

Bakalářská práce



České  
vysoké  
učení technické  
v Praze

**F3**

Fakulta elektrotechnická  
Katedra radioelektroniky

## Šíření jednorozměrných vln lokálně periodickým prostředím

**Antonín Krpenský**

Vedoucí: doc. Dr. Ing. Michal Bednařík  
Obor: Otevřené elektronické systémy  
Květen 2018



## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Krpenský** Jméno: **Antonín** Osobní číslo: **456899**  
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**  
Zadávající katedra/ústav: **Katedra radioelektroniky**  
Studijní program: **Otevřené elektronické systémy**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Šíření jednorozměrných vln lokálně periodickým prostředím**

Název bakalářské práce anglicky:

**Propagation of One-Dimensional Waves through Locally Periodic Media**

Pokyny pro vypracování:

Existuje řada modelových rovnic popisující elektromagnetické, elastické, zvukové či kvantové vlny v nehomogenních oblastech a některé z nich jsou z matematického pohledu stejného typu. Tento izomorfismus nám umožňuje použít stejného přístupu k řešení odpovídajících modelových rovnic.

1. Ukažte izomorfismus různých modelových rovnic, se kterými se setkáváme ve vlnové fyzice.
2. Na základě Floquetovy-Blochovy teorie analyzujte chování vln šířících se lokálně periodickým prostředím.
3. Demonstrujte některé teoretické závěry konkrétními výpočty (koeficient transmise, pásmové zádrže, Floquetovy-Blochovy vlny atd.) použitím matematického softwaru Maple.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Magnus, W., Winkler, S.: Hill's equation, Interscience publishers, New York, 1966.
- [2] Morozov, G.V., Sprung, D. W. L.: Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystals, EPL vol. 96, 54005, 2011.
- [3] Morozov, G.V., Placido, F., Sprung, D. W. L.: Disappearance of allowed bands in light scattering from a binary photonic crystal beyond the second critical angle, J. Opt. Soc. Am. B, vol. 30, 788-794, 2013.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**doc. Dr. Ing. Michal Bednařík, katedra fyziky FEL**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **07.02.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **25.05.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: **30.09.2019**

\_\_\_\_\_  
doc. Dr. Ing. Michal Bednařík  
podpis vedoucí(ho) práce

\_\_\_\_\_  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

\_\_\_\_\_  
prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta



## Poděkování

Děkuji doc. Dr. Ing. Michalovi Bednaříkovi za jeho odbornou pomoc, cenné připomínky, poskytnutí veškerých potřebných materiálů a pravidelné konzultace.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 25. května 2018

## Abstrakt

Cílem práce je seznámit čtenáře se dvěma metodami analýzy šíření jednorozměrných vln v periodickém prostředí: metodou matice přenosu a zejména pak Floquetovou teorií. Text je zaměřen primárně na matematické odvození obou přístupů. Dále je část věnovaná nalezení modelových rovnic pro šíření elektromagnetických vln s TE a TM polarizací. Na tyto rovnice je pak aplikována Floquetova teorie, s jejíž pomocí jsou nalezeny konkrétní tvary vlnových řešení, které nazýváme Blochovy funkce, a koeficient transmise pro lokálně periodickou dielektrickou strukturu nazývanou binární fotonický krystal. Součástí práce je i modelování a vykreslení reálných průběhů Blochových funkcí a koeficientu transmise pro konkrétně zvolený krystal.

**Klíčová slova:** Floquetova teorie, matice přenosu, lokálně periodická struktura, Blochova funkce, koeficient transmise, binární fotonický krystal

**Vedoucí:** doc. Dr. Ing. Michal Bednařík

## Abstract

The aim of this work is to acquaint readers with two methods of analysis of the propagation of one-dimensional waves in a periodic media: the method of transfer matrix and especially the Floquet theory. The text focuses primarily on the mathematical derivation of both the approaches. Next part is devoted to finding model equations for the propagation of electromagnetic waves with the TE and TM polarization. Then, the Floquet theory is applied to these equations to find the specific waveform shapes we call the Bloch functions, and the coefficient of transmission for a local periodic dielectric structure called Binary Photonic Crystal. A part of the thesis is also the modeling and plotting of the real Bloch functions and the transmission coefficient for the specific crystal.

**Keywords:** Floquet-Bloch theory, transfer matrix, locally periodic structure, Bloch function, transmission coefficient, binary photonic crystal

## Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>	2.3.3 Mechanické vlny na zatížené struně . . . . .	15
<b>2 Metoda přenosové matice</b>	<b>3</b>	2.3.4 Akustické vlny ve vlnovodu vyplněném tekutinou . . . . .	17
2.1 Kvantová teorie . . . . .	3	2.3.5 Elektromagnetické vlny - vrstvené dielektrikum . . . . .	18
2.1.1 Pravděpodobnostní vlny . . . . .	3	2.4 Shrnutí . . . . .	20
2.1.2 Pravděpodobnostní tok . . . . .	4	<b>3 Floquetova teorie</b>	<b>21</b>
2.2 Matice přenosu . . . . .	5	3.1 Normalizované řešení . . . . .	21
2.2.1 Potenciál na konečném intervalu	5	3.2 Liouvillův vztah . . . . .	22
2.2.2 Vlastnosti přenosové matice . .	6	3.3 Floquetova teorie . . . . .	23
2.2.3 Koeficient transmise . . . . .	8	3.3.1 Dva různé kořeny charakteristického polynomu . . . .	25
2.2.4 Lokálně periodický potenciál .	8	3.3.2 Jeden dvojnásobný kořen charakteristického polynomu . . . .	26
2.2.5 Přenosová matice pro lokálně periodický potenciál . . . . .	10	3.4 Blochovy funkce pro elektromagnetické pole . . . . .	27
2.3 Konkrétní příklady přenosové matice . . . . .	11	3.4.1 Binární fotonický krystal . . . .	27
2.3.1 Pravděpodobnostní vlny - delta potenciál . . . . .	11	3.4.2 Modelové rovnice . . . . .	28
2.3.2 Pravděpodobnostní vlny - skoková funkce . . . . .	13	3.4.3 Floquetova teorie pro elektromagnetické pole . . . . .	31
		3.5 Koeficient transmise . . . . .	36

3.6 Shrnutí .....	36
<b>4 Binární fotonické krystaly</b>	<b>39</b>
4.1 Aplikace metody přenosové matice .....	39
4.2 Aplikace Floquetovy teorie .....	40
4.2.1 Koeficient transmise .....	40
4.2.2 Blochovy funkce .....	42
<b>5 Závěr</b>	<b>49</b>
<b>Literatura</b>	<b>51</b>
<b>A Seznam přiložených souborů</b>	<b>53</b>
A.1 MAPLE Worksheets .....	53



## Obrázky

2.1 Potenciál na konečném intervalu .	5	4.1 Kvadrát modulu koeficientu transmise maticovou metodou, $N = 4$ . . . . .	40
2.2 Základní buňka potenciálu . . . . .	9	4.2 Kvadrát modulu koeficientu transmise pomocí Floquetovy teorie, $n_{\text{in}} = n_{\text{ext}} = n_2$ . . . . .	41
2.3 Periodický potenciál . . . . .	9	4.3 Kvadrát modulu koeficientu transmise pomocí Floquetovy teorie, $n_{\text{in}} = n_{\text{ext}} = 1$ . . . . .	42
2.4 Základní buňka delta potenciálu	12	4.4 Průběhy funkcí $F_1(z)$ , $F_2(z)$ , $ E(z) ^2$ pro $k = 0, 603 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	43
2.5 Periodická struktura delta potenciálu . . . . .	13	4.5 Průběhy funkcí $P_1(z)$ , $P_2(z)$ pro $k = 0, 603 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	43
2.6 Základní buňka skokového potenciálu . . . . .	14	4.6 Průběhy funkcí $F_1(z)$ , $F_2(z)$ , $ E(z) ^2$ pro $k = k_{1,\text{right}} \approx 6, 47186 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	44
2.7 Periodický skokový potenciál . . .	14	4.7 Průběhy funkcí $P_1(z)$ , $P_2(z)$ pro $k = k_{1,\text{right}} \approx 6, 47186 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	45
2.8 Struna se závažím v počátku . . .	15	4.8 Průběhy funkcí $F_1(z)$ , $F_2(z)$ , $ E(z) ^2$ pro $k = 0, 785 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	45
2.9 Struna s $N$ závažími . . . . .	16	4.9 Průběhy funkcí $P_1(z)$ , $P_2(z)$ pro $k = 0, 785 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	46
2.10 Základní buňka periodického vlnovodu . . . . .	17	4.10 Průběhy funkcí $F_1(z)$ , $F_2(z)$ , $ E(z) ^2$ pro $k = k_{2,\text{left}} \approx 9, 22877 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	46
2.11 Periodický vlnovod . . . . .	18	4.11 Průběhy funkcí $P_1(z)$ , $P_2(z)$ pro $k = k_{2,\text{left}} \approx 9, 22877 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$ . . . . .	47
2.12 Skoková nehomogenita v optickém médiu . . . . .	19		
3.1 Binární fotonický krystal . . . . .	28		
3.2 TE polarizace . . . . .	29		
3.3 TE polarizace . . . . .	30		

4.12 Průběhy funkcí  
 $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $|E(z)|^2$  pro  
 $k = 0,962 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$  ..... 48

4.13 Průběhy funkcí  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$  pro  
 $k = 0,962 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$  ..... 48

# Kapitola 1

## Úvod

V této práci se budeme zabývat studiem šíření jednorozměrných vln skrze lokálně periodické struktury, přičemž konkrétně se zaměříme na dvě metody, a to sice metodu přenosové matice a zejména pak na Floquetovu teorii. Na začátku textu bude předmětem našeho zájmu první z nich, tedy metoda přenosové matice. Ukážeme, že lze najít takovou matici, která popisuje průchod vlny danou lokálně periodickou strukturou. Z této matice lze pak velmi snadno určit koeficient transmise pro danou strukturu. Dále ukážeme způsob nalezení této matice pro různé typy fyzikálních vln, přičemž se omezíme pouze na binární periodické struktury. V další části textu se podrobněji podíváme na Floquetovu teorii, která umožňuje nalezení velmi elegantního řešení diferenciálních rovnic druhého řádu s periodickými koeficienty, které nazýváme Blochovy funkce (Blochovy vlny). Hlavní výhodou této teorie je, že umožňuje velmi snadné nalezení průběhu vlny v celé struktuře, což například dříve zmíněná metoda přenosové matice umožňuje pouze relativně komplikovaným způsobem. Nejprve provedeme odvození matematického tvaru oněch Blochových funkcí. Poté tuto teorii budeme aplikovat na konkrétní problematiku týkající se šíření elektromagnetických vln binárními fotonickými krystaly, což je lokálně periodická struktura tvořená opakujícími se vrstvami materiálů s různými hodnotami permitivity a permeability. Sestavíme modelové rovnice jednak pro TE (transverzálně elektrické) polarizované vlny, jednak pro TM (transverzálně magnetické) polarizované vlny. Ukážeme, že tyto rovnice jsou vzájemně izomorfní, přičemž tento izomorfismus není omezen pouze na elektromagnetické vlny, nýbrž ho lze nalézt mezi všemi fyzikálními případy jednorozměrných vln. Následně odvodíme konkrétní tvar Blochových funkcí pro tyto modelové rovnice, přičemž se i detailněji podíváme na různé matematické problémy těchto řešení, které mohou nastat, avšak jsou často přehlíženy. V poslední části textu provedeme aplikaci obou zmíněných teorií na jeden konkrétní binární fotonický krystal s definovanými parametry. Ponejprv po-

rovnáme obě metody při nalezení koeficientu transmise tohoto krystalu, a dále vykreslíme průběhy Blochových funkcí a celkových elektrických polí v krystalu pro vybrané hodnoty vlnových čísel. Na závěr pak velmi stručně shrneme důležité informace, porovnáme obě dvě metody, jejich výhody a nevýhody při různých konkrétních výpočtech a provedeme celkové zhodnocení práce.

## Kapitola 2

### Metoda přenosové matice

V této části textu se zaměříme na modelování šíření vln skrze lokálně nehomogenní prostředí pomocí metody přenosové matice. Nejprve odvodíme tvar této matice v kontextu kvantové mechaniky, a poté ukážeme, že tento přístup je možné zobecnit na obecnou vlnu, nezávisle na jejím charakteru.

#### 2.1 Kvantová teorie

##### 2.1.1 Pravděpodobnostní vlny

Je všeobecně známo, že pohyb částice z hlediska kvantové teorie je možné popisovat pomocí Schrödingerovy rovnice. V této práci se budeme zabývat pouze jednorozměrným případem, kdy se částice (respektive obecná vlna) pohybuje ve směru osy  $z$ , přičemž tato rovnice pak nabude tvaru

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(z, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(z, t) + U(z) \Psi(z, t), \quad (2.1)$$

viz například [1], kde  $\Psi(z, t)$  představuje danou pravděpodobnostní vlnu částice,  $U(z)$  je potenciál,  $m$  symbolizuje konstantní hmotnost částice a  $\hbar$  značí redukovanou Planckovu konstantu. Pomocí metody separace proměnných, kdy si tuto vlnovou funkci rozevíšeme jako

$$\Psi(z, t) = \psi(z) \exp(-j\omega t) = \psi(z) \exp\left(-j\frac{E}{\hbar}t\right), \quad (2.2)$$

a dále ji dosadíme do (2.1), dostaneme takzvaný bezčasový tvar Schrödingery rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + U(z)\psi(z) = E\psi(z), \quad (2.3)$$

kde separační konstanta  $E$  značí energii částice. Obdrželi jsme tvar Hillovy rovnice, což je diferenciální rovnice typu

$$\frac{d^2}{dz^2} f(z) + a(z)f(z) = 0, \quad (2.4)$$

která má za předpokladu  $a(z) = \text{const.}$  řešení

$$y(z) = C_1 \exp(j\lambda z) + C_2 \exp(-j\lambda z), \quad (2.5)$$

kde  $\pm\lambda$  představují kořeny charakteristického polynomu oné diferenciální Hillovy rovnice.

### 2.1.2 Pravděpodobnostní tok

Pro budoucí nalezení přenosové matice musíme nyní odvodit rovnici kontinuity pro pravděpodobnostní tok. Nejprve vezmeme rovnici (2.1) a vynásobíme ji  $\Psi^*(z, t)$ . Následně vezmeme tutéž rovnici, tu komplexně sdružíme a poté ji vynásobíme  $\Psi(z, t)$ . Dostaneme tak následující dvě rovnice

$$\begin{aligned} j\hbar\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi + U(z)\Psi^*\Psi \\ -j\hbar\Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi^* + U^*(z)\Psi\Psi^*. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tyto rovnice od sebe odečteme, a za pomoci jednoduchých úprav převedeme do tvaru

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi\Psi^*) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi^* \frac{\partial}{\partial z} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial z} \Psi^* \right) + \Psi\Psi^* [U(z) - U^*(z)]. \quad (2.7)$$

V našem případě bude potenciál  $U(z)$  nabývat ryze reálných hodnot, díky čemuž nám vypadne poslední člen ve vztahu (2.7). Dále využijeme faktu, že výraz  $\Psi\Psi^*$  představuje hustotu pravděpodobnosti výskytu částice, kterou označíme  $\rho(z, t)$ . Nakonec využijeme substituci

$$j(z, t) = \frac{j\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial}{\partial z} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial z} \Psi^* \right), \quad (2.8)$$

přičemž veličinu  $j(z, t)$  budeme nazývat právě hustotou pravděpodobnostního toku, viz například [1]. Pomocí zmíněných úprav můžeme nakonec převést rovnici (2.7) do výsledného tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} j(z, t) = 0. \quad (2.9)$$

Vztah (2.9) představuje rovnici kontinuity pro pravděpodobnostní vlny, která by v případě třírozměrných vln nabyla standardního tvaru

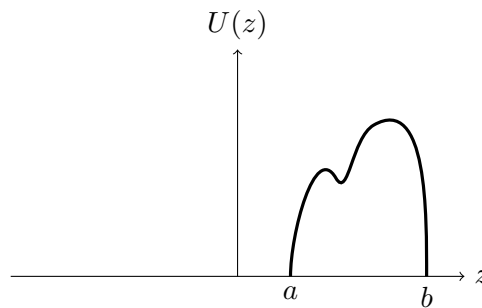
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.10)$$

kde  $\mathbf{r}$  značí polohový vektor.

