťka kotouče a objímky	h
- Přesah ($\omega = 0$)	Δr_2
- Hustota kotouče	ρ_1
- Hustota objímky	ρ_2
- Youngův modul kotouče	E_1
- Youngův modul objímky	E_2
- Poissonovo číslo kotouče	μ_1
- Poissonovo číslo objímky	μ_1
- Dovolené napětí kotouče	σ_{d1}
- Dovolené napětí objímky	σ_{d2}

Teorie rotujících kotoučů.

Zapišeme soustavu rovnic (7), která popisuje průběh tečného a radiálního napětí rotujícího disku s volnými konci (radiální napětí na okrajích jsou nulové).

$$\begin{cases} \sigma_t = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) + \frac{3 + \mu}{8} \frac{\rho \omega^2 r_1^2 r_2^2}{x^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \rho \omega^2 x^2 \\ \sigma_r = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) - \frac{3 + \mu}{8} \frac{\rho \omega^2 r_1^2 r_2^2}{x^2} - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 x^2 \end{cases}$$

Modifikujeme danou soustavu s ohledem na materiálové konstanty a meze (vnitřní a vnější poloměr) což nám umožňuje popsat jak kotouč, tak i objímku:

Kotouč:

$$\begin{cases} \sigma_t^k = \frac{3 + \mu_1}{8} \rho_1 \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) + \frac{3 + \mu_1}{8} \frac{\rho_1 \omega^2 r_1^2 r_2^2}{x^2} - \frac{1 + 3\mu_1}{8} \rho_1 \omega^2 x^2 \\ \sigma_r^k = \frac{3 + \mu_1}{8} \rho_1 \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) - \frac{3 + \mu_1}{8} \frac{\rho_1 \omega^2 r_1^2 r_2^2}{x^2} - \frac{3 + \mu_1}{8} \rho_1 \omega^2 x^2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \sigma_t^k = \rho_1 \omega^2 \left[\frac{3 + \mu_1}{8} \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{x^2} \right) - \frac{1 + 3\mu_1}{8} x^2 \right] \\ \sigma_r^k = \frac{3 + \mu_1}{8} \rho_1 \omega^2 \left[r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{x^2} - x^2 \right] \end{cases} \quad x \in [r_1; r_2] \quad (12)$$

$$\text{Objímka:} \quad \begin{cases} \sigma_t^o = \rho_2 \omega^2 \left[\frac{3 + \mu_2}{8} \left(r_2^2 + r_3^2 + \frac{r_2^2 r_3^2}{x^2} \right) - \frac{1 + 3\mu_2}{8} x^2 \right] \\ \sigma_r^o = \frac{3 + \mu_2}{8} \rho_2 \omega^2 \left[r_2^2 + r_3^2 - \frac{r_2^2 r_3^2}{x^2} - x^2 \right] \end{cases} \quad x \in [r_2; r_3] \quad (13)$$

Změna poloměru r_2 kotouče a objímky v důsledku rotace

Změnu poloměru vypočteme pomocí rozšířeného Hookova zákona:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_o)] \quad [4], (\text{str. 118})$$

$$\text{Pak } \Delta r_2 = r_2 \varepsilon_{t2}$$

$$\text{Kotouč:} \quad \varepsilon_{t2}^k = \frac{1}{E_1} [\sigma_{t2}^k - \mu_1 \sigma_{r2}^k]$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r2}^k &= \frac{3 + \mu_1}{8} \rho_1 \omega^2 [r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 - r_2^2] = 0 \\ \sigma_{t2}^k &= \rho_1 \omega^2 \left[\frac{3 + \mu_1}{8} (r_1^2 + r_2^2 + r_1^2) - \frac{1 + 3\mu_1}{8} r_2^2 \right] \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\implies \boxed{\varepsilon_{t2}^k = \frac{1}{E_1} \rho_1 \omega^2 \left[\frac{3 + \mu_1}{8} (2r_1^2 + r_2^2) - \frac{1 + 3\mu_1}{8} r_2^2 \right]} \quad (14)$$

$$\text{Objímka:} \quad \varepsilon_{t2}^o = \frac{1}{E_2} [\sigma_{t2}^o - \mu_2 \sigma_{r2}^o]$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r2}^o &= \frac{3 + \mu_2}{8} \rho_2 \omega^2 [r_2^2 + r_3^2 - r_3^2 - r_2^2] = 0 \\ \sigma_{t2}^o &= \rho_2 \omega^2 \left[\frac{3 + \mu_2}{8} (r_2^2 + r_3^2 + r_3^2) - \frac{1 + 3\mu_2}{8} r_2^2 \right] \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\implies \boxed{\varepsilon_{t2}^o = \frac{1}{E_2} \rho_2 \omega^2 \left[\frac{3 + \mu_2}{8} (2r_3^2 + r_2^2) - \frac{1 + 3\mu_2}{8} r_2^2 \right]} \quad (15)$$

Korekce zadaného přesahu

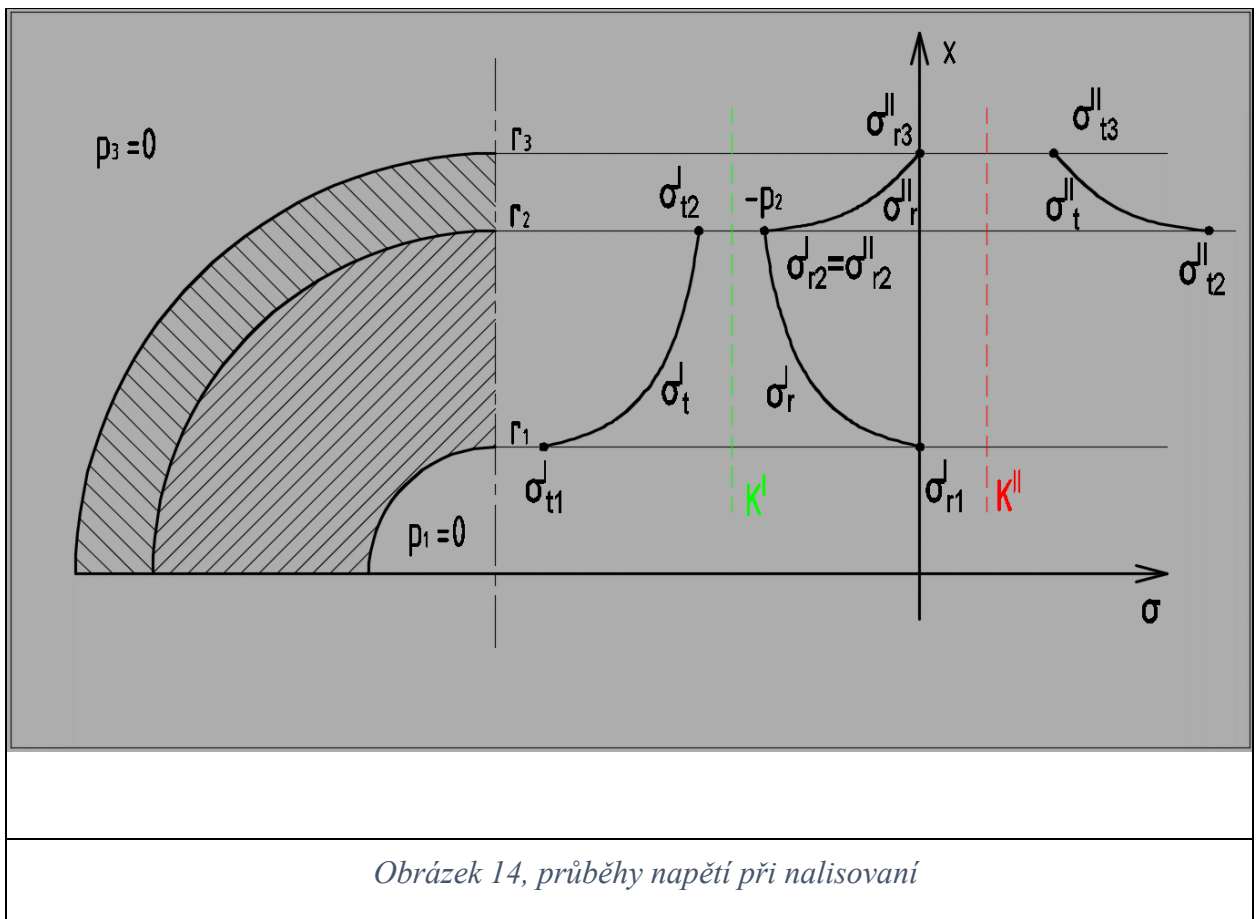
V důsledku otáčení setrvačníku dojde ke změně poloměru r_2 objímky a kotouče a je nutno provést korekci původně zadaného přesahu Δr_2 . Skutečný přesah, nebo přesah po dosažení nějaké úhlové rychlosti ω .

$$\Delta r_2^{sk} = \Delta r_2 - (\Delta r^o - \Delta r^k) = \Delta r_2 - (r_2 \varepsilon_{t2}^o - r_2 \varepsilon_{t2}^k) \implies$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta r_2^{sk} = \Delta r_2 - r_2(\varepsilon_{t2}^o - \varepsilon_{t2}^k)} \quad (16)$$

Nalezený korigovaný přesah uijeme v teorii tlustostěnných nádob pro výpočet průběhu radiálního a tečného napětí od nalisování a napětí σ_t a σ_r pak stanovíme přičtením napětí od rotace, tím dostaneme celkový průběh napětí.

