

ČVUT v Praze  
Fakulta stavební

Katedra fyziky  
Obor: Geodézie, kartografie a geoinformatika



**Analýza vertikální indexové chyby  
prostorového optického skeneru**

**Analysis of the vertical index error  
of the spatial optical scanner**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Jindřich Brzobohatý  
Vedoucí práce: Ing. Petr Pokorný, Ph.D.  
Rok: 2018



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Brzobohatý Jméno: Jindřich Osobní číslo: 458641

Zadávací katedra: 11102 Katedra fyziky

Studijní program: Geodézie a kartografie

Studijní obor: Geodézie, kartografie a geoinformatika

### II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce: Analýza vertikální indexové chyby prostorového optického skeneru

Název bakalářské práce anglicky: Analysis of the vertical index error of the spatial optical scanner

Pokyny pro vypracování:

Cílem práce je provést teoretickou analýzu vlivu vertikální indexové chyby optického skeneru pro bezkontaktní sběr prostorových dat na přesná geodetická měření společně s návrhem a realizací metodiky pro její numerické potlačení. Metodika a proces potlačení vertikální indexové chyby budou ověřeny na reálném testovacím poli.

Seznam doporučené literatury:


- 1) G. F. Marshall, G. E. Stutz, Handbook of optical and laser scanning, CRC Press, 2011.
- 2) F. Marshall, Optical Scanning, CRC Press, 1991.
- 3) J. Shan, Ch. K. Toth, Topographic Laser Ranging and Scanning: Principles and Processing, CRC Press, 2008.
- 4) G. L. Heritage, A. R. G. Large, Laser scanning for the environmental sciences, Wiley-Blackwell, 2009.
- 5) P. Pokorný, One-mirror and two-mirror three-dimensional optical scanners - position and accuracy of laser beam spot, Appl. Opt. 53(12), 2014.
- 6) A. Mikš, Aplikovaná optika, Nakladatelství ČVUT, 2009.
- 7) W. Schofield, M. Breach, Engineering surveying, Butterworth-Heinemann (Elsevier), 2007.
- 8) J. Uren, B. Price, Surveying for engineers, Macmillan, 2010.
- 9) K. Rektorys, Přehled užité matematiky, Prometheus, 2000.

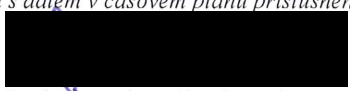
Jméno vedoucího bakalářské práce: Ing. Petr Pokorný

Datum zadání bakalářské práce: 21. 2. 2018

Termín odevzdání bakalářské práce: 27. 5. 2018

Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku

  
Podpis vedoucího práce

  
Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v bakalářské práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

21. 2. 2018  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta(ky)

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně, a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 26.5.2018

.....  
Jindřich Brzobohatý

## **Poděkování**

Děkuji Ing. Petru Pokornému, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a neutuchající vstřícnost při konzultacích, a dále firmě Exact Control System, a. s. za poskytnutí přístrojů k praktické realizaci publikované práce.

Jindřich Brzobohatý

*Název práce:*

**Analýza vertikální indexové chyby prostorového optického skeneru**

*Autor:* Jindřich Brzobohatý

*Studijní program:* Geodézie a kartografie

*Obor:* Geodézie, kartografie a geoinformatika

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* Ing. Petr Pokorný, Ph.D.

*Pracoviště:* Katedra fyziky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze

*Abstrakt:* V práci je navržen efektivní kalibrační proces pro potlačení nežádoucího vlivu systematické vertikální indexové chyby pozemního prostorového optického skeneru, který je velmi snadno aplikovatelný v praxi. Nejprve jsou představeny a popsány možné konstrukce prostorových optických skenerů, dále je představen obecný uvažovaný model chyb měření skenerem. Následně je navržen postup kalibračního měření a numerického výpočtu, který je potvrzen na experimentálních datech získaných v rámci spolupráce s firmou Exact Control System, a. s. Popsaná metoda může výrazným způsobem napomoci k redukci finančních nákladů na mechanické kalibrace zmíněné chyby.

*Klíčová slova:* Optický skener, indexová chyba, numerická kalibrace, 3D pozemní skenování, stopa svazku

*Title:*

**Analysis of the vertical index error of the spatial optical scanner**

*Author:* Jindřich Brzobohatý

*Abstract:* This thesis proposes an effective calibration process of suppressing the undesirable influence of the systematic vertical index error of the spatial terrestrial optical scanner, which is very easy to apply in practice. Firstly, possible designs of spatial optical scanners are presented. Next, a general error model and measurement procedure with the spatial optical scanner is described. Consequently, a calibration and numerical calculation procedure is proposed, which is confirmed on experimental data. These were obtained in collaboration with company Exact Control System, Inc. The described method can significantly reduce financial costs of mechanical calibration of the mentioned vertical index error.

*Key words:* Optical scanner, index error, numerical calibration, 3D terrestrial scanning, beam trace

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>3D pozemní skenery s velkým dosahem</b>	<b>11</b>
2.1	Úhlové měření, rozmítací systémy optických prostorových skenerů . . . . .	13
2.1.1	Úhlové měření . . . . .	13
2.1.2	Jedno-zrcadlový rozmítací prvek . . . . .	13
2.1.3	Monogon . . . . .	14
2.1.4	Polygonální rozmítací prvek . . . . .	15
2.1.5	Pyramidový rozmítací prvek . . . . .	15
2.2	Nepřímé měření vzdáleností . . . . .	15
2.2.1	Fázová měřicí metoda . . . . .	16
2.2.2	Metoda tranzitního času . . . . .	17
2.3	Přehled v současnosti komerčně dostupných skenerů a jejich parametrů . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Popis určení polohy stopy svazku optických skenerů</b>	<b>21</b>
3.1	Obecný model . . . . .	21
3.1.1	Určení polohy svazku pro vybrané rozmítací systémy . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Indexová chyba</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Model měření</b>	<b>28</b>
5.1	Obecný model měření . . . . .	28
5.2	Model měření pro kalibraci vertikální indexové chyby . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Numerická kalibrace vertikální indexové chyby</b>	<b>32</b>
6.1	Chybový model prostorové polární metody . . . . .	32
6.2	Řešení kalibrace vertikální indexové chyby pomocí optimalizačních algoritmů . . . . .	34
6.3	Řešení kalibrace vertikální indexové chyby metodou nejmenších čtverců	35

6.4	Aproximativní řešení kalibrace vertikální indexové chyby iterativní metodou nejmenších čtverců . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Praktická realizace kalibračního pole a výpočtu indexové chyby</b>	<b>41</b>
7.1	Rozbor chyb před měřením . . . . .	41
7.2	Praktická realizace – měření . . . . .	43
7.3	Praktická realizace – numerické zpracování . . . . .	44
7.4	Rozbor chyb po měření . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Oprava dat reálného projektu</b>	<b>51</b>
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Kopie diplomu z XIX. ročníku Mezinárodního kola SVOČ 2018</b>	<b>61</b>

# Kapitola 1

## Úvod

3D optické skenery jsou zařízení, která umožňují bezkontaktní zaměření prostorových objektů [1–11]. Měření probíhá rychle a výsledky jsou velmi přesné. Tato technologie se využívá v širokém spektru odvětví. Například ve stavebnictví (výpočty kubatur, množství výkopových prací, měření trhlin a posunů, dokumentace staveb), v památkové péči (dokumentace historických děl, soch, nábytku), ve strojírenství (proměňování dílů a komponentů, součástí, automobilových karosérií), v dopravě (stav silničních vozovek, železničních tratí), nebo ve vodohospodářství (dokumentace přehrad, vodních toků, návržení odvodnění). Další využití nachází optické prostorové skenery v medicíně, biologii, lesnictví, ochraně životního prostředí, ochraně osobního majetku a podobně [1].

Efektivita metody sběru prostorových dat optickými skenery je důsledkem dlouhodobého vývoje měřicího a vyhodnocovacího aparátu. Během posledních let vzniklo více přístupů, jak konstruovat přístroje a počítat prostorové modely z naměřených dat. Důležitým aspektem profesního odvětví, pro které se zmíněné modelování využívá, je důraz na přesnost, rozsah, cenovou dostupnost, energetickou náročnost, hmotnost nebo přenosnost přístroje. Nedílnou součástí je i kritérium velikosti skenované plochy (předmětu) nebo rozlišitelnost různorodých ploch. Podle toho jsou voleny konstrukční parametry přístroje.

Principy zpracovatelských metod pro získávání prostorových dat jsou známé již po dlouhou dobu. Triangulace a polární prostorová metoda [12] hrály v geodézii nezastupitelnou roli a jsou její nedílnou součástí dodnes. Tyto metody zprostředkovávají prostorové informace o jednotlivých bodech předmětu. Zaměření každého takového bodu je ovšem časově náročné, i když zejména v posledních letech dochází k procesům poloautomatizace a zvýšení efektivity sběru dat. Rychlejší a pohodlnější variantou sběru dat velkých předmětů a rozlehlých oblastí jsou metody fotogrammetrie. Pro zpracování fotografických snímků byly vymyšleny matematické postupy a pro vyhodnocování postaveny důmyslné opticko-mechanické stroje [13], které byly s nástupem výpočetní techniky nahrazeny počítači. Moderní



technikou vyhodnocování fotografií je metoda obrazové korelace. Ta je uživatelsky nejjednodušší a nejrychlejší, ale zatím nedosahuje vysoké přesnosti. [14].

Přelomem ve sběru bodových dat nastal s objevením a komerčním uplatněním laseru (z angl. Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation [15]). Společně s vývojem CCD/CMOS článků [15] byly vyvinuty postupy strojově automatizované identifikace jednotlivých bodů zaměřovaného povrchu. Nejvíce limitujícím faktorem takto získaných měření byla rychlost zápisu dat do paměti. Její vliv na rychlost skenování se vývojem počítačového hardwaru rychle zmenšoval.

Speciální druhy skenerů dokáží zaměřit nejen vnější povrch, ale i vnitřní skladbu předmětů [16]. Pionýrskou metodou, ke které stačí klasický skener, je postupné 3D skenování. Cílený objekt je zaměřován po vrstvách. Složením skenů vznikne 3D model. Ve stavebnictví například postupné zaměření stavby při realizaci (skladba silnice). Ve strojírenství se jedná především o destruktivní skenování, kdy je předmět postupně zaměřován a obrušován [17].

Technicky pokrokovější a taky cenově náročnější metodou je využití fyzikálních vlastností šíření širokého spektra vln a částic. Nejčastěji se jedná o rentgenový paprsek, ultrazvuk, mikrovlny nebo detekci spinů protonů [18]. Jejich využití je například v medicíně a materiálovém inženýrství.

Cílem výše zmíněných přístupů je převést reálný objekt (jeho topografii) do virtuálního prostoru, kde lze dále upravovat, dotvářet nebo analyzovat jeho vlastnosti. Zpravidla se práce provádí ve specializovaných CAD softwarech [19, 20]. V nich lze jak zobrazit naměřené mračno bodů, tak vytvořit vektorovou kresbu, případně provádět nutné transformace a filtrace registrovaných dat.

Vizualizované výsledky práce vypadají věrohodně, ale i přes to je potřeba si pořád uvědomovat původ dat, a podle toho s nimi zacházet. V současnosti se maximální přesnost sběru dat 3D skenováním pohybuje v řádech milimetrů (viz tabulka 2.1). Konkurenční boj mezi výrobcí skenerů neustále tlačí na kvalitu přístrojů, ale i tak je třeba dbát přesných kalibračních postupů.

V této práci se budeme zabývat pozemními prostorovými optickými skenery využívanými zejména pro geodetické velmi přesné aplikace, např. měření povrchu vozovek v milimetrové absolutní přesnosti. Pro dosažení takovéto polohové přesnosti je třeba dodržet přísné postupy a zásady. Také je třeba používat velmi přesná zařízení nebo dodatečné kalibrace.

Požadujeme-li polohovou přesnost  $\Delta p = 1 \text{ mm}$  na vzdálenosti  $l = 50 \text{ m}$ , poté můžeme požadavek na úhlové měření odhadnout jako  $\Delta\alpha = \Delta p/l = 2 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 4.1''$ . Požadavek na délkové měření bude úměrný požadavku na měřenou polohovou přesnost. S rozvojem techniky komerčně dostupné skenery budou takovéto přesnosti brzy dosahovat.

Měření prostorovým skenerem ve své podstatě odpovídá automatizovanému vysokofrekvenčnímu měření dvou prostorových úhlů (v horizontální a vertikální ro-

vině souřadného systému skeneru) a vzdálenosti (mezi centrem skeneru a měřeným bodem) – prostorové polární souřadnice [21–23]. Tyto tři veličiny jsou následně transformovány zpravidla do prostorových kartézských souřadnicových soustav.

Měřené prostorové polární souřadnice nejsou bezchybné. Nejistoty v jejich hodnotách jsou způsobené řadou faktorů. Tyto faktory můžeme modelovat obdobně jako při analýze konstrukčních a měřických chyb měření teodolitem [12, 22]. Zásadní vliv mají chyby systematické, např. chyba kolimační, úklonná a indexová ve vertikálním směru [12, 22, 24]. Nahodilé chyby mohou být způsobeny např. různým tvarem stopy použitého optického svazku na rozdílných předmětech, a tedy změnou pozice energetického centra, nebo variací v parametrech okolního prostředí (změnou indexu lomu atmosféry), atp.

Tato práce se zabývá numerickým potlačením (kalibrací) vertikální indexové chyby pozemního prostorového optického skeneru. Tato chyba vzniká v důsledku špatné justáže odečítacího zařízení vertikálních směrů, kdy registrovaná hodnota neodpovídá skutečné měřené hodnotě o konstantní hodnotu. Tím pádem jsou vypočtené kartézské souřadnice ovlivněny systematickou chybou.

V minulosti se obecným popisem kalibrace optických skenerů zabývala řada autorů. Například Lichti et al. [25–27] studoval modelování chyb a možnosti částečné autokalibrace. Zlepšení přesnosti pro skenování blízkých oblastí ve smyslu potlačení systematických chyb shrnul Pfeifer et al. [28]. Návrh strategie pro automatizované potlačení systematických chyb publikoval Garcia et al. [29]. Kalibraci skeneru při měření radiových antén při použití jednoho mračna ukázal Holst a Kuhlmann [30]. Výběrem parametrů kalibrace pro optimální autokalibraci studoval Lerma et al. [31]. Komplexní kalibraci skeneru na středně dlouhé vzdálenosti prezentoval Medic et al. [32].

V této práci je navržen efektivní kalibrační proces pro potlačení nežádoucího vlivu systematické vertikální indexové chyby, který je oproti výše zmíněným pracím [25–32] velmi snadno aplikovatelný v praxi. Nejprve jsou představeny 3D skenery a obecný uvažovaný model chyb měření optickým prostorovým skenerem. Následně je navržen postup kalibračního měření a numerického výpočtu, který je potvrzen na experimentálních datech získaných v rámci spolupráce s firmou Exact Control System, a. s. [33]. Popsaná metoda může výrazným způsobem napomoci k redukci finančních nákladů na mechanické kalibrace zmíněné chyby.

Přílohou práce je kopie diplomu za třetí místo ve XIX. ročníku soutěže stavebních fakult České a Slovenské republiky SVOČ 2018, kde autor danou problematiku publikoval a prezentoval.

## Kapitola 2

# 3D pozemní skenery s velkým dosahem

Geodetická profese, v rámci které jsou určovány prostorové parametry povrchu Země nebo objektů na něm umístěných – stavebních děl (budovy, silnice, tunely, přehradý), klade na 3D skenery specifické požadavky. Pro venkovní měření je důležitý velký dosah, velký rozsah (zorné pole) a přesnost v řádu milimetrů [12]. Další požadavky jsou vytvářeny energetickou náročností přístroje (zpravidla externí napájení), limity velikosti a hmotnosti.

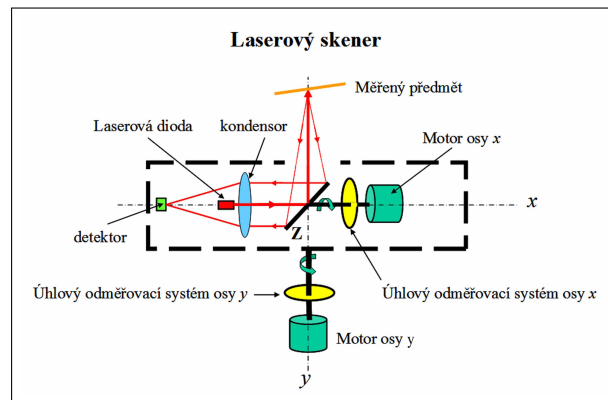
V této kapitole se budeme zabývat přehledem a konstrukčními parametry přístrojů, které tyto požadavky splňují. Znalost konstrukčního typu skeneru dává možnost charakterizovat správně zdroj systematických a nahodilých chyb, které se v měření daným přístrojem vyskytují.

3D optické skenery pro účely bezkontaktního sběru prostorových dat s vysokou přesností pracují na principu registrace prostorových polárních souřadnic. Přístrojem měříme vždy úhel v horizontální rovině, úhel ve vertikální rovině a vzdálenost<sup>1</sup>. Všechny tyto tři veličiny jsou uvažovány od centra přístroje k jednotlivým bodům vztažené k lokální souřadné soustavě skeneru. Geometrickými transformacemi jsou poté tyto měřené veličiny přepočítávány do kartézských lokálních nebo globálních souřadných soustav (WGS-84 [34], S-JTSK [35], S-42 [36]).