## 2.2 Matice přenosu

### 2.2.1 Potenciál na konečném intervalu

Nyní se budeme zabývat nalezením přenosové matice pro nehomogenitu, kterou bude představovat potenciál, jenž nabývá nenulových hodnot pouze na konečném intervalu  $(a, b)$ , viz obrázek 2.1.



**Obrázek 2.1:** Potenciál na konečném intervalu

Pro tento typ potenciálu tedy můžeme psát

$$U(z) = \begin{cases} U_{ab}(z), & a < z < b \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Je důležité podotknout, že nyní se zabýváme bezčasovou variantou Schrödingery rovnice. Mimo interval  $(a, b)$  bude řešení nabývat tvaru (2.5). Rozepíšme tedy toto řešení podle jednotlivých intervalů jako

$$\psi(z) = \begin{cases} A \exp(jkz) + B \exp(-jkz), & z < a \\ \psi_{ab}(z), & a < z < b \\ C \exp(jkz) + D \exp(-jkz), & z > b, \end{cases} \quad (2.12)$$

kde  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  symbolizuje vlnové číslo. Uvědomme si, že jednotlivé části řešení s kladným znaménkem v exponentu představují vlny šířící se v kladném

směru osy  $z$  (tedy doprava), zatímco záporné znaménko značí pohyb v záporném směru této osy (doleva). V tuto chvíli můžeme (za pomoci okrajových podmínek) najít obecný lineární vztah mezi koeficienty vlny na levé a pravé straně potenciálu. Tento vztah zapíšeme ve vektorové podobě jako

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

kde  $\mathbf{M}$  představuje právě onu přenosovou matici.

### 2.2.2 Vlastnosti přenosové matice

Zaměřme se nyní na nalezení základních vlastností přenosové matice. Začneme tím, že vezmeme rovnici (2.1), kterou komplexně sdružíme a následně provedeme časovou inverzi. Tím obdržíme tvar

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(z, -t) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi^*(z, -t) + U(z) \Psi^*(z, -t). \quad (2.14)$$

Tato rovnice však nabývá stejného tvaru, jako původní rovnice (2.1). Po separaci proměnných proto dojdeme opět k Hillově diferenciální rovnici typu (2.3), tedy

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi^*(z) + U(z) \psi^*(z) = E \psi^*(z). \quad (2.15)$$

Její řešení bude tím pádem vypadat následujícím způsobem

$$\psi(z) = \begin{cases} A^* \exp(-jkz) + B^* \exp(jkz), & x < a \\ \psi_{ab}^*(z), & a < x < b \\ C^* \exp(-jkz) + D^* \exp(jkz), & x > b \end{cases}. \quad (2.16)$$

Povšimněme si, že se změnila znaménka v exponentech, tudíž se v tomto případě šíří vpravo vlny s koeficienty  $B^*, D^*$ , a naopak vlny s koeficienty  $A^*, C^*$  směřují vlevo. Chceme-li tedy zapsat vztah mezi těmito koeficienty, musíme si dát pozor na jejich umístění ve vektoru. Dojdeme tak k následujícímu tvaru

$$\begin{pmatrix} B^* \\ A^* \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} D^* \\ C^* \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Rozepíšme si tuto rovnost jako

$$\begin{aligned} B^* &= m_{11} D^* + m_{12} C^* \\ A^* &= m_{21} D^* + m_{22} C^* \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nyní provedeme tři velice jednoduché úpravy v této soustavě. Prohodíme mezi sebou řádky, pak sloupce, a na závěr celou soustavu komplexně sdružíme. Výsledná soustava tedy bude vypadat takto

$$\begin{aligned} A &= m_{22}^* C + m_{21}^* D \\ B &= m_{12}^* C + m_{11}^* D \end{aligned} \quad (2.19)$$



Tuto soustavu nyní zapíšeme opět v maticové podobě

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22}^* & m_{21}^* \\ m_{21}^* & m_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Porovnáním vztahů (2.13) a (2.20) dojdeme k následujícímu zjištění

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22}^* & m_{21}^* \\ m_{21}^* & m_{22}^* \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Z toho plynou dva důležité poznatky, a to sice

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22}^* \\ m_{12} &= m_{21}^* \end{aligned}. \quad (2.22)$$

Odtěd tedy můžeme matici přenosu zapisovat vždy ve tvaru

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \Lambda & \Upsilon \\ \Upsilon^* & \Lambda^* \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

kde  $u = m_{11}$  a  $v = m_{1,2}$ . Dále nám zbývá odvodit ještě jednu důležitou vlastnost přenosové matice. K tomu využijeme vztahu pro rovnici kontinuity (2.9), která se nám velmi zjednoduší, neboť se zabýváme pouze bezčasovou variantou Schrödingerovy rovnice. Člen vlevo nám tedy zcela vypadne a dostaneme tak jednoduchou rovnici

$$\frac{d}{dz} j(z) = 0. \quad (2.24)$$

Po integraci dospějeme k výsledku, že

$$j(z) = \frac{j\hbar}{2m} \left( \psi^* \frac{d}{dz} \psi - \psi \frac{d}{dz} \psi^* \right) = \text{const.}, \quad (2.25)$$

kterýžto fakt dále využijeme. Přepišme výsledné tvrzení v následující formě

$$j(z_1) = j(z_2), \quad (2.26)$$

přičemž  $z_1 \rightarrow a^-$  a  $z_2 \rightarrow b^+$ . Za pomoci vztahu mezi koeficienty  $A, B$  a  $C, D$ , který nám udává matice  $\mathbf{M}$ , můžeme do levé strany rovnice (2.26) dosadit řešení ve tvaru

$$\psi_l(z) = (\Lambda C + \Upsilon D) \exp(jkz) + (\Upsilon^* C + \Lambda^* D) \exp(-jkz), \quad (2.27)$$

a do pravé strany dosadíme

$$\psi_r(z) = C \exp(jkz) + D \exp(-jkz). \quad (2.28)$$

Po úpravách dospějeme k následujícímu výsledku

$$|\Lambda|^2 - |\Upsilon|^2 = 1. \quad (2.29)$$

Podíváme-li se však na matici  $\mathbf{M}$ , zjistíme, že vztah (2.29) představuje definici determinantu této matice. Tudíž jsme došli k další vlastnosti přenosové matice pro námi uvažovaný potenciál (2.11), a to sice

$$\det(\mathbf{M}) = 1. \quad (2.30)$$

Vztahy (2.22) a (2.30) nám udávají dvě základní charakteristiky přenosové matice  $\mathbf{M}$ .

### 2.2.3 Koeficient transmise

Zaměřme se nyní na nalezení koeficientu transmise pro daný potenciál, reprezentovaný maticí přenosu (2.23). Představme si částici, která se šíří pouze v kladném směru osy  $z$  (směrem zleva doprava) skrze potenciál. Vzhledem k tomu, že žádná částice nepřichází k potenciálu zleva, pak pro koeficient  $D$  bude platit

$$D = 0. \quad (2.31)$$

Dle vztahu (2.13) pak můžeme psát

$$A = \Lambda C. \quad (2.32)$$

Definujme nyní koeficient transmise  $t$  jako

$$t = \frac{C}{A} = \frac{1}{\Lambda}. \quad (2.33)$$

Pro kvadrát modulu koeficientu transmise, který je definován jako pravděpodobnost průchodu částice skrze potenciál, pak bude platit

$$T = |t|^2 = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1}{|\Lambda|^2}. \quad (2.34)$$

S využitím rovnosti (2.29) můžeme vztah (2.34) upravit na tvar

$$T = \frac{1}{1 + |\Upsilon|^2}. \quad (2.35)$$

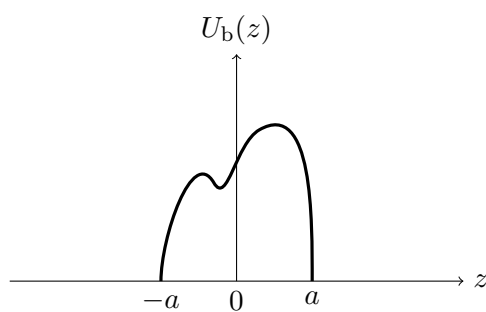
### 2.2.4 Lokálně periodický potenciál

Nyní se podíváme na situaci, kdy potenciál bude představovat lokálně periodickou funkci. Jeho definici provedeme následujícím způsobem. Nejprve definujeme jednu základní buňku tohoto potenciálu jako

$$U_b(z) = \begin{cases} U'(z), & -a < x < a \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}. \quad (2.36)$$

Záměrně jsme zvolili interval symetrický podle počátku (viz obrázek 2.2). Dále předpokládejme, že pro tento potenciál existuje matice přenosu  $M$ . Zvolme nyní vzdálenost  $d$  takovým způsobem, že  $d > 2a$ , a dále libovolný konečný počet buněk  $N$ . Výsledný lokálně periodický potenciál poté zapíšeme ve formě

$$U_p(z) = \sum_{i=0}^{N-1} U_b(z - id). \quad (2.37)$$



Obrázek 2.2: Základní buňka potenciálu

Tím jsme poskládali  $N$  základních buněk  $U_b(z)$  za sebe (viz obrázek 2.3). Uvědomme si, že pro  $N$  buněk budeme potřebovat  $N + 1$  řešení. Zapišme tato řešení ve tvaru

$$\psi_i(z) = A_i \exp[jk(z - id)] + B_i \exp[-jk(z - id)], \quad (i - 1)d + a < z < id - a, \quad (2.38)$$

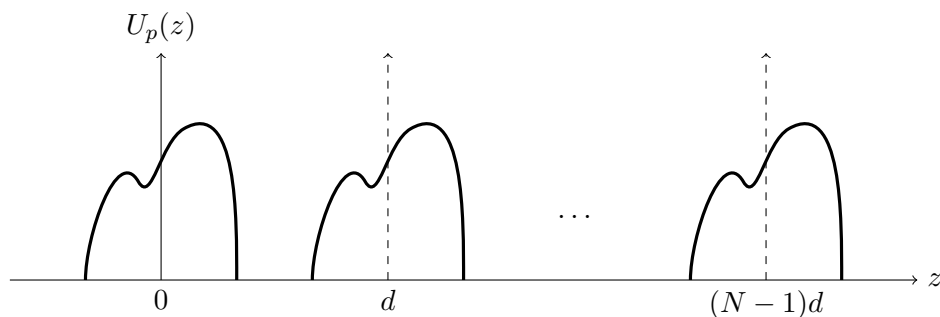
pro  $0 < i < N$ . Tím jsme definovali řešení uvnitř periodické struktury. Povšimněme si, že nás zajímají pouze místa uvnitř této struktury, kde je potenciál nulový. Dále musíme navíc dodefinovat řešení nalevo od této struktury jako

$$\psi_0(z) = A_0 \exp(jkz) + B_0 \exp(-jkz), \quad z < -a, \quad (2.39)$$

a nakonec řešení vpravo od této struktury

$$\psi_N(z) = A_N \exp[jk(z - Nd)] + B_N \exp[-jk(z - Nd)], \quad z > a. \quad (2.40)$$

Uvědomme si, že každé jednotlivé řešení jsme posunuli takovým způsobem, že jeho počátek se nachází uprostřed první sousedící potenciálové buňky napravo.



Obrázek 2.3: Periodický potenciál

### 2.2.5 Přenosová matice pro lokálně periodický potenciál

V této části textu se zaměříme na nalezení přenosové matice  $\mathbf{M}_N$  pro případ periodické struktury potenciálu, kterou jsme definovali v předchozí sekci. Ponejprv odvodíme vztah mezi koeficienty sousedících dvou řešení. Je důležité si uvědomit, že v námi definované periodické struktuře je řešení  $\psi_{i+1}(z)$  oproti řešení  $\psi_i(z)$  posunuté o  $d$ . Vztah mezi koeficienty sousedících řešení bude tedy vypadat následujícím způsobem

$$\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} A_{i+1} \exp(-jkd) \\ B_{i+1} \exp(jkd) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Vztah (2.41) můžeme upravit na tvar

$$\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \exp(-jkd) & 0 \\ 0 & \exp(jkd) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Definujme posunutou přenosovou matici  $\mathbf{P}$  způsobem

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \exp(-jkd) & 0 \\ 0 & \exp(jkd) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \exp(-jkd) & v \exp(jkd) \\ v^* \exp(-jkd) & u^* \exp(jkd) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Matice  $\mathbf{P}$  nám tedy udává vztah mezi sousedními koeficienty v námi definované periodické struktuře. V tuto chvíli již poměrně snadno nalezneme přenosovou matici  $\mathbf{M}_N$  pro celou strukturu

$$\mathbf{M}_N = \mathbf{P}^N \begin{pmatrix} \exp(jkNd) & 0 \\ 0 & \exp(-jkNd) \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Všimněme si, že obdobně jako ve vztahu (2.42), tak i ve vztahu (2.44) musíme řešit vzájemný posun řešení  $\psi_0(z)$  a  $\psi_N(z)$ . Tento posun představuje matice vpravo. Nyní se celý problém redukoval na nalezení  $N$ -té mocniny matice  $\mathbf{P}$ . K tomu lze využít velmi mnoho postupů. Vhodné je kupříkladu využít větu Cayley-Hamiltonovu, viz například [2], podle které každá matice je kořenem svého charakteristického polynomu, tedy

$$p_\lambda(\mathbf{P}) = 0, \quad (2.45)$$

kde  $p_\lambda$  je právě onen charakteristický polynom matice  $\mathbf{P}$ . Detailním odvozením se v tomto textu nebudeme zabývat, pouze zapíšeme výsledný vztah pro  $\mathbf{M}_N$ , ke kterému za pomoci této věty dojdeme

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} \Lambda_N & \Upsilon_N \\ \Upsilon_N^* & \Lambda_N^* \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\Lambda_N = [\Lambda \exp(-jkd) U_{N-1}(\zeta) - U_{N-2}(\zeta)] \exp(jkNd),$$

$$\Upsilon_N = \Upsilon U_{N-1}(\zeta) \exp[-jk(N-1)d],$$

kde  $U_N(\zeta)$  představuje Chebychevův polynom řádu  $N$  ve tvaru

$$U_N(\zeta) = \frac{\sin[(N+1)\gamma]}{\sin(\gamma)}, \quad (2.47)$$

kde  $\gamma = \arccos(\zeta)$ , a pro  $\zeta$  platí

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2} \text{Tr}(P) \\ &= \frac{1}{2} [\Lambda \exp(-jkd) + \Lambda^* \exp(jkd)] \\ &= \text{Re}(\Lambda) \cos(kd) + \text{Im}(\Lambda) \sin(kd). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Pro kvadrát modulu koeficientu transmise skrze tuto periodickou strukturu ve směru zleva doprava můžeme s ohledem na vztah (2.35) psát

$$T_N = \frac{1}{1 + [|\Upsilon|U_{N-1}(\zeta)]^2}. \quad (2.49)$$

Zmiňme fakt, že k celkové přenosové matici pro periodickou strukturu se můžeme dobrat i pouhým násobením jednotlivých matic mezi sebou, avšak využití Cayley-Hamiltonovy věty nám poskytuje mnohem jednodušší a elegantnější nástroj, zejména pak při výpočtu koeficientu transmise oné struktury.

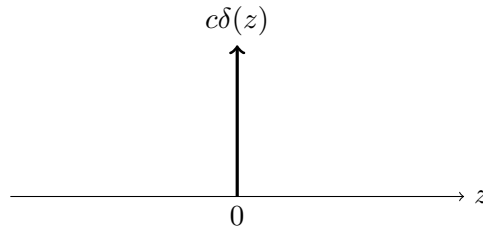
## 2.3 Konkrétní příklady přenosové matice

V této části práce se budeme věnovat odvození konkrétního tvaru přenosové matice pro různé typy fyzikálních vln v lokálně periodických strukturách typu  $\delta(z)$ , a dále ve strukturách, které nabývají po částech spojitého charakteru. Jak již bylo ukázáno v předchozí části, stanovení přenosové matice celé struktury pouze znamená nalezení  $N$ -té mocniny přenosové matice pro jednu základní buňku, takže kupříkladu využití vztahu (2.46). Rovněž je účelem demonstrovat izomorfismus modelových rovnic pro rozdílné typy fyzikálních vln.