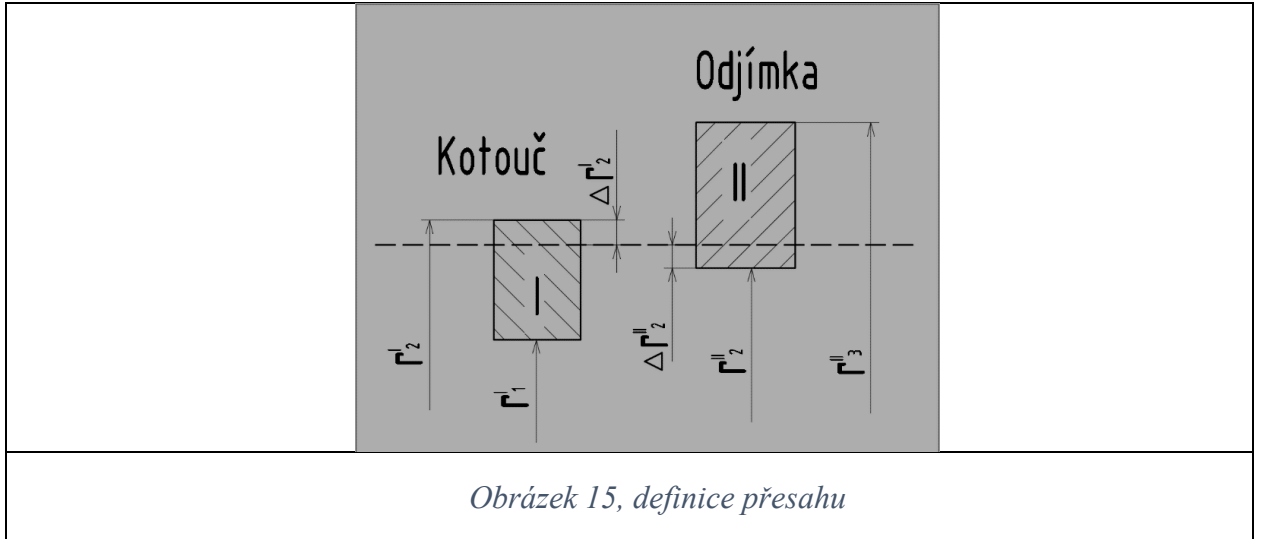
Teorie tlustostěnných nádob.



Teorie tlustostěnných nádob, viz obr. 14, stanovuje rozložení tečného a radiálního napětí podél radiální osy x nádoby a vyžaduje znalost geometrie nádob (*poloměrů* r_1, r_2 a r_3),

materiálové konstanty a hodnoty tlaků p_1 , p_2 a p_3 . Tlaky p_1 a p_3 zde uvažujeme rovny nule, kdežto tlak p_2 v kontaktu stanovíme z hodnoty skutečného přesahu Δr_2^{sk} .

Přesah (výpočet tlaku p_2)



Přesah můžeme dle obr. 15 definovat jako rozdíl poloměrů r_2 kotouče a objímky v místě nalisování nebo jako součet změny poloměru kotouče a objímky po nalisování.

$$\Delta r_2 = r_2^I - r_2^{II}$$

$$\Delta r_2 = \Delta r_2^{II} - \Delta r_2^I$$

tuto rovnici vydělíme poloměrem r_2 a dostaneme:

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2} - \frac{\Delta r_2^I}{r_2} \quad [5], \text{ (str. 67)}$$

kde $\frac{\Delta r_2^{II}}{r_2} \cong \varepsilon_{t2}^{II}$ a $\frac{\Delta r_2^I}{r_2} \cong \varepsilon_{t2}^I$ protože hodnota přesahu je velmi malá v porovnání s poloměrem r_2 a proto i $r_2 \cong r_2^{II} \cong r_2^I$.

$$\text{Odtud dostáváme: } \Delta r_2 = r_2(\varepsilon_{t2}^{II} - \varepsilon_{t2}^I).$$

$$\text{Z rozšířeného Hookova zákona plyne: } \varepsilon_t = \frac{1}{E}[\sigma_t - \mu\sigma_r] \quad \implies$$

$$\implies \Delta r_2 = r_2 \left(\frac{1}{E_2}[\sigma_{t2}^{II} - \mu_2\sigma_{r2}^{II}] - \frac{1}{E_1}[\sigma_{t2}^I - \mu_1\sigma_{r2}^I] \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_2}^{II} &= -p_2 \\ \sigma_{r_2}^I &= -p_2 \\ \sigma_{t_2}^{II} &= 2K^{II} + p_2 \\ \sigma_{t_2}^I &= 2K^I + p_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta r_2 = r_2 \left(\frac{1}{E_2} [2K^{II} + p_2 + \mu_2 p_2] - \frac{1}{E_1} [2K^I + p_2 + \mu_1 p_2] \right)$$

$$\left. \begin{aligned} K^{II} &= \frac{p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \\ K^I &= -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta r_2 = r_2 \left(\frac{1}{E_2} \left[2 \frac{p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + p_2 + \mu_2 p_2 \right] - \frac{1}{E_1} \left[-2 \frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_2 + \mu_1 p_2 \right] \right)$$

$$\Delta r_2 = p_2 r_2 \left[\frac{1}{E_2} \left(2 \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + 1 + \mu_2 \right) - \frac{1}{E_1} \left(-2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + 1 + \mu_1 \right) \right] \quad (17)$$

Rovnice (17) vyjadřuje závislost přesahu mezi kotoučem a objímkou na tlaku p_2 . Pro následující výpočty a vyjádření tlaku p_2 dosazujeme do této rovnice už zkorigovaný skutečný přesah Δr_2^{sk} , který stanovujeme pomocí rovnice (16) $\Rightarrow \Delta r_2^{sk} = \Delta r_2 - r_2(\varepsilon_{t_2}^o - \varepsilon_{t_2}^k)$.

Tlak p_2 , který je potřebný pro stanovení průběhu napětí, vyjadřujeme z rovnice (17), kde místo původně zadaného přesahu Δr_2 (hodnota přesahu za nulových otáček) dosazujeme skutečný přesah Δr_2^{sk} .

$$p_2 = \frac{\Delta r_2^{sk}}{r_2 \left[\frac{1}{E_2} \left(2 \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + 1 + \mu_2 \right) - \frac{1}{E_1} \left(-2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + 1 + \mu_1 \right) \right]} \quad (18)$$

Průběhy napětí.

Pro určení průběhů napětí stanovujeme konstanty C a K kotouče a objímky. [5], (str. 59,60)

$$\text{Kotouč:} \quad \left. \begin{aligned} C^I &= -p_2 \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ K^I &= -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_t^k &= K^I + \frac{C^I}{x^2} \\ \sigma_r^k &= K^I - \frac{C^I}{x^2} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{Objímka:} \quad \left. \begin{aligned} K^{II} &= \frac{p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \\ C^{II} &= p_2 \frac{r_3^2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_t^o &= K^{II} + \frac{C^{II}}{x^2} \\ \sigma_t^o &= K^{II} - \frac{C^{II}}{x^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Výsledné napětí

Při výpočtu užíváme princip superpozice, kdy výsledné napětí se spočte sečtením namáhání od rotace (rovnice (12) a (13)) a nalisování (rovnice (19) a (20)).

Kotouč: $x \in [r_1; r_2]$

$$\begin{cases} \sigma_t^k = \rho_1 \omega^2 \left[\frac{3+\mu_1}{8} \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{x^2} \right) - \frac{1+3\mu_1}{8} x^2 \right] - \frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \frac{r_2^2 r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2) x^2} \\ \sigma_r^k = \frac{3+\mu_1}{8} \rho_1 \omega^2 \left[r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{x^2} - x^2 \right] - \frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_2 \frac{r_2^2 r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2) x^2} \end{cases} \quad (21)$$

Objímka: $x \in [r_2; r_3]$

$$\begin{cases} \sigma_t^o = \rho_2 \omega^2 \left[\frac{3+\mu_2}{8} \left(r_2^2 + r_3^2 + \frac{r_2^2 r_3^2}{x^2} \right) - \frac{1+3\mu_2}{8} x^2 \right] + \frac{p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + p_2 \frac{r_3^2 r_2^2}{(r_3^2 - r_2^2) x^2} \\ \sigma_r^o = \frac{3+\mu_2}{8} \rho_2 \omega^2 \left[r_2^2 + r_3^2 - \frac{r_2^2 r_3^2}{x^2} - x^2 \right] + \frac{p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - p_2 \frac{r_3^2 r_2^2}{(r_3^2 - r_2^2) x^2} \end{cases} \quad (22)$$

- Hmotnost setrvačnicku.

$$m = \rho_1 \pi h (r_2^2 - r_1^2) + \rho_2 \pi h (r_3^2 - r_2^2) = \pi h [\rho_1 (r_2^2 - r_1^2) + \rho_2 (r_3^2 - r_2^2)]$$

Moment setrvačností, zde J^k a J^o . jsou momenty setrvačnosti kotouče a objímky

$$J = J^k + J^o$$

$$J^k = \frac{1}{2} [\rho_1 \pi h r_2^2 r_2^2 - \rho_1 \pi h r_1^2 r_1^2] = \frac{1}{2} \rho_1 \pi h [r_2^4 - r_1^4]$$

$$J^o = \frac{1}{2} \rho_2 \pi h [r_3^4 - r_2^4]$$

$$J = \frac{\pi h}{2} (\rho_1 [r_2^4 - r_1^4] + \rho_2 [r_3^4 - r_2^4])$$

Vyhodnocení výsledků

Cílem výpočtů provedených v kapitole «sestavný setrvačnick» je ověření možnosti zvětšení měrného kinetického momentu setrvačnicku využitím nalisování. Zhodnocení konstrukce zvoleného sestavného setrvačnicku provádíme porovnáním jeho měrného kinetického momentu, s měrným kinetickým momentem homogenního disku o poloměrech r_1 a r_3 . Přičemž tento homogenní disk je vyroben z «lepšího» z materiálů přítomných v sestavném setrvačnicku, čili z materiálu s větším poměrem meze pevnosti k hustotě.