Zabývejme se nyní základním principem určení prostorových souřadnic bodu pozemním prostorovým skenerem. Uvažujme situaci na obr. 2.1. Laserovou diodou je vygenerován optický svazek (paprsek). Ten se na odrazné ploše Z láme a dopadá na měřený předmět, který záření rozptýlí. Část paprsku se vrátí zpět do přístroje, kde po odrazu od roviny Z je kondensorem fokusován do detektoru. Tato soustava má za cíl určit vzdálenost mezi vztažným bodem skeneru a měřeným bodem.

---

<sup>1</sup>V rámci této práce uvažujeme výstup měření právě tyto tři zmíněné hodnoty - prostorové polární souřadnice v souřadné soustavě skeneru. V reálné situaci jsou ovšem výstupem řady dílčích měření v interním systému skeneru, které jsou běžnému uživateli zpravidla nepřístupné.



Obrázek 2.1: Schéma 3D skeneru [1]

Princip určení je vysvětlen na stránce 15.

Hlavní částí tohoto přístroje je rotující rozmitací prvek (plocha  $Z$  na obr. 2.1). Tím otáčí motor na ose  $x$ , a tak je paprsek rozmitán do vertikální roviny. Úhlovým odměřovacím systémem osy  $x$  je pak určován úhel pootočení odrazné plochy. Celým skenovacím zařízením pak otáčí motor osy  $y$ . Tím je skenovaná vertikální rovina pootočena o horizontální úhel, který měří úhlový odměřovací systém osy  $y$  [1].

Teoreticky lze pokrýt celý prostor okolo skeneru. Ve většině případů je ale skener z konstrukčních důvodů v rozsahu měření omezen (elektronika, kryt, stativ). Rozsah skenovaného pole je tak menší. V tab. 2.1 v podkapitole 2.3 je ukázán přehled současně komerčně dostupných skenerů, kde jsou parametry zorného pole jednotlivých skenerů představeny.

Měření vzdáleností je u optických skenerů realizováno různými metodami. V současné době se jedná výhradně o elektronické metody s využitím optického svazku, tzv. EDM (electronic distance measurement) [5, 12, 37], které jsou řešeny dvěma přístupy:

- Měření fáze modulované odražené světelné vlny [12],
- Měření tranzitního času světelné vlny (metoda TOF - time of flight) [1].

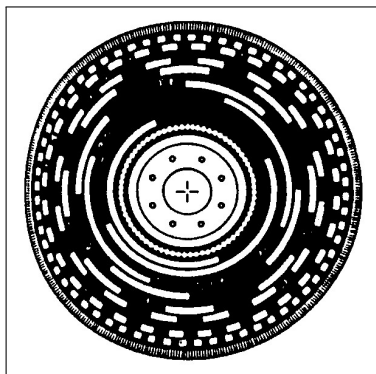
V následujících podkapitolách se budeme zabývat základními principy a praktickými realizacemi měření úhlů a vzdáleností v optických prostorových pozemních skenerech.

## 2.1 Úhlové měření, rozmítací systémy optických prostorových skenerů

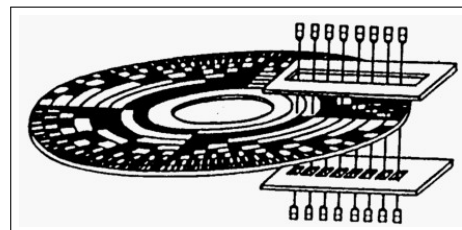
Tato kapitola pojednává o mechanicko-optických soustavách (rozmítacích prvcích) uvnitř přístrojů, které slouží k rychlému nasměrování optického paprsku do předurčených směrů. Podle typů je můžeme rozdělit na jedno-zrcadlové, polygonální a pyramidové [2, 38].

### 2.1.1 Úhlové měření

Hlavní částí úhlového odměřovacího systému je skleněný kruh, na kterém je binární kód [12]. Tento kód může být v podobě tmavých a světlých plošek (obr. 2.2). V přístroji dopadá světlo na skleněný kruh (obr. 2.3) a v závislosti na binárním kódu pak dopadá na fotodiodu. Podle světelné intenzity fotodioda převede dopadajícího světlo na digitální signál, který je mikroprocesorem vyhodnocen jako dekadické číslo. Tato hodnota může být zobrazena na displeji nebo rovnou uložena do paměti přístroje. V současnosti se přesnost měřeného úhlu u skenerů pohybuje mezi 2,5-25 úhlovými vteřinami [6–11].



Obrázek 2.2: Kódový kruh [39]



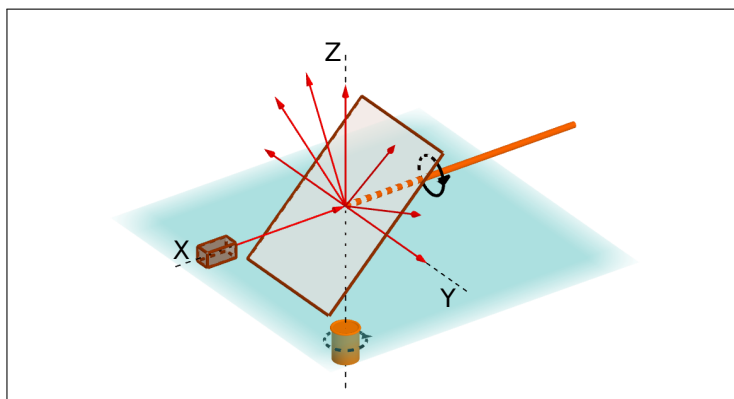
Obrázek 2.3: Snímání obrazu fotodiodami [39]

### 2.1.2 Jedno-zrcadlový rozmítací prvek

Systém využívající k rozmítání paprsku pouze jedno zrcadlo je velmi prostý. Výrobní postup ploché zrcadlové plochy není tak komplikovaný, jako u jiných typů odrazných prvků (např. obr. 2.1.4 a obr. 2.1.5), a tak cena výroby je poměrně nízká. Zrcátko lze navrhnout pod libovolným úhlem od osy otáčení. Na obr. 2.4 je pro příklad ukázána konstrukce soustavy při úhlu 45°. Další konstrukční výhodou je nízké namáhání motorku, který zajišťuje otáčení okolo osy  $x$ , zapříčiněné menší

hmotností zrcátka, oproti hranolům. Tím pádem dochází k jeho pomalejšímu opotřebení a jeho životnost je tak delší.

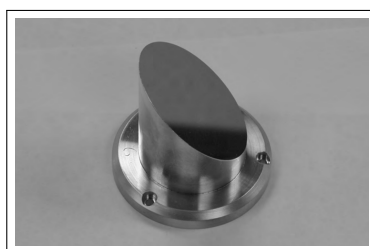
Příklad průchodu optického paprsku soustavou je názorně ukázán na obr. 2.4. Paprsek vychází ze zdroje záření, který je v soustavě vhodně umístěn (na obr. 2.4 na ose  $x$ ). Dále dopadá na rovinu zrcadla, kde se odráží podle zákona odrazu [1, 2, 5, 40]. Rotací zrcátka a případně celého systému následně dochází k rozmítání paprsku do určitého výseku prostoru.



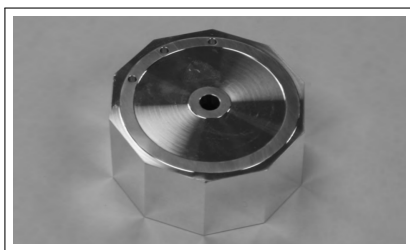
Obrázek 2.4: Schéma jedno-zrcadlového rozmítacího prvku

### 2.1.3 Monogon

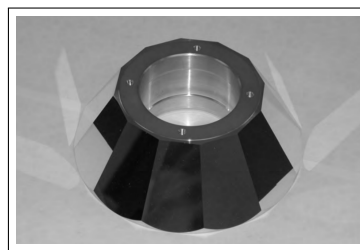
Velmi často využívaný rozmítací prvek je monogon (obr. 2.5). Optická soustava se vyznačuje vysokou přesností určovaných bodů a velkým rozlišením [2]. Monogon je vlastně seříznutý válec. Řez (odrazná plocha) svírá s jeho podstavou vhodně volený úhel. Celý prvek je pak do optické soustavy zakomponován tak, že podstava válce je připevněna na otáčecí systém. Osou otáčení je samotná osa válce. Průchod paprsku touto soustavou je pak matematicky identický jako u jedno-zrcadlového rozmítacího prvku (viz obr. 2.4).



Obrázek 2.5: Monogon [2]



Obrázek 2.6: Polygonální rozmítací prvek [2]



Obrázek 2.7: Pyramidový rozmítací prvek [2]

### 2.1.4 Polygonální rozmítací prvek

Polygonální rozmítací prvek je složen z více odrazných plošek, jejichž normály jsou kolmé na osu otáčení (obr. 2.6). Výroba takto upravených hranolů bývá složitá, a proto tu platí pravidlo, že čím má hranol více plošek, tím je dražší. Navíc počet plošek jde ruku v ruce s velikostí hranolu, což může mít vážný dopad na výběr ložiska, životnost a náklady [3]. Proto se volí vyvážený poměr mezi počtem odrazných plošek polygonu a rychlostí jeho otáčení.

Polygonální zrcadlo potřebuje ochranný nebo vylepšený odrazný povrch. Nejčastěji se používá tenká vrstva hliníku s vrstvou oxidu křemičitého chráněná zlatem, nebo vícevrstevným dielektrickým povlakem [41]. Vrstvy mohou být přizpůsobeny vždy tak, aby co nejvíce vyhovovaly danému médiu. Jedná se o hluboké UV, viditelné nebo střední infračervené záření [41].

### 2.1.5 Pyramidový rozmítací prvek

Pyramidové soustavy jsou nadstavbou polygonálních. Tvoří je také několik plošek, které se ale na jedné straně směrem k ose otáčení sbíhají (viz obr. 2.7). Taková konstrukce umožňuje objektivu být blíž hranolu, a tak může být celý přístroj menší [2].

## 2.2 Nepřímé měření vzdáleností

Jak již bylo v úvodu kapitoly zmíněno, k měření vzdálenosti se u 3D optických skenerů využívá metoda měření fáze modulované odražené světelné vlny, nebo měření tranzitního času světelné vlny (metoda TOF - time of flight) [1, 5, 12, 37, 42]. V následující části se zmíněnými metodami budeme zabývat.

## 2.2.1 Fázová měřicí metoda

Předpokládejme pro jednoduchost, že optické záření (elektromagnetické vlnění), použité pro měření vzdálenosti, můžeme charakterizovat jako netlumené harmonické vlnění. V daném případě poté může být vyjádřeno funkcí sinus (obr. 2.8) [12]. Vlna vychází z vysílače ve fázi  $\phi_1$  a šíří se prostorem rychlostí  $v = c/n$ , kde  $c = 299\,792\,458\text{ ms}^{-1}$  [15] je rychlost světla ve vakuu,  $n$  je index lomu prostředí (vzduchu). Po odrazu od předmětu se vlna vrací zpět do přístroje s fází  $\phi_2$ . Nyní existují dva přístupy vyhodnocování a zpracování vráceného signálu. První pracuje na základě modulace vlny tak, aby se vlna vrátila ve stejné fázi, jako byla vyslaná ( $\phi_1 = \phi_2$ ). Potom dvojnásobek vzdálenosti mezi přístrojem a předmětem bude

$$2D = N\lambda_m, \quad (2.1)$$

kde  $D$  je vzdálenost mezi přístrojem a měřeným předmětem,  $N$  počet period vlny a  $\lambda_m$  vlnová délka modulované vyslané vlny.

Druhý přístup určuje vzdálenost pomocí fázového posunu navrácené vlny oproti vlně vyslané (fázový doměrek). Fázový doměrek je tedy zbytková vzdálenost od posledního bodu, kde měla vlna odražená stejnou fázi jako vlna vyslaná. Pro vzdálenostní doměrek platí

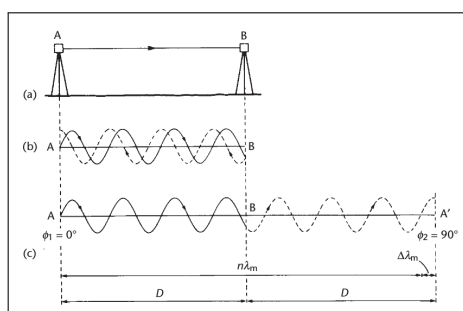
$$\Delta\lambda_m = \frac{(\phi_2 - \phi_1)^\circ}{360^\circ} \times \lambda_m, \quad (2.2)$$

kde  $\lambda_m$  je střední vlnová délka použitého záření. Přístroj postupně vysílá vlny o různých frekvencích tak, aby vždy dokázal dopočítat počet period šířené vlny. Dvojnásobek výsledné vzdálenosti  $D$  je poté určen jako

$$2D = N\lambda_m + \Delta\lambda_m, \quad (2.3)$$

kde  $N$  je počet period,  $\lambda_m$  je vlnová délka vyslané vlny a  $\Delta\lambda_m$  je doměrek [12].

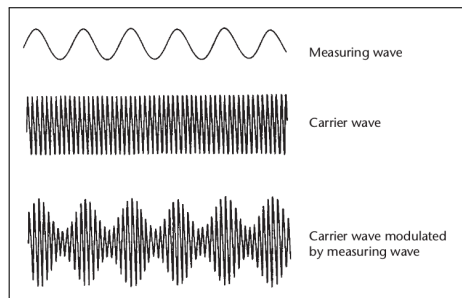
Jelikož měření neprobíhá ve vakuu, je šíření vln (světla) ovlivněno variacemi indexu lomu prostředí  $n$ , který je obecně funkcí polohy. Materiálové prostředí atmosféry také tlumí procházející záření. U vln s nízkou frekvencí dochází velmi



Obrázek 2.8: Fázová měřicí metoda [12]



rychle k útlumu intenzity, a tak by vysílač musel být hodně velký, nebo velmi výkonný. To u geodetických přístrojů není možné zajistit. Problém je tak řešen modulací měřicí vlny do vlny nosné. Nosná vlna má z pravidla vyšší frekvenci, a proto její intenzita v atmosféře neklesá tak rychle [12].



Obrázek 2.9: Amplitudová modulace nosné vlny [12]

### 2.2.2 Metoda tranzitního času

Tato metoda je založena na pulzním elektromagnetickém vlnění. Impulz je generován pulzní diodou. Poté prochází přes polopropustné zrcátko, kde se rozdělí. Jedna jeho část zapne čítač. Druhá část je vyslaná do prostoru a po odrazu od předmětu se vrátí do přístroje, kde vypne čítač. Čítač je elektronická součástka, která počítá součet period generovaných oscilátorem. Počet period se technikami šíření signálu převede na tranzitní čas vlny [12]. Pro dvojnásobek měřené vzdálenosti  $D$  poté platí

$$2D = v \times \Delta t, \quad (2.4)$$

kde  $v = c/n$  je rychlost světla ve vakuu  $c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}$ ,  $n$  je index lomu prostředí a  $\Delta t$  je měřený tranzitní čas.

Jak je zřejmé, přesnost metody závisí na přesném měření času [1]. Aby byla splněna milimetrová přesnost, musí se čas měřit s přesností na piko sekundy. Řádový odhad můžeme provést snadnou úvahou. Předpokládáme-li index lomu prostředí, ve kterém se záření šíří, pro jednoduchost  $n = 1$  (vzduch), poté pro vzdálenost  $D$  platí

$$D = c \times t, \quad (2.5)$$

kde  $t$  je měřený čas. Pro variaci vzdálenosti a času poté platí [1]

$$\delta D = \delta t \times c, \quad (2.6)$$

$$\delta t = \frac{\delta D}{c}. \quad (2.7)$$

Uvažujeme-li rychlost světla  $c = 299\,792\,458\text{ ms}^{-1}$  a přesnost měření vzdálenosti požadujeme 1 mm, poté musí být měření času prováděno s přesností

$$\delta t = \frac{10^{-3}\text{ m}}{299\,792\,458\text{ ms}^{-1}} = 3.34 \cdot 10^{-12}\text{ s} = 3.34\text{ ps.} \quad (2.8)$$

## 2.3 Přehled v současnosti komerčně dostupných skenerů a jejich parametrů

V tab. 2.1 je ukázán přehled v současnosti komerčně dostupných optických skenerů nejčastěji v geodetické praxi používaných. Švýcarská společnost Leica Geosystems [6] (vlastněná od roku 2005 Hexagon AB, Švédsko) navazuje ve vývoji geodetických přístrojů na firmu Wild, která má v oboru dlouholetou tradici. Od doby, kdy Heinrich Wild položil počátky opto-mechanické geodézie (sestrojil 1. teodolit), si drží vysoké krédo. Neustále to dokazuje svými inovacemi přístrojů s vysokou přesností. Jedním z nich je i skener Leica ScanStationP50 [6]. Mezi ostatními konkurenčními skenery vyniká v rychlosti sběru dat (až 1 000 000 pps). Výhodou i nevýhodou je jeho hmotnost (12.65 kg). Ta zajišťuje skener na stanovisku co možná nejstabilnějším, ale na druhou stranu není tak lehce přenosný.