### 2.3.1 Pravděpodobnostní vlny - delta potenciál

V tomto případě bude periodickou strukturu představovat  $N$  za sebou jdoucích Diracových funkcí. Zapišme tedy základní potenciálovou buňku jako

$$U_b(z) = c\delta(z), \quad (2.50)$$



Obrázek 2.4: Základní buňka delta potenciálu

kde  $c$  je konstanta, viz obrázek 2.4. Tomuto potenciálu odpovídá příslušná rovnice (2.3) ve tvaru

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dz^2} \psi(z) + c\delta(z)\psi(z) = E\psi(z). \quad (2.51)$$

Požadované řešení bude nabývat tvaru

$$\psi(z) = \begin{cases} A \exp(jkz) + B \exp(-jkz), & z < 0 \\ C \exp(jkz) + D \exp(-jkz), & z > 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Abychom mohli zkonstruovat přenosovou matici pro tento případ, budeme potřebovat dvě podmínky. První z nich bude podmínka spojitosti funkce  $\psi(z)$  v bodě  $z = 0$ . Vzhledem k charakteru potenciálu bude nespojitá první derivace funkce  $\psi(z)$ . Tuto nespojitost můžeme analyzovat integrací rovnice (2.51) přes nekonečně malý interval v okolí bodu 0. Dostaneme následující rovnici

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi''(z) dz + c \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(z)\psi(z) dz = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(z) dz, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.53)$$

Člen na pravé straně bude díky spojitosti funkce  $\psi(z)$  nabývat nulové hodnoty. Využijeme-li vzorkovací vlastnosti funkce  $\delta(z)$ , zjednoduší se vztah (2.53) na tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\psi'(0^+) - \psi'(0^-)] + c\psi(0) = 0, \quad (2.54)$$

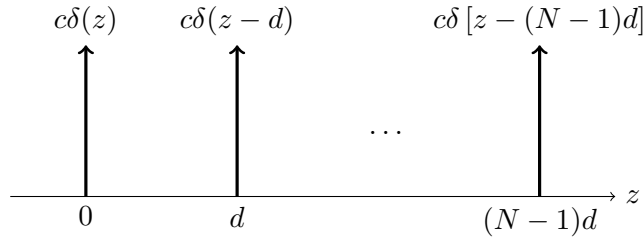
z čehož obdržíme druhou podmínku. Z obou podmínek sestavíme soustavu rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} A + B &= C + D \\ -jk \frac{\hbar^2}{2m} (C - D - A + B) + c(A + B) &= 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Po vyřešení této soustavy získáme přenosovou matici ve tvaru

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 + j \frac{cm}{k\hbar^2} & j \frac{cm}{k\hbar^2} \\ -j \frac{cm}{k\hbar^2} & 1 - j \frac{cm}{k\hbar^2} \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

což je přesně tvar přenosové matice (2.23), který jsme odvodili dříve pro obecný potenciálu typu (2.36). Nyní můžeme definovat lokálně periodickou



**Obrázek 2.5:** Periodická struktura delta potenciálu

strukturu potenciálu jako  $N$  za sebou jdoucích základních buněk  $U_b(z)$ , viz obrázek 2.5. Pak dle rovnosti (2.49) můžeme určit kvadrát modulu koeficientu transmise této struktury jako

$$T_N = \frac{1}{1 + \left[ \frac{cm}{k\hbar^2} U_{N-1}(\zeta) \right]^2}, \quad (2.57)$$

kde pro proměnnou  $\zeta$  bude platit

$$\zeta = \cos(kd) + \frac{cm}{k\hbar^2} \sin(kd). \quad (2.58)$$

### 2.3.2 Pravděpodobnostní vlny - skoková funkce

Tato situace zahrnuje potenciál, jehož základní buňku tvoří konstanta  $U_0$  na intervalu  $(-a, a)$ , viz obrázek 2.6. Můžeme tedy psát

$$U_b(z) = \begin{cases} U_0, & -a < z < a \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}, \quad (2.59)$$

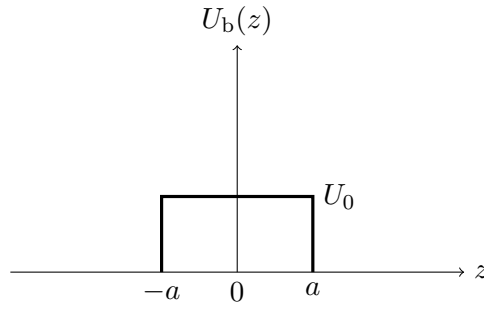
přičemž tomuto potenciálu odpovídá tvar rovnice (2.3)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dz^2} \psi(z) + U_b(z) \psi(z) = E \psi(z). \quad (2.60)$$

Řešení rovnice (2.60) pro takový typ potenciálu poté nabývá tvaru

$$\psi(z) = \begin{cases} A \exp(jkz) + B \exp(-jkz), & z < -a \\ E \exp(jk'z) + F \exp(-jk'z), & -a < z < a \\ C \exp(jkz) + D \exp(-jkz), & z > a \end{cases}, \quad (2.61)$$

kde  $k' = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$ . Přenosovou matici určíme z podmínek spojitosti funkce  $\psi(z)$  a její derivace  $\psi'(z)$  v bodech  $z_1 = -a$  a  $z_2 = a$ . Dostaneme následující



Obrázek 2.6: Základní buňka skokového potenciálu

soustavu rovnic

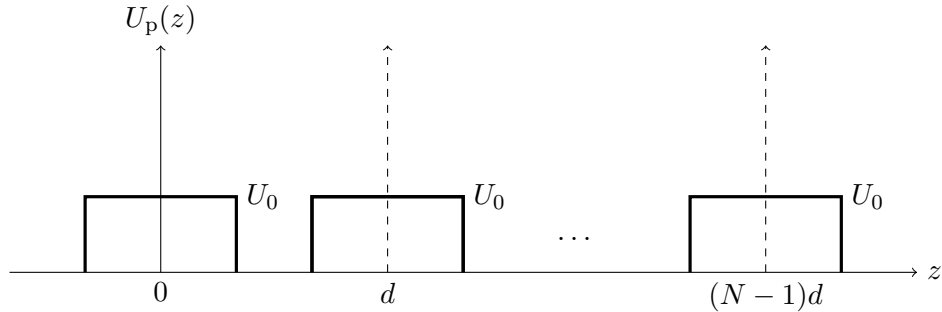
$$\begin{aligned}
 A \exp(-jka) + B \exp(jka) &= E \exp(-jk'a) + F \exp(jk'a) , \\
 E \exp(jk'a) + F \exp(-jk'a) &= C \exp(jka) + D \exp(-jka) , \\
 A \exp(-jka) - B \exp(jka) &= E \exp(-jk'a) - F \exp(jk'a) , \\
 E \exp(jk'a) - F \exp(-jk'a) &= C \exp(jka) - D \exp(-jka) .
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Po eliminaci koeficientů  $E$  a  $F$  dojdeme k výsledné přenosové matici tvaru (2.23), přičemž platí

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \frac{(k + k')^2 \exp[j2a(k - k')] - (k - k')^2 \exp[j2a(k + k')]}{4kk'} , \\
 \Upsilon &= j \frac{(k^2 - k'^2) \sin(2k'a)}{2kk'} .
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

V periodické struktuře, kterou tvoří  $N$  za sebou jdoucích potenciálových buněk  $U_b(z)$  (viz obrázek 2.7), vypočteme kvadrát modulu koeficientu transmise dle vztahu (2.49), kde pro  $\zeta$  v tomto případě platí

$$\zeta = \frac{(k + k')^2 \cos[kd - 2a(k - k')] - (k - k')^2 \sin[kd - 2a(k + k')]}{4kk'} . \tag{2.64}$$



Obrázek 2.7: Periodický skokový potenciál



### 2.3.3 Mechanické vlny na zatížené struně

Přesuňme se nyní od vln pravděpodobnostních k vlnám mechanickým. Konkrétně se budeme zabývat případem nekonečně dlouhé struny natažené ve směru osy  $z$ , na kterou v místě  $z = 0$  umístíme závaží o hmotnosti  $m$  se zanedbatelnými rozměry, viz obrázek 2.8. Zapišme nyní jednorozměrnou vlnovou rovnici pro tuto situaci

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(z, t), \quad (2.65)$$

viz například [2], kde  $\Psi(z, t)$  představuje okamžitou výchylku a  $v$  značí rychlost mechanické vlny. Postupujme v tuto chvíli obdobně jako u pravděpodobnostních vln. Nejprve separujme řešení na tvar

$$\Psi(z, t) = \psi(z) \exp(-j\omega t). \quad (2.66)$$

Dosazením vztahu (2.66) do rovnice (2.65) obdržíme diferenciální Hillovu rovnici

$$\frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + k^2 \psi(z) = 0, \quad (2.67)$$

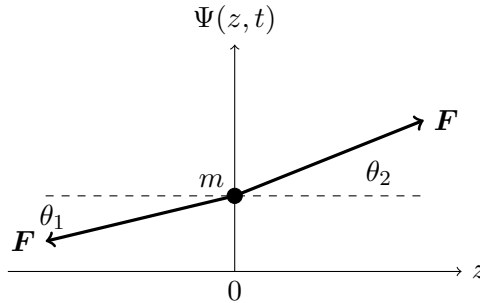
která má formálně stejný tvar jako rovnice (2.3), a kde  $k = \frac{\omega}{v}$  je vlnové číslo. Řešení rovnice (2.67) pak nabývá tvaru

$$\psi(z) = A \exp(jkz) + B \exp(-jkz). \quad (2.68)$$

Toto řešení nyní opět zkombinujeme i s jeho časovou složkou a rozdělíme na dva případy, kdy  $z < 0$  a  $z > 0$

$$\Psi(z, t) = \begin{cases} [A \exp(jkz) + B \exp(-jkz)] \exp(-j\omega t), & z < 0 \\ [C \exp(jkz) + D \exp(-jkz)] \exp(-j\omega t), & z > 0 \end{cases}. \quad (2.69)$$

Abychom mohli získat přenosovou matici, budeme potřebovat dvě podmínky. Nejprve požadujeme spojitost funkce  $\Psi(z, t)$  v bodě  $z = 0$ . Druhou podmínku



Obrázek 2.8: Struna se závažím v počátku

získáme z následující úvahy. Na závaží v kolmém směru na osu  $z$  působí síla o

velikosti  $F_{\perp} = T[\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)]$ . Pokud budeme uvažovat pouze malé úhly, pak můžeme psát

$$F_{\perp} = F[\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)] \approx F \left[ \frac{\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} - \frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} \right] = F [\Psi'(0^+, t) - \Psi'(0^-, t)]. \quad (2.70)$$

Zapišme nyní pohybovou rovnici pro závaží

$$F [\Psi'(0^+, t) - \Psi'(0^-, t)] = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(z, t). \quad (2.71)$$

Zkombinujeme-li vztah (2.71) s podmínkou spojitosti funkce  $\Psi(z, t)$ , dostaneme následující soustavu rovnic

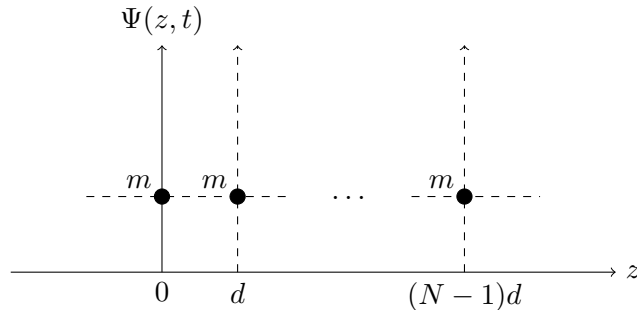
$$\begin{aligned} A + B &= C + D, \\ jkF(C - D - A + B) &= -m\omega^2(A + B), \end{aligned} \quad (2.72)$$

po jejímž vyřešení dospějeme k výsledné matici přenosu  $\mathbf{M}$  pro tento případ

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - j\frac{m\omega^2}{2kF} & -j\frac{m\omega^2}{2kF} \\ j\frac{m\omega^2}{2kF} & 1 + j\frac{m\omega^2}{2kF} \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Povšimněme si, že matice  $\mathbf{M}$  nabývá úplně stejného tvaru, jako přenosová matice pravděpodobnostních vln, pohybujících se skrze potenciál typu  $\delta(z)$ . Uvažujme nyní  $N$  těchto závaží naskládaných rovnoměrně za sebou na struně, viz obrázek 2.9. Pak s ohledem na vztah (2.49) můžeme pro kvadrát modulu koeficientu transmise této struktury psát

$$\begin{aligned} T_N &= \frac{1}{1 + \left[ \frac{m\omega^2}{2kF} U_{N-1}(\zeta) \right]^2}, \\ \zeta &= \cos(kd) - \frac{m\omega^2}{2kF} \sin(kd). \end{aligned} \quad (2.74)$$



**Obrázek 2.9:** Struna s  $N$  závažími

### 2.3.4 Akustické vlny ve vlnovodu vyplněném tekutinou

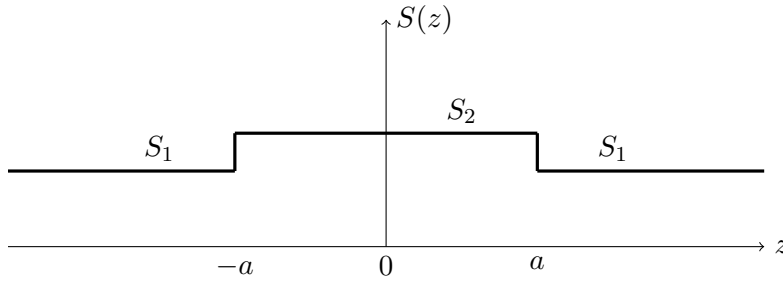
V této části textu se zaměříme na akustické vlny šířící se ve vlnovodu vyplněném tekutinou, který má po částech konstantní průřez. Začneme situací, kdy máme vlnovod s konstantním průřezem  $S_2$ , pouze na intervalu  $(-a, a)$  nabývá průřezu  $S_1$ . Tak definujeme základní buňku (viz obrázek 2.10) pro periodické potrubí o  $N$  těchto skokových změnách rovnoměrně rozmístěných za sebou. Zapišme nyní obecnou rovnici pro šíření rovinných akustických vln ve vlnovodu o průřezu  $S(z)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = v^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dz} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right), \quad (2.75)$$

viz například [2], kde  $\Psi(z, t)$  je akustický tlak a  $v$  je rychlost zvuku. Povšimněme si, že při konstantním průřezu nám z rovnice (2.75) vypadne poslední člen a my tak obdržíme standardní tvar vlnové rovnice. Uvážíme-li navíc pouze monochromatické vlny ve tvaru  $\Psi(z, t) = \psi(z) \exp(-j\omega t)$ , dospějeme pak opět ke standardní podobě diferenciální Hillové rovnice ve tvaru

$$\frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + k^2 \psi(z) = 0, \quad (2.76)$$

kde  $k = \frac{\omega}{v}$  je vlnové číslo. Zapišme nyní řešení pro všechny tři oblasti jako



Obrázek 2.10: Základní buňka periodického vlnovodu

$$\psi(z) = \begin{cases} A \exp(jkz) + B \exp(-jkz), & \text{pro } z < -a, \\ E \exp(jkz) + F \exp(-jkz), & \text{pro } z \in (-a; a), \\ C \exp(jkz) + D \exp(-jkz), & \text{pro } z > a. \end{cases} \quad (2.77)$$

Pro nalezení přenosové matice budeme opět potřebovat stanovit okrajové podmínky pro tento systém. První podmínku obdržíme požadováním spojitosti funkce  $\psi(z)$ . Dále z rovnice kontinuity dostaneme požadavek spojitosti objemové rychlosti, v našem případě  $Sv_A$ , kde  $v_A$  je akustická rychlost. Využijeme-li jednorozměrnou linearizovanou Eulerovu rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\rho_0 \frac{\partial v_A}{\partial t}, \quad (2.78)$$

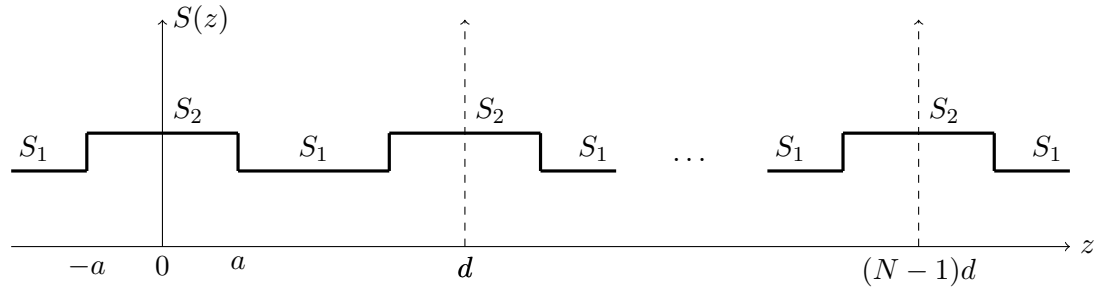
viz například [2], přejde podmínka spojitosti  $Sv_A$  na podmínku spojitosti  $S \frac{d\psi}{dz}$ . Požadovaná soustava rovnic pak bude

$$\begin{aligned} \psi(-a^-) &= \psi(-a^+), \\ \psi(a^-) &= \psi(a^+), \\ S_1 \frac{d\psi}{dz}(-a^-) &= S_2 \frac{d\psi}{dz}(-a^+), \\ S_2 \frac{d\psi}{dz}(a^-) &= S_1 \frac{d\psi}{dz}(a^+). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Po jejím vyřešení dospějeme k přenosové matici tvaru (2.23), kde

