



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

**Fakulta stavební
Katedra matematiky**

Fourierovy koeficienty modelu gravitačního potenciálu Země

Fourier coefficients of the Earth gravitational potential model

Diplomová práce

Vedoucí práce: Mgr. Milan Bořík, Ph.D.

Katedra matematiky

Bc. Michal Karásek

Praha 2018


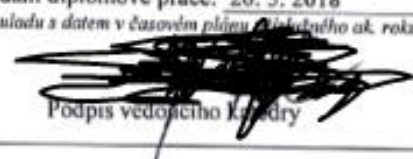


ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE


I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Karásek	Jméno: Michal	Osobní číslo: 412688
Zadávací katedra: Katedra matematiky		
Studijní program: Geodézie a kartografie		
Studijní obor: Geomatika		

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Fourierovy koeficienty modelu gravitačního potenciálu Země	
Název diplomové práce anglicky: Fourier coefficients for a gravitational potential model of the Earth	
Pokyny pro vypracování: 1. Tvorba modelu gravitačního potenciálu Země. 2. Výpočet Fourierových koeficientů Gaussovou integrací: - interpolace hodnot gravitačního potenciálu do uzlových bodů integrace; - zjemňování oblasti. 3. Volba různých interpolací a jejich srovnání. 4. Zhodnocení výsledků gravitačního potenciálu Země.	
Seznam doporučené literatury: [1] Burša, M. <i>Dynamika umělých družic v tíhovém poli Země</i> . Praha: Academia, 1993. ISBN 80-200-0176-X. [2] Heiskanen, W. A.; Moritz, H.: <i>Physical Geodesy</i> . W.H.Freeman & Co Ltd, 1967, ISBN 9780716702337. [3] Nádeník, Z. <i>Kulové funkce pro geodézií: matematická příprava ke studiu knihy W.A. Heiskanen-H. Moritz: Physical Geodesy, 1967</i> . Zdičky: Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, 2000. Publikace (Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický). ISBN 80-85881-15-2.	
Jméno vedoucího diplomové práce: Mgr. Milan Bořík, Ph. D.	
Datum zadání diplomové práce: 20. 2. 2018	Termín odevzdání diplomové práce: 20. 5. 2018 <i>Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu školního ak. roku</i>
 Podpis vedoucího práce	 Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

<i>Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.</i>	
<u>23.2.2018</u> Datum převzetí zadání	 Podpis studenta(ky)

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem zadanou diplomovou práci vypracoval samostatně, pod vedením Mgr. Milana Boříka, Ph.D. Veškerou použitou literaturu a zdroje uvádím v seznamu zdrojů.

V Praze dne

.....

(podpis autora)

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé diplomové práce panu Mgr. Milanu Boříkovi, Ph.D., za cenné rady, připomínky a pomoc při zpracování.

Dále bych rád poděkoval mé rodině a přátelům, za podporu a rady, po celou dobu studia.

Abstrakt

V práci jsou popsány základní vztahy pro výpočet gravitačního potenciálu. Nezbytnou součástí práce je popis matematického aparátu vedoucího k řešení Laplaceovy diferenciální rovnice součtem nekonečné Fourierovy řady. V praktické části je řešen výpočet gravitačního potenciálu na tělese aproximujícím reálný tvar zemského povrchu jako částečný součet Fourierovy řady.

Klíčová slova

Gravitační potenciál, Legendreovy polynomy, interpolační metody, Gaussova numerická integrace, sférické funkce, Fourierova řada, ortogonální systémy

Abstract

The thesis describes basic relations for a calculation of the gravitational potential. The essential part of the thesis is a description of mathematical apparatus leading to the solution of Laplace differential equation by a sum of Fourier infinite series. The practical part of the thesis is focused on the calculation of the gravitational potential on a model approximating the actual figure of the Earth by a partial sum of Fourier infinite series.

Keywords

Gravitational potential, Legendre polynomials, interpolation methods, Gaussian integrals, spherical harmonics, Fourier series, orthogonal systems

Obsah

Úvod	8
1 Úvod do teorie gravitačního potenciálu	10
2 Matematický aparát pro řešení gravitačního potenciálu	14
2.1 Ortogonální systém funkcí, Fourierova řada	14
2.2 Legendreovy polynomy, Legendreovy asociované funkce	16
2.3 Sférické funkce	17
2.4 Numerická integrace	20
2.4.1 Gaussova-Legendreova numerická integrace	21
2.5 Výpočet Legendreových asociovaných funkcí	25
3 Interpolace dat	27
3.1 Interpolační metody	27
3.1.1 Nearest neighbour (metoda nejbližšího souseda)	27
3.1.2 Inverse distance weight (metoda inverzních vzdáleností)	27
3.1.3 Bilinear interpolation (bilineární interpolace)	28
3.2 Srovnání interpolačních metod	29
4 Tvorba modelu	35
5 Tvorba programu	37
5.1 Technické informace	37
5.2 Globální model gravitačního potenciálu	38
5.3 Lokální model gravitačního potenciálu	39
5.3.1 Tvorba lokálního ortogonálního systému sférických funkcí	39
5.3.2 Postup výpočtu	42
6 Výsledky	44
6.1 Globální model	44
6.1.1 Model 1	44
6.1.2 Model 2	50
6.2 Lokální model	52

Závěr	55
Seznam tabulek	57
Seznam obrázků	59
Seznam literatury	60
Seznam příloh	62
A Tištěné přílohy	63
A.1 Hodnoty Fourierových koeficientů 2. globálního modelu v bodě (-0.78, 0.37) ...	63
A.2 Hodnoty Fourierových koeficientů lokálního modelu v bodě (0.42, 1.02)	67

Úvod

Diplomová práce se zabývá výpočtem gravitačního potenciálu na aproximujícím tělese zemského povrchu, kterým byla zvolena sféra. Vycházíme z řešení Laplaceovy diferenciální rovnice jako součtu nekonečné Fourierovy řady. Odvozením řešení se zabývají autoři [1], [6], [4]. Stručný úvod do problematiky také shrnul [7]. Použitá metoda je založena na existenci datového modelu gravitačního potenciálu na povrchu sféry. Jedná se tak o řešení okrajové úlohy Laplaceovy diferenciální rovnice vyjádřené ve formě Fourierovy řady.

V současné době je výpočet realizován pomocí poruch drah umělých družic Země. Tento přístup dává možnost určit tvar zemského tělesa s velmi dobrou přesností. Z českých autorů se tématu věnují [1], [2], ze světových se problematice věnují [4]. Zemský povrch je reprezentován sadou Stokesových koeficientů. Problematice výpočtu gravitačního potenciálu se věnují prestižní výzkumná centra a univerzity. Za všechny uvedme GSFC (Goddard Space Flight Center), hlavní výzkumnou laboratoř NASA, která je autorem modelu EGM96 [15]. V současné době jedním z nejpřesnějších globálních modelů zemského povrchu je model EGM2008 [16], který byl vytvořen NGA (National Geospatial Intelligence Agency). Tento model je kompletní do 2159. stupně sférických funkcí.

V první kapitole dochází ke stručnému shrnutí dosavadních poznatků o gravitačním potenciálu. Jsou zde uvedeny základní vzorce a vztahy pro výpočet. Tato kapitola je pouze stručným úvodem do problematiky, o které pojednávají například [2], [3].

Druhá kapitola se zabývá matematickým aparátem nezbytným pro rozvoj gravitačního potenciálu do Fourierovy řady. Vysvětlená problematika bude implementována ve vytvořeném výpočetním programu. Větší část je věnována ortogonálním systémům funkcí využívaných v geodézii. Obecně se problematice ortogonálních systémů funkcí věnuje [14], [8]. Detailní pohled na geodetické ortogonální systémy funkcí uvádí [6]. Kapitola se dále zabývá metodou numerické integrace [16], [17]. Třetí kapitola zabývající se interpolačními metodami je pro práci velmi důležitou vzhledem ke způsobu, kterým je výpočet gravitačního potenciálu na aproximujícím tělese realizován. Zabýváme se zde metodami plošné interpolace [17], [18]. Ty jsou testovány z hlediska časové náročnosti a přesnosti výpočtu na vzorku náhodně vytvořených funkcí dvou proměnných, za účelem nalezení optimální metody.

Čtvrtá kapitola uvádí vzorce, pomocí kterých byly vytvořeny matematické modely gravitačního potenciálu na sféře. Na těchto modelech jsou potom realizovány veškeré výpočty gravitačního potenciálu v uvažovaných bodech.

Pátá kapitola seznamuje čtenáře s tvorbou a během vytvořeného programu pro výpočet gravitačního potenciálu. Pro tvorbu programu byl použit objektivě orientovaný programovací jazyk C++ [19]. Vzhledem k náročnosti výpočetní úlohy bylo přistoupeno k multithreadingu [13], za účelem maximálního využití možností softwaru.

Šestá závěrečná kapitola práce shrnuje dosažené výsledky výpočtu gravitačního potenciálu na aproximujícím tělese. Výsledky jsou uvedeny pro dva vytvořené modely gravitačního potenciálu. Vypočtené hodnoty gravitačního potenciálu v bodech vytvořeného modelu jsou shrnuty do tabulek a grafů.