Firma Riegl [7] se již přes 40 let angažuje ve výzkumu a vývoji laserových dálkoměrů a 3D skenerů v malém městečku v Dolním Rakousku 85 km od Vídně. Nejnovější produkty nabízejí pro pozemní, letecké, průmyslové a mobilní využití. Do oborů zabývající se 3D přináší nové poznatky a odzkoušené inovace. Nejmodernější skener RieglVZ-2000i [7] je specifický svojí konstrukcí. Rozmítací prvek tvoří polygon, který je zbroušen pouze do tří odrazných ploch. Elektronika a další komponenty skeneru jsou umístěny do válcového železného krytu (obr. 2.10). Skener vyniká úhlovou přesností (2.5").

Po dlouhá léta minulého století se na asijském trhu s geodetickým příslušenstvím o dominanci přetahovali dvě firmy Japonské firmy. Topcon Co. [10] a Sokkia Co. [43]. V roce 2008 první jmenovanou pohltila druhou jmenovanou. Spojením vznikl společný vývoj 3D skeneru pro geodetické využití, který byl slavnostně představen v roce 2013. Vývoj v tomto směru se nezastavil, a tak nyní vlajkovým skenerem je Topcon GLS-2000 [10].

Firma Surphaser [8], sídlící v americkém Seattlu, nabízí na trh průměrný 3D skener. Rozsah zorného pole je stejný jako u Topconu. Rychlost skenování 832 000 bodů/s je po ScanStationP50 druhá nejvyšší. Nejsilnější vlastností vůči konkurenci je jeho hmotnost (pouze 5.8 kg).

Firma Faro [9] byla založena dvěma doktorandy biomedicínského inženýrství v Montrealu. Jejich vývoj se zabýval 3D metodami v diagnostice a podpoře pokročilé chirurgie. Po létech úspěchů v oboru začala firma expandovat i do jiných profesních odvětví, a tak se stala nováčkem v nabídce 3D skenovacích zařízení pro geodety.

Dlouhá léta se firma Trimble Inc. [11] výhradně specializovala pouze na zpracování GNSS signálu a jeho využití v navigaci. Díky svému úspěchu v oboru se firma mohla dále rozvíjet, a tak koncem roku 2003 koupila Francouzskou firmu MENSI S.A., která vedla vývoj v oblasti pozemního prostorového skenování.

Tabulka 2.1: Parametry v současnosti komerčně dostupných skenerů (nevyplněná místa v tabulce výrobce neuvádí) [6–11]

název	typ	zorné pole [°]	dosah [m]	rychlost body/s	přesnost		šum [mm/m]	váha [kg]
					délková [mm]	úhlová ["]		
Leica ScanStationP50	monog.	360 x 290	1000	1 000 000	1,2+10 ppm	8	0,5/50	12,65
RieglVZ-2000i	polyg.	360 x 100	2500	500 000	5/100 m	2.5		9,8
Topcon GLS-2000	monog.	360 x 270	500	120 000	3,5	6		10,9
Surphaser 400	monog.	360 x 270	300	832 000		25	0,9/160	5,8
Faro The Focus 350	monog.		350	500 000	1			
Trimble TX8	monog.	360 x 317	340	1 000 000	1/80 m	16.5	2/340	10,7

20



Obrázek 2.10: Přehled v současnosti komerčně dostupných skenerů: RieglVZ-2000i, Leica ScanStationP50, Surphaser 400, Topcon GLS-2000, Trimble TX8, Faro The Focus 350 [6–11]

# Kapitola 3

## Popis určení polohy stopy svazku optických skenerů

K určení polohy svazku optického prostorového pozemního skeneru lze z fyzikálního hlediska využít základní Maxwellovy rovnice elektrodynamiky, avšak takový popis překračuje rámec zadání této práce. Dílčí celky tohoto řešení lze najít v [15, 42, 44, 45]. V této kapitole je popsán obecný matematický model, který uvažuje geometricko-optickou aproximaci šíření optického svazku v homogenním izotropním prostředí bez nábojů a proudů [44], tj. záměrný paprsek pozemního skeneru se šíří jako přímka, a dále jsou rozebrána specifika optických prvků používaných pro rozmítání paprsku u 3D skenerů.

### 3.1 Obecný model

Na obr. 3.1 je v kartézské souřadné soustavě definována rovina  $\varepsilon$  odrazného prvku bodem B, jehož poloha je dána polohovým vektorem  $\mathbf{r}_B$ , a normálovým vektorem  $\mathbf{n}$ . Dále je známá poloha zdroje O daná polohovým vektorem  $\mathbf{r}_O$  a směr paprsku je určen pomocí jednotkového směrového vektoru  $\mathbf{R}_i$  (incident ray).

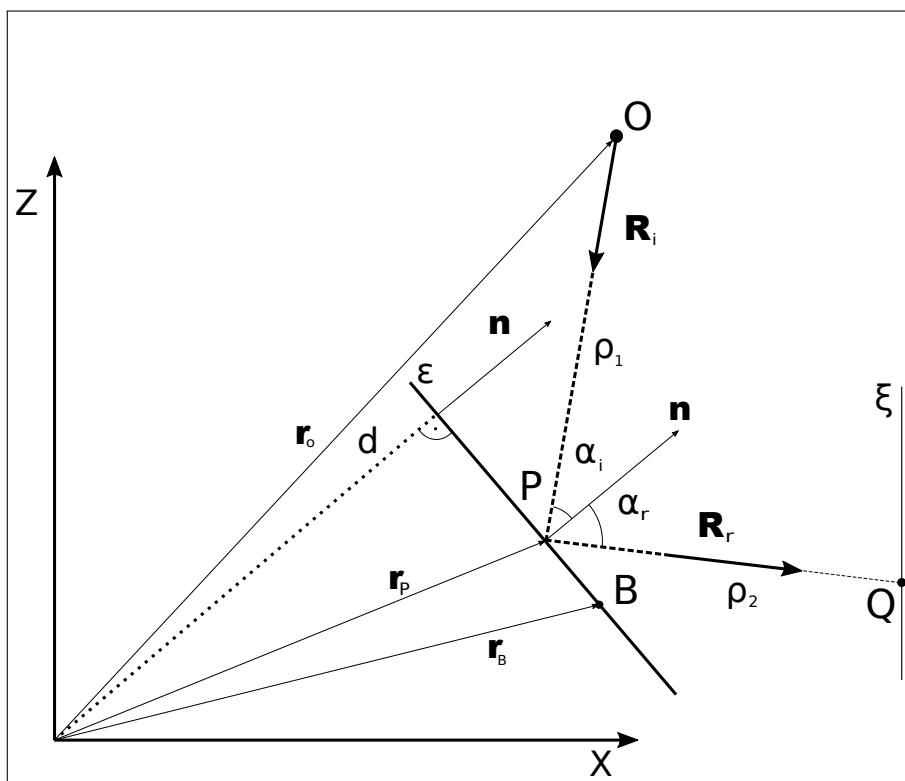
Pro výpočet jednotkového směrového vektoru odraženého paprsku (reflected ray)  $\mathbf{R}_{r_1}$  je nutné nejprve vypočítat průsečík P vyslaného signálu a odrazné roviny.

Obecná definice roviny analytické geometrie je [21]

$$ax + by + cz - d = 0, \quad (3.1)$$

kde proměnné  $x, y, z$  jsou souřadnice bodu ležícího v této rovině, proměnné  $a, b, c$  jsou složky normálového vektoru  $\mathbf{n}$  dané roviny. Parametr  $d$  je vzdálenost roviny od počátku soustavy souřadné. Pro rovinu  $\varepsilon$  tak lze psát rovnice

$$\begin{aligned} n_x x_B + n_y y_B + n_z z_B - d &= 0, \\ n_x x_P + n_y y_P + n_z z_P - d &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$



Obrázek 3.1: Poloha svazku

Zápis se zjednoduší převedením na vektorový tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{n} - d &= 0, \\ \mathbf{r}_P \cdot \mathbf{n} - d &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Souřadnice bodu P se určí ze vztahu

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_O + \rho_1 \mathbf{R}_i, \quad (3.4)$$

kde  $\mathbf{r}_O$  je polohový vektor zdroje a  $\rho_1$  je vzdálenost mezi bodem O a průsečíkem P,  $\mathbf{R}_i$  je jednotkový směrový vektor vyslaného signálu (dopadajícího paprsku na odraznou plochu).

Úpravou rovnic (3.3) a (3.4) vychází vztah

$$\rho_1 = \frac{(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_O) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{n}}. \quad (3.5)$$

Pro kontrolu lze vzdálenost mezi zdrojem světla a průsečíkem P roviny  $\epsilon$  spočítat jako

$$\rho_1 = \|\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_P\|. \quad (3.6)$$

Následným dosazením  $\rho_1$  do (3.4) získáváme vektor určující polohu bodu odrazu signálu od roviny  $\varepsilon$ .

Podle zákona odrazu [1, 15, 44, 46] platí, že odražený paprsek leží v rovině, která je dána paprskem dopadajícím a normálovým vektorem odrazné plochy, a že úhel dopadu  $\alpha_i$  se rovná úhlu odrazu  $\alpha_r$ , tedy

$$\alpha_i = \alpha_r = \alpha . \quad (3.7)$$

Ten se měří vždy od normály. Jednotkový směrový vektor odraženého paprsku  $\mathbf{R}_{r_1}$  lze vypočítat pomocí zákona odrazu ve vektorovém tvaru, platí [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{r_1} &= \mathbf{R}_i + 2\mathbf{n} \cos \alpha , \\ \mathbf{R}_{r_1} &= \mathbf{R}_i - 2\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_i) . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pokud se začne odrazná plocha otáčet kolem osy (axis) dané jednotkovým směrovým vektorem  $\mathbf{a}_1$  o úhel  $\varphi_1$ , poté lze normálový vektor  $\mathbf{n}$  otočený kolem této osy vyjádřit vztahem [1]

$$\mathbf{n}_{\varphi_1} = \mathbf{n} \cos \varphi_1 + \mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}) (1 - \cos \varphi_1) + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{n}) \sin \varphi_1 , \quad (3.9)$$

kde  $\mathbf{n}$  značí vektor v původní poloze. Pro diferenciálně malý úhel rotace  $d\varphi_1$  se může rovnice upravit na tvar [1]

$$\mathbf{n}_{d\varphi_1} = \mathbf{n} + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{n}) d\varphi_1 . \quad (3.10)$$

A potom platí, že směrový vektor odraženého paprsku po natočení odrazné plochy

$$\mathbf{R}_{r_2} = \mathbf{R}_i - 2\mathbf{n}_{\varphi_1} (\mathbf{n}_{\varphi_1} \cdot \mathbf{R}_i) . \quad (3.11)$$

Je-li pro pokrytí širokého zorného pole využívána druhá rotace podél další osy, zpravidla osy  $z$ , platí pro jednotkový směrový vektor  $\mathbf{R}_{r_3}$  závislost

$$\mathbf{R}_{r_3}^T = \mathbf{R}_z(\varphi_2) \mathbf{R}_{r_2}^T , \quad (3.12)$$

kde  $\mathbf{R}_z(\varphi_2)$  je matice rotace kolem osy  $z$  o úhel  $\varphi_2$  daná vztahem [47]

$$\mathbf{R}_z(\varphi_2) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.13)$$

Polohový vektor skenovaného bodu  $Q$  lze zapsat jako

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_P + \rho_2 \mathbf{R}_{r_3} , \quad (3.14)$$

kde  $\rho_2$  se vypočítá na základě měřené vzdálenosti  $D$  dle podkapitoly 2.2 na stránce 15, platí

$$\rho_2 = \frac{D - 2\rho_1}{2}, \quad (3.15)$$

kde  $\rho_2$  je vzdálenost mezi body P a Q,  $\rho_1$  je vzdálenost mezi body O a P,  $D$  je měřená vzdálenost přístrojem.

Je-li definovaná detekční rovina  $\xi$ , lze ze souřadnic bodu odrazu P, směrového vektoru  $\mathbf{R}_{r_1}$  a předpisu této roviny vypočítat polohu bodu dopadu. Modeluje se tak rozsah a stopa skeneru. Více je tato problematika popsána například v [1, 21, 46, 48].

### 3.1.1 Určení polohy svazku pro vybrané rozmítací systémy

Konstrukce jedno-zrcadlových systémů je schématicky vyobrazena na obr. 3.2. Definujeme-li odraznou plochu  $\epsilon$  bodem B, kde  $\mathbf{r}_B = [0 \ 0 \ 0]$ , a normálovým vektorem  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 0 \ 1]$ , dále zdroj záření O, kde  $\mathbf{r}_O = [1 \ 0 \ 0]$ , tak záření ve směru  $\mathbf{R}_i = [-1 \ 0 \ 0]$  od zdroje bude dopadat na odraznou plochu (3.4) v bodě P, kde  $\mathbf{r}_P = [0 \ 0 \ 0]$ . Dále se bude odrážet dle (3.8). V tomto případě tak vektor  $\mathbf{R}_{r_1} = [0 \ 0 \ 1]$ .

Uvážíme-li situaci, kdy je odrazná plocha otočena o úhel  $\varphi_1 = 90^\circ$  kolem osy  $\mathbf{a}_1 = [1 \ 0 \ 0]$ , tak ze (3.9) vypočítáme vektor  $\mathbf{R}_{r_2} = [0 \ -1 \ 0]$ . Rotuje-li celý přístroj kolem vertikální osy o úhel  $\varphi_2 = 90^\circ$ , můžeme vypočítat pomocí (3.12) směr šíření svazku  $\mathbf{R}_{r_3} = [1 \ 0 \ 0]$ . Poloha zaměřeného bodu bude dle (3.14)  $\mathbf{r}_Q = [4 \ 0 \ 0]$ , když přístroj změří vzdálenost dle (3.15)  $D = 10$ .

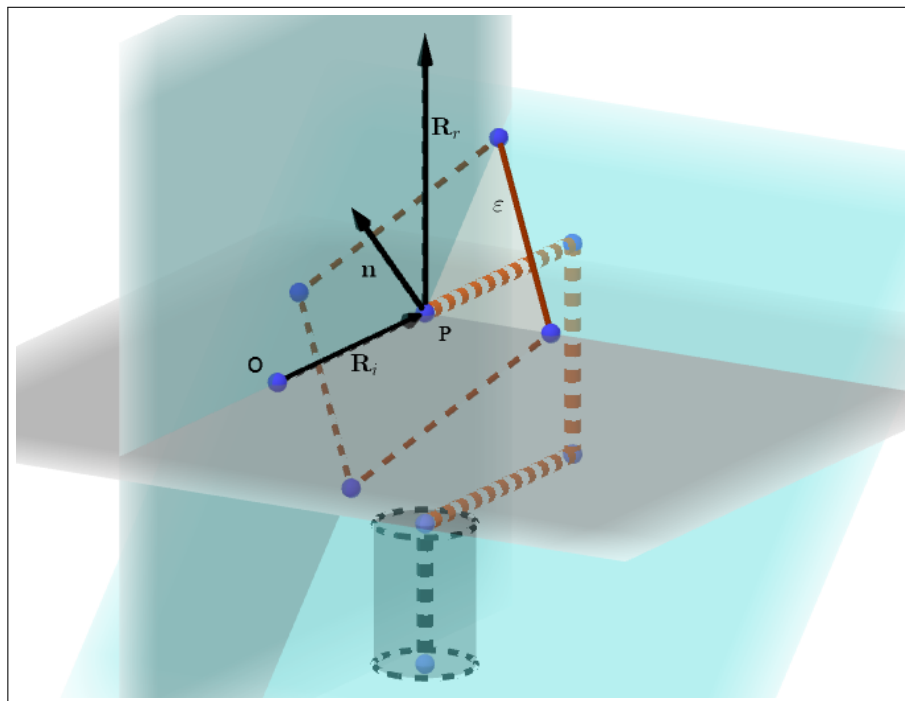
Obecný matematický popis polohy svazku u systému s monogonem je identický, jelikož se v obou případech jedná o odraznou rovinu rotující podle stejných matematických pravidel.

Situace u pyramidového (obr. 3.4) a polygonálního (obr. 3.3) systému je specifická tím, že máme více odrazných ploch. Nemůžeme počítat pouze s jedním normálovým vektorem (který by se otáčel kolem osy), protože vlivem otáčení hranolu by si odrazné plochy stínily a výsledky by nebyly aplikovatelné. Proto musíme uvažovat stín, který se pro (obr. 3.3) opakuje vždy po otočení hranolu o úhel  $\varphi_1 = 45^\circ$  okolo osy  $y$ .