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{(S_1 + S_2)^2 - (S_1 - S_2)^2 \exp(4jka)}{4S_1S_2}, \\ \Upsilon &= j \frac{\sin[2ka](S_1^2 - S_2^2)}{2S_1S_2}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Nyní si představme, jak již bylo dříve zmíněno,  $N$  takovýchto nehomogenit ve vlnovodu rozmístěných rovnoměrně za sebou, viz obrázek 2.11. Kvadrát



Obrázek 2.11: Periodický vlnovod

modulu koeficientu transmise pro tuto strukturu pak můžeme dle vztahu (2.49) vyjádřit jako

$$T_N = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\sin(2ka)(S_1^2 - S_2^2)}{2S_1S_2} U_{N-1}(\xi) \right]^2}, \quad (2.81)$$

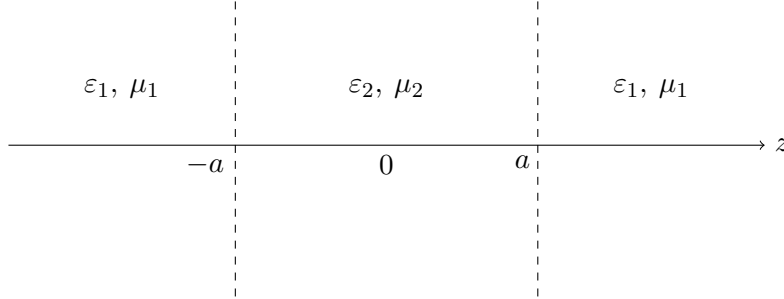
přičemž bude v tomto případě platit

$$\xi = \frac{(S_1 + S_2)^2 - (S_1 - S_2)^2 \cos(4ka)}{4S_1S_2} \cos(kd) - \frac{(S_1 - S_2)^2 \sin(4ka)}{4S_1S_2} \sin(kd). \quad (2.82)$$

### 2.3.5 Elektromagnetické vlny - vrstvené dielektrikum

Poslední příklad, který v tomto textu uvedeme, se bude týkat šíření elektromagnetických vln skrze lokálně periodické prostředí. Budeme uvažovat monochromatickou elektromagnetickou vlnu, šířící se ve směru osy  $z$  v prostředí s

hodnotami permitivity a permeability  $\varepsilon_1$  a  $\mu_1$  na intervalu  $(-\infty; -a) \cup (a; \infty)$ . Interval  $(-a; a)$  bude představovat skokovou nehomogenitu s parametry  $\varepsilon_2$  a  $\mu_2$ , viz obrázek 2.12. Uvažujme vektor intenzity elektrického pole polarizovaný



**Obrázek 2.12:** Skoková nehomogenita v optickém médiu

ve směru  $\hat{\mathbf{x}}$  v prvním intervalu  $(-\infty; -a)$ . Můžeme pro něj psát

$$\mathbf{E} = [A \exp(jkz) + B \exp(-jkz)] \exp(-j\omega t) \hat{\mathbf{x}} . \quad (2.83)$$

Vztah (2.83) můžeme dále přepsat jako

$$\mathbf{E} = \psi(z) \exp(-j\omega t) \hat{\mathbf{x}} , \quad (2.84)$$

přičemž v jednotlivých intervalech bude  $\psi(z)$  nabývat úplně stejného tvaru jako v případě skokového potenciálu u pravděpodobnostních vln (2.61). Pro určení vektoru magnetické indukce využijeme Faradayův zákon v diferenciálním tvaru

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (2.85)$$

Dosadíme-li nyní do rovnosti (2.85) vztah (2.83), můžeme za pomoci jednoduchých operací vyjádřit vektor magnetické indukce na intervalu  $(-\infty, -a)$  jako

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v} [A \exp(jkz) - B \exp(-jkz)] \exp(-j\omega t) \hat{\mathbf{y}} , \quad (2.86)$$

kde  $v = \frac{\omega}{k}$  (a stejně tak i v ostatních intervalech, pouze s konstantami  $C$ ,  $D$ , respektive  $E$ ,  $F$ ). Povšimněme si, že vztah (2.86) lze s ohledem na rovnost (2.84) vyjádřit i ve tvaru

$$\mathbf{B} = -\frac{j}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial z} \exp(-j\omega t) \hat{\mathbf{y}} . \quad (2.87)$$

Pro nalezení přenosové matice musíme najít okrajové podmínky tohoto systému. Uvědomme si, že v našem případě oba vektory (jak elektrické intenzity, tak magnetické indukce) tvoří pouze tečné složky vzhledem k rozhraní. Dále využijeme faktu, že tečné složky vektoru elektrické intenzity se zachovávají, a totéž platí i pro vektor magnetické intenzity za předpokladu nulového plošného proudu na rozhraní. Využijeme-li rovnosti

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} , \quad (2.88)$$

získáme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \psi(-a^-) &= \psi(-a^+), \\ \psi(a^-) &= \psi(a^+), \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \psi}{\partial z}(-a^-) &= \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \psi}{\partial z}(-a^+), \\ \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \psi}{\partial z}(a^-) &= \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \psi}{\partial z}(a^+). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Po jejím vyřešení dojdeme k přenosové matici ve tvaru (2.23) s prvky

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{(k\mu_2 + k'\mu_1)^2 \exp[2ja(k - k')] - (k\mu_2 - k'\mu_1)^2 \exp[2ja(k + k')]}{4kk'\mu_1\mu_2}, \\ \Upsilon &= j \frac{\sin(2k'a)(k\mu_2 + k'\mu_1)(k\mu_2 - k'\mu_1)}{2kk'\mu_1\mu_2}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

přičemž platí disperzní relace  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ . Kvadrát modulu koeficientu transmise pro  $N$  takovýchto dielektrických vrstev za sebou pak nabude tvaru

$$T_N = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\sin(2k'a)(k\mu_2 + k'\mu_1)(k\mu_2 - k'\mu_1)}{2kk'\mu_1\mu_2} U_{N-1}(\zeta) \right]^2}, \quad (2.91)$$

kde

$$\zeta = \frac{(k\mu_2 + k'\mu_1)^2 \cos[k(d - 2a) + 2ak'] - (k\mu_2 - k'\mu_1)^2 \cos[k(d - 2a) - 2ak']}{4kk'\mu_1\mu_2}. \quad (2.92)$$

## 2.4 Shrnutí

Dospěli jsme k závěru, že při šíření vln v lokálně periodických strukturách nezáleží na fyzikálním typu vln. K podobným výsledkům bychom dospěli i pro případ popisu šíření elastických vln izotropními tyčemi proměnného průřezu, či akustických vln šířících se teplotně nehomogenními strukturami. Všechny tyto typy lze totiž popsat stejným způsobem, a to sice pomocí přenosové matice tvaru (2.23), která má v našem případě komplexně sdružená čísla na obou diagonálách (2.22) a jednotkový determinant, viz vztah (2.30). Pokud vyjádříme tuto matici pro jednu nehomogenitu, pak pro  $N$  takovýchto nehomogenit rozmístěných rovnoměrně za sebou se celkový problém zredukuje na nalezení  $N$ -té mocniny matice  $\mathbf{M}$ , k čemuž můžeme využít například metodu využívající Cayley-Hamiltonovy věty. Kvadrát modulu koeficientu transmise pro celou strukturu pak můžeme určit dle vztahu (2.49).

## Kapitola 3

### Floquetova teorie

V předchozí kapitole jsme se zabývali metodou přenosové matice při studiu šíření vln v lokálně periodických strukturách. Tato metoda nám přináší velmi silný nástroj pro výpočet koeficientů transmise, respektive reflexe. Avšak pokud bychom chtěli sledovat přímo průběhy vln v těchto strukturách, ke kterým bychom se s využitím maticové metody dobrali pouze relativně komplikovaným způsobem, pak se jeví jako velmi výhodné použít právě Floquetovu teorii, kterou se budeme v následující kapitole zabývat.

#### 3.1 Normalizované řešení

Na začátku odvodíme takzvané normalizované řešení diferenciální rovnice, které budeme v této kapitole hojně využívat. Mějme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$f''(z) + g(z)f'(z) + q(z)f(z) = 0. \quad (3.1)$$

Obecné řešení takovéto rovnice nabývá tvaru

$$f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z), \quad (3.2)$$

kde  $f_1(z)$  a  $f_2(z)$  jsou lineárně nezávislé funkce. Zabývejme se nyní nalezením normalizovaného řešení rovnice (3.1) v bodě  $z_0$ , což je dvojice lineárně nezávislých funkcí  $u(z)$ ,  $v(z)$ , splňující podmínky

$$\begin{aligned} u(z_0) &= 1, v(z_0) = 0, \\ u'(z_0) &= 0, v'(z_0) = 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$





Vzhledem k tomu, že  $f_1(z)$  i  $f_2(z)$  řeší rovnici (3.1), pak platí

$$\begin{aligned} f_1''(z) + p(z)f_1'(z) + q(z)f_1(z) &= 0, \\ f_2''(z) + p(z)f_2'(z) + q(z)f_2(z) &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pokud nyní vynásobíme první rovnici  $-f_2(z)$ , druhou rovnici  $f_1(z)$  a následně obě rovnice sečteme, dostaneme rovnost

$$f_1(z)f_2''(z) - f_1''(z)f_2(z) + p(z)[f_1(z)f_2'(z) - f_1'(z)f_2(z)] = 0, \quad (3.14)$$

kterou lze přepsat do tvaru

$$W'(z) + p(z)W(z) = 0. \quad (3.15)$$

Dostali jsme tak diferenciální rovnici prvního řádu, kterou nejprve převedeme do tvaru

$$\frac{W'(z)}{W(z)} = -p(z), \quad (3.16)$$

a následně na obě dvě strany aplikujeme operaci integrace podle  $z$ , tj.  $\int_{z_0}^z \bullet dz$ .

Dostaneme tak

$$\ln \left( \frac{W(z)}{W(z_0)} \right) = - \int_{z_0}^z p(z) dz. \quad (3.17)$$

Po úpravě dospějeme k Liouvillovu vztahu pro Wronskián

$$W(z) = W(z_0) \exp \left( - \int_{z_0}^z p(z) dz \right), \quad (3.18)$$

viz například [3].

### 3.3 Floquetova teorie

Nyní se budeme zabývat diferenciální rovnicí typu

$$f''(z) + p(z)f'(z) + q(z)f(z) = 0, \quad (3.19)$$

přičemž koeficienty  $p(z)$ ,  $q(z)$  budou periodické s periodou  $d$ . Bude pro ně tedy platit

$$\begin{aligned} p(z+d) &= p(z), \\ q(z+d) &= q(z). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dále uvažujme dvojici funkcí  $u(z)$ ,  $v(z)$ , která představuje normalizované řešení rovnice (3.19) v bodě  $z_0 = 0$ , tudíž jsou splněny podmínky

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, v(0) = 0, \\ u'(0) &= 0, v'(0) = 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$



Poukažme na fakt, že

$$\det(\mathbf{A}) = W(u, v)(d), \quad (3.33)$$

tudíž můžeme rovnici (3.32) přepsat do tvaru

$$\rho^2 - [u(d) + v'(d)]\rho + W(u, v)(d) = 0, \quad (3.34)$$

který později využijeme. Rovnice (3.34) je rovnicí kvadratickou, která má dva obecně komplexní kořeny  $\rho_1, \rho_2$ , pro které musí platit

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= u(d) + v'(d), \\ \rho_1 \rho_2 &= W(u, v)(d). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Vzhledem k tomu, že pro normalizované řešení platí  $W(u, v)(0) = 1$ , můžeme druhou z vlastností (3.35) zapsat ve tvaru

$$\rho_1 \rho_2 = \exp\left(-\int_0^d p(z) dz\right). \quad (3.36)$$

Nyní rozdělme další postup na dvě části podle povahy kořenů charakteristické rovnice.

### 3.3.1 Dva různé kořeny charakteristického polynomu

Nechť rovnice (3.32) má dva různé kořeny  $\rho_1, \rho_2$ . Pak k těmto kořenům (vlastním číslům matice  $\mathbf{A}$ ) můžeme najít dva vlastní vektory  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ , přičemž existují dvě lineárně nezávislé funkce  $F_1(z), F_2(z)$  splňující vlastnost (3.23) a nabývající tvaru

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \mathbf{c}_1^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix}, \\ F_2(z) &= \mathbf{c}_2^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Zabývejme se nyní obecným tvarem funkce  $F_i(z)$ . Vzhledem k tomu, že  $\rho_i$  představuje obecně komplexní číslo, můžeme ho vždy zapsat ve tvaru

$$\rho_i = \exp(j\mu_i d). \quad (3.38)$$

Dále definujme funkci

$$P_i(z) = \exp(-j\mu_i z) F_i(z). \quad (3.39)$$

Tato funkce je zřejmě periodická s periodou  $d$ , neb po dosazení  $z+d$  dostaneme

$$P_i(z+d) = \exp[-j\mu_i(z+d)] \exp(j\mu_i d) F_i(z) = \exp(-j\mu_i z) F_i(z) = P_i(z). \quad (3.40)$$

Z tohoto faktu můžeme usoudit, že funkci  $F_i(z)$  lze vždy zapsat jako

$$F_i(z) = \Phi_i(z)P_i(z) = \exp(j\mu_i z)P_i(z), \quad (3.41)$$

kde  $P_i(z)$  je funkce periodická s periodou  $d$ . Tento zápis lze chápat tak, že funkce  $F_i(z)$  je jednodimenzionální postupná vlna  $\Phi_i(z) = \exp(j\mu_i z)$  o kmitočtu  $\mu_i$ , modulovaná v amplitudě a fázi pomocí periodické modulační funkce  $P_i(z)$ , viz například [4].