Parametry materiálů zvolených pro sestavný setrvačnick jsou konstanty, stejně jako poloměry r_1 a r_3 . Otáčky ω , poloměr nalisování r_2 a hodnota zvoleného přesahu Δr_2 jsou proměnné a volíme je tak, abychom získali konstrukci co největší měrný kinetický moment.

Dále uvažujeme následující omezení, vycházející z dodržení pevnostních podmínek:

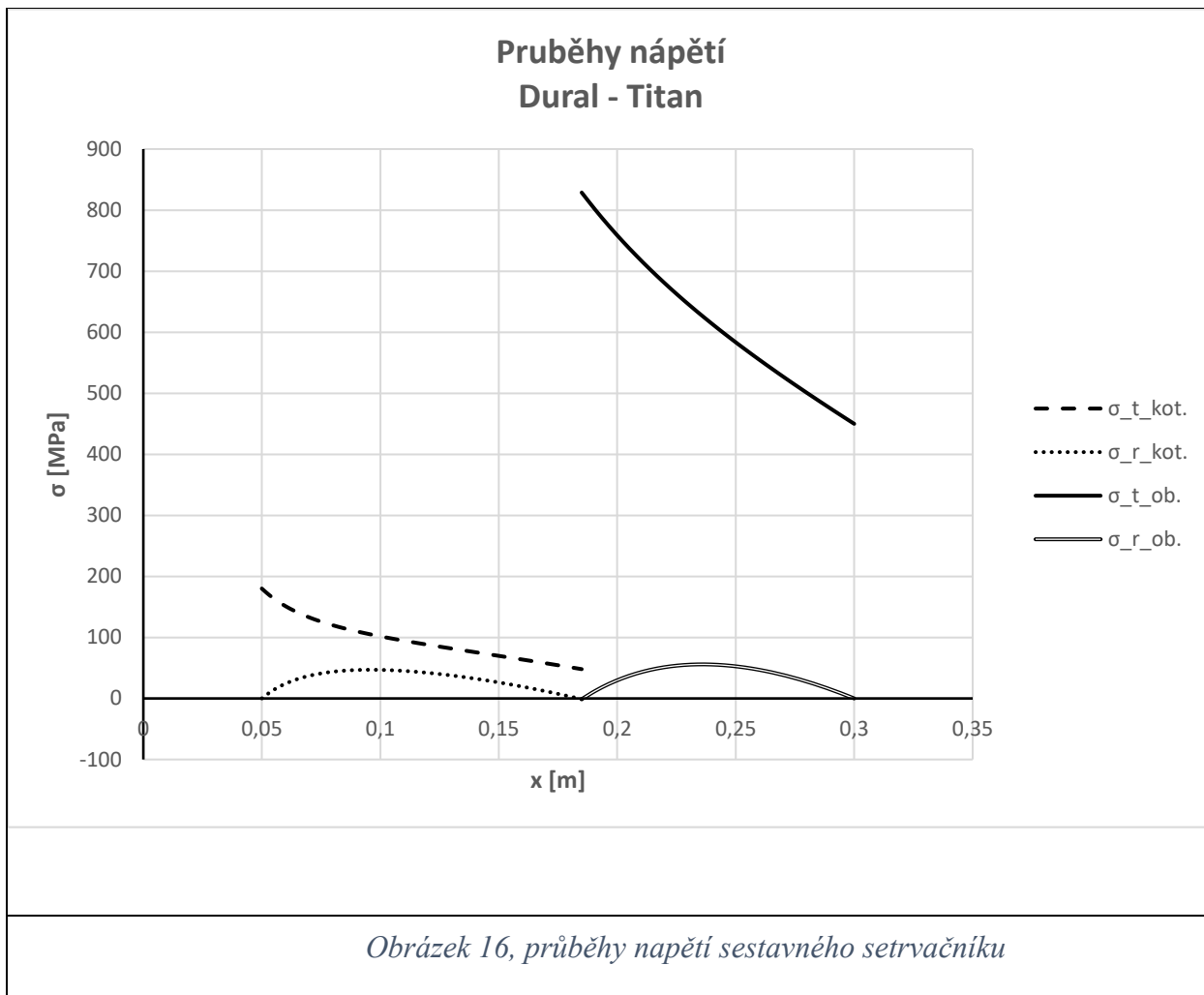
- Zvolený přesah Δr_2 nesmí být tak velký, že by způsobil poškození kotouče nebo objímky při nulových otáčkách.

- Dosaženou obvodovou rychlost setrvačníku omezují meze pevnosti kotouče a objímky, proto sledujeme, která z těchto limit bude dosažena dříve, protože volba místa nalisování – přesahu ovlivňuje průběhy napětí jak kotouče, tak i objímky.
- Při dosažení maximálních otáček hodnota skutečného přesahu Δr_2^{sk} nesmí být záporná (nesmí vzniknout vůle) a dokonce musí být větší, než určitá minimální požadovaná hodnota $\Delta r_{2_min}^{sk}$.

Při analýze setrvačníku stanovíme měrný kinetický moment $H = \frac{J\omega_{max}}{m}$. Zde moment setrvačnosti J je funkcí jedné proměnné $J = f(r_2)$, hmotnost setrvačníku je též funkcí poloměru, $m = f(r_2)$, kdežto maximální otáčky jsou funkcí dvou proměnných $\omega_{max} = f(r_2, \Delta r_2)$, přičemž tato poslední funkce je velmi složitěho tvaru. V principu je třeba pevnostně kontrolovat při nalisování a současně při rotaci vnitřní poloměry kotouče a objímky.

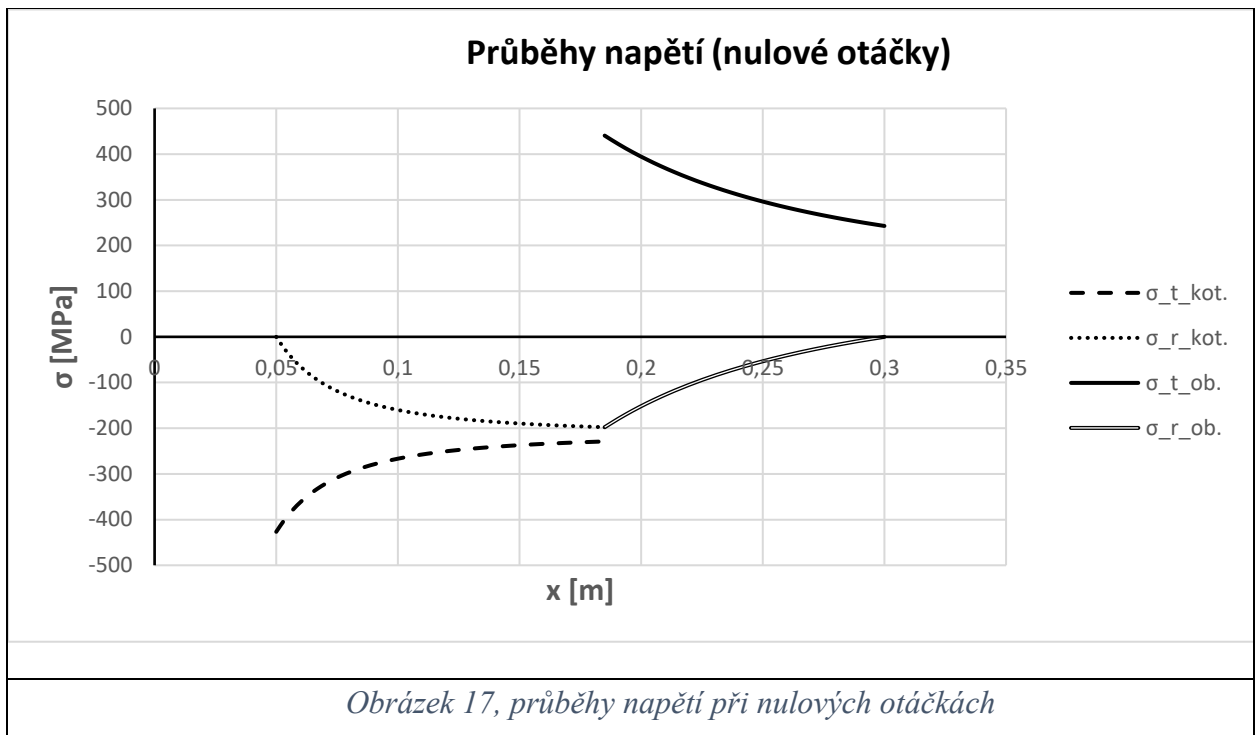
Výsledkem výše uvedeného je zvolený způsob výpočtu optimálního H , ve kterém nevyjadřujeme H jako funkci $H = f(r_2, \Delta r_2)$ a pak hledáme její extrém, ale vycházíme z grafu výsledných napětí setrvačníku, ve kterém je možné ihned odečíst redukované napětí jak pro objímku, tak i pro kotouč (podle teorie τ_{max} : $\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min}$). Takovým způsobem lze postupným zvyšováním otáček najít ω_{max} pro zvolenou dvojici r_2 a Δr_2 , a pak i měrný kinetický moment. Celý tento iterační výpočet řešíme v excelu. Pro kontrolu pevnosti setrvačníku za klidu nastavujeme nulové otáčky a pro kontrolu $\Delta r_{2_min}^{sk}$ řešíme ve zvláštní buňce hodnotu Δr_2^{sk} podle rovnice (16).