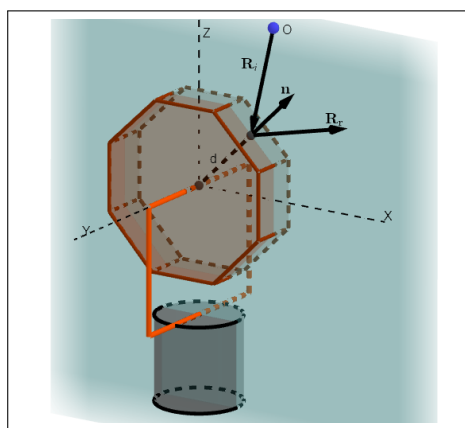
Na obr. 3.3 je vyobrazena fáze skenování, kdy paprsek ze zdroje dopadá do středu odrazné plochy. Normálový vektor je tak  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 0 \ 1]$ . Pootočí-li se hranol o  $\varphi_1 = 22,5^\circ$ , tak se bude paprsek odrážet na krají této plochy. Normálový vektor tak bude  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} [2 \ 0 \ 1]$ . Vzápětí se paprsek začne odrážet od plochy následující. Hodnota normálového vektoru se tak náhle změní na  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} [1 \ 0 \ 2]$ . Po otočení hranolu o dalších  $\varphi_1 = 45^\circ$  se bude cyklus znovu opakovat. Teoretický rozsah odrazu paprsku z jedné plochy pravidelného šestibokého hranolu je tak



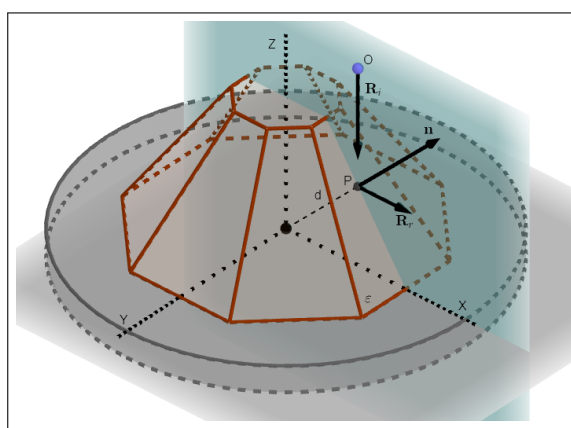
45°. Tomu v praxi není, protože styk dvou ploch není dokonalý. Tato chyba by se projevila i v měřených datech, a proto se měření při styku ploch neuskutečňuje. Rozsah odrazu z jednotlivých plošek je pak nepatrně menší, než teoretický.



Obrázek 3.2: Poloha svazku u jedno-zrcadlových soustav



Obrázek 3.3: Poloha svazku u polygonálních soustav



Obrázek 3.4: Poloha svazku u pyramidových soustav

# Kapitola 4

## Indexová chyba

V rámci klasické geodézie se indexovou chybou rozumí systematická chyba způsobená nesprávnou polohou počátku měřítka nebo odečítací pomůcky, např. nevodorností (nesvislostí) odečítacího indexu při měření zenitových úhlů [12, 24, 49]. Na měření prostorovým optickým skenerem se projevuje konstantní systematickou chybou ve čtení vertikálního úhlu. Mechanicky může být chyba způsobena například nesprávným určením vnitřní polohy odrazné plochy, natočením odrazné plochy atp.

Pro příklad předpokládejme vodorovnou záměru  $\zeta = 100$  gon o délce  $d = 30$  m. Rozdíl výšek určovaného bodu a středu přístroje (převýšení) můžeme přibližně vypočítat ze vztahu obloukové míry. Pro převýšení (a měření v gonech) poté platí

$$\Delta h = (100^{\text{gon}} - \zeta) \cdot d \cdot \rho, \quad \rho = \frac{\pi}{200}. \quad (4.1)$$

Rozdíl výšek tak bude  $\Delta h = 0$  mm. Bude-li přístroj měřit s indexovou chybou  $c_0 = 0,011$  gon, rozdíl výšek bude  $\Delta h = 5$  mm.

Uvažujme situaci, kdy máme prostorovou polohu  $i$ -tého bodu definovanou kartézskými souřadnicemi. Jeho polární souřadnice budou ze sférické trigonometrie [21, 46]

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \\ \lambda_i &= \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right), \\ \zeta_i &= \arctan\left(\frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}{z_i}\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Souřadnice bodu s indexovou chybou pak budou

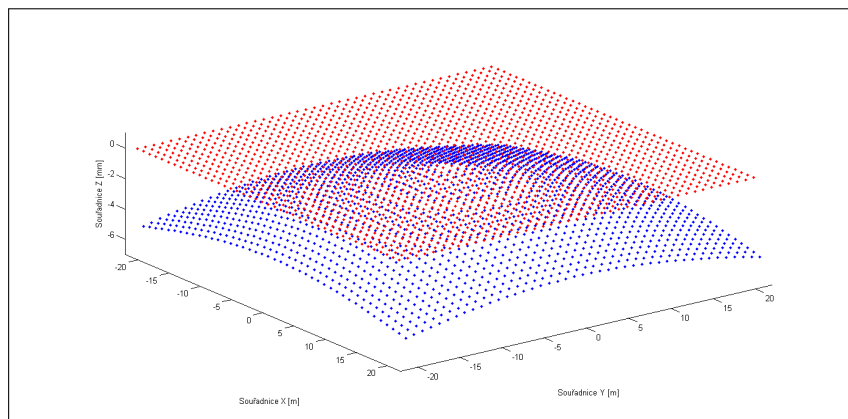
$$\begin{aligned}x_m &= r_i \sin \zeta_m \cos \lambda_i, \\y_m &= r_i \sin \zeta_m \sin \lambda_i, \\z_m &= r_i \cos \zeta_m,\end{aligned}\tag{4.3}$$

kde  $\zeta_m = \zeta_i - c_0$ .

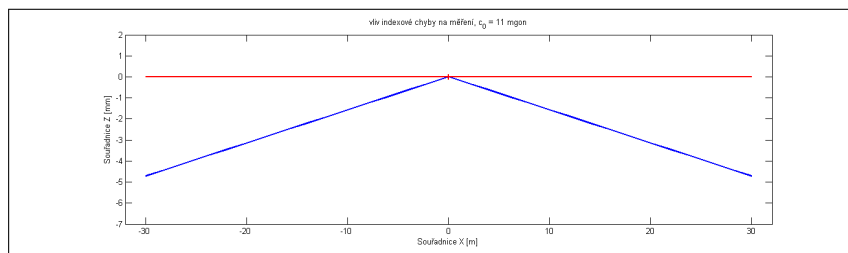
Pomocí těchto rovnic (4.2) a (4.3) se pak dají modelovat i jiné chyby, které mohou ovlivnit měření pozemními optickým skenery. Více je tato problematika rozebrána například v [25–27].

Vliv indexové chyby na body měřené pod vodorovnou záměrou byl namodelován v programu MATLAB [50] (obr. 4.1). Zde je patrný rozdíl plochy s indexovou chybou  $c_0 = 0$  gon (červené body) a plochy s indexovou chybou  $c_0 = 0,011$  gon (modré body).

Pro zřetelnost vývoje chyby vzhledem ke vzdálenosti záměry byl vytvořený řez (obr. 4.2) 3D modelu (obr. 4.1). Zde je na horizontální ose vyznačena vzdálenost od středu přístroje a na vertikální ose výškový rozdíl při chybě  $c_0 = 0,011$  gon.



Obrázek 4.1: 3D model vlivu indexové chyby na měření



Obrázek 4.2: 2D model vlivu indexové chyby na měření

# Kapitola 5

## Model měření

### 5.1 Obecný model měření

Předpokládejme, že zdrojem záření v prostorovém optickém skeneru je generován svazek paprsků, který se prostředím šíří přímočaře, a můžeme tak použít geometrickou aproximaci přímkou (uvažujeme homogenní izotropní prostředí [38, 44], ve kterém probíhá měření). Tuto aproximaci můžeme uvažovat pro malé teplotní a tlakové gradienty okolního prostředí nebo poměrně krátké vzdálenosti. Záměrný paprsek prochází optickou soustavou skeneru a rozmítacím zařízením a pokračuje k měřenému předmětu v předem jasně definovaném směru a z jednoznačně určeného bodu.

Místo a směr výstupního paprsku jsou dané v závislosti na použitém rozmítacím zařízením a mechanické konstrukci. Nejčastěji se používají polygonální hranoly, odrazná zrcátka, monogony, apod. [2, 5, 38]. V rámci uvažovaného modelu se nebudeme zabývat trasováním záměrného paprsku optickou soustavou (viz např. [2, 4]), ale uvažujeme, že místo a směr, ve kterém paprsek opouští skener, jsou známy. Pomocí vhodných záměrných zařízení jsou poté měřeny směry v horizontálním a vertikálním směru a vzdálenost k bodu zájmu.

Uvažujme situaci zobrazenou na obr. 5.1a. Vektor  $\mathbf{r}_G$  je polohový vektor bodu zájmu T v globální souřadné soustavě  $(x_G, y_G, z_G)$ , vektor  $\mathbf{r}_S$  je polohový vektor bodu v lokální souřadné soustavě  $(x_S, y_S, z_S)$  (v soustavě skeneru), vektor  $\mathbf{s}$  je polohový vektor počátku  $O_S$  lokální soustavy skeneru v globální souřadné soustavě. Transformaci souřadnic mezi zmíněnými souřadnými systémy můžeme vyjádřit jako [21]

$$\mathbf{r}'_G = \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}'_S, \quad (5.1)$$

kde apostrof u polohových vektorů značí doplnění na polohový čtyřvektor, jehož

čtvrtým prvkem je 1, a pro matici transformace  $\mathbf{T}$  platí

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\alpha_z) \cdot \mathbf{R}_y(\alpha_y) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_x) & \begin{matrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

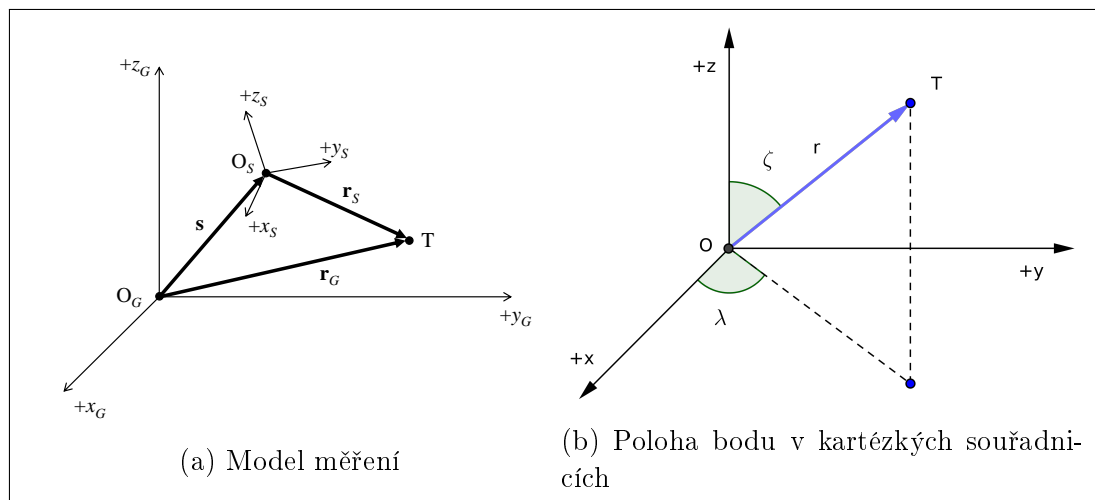
kde  $s_x$ ,  $s_y$  a  $s_z$  jsou prvky vektoru  $\mathbf{s}$  a matice  $\mathbf{R}_x(\alpha_x)$ ,  $\mathbf{R}_y(\alpha_y)$  a  $\mathbf{R}_z(\alpha_z)$  jsou matice rotací kolem souřadných os  $x$ ,  $y$  a  $z$ , které definují natočení souřadné soustavy  $S$  vzhledem k soustavě  $G$  a jsou dány vztahy [47]

$$\mathbf{R}_x(\alpha_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \\ 0 & \sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\alpha_y) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & \sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_z(\alpha_z) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ \sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Kartézské souřadnice v soustavě skeneru můžeme vyjádřit pomocí polárních souřadnic  $(r, \lambda, \zeta)$  viz obr. 5.1b, platí [21]

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} r \sin \zeta \cos \lambda \\ r \sin \zeta \sin \lambda \\ r \cos \zeta \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Při skenování jsou polární souřadnice měřeny s chybou (systematickou a náhodnou). Skutečnou (správnou) hodnotu tak nikdy neznáme. Každé z  $i$ -tého měření v



Obrázek 5.1: Model měření a poloha bodu v kartézských souřadnicích

soustavě  $S$  poté můžeme zapsat obecně jako [25–27]

$$r_i + v_{r,i} = \sqrt{x_{S,i}^2 + y_{S,i}^2 + z_{S,i}^2} + \Delta r, \quad (5.5)$$

$$\lambda_i + v_{\lambda,i} = \arctan\left(\frac{y_{S,i}}{x_{S,i}}\right) + \Delta\lambda, \quad (5.6)$$

$$\zeta_i + v_{\zeta,i} = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_{S,i}^2 + y_{S,i}^2}}{z_{S,i}}\right) + \Delta\zeta, \quad (5.7)$$

kde  $v$  značí residua a  $\Delta$  zahrnuje systematické a náhodné chyby měření [24–32], tj. můžeme formálně psát  $\Delta = \Delta_n + \Delta_s$ .

Pro další potřeby práce předpokládejme, že se v měření bude vyskytovat pouze systematická složka, tedy  $\Delta_n = 0$  pro všechny typy měření.

Vliv systematických chyb můžeme vyjádřit (modelovat) různými způsoby, které vhodně dané chyby reprezentují. Tvar funkčních závislostí je odvozován na základě teoretických analýz nebo empirických pozorování [25–32]. Základními dodatečnými parametry ovlivňující kvalitu měření jsou zpravidla [24–32]: konstantní chyba měření vzdálenosti  $a_0$ , kolimační chyba a úklonná chyba  $b_1$  a  $b_2$ , a indexová chyba vertikálního směru  $c_0$ , jejichž vliv můžeme psát jako [25–27]

$$\Delta r = a_0, \quad \Delta\lambda = b_1 \csc \zeta_i + b_2 \cot \zeta_i, \quad \Delta\zeta = c_0. \quad (5.8)$$

V některých případech velmi přesných měření lze modelovat vliv dodatečných parametrů složitějšími vztahy, např. pro chybu vertikálního směru lze psát [25–27]

$$\Delta\zeta = c_0 + c_1\zeta_i + c_2 \cos \zeta + c_3 \sin(3\lambda_i), \quad (5.9)$$

kde  $c_0$  je indexová chyba vertikálního směru,  $c_1$  vyjadřuje lineární chybu čtení,  $c_2$  poté vliv excentricity středu odečítacího kruhu vertikálních směrů a  $c_3$  je dodatečný empirický koeficient sinusoidální chyby s periodou  $2\pi/3$ .

## 5.2 Model měření pro kalibraci vertikální indexové chyby

Zabývejme se nyní definicí modelu pro kalibraci vertikální indexové chyby. Předpokládejme, že v rámci měření nejsou přítomné nahodilé chyby, ale pouze jedna systematická chyba – konstantní vertikální indexová, tj. platí  $\Delta r = 0$ ,  $\Delta\lambda = 0$  a  $\Delta\zeta = c_0$ . Označíme-li indexem  $m$  přímo měřené hodnoty, poté platí  $r_m = r$ ,  $\lambda_m = \lambda$ ,  $\zeta_m = \zeta + c_0$ . Vektor měřených souřadnic v soustavě skeneru můžeme poté

zapsat úpravou (5.4) jako

$$\mathbf{r}_{S,m} = r_m \begin{bmatrix} \sin \zeta_m \cos \lambda_m \\ \sin \zeta_m \sin \lambda_m \\ \cos \zeta_m \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Vektor v soustavě skeneru bez vlivu vertikální indexové chyby poté může být vyjádřen (uvážíme-li výše zmíněné předpoklady na další systematické chyby měření) pomocí přímo měřených veličin  $r_m$ ,  $\zeta_m$  a  $\lambda_m$  jako

$$\mathbf{r}_S = r_m \begin{bmatrix} \sin(\zeta_m - c_0) \cos \lambda_m \\ \sin(\zeta_m - c_0) \sin \lambda_m \\ \cos(\zeta_m - c_0) \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

kde platí obdobně jako v (5.5)

$$r_m = \sqrt{x_{S,m}^2 + y_{S,m}^2 + z_{S,m}^2}, \quad (5.12)$$

$$\lambda_m = \arctan\left(\frac{y_{S,m}}{x_{S,m}}\right), \quad (5.13)$$

$$\zeta_m = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_{S,m}^2 + y_{S,m}^2}}{z_{S,m}}\right). \quad (5.14)$$

Dosazením do (5.1) poté dostáváme pro vzájemný vztah mezi souřadnicemi bodu v globálním systému  $G$  a systému skeneru  $S$  soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\alpha_z) \cdot \mathbf{R}_y(\alpha_y) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_x) & s_x \\ & s_y \\ & s_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_m \sin(\zeta_m - c_0) \cos \lambda_m \\ r_m \sin(\zeta_m - c_0) \sin \lambda_m \\ r_m \cos(\zeta_m - c_0) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Odečtením levé a pravé strany poté dostáváme výraz pro vektor reziduí  $\mathbf{E}$  pro měření jednoho bodu, platí (po doplnění na čtyřvektor)

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\alpha_z) \cdot \mathbf{R}_y(\alpha_y) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_x) & s_x \\ & s_y \\ & s_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_m \sin(\zeta_m - c_0) \cos \lambda_m \\ r_m \sin(\zeta_m - c_0) \sin \lambda_m \\ r_m \cos(\zeta_m - c_0) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Vektor reziduí  $\mathbf{E}$  bude v reálném případě měření nenulový, jelikož budou přítomny vedle systematické vertikální indexové chyby také chyby nahodilé. Cílem kalibračního postupu je poté nalezení takové hodnoty konstanty  $c_0$ , pro kterou bude suma všech velikostí reziduí, které jsou vyjádřeny pomocí (5.16), minimální. K tomu lze použít například vhodného optimalizačního algoritmu [51].