Cíle práce jsou následující:

1. Vytvoření globálního modelu gravitačního potenciálu
2. Nalezení vhodné metody interpolace dat v bodech mimo vytvořený model
3. Otestování přesnosti výpočtu se zvyšujícím se stupněm částečného součtu Fourierovy řady
4. Otestování přesnosti výpočtu pro modely odlišných velikostí
5. Výpočet Fourierových koeficientů modelu gravitačního potenciálu Země

Kapitola 1

1 Úvod do teorie gravitačního potenciálu

Při výkladu respektujícím newtonovskou fyziku, lze velikost gravitační síly, kterou na sebe působí dvě tělesa v prostoru vyjádřit jako [9]

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{r}_{10}, \quad (1.1)$$

kde G je označení pro gravitační konstantu, M a m jsou hmotnosti těles, které jsou vzájemně přitahovány gravitační silou, r je Eukleidovská vzdálenost v prostoru \mathbb{R}^3 a \vec{r}_{10} je jednotkový vektor směru působení gravitační síly. Ve výpočtu (1.1) je velikost výsledné síly závislá na hmotnostech těles M a m . V případě, že nás zajímá velikost síly gravitačního pole v libovolném místě vně povrchu tělesa generujícího gravitační pole, vydělíme vzorec (1.1) hmotností m a dostáváme [7]

$$\vec{K} = -G \frac{M}{r^2} \vec{r}_{10}, \quad (1.2)$$

kde K je intenzita gravitačního pole. Jedná se o vektorovou veličinu popisující velikost, jakou je v gravitačním poli generovaném tělesem M přitahován bod o jednotkové hmotnosti a vzdálenosti r od zdroje. Pokud budeme uvažovat gravitační sílu, jako skalární veličinu využijeme vlastnosti křivkového integrálu, pro který platí, že velikost vykonané práce po uzavřené křivce je nulová.

$$\oint F \cdot dr = 0 \quad (1.3)$$

Silová pole, pro která platí (1.3), se nazývají potenciální. Gravitační pole je polem potenciálním [3]. Je tedy možné vyjádřit práci gravitační síly mezi dvěma body v gravitačním poli jako změnu potenciální energie, která je skalární veličinou. Elementární práce vykonaná tělesem m_1 působícím na těleso m_2 je potom při posunutí o dr_{12} rovna [7]

$$dA_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} dr_{12}. \quad (1.4)$$

Celkovou práci zapíšeme jako [7]

$$A_{12} = +Ep = \int_1^2 F dr_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \quad (1.5)$$

Obdobně jako pro vektorový popis gravitačního pole chceme zjistit velikost silové funkce, kterou působí těleso m generující silové pole na tělesa jednotkové hmotnosti v závislosti na vzdálenosti od zdroje m . Dostáváme tak vztah [7]

$$V = \frac{Ep}{m} = G \frac{m}{r}, \quad (1.6)$$

kde V je gravitační potenciál, který je roven práci, kterou vykoná těleso m pro přemístění jednotkové hmotnosti z nekonečna do vzdálenosti r od zdroje gravitačního pole. Při působení více hmotných těles na bod P ve vzdálenostech r od jednotlivých zdrojů dostáváme výsledný gravitační potenciál jako [7]

$$V = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} = V_i. \quad (1.7)$$

Uvažujeme-li těleso, platí pro výpočet gravitačního potenciálu přes celý jeho objem

$$V = G \int_m \frac{dm}{r}. \quad (1.8)$$

Mezi vektorovým a skalárním polem gravitačního pole platí následující vztah [9]

$$\vec{K} = \frac{\delta V}{\delta r} \vec{r}^0 = \text{grad } V = \nabla V, \quad (1.9)$$

kde ∇ značí Hamiltonovův operátor nabra. S postupným odvozením uvedeným v [1], [6], [4], dostaneme Laplaceovu rovnici [7]

$$\text{div} \vec{K} = \text{div}(\text{grad } V) = \Delta V = 0. \quad (1.10)$$

Laplaceova rovnice v rozepsaném tvaru je

$$\Delta V = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0. \quad (1.11)$$

Laplaceova rovnice je vyjádřením Poissonovy rovnice [4] o rozložení gravitačního potenciálu vně tělesa, kde $\sigma = 0$. Laplaceova rovnice tak zkoumá rozložení gravitačního potenciálu vně tělesa, kde se převážně uskutečňují geodetická měření. Řešení Laplaceovy rovnice je podrobně popsáno v [1], [2]. Pro účely práce není postup výpočtu důležitý a nebudeme se jím tedy zabývat. Protože hledáme řešení Laplaceovy diferenciální rovnice na sféře, transformujeme (1.11) do sférických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= \rho \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= \rho \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.12)$$

kde ρ je poloměr sféry, φ je sférická šířka a λ sférická délka. Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích vypadá takto [1]

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \cos \varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}. \quad (1.13)$$

Řešení diferenciální rovnice (1.13) hledáme ve formě nekonečné řady [1]

$$V(P) = \frac{GM}{\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_0}{\varrho} \right)^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (1.14)$$

a ta při výpočtu gravitačního potenciálu na sféře přejde v tvar [1]

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi). \quad (1.15)$$

Hodnota gravitačního potenciálu v bodě P je tak vyjádřena jako nekonečný součet Fourierovy řady sférických funkcí, kde Fourierovy koeficienty a_{nm} , b_{nm} jsou [1]

$$a_{nm} = \frac{\iint_S VP_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda \, dS}{\iint_S [P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda]^2 \, dS} \quad (1.16)$$

$$b_{nm} = \frac{\iint_S VP_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda \, dS}{\iint_S [P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda]^2 \, dS}. \quad (1.17)$$

V dalších kapitolách diplomové práce uvažujeme rovnici (1.15) jako výchozí vztah pro výpočet gravitačního potenciálu, na němž je založen program pro výpočet Fourierových koeficientů.

Kapitola 2

2 Matematický aparát pro řešení gravitačního potenciálu

V rovnici (1.15) jsme zavedli několik nových pojmů, které bylo nutné implementovat do výpočetního programu. Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s jejich základními vlastnostmi. Začínáme vysvětlením ortogonálního systému sférických funkcí a souvislosti s Fourierovými řadami. V další části se zabýváme Legendreovými asociovanými funkcemi. Pomocí Legendreových asociovaných funkcí jsou tvořeny sférické funkce, jimiž se bude zabývat následující část. Poslední část kapitoly je věnována numerické integraci, která byla klíčovou částí výpočetního programu. Tato část je rozdělena do dvou, kde v první části je čtenář seznámen s definicí použité numerické integrace a následně v druhé části, je ověřena výpočetní přesnost použité metody numerické integrace.

2.1 Ortogonální systém funkcí, Fourierova řada

Na Hilbertově prostoru [22], je definován skalární součin funkcí f, g jako

$$f * g = \int_{\Omega} f * g \, d\Omega, \quad (2.1)$$

kde Ω je oblast integrace. Pokud jsou pro obě funkce splněny následující předpoklady [14]

- 1) Na dané oblasti Ω jsou spojité, nebo po částech spojité
- 2) Na dané oblasti Ω jsou integrovatelné s kvadrátem, tedy existují integrály

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f^2(x) dx, \quad (2.2)$$

potom jsou funkce f a g ortogonální na oblasti Ω pokud,

$$\int_{\Omega} f * g \, d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

Pro konečně rozměrné vektorové prostory funkcí lze nalézt množinu funkcí $F = \{F_0, F_1, \dots, F_n\}$ z prostoru F pro kterou platí [8]

- 1) Definiční obor všech funkcí je daný na oblasti Ω
- 2) Pro každé dvě funkce z množiny F platí (2.3)
- 3) Pokud existuje funkce f taková, že $(f, f_i) = 0$, pak norma $f = 0$ (množina F obsahuje všechny přípustné funkce splňující 1, 2 na oblasti Ω , je tedy maximální)

Potom je množina F ortogonálním systémem funkcí prostoru F na oblasti Ω . Každou funkci $f \in F$ potom zapíšeme jako lineární kombinaci funkcí z množiny F

$$f(x) = a_0 F_0 + a_1 F_1 + \dots + a_n F_n \quad (2.4)$$

Koeficienty a_i spočítáme jako

$$a_i = \frac{\int_{\Omega} f * F_i d\Omega}{\int_{\Omega} (F_i)^2 d\Omega} \quad (2.5)$$

Takto definovaná řada (2.4) se nazývá Fourierova řada příslušná k funkci f . Koeficienty (2.5) jsou Fourierovými koeficienty funkce f vůči ortogonálnímu systému funkcí F . Pro fyzikální a matematické výpočty má velký význam trigonometrický ortogonální systém funkcí definovaný na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$

$$1, \cos \lambda, \sin \lambda, \cos 2\lambda, \sin 2\lambda, \cos n\lambda, \sin n\lambda, \quad (2.6)$$

pro $n = 1..inf$

Tímto ortogonálním systémem funkcí lze aproximovat funkci f jako [8]

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2.7)$$

kde $a_k, b_k \in R, k = 1, 2, 3, \dots, n$. Vidíme tedy, že funkce pro gravitační potenciál (1.15) je rozvinuta do nekonečného součtu Fourierovy trigonometrické řady.