Graf dle obr. 16 znázorňuje průběhy tečného a radiálního napětí sestavného setrvačníku, u kterého vnitřní kotouč je vyroben z duralu, kdežto vnější objímka je titanová. Meze pevnosti pro dural uvažujeme 440 [MPa], pro titan — 830 [MPa]. Poloměr nalisování je $r_2 = 0,185$ [m], přesah má hodnotu $\Delta r_2 = 1247$ [μm]. Maximální otáčky dané úhlovou rychlostí $\omega_{max} = 1510$ [$\frac{rad}{s}$], minimální přesah při takových otáčkách je $\Delta r_{2_min}^{sk} = 7,4$ [μm] a při uvažování součinitele tření $f = 0,1$, může unést nalisovaný spoj maximální kroučící moment $M_{\omega_{max}} = 4415,7$ [$N \cdot m$].



Je zřejmé, že v daném případě je omezením pro maximální otáčky právě pevnost objímky. Měrný kinetický moment pro daný setrvačnick má hodnotu $H_{ss} = 76,6578 \left[\frac{m^2 \cdot rad}{s} \right]$, kdežto pro titanový disk stejné geometrie (s poloměry r_1 a r_3) má měrný kinetický moment hodnotu $H_{ts} = 72,469 \left[\frac{m^2 \cdot rad}{s} \right]$, pro duralový disk je měrný kinetický moment $H_{ds} = 67,154 \left[\frac{m^2 \cdot rad}{s} \right]$. Neboli můžeme pozorovat zvětšení měrného kinetického momentu oproti «lepšímu» materiálu na $\frac{76,6578 - 72,469}{72,469} \cdot 100\% = 5,78\%$.

Obr. 17 znázorňuje průběh napětí stejného setrvačníku za nulových otáček a lze na něm pozorovat velmi velké namáhání kotouče, ($\sigma_t - \sigma_r$) blízké k mezi pevnosti. To potvrzuje, že u nalisovaného setrvačníku musíme dbát na splnění pevnostní podmínky konstrukce i za klidu a vede to k omezení pro dimenzování přesahu nalisování.



Posouzení praktického využití sestavného setrvačnicku.

Z praktického hlediska je důležitá tolerance přesahu a požadavky na provozní teploty setrvačnicku. V předchozím případě jsme analyzovali titan-duralový setrvačnick rotující úhlovou rychlostí $1510 \left[\frac{rad}{s} \right]$, a pokud bychom vyžadovali minimální hodnotu $M_{\omega_{max}} = 1500 [N \cdot m]$, tak by z toho vyplýval požadavek na minimální přesah $\Delta r_{2_{min}} = 1243 [\mu m]$, kdežto maximální hodnota přesahu byla $\Delta r_{2_{max}} = 1247 [\mu m]$, protože už při $\Delta r_2 = 1248 [\mu m]$ nevyhovuje pevnostně objímka. To znamená, že vychází toleranční pole pro přesah $4 [\mu m]$ a je to na poloměru nalisování $r_2 = 0,185 [m]$. Přičemž dané toleranční pole je součtem dvou tolerančních poli: geometrické tolerance poloměru r_2 kotouče a objímky (předpis tolerančních polí IT) a také tolerance provozní teploty. I kdyby daný setrvačnick pracoval vždycky na provozní teplotě a nemusely bychom uvažovat rozdíl teplotních roztažností titanu a duralu, tak geometrická tolerance $4 [\mu m]$ hodně málo (přesněji než IT1 pro $r_2 = 0,185 [m]$). Ve výsledku to znamená praktickou nevyužitelnost konstrukce tohoto setrvačnicku.

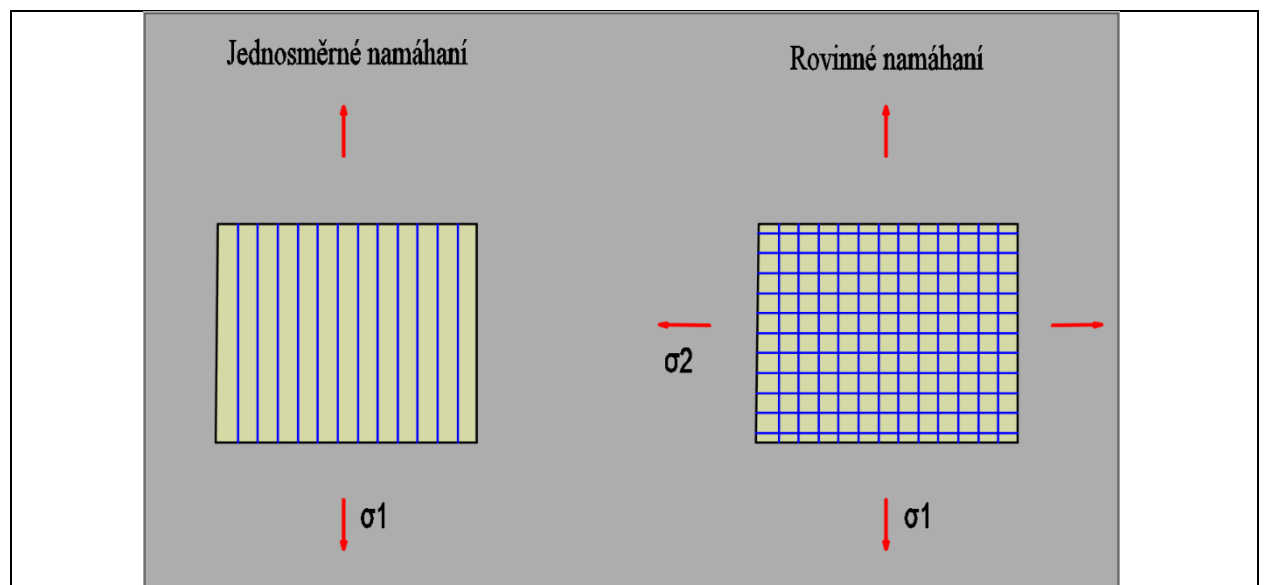
Zvětšit toleranční pole lze jenom na úkor měrného kinetického momentu. Například při zmenšení maximálních otáček na hodnotu úhlové rychlosti $1460 \left[\frac{rad}{s} \right]$, je minimální hodnota přesahu $\Delta r_{2_{min}} = 1162 [\mu m]$ (pro $M_{\omega_{max}} = 1500 [N \cdot m]$) a maximální — $\Delta r_{2_{max}} =$

1258 [μm]. Z toho vyplývá rozsah tolerančního pole pro přesah 96 [μm]. Takové toleranční pole dovoluje zvolit stupeň přesnosti IT 4 pro kotouč a IT 5 pro objímku, což v součtu dává $14 + 20 = 34$ [μm]. To znamená, že zbyde $96 - 34 = 62$ [μm] tolerančního pole pro změny provozní teploty. Teplotní délkovou roztažnost titanu uvažujeme $8,15 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{K}}\right]$, u duralu pak $22,8 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{K}}\right]$. Takže velikost tolerančního pole teploty (v Kelvinech) můžeme stanovit jako
$$\frac{62}{(22,8 - 8,15) \cdot 0,185} = 22,88 \text{ [K]}.$$

Je zřejmé, že oba požadavky: jak rozměrové tolerance IT, tak i provozní teploty, zůstaly velmi přesné a současně náročné pro splnění. Přitom kvůli zmenšení maximální uhlové rychlosti setrvačnicku došlo i k poklesu měrného kinetického momentu, který má nyní hodnotu $74,12 \left[\frac{\text{m}^2 \cdot \text{rad}}{\text{s}}\right]$, což je hodnota o 2,28% větší než u samotného titanu. Znamená to ovšem velmi malý přínos za cenu velkého zdražení konstrukce, a dále vzniku dodatečných požadavků na provozní podmínky (minimální a maximální provozní teploty).

Takže z praktického hlediska je zřejmé, že daný způsob zlepšení kinetických vlastností setrvačnicku je téměř nevyužitelný.

Využití kompozitu pro zvýšení jakosti objímky.

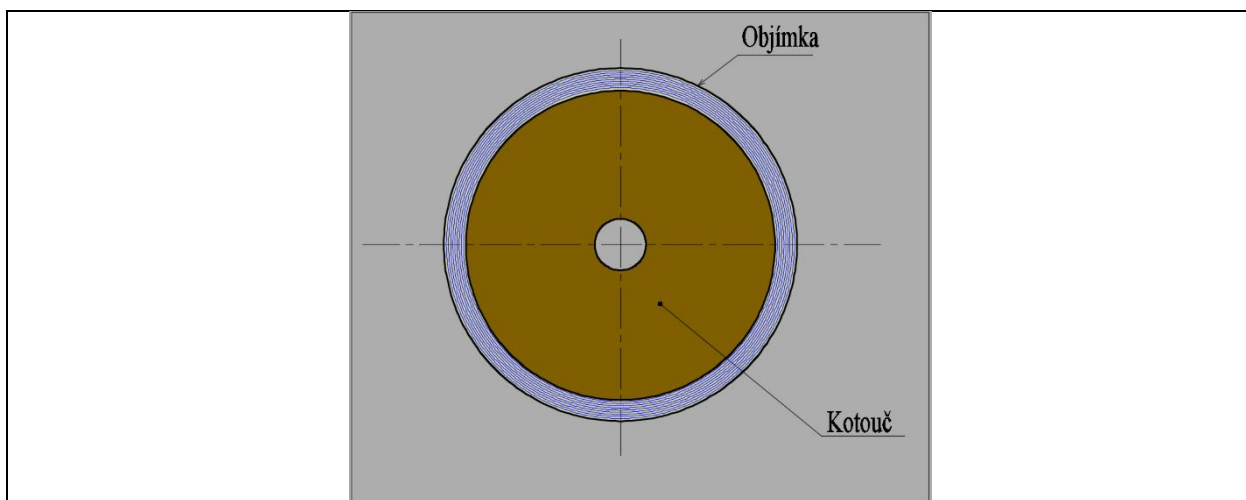


Obrázek 18, vliv zatížení na směr vláken kompozitního materiálu

Kompozitní materiály se vyznačují větší pevností při menší hustotě a velice dobře se hodí v daném případě pro jakostní objímku setrvačnicku. Nevýhodou je kromě vysoké ceny takové

konstrukce nutnost přizpůsobování směru navinutí vláken do směru namáhání. Čili pokud máme nějakou součástku, třeba destičku, a je namáhána v jednom směru, tak i vlákna materiálu musí být uspořádána především do tohoto směru. Ve složitějším případě rovinného namáhání se vlákna mohou křížit a proto přenášet dvě navzájem kolmá hlavní napětí, viz příklady z obr. 18. Celkem pokud podíváme na kompozit, tak uhlíková vlákna v pojivu můžeme srovnat s grafitovými vměstkami v litině a chování kompozitu při zatížení kolmém na směr vinutí vláken je podobné ve své podstatě chování litiny. To znamená, že součástka vydrží mírné tlakové napětí a velmi špatně přenáší napětí tažné.