### 3.3.2 Jeden dvojnásobný kořen charakteristického polynomu

Uvažujme nyní případ, kdy rovnice (3.32) má pouze jeden dvojnásobný kořen (jedno dvojnásobné vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$ )

$$\rho = \exp(j\mu d) \in \mathbb{R}. \quad (3.42)$$

Tomu přísluší jeden vlastní vektor  $\mathbf{c}$ . Díky tomuto tvrzení pak existuje pouze jedna funkce

$$\Psi_1(z) = \mathbf{c}^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

splňující podmínku

$$\Psi_1(z+d) = \rho\Psi_1(z). \quad (3.44)$$

Zabývejme se nyní nalezením obecného tvaru druhého lineárně nezávislého řešení  $\Psi_2(z)$ . Vzhledem k tomu, že  $\Psi_1(z)$ ,  $\Psi_2(z)$  jsou lineárně nezávislé, pak pro  $\Psi_2(z+d)$ , které (jak již bylo ukázáno dříve) je také řešením, musí platit

$$\Psi_2(z+d) = d_1\Psi_1(z) + d_2\Psi_2(z). \quad (3.45)$$

Vyjádříme-li nyní za pomoci vztahů (3.44) a (3.45)  $W(\Psi_1, \Psi_2)(z+d)$ , dojdeme k rovnosti

$$W(\Psi_1, \Psi_2)(z+d) = \rho d_2 W(\Psi_1, \Psi_2). \quad (3.46)$$

Za použití Liouvillova vztahu můžeme nyní psát

$$W(\Psi_1, \Psi_2)(z_0) \exp\left(-\int_{z_0}^{z+d} p(z) dz\right) = \rho d_2 W(\Psi_1, \Psi_2)(z_0) \exp\left(-\int_{z_0}^z p(z) dz\right). \quad (3.47)$$

Po úpravách dojdeme ke vztahu

$$\rho d_2 = \exp\left(-\int_z^{z+d} p(z) dz\right) = \exp\left(-\int_0^d p(z) dz\right), \quad (3.48)$$

kde v posledním kroku jsme využili periodičnosti funkce  $p(z)$ . Za pravou stranu v rovnosti (3.48) můžeme nyní dosadit (3.36), čímž dojdeme k výsledku

$$\rho d_2 = \rho^2 \rightarrow d_2 = \rho. \quad (3.49)$$

Za použití vztahu (3.45) můžeme tedy funkci  $\Psi_2(z)$  vyjádřit ve tvaru

$$\Psi_2(z + d) = d_1 \Psi_1(z) + \rho \Psi_2(z). \quad (3.50)$$

Definujme nyní dvě funkce

$$\begin{aligned} p_1(z) &= \exp(-j\mu z) \Psi_1(z), \\ p_2(z) &= \exp(-j\mu z) \Psi_2(z) - \frac{d_1}{d\rho} z P_1(z). \end{aligned} \quad (3.51)$$

O periodičnosti funkce typu  $p_1(z)$  jsme se již přesvědčili dříve. Zabývejme se nyní proto funkcí  $p_2(z)$  v bodě  $z + d$

$$\begin{aligned} p_2(z + d) &= \exp[-j\mu(z + d)](d_1 \Psi_1(z) + \rho \Psi_2(z)) - \frac{d_1}{d\rho} (z + d) p_1(z), \\ &= \frac{d_1}{\rho} p_1(z) + \exp(-j\mu z) \Psi_2(z) - \frac{d_1}{d\rho} (z + d) p_1(z), \\ &= \exp(-j\mu z) \Psi_2(z) - \frac{d_1}{d\rho} z p_1(z), \\ &= p_2(z), \end{aligned} \quad (3.52)$$

funkce  $p_2(z)$  je tudíž také periodickou funkcí s periodou  $d$ . Za použití substitucí  $F(z) = \Psi_1(z)$  a  $G(z) = \frac{d\rho}{d_1} \Psi_2(z)$  dojdeme k výslednému tvaru obou funkcí, a to sice

$$\begin{aligned} F(z) &= \Phi(z) P_1(z) = \exp(j\mu z) P_1(z), \\ G(z) &= \Phi(z) [z P_1(z) + P_2(z)] = \exp(j\mu z) [z P_1(z) + P_2(z)], \end{aligned} \quad (3.53)$$

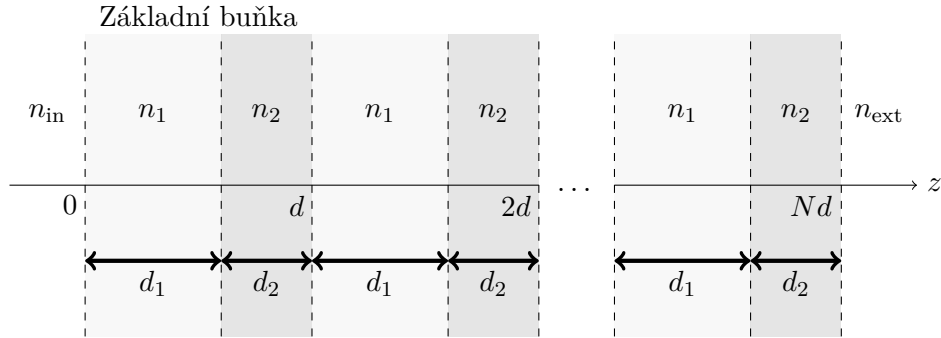
kde  $P_1(z) = p_1(z)$  a  $P_2(z) = \frac{d\rho}{d_1} p_2(z)$  jsou periodické funkce s periodou  $d$ . Obdobně jako v předchozí situaci máme funkce  $F(z)$ ,  $G(z)$  vyjádřeny jakožto jednodimenzionální postupné vlny  $\Phi(z) = \exp(j\mu z)$  o kmitočtu  $\mu$ , přičemž modulačními funkcemi jsou nyní funkce  $P_1(z)$  pro  $F(z)$  a  $z P_1(z) + P_2(z)$  pro  $G(z)$ .

## 3.4 Blochovy funkce pro elektromagnetické pole

### 3.4.1 Binární fotonický krystal

V této části se budeme zabývat aplikací Floquetovy teorie na elektromagnetické vlny šířící se skrze binární fotonické krystaly (BPC), což jsou struktury tvořené střídáním dvou tenkých vrstev materiálů s různými hodnotami indexů lomu  $n_1$  a  $n_2$  ve směru osy  $z$ , viz například [5]. Těchto jednotlivých

vrstev bude za sebou  $2N$ , přičemž tloušťka každé vrstvy s indexem lomu  $n_1$  bude  $d_1$  a tloušťka každé vrstvy s indexem lomu  $n_2$  bude  $d_2$ . Označme dále tloušťku jedné základní buňky krystalu (kterou představují dvě vrstvy za sebou)  $d = d_1 + d_2$ . Celkový krystal má tedy délku  $Nd$ . Z levé strany krystalu budeme uvažovat materiál s indexem lomu  $n_{\text{in}}$  a z pravé strany materiál s indexem lomu  $n_{\text{ext}}$ . Celková struktura je zobrazena na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Binární fotonický krystal

### 3.4.2 Modelové rovnice

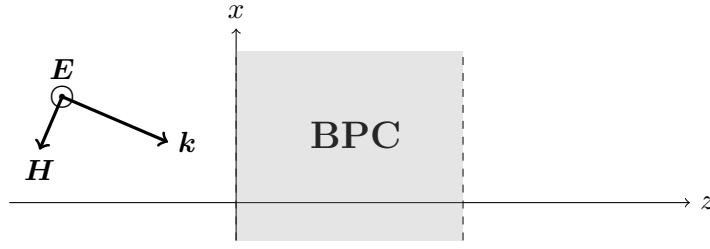
Nyní provedeme odvození modelových rovnic pro šíření elektromagnetických vln při TE a TM polarizaci a ukážeme, že jsou obě tyto rovnice vzájemně izomorfní. Budeme dále předpokládat, že BPC je tvořen z nemagnetických materiálů ( $\mu_r = 0$ ) a permitivita je periodickou funkcí  $\varepsilon = \varepsilon(z) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(z)$  s periodou  $d$ , neboli bude platit

$$\varepsilon(z + d) = \varepsilon(z) . \quad (3.54)$$

#### TE polarizace

TE, neboli transverzální elektrická polarizace je případ, při kterém je vektor elektrické intenzity  $\mathbf{E}$  kolmý na rovinu dopadu. V našem případě budeme za rovinu dopadu uvažovat rovinu  $xz$ , tudíž vektor  $\mathbf{E}$  bude mít složky pouze do  $\hat{\mathbf{y}}$ . Situace je zobrazena na obrázku 3.2. Vektor elektrické intenzity v tomto případě můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e(z) \exp[j(k_x x - \omega t)] \hat{\mathbf{y}} , \quad (3.55)$$



Obrázek 3.2: TE polarizace

kde  $k_x$  je  $x$ -ová složka vlnového vektoru  $\mathbf{k}$ . Maxwellovy rovnice budou pro nemagnetické dielektrikum nabývat tvaru

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon(z) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot [\varepsilon(z) \mathbf{E}] &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0.\end{aligned}\tag{3.56}$$

S využitím vztahu (3.55) a identity  $\nabla \cdot (\mathbf{F}f) = \mathbf{F} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$  se třetí rovnice zjednoduší na tvar  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Nyní na druhou rovnici aplikujeme operaci rotace, tj.  $\nabla \times$ . S využitím identity  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$  tak dostaneme

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t},\tag{3.57}$$

kterou za pomoci ostatních rovnic upravíme do podoby

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(z) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.\tag{3.58}$$

Dosadíme-li do rovnice (3.58) vztah (3.55), dostaneme Hillovu rovnici

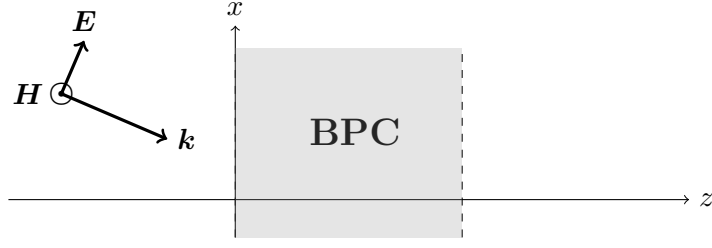
$$\frac{d^2 e(z)}{dz^2} + a^2(z) e(z) = 0,\tag{3.59}$$

kde  $a^2(z) = k^2 n^2(z) - k_x^2$  a  $k = \frac{\omega}{c_0}$  je vlnové číslo ve vakuu. V naší práci se budeme zabývat pouze jednorozměrnými vlnami, tudíž položíme  $k_x = 0$  a rovnice (3.59) nabude finálního tvaru

$$\frac{d^2 e(z)}{dz^2} + k^2 n^2(z) e(z) = 0.\tag{3.60}$$

### ■ TM polarizace

TM, neboli transverzální magnetická polarizace je případ, při kterém je naopak vektor magnetické intenzity  $\mathbf{H}$  kolmý na rovinu dopadu. Situace je zobrazena na obrázku 3.3. Pro vektor magnetické intenzity můžeme tedy psát



Obrázek 3.3: TE polarizace

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = h(z) \exp[j(k_x x - \omega t)] \mathbf{y}_0. \quad (3.61)$$

Nyní budeme postupovat velmi podobně jako v odvození rovnice pro TE vlny. Budeme při tom opět vycházet z Maxwellových rovnic ve tvaru (3.56). Nejprve vezmeme první rovnici, vynásobíme ji  $\frac{1}{\varepsilon(z)}$  a následně provedeme operaci rotace ( $\nabla \times$ ). Za pomoci identity  $\nabla \times (\mathbf{F}f) = \nabla f \times \mathbf{F} + f \nabla \times \mathbf{F}$  dostaneme rovnici

$$\left( -\frac{1}{\varepsilon^2(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} z_0 \right) \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\varepsilon(z)} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}) = \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t}. \quad (3.62)$$

kterou následně upravíme do tvaru

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \left( \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} z_0 \right) \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(z) \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.63)$$

Po dosazení (3.61) obdržíme rovnici

$$\frac{d^2 h(z)}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \frac{d\tilde{h}(z)}{dz} + a(z) h(z) = 0, \quad (3.64)$$

kde opět platí  $a^2(z) = k^2 n^2(z) - k_x^2$ . Tuto rovnici můžeme dále přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\varepsilon_r(z)} \frac{dh(z)}{dz} \right) + \left( k^2 - \frac{k_x^2}{n^2(z)} \right) h(z) = 0. \quad (3.65)$$

Aplikujeme-li nyní na obě strany operaci derivace podle  $z$ , tj.  $\frac{d}{dz}$ , dostaneme

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_r(z)} \frac{dh(z)}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left[ \left( k^2 - \frac{k_x^2}{n^2(z)} \right) h(z) \right] = 0. \quad (3.66)$$

Stejně jako v předchozím případě položíme  $k_x = 0$  a navíc uvažujme substituci  $\tilde{h}(z) = \frac{1}{\varepsilon_r(z)} h(z)$ . Dostaneme tak výslednou podobu Hillový rovnice

$$\frac{d^2 \tilde{h}(z)}{dz^2} + k^2 n^2(z) \tilde{h}(z) = 0, \quad (3.67)$$

která má úplně stejný tvar jako rovnice (3.60). Uvážíme-li navíc některé příklady z předchozí kapitoly, zjistíme, že i všechny ostatní rovnice pro odlišné typy fyzikálních vln nabývají přesně tohoto tvaru, viz například vlnění



na struně (2.67), akustické vlny (2.76) nebo už jenom samotná bezčasová Schrödingerova rovnice (2.3). Všechny tyto rovnice jsou vzájemně izomorfní a celou Floquetovu-Blochovu teorii, kterou v našem případě aplikujeme na elektromagnetické vlny, bychom mohli úplně stejným způsobem aplikovat i na jiný typ fyzikálních vln. V další části práce se omezíme jen na případ elektromagnetické vlny s TE polarizací dopadající kolmo na uvažovaný BPC.

### 3.4.3 Floquetova teorie pro elektromagnetické pole

Zabývejme se nyní aplikací Floquetovy teorie na elektromagnetické vlny uvnitř BPC. Budeme tedy hledat řešení rovnice (3.60), nebo případně (3.67), která mají tzv. translační vlastnost

$$F(z + d) = \rho F(z) . \quad (3.68)$$

Tato řešení budeme dále nazývat Blochovy funkce, případně Blochovy vlny. Příslušným vlastním číslem  $\rho$  pak budeme říkat Floquetovy multiplikátory. Označme dvojici funkcí  $u(z)$ ,  $v(z)$  jako normalizované řešení rovnice (3.60) v bodě  $z_0 = 0$ , přičemž v důsledku reálných koeficientů v oné rovnici jsou i tato řešení ryze reálná. Je vhodné v tuto chvíli zdůraznit, že se bavíme pouze o intervalu  $z \in \langle 0; Nd \rangle$ , neboli nacházíme se uvnitř BPC. Z porovnání rovnice (3.60) s rovnicí (3.1) plyne  $g(z) = 0$ , a tudíž můžeme dle Liouvillova vztahu pro Wronskián psát

$$W(u, v)(z) = W(0) \exp \left( - \int_0^z 0 \, dz \right) = \exp(0) = 1 , \quad (3.69)$$

neboli Wronskián je konstantní funkce s hodnotou 1. Při hledání vlastních čísel matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u(d) & v(d) \\ u'(d) & v'(d) \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

se nám potom charakteristický polynom (3.32) zjednoduší na tvar

$$\rho^2 - [u(d) + v'(d)] + 1 = 0 . \quad (3.71)$$

Pro kořeny tohoto polynomu musí platit

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= u(d) + v'(d) , \\ \rho_1 \rho_2 &= 1 . \end{aligned} \quad (3.72)$$

S ohledem na tyto vlastnosti a vztah (3.38) můžeme oba kořeny zapsat ve tvaru

$$\rho_1 = \exp[j\mu(k)d], \quad \rho_2 = \exp[-j\mu(k)d] , \quad (3.73)$$

neboli

$$\mu_1 = -\mu_2 . \quad (3.74)$$

Přepíšme dále rovnici (3.71) do tvaru

$$\rho^2 - h(k)\rho + 1 = 0 , \quad (3.75)$$

kde

$$h(k) = u(d) + v'(d) = \rho_1 + \rho_2 = 2 \cos[\mu(k)d] , \quad (3.76)$$

přičemž výraz  $\mu(k)d$  nazýváme Blochova fáze. Pro kořeny polynomu (3.75) můžeme psát

$$\rho_{1,2} = \frac{h(k) \pm \sqrt{h^2(k) - 4}}{2} . \quad (3.77)$$

Podle Floquetovy teorie pak jednotlivé Blochovy funkce získáme jako

$$F_{1,2}(z) = \mathbf{c}_{1,2}^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} , \quad (3.78)$$

kde  $\mathbf{c}_{1,2}$  jsou vlastní vektory matice  $\mathbf{A}$  příslušící k vlastním číslům  $\rho_{1,2}$ . Zabývejme se nyní třemi možnými situacemi:

1.  $|h(k)| > 2$  (případ pásmové zadržky)

V tomto případě jsou obě vlastní čísla reálná, přičemž z vlastností (3.72) vyplývá

$$\begin{aligned} |\rho_1| &< 1 , \\ |\rho_2| &> 1 . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Hledání konkrétního tvaru Blochových funkcí rozdělíme na čtyři možné případy:

(a)  $u'(d), v(d) \neq 0$

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} &= \frac{u(d) + v'(d) \pm \sqrt{[u(d) + v'(d)]^2 - 4}}{2} , \\ \mathbf{c}_{1,2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\rho_{1,2} - u(d)}{v(d)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{u'(d)}{\rho_{1,2} - v'(d)} \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$F_{1,2}(z) = \mathbf{c}_{1,2}^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = u(z) + \frac{\rho_{1,2} - u(d)}{v(d)} v(z) .$$

(b)  $u'(d) = 0, v(d) \neq 0$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= u(d), \rho_2 = v'(d) , \\ \mathbf{c}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\rho_2 - u(d)}{v(d)} \end{pmatrix} , \\ F_1(z) &= \mathbf{c}_1^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = u(z) , \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$F_2(z) = \mathbf{c}_2^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = u(z) + \frac{\rho_2 - u(d)}{v(d)} v(z) .$$

(c)  $u'(d) \neq 0, v(d) = 0$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= u(d), \rho_2 = v'(d), \\ \mathbf{c}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{u'(d)}{\rho_1 - v'(d)} \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ F_1(z) &= \mathbf{c}_1^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = u(z) + \frac{u'(d)}{\rho_1 - v'(d)} v(z), \\ F_2(z) &= \mathbf{c}_2^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = v(z). \end{aligned} \quad (3.82)$$

(d)  $u'(d) = 0, v(d) = 0$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= u(d), \rho_2 = v'(d), \\ \mathbf{c}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ F_1(z) &= \mathbf{c}_1^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = u(z), F_2(z) = \mathbf{c}_2^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = v(z). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Z praktického hlediska nás však zajímá předně varianta (a), jelikož nastává pro spojité intervaly hodnot  $k$ . Naproti tomu ostatní případy mohou nastat pouze pro diskrétní hodnoty  $k$ , kterých zpravidla nemůžeme při konkrétním vyčíslení zcela přesně dosáhnout. Intervaly vlnových čísel  $k$ , pro která je  $h(k) > 2$ , nazýváme pásmové zadržky.