2.2 Legendreovy polynomy, Legendreovy asociované funkce

Legendreovy polynomy jsou ortogonálním systémem funkcí na intervalu $(-1, 1)$, který je definován pomocí Rodriguesova vzorce [3]

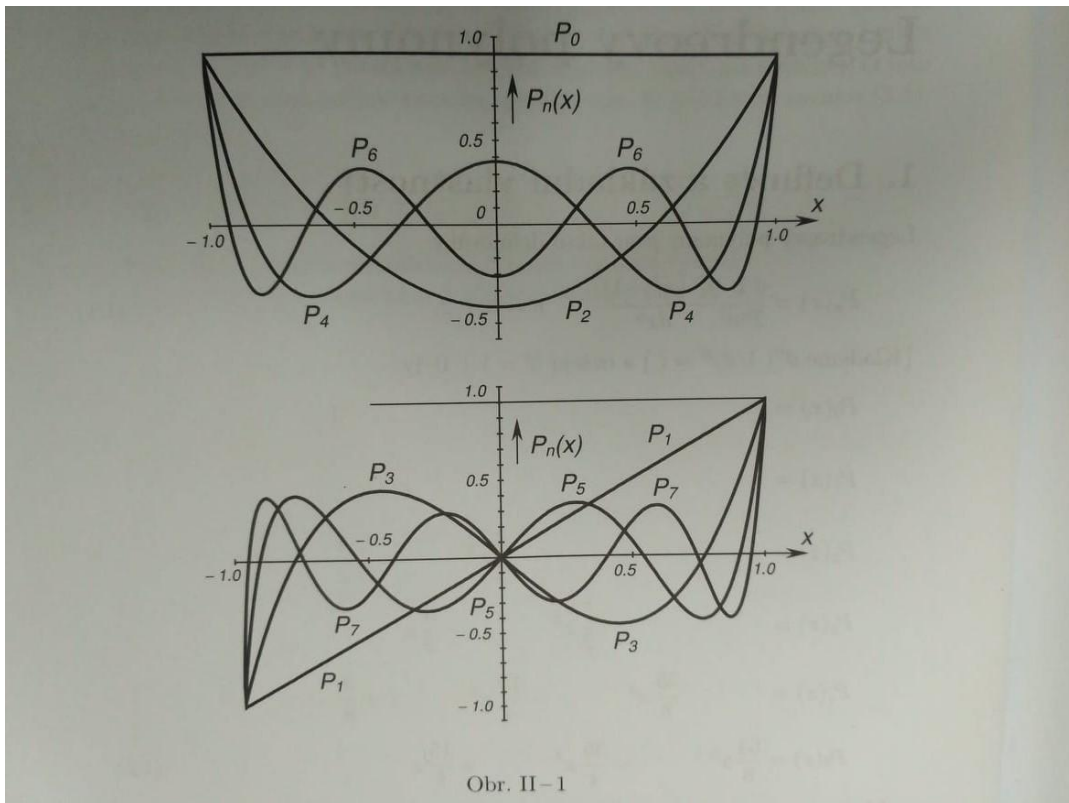
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (2.8)$$

Následuje výčet Legendreových polynomů do 3. stupně. Polynomy do vyšších stupňů lze nalézt v [1], [5], [2]

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad (2.9)$$

Legendreovy funkce mají následující vlastnosti [5]:

- 1) $P_n(x)$ pro n sudé je sudý polynom stupně n
- 2) $P_n(x)$ pro n liché je lichý polynom stupně n
- 3) $P_n(x)$ má na intervalu $(-1, 1)$ n různých kořenů
- 4) $|P_n(x)| < 1$ na intervalu $(-1, 1)$, $n \geq 1$



Obrázek 2.1: Průběh Legendreových polynomů na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ [5]

Legendreovy polynomy jsou speciálním případem Legendreových asociovaných funkcí. Funkce jsou definovány následujícím vzorcem [12]

$$P_{nk}(x) = (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}, \quad (2.10)$$

kde n je stupeň a k je řád funkce a platí $n \geq k$. Následuje výčet Legendreových asociovaných funkcí do 3. stupně. Legendreovy polynomy jsou speciálním případem asociovaných funkcí pro $k = 0$, které jsou do 3. stupně definovány (2.9).

$$\begin{aligned} P_{11} &= (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \\ P_{21}(x) &= (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x, \\ P_{22}(x) &= (1 - x^2) \cdot 3 \\ P_{31}(x) &= (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2} \right) \\ P_{32}(x) &= (1 - x^2) \cdot 15x \\ P_{33}(x) &= (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 15 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Vyšší rozvoje Legendreových přidružených funkcí lze nalézt v [1], [2]. Pro Legendreovy asociované funkce platí, že na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ mají $n-k$ kořenů. Pokud za x ve vzorcích (2.11) dosadíme $\sin \varphi$, přejde definiční interval do tvaru $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, kde φ je sférická šířka bodu. V tomto tvaru se funkce vyskytují v rovnici (1.15), a dále ve výpočtech Fourierových koeficientů v (1.16), (1.17).

2.3 Sférické funkce

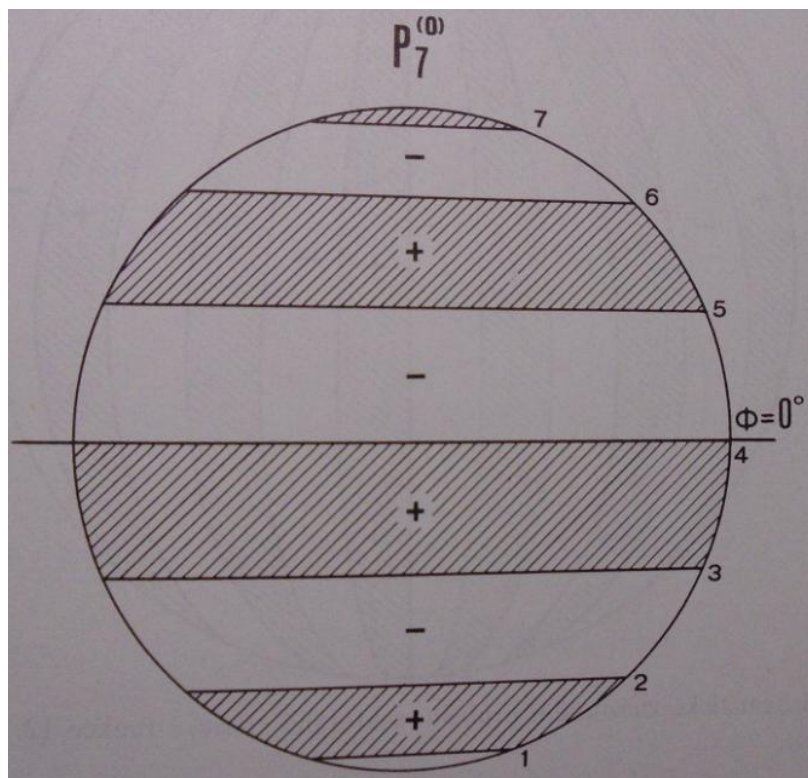
V předchozí části jsme si popsali ortogonální systém funkcí na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Gravitační potenciál uvažujeme na sféře a je proto nutné nalézt rozšíření stávajícího systému tak, aby byl vytvořen ortogonální systém funkcí na sférické ploše. Tímto ortogonálním systémem jsou právě sférické funkce, které jsou definovány na intervalech $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $\langle 0, 2\pi \rangle$ pro sférickou šířku a délku. Definice sférických funkcí je následující

$$P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda, \quad P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda. \quad (2.12)$$

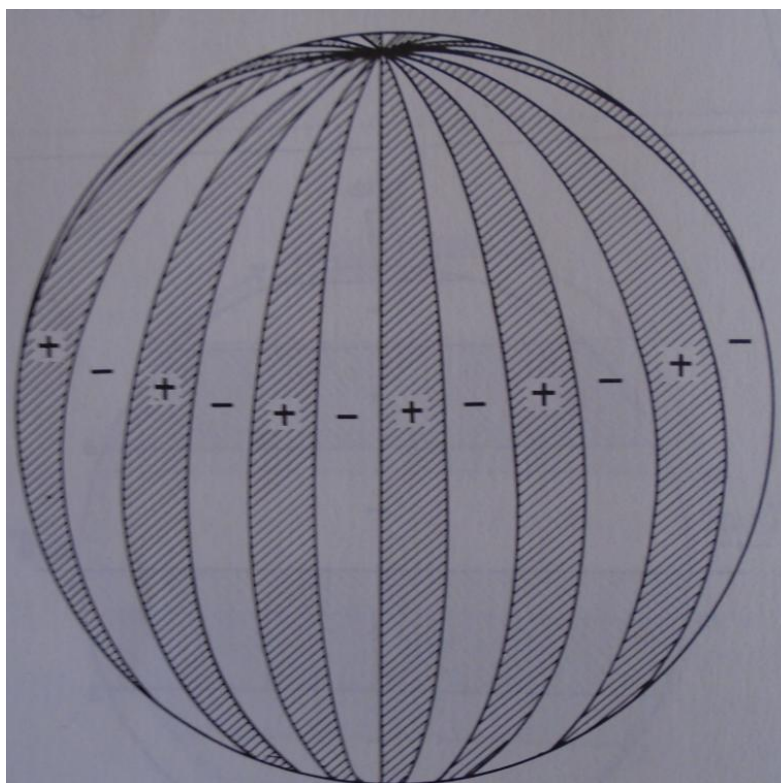
Pro každý stupeň n tak dostáváme $2n + 1$ sférických funkcí, vzhledem k faktu, že pro $P_{n0} \rightarrow \sin 0\lambda = 0$. Představa o tvaru sférických funkcí z (2.12) je zřejmá. Sférické funkce do 3. stupně je možné nalézt v [6], [4]. Sférické funkce se vyskytují ve výpočtu Fourierových koeficientů gravitačního potenciálu (1.16), (1.17). V závislosti na stupni a řádu Legendreových asociovaných funkcí, kterými jsou sférické funkce tvořeny, je můžeme dělit do tří skupin následovně:

- 1) Pokud je řád $m=0$, budeme hovořit o sférických zonálních funkcích. Jedná se o Legendreovy polynomy, které jsou závislé pouze na sférické šířce. Na intervalu sférické šířky má n nulových bodů, kde n představuje stupeň Legendreova polynomu.
- 2) Pokud je $n=m$, budeme hovořit o sférických sektorálních funkcích. Jedná se o funkce, které nabývají nulových hodnot ve $2n$ sférických polednicích, vzájemně odlehlých o π/n .
- 3) Pokud je $m = 1, 2, 3, \dots, n-1$, budeme hovořit o sférických tesserálních funkcích. Funkce nabývají nulových hodnot pro $n - m$ rovnoběžek a dále pro $2m$ poledníků.