Náročné je efektivní vinutí rotující součástky ve formě disku, ve které vznikají navzájem kolmá, radiální a tečné napětí, přičemž oba napětí tady je tažná. Zde nutnost zavedení určitého množství vláken v radiálním směru vede na pokles množství vláken ve směru tečném a tím pádem i dovoleného tečného napětí. Eliminace tažného napětí, nebo jeho převedení na tlakové vede na velmi jednoduchý způsob tečného – obvodového vinutí objímky. V takovém případě je možné navinout vlákno jako cívku a dostáváme maximální počet vláken v tečném směru, viz schéma setrvačníku na obr. 19.

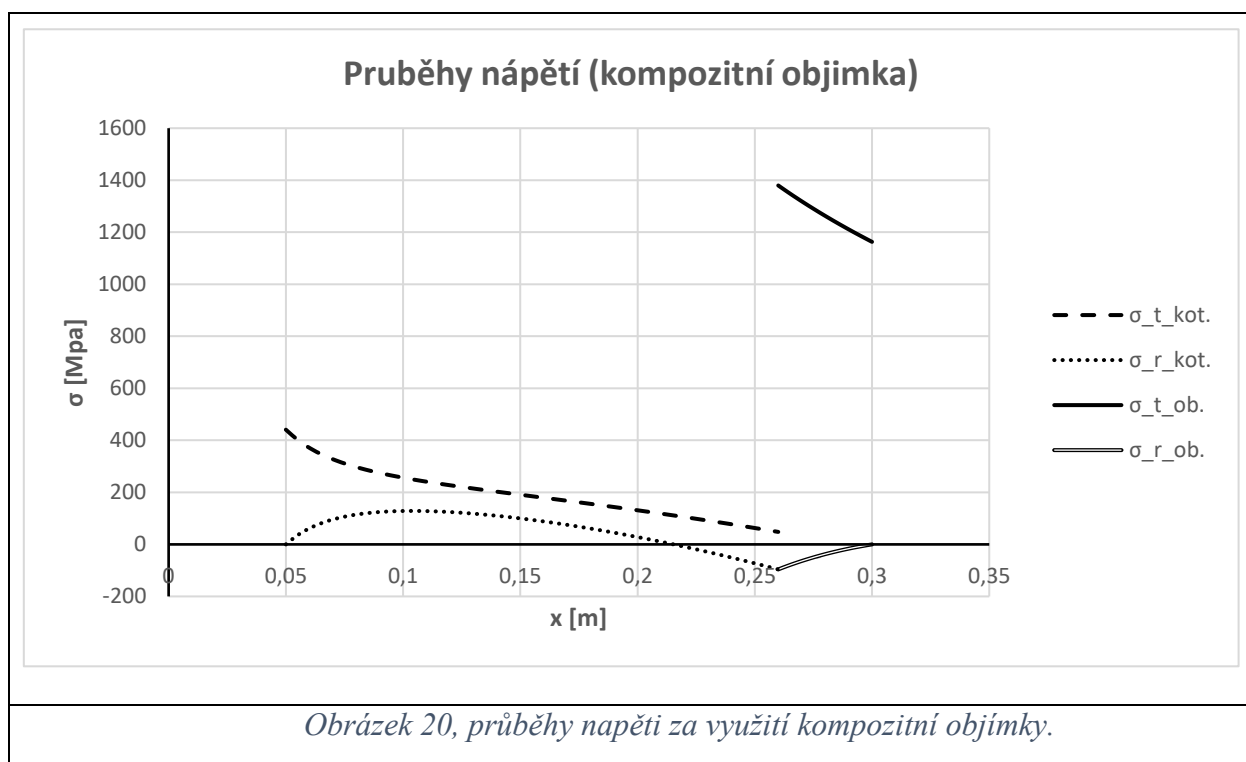


Obrázek 19, kompozitní objímka

Pro objímku uvažujeme kompozit na bázi uhlíkového vlákna. Kvalitní uhlíkové vlákno má pevnost 2500-3500 [MPa] a Youngův modul 200-450 [GPa] při hustotě 1700-1900 $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$. Pro studii kompozitní konstrukce uvažujeme pevnost objímky v tečném směru 1500 [MPa], Youngův modul —200 [GPa] a hustotu za 2000 $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$. Kotouč uvažujeme vyrobený z duralu jako v předchozím případě neboli zaměnili jsme titanovou objímku z předchozí konstrukce za kompozitní.

Průběhy napětí jsou znázorněny na obr. 20. Výsledný měrný kinetický moment $H = 88,4 \left[\frac{m^2 \cdot rad}{s} \right]$, což je dokonce mnohem lepší výsledek, než u titan-duralového setrvačnicku. Úhlová rychlost $\omega = 2020 \left[\frac{rad}{s} \right]$. Poloměry r_1 a r_3 zůstaly stejné a zvětšil se poloměr nalisování $r_2 = 0,26$ [m]. Přesah se též změnil — $\Delta r_2 = 1580$ [μm].

Logické je porovnat tento kompozitový setrvačnick s čistě duralovým kotoučem o poloměrech r_1 a r_3 , který měl měrný kinetický moment $67,15 \left[\frac{m^2 \cdot rad}{s} \right]$ a vidíme tady zvětšení o... $\frac{88,4 - 67,15}{67,15} \cdot 100\% = 31,6\%$, což je poměrně velký příspěvek.



Pozoruhodnou křivkou na obr. 20 je průběh radiálního napětí objímky a můžeme pozorovat, že objímka je v radiálním směru namáhána tlakem v téměř celém rozsahu poloměrů r_2 , r_3 . Je to velmi důležitý výsledek, protože právě tahové radiální napětí je nepříznivé pro kompozitní objímku s tečnými vlákny, navinutými v pojivu jako cívka.

Tak velké zvětšení měrného kinetického momentu je zde spojeno z velmi přesným tolerančním polem (v daném případě 30 [μm]), které je ovšem nedostatečné pro praktické využití. Ale pokud zmenšíme otáčky na úhlovou rychlost $\omega = 1700 \left[\frac{rad}{s} \right]$, minimální přesah se zmenší na hodnotu $\Delta r_{2_min} = 380$ [μm] a maximální přesah vzroste na $\Delta r_{2_max} = 1780$ [μm], takže

vznikne toleranční pole šířky 1400 [μm] a umožní to využití IT10, přičemž zbývajících 980 [μm] je k dispozici pro případné kolísání provozní teploty.

Měrný kinetický moment v daném případě bude $H=74,4 \left[\frac{\text{m}^2 \cdot \text{rad}}{\text{s}} \right]$ a je to o 10,8 % více než u čistě duralového setrvačnicku o poloměrech r_1 a r_3 . Takový setrvačnick můžeme považovat za prakticky realizovatelný, přičemž právě zvětšení jeho měrného kinetického momentu je podstatné.

Při využití titanu místo duralu se nám podařilo zvětšit měrný kinetický moment H oproti čistě titanovému setrvačnicku o 7%. Toleranční pole v takovém případě bylo 750 [μm], otáčky — 1900 $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$, geometrie zůstala stejná.

Pokud hovoříme o praktickém využití kompozitní objímky, tak musíme samozřejmě uvažovat nejenom velikost tolerančního pole pro přesah Δr_2 , ale též i cenu takového setrvačnicku, která kvůli využití kompozitu a nutnosti provedení dodatečných technologických operací (například nalícování a kontrola rozměrů) se může podstatně zvýšit. Ve většině běžných aplikací nejsou tak velké požadavky na měrný kinetický moment. Ovšem u setrvačnicků, využívaných v silových gyroskopech systému řízení letové polohy kosmické lodí, je měrný kinetický moment velmi důležitou hodnotou a podstatné zdražení technologie jeho výroby nehraje tak velkou roli, protože se nejedná o sériovou výrobu. V takových situacích může nastat případ, že i ten nejkvalitnější materiál, třeba titan, nesplňuje požadavky na kinetické a pevnostní parametry. A tehdy právě využití kompozitní objímky může být jedním z možných řešení.

Minimalizace změny přesahu Δr_2 od rotace.