2.  $|h(k)| < 2$  (případ pásmové propusti)

Na rozdíl od předchozí situace jsou v tomto případě obě vlastní čísla  $\rho_1, \rho_2$  komplexní, navíc platí

$$\rho_1 = \rho_2^*. \quad (3.84)$$

S využitím rovnosti (3.74) pak můžeme snadno ukázat, že pro tuto situaci musí platit

$$\mu_1 = -\mu_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.85)$$

Blochovy funkce  $F_1(z), F_2(z)$  nabývají úplně stejného tvaru jako v předchozím případě. Díky (3.84) pro ně navíc můžeme psát

$$\begin{aligned} \Re[F_1(z)] &= \Re[F_2(z)], \\ \Im[F_1(z)] &= -\Im[F_2(z)]. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Intervaly vlnových čísel  $k$ , pro která platí  $h(k) < 2$ , budeme označovat jako pásmové propusti.

3.  $|h(k)| = 2$  (případ rozhraní mezi pásmovou zadržkou a pásmovou propustí)

V této situaci má polynom (3.75) pouze jeden dvojnásobný kořen

$$\rho = \frac{u(d) + v'(d)}{2} = \pm 1. \quad (3.87)$$

Díky tomu existuje jenom jedno řešení  $F(z)$  splňující podmínku (3.68). Druhé lineárně nezávislé řešení bude dle Floquetovy teorie (3.53) ve tvaru

$$G(z) = \exp(j\mu z)[zp_1(z) + p_2(z)], \quad (3.88)$$

přičemž díky vztahu (3.87) bude mít toto řešení divergentní charakter. Dosadíme-li potom do funkce  $G(z)$  bod  $z + d$ , dojdeme k následující vlastnosti

$$\begin{aligned} G(z + d) &= \exp(j\mu z) \exp(j\mu d)[zp_1(z) + dp_1(z) + p_2(z)] \\ &= \exp(j\mu d) \exp(j\mu z)[zp_1(z) + p_2(z)] + \exp(j\mu d) \exp(j\mu z)p_1(z) \\ &= \rho G(z) + \rho d F(z). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Pro hybridní Blochovu funkci tedy bude platit

$$G(z + d) = \rho G(z) + \rho d F(z). \quad (3.90)$$

Nalezení Blochovy a hybridní Blochovy funkce opět rozdělíme na čtyři možné případy:

(a)  $u'(d), v(d) \neq 0$

$$\begin{aligned} \rho &= u(d) + v'(d) = \pm 1, \\ \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\rho - u(d)}{v(d)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{u'(d)}{\rho - v'(d)} \end{pmatrix}, \\ F(z) &= \mathbf{c}^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = u(z) + \frac{\rho - u(d)}{v(d)} v(z). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Vyjádríme-li  $u(z)$ , respektive  $v(z)$  jako

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{u(d) - \rho}{v(d)} v(z) + F(z), \\ v(z) &= \frac{\rho - v'(d)}{u'(d)} [F(z) - u(z)] \end{aligned} \quad (3.92)$$

a dosadíme do (3.24), dostaneme

$$\begin{aligned} u(z + d) &= \rho u(z) + [\rho - v'(d)]F(z), \\ v(z + d) &= \rho v(z) + v(d)F(z). \end{aligned} \quad (3.93)$$

S ohledem na vztah (3.90) pak pro hybridní Blochovu funkci v tomto případě můžeme psát

$$G(z) = \frac{\rho d}{\rho - v'(d)} u(z) \equiv \frac{\rho d}{v(d)} v(z). \quad (3.94)$$

(b)  $u'(d) = 0, v(d) \neq 0$

$$\begin{aligned} \rho &= u(d) = v'(d) = \pm 1, \\ \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ F(z) &= \mathbf{c}^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = u(z). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Pro funkci  $v(z)$  v tomto případě platí

$$v(z+d) = \rho v(z) + v(d)F(z), \quad (3.96)$$

tudíž

$$G(z) = \frac{\rho d}{v(d)} v(z). \quad (3.97)$$

(c)  $u'(d) \neq 0, v(d) = 0$

$$\rho = u(d) = v'(d) = \pm 1,$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

$$F(z) = \mathbf{c}^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = v(z).$$

Pro funkci  $u(z)$  v tomto případě platí

$$u(z+d) = \rho u(z) + u'(d)F(z), \quad (3.99)$$

tudíž

$$G(z) = \frac{\rho d}{\rho - v'(d)} u(z). \quad (3.100)$$

(d)  $u'(d) = 0, v(d) = 0$

$$\rho = u(d) = v'(d) = \pm 1,$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.101)$$

$$F_1(z) = \mathbf{c}_1^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = u(z), F_2(z) = \mathbf{c}_2^T \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = v(z).$$

Toto je výjimečný případ, při kterém jednomu dvojnásobnému vlastnímu číslu přísluší dva různé vlastní vektory. Narozdíl od předchozích případů zde máme dvě lineárně nezávislé Blochovy funkce, tudíž nehovoříme o hybridní Blochově funkci.

Je nutno podotknout, že situace, při které je nutné použití hybridní Blochovy funkce, může nastat pouze pro diskrétní hodnoty vlnového čísla ve vakuu  $k$ , kterých zpravidla při vlastním vyčíslení nemůžeme dosáhnout. Proto při konkrétních výpočtech (například koeficientu transmise) většinou není nutné brát toto řešení v úvahu. Povšimněme si dále faktu, že Blochovy funkce jsou díky vlastnosti (3.68) v tomto případě periodickými funkcemi s periodou  $d$ , pro  $\rho = 1$ , nebo  $2d$ , pro  $\rho = -1$ .

V tuto chvíli je vhodné zmínit, v čem tkví výhoda použití Blochových funkcí oproti normalizovanému řešení rovnice (3.60). Pro zjištění řešení v celém BPC pomocí normalizovaného řešení bychom museli řešit  $2N - 1$  podmínek spojitosti na všech vnitřních rozhraních. Naproti tomu při použití Floquetovy teorie stačí řešení získat v první periodě krystalu, průběhy Blochových funkcí v celém krystalu jsou pak triviální díky translační vlastnosti (3.68).

### 3.5 Koeficient transmise

V této části odvodíme koeficient transmise pro celý BPC. V předchozí části textu jsme odvodili průběh řešení uvnitř krystalu. Vně tohoto krystalu pak považujeme prostředí za homogenní s konstantními indexy lomu  $n_{\text{in}}$ , respektive  $n_{\text{ext}}$ . Představme si elektromagnetickou vlnu šířící se směrem ke krystalu zleva a zapišme její obecný tvar

$$e(z) = \begin{cases} A' \exp(jn_{\text{in}}kz) + B' \exp(-jn_{\text{in}}kz), & \text{pro } z < 0, \\ C' \exp(jn_{\text{ext}}kz), & \text{pro } z > Nd, \end{cases} \quad (3.102)$$

kde  $k$  je vlnové číslo ve vakuu. Povšimněme si, že napravo od krystalu se nachází pouze vlna postupující směrem vpravo (průchozí vlna skrze krystal), tudíž koeficient  $D' = 0$ . Požadujme nyní spojitost elektrického pole a jeho derivace na rozhraní  $z = 0$  a  $z = Nd$ . Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} A' + B' &= C'_1 F_1(0) + C'_2 F_2(0), \\ C'_1 F_1(Nd) + C'_2 F_2(Nd) &= C' \exp(jkn_{\text{ext}}Nd), \\ jkn_{\text{in}}(A' - B') &= C'_1 F'_1(0) + C'_2 F'_2(0), \\ C'_1 F'_1(Nd) + C'_2 F'_2(Nd) &= jkn_{\text{ext}} C' \exp(jkn_{\text{ext}}Nd). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Vynásobíme-li první a třetí rovnici členem  $\frac{1}{A'}$  a zbylé dvě rovnice členem  $\frac{1}{A' \exp(jkn_{\text{ext}}Nd)}$ , přejde soustava (3.103) do tvaru

$$\begin{aligned} 1 + r &= C_1 F_1(0) + C_2 F_2(0), \\ C_1 \rho_1^{N-1} F_1(d) + C_2 \rho_2^{N-1} F_2(d) &= t, \\ jkn_{\text{in}}(1 - r) &= C_1 F'_1(0) + C_2 F'_2(0), \\ C_1 \rho_1^{N-1} F'_1(d) + C_2 \rho_2^{N-1} F'_2(d) &= jkn_{\text{ext}} t. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Z této soustavy lze již snadno dopočítat kvadrát modulu koeficientu transmise

$$T = T(k) = |t(k)|^2. \quad (3.105)$$

Zmiňme fakt, že při výpočtu koeficientu transmise pro takové  $k'$ , pro které je  $|h(k')| = 2$ , musíme formálně funkce  $F_1(z)$  a  $F_2(z)$  nahradit funkcemi  $F(z)$ ,  $G(z)$ .

### 3.6 Shrnutí

Při studiu průchodu vln skrze lokálně periodické struktury se jako velmi vhodné jeví využití Floquetovy teorie, podle které nejenže umíme stanovit

koeficient transmise, respektive reflexe, ale známe i celkový průběh vlny v této struktuře. Hlavní výhoda této metody spočívá ve faktu, že obě řešení mají translační vlastnost

$$F(z + d) = \rho F(z), \quad (3.106)$$

toto řešení pak nazýváme Blochova funkce. Díky faktu (3.106) nám postačuje nalézt řešení pouze uvnitř první periody a v každé další toto řešení pouze vynásobit  $\rho$ . V neposlední řadě je důležité poukázat na fakt, že v některých případech splňuje podmínku (3.106) pouze jedno z řešení. Druhé lineárně nezávislé řešení pak hledáme ve tvaru

$$G(z + d) = \rho G(z) + \rho d F(z), \quad (3.107)$$

a to pak nazýváme hybridní Blochova funkce. Nicméně toto řešení není z praktického hlediska významné, jelikož pro výpočty s konečnou přesností tento případ zpravidla nenastane. Hybridní Blochova funkce má tedy spíše teoretický význam.





## Kapitola 4

### Binární fotonické krystaly

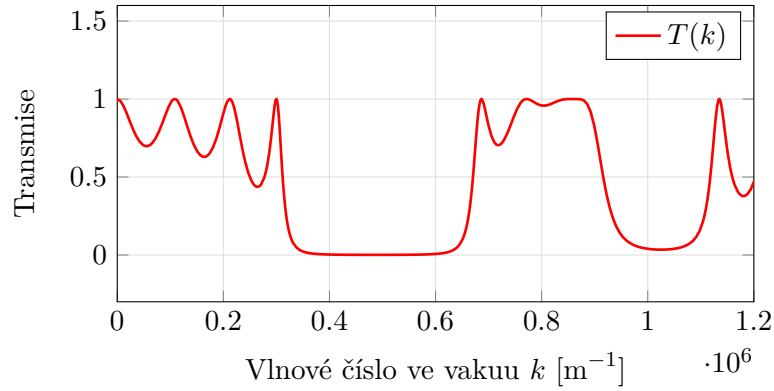
V této kapitole ukážeme použitelnost Floquetovy teorie na konkrétním fotonickém krystalu, který je tvořen z dvojvrstvy Telluru ( $n_1 = 4.6$ ) a Polystyrenu ( $n_2 = 1.6$ ). Tloušťky jednotlivých vrstev jsou  $d_1 = 900$  nm,  $d_2 = 1650$  nm, viz například [5]. Tímto způsobem budeme také demonstrovat některé specifické vlastnosti Blochových funkcí a ukážeme současně i použití metody přenosové matice.

#### 4.1 Aplikace metody přenosové matice

Metoda přenosové matice nám sice poskytuje velmi jednoduchý nástroj, jak spočítat koeficient transmise takovéto struktury, avšak jejím předpokladem pro možnost využití vztahu (2.49) je, že celý krystal obklopuje materiál s hodnotami indexů lomu  $n_{\text{in}} = n_{\text{ext}} = n_2$ . Pokud bychom měli krystal umístěný ve vakuu, je vhodnější využít právě Floquetovu teorii. Kvadrát modulu koeficientu transmise budeme počítat dle vztahu (2.91), který pro tento případ nabude tvaru

$$T_N = \frac{1}{1 + \left[ \sin(2k_1 a) \left( \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) U_{N-1}(\zeta) \right]^2}. \quad (4.1)$$

Pro námi zvolený krystal budeme počítat s hodnotami  $a = \frac{d_1}{2}$ ,  $d = 2a + d_2$ ,  $k_1 = kn_1$ ,  $k_2 = kn_2$ . Oba materiály jsou nemagnetické, tudíž platí  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}$ . Výsledný kvadrát modulu koeficientu transmise pro čtyři vrstvy BPC (neboli  $N = 4$ ) je zobrazen na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Kvadrát modulu koeficientu transmise maticovou metodou,  $N = 4$

## 4.2 Aplikace Floquetovy teorie

### 4.2.1 Koeficient transmise

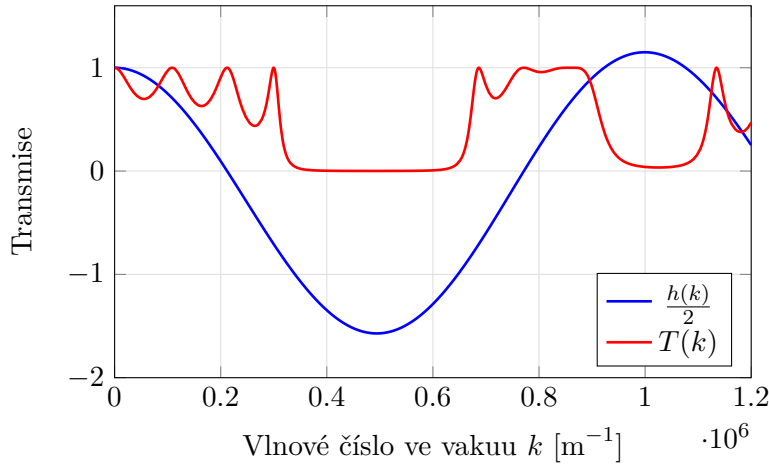
Nyní se zaměříme na stejný BPC jako v předchozí části, přičemž na něj budeme aplikovat Floquetovu teorii. Nejprve uvedeme normalizované řešení pro tento krystal v první periodě

$$\begin{aligned}
 u(z) &= \begin{cases} \cos(kn_1 z), & \text{pro } z \in (0; d_1) \\ \cos(kn_1 d_1) \cos[kn_2(d_1 - z)] \\ + \frac{n_1}{n_2} \sin(kn_1 d_1) \sin[kn_2(d_1 - z)], & \text{pro } z \in (d_1; d_2) \end{cases}, \\
 v(z) &= \begin{cases} \frac{\sin(kn_1 z)}{kn_1}, & \text{pro } z \in (0; d_1) \\ \frac{\sin(kn_1 d_1)}{kn_1} \cos[kn_2(d_1 - z)] \\ - \frac{\cos(kn_1 d_1)}{kn_2} \sin[kn_2(d_1 - z)], & \text{pro } z \in (d_1; d_2) \end{cases}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dříve jsme ukázali, že oblasti pásmových propustí (respektive zádrží) lze určit podle hodnot funkce  $h(k)$ , viz vztah (3.76). Pro tento konkrétní krystal bude tato funkce nabývat tvaru

$$\begin{aligned}
 h(k) &= u(d) + v'(d) \\
 &= 2 \cos(kn_1 d_1) \cos(kn_2 d_2) - \left( \frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin(kn_1 d_1) \sin(kn_2 d_2).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nejprve (kvůli porovnání s metodou přenosové matice) vykreslíme kvadrát modulu koeficientu transmise spolu s funkcí  $h(k)$  pro  $n_{\text{in}} = n_{\text{ext}} = n_2$  a  $N = 4$ , viz obrázek 4.2, přičemž jsme při jeho výpočtu využili soustavu (3.104). Dostaneme skutečně stejný průběh, jako na obrázku 4.1. Floquetova teorie nám nyní umožňuje určit onen kvadrát modulu koeficientu transmise i