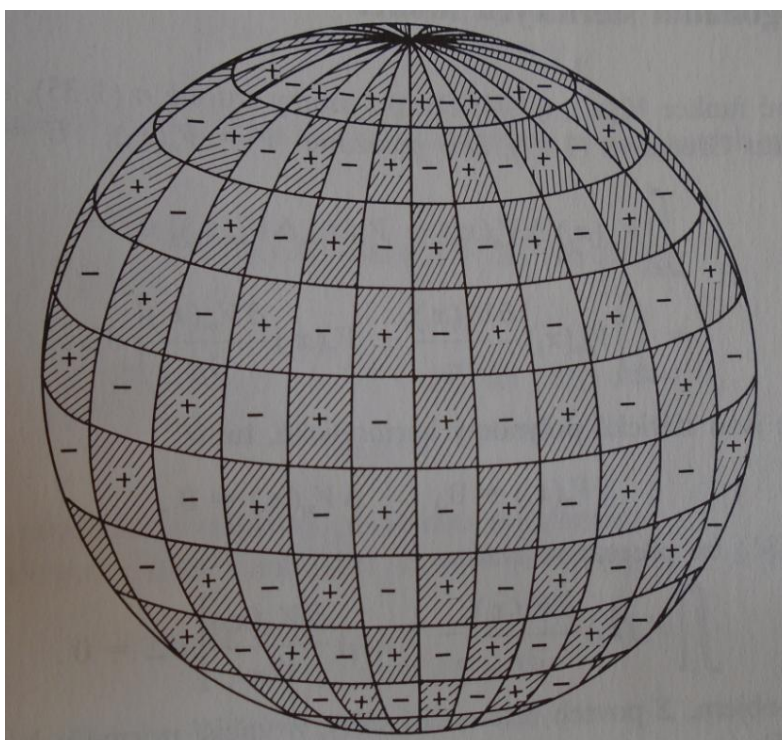
Podle popsaných pravidel je soustava $2n+1$ sférických funkcí stupně n tvořena 1 funkcí zonální, 2 funkcemi sektorálními a $2n-2$ funkcemi tesserálními. Pro lepší představu uvádíme grafické znázornění průběhu všech tří typů sférických funkcí.



Obrázek 2.2: Schematické znázornění zonální sférické funkce 7. stupně [1]



Obrázek 2.3: Schematické znázornění sektorální sférické funkce 12. stupně [1]



Obrázek 2.4: Schematické znázornění tesserální sférické funkce 21. stupně a 12.řádu [1]

2.4 Numerická integrace

Pro výpočet Fourierových koeficientů gravitačního potenciálu je nutné použít některou z metod numerické integrace. Na základě předchozích testování metod numerické integrace v práci [21], byla pro výpočet použita metoda Gaussovy numerické integrace, jejíž formulace je následující

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (2.13)$$

Výpočet integrálu je převeden na sumu vah $w_i > 0$, které jsou vynásobeny hodnotou funkce v jednotlivých uzlech Gaussovy integrace x_i . Pro integraci dvojrozměrné funkce platí vztah

$$\iint_S f(x, y) dS = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n w_j f(x_i, y_j) \quad (2.14)$$

V práci používáme pro výpočet vah a uzlů Gaussovu-Legendreovu formu, která počítá hodnoty uzlů jako řešení Legendreova polynomu stupně n . Legendreovy polynomy mohou být spočteny pomocí Rodriguesova vzorce (2.8). Váhy jsou spočteny následovně [11]

$$w_i = -\frac{2}{(1-x^2)[P'_n(x_i)]^2} \quad (2.15)$$

Další formy Gaussovy integrace lze nalézt v [wiki]. Pro změnu integrace z normalizovaného intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ na obecný interval $\langle a, b \rangle$ platí

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right] dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left[\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right] \quad (2.16)$$

Hodnoty vah a uzlů pro Gaussovu-Legendreovu integraci jsou uvedeny do 5. stupně [11] a do 70. stupně [10].

2.4.1 Gaussova-Legendreova numerická integrace

Užitím Gaussovy integrace stupně n je možné přesně počítat hodnoty polynomů do stupně $2n+1$. Jednou z možností, jak zvyšovat přesnost výpočtu integrace, je tedy zvyšování stupně n numerické integrace. Metoda zvyšování stupně Gaussovy-Legendreovy integrace byla použita v práci [23], která dokazuje vyslovený předpoklad, tedy se zvyšujícím se stupněm integrace roste počet platných cifer výsledku. Dalším způsobem, kterým je možné dosáhnout lepších výsledků integrace, je postupné dělení intervalu, na kterém je funkce definována. Pokud je tedy spojitá funkce $f(x)$ integrovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak můžeme využít vlastnosti integrace [24]

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{b+a}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{b+a}{2}}^b f(x)dx \quad (2.17)$$

Obdobně pokud budeme integrovat spojitou funkci dvou proměnných $f(x, y)$ na intervalu $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, platí [17]

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y)dx &= \int_a^{\frac{b+a}{2}} \int_c^{\frac{d+c}{2}} f(x, y)dxdy \\ &+ \int_{\frac{b+a}{2}}^b \int_c^{\frac{d+c}{2}} f(x, y)dxdy + \\ &+ \int_a^{\frac{b+a}{2}} \int_{\frac{d+c}{2}}^d f(x, y)dxdy + \int_{\frac{b+a}{2}}^b \int_{\frac{d+c}{2}}^d f(x, y)dxdy \end{aligned} \quad (2.18)$$

Takto můžeme opakovaně dělit každou ze 4 nově vzniklých oblastí integrace na menší podoblasti, dokud nebude splněna podmínka (matematik promíne inženýrský zápis)

$$\left| \iint_S f(x, y)dxdy - \sum_{i=1}^4 \iint_{S_i} f(x, y)dxdy \right| < \varepsilon, \quad (2.19)$$

kde ε představuje přípustnou chybu integrace, která může být volena libovolně. Pomocí vzorce (2.18) můžeme snížit stupeň integrace n bez ztráty požadované přesnosti vyjádřené jako (2.19).

V následujících tabulkách budou porovnávány časové nároky Gaussovy-Legendreovy integrace při použití metody postupného dělení intervalu. Přesnost je vyjádřena pomocí ε . Použity budou různé stupně integrace za účelem nalezení optima z hlediska časové náročnosti výpočtu. Metoda bude dále porovnána s metodou zvyšování stupně integrace n bez dělení intervalů.

Tabulka 2.1: Gaussova-Legendreova integrace 2. stupně

Funkce	Interval	ε	Čas [s]	Výsledek
$\cos(xy)$	$(\frac{\pi}{4}, \pi)(\frac{\pi}{6}, \pi)$	1e-15	0.719	-1.115194054944834
$\cos^2 xy \sin(\frac{x}{y^2})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{7})(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$	1e-15	0.207	0.07883618371306
$(\sqrt{xy} + \frac{yx}{3})^3 - \sqrt{\frac{y^7}{\sqrt{x}}}$	(3,10), (1,20)	1e-15	26.7	6948460.96454307
$\sqrt{\cos x^5} - \sqrt[2]{(xy)^3}$	$(0, \frac{\pi}{3}), (17, 45)$	1e-15	12.8	-207.018982323030
$(\sqrt{\cosh x})^5 - \sqrt[2]{(\cosh x \times y)^7}$	$(0, \frac{\pi}{3}), (17, 45)$	1e-15	7.79	-17215.4986073169
$(\sqrt{\cosh x})^3 - \sqrt{\sinh x \sinh y}$	(0, 2) (0, 12)	1e-15	111	-1166.97147806891

Tabulka 2.2: Gaussova-Legendreova integrace 4. stupně

Funkce	Interval	ε	Čas [s]	Výsledek
$\cos(xy)$	$(\frac{\pi}{4}, \pi)(\frac{\pi}{6}, \pi)$	1e-15	0.00743	-1.1151940549508
$\cos^2 xy \sin(\frac{x}{y^2})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{7})(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$	1e-15	0.00179	0.07883618371322
$(\sqrt{xy} + \frac{yx}{3})^3 - \sqrt{\frac{y^7}{\sqrt{x}}}$	(3,10), (1,20)	1e-15	4.28	6948460.96454329
$\sqrt{\cos x^5} - \sqrt[2]{(xy)^3}$	$(0, \frac{\pi}{3}), (17, 45)$	1e-15	8.12	-207.018982323960
$(\sqrt{\cosh x})^5 - \sqrt[2]{(\cosh x \times y)^7}$	$(0, \frac{\pi}{3}), (17, 45)$	1e-15	0.506	-17215.4986073163
$(\sqrt{\cosh x})^3 - \sqrt{\sinh x \sinh y}$	(0, 2) (0, 12)	1e-15	99.0	-1166.97147806890