Pokud uvažujeme, že klesá přesah od nalícování Δr_2 při zvětšení otáček gyroskopu, tak při určité úhlové rychlosti se může přesah zcela vynulovat, což je limitující hranice pro maximální úhlovou rychlost a následně i pro maximální měrný kinetický moment. Proto hledáme takovou dvojici materiálů a pro ni vhodný poloměr r_2 , která zajistí neměnný přesah (v místě nalícování) při různých otáčkách. Tedy zajistíme rovnost poměrných tečných prodloužení kotouče a objímky na poloměru r_2 . Vyjdeme z úpravy vztahů (14) a (15) a uvažujeme rovnost $\varepsilon_{t2}^k = \varepsilon_{t2}^o$:

$$\frac{1}{E_1} \rho_1 \omega^2 \left[\frac{3+\mu_1}{8} (2r_1^2 + r_2^2) - \frac{1+3\mu_1}{8} r_2^2 \right] = \frac{1}{E_2} \rho_2 \omega^2 \left[\frac{3+\mu_2}{8} (2r_3^2 + r_2^2) - \frac{1+3\mu_2}{8} r_2^2 \right]$$

$$\frac{\rho_1}{E_1} \frac{3+\mu_1}{8} 2r_1^2 + \frac{\rho_1}{E_1} \frac{3+\mu_1}{8} r_2^2 - \frac{\rho_1}{E_1} \frac{1+3\mu_1}{8} r_2^2 = \frac{\rho_2}{E_2} \frac{3+\mu_2}{8} 2r_3^2 + \frac{\rho_2}{E_2} \frac{3+\mu_2}{8} r_2^2 - \frac{\rho_2}{E_2} \frac{1+3\mu_2}{8} r_2^2$$

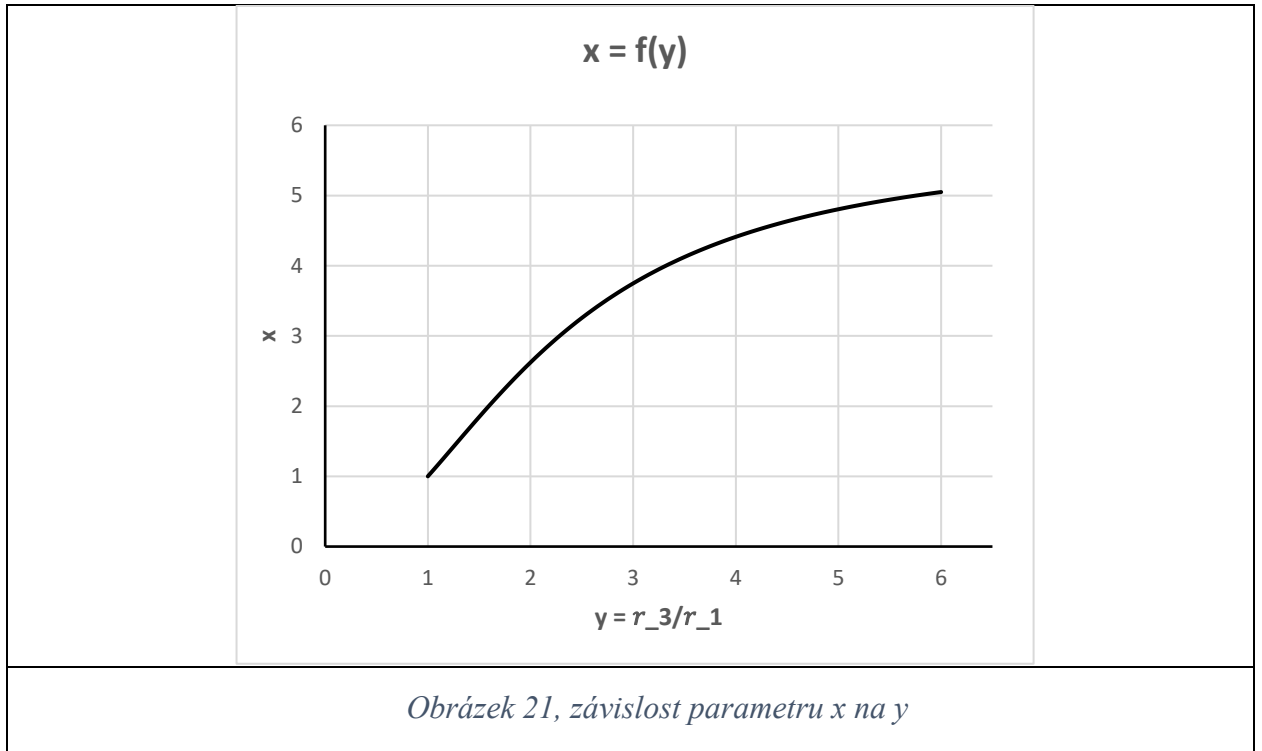
$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{E_1} r_2^2 \left(\frac{3+\mu_1}{8} - \frac{1+3\mu_1}{8} \right) + \frac{\rho_2}{E_2} \frac{1+3\mu_2}{8} r_2^2 - \frac{\rho_2}{E_2} \frac{3+\mu_2}{8} r_3^2 &= \frac{\rho_2}{E_2} \frac{3+\mu_2}{8} 2r_3^2 - \frac{\rho_1}{E_1} \frac{3+\mu_1}{8} 2r_1^2 \\ \frac{\rho_1}{E_1} r_2^2 \frac{2+2\mu_1}{8} + \frac{\rho_2}{E_2} r_2^2 \frac{2\mu_2-2}{8} &= \frac{\rho_2}{E_2} \frac{3+\mu_2}{8} 2r_3^2 - \frac{\rho_1}{E_1} \frac{3+\mu_1}{8} 2r_1^2 \\ r_2^2 \left[\frac{\rho_1}{E_1} \left(\frac{1-\mu_1}{4} \right) - \frac{\rho_2}{E_2} \left(\frac{1-\mu_2}{4} \right) \right] &= \frac{\rho_2}{E_2} \frac{3+\mu_2}{4} r_3^2 - \frac{\rho_1}{E_1} \frac{3+\mu_1}{4} r_1^2 \quad \text{po vynásobení čtyřmi:} \\ r_2^2 \left[\frac{\rho_1}{E_1} (1-\mu_1) - \frac{\rho_2}{E_2} (1-\mu_2) \right] &= \frac{\rho_2}{E_2} (3+\mu_2) r_3^2 - \frac{\rho_1}{E_1} (3+\mu_1) r_1^2 \\ r_2^2 = \frac{\frac{\rho_2(3+\mu_2)r_3^2 - \frac{\rho_1(3+\mu_1)r_1^2}{E_1}}{\frac{\rho_1(1-\mu_1)}{E_1} - \frac{\rho_2(1-\mu_2)}{E_2}}}{\frac{\rho_1(1-\mu_1)}{E_1} - \frac{\rho_2(1-\mu_2)}{E_2}} &\Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{\frac{\rho_2(3+\mu_2)r_3^2 - \frac{\rho_1(3+\mu_1)r_1^2}{E_1}}{\frac{\rho_1(1-\mu_1)}{E_1} - \frac{\rho_2(1-\mu_2)}{E_2}}}{\frac{\rho_1(1-\mu_1)}{E_1} - \frac{\rho_2(1-\mu_2)}{E_2}}} \end{aligned} \quad (23)$$

Nechť máme zadaný materiál objímky $\frac{\rho_1}{E_1}$, pak vypočítáme přibližně nutný poměr hustoty k Youngovu modulu pružnosti pro materiál kotouče. Pro zjednodušení výpočtu uvažujeme Poissonovo číslo obou materiálů $\mu=0,3$, a zavedeme si pomocné proměnné $x = \frac{\rho_1 E_2}{\rho_2 E_1}$ a $y = \frac{r_3}{r_1}$. Též musíme dbát na to, aby poloměr r_2 byl menší než poloměr r_3 .

$$\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{\frac{(3+\mu_2) \left(\frac{\rho_2 r_3^2}{E_2} - \frac{\rho_1 r_1^2}{E_1} \right)}{(1-\mu_1) \left(\frac{\rho_1}{E_1} - \frac{\rho_2}{E_2} \right)}} < r_3 \Rightarrow \frac{(3+\mu_2)}{(1-\mu_1)} \approx 4,71 \Rightarrow 4,71 \frac{\frac{\rho_2 r_3^2}{E_2} - \frac{\rho_1 r_1^2}{E_1}}{\frac{\rho_1}{E_1} - \frac{\rho_2}{E_2}} < r_3^2 \\ 4,71 \frac{\frac{\rho_2 r_3^2}{E_2} - x \frac{\rho_2 r_3^2}{E_2 y^2}}{x \frac{\rho_2}{E_2} - \frac{\rho_2}{E_2}} < r_3^2 &\Rightarrow 4,71 \frac{\frac{\rho_2 r_3^2}{E_2} \left(1 - x \frac{1}{y^2} \right)}{\frac{\rho_2}{E_2} (x-1)} < r_3^2 \Rightarrow 4,71 \frac{\left(1 - x \frac{1}{y^2} \right)}{(x-1)} < 1 \\ 1 - x \frac{1}{y^2} < \frac{x-1}{4,71} &\Rightarrow 1 + \frac{1}{4,71} < \frac{x}{4,71} + x \frac{1}{y^2} \Rightarrow x > \frac{1 + \frac{1}{4,71}}{\frac{1}{4,71} + \frac{1}{y^2}} \end{aligned}$$

V předchozí kapitole uvažujeme setrvačnick o rozměrech $r_1 = 0,05$ [m] $r_2 = 0,3$ [m]. Čili měli jsme $y = 6$. V takovém případě x musí být větší než 5,05 a je těžkým najít takovou dvojici materiálů, která by daný požadavek splňovala. Například dural má poměr hustoty k Youngovu modulu pružnosti kolem $34 \cdot 10^{-9} \left[\frac{kg}{m \cdot N} \right]$, což je jedna z nejmenších hodnot v porovnání s jinými materiály. U mědi je tento parametr $81 \cdot 10^{-9} \left[\frac{kg}{m \cdot N} \right]$ a je to jedna z největších hodnot v porovnání s jinými materiály. Ještě větší hodnotu má olovo, ale olovo má velmi malou pevnost, proto se nehodí na výrobu objímky setrvačnicku. Přibližně můžeme stanovit limitní hodnotu parametru x pro dvojice materiálů měď-dural $x = 2,38$ [–]. Následující graf na obr. 21 znázorňuje závislost parametru x na poměru poloměru y .