**Obrázek 4.2:** Kvadrát modulu koeficientu transmise pomocí Floquetovy teorie,  $n_{\text{in}} = n_{\text{ext}} = n_2$

pro  $n_{\text{in}} = n_{\text{ext}} = 1$ , neboli krystal umístěný ve vakuu (případně můžeme za  $n_{\text{in}}$ , respektive  $n_{\text{ext}}$  dosadit libovolné jiné hodnoty). Tento nový kvadrát modulu koeficientu transmise (opět pro  $N = 4$ ) spolu s funkcí  $h(k)$  je vykreslen na obrázku 4.3a, k jeho výpočtu jsme opět využili soustavu (3.104). Na grafu velmi dobře vidíme, že oblasti pásmových zadržů se vyskytují přesně v místech splňujících podmínku  $\left|\frac{h(k)}{2}\right| > 1$ . Pokud bychom dále navýšili počet vrstev BPC na  $N = 10$ , byly by hrany těchto pásmových zadržů více strmé, viz obrázek 4.3b. Povšimněme si, že nehledě na hodnoty  $n_{\text{in}}$ ,  $n_{\text{ext}}$ , neboli nehledě na okolní prostředí BPC, bude mít krystal vždy stejné intervaly pásmových zadržů, neboť funkce  $h(k)$  nezávisí na těchto hodnotách. Pokud bychom nyní chtěli vypočítat hranice pásmových zadržů tohoto konkrétního krystalu, budeme k tomuto účelu muset využít numerické metody pro hledání řešení rovnice

$$\left|\frac{h(k)}{2}\right| = 1. \quad (4.4)$$

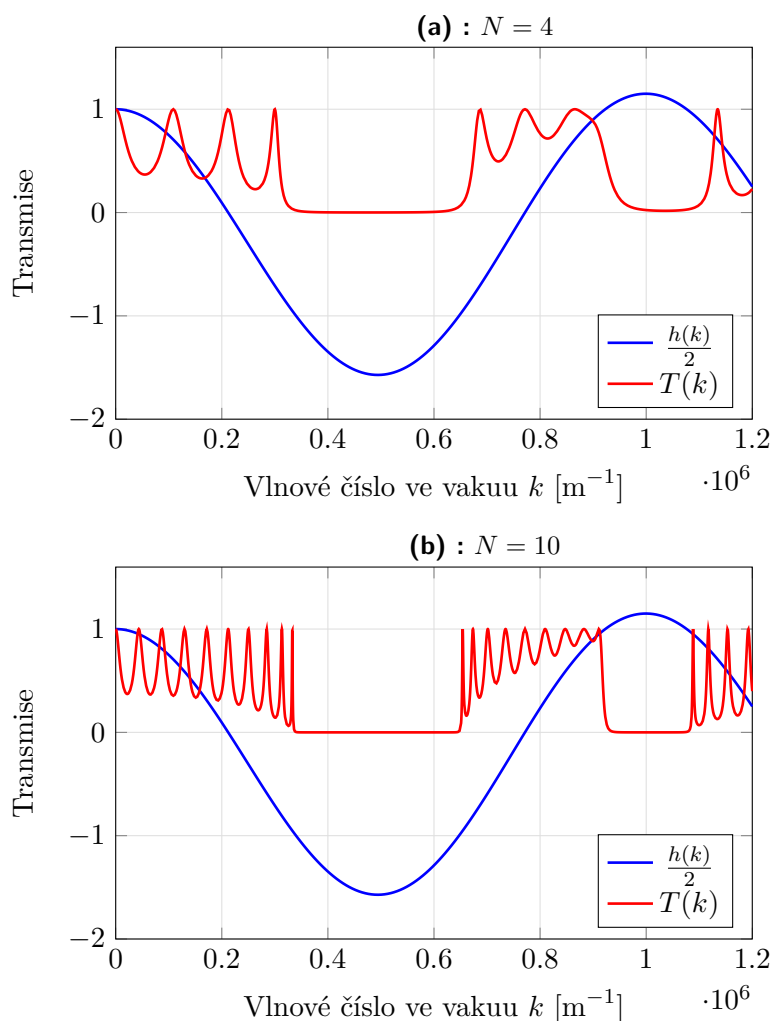
Po jejím vyřešení dojdeme k následujícím hodnotám:

#### 1. První pásmová zadrž

$$\begin{aligned} k &\in \langle k_{1,\text{left}}; k_{1,\text{right}} \rangle, \\ k_{1,\text{left}} &\approx 3,39975 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}, \\ k_{1,\text{right}} &\approx 6,47186 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

#### 2. Druhá pásmová zadrž

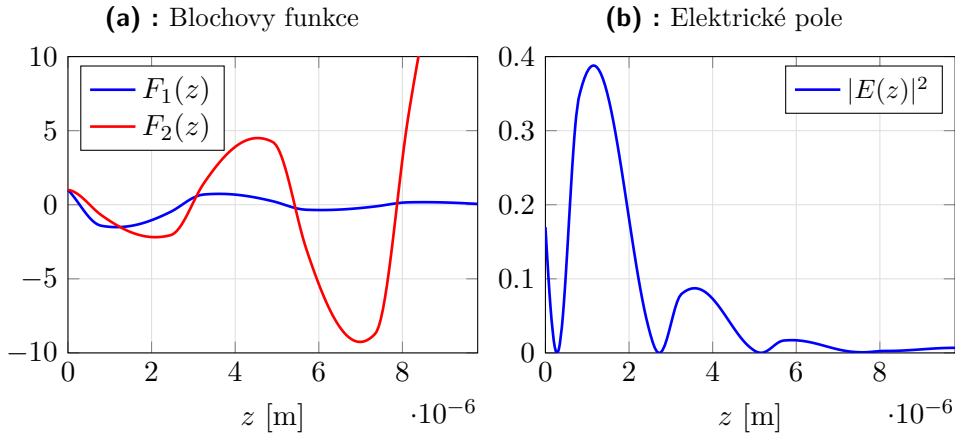
$$\begin{aligned} k &\in \langle k_{2,\text{left}}; k_{2,\text{right}} \rangle, \\ k_{2,\text{left}} &\approx 9,22877 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}, \\ k_{2,\text{right}} &\approx 1,076398 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$



**Obrázek 4.3:** Kvadrát modulu koeficientu transmise pomocí Floquetovy teorie,  $n_{\text{in}} = n_{\text{ext}} = 1$

#### 4.2.2 Blochovy funkce

V této části se zaměříme na nalezení průběhů Blochových funkcí, hybridních Blochových funkcí a elektrického pole uvnitř námi uvažovaného krystalu pro různé konkrétní hodnoty  $k$ . Ve všech případech budeme uvažovat vždy  $N = 4$ . Jako první zvolíme hodnotu  $k = 0,603 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ , kterážto leží v intervalu první pásmové zadržky krystalu. Obě Blochovy funkce jsou vykresleny na obrázku 4.4a a elektrické pole na obrázku 4.4b. Floquetův multiplikátor první Blochovy funkce  $F_1(z)$  nabývá hodnoty  $\rho_1 \approx -0,49$ , naproti tomu funkci  $F_2(z)$ , která diverguje do nekonečna, odpovídá multiplikátor  $\rho_2 \approx -2,06$ .

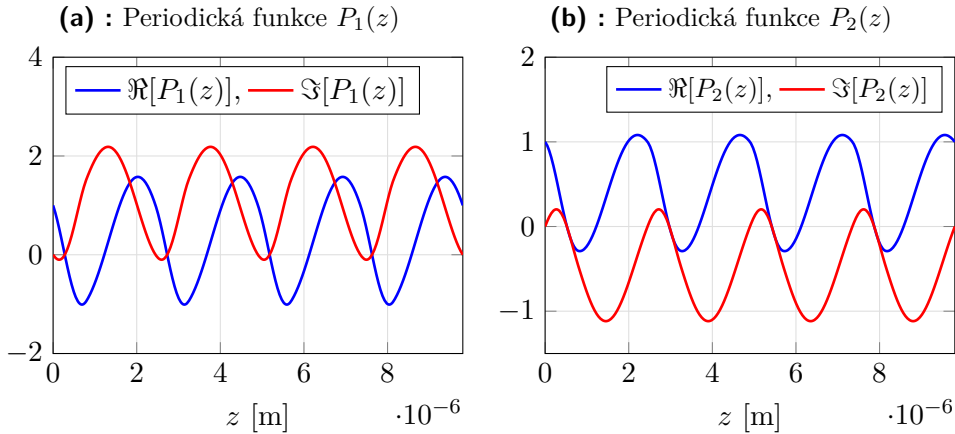


**Obrázek 4.4:** Průběhy funkcí  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $|E(z)|^2$  pro  $k = 0,603 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$

Povšimněme si, že skutečně platí

$$\begin{aligned} |\rho_1| &< 1, \\ |\rho_2| &> 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Vzhledem k tomu, že se nacházíme uvnitř oblasti pásmové zadržky, je vidět, že elektrické pole je v krystalu silně zatlumené. Kvadrát modulu koeficientu transmise je v tomto případě roven  $T(0,603 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}) \approx 0,01$ . Útlum by byl ještě silnější při použití více vrstev v BPC.



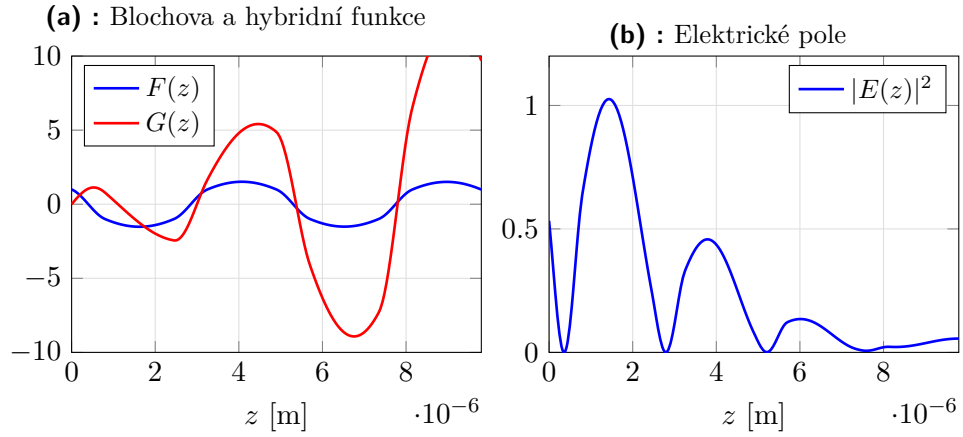
**Obrázek 4.5:** Průběhy funkcí  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$  pro  $k = 0,603 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$

Dle vztahu (3.41) můžeme obě Blochovy funkce zapsat ve tvaru

$$F_i(z) = \Phi_i(z)P_i(z) = \exp(j\mu_i z)P_i(z), \quad (4.8)$$

kde  $P_i(z) = \Phi_i^{-1}(z)F_i(z) = \exp(-j\mu_i z)F_i(z)$  jsou periodické funkce s periodou  $d$ . Funkce  $P_1(z)$  je vykreslena na obrázku 4.5a a funkce  $P_2(z)$  na obrázku 4.5b.

Jako další vybereme  $k = k_{1,\text{right}} \approx 6,47186 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$ , neboli vezmeme takové  $k$ , které leží na hranici mezi oblastí pásmové zadržky a pásmové propusti. Zdůrazněme, že se jedná pouze o přibližnou hodnotu, ve skutečnosti se tedy nenacházíme přesně na hranici a stejně jako v předchozím případě bychom jako řešení našli dvě Blochovy funkce, které by byly téměř totožné. Naším cílem je ale ukázat orientační průběh hybridní Blochovy funkce, tudíž nám postačí fakt, že se k okraji pásmové zadržky alespoň blížíme. Průběhy Blochovy a hybridní Blochovy funkce jsou vykresleny na obrázku 4.6a, elektrické pole pak na obrázku 4.6b.



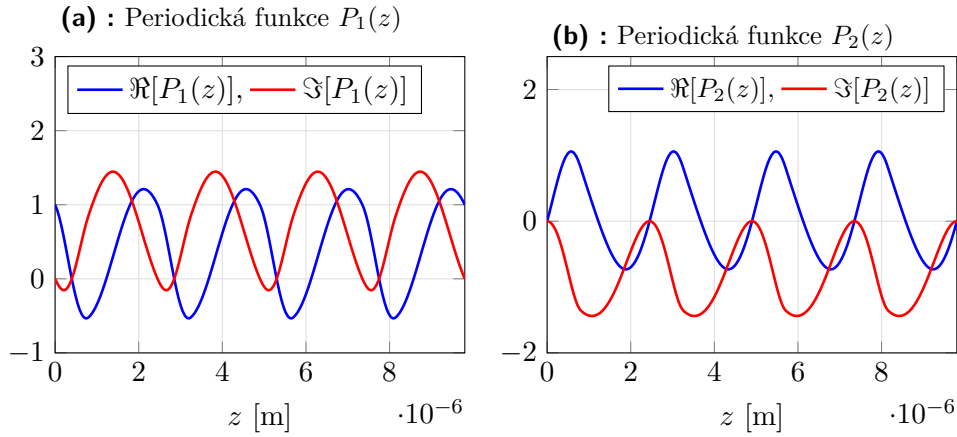
**Obrázek 4.6:** Průběhy funkcí  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $|E(z)|^2$  pro  $k = k_{1,\text{right}} \approx 6,47186 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$

Zdůrazněme, že hybridní funkce zde není zobrazena ve správném měřítku. Floquetův multiplikátor v tomto případě nabývá hodnoty  $\rho \approx -1$ , díky tomu je Blochova funkce  $F(z)$  periodická s periodou  $2d$ , což vidíme na obrázku. Podle očekávání má hybridní Blochova funkce divergentní charakter. Elektrické pole je v krystalu opět velmi silně ztlumeno, jelikož se stále nacházíme v oblasti pásmové zadržky. Periodické funkce jsou tentokrát ve tvaru

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \Phi^{-1}(z)F(z) = \exp(-j\mu z)F(z), \\ P_2(z) &= \Phi^{-1}(z)G(z) - zP_1(z) = \exp(-j\mu z)G(z) - zP_1(z), \end{aligned} \quad (4.9)$$

viz vztah (3.53), a jsou zobrazeny na obrázcích 4.7a a 4.7b, funkce  $P_2(z)$  není vykreslena ve správném měřítku.

V tuto chvíli se na rozdíl od předchozích dvou příkladů přesuneme do oblasti

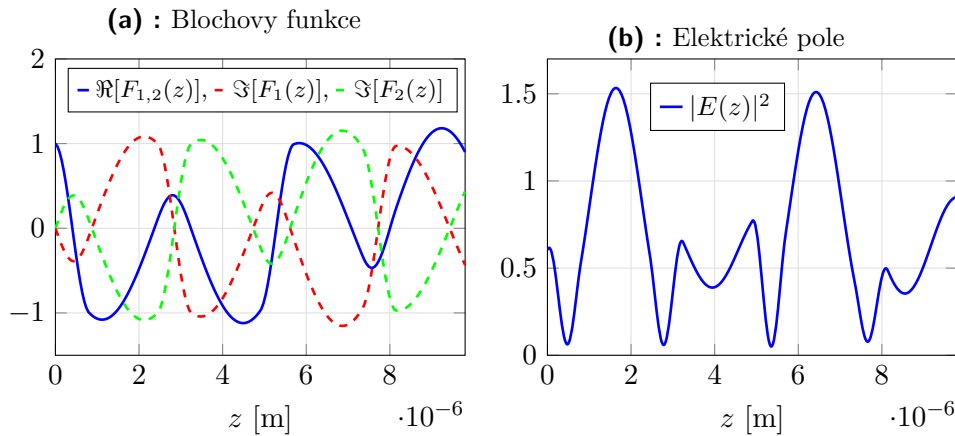


**Obrázek 4.7:** Průběhy funkcí  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$  pro  $k = k_{1,\text{right}} \approx 6,47186 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$

pásmové propusti. Zvolme hodnotu  $k = 0,785 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ . Průběhy Blochových funkcí jsou vykresleny na obrázku 4.8a, průběh elektrického pole pak na obrázku 4.8b. Hned na první pohled vidíme, že v oblasti pásmové propusti jsou obě hledané Blochovy funkce komplexní, a jak již bylo odvozeno dříve, platí pro ně

$$\begin{aligned} \Re[F_1(z)] &= \Re[F_2(z)], \\ \Im[F_1(z)] &= -\Im[F_2(z)], \end{aligned} \quad (4.10)$$

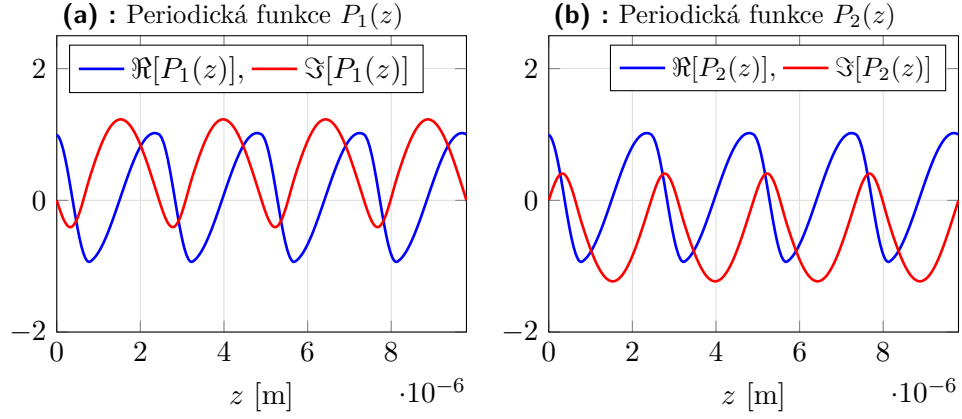
neboli obě Blochovy funkce jsou vzájemně komplexně sdruženými funkcemi. Tuto vlastnost můžeme vyčíst i z Floquetových multiplikátorů, které nabývají



**Obrázek 4.8:** Průběhy funkcí  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $|E(z)|^2$  pro  $k = 0,785 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$

hodnot  $\rho_{1,2} \approx 0,112 \pm 0,994j$ . Při pohledu na průběh elektrického pole v krystalu vidíme, že oproti předchozím dvěma případům zde není pole utlumené

k nule. Kvadrát modulu koeficientu transmise je pro tuto hodnotu  $k$  roven  $T(0, 785 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}) \approx 0,9$ . Periodické funkce jsou dále vykresleny na obrázcích 4.9a a 4.9b.