Tabulka 2.3: Gaussova-Legendreova integrace 6. stupně

Funkce	Interval	ε	Čas [s]	Výsledek
$\cos(xy)$	$(\frac{\pi}{4}, \pi)(\frac{\pi}{6}, \pi)$	1e-15	0.00109	-1.1151940549508
$\cos^2 xy \sin\left(\frac{x}{y^2}\right)$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{7})(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$	1e-15	0.00162	0.07883618371323
$(\sqrt{xy} + \frac{yx}{3})^3 - \sqrt{\frac{y^7}{\sqrt{x}}}$	(3,10) (1,20)	1e-15	9.83	6948460.96454298
$\sqrt{\cos x^5} - \sqrt[2]{(xy)^3}$	$(0, \frac{\pi}{3})$ (17, 45)	1e-15	14.62	-207.018982323035
$(\sqrt{\cosh x})^5 - \sqrt[2]{(\cosh x \times y)^7}$	$(0, \frac{\pi}{3})$ (17, 45)	1e-15	1.07	-17215.4986073164
$(\sqrt{\cosh x})^3 - \sqrt{\sinh x \sinh y}$	(0, 2) (0, 12)	1e-15	134	-1166.9714780687

Tabulka 2.4 : Gaussova-Legendreova integrace 11. stupně

Funkce	Interval	ε	Čas [s]	Výsledek
$\cos(xy)$	$(\frac{\pi}{4}, \pi)(\frac{\pi}{6}, \pi)$	1e-15	0.000446	-1.11519405495080
$\cos^2 xy \sin\left(\frac{x}{y^2}\right)$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{7})(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$	1e-15	0.000728	0.07883618371323
$(\sqrt{xy} + \frac{yx}{3})^3 - \sqrt{\frac{y^7}{\sqrt{x}}}$	(3,10), (1,20)	1e-15	92.2	6948460.96454330
$\sqrt{\cos x^5} - \sqrt[2]{(xy)^3}$	$(0, \frac{\pi}{3})$, (17, 45)	1e-15	22.946	-207.018982323030
$(\sqrt{\cosh x})^5 - \sqrt[2]{(\cosh x \times y)^7}$	$(0, \frac{\pi}{3})$ (17, 45)	1e-15	4.25	-17215.4986073162
$(\sqrt{\cosh x})^3 - \sqrt{\sinh x \sinh y}$	(0, 2) (0, 12)	1e-15	221	-1166.9714780691

Tabulka 2.5: Gaussova-Legendreova integrace 50. stupně bez dělení intervalu

Funkce	Interval	Čas [s]	Výsledek
$\cos(xy)$	$(\frac{\pi}{4}, \pi)(\frac{\pi}{6}, \pi)$	0.00560	-1.115194054944834
$\cos^2 xy \sin\left(\frac{x}{y^2}\right)$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{7})(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$	0.0788	0.07883618371322
$(\sqrt{xy} + \frac{yx}{3})^3 - \sqrt{\frac{y^7}{\sqrt{x}}}$	(3,10), (1,20)	0.005	6948460.96454314
$\sqrt{\cos x^5} - \sqrt[2]{(xy)^3}$	$(0, \frac{\pi}{3})$, (17, 45)	0.007	-207.019008976385
$(\sqrt{\cosh x})^5 - \sqrt[2]{(\cosh x \times y)^7}$	$(0, \frac{\pi}{3})$ (17, 45)	0.011	-17215.4986074179
$(\sqrt{\cosh x})^3 - \sqrt{\sinh x \sinh y}$	(0, 2) (0, 12)	0.00139	-1166.97283639707

Tabulka 2.6 : Hodnoty integrace spočtené z prostředí WolframAlpha

Funkce	Interval	Výsledek
$\cos(xy)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) \left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$	-1.11519405495078
$\cos^2 xy \sin\left(\frac{x}{y^2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{7}\right) \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$	0.07883618371306
$\left(\sqrt{xy} + \frac{yx}{3}\right)^3 - \sqrt{\frac{y^7}{x}}$	(3,10), (1,20)	6948460.96454316
$\sqrt{\cos x^5} - \sqrt[2]{(xy)^3}$	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), (17, 45)$	-207.018982323030
$(\sqrt{\cosh x})^5 - \sqrt[2]{(\cosh x \times y)^7}$	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right) (17, 45)$	-17215.4986073164
$(\sqrt{\cosh x})^3 - \sqrt{\sinh x \sinh y}$	(0, 2) (0, 12)	-1166.97147806890

Výsledek v každé tabulce je uváděn na 15 platných cifer. Zvýrazněná část výsledku je ta, ve které se metoda shoduje s výpočtem v prostředí WolframAlpha, vyvíjeného společností Wolfram Alpha LLC. V první tabulce uvažujeme nejmenší možný 2. stupeň Gaussovy integrace. Ten dává z pohledu přesnosti výpočtu dobré výsledky. Dále byl zvolen 4. stupeň, který dosahuje srovnatelné přesnosti, ale s nižšími časovými nároky na výpočet. Následují další 6. a 11. stupeň integrace, u kterých je dosahováno podobné přesnosti, avšak při pohledu na časovou náročnost výpočtu je patrné, že se zvyšujícím stupněm integrace se zvyšují i její časové nároky. Tento nárůst je především patrný u složitějších funkcí, ve kterých se vyskytují odmocniny spolu s mocninami vyšších řádů. Časová náročnost pro výpočty, jejichž čas nutný k výpočtu byl menší než 10 sekund, byla brána jako průměr ze sta měření. Vzhledem k časové náročnosti byly pro další výpočty interpolace gravitačního potenciálu zvoleny především 4., 6. a 11. stupně. Postup výpočtu hodnoty integrované funkce na dvourozměrném intervalu pomocí metody postupného dělení intervalů je možné srovnat s výpočtem hodnoty integrálu pomocí rostoucího stupně n Gaussovy-Legendreovy integrace. Zvolen byl 50. stupeň, viz tabulka 2.5. Je zřejmé, že metoda pro daný stupeň dosahuje podstatně horších výsledků z hlediska přesnosti. Pro zpřesnění výsledků by tedy bylo nutné použití vyšších stupňů n numerické integrace. Pro výpočet gravitačního potenciálu bude použito 4., 6. a 11. stupně Gaussovy-Legendreovy numerické integrace s postupným dělením intervalů.

2.5 Výpočet Legendreových asociovaných funkcí

Výpočet je v programu realizován pomocí rekurze. Hodnoty funkce pro sférickou šířku φ jsou ukládány do matice. Z vlastností uvedených v části 2.2 víme, že pokud je řád Legendreovy asociované funkce větší než její stupeň, je hodnota funkce rovna 0. Při uvážení následujícího tvrzení, vzniká pro každou sférickou šířku φ dolní trojúhelníková matice. K přístupu k jednotlivým členům matice je užito řádu a stupně požadované Legendreovy asociované funkce, jež slouží jako indexy. Vztahy pro výpočet je možné nalézt v kapitole 6. Pro rekurzivní výpočet nenormovaných Legendreových asociovaných funkcí je nutné definovat první dva členy

$$P_{00}(\sin \varphi) = 1, \quad P_{10}(\sin \varphi) = \sin \varphi \quad (2.20)$$

Následně spočteme hodnoty funkce na hlavní diagonále matice

$$P_{nn}(\sin \varphi) = (2n - 1) \cos \varphi P_{n-1,n-1}(\sin \varphi) \quad (2.21)$$

Po výpočtu hodnot na hlavní diagonále jsme schopni spočítat hodnoty na první vedlejší diagonále

$$P_{n,n-1}(\sin \varphi) = (2n - 1) \cos \varphi P_{n-1,n-2}(\sin \varphi) \quad (2.22)$$

Ostatní funkční hodnoty se spočtou ze vztahu

$$P_{n,m}(\sin \varphi) = \frac{2n - 1}{n - m} \sin \varphi P_{n-1,m}(\sin \varphi) - \frac{n + m - 1}{n - m} P_{n-2,m}(\sin \varphi) \quad (2.23)$$

Takto je definován rekurzivní výpočet Legendreových nenormovaných funkcí, pro libovolný stupeň n a řád m . Další možností je vytvoření Legendreových asociovaných normovaných funkcí na celé sféře. Norma je ve výpočtu volena následujícím způsobem

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \frac{\cos m\lambda}{\sin m\lambda} \right]^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda = 1 \quad (2.24)$$

Ta přiřazuje integraci sférických funkcí přes jednotkovou sféru podmínku ortonormality [7]. Pro rekurzivní výpočet normovaných Legendreových asociovaných funkcí je nutné definovat následující členy

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{00}(\sin \varphi) &= 1 \\
 \bar{P}_{10}(\sin \varphi) &= \sqrt{3} \cdot \sin \varphi \\
 \bar{P}_{11}(\sin \varphi) &= \sqrt{3} \cdot \cos \varphi \quad \bar{P}_{21}(\sin \varphi) = \sqrt{15} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Prvky na hlavní diagonále jsou vypočítány následovně

$$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \cdot \cos \varphi \cdot \bar{P}_{n-1,n-1}(\sin \varphi)
 \tag{2.26}$$

V dalším kroku jsou spočítány prvky na první vedlejší diagonále

$$\bar{P}_{n,n-1}(\sin \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{2n-2}} \cdot \cos \varphi \cdot \bar{P}_{n-1,n-2}(\sin \varphi)
 \tag{2.27}$$

Pro výpočet ostatních prvků spodní trojúhelníkové matice platí

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) &= w_n \cdot \left(\sin \varphi \cdot \bar{P}_{n-1,m}(\sin \varphi) - \frac{1}{w_{n-1}} \cdot \bar{P}_{n-2,m}(\sin \varphi) \right) \\
 w_n &= \sqrt{\frac{(2n+1) \cdot (2n-1)}{(n+m) \cdot (n-m)}}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

V programu je užito obou rekurzivních výpočtů. Volba způsobu výpočtu je nechána na uživateli. Z hlediska přesnosti výpočtu není mezi metodami rozdíl [23]. V případě normovaných hodnot Legendreových asociovaných funkcí je však zabráněno rychlému nárůstu hodnot pro případy, kdy se řád m blíží velikosti stupně n počítané funkce.