# Kapitola 6

## Numerická kalibrace vertikální indexové chyby

V této části práce se budeme zabývat případem kalibrace na kalibračním poli, tj. situací, kdy je množina bodů polohově určena jak v soustavě skeneru  $S$ , tak v globální soustavě  $G$  a tyto body jsou jednoznačně vzájemně přiřazeny. Prostorové určení bodů v globální soustavě  $G$  musí být známo s výrazně vyšší přesností, aby zajistilo co největší potlačení nežádoucích nahodilých chyb měření skenerem.

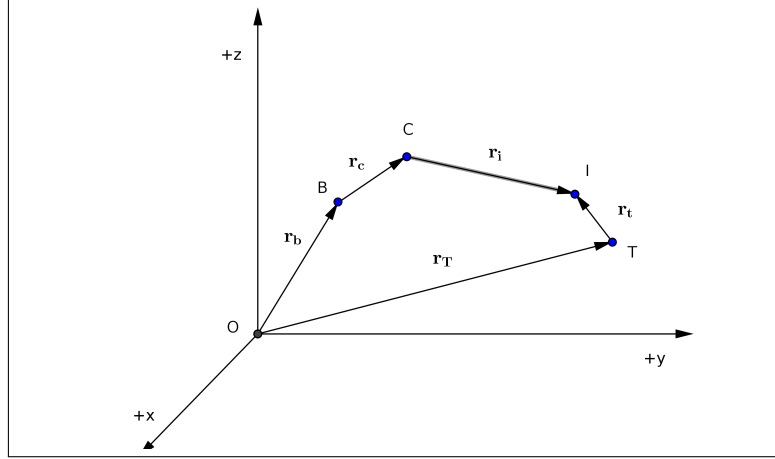
Pro dosažení požadované přesnosti zaměření kalibračního pole byl vypočítán model přesnosti (kap. 6.1). V dalších kapitolách je zde teoreticky představen výpočet indexové chyby optimalizační metodou (kap. 6.2) a metodou nejmenších čtverců (kap. 6.3). Následuje výpočet nejistot zjištěné indexové chyby (kap. 6.4).

### 6.1 Chybový model prostorové polární metody

Pro zjištění požadavků na měření byl sestaven chybový model situace. Měření prostorovým skenerem lze popsat jako vysokofrekvenční realizaci měření prostorových polárních souřadnic. Na obr. 6.1 je zobrazeno schéma polohového určování bodů.

Předpokládejme, že stanoviskem měření je bod  $B$  a určujeme polohu bodu  $T$ . Počátek souřadného systému přístroje, ve kterém měříme, nebude identický s bodem podkladu  $B$ , ale bude dán bodem  $C$ . Měřený cíl  $T$  není obecně přesně identifikován. Polohu terče (místo identifikace cíle) označme  $I$ . Vliv na prostorové určení bodu  $T$  je tedy dán (viz obr. 6.1): nejistotou polohy  $\mathbf{r}_b$  bodu podkladu; vlivem nejistot z centrace přístroje, které lze charakterizovat vektorem  $\mathbf{r}_c$  (resp. nejistotou v určení reálného počátku souřadné soustavy přístroje), nejistotou v přímo měřených prostorových polárních souřadnic ( $\zeta$ ,  $\lambda$  a  $r$ ), které se projeví na hodnotách vektorem  $\mathbf{r}_i$ ; a také nejistotou v umístění terče (resp. správnou identifikací





Obrázek 6.1: Schéma chybového modelu

cíle), kterou můžeme popsat nejistotou vektoru  $\mathbf{r}_t$ .

Polohu cíle T tedy můžeme dle obr. 6.1 vyjádřit polohovým vektorem  $\mathbf{r}_T$ , pro který platí

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_b + \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_t, \quad \mathbf{r}_i = [r \sin \zeta \cos \lambda, \quad r \sin \zeta \sin \lambda, \quad r \cos \zeta]^T. \quad (6.1)$$

Nejistotu určení polohy bodu T můžeme charakterizovat kovarianční maticí [22, 23, 52] složek vektoru  $\mathbf{r}_T$ . Označíme-li  $\Sigma_b$  jako kovarianční matici kvality bodu podkladu,  $\Sigma_c$  jako kovarianční matici kvality centrace,  $\Sigma_i$  jako kovarianční matici kvality měření a  $\Sigma_t$  jako kovarianční matici kvality stabilizace bodů (identifikace cíle), poté je kovarianční matice určovaného bodu  $\Sigma_T$  polohy bodu T dána pomocí zákona přenášení kovariancí jako [22, 23, 52]

$$\Sigma_T = \mathbf{J} \Sigma_J \mathbf{J}^T, \quad (6.2)$$

kde  $\mathbf{J}$  je Jakobiho matice prvních derivací modelu,

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_b \quad \mathbf{J}_c \quad \mathbf{J}_i \quad -\mathbf{J}_t],$$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \sin \zeta \cos \lambda & r \cos \zeta \cos \lambda & -r \sin \zeta \sin \lambda \\ \sin \zeta \sin \lambda & r \cos \zeta \sin \lambda & r \sin \zeta \cos \lambda \\ \cos \zeta & -r \sin \zeta & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_b = \mathbf{J}_c = \mathbf{J}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a kde  $\Sigma_J$  je symetrická matice složená z výše zavedených submatic  $\Sigma_b$ ,  $\Sigma_c$ ,  $\Sigma_i$  a  $\Sigma_t$ , platí

$$\Sigma_J = \begin{bmatrix} \Sigma_b^{(3 \times 3)} & \mathbf{0}^{(3 \times 3)} & \mathbf{0}^{(3 \times 3)} & \mathbf{0}^{(3 \times 3)} \\ & \Sigma_c^{(3 \times 3)} & \mathbf{0}^{(3 \times 3)} & \mathbf{0}^{(3 \times 3)} \\ & & \Sigma_i^{(3 \times 3)} & \mathbf{0}^{(3 \times 3)} \\ & & & \Sigma_t^{(3 \times 3)} \end{bmatrix}.$$

Pomocí výše představených vztahů můžeme snadno modelovat vliv nejistot zmíněných veličin na polohu určovaného bodu. Tohoto postupu bude dále využito při praktické realizaci a rozboru chyb.

## 6.2 Řešení kalibrace vertikální indexové chyby pomocí optimalizačních algoritmů

Optimalizační algoritmy [50, 51, 53–56] jsou velmi silné numerické nástroje, které v principu hledají hodnoty proměnných, pro které je hodnota vhodně nadefinované tzv. cílové (meritní) funkce minimální. Cílovou funkcí můžeme obecně z pohledu softwarového řešení rozumět naprogramovaný proces, který popisuje řadu reálných aplikací, ve kterém vystupují proměnné, jejichž hodnoty hledáme, a který vrací jednu hodnotu, jejíž minimum požadujeme (např. suma čtverců odchylek, suma absolutních hodnot, apod.). Metod nalezení optimálních hodnot parametrů je celá řada [51, 53, 54] a velmi často jsou algoritmy implementovány do výpočetních softwarů jako např. MATLAB [50].

V praxi se optimalizační algoritmy používají např. pro návrhy optimálních řešení ve strojírenství [55], automobilovém průmyslu [56], návrhu optických soustav [38, 44], a dalších aplikacích.

Zabývejme se nyní definicí vhodné cílové funkce pro kalibraci vertikální indexové chyby prostorového skeneru. K tomu využijeme v předchozí kapitole představený model měření (5.15) a vektor residuí pro jeden bod zájmu (5.16).

Uvažujme, že známe referenční hodnoty souřadnic množiny bodů v globálním systému  $G$ , tj. je dána množina polohových vektorů  $\mathbf{r}_{G,i}$ , kde  $i = 1, \dots, N$ ,  $N$  je počet měřených bodů. K nim přiřadíme měřené polohové vektory v souřadném systému skeneru  $S$ , tedy známe  $\mathbf{r}_{S,m,i}$ . Pro každý  $i$ -tý bod poté můžeme vyjádřit vektor residuí pomocí vztahu (5.16), platí

$$\mathbf{E}'_i = \mathbf{r}'_{G,i} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}'_{S,m,i}, \quad (6.3)$$

kde apostrof značí doplnění polohových vektorů na čtyřvektor, jehož čtvrtý prvek je 1. Cílovou funkci  $M$  můžeme poté definovat např. ve smyslu metody nejmenších čtverců jako [21]

$$M = \sum_{i=1}^N (\mathbf{E}'_i{}^T \cdot \mathbf{E}'_i). \quad (6.4)$$

Postup softwarové implementace cílové funkce můžeme tedy shrnout jako:

1. je dán polohový vektor  $i$ -tého bodu v globální souřadné soustavě  $G$  –  $\mathbf{r}_{G,i}$ ,

2. pokud nejsou známy přímo měřené hodnoty prostorových polárních souřadnic  $i$ -tého bodu  $(r_{m,i}, \zeta_{m,i}, \lambda_{m,i})$  v soustavě skeneru  $S$ , vypočteme je pomocí vztahů (5.12)–(5.14),
3. definujeme vektor odpovídající měření v soustavě skeneru  $S$  s opravou indexové chyby dle (5.11), kde bude vystupovat volitelný parametr  $c_0$ , jehož hodnotu bude optimalizační algoritmus hledat,
4. sestavíme rovnici rezidua pro  $i$ -tý bod dle (5.16), resp. (6.3), kde budou vystupovat další hledané (optimalizované) parametry  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, s_x, s_y, s_z)$ ,
5. sestavíme cílovou funkci  $M$  dle (6.4).

Tím je problém vytvoření vhodné cílové funkce pro kalibraci horizontální indexové chyby optického prostorového skeneru řešen. Vhodný optimalizační algoritmus bude tak hledat vhodné hodnoty sedmi parametrů  $(c_0, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, s_x, s_y, s_z)$ , resp. hledat extrém funkce sedmi proměnných.

V některých případech lze počet neznámých parametrů snížit. Budeme-li například znát orientaci skeneru, tj. správnou hodnotu úhlu  $\alpha_z$ , poté se počet hledaných parametrů omezuje na šest. V některých případech může být skener také velmi přesně horizontován, tím redukuje počet neznámých parametrů na čtyři, platí  $\alpha_x = \alpha_y = 0$ .

Úspěch optimalizačních algoritmů je založen na vhodné volbě počátečních hodnot hledaných proměnných. V praktické situaci kalibrace skeneru je možné na počátku položit hledané parametry rovny nule. Skener je zpravidla možné centrovat nebo přibližně transformovat měřené souřadnice do počátku globální souřadné soustavy. Vektor posunů  $s$  poté bude velmi malý, zpravidla v řádu milimetrů. Horizontace skeneru také zajišťuje malé úhly náklonů  $\alpha_x$  a  $\alpha_y$  a apriorní hodnota indexové chyby by také měla být nulová.

### 6.3 Řešení kalibrace vertikální indexové chyby metodou nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců (MNČ) je jedna z nejdéle používaných optimalizačních metod. Je to matematicko–statistická metoda pro aproximaci řešení soustav, kde je více rovnic než neznámých [21–23, 48, 52]. „Nejmenšími čtverci“ je myšlen součet všech odchylek na druhou vůči každé rovnici, který se snažíme minimalizovat.

Základním vztahem je stejně jako v předchozí kapitole 6.2 rovnice (6.3):

$$\mathbf{E}'_i = \mathbf{r}'_{G,i} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}'_{S,m,i}, \quad (6.5)$$

kde

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{E}'_i{}^T \cdot \mathbf{E}'_i) \quad (6.6)$$

se snažíme minimalizovat.

Vzhledem k tomu, že vztah (6.6) není lineární ve vztahu k hledaným parametrům  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, s_x, s_y, s_z, c_0)$ , je jednou z možností nalezení vyrovnaných hodnot parametrů použitím linearizace [21–23, 48, 52]. S využitím Taylorova rozvoje [21, 48] poté můžeme psát

$$\mathbf{E}'(\mathbf{q}_0 + \mathbf{dq}) = \mathbf{E}'(\mathbf{q}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{E}'(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \cdot \mathbf{dq} + \frac{1}{2} \mathbf{dq}^T \cdot \left. \frac{\partial^2 \mathbf{E}'(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \cdot \mathbf{dq} + \dots \quad (6.7)$$

Zanedbáme-li nelineární členy rozvoje (6.7) (druhé a vyšší derivace), tak lze toto vyjádření upravit na tvar

$$\mathbf{E}'(\mathbf{q}_0 + \mathbf{dq}) \approx \mathbf{A} \cdot \mathbf{dq} - \mathbf{l}, \quad (6.8)$$

kde  $\mathbf{q}_0$  je vektor počátečních hodnot hledaných parametrů,  $\mathbf{dq}$  je vektor přírůstků parametrů,  $\mathbf{A}$  je matice parciálních derivací funkcí podle jednotlivých hledaných parametrů (Jakobiho matice) [21–23, 48, 52] a  $\mathbf{l}$  je tzv. vektor redukovaných měření [52],

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_x} & \frac{\partial f_1}{\partial s_y} & \frac{\partial f_1}{\partial s_z} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_y} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_z} & \frac{\partial f_1}{\partial c_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_x} & \frac{\partial f_2}{\partial s_y} & \frac{\partial f_2}{\partial s_z} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_y} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_z} & \frac{\partial f_2}{\partial c_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_x} & \frac{\partial f_n}{\partial s_y} & \frac{\partial f_n}{\partial s_z} & \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_y} & \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_z} & \frac{\partial f_n}{\partial c_0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} s_{x,0} \\ s_{y,0} \\ s_{z,0} \\ \alpha_{x,0} \\ \alpha_{y,0} \\ \alpha_{z,0} \\ c_{0,0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{dq} = \begin{bmatrix} ds_x \\ ds_y \\ ds_z \\ d\alpha_x \\ d\alpha_y \\ d\alpha_z \\ dc_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = -\mathbf{E}'(\mathbf{q}_0).$$

Lze ukázat, že minimalizací (6.8) můžeme určit vyrovnané hodnoty  $\hat{\mathbf{q}}$  hledaných parametrů dle vztahu [21–23, 48, 52]

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{d}\hat{\mathbf{q}}, \quad (6.9)$$

kde

$$\mathbf{d}\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{l}). \quad (6.10)$$

Jednotlivé parciální derivace v Jakobihovi matici  $\mathbf{A}$  lze vyčíslit například použitím symbolického toolboxu v softwaru MATLAB [50].

Aposteriorní odhad kovarianční matice vypočtených parametrů poté můžeme určit ze zákona přenášení variancí jako [21–23, 52]

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{q}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1}, \quad (6.11)$$

kde

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{1})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{1})}{N - K}, \quad (6.12)$$

kde  $N$  je počet měření (počet rovnic soustavy (6.8)) a  $K$  značí počet určovaných parametrů, v tomto případě  $K = 7$ .

Odhad směrodatných odchylek vypočtených parametrů je poté dán odmocninou z diagonálních prvků kovarianční matice  $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{q}}$  dané vztahem (6.11).

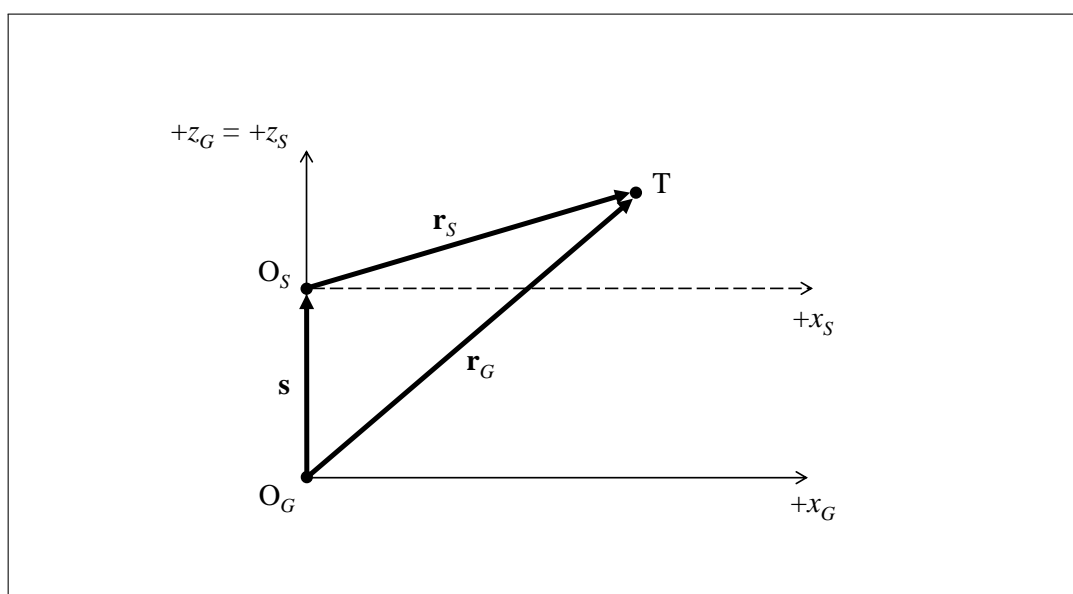
Postup softwarové implementace je tedy následující:

1. je dán polohový vektor  $i$ -tého bodu v globální souřadné soustavě  $G - \mathbf{r}_{G,i}$ ,
2. pokud nejsou známy přímo měřené hodnoty prostorových polárních souřadnic  $i$ -tého bodu  $(r_{m,i}, \zeta_{m,i}, \lambda_{m,i})$  v soustavě skeneru  $S$ , vypočteme je pomocí vztahů (5.12)–(5.14),
3. definujeme vektor odpovídající měření v soustavě skeneru  $S$  s opravou indexové chyby dle (5.11), kde bude vystupovat parametr  $c_0$ ,
4. sestavíme rovnici rezidua pro  $i$ -tý bod dle (5.16), resp. (6.3), kde budou vystupovat další hledané parametry  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, s_x, s_y, s_z, c_0)$ ,
5. linearizujeme rovnice reziduí pomocí Taylorova rozvoje zvlášť pro všechny body a pro všechny parametry  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, s_x, s_y, s_z, c_0)$ ,
6. použijeme do matice plánu pro výpočet MNČ pouze první (lineární) členy Taylorova rozvoje (první derivace),
7. zvolíme počáteční hodnoty hledaných parametrů  $\mathbf{q}_0$ ,
8. pomocí aparátu MNČ (6.10) vypočítáme přírůstky  $\mathbf{d}\hat{\mathbf{q}}$  všech hledaných parametrů,
9. vypočítáme kovarianční matici (6.11) a z ní odhad směrodatných odchylek jednotlivých parametrů.