Je zřejmé, aby takový poloměr r_2 , při kterém přesah nebude závislý na otáčkách vůbec existoval, musí být poměr poloměrů $\frac{r_3}{r_1}$ hodně malý. Proto pro dvojici materiálů měď-dural musí být y menší než 1,8. To znamená, že při vnitřním poloměru sestavného setrvačnicku rovném $r_1 = 0,05 [m]$, vnější poloměr r_3 musí být menší než $0,09 [m]$. Toto omezení je pro výrobu setrvačnicku nepříznivé, protože právě při rostoucím vnějším poloměru r_3 roste i měrný kinetický moment H .

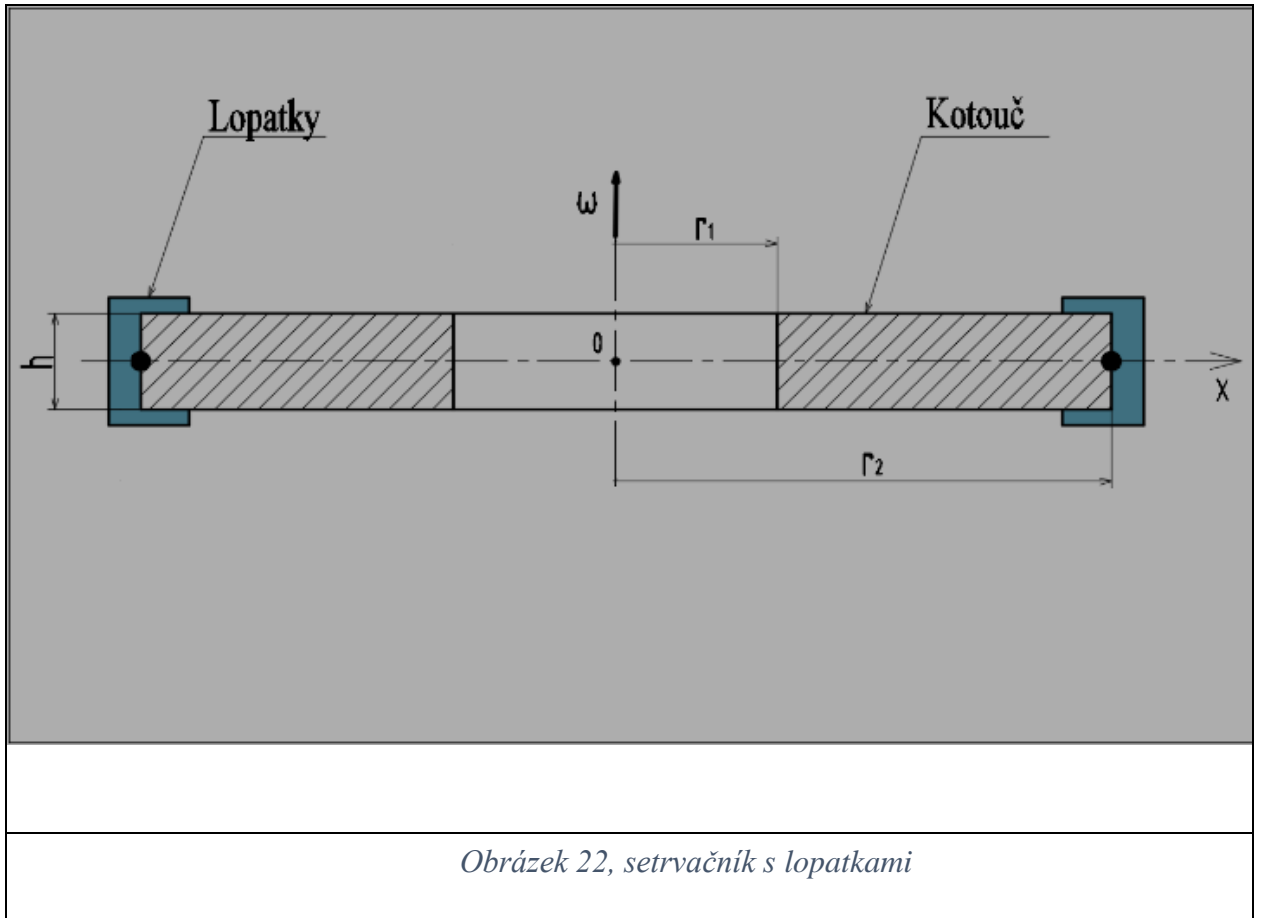


Vliv lopatek na měrný kinetický moment.

Při využití lopatek na jedné straně vzroste moment setrvačnosti kotouče, ale současně poklesnou maximální možné otáčky a zvětší se hmotnost setrvačnicku. Každý z těchto parametrů má vliv na měrný kinetický moment a obtížné posoudit jejich vliv. Pro nalezení závislosti měrného kinetického momentu disku H na hmotnosti lopatek využijeme rovnici průběhu tečných a radiálních napětí tenkého rotujícího kotouče (4).

$$\begin{cases} \sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \rho \omega^2 x^2 \\ \sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{x^2} - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 x^2 \end{cases}$$

Počáteční podmínky vycházejí z radiálních napětí na poloměrech r_1 a r_2 . Napětí σ_{r2} považujeme za rovnoměrně rozložené a středy hmotnosti lopatek umístíme na poloměr r_2 (viz obr. 22).



$$\begin{cases} \sigma_{r1} = 0 \\ \sigma_{r2} = \frac{m_l \omega^2}{2\pi h} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{r1} = 0 = C_1 - \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 \\ \sigma_{r2} = \frac{m_l \omega^2}{2\pi h} = C_1 - \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_2^2 \end{cases}$$

Po odečtení od první rovnice druhé dostaneme:

$$-\frac{m_l \omega^2}{2\pi h} = \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{C_2}{r_1^2} + \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_2^2 - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 \implies$$

$$\implies C_2 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) + \frac{m_l \omega^2}{2\pi h} \implies$$

$$\implies C_2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 r_1^2} = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) + \frac{m_l \omega^2}{2\pi h} \implies$$

$$\implies C_2 = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{m_l \omega^2}{2\pi h} \implies$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_2^2 r_1^2 + \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{m_l \omega^2}{2\pi h}}$$

Dosadíme C_2 do první rovnice soustavy a dostaneme:

$$C_1 = \frac{C_2}{r_1^2} + \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_2^2 r_1^2 \frac{1}{r_1^2} + \frac{r_2^2 r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2) r_1^2} \frac{m_l \omega^2}{2\pi h} + \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (r_2^2 + r_1^2) + \frac{r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{m_l \omega^2}{2\pi h}}$$

- Hmotnost kotouče:

$$m = \rho \pi (r_2^2 - r_1^2) h + m_l$$

- Moment setrvačnosti:

$$J = \frac{1}{2} (\rho \pi r_2^2 h r_2^2 - \rho \pi r_1^2 h r_1^2) + m_l r_2^2$$

$$J = \frac{1}{2} \rho \pi h (r_2^4 - r_1^4) m_l r_2^2$$

- Maximální otáčky:

Uvažujeme dále napjatost:

$$\sigma_{red} = \sigma_d = \sigma_{t1} \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_{red} = \sigma_d = \sigma_{t1} = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega_{max}^2 r_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_d = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega_{max}^2 (r_2^2 + r_1^2) + \frac{r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{m_l \omega_{max}^2}{2\pi h} + \frac{3+\mu}{8} \rho \omega_{max}^2 r_2^2 + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{m_l \omega_{max}^2}{2\pi h} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega_{max}^2 r_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\omega_{max}^2 \left[\frac{3+\mu}{8} \rho (2r_2^2 + r_1^2) + \frac{2r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{m_l}{2\pi h} - \frac{1+3\mu}{8} \rho r_1^2 \right] = \sigma_d \quad \Rightarrow$$

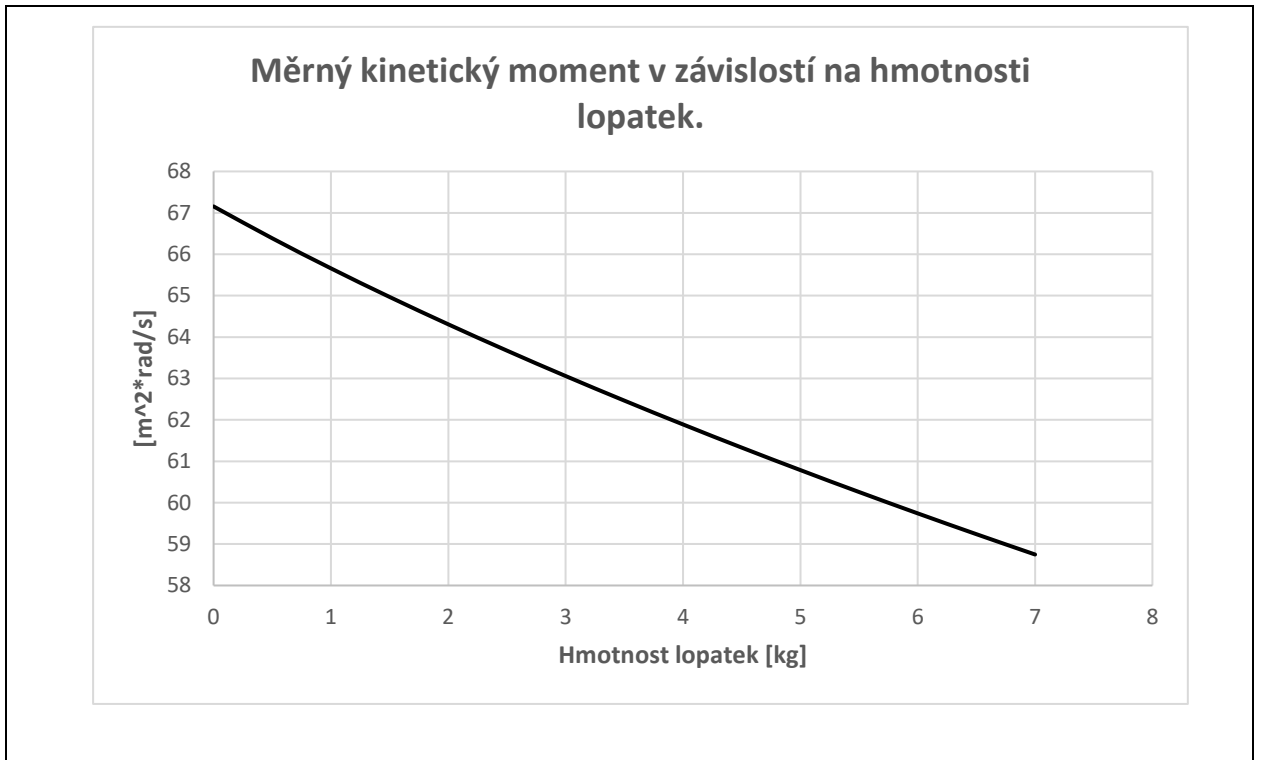
$$\boxed{\omega_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_d}{\frac{3+\mu}{8} \rho (2r_2^2 + r_1^2) + \frac{2r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{m_l}{2\pi h} - \frac{1+3\mu}{8} \rho r_1^2}}}$$