Kapitola 3

3 Interpolace dat

Pro výpočet hodnoty gravitačního potenciálu v bodě P , který nenáleží do množiny bodů, jimiž je model definován, je nutné během Gaussovy integrace využít interpolačních metod. Při interpolaci předpokládáme, že gravitační potenciál je definovaný spojitou funkcí na celé sférické ploše aproximující zemský povrch. Tento předpoklad je pro reálné pole gravitačního potenciálu splněn. Kapitola je výčtem použitých interpolačních metod s jejich charakteristikou. V kapitole 6 jsou prezentovány tabulky s dosaženými výsledky výpočtu gravitačního potenciálu v bodech na sféře při použití popsaných interpolačních metod, spolu s časovými nároky jednotlivých metod, které vzhledem k výpočetní složitosti bylo nutné brát v úvahu.

3.1 Interpolační metody

3.1.1 Nearest neighbour (metoda nejbližšího souseda)

Jedná se o nejjednodušší použitou interpolační metodu. Neznámá hodnota gravitačního potenciálu v uvažovaném bodě je rovna hodnotě jeho nejbližšího bodu. Protože se pohybujeme na sféře, je výpočet vzdálenosti dvou bodů $P(\phi_1, \lambda_1)$, $P_1(\phi_2, \lambda_2)$ následující

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \arccos(\sin \phi_1 * \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2 * \cos \Delta\lambda) \\ d &= \Delta\sigma * R, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $\Delta\sigma$ je úhel sevřený body P , S , P_1 a S je střed sféry o poloměru R . $\Delta\lambda$ je rozdíl zeměpisných délek v absolutní hodnotě.

3.1.2 Inverse distance weight (metoda inverzních vzdáleností)

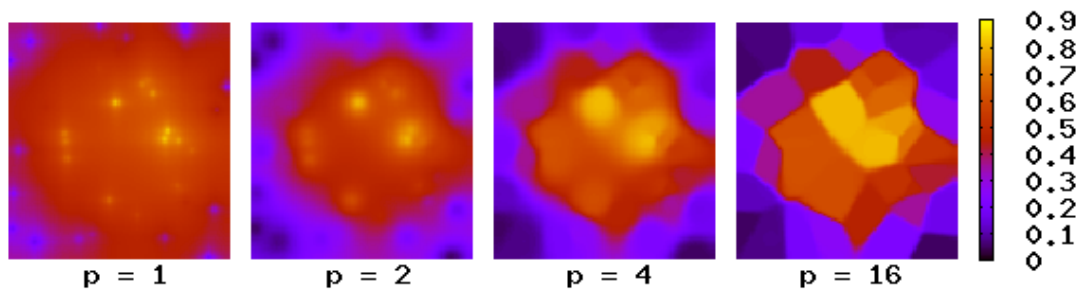
Metoda zkráceně označovaná jako IDW. Jedná se o multivariační interpolační metodu. Jméno metody vychází z volby váhy příspěvku jednotlivých bodů, která je volená jako inverzní vzdálenost od bodu, jehož funkční hodnotu interpolujeme. Vzorec pro výpočet interpolované hodnoty je

$$u(x) = \frac{\sum_{i=1}^N w_i(x) u_i}{\sum_{i=1}^N w_i(x)}, \quad (3.2)$$

kde u_i je funkční hodnota v bodě i a w_i je váha i -tého bodu, která se spočítá následovně

$$w_i(x) = \frac{1}{d(x, x_i)^p}, \quad (3.3)$$

kde d je vzdálenost i -tého bodu od bodu x , ve kterém je funkční hodnota interpolována a p je silový parametr ve tvaru kladného reálného čísla. Velikost váhy je tak nepřímoúměrná vzdálenosti od bodu s interpolovanou funkční hodnotou. Při zvyšování hodnoty silového parametru p zvyšujeme vliv bodů v nejbližším okolí interpolovaného bodu. V části 3.2 je pro metodu IDW užito několika silových parametrů. Metoda se často používá v GIS (geografické informační systémy).



Obrázek 3.1: IDW metoda pro různé silové parametry $f(x,y) = \exp(-x^2 - z^2)$ [18]

3.1.3 Bilinear interpolation (bilineární interpolace)

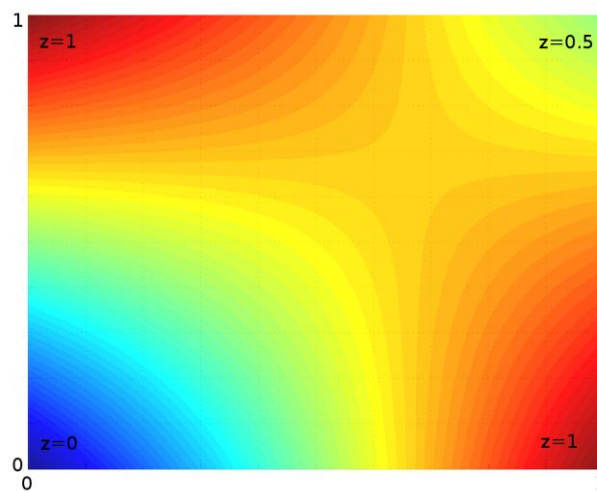
Je rozšířením lineární interpolace pro funkce dvou proměnných. Princip je založen na interpolaci ve směru jedné ze souřadnicových os a následně v interpolaci ve směru druhé souřadnicové osy. Pořadím interpolace ve směru souřadnicových os není výsledná funkční hodnota bodu ovlivněna. Výpočet probíhá následovně. Máme 4 body $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_1, y_2)$, $Q_3(x_2, y_1)$, $Q_4(x_2, y_2)$ a v nich známou hodnotu interpolované funkce $f(x,y)$. Potom hodnotu funkce v bodě můžeme vyjádřit jako

$$f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy, \quad (3.4)$$

kde a_i představují koeficienty spočtené následovně

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{f(Q_1)x_2y_2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_2)x_2y_1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_3)x_1y_2}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_4)x_1y_1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} \\
 a_1 &= \frac{f(Q_1)y_2}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_2)y_1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_3)y_2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_4)y_1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} \\
 a_2 &= \frac{f(Q_1)x_2}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_2)x_2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_3)x_1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_4)x_1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} \\
 a_3 &= \frac{f(Q_1)}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_2)}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_3)}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_4)}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $f(Q_1), f(Q_2), f(Q_3), f(Q_4)$ jsou funkční hodnoty v jednotlivých bodech. Bilineární interpolace předpokládá rozložení bodů na pravidelném 2D gridu. Interpolace se používá například při zpracování obrazu jako jedna ze základních technik vzorkování.

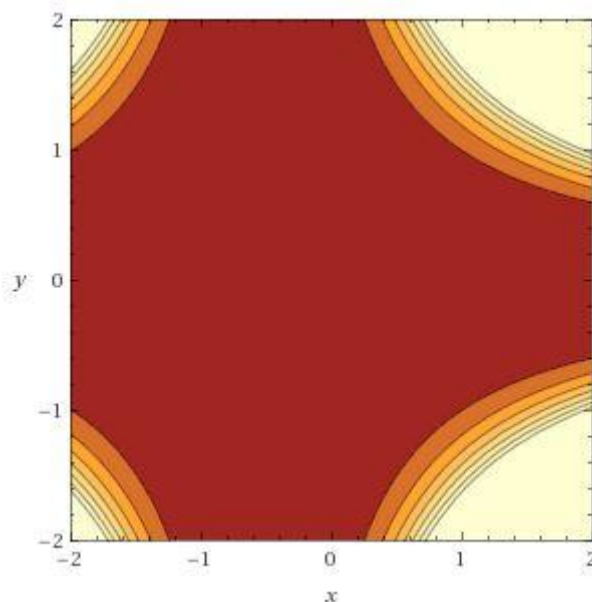


Obrázek 3.2: Bilineární interpolace na jednotkové čtvercové oblasti [18]

3.2 Srovnání interpolačních metod

Pro dané interpolační metody byla vytvořena sada funkcí dvou proměnných, na kterých je porovnávána přesnost interpolace v různých bodech definičního oboru funkcí vzhledem ke známé hodnotě funkce v bodě. Pro každou funkci je vytvořen pravidelný rastr bodů na dvourozměrném intervalu $S = \langle -2, 2 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle$, kde souřadnice x, y bodů rastru jsou celočíselné. Na definovaném intervalu tak máme 25 bodů, ve kterých známe hodnoty funkce a které používáme pro interpolaci hodnot v zájmových bodech. Pro každou funkci jsou vybrány 4 body pro interpolaci. Každý ze 4 bodů leží v jiném kvadrantu. Pro každou funkci je součástí graf vrstevnic, který usnadňuje představu o průběhu funkce na daném intervalu S . V tabulkách výsledků

představuje Bil – bilineární metodu interpolace, IDW p – metodu inverzních vzdáleností, kde p představuje hodnotu silového parametru použitého při interpolaci. NearN je zkratkou pro interpolační metodu nejbližšího souseda. Hodnota reprezentuje správný výsledek v bodě, který je zadán v prvním sloupci tabulky souřadnicemi x a y . Výsledky jsou uváděny na 3 platné cifry.