Jelikož je při odhadu hodnot parametrů použito linearizace původního modelu, je vhodné výpočet s nově určenými parametry opakovat a srovnáním rozdílů rozhodnout, zda pokračovat v dalším iterativním řešení.

## 6.4 Aproximativní řešení kalibrace vertikální indexové chyby iterativní metodou nejmenších čtverců

Zabývejme se nyní případem, kdy můžeme zanedbat posuny  $s_x$  a  $s_y$  a náklony skeneru  $\alpha_x$  a  $\alpha_y$ . Dále předpokládejme, že orientaci skeneru  $\alpha_z$  známe s dostatečnou přesností, která zaručuje správnou koincidence bodů v soustavě skeneru  $S$  a globální soustavě  $G$  v rámci horizontální polohy. Poté můžeme vyjádřit indexovou chybu  $c_0$  iterativním výpočtem ve smyslu nejmenších čtverců bez potřeby optimalizačních algoritmů.



Obrázek 6.2: Zjednodušený model měření

Uvažujme situaci na obr. 6.2. Dle předchozích předpokladů platí  $s_x = s_y = \alpha_x = \alpha_y = 0$  a úhel  $\alpha_z$  známe tak, že platí  $x_G = x_S$  a  $y_G = y_S$ . Úpravou vztahu (5.16) poté dostáváme pro třetí složku rezidua vztah

$$E_z = z_G - s_z - r_m \cos(\zeta_m - c_0), \quad (6.13)$$

kde  $z_G$  je vertikální souřadnice měřená v globální soustavě,  $s_z$  je posun počátku soustavy skeneru vzhledem k soustavě globální,  $r_M$  je měřená vzdálenost v soustavě skeneru a  $\zeta_m$  je měřený vertikální úhel v soustavě skeneru, které lze z kartézských souřadnic vyjádřit dle vztahů (5.12)–(5.14),  $c_0$  je konstantní vertikální indexová chyba.

Označíme-li  $c_{0,0}$  a  $s_{z,0}$  jako počáteční odhad velikosti vertikální indexové chyby a posunu ve vertikální souřadnici, poté můžeme vztah (6.13) linearizovat, použitím Taylorova rozvoje se zanedbáním nelineárních členů platí [21]

$$E_z(c_0, s_z) \approx E_z(c_{0,0}, s_{z,0}) + \left. \frac{\partial E_z(c_0, s_z)}{\partial c_0} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} \cdot dc_0 + \left. \frac{\partial E_z(c_0, s_z)}{\partial s_z} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} \cdot ds_z, \quad (6.14)$$

kde  $dc_0$  a  $ds_z$  značí změnu jednotlivých hledaných parametrů. Vztah (6.14) je pro množinu  $N$  měřených bodů vhodné vyjádřit maticově, platí

$$\mathbf{E}_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}\mathbf{q} - \mathbf{1}, \quad (6.15)$$

kde

$$\mathbf{E}_z = \begin{bmatrix} E_{z,1}(c_0, s_z) \\ E_{z,2}(c_0, s_z) \\ \vdots \\ E_{z,N}(c_0, s_z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial E_{z,1}(c_0, s_z)}{\partial c_0} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} & \left. \frac{\partial E_{z,1}(c_0, s_z)}{\partial s_z} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} \\ \left. \frac{\partial E_{z,2}(c_0, s_z)}{\partial c_0} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} & \left. \frac{\partial E_{z,2}(c_0, s_z)}{\partial s_z} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} \\ \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial E_{z,N}(c_0, s_z)}{\partial c_0} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} & \left. \frac{\partial E_{z,N}(c_0, s_z)}{\partial s_z} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} dc_0 \\ ds_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} -E_{z,1}(c_{0,0}, s_{z,0}) \\ -E_{z,2}(c_{0,0}, s_{z,0}) \\ \vdots \\ -E_{z,N}(c_{0,0}, s_{z,0}) \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

kde

$$\left. \frac{\partial E_{z,i}(c_0, s_z)}{\partial c_0} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} = -r_{m,i} \sin(\zeta_{m,i} - c_{0,0}), \quad (6.17)$$

$$\left. \frac{\partial E_{z,i}(c_0, s_z)}{\partial s_z} \right|_{c_0=c_{0,0}, s_z=s_{z,0}} = -1, \quad (6.18)$$

$$E_{z,i}(c_{0,0}, s_{z,0}) = z_{G,i} - s_{z,0} - r_{m,i} \cos(\zeta_{m,i} - c_{0,0}), \quad (6.19)$$

$$r_{m,i} = \sqrt{x_{S,m,i}^2 + y_{S,m,i}^2 + z_{S,m,i}^2}, \quad (6.20)$$

$$\zeta_{m,i} = \arctan \left( \frac{\sqrt{x_{S,m,i}^2 + y_{S,m,i}^2}}{z_{S,m,i}} \right). \quad (6.21)$$

Hodnoty změn  $dc_0$  a  $ds_z$  hledaných parametrů  $c_0$  a  $s_z$  oproti jejich předpokládaným apriorním hodnotám  $c_{0,0}$  a  $s_{z,0}$  odhadneme poté pomocí metody nejmenších čtverců [21–23, 52], platí

$$\mathbf{d}\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{1}). \quad (6.22)$$

Aposteriorní odhad kovarianční matice vypočtených parametrů poté můžeme určit ze zákona přenášení variancí jako [21–23, 52]

$$\Sigma_{\mathbf{q}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1}, \quad (6.23)$$

kde

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{1})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{1})}{N - 2}. \quad (6.24)$$

Odhad směrodatných odchylek vypočtených parametrů je poté dán odmocninou z diagonálních prvků kovarianční matice  $\Sigma_{\mathbf{q}}$  dané vztahem (6.23).

Jelikož je výše zmíněný výpočet založen na počáteční volbě hledaných parametrů, je vhodné provést několik iterací výpočtu tak, aby se hodnoty hledaných parametrů nelišily o více než předem zvolenou tolerovanou hodnotu.

Aproximativní výpočet kalibrace vertikální indexové chyby iterativní metodou nejmenších čtverců tedy můžeme shrnout následovně

1. zvolíme počáteční hodnoty hledaných parametrů  $c_0$  a  $s_z$ , zpravidla  $c_{0,0} = s_{z,0} = 0$ ,
2. pro  $N$  měřených bodů vyčíslíme linearizovaný model (6.15) pomocí vztahů (6.16)–(6.21),
3. pomocí vztahu (6.22) určíme odhad změny  $dc_0$  a  $ds_z$  hledaných parametrů  $c_0$  a  $s_z$  oproti jejich předpokládaným apriorním hodnotám  $c_{0,0}$  a  $s_{z,0}$ ,
4. nové hodnoty parametrů budou dány jako

$$c_0 = c_{0,0} + dc_0, \quad s_z = s_{z,0} + ds_{z,0}, \quad (6.25)$$

které použijeme jako vstupní hodnoty pro další iteraci,

5. vyčíslíme hodnoty residuí (6.15) s nově vypočtenými parametry  $c_0$  a  $s_z$  a opakujeme výpočet změn  $dc_0$  a  $ds_z$ ; pokud budou menší než tolerovaná hodnota, výpočet ukončíme, pokud ne, výpočet iterativně opakujeme,
6. odhad směrodatných odchylek vypočtených parametrů získáme z kovarianční matice (6.23) vyčíslené při první iteraci.

Tím je problém odhadu velikosti vertikální indexové chyby řešen.



## Kapitola 7

# Praktická realizace kalibračního pole a výpočtu indexové chyby

Tato kapitola pojednává o volbě vhodných měřicích přístrojů, metody pro zjištění velikosti indexové chyby, návržení kalibračního pole a popis jeho zaměření. Dále je zde rozvinuto řešení výpočtů a popis vlivu indexové chyby na vybraný digitální model terénu (DMT). V závěru kapitoly jsou porovnány DMT před a po zavedení opravy indexové chyby.

Uvažujme situaci, kdy je prostorový skener kalibrován zejména pro přesné zaměření povrchu zpevněných vozovek, kde je vyžadována vysoká výšková přesnost. V praxi je DMT povrchu vozovek vytvářeno ze série skenů (mračen bodů), které jsou měřeny do vzdálenosti 30 m [33].

Vzhledem k výše zmíněné uvažované aplikaci bylo kalibrační pole realizováno ve tvaru kříže o maximální délce ramene 50 m s rozstupem jednotlivých bodů 5 m. Tím jsou pokryty všechny čtyři kvadranty skenované oblasti.

### 7.1 Rozbor chyb před měřením

Pro přesné zaměření kalibračního pole bylo navrženo použití přístrojů: totální stanice Leica TCRP1203+ [6], nivelační přístroj Leica LS15 [6]. Vertikální indexová chyba byla určována pro skener Riegl VZ-400 [7]. Přesnost (směrodatná odchylka) přímo měřených veličin u zmíněných přístrojů deklarovaná výrobcem je uvedena v tab. 7.1.

Pro rozbor přesnosti před měřením uvažujme situaci, kdy je stanovisko položeně umístěno v počátku souřadné soustavy a jeho výška  $h$  bude 3 m (přibližná výška skeneru umístěného na měřicím vozidle). Dále bez újmy na obecnosti před-

Tabulka 7.1: Výrobce deklarovaná přesnost přístrojů

přístroj	značka	typ	$\sigma_r$	$\sigma_\zeta$	$\sigma_\lambda$
skener	Riegl	VZ-400	5 mm	0.45 mgon	0.45 mgon
totální stanice	Leica	TCRP1203+	3 mm	0.30 mgon	0.30 mgon

pokládejme rozmístění měřených bodů po ose  $x$  (tj.  $\lambda = 0, r = \sqrt{x^2 + h^2}$ ). Odpovídající zenitové úhly získáme tedy snadno jako [21]

$$\zeta_i = \arctan\left(\frac{x_i}{-h}\right), \quad (7.1)$$

kde  $x_i$  je vodorovná vzdálenost  $i$ -tého bodu od stanoviska. Nejistota centrace (směrodatná odchylka ve směru souřadné osy) je odhadována na  $\sigma_c = 0,5$  mm, kvalita stabilizace cílů poté jako  $\sigma_t = 1$  mm. Kvalita podkadu je uvažována jako bezchybná ( $\sigma_b = 0$ ).

Z výše uvedených směrodatných odchylek byly sestaveny kovarianční matice  $\Sigma_b, \Sigma_c, \Sigma_i$  a  $\Sigma_t$  viz kapitola 6.1 (uvažované proměnné můžeme považovat za nezávislé, kovarianční matice budou tedy diagonální, kde na diagonále budou čtverce uvažovaných směrodatných odchylek [52]). Pro konkrétní měřené hodnoty poté dle vztahu (6.2) provedeme odhad nejistot horizontální polohy  $\sigma_{xyT}$  bodu T zvlášť pro totální stanici ( $\sigma_{xyTt}$ ) a skener ( $\sigma_{xyTs}$ ). Platí  $\sigma_{xyT} = \sqrt{0.5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}$  [52], kde  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$  získáme odmocninou z prvních dvou diagonálních prvků kovarianční matice  $\Sigma_T$ . Jejich porovnáním zjistíme, zda-li je přesnost určení bodů totální stanicí dostačující. Numerické řešení je ukázáno v tab. 7.2. Je zřejmé, že polohová přesnost souřadnic určených totální stanicí je vyšší než určení skenerem ( $\sigma_{xyTs} > \sigma_{xyTt}$ ), takže polohové měření můžeme realizovat totální stanicí v jedné poloze.

Tabulka 7.2: Odhad přesnosti bodů v poloze určených skenerem a totální stanicí (TS)

souřadnice $x$	5 m	10 m	15 m	20 m	25 m
skener $\sigma_{xyTs}$	3,2 mm	3,6 mm	3,6 mm	3,7 mm	3,7 mm
TS $\sigma_{xyTt}$	2,1 mm	2,3 mm	2,4 mm	2,4 mm	2,4 mm
souřadnice $x$	30 m	35 m	40 m	45 m	50 m
skener $\sigma_{xyTs}$	3,7 mm	3,7 mm	3,7 mm	3,7 mm	3,7 mm
TS $\sigma_{xyTt}$	2,4 mm	2,4 mm	2,4 mm	2,4 mm	2,4 mm

Měření výšek bude probíhat plošnou nivelací (všechny záměry jsou bočně) elektronickým nivelačním přístrojem s invarovou laťí. Dle dokumentace je střední kilometrová chyba zvoleného nivelačního přístroje  $\sigma_h = 0,2 - 0,3$  mm (směrodatná odchylka obousměrné nivelace na vzdálenost 1 km), a tedy pro vzdálenost 50 m dostáváme odhad nejistoty jedné záměry  $\sigma_{h,1} = \sqrt{2}\sigma_h \frac{s}{1000} = 0,01 - 0,02$  mm. Pro zaměření skenerem vychází, dle vztahu (6.2), pro nejistotu výšky bodu T (odmocnina z třetího diagonálního prvku matice  $\Sigma_T$ ) vzdáleného 50 m  $\sigma_{zs} = 1,16$  mm. Je tedy patrné, že výškové určení bodů kalibračního pole plošnou nivelací bude se zmíněným přístrojem dostačující.

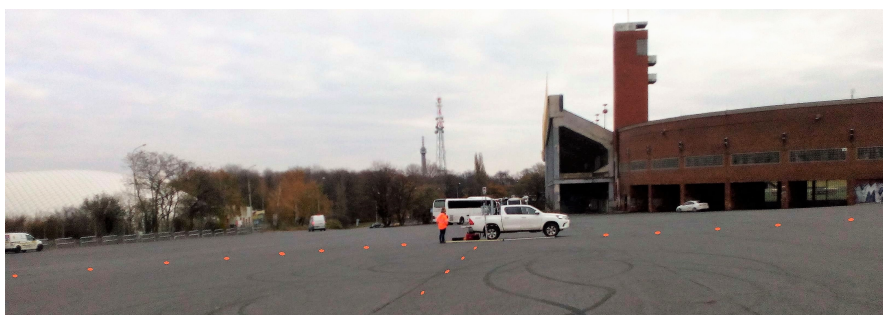
## 7.2 Praktická realizace – měření

Na širokém prostranství (viz obr. 7.1) s pevným asfaltovým povrchem byl stabilizován bodový kříž 100 x 100 metrů. Rozestupy mezi body byly zvoleny po pěti metrech. Poslední bod byl od jeho středu vzdálen 50 metrů.

Dále byly vytvořeny tři vlícovací body, které byly situovány do prostoru mimo kříž na dvě lampy a zeď v okolí. Vlícovací body byly signalizovány reflexními štítky (viz obr. 7.2).

Stanovisko bylo umístěno do středu kříže, kde byla sestavena konstrukce pro nucenou centraci (viz obr. 7.1 a obr. 7.3). Všechny body byly zaměřeny totální stanicí Leica TCRP1203+. Pro vyšší přesnost určovaných výšek kříže byla využita nivelace přístrojem Leica LS15. Odrazné štítky nebyly nivelovány, protože na ně nešla umístit nivelační lať. Po dokončení zaměření byl celý prostor i s vlícovacími body přeskenován přístrojem Riegl VZ-400 (obr. 7.3). Všechna měření probíhala v lokálních souřadnicových systémech přístrojů vztažených ke stanovisku. Soustava s počátkem ve středu totální stanice byla pro výpočet brána jako globální.