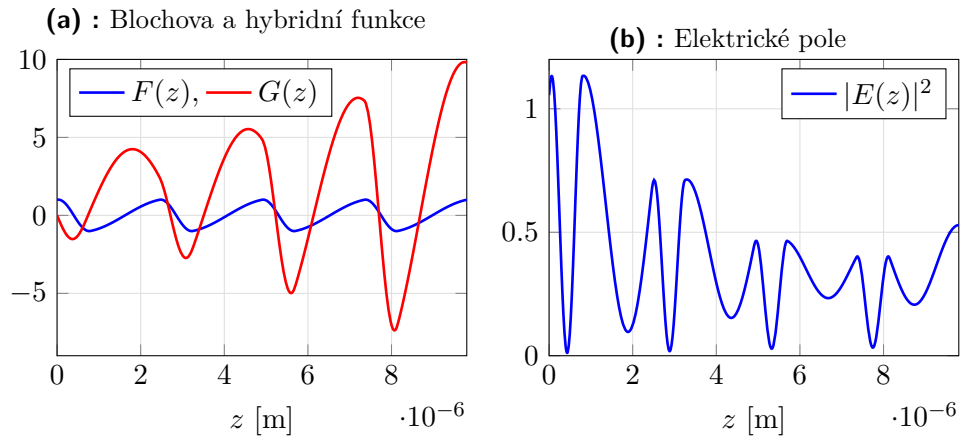


**Obrázek 4.9:** Průběhy funkcí  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$  pro  $k = 0,785 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$

Vzhledem ke vztahu (3.85) pak lze snadno ukázat, že i pro tyto periodické funkce musí platit

$$\begin{aligned}\Re[P_1(z)] &= \Re[P_2(z)], \\ \Im[P_1(z)] &= -\Im[P_2(z)].\end{aligned}\quad (4.11)$$

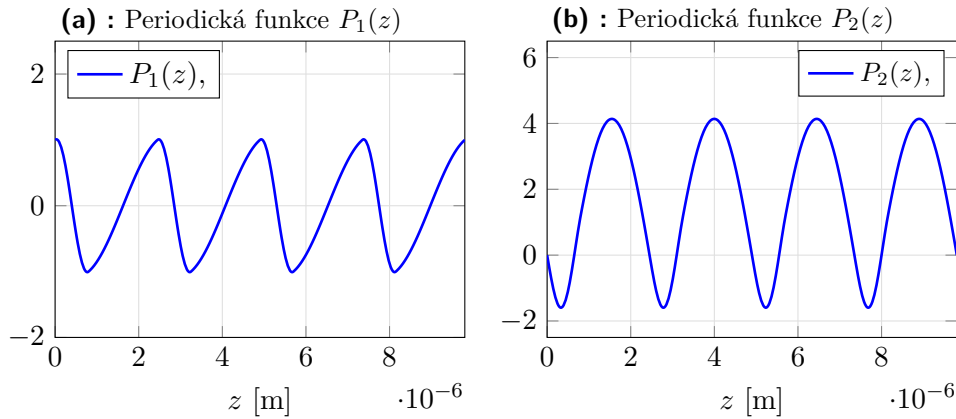
Přesuňme se nyní k levému okraji druhého intervalu pásmové zadržky, tudíž budeme počítat s hodnotou  $k = k_{2,\text{left}} \approx 9,22877 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$ .



**Obrázek 4.10:** Průběhy funkcí  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $|E(z)|^2$  pro  $k = k_{2,\text{left}} \approx 9,22877 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$



Stejně jako dříve se jedná pouze o přibližnou hodnotu spočítanou numericky, tudíž výsledky nejsou zcela přesné. Průběhy  $F(z)$ ,  $G(z)$  jsou zobrazeny na obrázku 4.10a,  $|E(z)|^2$  pak na obrázku 4.10b. Funkce  $G(z)$  opět není vykreslena ve správném měřítku. Oproti pravému okraji první pásmové zadržky máme zde Floquetův multiplikátor roven  $\rho \approx 1$ , tudíž funkce  $F(z)$  je v tuto chvíli funkcí periodickou s periodou  $d$ , což lze snadno vyčíst z obrázku. Dále vidíme, že hybridní Blochova funkce opět diverguje. Průběh elektrického pole se na první pohled může jevit jako nesmyslný, jelikož zde není pole zatlumené, ačkoliv se nacházíme v oblasti pásmové zadržky. Odpověď na tuto nesrovnalost nám přináší obrázek 4.3a. Díky malému počtu  $N = 4$  nejsou hrany této pásmové zadržky příliš strmé. Koeficient transmise zde nabývá hodnoty  $T(9, 22877 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}) \approx 0,53$ . K silnému útlumu by zde došlo, kdybychom použili více vrstev. Zde podotkneme, že hodnotu  $N = 4$  používáme pouze z důvodu přehlednosti vykreslovaných grafů. V reálných aplikacích by se ovšem objevily hodnoty  $N$  mnohem vyšší. Periodické funkce, tentokrát opět ve formě (4.9), jsou zobrazeny na obrázcích 4.11a, 4.11b. Vzhledem k faktu, že

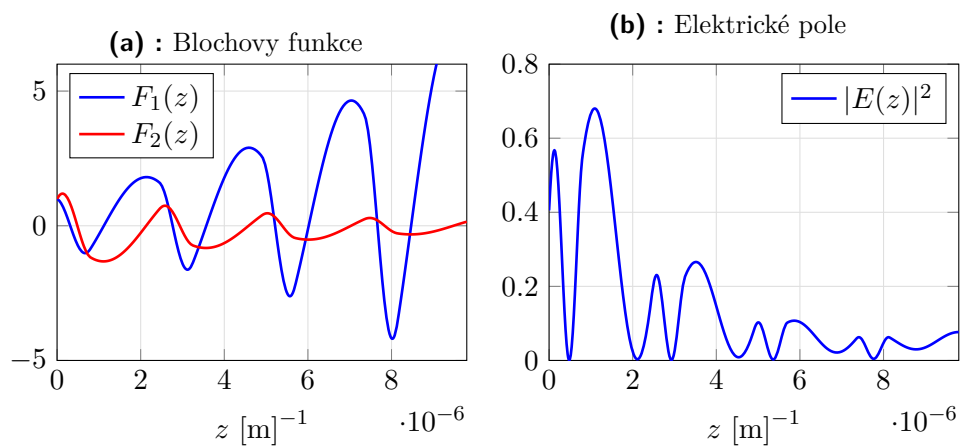


**Obrázek 4.11:** Průběhy funkcí  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$  pro  $k = k_{2,\text{left}} \approx 9, 22877 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$

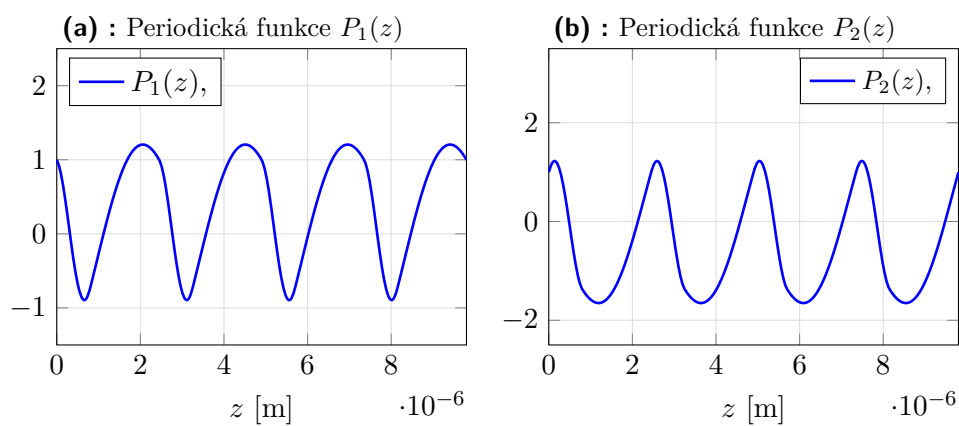
$\rho = 1$ , pak musí být  $\mu = 0$  a tudíž funkce  $\psi(z) = 1$ . Díky tomu jsou jednak obě modulační funkce ryze reálné, a navíc platí  $P_1(z) = F(z)$ .

Jako poslední vybereme hodnotu  $k = 0,962$ , nacházíme se tedy uvnitř druhého intervalu pásmové zadržky. Výsledné průběhy jsou zobrazeny na obrázcích 4.12a (Blochovy funkce) a 4.12b (elektrické pole). Stejně jako v případě první pásmové zadržky, i zde se objevují dvě Blochovy funkce, z nichž  $F_1(z)$  diverguje do nekonečna ( $\rho_1 \approx 1,6$ ) a  $F_2(z)$  je naopak zatlumená ( $\rho_2 \approx 0,62$ ). Při pohledu na průběh elektrického pole opět vidíme, že pole je při průchodu krystalem silně zatlumené. Koeficient transmise nabývá pro tento případ hodnoty  $T(0,962 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}) \approx 0,08$ . Periodické funkce příslušné oběma Blochovým funkcím jsou vykresleny na obrázcích 4.13a a 4.13b. S ohledem na fakt, že  $\rho_i \geq 0$ , mají kmitočty  $\mu_i$  pouze imaginární část a funkce

$\Phi_i(z)$  jsou tedy ryze reálné. Díky tomu pak i pro obě periodické funkce musí platit  $P_i(z) \in \mathbb{R}$ .



**Obrázek 4.12:** Průběhy funkcí  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $|E(z)|^2$  pro  $k = 0,962 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$



**Obrázek 4.13:** Průběhy funkcí  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$  pro  $k = 0,962 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$

## Kapitola 5

### Závěr

V práci jsme ukázali dvě možné (a velmi často využívané) metody analýzy průchodu vln skrze lokálně periodické struktury. Jako první byla předmětem našeho zájmu metoda matice přenosu, přičemž jsme nejprve odvodili tvar této matice pro jednu nehomogenitu uvnitř jinak homogenního prostředí, a dále našli tvar pro průchod skrze  $N$  takovýchto nehomogenit rozmístěných periodicky za sebou. Z této finální přenosové matice jsme posléze odvodili vztah pro modul kvadrátu koeficientu transmise těchto struktur. Za použití všech teoretických poznatků jsme poté našli konkrétní tvary přenosových matic pro různé typy fyzikálních vln a jim odpovídající lokálně periodické nehomogenní struktury. V další části práce jsme se zabývali takzvanou Floquetovou teorií, která nám poskytuje alternativní možnost pohledu na tuto problematiku. Provedli jsme nejprve teoretický matematický úvod, při kterém jsme hledali obecné řešení diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty, které nazýváme Blochovy funkce, pročež jsme tyto výsledky později aplikovali na konkrétní případ, a to sice šíření elektromagnetických vln binárními fotonickými krystaly. Podobně jako u předchozí metody jsme našli způsob výpočtu modulu kvadrátu koeficientu transmise, který jsme využili k hledání takzvaných pásmových zádrží (respektive pásmových propustí), což jsou intervaly vlnových čísel, pro která vlna skrze krystal téměř neprojde (respektive projde alespoň její část). Výhoda Floquetovy teorie tkví v tom, že nám nabízí extrémně jednoduchý nástroj k nalezení konkrétního průběhu vlny v dané lokálně periodické struktuře, což sice metoda matice přenosu nabízí také, nicméně poměrně komplikovaným způsobem. V poslední části práce jsme obě dvě teorie aplikovali na konkrétně zvoleném binárním fotonickém krystalu, kdy jsme za pomoci softwaru MAPLE vykreslili moduly kvadrátů koeficientů transmise tohoto krystalu s využitím obou metod a dále zobrazili průběhy daných Blochových funkcí v krystalu pro některé vybrané

hodnoty vlnových čísel. Velkou pozornost jsme věnovali i takzvaným hybridním Blochovým funkcím, které sice v praxi využití příliš nenacházejí, avšak z hlediska matematické korektnosti jsou nezbytné a je na ně často zapomínáno. Z grafů modulů kvadrátů koeficientů transmise jsme potvrdili, že obě metody nakonec vedou ke stejným výsledkům. Z průběhů Blochových funkcí jsme dále potvrdili dříve odvozené teoretické vlastnosti a provedli jejich rozbor. V práci jsme demonstrovali univerzální použitelnost prezentovaných metod pro různé typy fyzikálních vln, což nám je umožněno díky izomorfismu příslušných modelových rovnic, který jsme v práci ukázali na mnoha příkladech. Všechny body zadání bakalářské práce byly splněny.



## Literatura

- [1] MARKOŠ, P., SOUKOULIS, C. M. *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*. 2008. New Jersey: Princeton University Press. ISBN 978-0-691-13003-3
- [2] GRIFFITHS, D. J. and STEINKE, C. A. Waves in locally periodic media. *American Journal of Physics*, February 2001, Vol. 69, No. 2.
- [3] EASTHAM, M. S. P. *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*. 1st printing, London: Scottish Academic Press, 1973. ISBN 978-0-707-30213-3
- [4] BRADLEY, C. E. *Acoustic Bloch Wave Propagation in a Periodic Waveguide*. Texas, July 1991. Technical Report. The University of Texas at Austin. Physics Division.
- [5] MOROZOV, G. V., SPRUNG, D. W. L. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystals. *A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics*, November 2011, Vol. 96.
- [6] PŮST, L., TONDL, A. *Úvod do theorie nelineárních a quasiharmonických kmitů mechanických soustav*. 1. vyd. Praha: ČSAV, 1956.
- [7] RILEY, K. F., HOBSON, M. P., BENCE, S. J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*. 3rd printing, 2006. New York: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-67971-8
- [8] NUSINSKY, I., HARDY, A. A. Band-gap analysis of one-dimensional photonic crystals and conditions for gap closing. *Physical Review B*, March 2006, Vol. 73.

- [9] MOROZOV, G. V., PLACIDO, F., SPRUNG, D. W. Light Scattering from One-Dimensional Photonic Crystals under Total Internal Reflection. In *15th International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON)*, Cartagena: IEEE 2013. ISBN 978-1-4799-0683-3
- [10] MOROZOV, G. V., PLACIDO, F., SPRUNG, D. W. Disappearance of allowed bands in light scattering from a binary photonic crystal beyond the second critical angle. *Journal of the Optical Society of America B*, March 2013, Vol. 30, No. 4.
- [11] BRADLEY, C. E. Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. Part I. Theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, September 1994, Vol. 96.



## Příloha A

### Seznam příložených souborů



#### A.1 MAPLE Worksheets

- BPC.mw
- MaticePrenosu.mw
- NormalizovaneReseni.mw