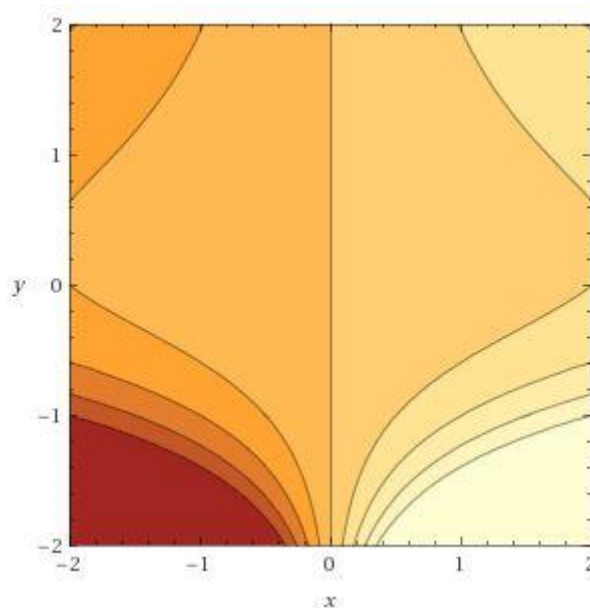


Obrázek 3.3: vrstevnice funkce $f(x, y) = \left(xy + \frac{y}{2}\right)^4$

Tabulka 3.1: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $f(x, y) = \left(xy + \frac{y}{2}\right)^4$

Bod	Bil	IDW 1	IDW 2	IDW 4	IDW 6	NearN	Hodnota
0.12, 0.5	0.0110	0.878	0.550	0.192	0.0750	0	0.00956
1, -1.35	31.9	114	59.3	16.0	7.56	5.06	16.8
-1.5, -0.7	1.79	1.52	1.75	2.12	2.34	1.79	0.241
-0.75, 1.35	0.39	0.446	0.352	0.197	0.116	0.0625	0.0130

Jedná se o interpolaci polynomické funkce 4. stupně, která ve směrech od bodu $x(-0.5, 0)$ rychle roste. Nejlepší výsledek byl dosažen pro interpolaci prvního bodu, kde lze sledovat konvergenci interpolované hodnoty s očekávanou hodnotou funkce v daném bodě při zvyšujícím se silovém parametru p v metodě IDW. Tento trend je dále pozorovatelný při interpolaci ve 4. bodě. V prvním bodě dosáhla velmi dobrého výsledku bilineární interpolace. V ostatních případech jsou celkově velké nesrovnalosti oproti skutečné hodnotě v bodě. Z obrázku 3.3 je patrné, že tyto body leží na oblastech, kde se funkční hodnoty s rostoucím x, y rychle zvětšují.

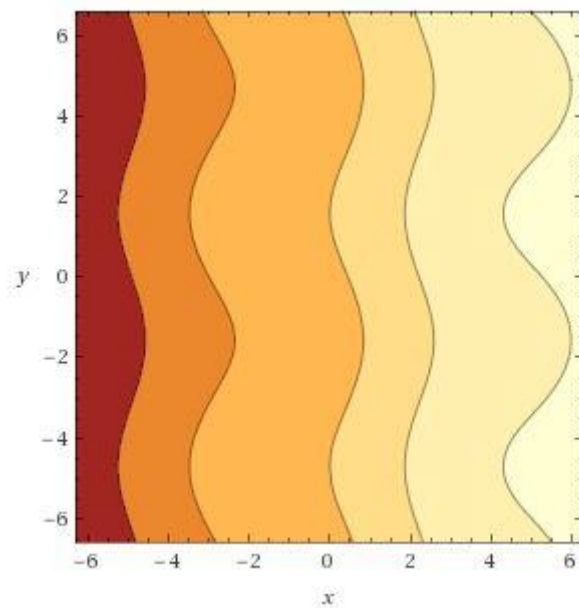


Obrázek 3.4: vrstevnice funkce $f(x,y) = xy + \frac{x}{5y}$

Tabulka 3.2: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $f(x,y) = xy + \frac{x}{5y}$

Bod	Bil	IDW 1	IDW 2	IDW 4	IDW 6	NearN	Hodnota
1.25, 1.75	2.28	2.33	2.22	2.08	2.05	2.04	2.26
1.5, -1.25	3.13	16.9	13.9	9.67	7.53	4	9.34
-1.75, 0.5	-1.93	-1.77	-1.89	-2.05	-2.14	-2	-1.66
-0.5, -1.25	-4.37	-5.64	-4.64	-3.22	-2.51	0	-3.12

Z tabulky 3.2 je zřejmá především dobrá shoda očekávaného výsledku s interpolovaným v prvním bodě při použití bilineární metody spolu s metodou IDW při použití silového parametru 1 a 2. Pro druhý a čtvrtý bod se jako nejlepší metoda jeví IDW se silovým parametrem 4. Oba body se nacházejí v místě, kde dochází k rychlému nárůstu funkčních hodnot pro rostoucí x a y v absolutní hodnotě.

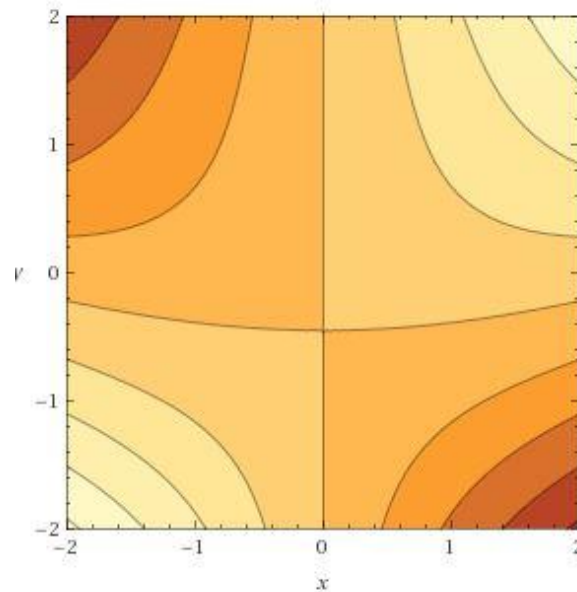


Obrázek 3.5: vrstevnice funkce $f(x, y) = \sin(y) + 2x - \cos(x)$

Tabulka 3.3: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $(x, y) = \sin(y) + 2x - \cos(x)$

Bod	BiL	IDW 1	IDW 2	IDW 4	IDW 6	NearN	Hodnota
1.15, 1.85	2.80	3.100	2.60	2.38	2.37	2.80	2.85
0.75, -0.35	0.550	0.204	0.587	1.13	1.35	1.46	0.425
-1.95, 0.65	-2.74	-2.76	-2.81	-2.79	-2.76	-2.74	-2.92
-0.45, -1.35	-2.56	-2.60	-2.55	-2.45	-2.34	-1.84	-2.77

U třetí funkce je z obrázku 3.5 zřejmá plynulá změna funkčních hodnot ve směru x-ové souřadnice. Metoda bilineární interpolace tak dává poměrně dobré výsledky pro všechny interpolované body. Pro metodu IDW je dosaženo nejlepších hodnot při použití silového parametru 2.



Obrázek 3.6: vrstevnice funkce $f(x,y) = 2xy + \sin(x) \cos(y)$

Tabulka 3.4: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $f(x,y) = 2xy + \sin(x) \cos(y)$

Bod	Bil	IDW 1	IDW 2	IDW 4	IDW 6	NearN	Hodnota
0.45, 1.65	1.45	1.48	1.42	1.28	1.10	0	1.45
1.15, -0.85	-1.44	-1.22	-1.46	-1.54	-1.55	-1.55	1.45
-1.85, 0.45	-2.38	-2.22	-2.21	-2.04	-1.79	-0.909	-2.53
-0.15, -1.2	0.316	0.760	0.267	0.019	0.001	0	0.306

Nejlepší výsledky interpolace jsou opět dosaženy pro bilineární metodu interpolace spolu s metodou IDW pro silový parametr 2.

Použité interpolační metody jsou vhodné pro funkce, u kterých nedochází k rychlému nárůstu funkčních hodnot se změnou souřadnic bodu. Při použití polynomických funkcí vyšších řádu jsou metody obecně nevhodné a nedokážou vystihnout rychlý nárůst změn funkčních hodnot. Naopak pro funkce, které mění svoji funkční hodnotu plynule, jsou použité metody vyhovující. Nejlepších výsledků pro tyto funkce je dosahováno bilineární interpolací spolu s metodou inverzních vzdáleností při použití silového parametru 2. stupně. Možným řešením problému s nedostatečnou přesností je vytvoření hustší sítě bodů, ze kterých je hodnota funkce v bodě interpolována. Pokud pro první funkci vytvoříme pravidelný grid o 100 bodech, dostáváme následující výsledky.

Tabulka 3.5: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $f(x, y) = xy + \frac{x}{5y}$, pro pravidelný 100 bodový grid

Bod	Bil	IDW 1	IDW 2	IDW 4	IDW 6	NearN	Hodnota
0.12, 0.5	0.0290	0.0529	0.0317	0.00900	0.00300	0.0016	0.00956
1, -1.35	21.0	22.6	21.1	18.4	16.3	17.3	16.8
-1.5, -0.7	0.363	0.297	0.415	0.554	0.590	0.599	0.241
-0.75, 1.35	0.0267	0.0208	0.022	0.0206	0.0186	0.0168	0.0130

V porovnání s tabulkou 3.1 došlo ke zpřesnění hodnot bilineární transformace, kromě interpolované hodnoty funkce v prvním bodě. Metoda inverzních vzdáleností pro všechny silové parametry dosahuje lepší interpolace. Z tabulky 3.5 je patrné, že při zvyšování silového parametru, čímž je zvyšována váha nejbližších bodů na výslednou hodnotu, se metoda blíží hodnotám metody nejbližšího souseda. Metoda nejbližšího souseda dosahuje dobrých výsledků především v blízkém okolí bodů se známou funkční hodnotou, a to pouze za předpokladu plynulé změny funkční hodnoty v okolí bodu. Z použitých interpolačních metod se tak jeví jako nejlepší metoda IDW se silovým parametrem 2. a 4. stupně, a metoda bilineární transformace. Tyto metody budou v další kapitole dále porovnávány z hlediska přesnosti dosažených výsledků pro výpočet gravitačního potenciálu. Dále budeme porovnávat jejich časové náročnosti. Kromě zmíněných metod existují další, které předpokládají známou funkční hodnotu první, případně i druhé derivace a jsou tak schopny lépe interpolovat funkce v bodech, kde dochází k rychlým změnám funkčních hodnot v závislosti na směru od bodu. Tyto metody lze nalézt v [17]. Pro úlohu výpočtu gravitačního potenciálu ovšem nejsou použitelné vzhledem k faktu, že model je definován svými povrchovými hodnotami gravitačního potenciálu v jednotlivých bodech a hodnoty derivace nejsou známé.