Výsledkem zaměření byly soubory souřadnic bodů z totální stanice, nivelačního přístroje a skeneru ve tvaru



Obrázek 7.1: Plocha pro měření s naznačeným křížem



Obrázek 7.2: Vlícovací body



Obrázek 7.3: Připevněný skener na stanovisku s nucenou centrací

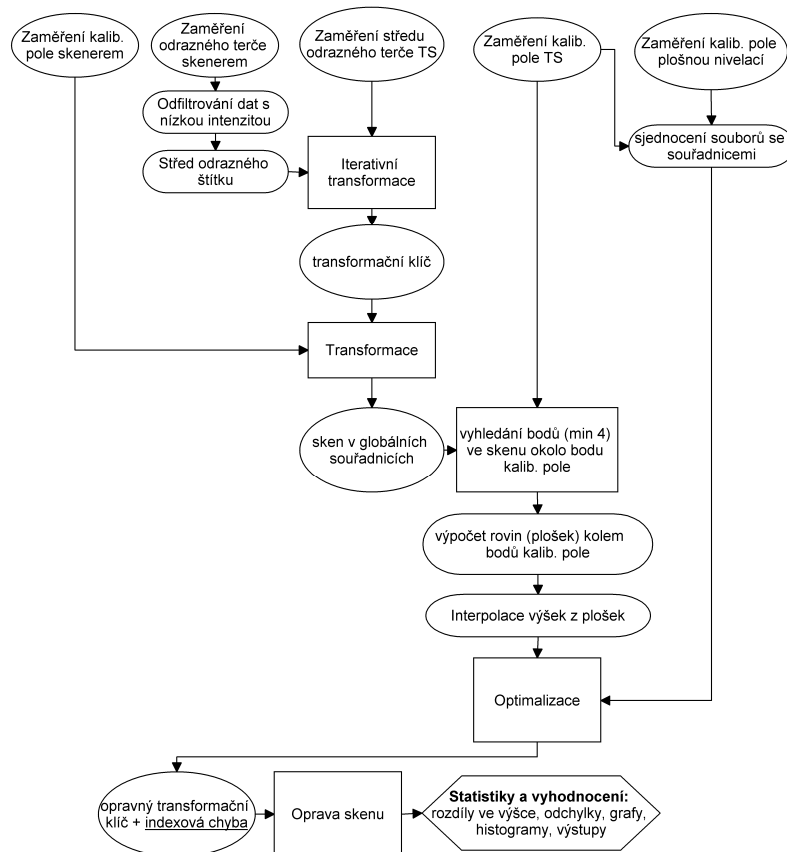
- totální stanice: číslo bodu, souřadnice  $y_G$ , souřadnice  $x_G$ , souřadnice  $z_G$ ,
- nivelačního přístroje: číslo bodu, souřadnice  $z_{G_2}$ ,
- skeneru: číslo bodu, souřadnice  $X_s$ , souřadnice  $Y_s$ , souř.  $Z_s$ , intenzita  $I$ .

Souřadnice  $z$  z nivelace byly značeny  $z_{G_2}$ , protože byly vůči globálnímu systému posunuty o konstantu. Ta je v dalším výpočtu určena jako posun ve vertikální ose  $s_z$ .

### 7.3 Praktická realizace – numerické zpracování

Všechny následující výpočty byly řešeny v softwaru MATLAB [50].

Výše představený postup určení vertikální indexové chyby byl řešen optimalizací, a musely být tedy vhodně zvoleny počáteční parametry výpočtu. V dané situaci bylo nejprve provedeno přibližné sjednocení soustav skeneru a totální stanice transformací (výšky měřené totální stanicí byly nahrazeny výškami určenými nivelací, v dalším textu pro jednoduchost tato data ovšem budeme nazývat systémem totální stanice). Počáteční parametry výpočtu indexové chyby byly následně voleny nulové.



Obrázek 7.4: Vývojový diagram výpočtu

Prvním krokem tedy bylo nalezení středu odrazných terčů vlčivacích (identických) bodů zaměřených skenerem (obr. 7.4). Pro správnou identifikaci byly použity dva kroky. První odfiltroval odlehlá měření pomocí intenzity odraženého signálu a druhý vypočítal těžiště zbylých bodů (obr. 7.4). Mezní hodnota odraženého signálu byla zvolena 55 %. Takto určená těžiště bodů poté realizovala polohu vlčivacích bodů v sou-

stavě skeneru. Souřadnice identických bodů ve zmíněných souřadných soustavách jsou uvedeny v tab. 7.3.

Tabulka 7.3: Souřadnice identických bodů

globální souř. sys.	X [m]	Y [m]	Z [m]
5001	-12,2314	-45,0179	0,4644
5002	-75,1819	-18,7884	-1,9805
5003	61,0024	-6,4932	1,5522

souř. sys. skeneru	X [m]	Y [m]	Z [m]
5001	-37,8562	-27,2772	0,2490
5002	8,8387	-76,9870	-2,1452
5003	-27,5176	54,8271	1,3653

Pro výpočet transformačního klíče mezi soustavou skeneru a totální stanice byl použit vztah (5.1). Pro kontinuitu textu je zde znovu uveden, platí

$$\mathbf{r}'_G = \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}'_S, \quad (7.2)$$

kde  $\mathbf{r}'_G$  je doplněný čtyřvektor globálních souřadnic,  $\mathbf{T}$  je matice rotací a translací (transformační matice). Rozepíšeme-li tuto rovnici, dostáváme pro každý  $i$ -tý vlivovací bod rovnici

$$\begin{bmatrix} x_{G_i} \\ y_{G_i} \\ z_{G_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\beta_z) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_y) \cdot \mathbf{R}_x(\beta_x) & t_x \\ & t_y \\ & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{S_i} \\ y_{S_i} \\ z_{S_i} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

kde  $i$  je číslo bodu,  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_y$  a  $\mathbf{R}_z$  představují matice rotace (5.3) kolem jednotlivých os o úhly  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_z$  a  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $t_z$  jsou translace.

Prvky transformačního klíče tedy byly: úhly  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_z$  a posuny  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $t_z$ . Pro výpočet byla použita iterativní metoda nejmenších čtverců. Označíme-li vektor  $\mathbf{h}$  jako vektor hledaných parametrů transformačního klíče, poté platí [21]

$$\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}_1 + \Delta\hat{\mathbf{h}}, \quad (7.4)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{1}), \quad (7.5)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_x} & \frac{\partial f_1}{\partial t_y} & \frac{\partial f_1}{\partial t_z} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_x} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_y} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_x} & \frac{\partial f_2}{\partial t_y} & \frac{\partial f_2}{\partial t_z} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_x} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_y} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t_x} & \frac{\partial f_n}{\partial t_y} & \frac{\partial f_n}{\partial t_z} & \frac{\partial f_n}{\partial \beta_x} & \frac{\partial f_n}{\partial \beta_y} & \frac{\partial f_n}{\partial \beta_z} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \Delta t_x \\ \Delta t_y \\ \Delta t_z \\ \Delta \beta_x \\ \Delta \beta_y \\ \Delta \beta_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = [\mathbf{l}_0 - \mathbf{r}'_G],$$

kde  $\mathbf{l}_0$  jsou souřadnice vypočítané podle (7.3) s počátečními hodnotami transformačního klíče volenými v první iteraci jako

$$\mathbf{h}_1 = [t_x, t_y, t_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z]_1^T = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T. \quad (7.6)$$

Výpočet byl opakován do té doby, dokud rozdíl oprav nebyl dostatečně malý. Tímto způsobem byly sjednoceny soustavy skeneru a totální stanice a můžeme počáteční parametry výpočtu indexové chyby položit rovny nule. Vypočtené hodnoty transformačního klíče jsou uvedeny v tab. 7.4.

Tabulka 7.4: Transformační klíč podle (7.4)

$\beta_x$ [gon]	$\beta_y$ [gon]	$\beta_z$ [gon]	$t_x$ [m]	$t_y$ [m]	$t_z$ [m]
-0.0118	0.0821	-22.8627	0,012	0,001	-0,161

Dalším krokem bylo identifikovat výšky bodů kalibračního pole měřené v soustavě skeneru – interpolovat výšku bodů v mračnu pro polohy bodů kříže. V nejbližším polohovém okolí bodů (v horizontální rovině) z totální stanice byly nalezeny vždy minimálně 4 body mračna. Ty byly proloženy rovinou metodou nejmenších čtverců a výšková souřadnice byla vypočtena z rovnice této roviny.

Následoval komplexní výpočet indexové chyby optimalizací. Zdefinovány musely být přibližné parametry vstupující do výpočtu podle (5.16), resp. (6.3), tj.  $(\alpha_x, \alpha_y, s_x, s_y, s_z, c_0)$ . Vzhledem k výše provedené transformaci (sjednocení soustav) mohly být voleny nulové. Vypočtené vyrovnané hodnoty poté vyjadřovali zbytkovou dotransformaci a zejména určovanou vertikální indexovou chybu. Úhel  $\alpha_z$  v rámci optimalizace určován nebyl, jeho hodnota z předchozího sjednocení soustav byla považována za finální.

Pomocí optimalizačního algoritmu implementovaného v softwaru MATLAB [50] byla určena velikost vertikální indexové chyby, kdy byla dle kapitoly 6.4 minimalizována suma čtverců residuí (6.13), resp. (6.22)

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y(\alpha_y) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_x) & s_x \\ & s_y \\ & s_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_m \sin(\zeta_m - c_0) \cos \lambda_m \\ r_m \sin(\zeta_m - c_0) \sin \lambda_m \\ r_m \cos(\zeta_m - c_0) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Výsledné hodnoty vypočtených parametrů optimalizace jsou uvedeny v tab. 7.5.

Výpočet byl také proveden pomocí metody MNČ s použitím linearizace modelu. Hodnoty vypočtených parametrů MNČ jsou uvedeny v tab. 7.6. Oprava o indexovou chybu vychází oběma metodami velmi podobně. Jejich rozdíl  $\Delta c_0 = 0,003\text{mgon}$ , což na vzdálenost 50 metrů činí rozdíl ve výšce  $2,5\ \mu\text{m}$ , který můžeme zanedbat.

Stejná hodnota indexové chyby byla obdržena použitím aproximativního řešení MNČ dle kapitoly (kap. 6.4), viz tab. 7.7.

Na obr. 7.5 a obr. 7.6 jsou zobrazeny rozdíly výšek v závislosti na vzdálenosti od stanoviska před a po zavedení opravy z vypočtené indexové chyby. Na obr. 7.7 a obr. 7.8 jsou zobrazeny histogramy četností rozdílů výšek bodů kalibračního pole před a po zavedení opravy z indexové chyby. Porovnáním grafů a histogramů je vidět, že došlo k výraznému zlepšení naměřených dat. Rozdíly výšek nyní oscilují kolem hodnoty nula a nejčetnější výskyt hodnot je v okolí nulového rozdílu výšek.

Tabulka 7.5: Výsledky optimalizovaných parametrů

$\alpha_x$ [mgon]	$\alpha_y$ [mgon]	$s_x$ [mm]	$s_y$ [mm]	$s_z$ [mm]	$c_0$ [mgon]
-0,22	-4,13	6,25	-0,34	-3,20	8,91

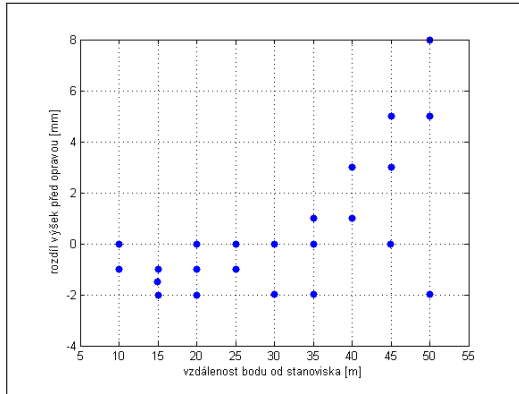
Tabulka 7.6: Výsledky parametrů řešené pomocí MNČ (kap. 6.3)

$\alpha_x$ [mgon]	$\alpha_y$ [mgon]	$s_x$ [mm]	$s_y$ [mm]	$s_z$ [mm]	$c_0$ [mgon]
-0,22	-4,12	6,24	-0,33	-3,20	8,91

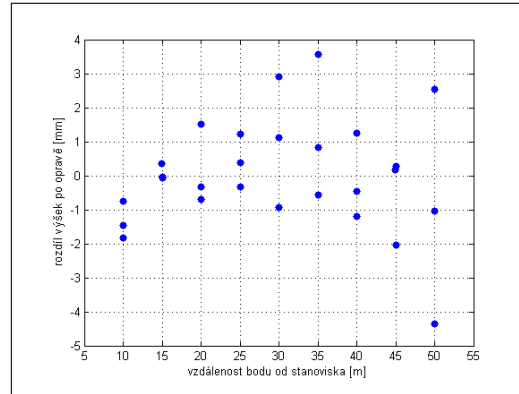
Tabulka 7.7: Výsledky parametrů řešené pomocí aproximativního MNČ (kap. 6.4)

$s_z$ [mm]	$c_0$ [mgon]
0,00	8,91

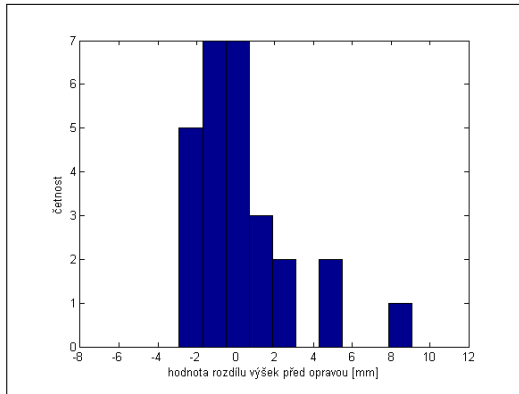




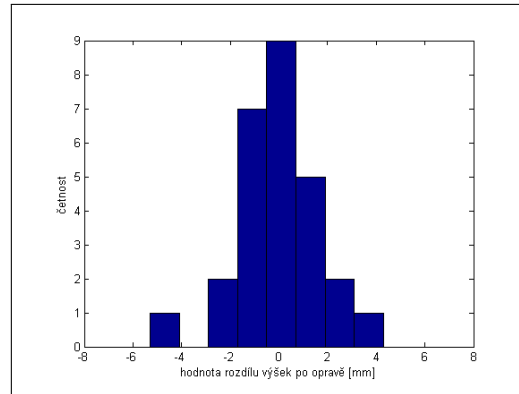
Obrázek 7.5: Rozdíly výšek na zaměřených bodech před opravou



Obrázek 7.6: Rozdíly výšek na zaměřených bodech po opravě



Obrázek 7.7: Histogram rozdílů před opravou



Obrázek 7.8: Histogram rozdílů po opravě

## 7.4 Rozbor chyb po měření

Rozbor chyb po měření, přesnost výpočtu indexové chyby, byl realizován odhadem kovarianční matice vyrovnaných parametrů dle vztahů (6.11), resp. (6.23) v případě aproximativního řešení MNČ.

Podle

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{l}, \quad (7.8)$$

kde  $\mathbf{A}$  je matice plánu vyčíslená pomocí vyrovnaných hodnot parametrů,  $\mathbf{d}\hat{\mathbf{q}}$  je vektor vypočítaných přírůstků parametrů a  $\mathbf{l}$  je matice redukovaných měření, byla

vypočítána rezidua  $\hat{\mathbf{E}}$ . Ta byla dále použita pro odhad kovarianční matice (6.11),

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{q}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1}, \quad \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{E}}^T \cdot \hat{\mathbf{E}}}{N - K}}, \quad (7.9)$$

kde  $N$  je počet rovnic a  $K$  je počet hledaných parametrů. Odmocněním prvků na diagonále kovarianční matice poté získáváme odhad směrodatných odchylek vypočtených parametrů (viz tab. 7.8).

Tabulka 7.8: Odhad směrodatných odchylek parametrů počítaných pomocí MNČ (6.11)

$\sigma_{\alpha_x}$ [mgon]	$\sigma_{\alpha_y}$ [mgon]	$\sigma_{s_x}$ [mm]	$\sigma_{s_y}$ [mm]	$\sigma_{s_z}$ [mm]	$\sigma_{c_0}$ [mgon]
0,44	0,76	1,16	0,69	0,46	3,07

Vliv určené nejistoty indexové chyby na vzdálenost 50 m přibližně odpovídá 1,2 mm, což je hodnota nižší, než nejistota výškového měření skenerem. Můžeme tak považovat vypočtenou kalibrační hodnotu vertikální indexové chyby za určenou s dostatečnou přesností.

Nejistota určení indexové chyby pomocí iterativního aproximativního přístupu byla určena pomocí odhadu kovarianční matice (6.23). Matice vstupujících do výpočtu byly vyčísleny z hodnot první iterace. Výsledky jsou uvedeny v tab. 7.9 (aposteriorní jednotková směrodatná odchylka  $\hat{\sigma}_0$ , směrodatná odchylka vertikální indexové chyby  $\sigma_{c_0}$  a střední kvadratický průměr residuí RMS).