Pak měrný kinetický moment má tvar:

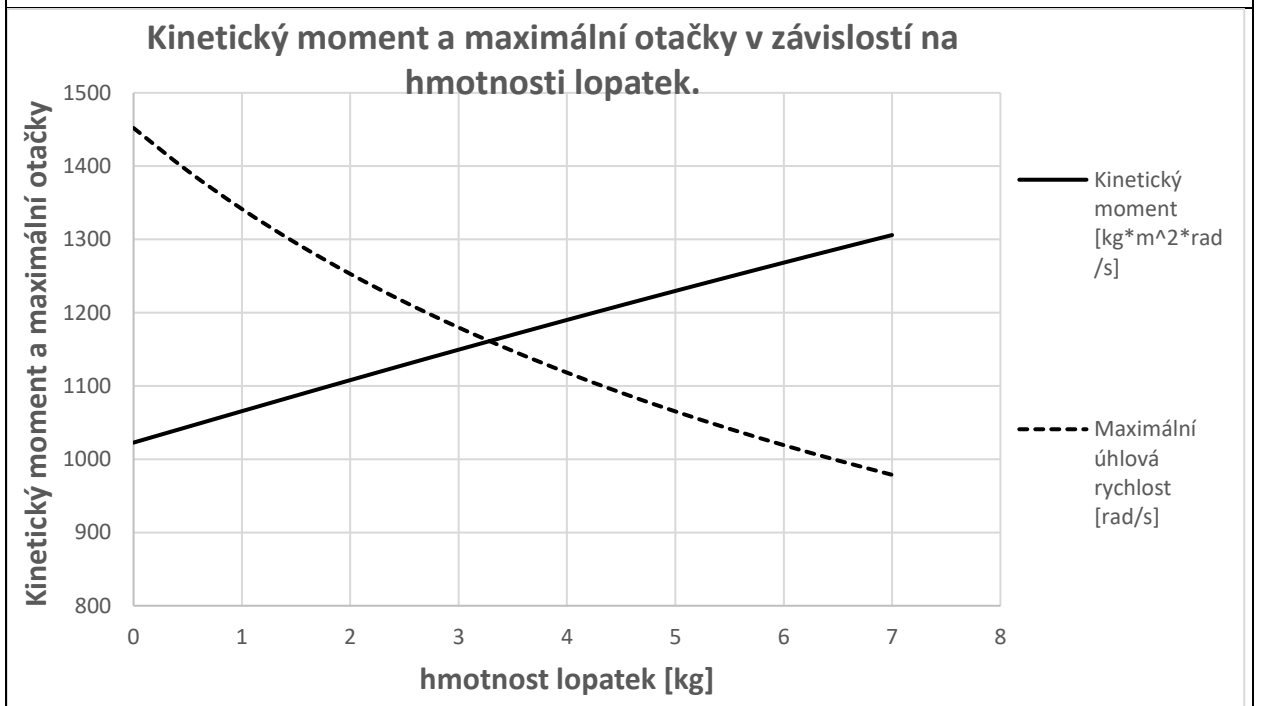
$$\frac{J \omega_{max}}{m} = \frac{\left(\frac{1}{2} \rho \pi h (r_2^4 - r_1^4) + m_l r_2^2 \right) * \sqrt{\frac{\sigma_d}{\frac{3+\mu}{8} \rho (2r_2^2 + r_1^2) + \frac{2r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{m_l}{2\pi h} - \frac{1+3\mu}{8} \rho r_1^2}}}{m} \quad (24)$$

Obr. 23 znázorňuje závislost měrného kinetického momentu na hmotnosti lopatek a je na něm vidět pokles měrného kinetického momentu při rostoucí hmotnosti lopatek. Znamená to, že větší vliv má právě klesající maximální úhlová rychlost a rostoucí hmotnost setrvačníku.

Geometrie kotouče v daném případě se nezměnila ($r_1 = 0,05 [m]$; $r_2 = 0,3 [m]$), materiál disku uvažujeme dural, tloušťka kotouče $h = 0,02 [m]$.



Obrázek 23, vliv lopatek na měrný kinetický moment



Obrázek 24, vliv lopatek na celkový kinetický moment a maximální úhlovou rychlost

I když zavedení lopatek zmenšuje měrný kinetický moment, má to též příznivé účinky. Například zvětšení momentu setrvačnosti a celkového kinetického momentu, což můžeme pozorovat z grafu na obr. 24. Klesají při tom otáčky, což zvyšuje životnost ložisek. Takové řešení může být výhodné u zařízení, kde setrvačnický pracuje v malých otáčkách a odehrává roli tlumiče dynamických torzních kmitů, čili důležitý je u této konstrukce právě moment setrvačnosti.

Závěr

Při projektování silového gyroskopu je důležité maximálně využít konstrukční prostor a snažit se uplatnit ve výsledku co největší vnější poloměr kotouče. Zlepší to nejenom měrný kinetický moment, ale i provozní podmínky ložisek, protože poklesne dovolená maximální obvodová rychlost.

Sestavný setrvačnický s nalisovaným spojem v případě využití kovových součástí – kotouče a objímky, dává malý přínos měrného kinetického momentu. Vznikají při tom velmi přesné požadavky na rozměrové tolerance poloměru nalisování a tolerance provozní teploty z důvodu odlišné teplotní roztažnosti použitých materiálů. I při zvětšení tolerančního pole na úkor měrného kinetického momentu se situace málo mění a dovolená kolísání provozní teploty a velikosti poloměrů nalisování zůstávají hodně malé a prakticky nepoužitelné.

Využití kompozitní objímky nevyžaduje velké rozměrové tolerance a dovoluje prakticky dostatečné kolísání provozní teploty. Vzniká při tom pozoruhodné zvětšení měrného kinetického momentu. Přičemž způsob vinutí kompozitu v daném případě je dost jednoduchý

Seznam užitých označení

- J	Moment setrvačnosti	$[kg \cdot m^2]$
- m	Hmotnost	$[kg]$
- E	Kinetická energie	$[J]$
- ω	Úhlová rychlost	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
- \vec{M}	Vektor momentu sil	$[N \cdot m]$
- \vec{L}	Vektor kinetického momentu	$\left[\frac{kg \cdot m^2 \cdot rad}{s}\right]$
- $\vec{\omega}_p$	Vektor úhlové rychlosti precese	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
- φ_p	Úhel precese	$[rad]$
- F_o	Odstředivá síla	$[N]$
- σ	Napětí	$[MPa]$
- ρ	Hustota	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
- h	Tloušťka kotouče	$[m]$
- ε	Poměrná prodloužení elementu	$[-]$
- E	Youngův modul	$[GPa]$
- μ	Poissonovo číslo	$[-]$
- r_i	i-tý poloměr kotouče	$[m]$
- V	Objem	$[m^3]$
- A	Plocha	$[m^2]$
- Δr	Přesah	$[\mu m]$
- p	Tlak	$[Pa]$
- H	Měrný kinetický moment	$\left[\frac{m^2 \cdot rad}{s}\right]$
- f	Součinitel tření	$[-]$
- k	Součinitel bezpečnosti	$[-]$

Seznam použité literatury

[1] STEJSKAL Vladimír, BROUSIL Jaromír a STEJSKAL Stanislav. Mechanika III. Vyd. 2. Praha : ČVUT. ISBN 80-01-02388-5.

[2] Vittorio M. N. Passaro, Antonello Cuccovillo, Lorenzo Vaiani, Martino De Carlo and Carlo Edoardo Campanella.: Gyroscope Technology and Applications: A Review in the Industrial Perspective. Dostupné z: <http://www.mdpi.com/journal/sensors>

[3] Wilfried Ley, Klaus Wittmann, Willi Hallmann.: Handbook of space technology © 2009 John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 978-0-470-69739-9

[4] MICHALEC, Jiří. Pružnost a pevnost I. Vyd. 3. Praha: ČVUT, 2009. ISBN 978-80-01-04224-3.

[5] MICHALEC, Jiří. Pružnost a pevnost II. Vyd. 2. Praha: ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02375-3.