Tabulka 7.9: Odhad směrodatné odchylky vertikální indexové chyby podle (6.23)

$\hat{\sigma}_0$ [mgon]	$\sigma_{c_0}$ [mgon]	RMS [mm]
8,92	1,58	0,92

# Kapitola 8

## Oprava dat reálného projektu

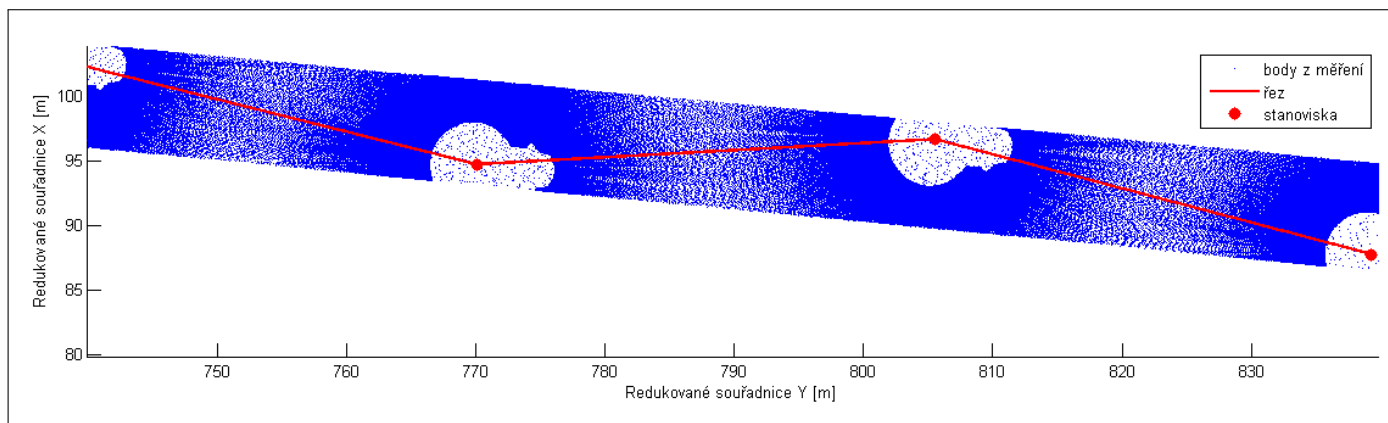
Vypočtená vertikální indexová chyba byla implementována v rámci zpracování dat z měření silničního svršku. Na silnici dlouhé několik set metrů byl pro testování vyjmut úsek o délce 150 metrů. Na něm byl vytvořen digitální model terénu (DMT) jak pro původní data, tak pro data opravená o indexovou chybu. Oprava souřadnic z indexové chyby probíhala podle vztahu (5.11),

$$\mathbf{r}_S = r_m [\sin(\zeta_m - c_0) \cos \lambda_m, \sin(\zeta_m - c_0) \sin \lambda_m, \cos(\zeta_m - c_0)]^T, \quad (8.1)$$

kde  $c_0$  je vypočtená indexová chyba,  $r_m$  je měřená vzdálenost bodu od stanoviška a  $\zeta_m$  s  $\lambda_m$  jsou měřené úhly (zenitový a vodorovný).

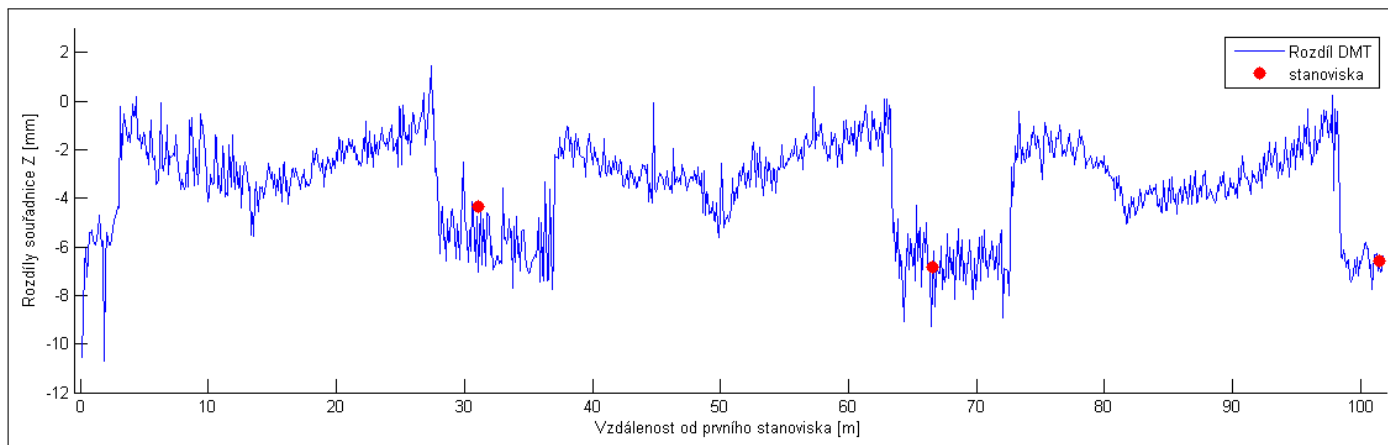
Jak je vidět na obr. 8.1, jednotlivá mračna byla měřena po cca 35 metrech. V místech stanovišek jsou patrné stíny, kde nebylo možné měřit z důvodu omezení vertikálního rozsahu skeneru ( $+60^\circ / -40^\circ$  od vodorovné roviny skeneru). V těchto místech byla k dispozici pouze data z okolních stanovišek, která byla významným způsobem ovlivněna indexovou chybou. Vytvořený DMT z dat ovlivněných chybou tak byl v těchto místech nepřesný a na hranici zastíněné oblasti je patrný výškový skok odpovídající velikosti indexové chyby na danou vzdálenost (v místech stínu nepřispějí do průměru body z nejbližších stanovišek).

Na obr. 8.2 je zobrazen rozdíl výšek mezi DMT opraveným o vliv indexové chyby a DMT bez zavedené opravy v řezu definovaném spojnicí stanovišek (červená linie na obr. 8.1). Zřetelně jsou patrné skoky v místech hranic stinných oblastí. Mezi jednotlivými stanovisky (červené křížky) mimo stíněné oblasti je také zřejmý trend, který vznikl v důsledku opravy dat a porovnání s DMT, které bylo vypočteno (výšky byly průměrovány) ze zdrojových souřadnic, ve kterých byla indexová chyba přítomna a měla vliv i na body mimo stín.



Obrázek 8.1: Skenovaná mračna bodů na povrchu vozovky a linie řezu spojující stanoviska

52



Obrázek 8.2: Výškový rozdíl řezů DMT z měřených a opravených dat

# Kapitola 9

## Závěr

V práci byly popsány základní prvky optických systémů prostorových skenerů, metody měření úhlů a vzdáleností. Byl proveden průzkum trhu aktuálně nabízených optických prostorových skenerů. Jejich vlastnosti byly vzájemně porovnány a následně shrnuty do přehledné tabulky.

Dále byly definovány a numericky vypočítány průchody svazků přes odrazné prvky optických soustav. Vysvětlen byl pojem indexová chyba a na konkrétních příkladech byly vyhotoveny modely odchylek zaměřených bodů přístrojem, který tuto chybu vykazoval.

Byla navržena a detailně vysvětlena teorie výpočtu numerické kalibrace souřadnic bodů zaměřených pozemním prostorovým optickým skenerem s vertikální indexovou chybou. Byla popsána navržená metodika a proces kalibračního měření. Následně byl pro vyčíslení indexové chyby proveden výpočet v softwaru MATLAB. O danou hodnotu byla opravena zkreslená data. Z opravených i neopravených dat byly vytvořeny dva digitální modely terénu, které byly vzájemně porovnány a analyzovány.

Tato metoda kalibrace je velmi efektivní v potlačení nežádoucího vlivu systematické vertikální indexové chyby. Výhodou oproti jiným druhům kalibrace je její snadná implementace do již měřených dat. Metoda byla úspěšně aplikována na měřených datech firmy Exact Control System, a. s.

# Literatura

- [1] P. Pokorný. One-mirror and two-mirror three-dimensional optical scanners - position and accuracy of laser beam spot. *Appl. Opt.*, 53(12):2730–2740, Apr 2014.
- [2] G. F. Marshall and G. E. Stutz. *Handbook of Optical and Laser Scanning*. Optical Science and Engineering. CRC Press, 2004.
- [3] M. Bass. *Handbook of Optics: Fiber Optics and Nonlinear Optics*. Number v. 4. McGraw-Hill, 2001.
- [4] F. Trager. *Springer handbook of lasers and optics*. Springer, New York, 2007.
- [5] G. Vosselman and H. G. Maas. *Airborne and Terrestrial Laser Scanning*. Whittles Publishing, 2010.
- [6] Leica Geosystems. <http://hds.leica-geosystems.com/en/index.htm>.
- [7] RIEGL Laser Measurement Systems. <http://www.riegl.com/>.
- [8] Surphaser. <http://www.surphaser.com/>.
- [9] FARO. <http://www.faro.com/>.
- [10] Topcon. <https://www.topconpositioning.com/mass-data-and-volume-collection/laser-scanners/gls-2000>.
- [11] Geospatial Inc. Trimble TX8. <https://geospatial.trimble.com/products-and-solutions/tx8>, May 2018.
- [12] J. Uren and W. F. Price. *Surveying for Engineers*. Palgrave Macmillan, 2010.
- [13] K. Pavelka. *Fotogrammetrie 1*. ČVUT v Praze, 2009.
- [14] W. Linder. *Digital photogrammetry*. Springer, New York, 2nd ed. edition, c2006.
- [15] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 2007.
- [16] M. Šimoník. Digitalizace - její princip a rozdělení. *MM Průmyslové spektrum*, (6):1, 2004.
- [17] I. Kalová and K. Horák. Optické metody měření 3D objektů. <http://www.elektrorevue.cz/clanky/05023/index.html#kap2.1.3>, 2018.
- [18] J.-M. Jin. *Electromagnetic analysis and design in magnetic resonance imaging*. CRC Press, Boca Raton, 1998.

- [19] M. P. Groover and E. W. Zimmers. *CAD/CAM: Computer-Aided Design and Manufacturing*. Pearson Education, 1984.
- [20] R. Soenen and G. J. Olling. *Advanced CAD/CAM Systems: State-of-the-Art and Future Trends in Feature Technology*. IFIP Advances in Information and Communication Technology. Springer US, 2016.
- [21] K. Rektorys. *Přehled užité matematiky*. SNTL, 1968.
- [22] W. Schofield and M. Breach. *Engineering Surveying, Sixth Edition*. CRC Press, 2007.
- [23] G. Strang and K. Borre. *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley-Cambridge Press, 1997.
- [24] J. Ratiborský. *Geodézie 10*. Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha, 2005.
- [25] D. D. Lichti. Error modelling, calibration and analysis of an AM-CW terrestrial laser scanner system. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 61:307–324, 2007.
- [26] D. D. Lichti. Terrestrial laser scanner self-calibration: Correlation sources and their mitigation. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 65:93–102, January 2010.
- [27] D. D. Lichti, J. Chow, and H. Lahamy. Parameter de-correlation and model-identification in hybrid-style terrestrial laser scanner self-calibration. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 66:317–326, 2011.
- [28] N. Pfeifer, C. Ressel, and K. Wilfried. Improving accuracy of terrestrial laser scanners and range cameras. *SPIE Newsroom*.
- [29] D. García-San-Miguel and J. L. Lerma. Geometric calibration of a terrestrial laser scanner with local additional parameters: An automatic strategy. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 79:122 – 136, 2013.
- [30] Ch. Holst and H. Kuhlmann. Aiming at self-calibration of terrestrial laser scanners using only one single object and one single scan. *Journal of Applied Geodesy*, 8:295, 2014.
- [31] J. L. Lerma and D. García-San-Miguel. Self-calibration of terrestrial laser scanners: selection of the best geometric additional parameters. *ISPRS Annals of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, II-5:219–226, 2014.
- [32] T. Medić, Ch. Holst, and H. Kuhlmann. Towards system calibration of panoramic laser scanners from a single station. *Sensors*, 17(5), 2017.
- [33] Exact Control System, a.s. <http://www.teamexact.com/cs/>.
- [34] WGS-84. <https://epsg.io/4326>, March 2018.
- [35] JTSK. <https://epsg.io/5514>, March 2016.
- [36] S-42. <https://epsg.io/28403>, March 2018.

- [37] G. L. Heritage and A. R. G. Large. *Laser scanning for the environmental sciences*. Wiley-Blackwell, Hoboken, NJ, 1. vydání edition, 2009.
- [38] M. Bass. *Handbook of optics*. McGraw-Hill, New York, 2nd ed. / edition, c1995-c2001.
- [39] Základní součásti geodetických přístrojů. <https://www.natur.cuni.cz/geografie/geoinformatika-kartografie/>.
- [40] Ch. Yu, X. Chen, and J. Xi. Modeling and calibration of a novel one-mirror galvanometric laser scanner. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 17(1), January 2017.
- [41] Photonics Lincoln Laser Co. Polygonal laser scanners: Fitting the elements to the task. [https://www.photonics.com/a25488/Polygonal\\_Laser\\_Scanners\\_Fitting\\_the\\_Elements\\_to](https://www.photonics.com/a25488/Polygonal_Laser_Scanners_Fitting_the_Elements_to), March 2018.
- [42] P. Pokorný. Theoretical foundations of one-mirror and two-mirror optical scanners. bachelor's thesis, 2012.
- [43] Sokkia Co. <https://sokkia.com/>.
- [44] A. Mikš. *Aplikovaná optika*. České vysoké učení technické, V Praze, vyd. 1 edition, 2009.
- [45] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. An IEEE Press classic reissue. Wiley, 2007.
- [46] E. Madelung. *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Springer-Verlag, Berlin, 1964.
- [47] 3D terrestrial laser scanner Riegl VZ-400 / Riegl VZ-1000. [www.riegl.com](http://www.riegl.com), 2011.
- [48] G. A. Korn and T. M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover Publications, 2000.
- [49] Terminologická komise ČUZK. <http://www.vugtk.cz/slovník/>.
- [50] MATLAB. <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>, 2018.
- [51] F. Tao, L. Zhang, and Y. Laili. *Configurable Intelligent Optimization Algorithm: Design and Practice in Manufacturing*. Springer Series in Advanced Manufacturing. Springer International Publishing, 2014.
- [52] L. Mervart and Z. Lukeš. *Adjustment calculus*. Nakladatelství ČVUT, Praha, vyd. 1 edition, 2007.
- [53] P. M. Vasant. *Meta-Heuristics Optimization Algorithms in Engineering, Business, Economics, and Finance*. Premier reference source. Information Science Reference, 2012.
- [54] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover Books on Computer Science. Dover Publications, 2013.



- [55] M. Gen and R. Cheng. *Genetic Algorithms and Engineering Optimization*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 2000.
- [56] I. Zelinka, V. Snásel, and A. Abraham. *Handbook of Optimization: From Classical to Modern Approach*. Intelligent Systems Reference Library. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

# Seznam obrázků

2.1	Schéma 3D skeneru [1]	12
2.2	Kódový kruh [39]	13
2.3	Snímání obrazu fotodiodami [39]	13
2.4	Schéma jedno-zrcadlového rozmítacího prvku	14
2.5	Monogon [2]	14
2.6	Polygonální rozmítací prvek [2]	15
2.7	Pyramidový rozmítací prvek [2]	15
2.8	Fázová měřicí metoda [12]	16
2.9	Amplitudová modulace nosné vlny [12]	17
2.10	Přehled v současnosti komerčně dostupných skenerů	20
3.1	Poloha svazku	22
3.2	Poloha svazku u jedno-zrcadlových soustav	25
3.3	Poloha svazku u polygonálních soustav	25
3.4	Poloha svazku u pyramidových soustav	25
4.1	3D model vlivu indexové chyby na měření	27
4.2	2D model vlivu indexové chyby na měření	27
5.1	Model měření a poloha bodu v kartézských souřadnicích	29
6.1	Schéma chybového modelu	33
6.2	Zjednodušený model měření	38
7.1	Plocha pro měření s naznačeným křížem	43
7.2	Vlčovací body	44
7.3	Přípevněný skener na stanovisku s nucenou centrací	44
7.4	Vývojový diagram výpočtu	45
7.5	Rozdíly výšek na zaměřených bodech před opravou	49
7.6	Rozdíly výšek na zaměřených bodech po opravě	49
7.7	Histogram rozdílů před opravou	49
7.8	Histogram rozdílů po opravě	49

8.1	Skenovaná mračna bodů na povrchu vozovky a linie řezu spojující stanoviška . . . . .	52
8.2	Výškový rozdíl řezů DMT z měřených a opravených dat . . . . .	52

# Seznam tabulek

2.1	Parametry v současnosti komerčně dostupných skenerů (nevyplněná místa v tabulce výrobce neuvádí) [6–11] . . . . .	20
7.1	Výrobce deklarovaná přesnost přístrojů . . . . .	42
7.2	Odhad přesnosti bodů v poloze určených skenerem a totální stanicí (TS) . . . . .	42
7.3	Souřadnice identických bodů . . . . .	46
7.4	Transformační klíč podle (7.4) . . . . .	47
7.5	Výsledky optimalizovaných parametrů . . . . .	48
7.6	Výsledky parametrů řešené pomocí MNČ (kap. 6.3) . . . . .	48
7.7	Výsledky parametrů řešené pomocí aproximativního MNČ (kap. 6.4) . . . . .	48
7.8	Odhad směrodatných odchylek parametrů počítaných pomocí MNČ (6.11) . . . . .	50
7.9	Odhad směrodatné odchylky vertikální indexové chyby podle (6.23) . . . . .	50

## Příloha A

Kopie diplomu z XIX. ročníku  
Mezinárodního kola SVOČ 2018



Děkan Fakulty stavební Vysokého učení technického v Brně  
uděluje

# DIPLOM

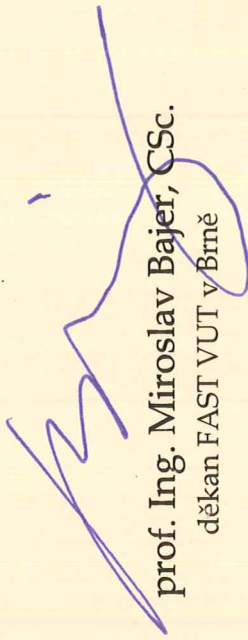
Jindřichu Brzobohatému

za 3. místo ve XIX. ročníku soutěže stavebních fakult České a Slovenské republiky SVOČ 2018  
v sekci Geodézie a kartografie

za práci „Numerická kalibrace vertikální indexové chyby pozemního prostorového optického skeneru“.

V Brně dne 17. 5. 2018



  
prof. Ing. Miroslav Bajer, CSc.  
děkan FAST VUT v Brně