Kapitola 4

4 Tvorba modelu

Úlohu výpočtu gravitačního potenciálu řešíme pomocí první vnější okrajové úlohy pro sféru. Úloha řeší výpočet gravitačního potenciálu V_e vně tělesa T generujícího gravitační pole, při známých hodnotách gravitačního potenciálu na povrchu tělesa T . Pro zvolenou metodu výpočtu je proto nutné vytvořit matematický model gravitačního potenciálu na sféře. Pro účely práce byly vytvořeny dva modely gravitačního potenciálu, které se od sebe liší počtem bodů. Na těchto modelech jsou následně realizovány výpočty v kapitole 6. Vycházíme ze vzorce pro výpočet tíhového potenciálu [3]

$$W = V + Q, \quad (4.1)$$

kde V je gravitační potenciál a Q potenciál odstředivé síly. Potenciál odstředivé síly se spočítá jako [3]

$$Q = \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2 \cos^2 \varphi, \quad (4.2)$$

kde ρ je geocentrická vzdálenost bodu ω je úhlová rychlost rotace Země a φ je sférická šířka bodu. Gravitační potenciál je poté vyjádřen jako [3]

$$V = W_0 - \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2 \cos^2 \varphi \quad (4.3)$$

Pro tvorbu modelu byly použity konstanty z geodetického referenčního systému GRS80, viz tabulka 4.1.

Tabulka 4.1: Konstanty GRS1980 použité pro výpočet gravitačního potenciálu [7]

Název konstanty	Symbol	Hodnota	Jednotky
Tíhový potenciál na povrchu Země	W_0	62 636 858.8	$[m^2 s^{-2}]$
Úhlová rychlost rotace Země	ω	$7\,292\,115 \times 10^{-11}$	$[rad\ s^{-1}]$
Poloměr koule nahrazující tvar Země	ρ_0	6 371 000.79	$[m]$

Takto vytvořený model je symetrický podél rovníku a navíc má ve všech bodech na libovolné rovnoběžce stejnou hodnotu gravitačního potenciálu V , protože není závislý na sférické délce

bodu. Proto byly všechny funkční hodnoty dále upraveny pomocí náhodného generátoru tak, aby byla porušena symetrie okolo rovníku a stejné hodnoty gravitačního potenciálu na libovolné rovnoběžce. Tímto nám vznikají dva modely gravitačního potenciálu. V obou případech se jedná o pravidelnou síť bodů s konstantním rozestupem. V prvním případě byl vytvořen model o velikosti 2500 bodů (část 6.1.1). Druhý model se skládá z 130 139 bodů. Rozestup mezi body je 0.5° ve sférické délce a 1° ve sférické šířce (část 6.1.2).

Kapitola 5

5 Tvorba programu

V této kapitole si na začátku stručně shrneme technické informace o programu. V další části se zaměříme na vysvětlení implementace jednotlivých částí programu. Implementační část bude rozdělena do dvou sekcí. První se zabývá tvorbou programu a modelu gravitačního potenciálu pro celou sféru. V další se zabýváme případem, kdy chceme počítat gravitační potenciál pro lokální území, která leží na sféře. Druhou část rozšíříme o postup tvorby lokálního ortogonálního systému sférických funkcí.

5.1 Technické informace

Program je psán v jazyce C++ ve vývojovém prostředí CLion 2016.3.4 společnosti JetBrains. Použitým operačním systémem je Ubuntu 16.04.2 LTS. Grafické rozhraní programu je vytvořeno v Qt Creator 5.8.0. Pro překlad programu je používán překladač GCC 5.3.1. Program byl spouštěn na notebooku MSI GP70 s procesorem od společnosti Intel model i7-4700MQ 2.4 GHz. Pro rychlejší výpočty bylo v programu přistoupeno k multithreadingu [20] a výpočet gravitačního potenciálu tak byl rozdělen na více jader procesoru. Veškeré výpočty a výpočetní časy jsou vztaženy k těmto parametrům.

5.2 Globální model gravitačního potenciálu



Obrázek 5.1: Schéma výpočtu gravitačního potenciálu pro globální model

Běh programu pro výpočet gravitačního potenciálu v bodech je zjednodušeně naznačen v obrázku 5.1. V prvním kroku dochází k načtení datového modelu gravitačního potenciálu ve formátu TXT. Vstupní formát dat může být zadán jako matice $n*n$ bodů, kde se předpokládá pravidelné rozložení bodů na sféře. V tomto případě je nutné zadat souřadnice bodu v prvním řádku a prvním sloupci souboru, od kterého budou spočteny souřadnice ostatních bodů pravidelné sítě. Druhou možností je textový soubor, ve kterém je každý řádek určen pro jeden bod, který je zadán svou sférickou šířkou, sférickou délkou a hodnotou gravitačního potenciálu. Oddělovačem dat na řádcích může být mezerník nebo středník. Vzhledem k náročnosti úlohy je v dalším kroku zjištěn počet jader procesoru, na kterém bude probíhat výpočet. S užitím maker je zjištění počtu nezávislé na operačním systému uživatele. Pokud není definováno uživatelem jinak, je výpočet rozdělen na počet vláken, který je roven polovině jader procesoru nezávisle na typu (AMD, Intel). V dalším kroku následuje výpočet Fourierových koeficientů řady, ve které je gravitační potenciál (1.15) odvozen. Ten probíhá pro každé vlákno nezávisle na ostatních. Výpočet koeficientů je realizován pomocí vzorců (1.16), (1.17). Jejich hodnoty jsou vypočteny užitím Gaussovy-Legendreovy numerické integrace. Při jejím výpočtu je využita metoda půlení intervalu,

část (2.4.1). Pro každý bod Gaussovy-Legendreovy numerické integrace je spočtena hodnota gravitačního potenciálu pomocí jedné z interpolačních metod uvedených v 4. kapitole. Po výpočtu Fourierových koeficientů n -tého stupně a m -tého řádu je spočítán přírůstek gravitačního potenciálu pro dané koeficienty pomocí vzorce (1.15). Ten je následně zapsán do vektoru. Výpočetní cyklus se opakuje, dokud není hodnota stupně n a řádu m Fourierových koeficientů rovna maximálnímu stupni, který je definován uživatelem před spuštěním programu. Vypočtené hodnoty Fourierových koeficientů a hodnot gravitačního potenciálu jsou zapsány do výstupního souboru TXT.

5.3 Lokální model gravitačního potenciálu

Pro výpočet lokálního modelu gravitačního potenciálu bylo nejdříve nutné vytvořit ortogonální systém funkcí na zadaném intervalu pro sférickou šířku a sférickou délku.

5.3.1 Tvorba lokálního ortogonálního systému sférických funkcí

Lokální ortogonální systém sférických funkcí byl v programu vytvořen ze sférických funkcí, viz kapitola 2.3, pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu [14]. Následující tabulka udává prvních 5 funkcí lokálního ortogonálního systému sférických funkcí. Systém je ortogonální pro $(\varphi, \lambda) \in \langle \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6} \rangle \times \langle \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Přesnost koeficientů u jednotlivých funkcí je uváděna na 10 platných cifer.

Tabulka 5.1 Funkce lokálního ortogonálního sférického systému do 2. stupně

P_{00}	f_{00}
P_{10}	$f_{10} - 0.7644262759 * f_{00}$
P_{11}	$f_{11} + 0.2708751909 * f_{10} - 1.060930454 * f_{00}$
P_{11}'	$f_{11}' + 0.6970730979 * f_{11} + 0.5616475240 * f_{10} - 2.199791574 * f_{00}$
P_{20}	$f_{20} + 0.0004062785615 * f_{11}' + 0.0002951786532 * f_{11} - 1.709077688 * f_{10} + 1.766601035 * f_{00}$

kde f_i značí sférické funkce uvedené v následující tabulce 5.2.

Tabulka 5.2: Sférické funkce do 2. stupně

f_{00}	1
f_{10}	$\sqrt{3} \sin \varphi$
f_{11}	$\sqrt{3} \cos \varphi \cos \lambda$
f_{11}'	$\sqrt{3} \cos \varphi \sin \lambda$
f_{20}	$\sqrt{\frac{15}{4}} \left(\sqrt{3} (\sin \varphi)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

V následující tabulce je uveden skalární součin náhodně vybraných funkcí z tabulky 5.2 při použití Gaussovy integrace 6. stupně s využitím metody půlení intervalu (část 2.4). Z tabulky 5.3 je zřejmé, že pro dané skalární součiny funkcí je dosahováno maximální přesnosti datového typu double, který byl pro výpočet použit.

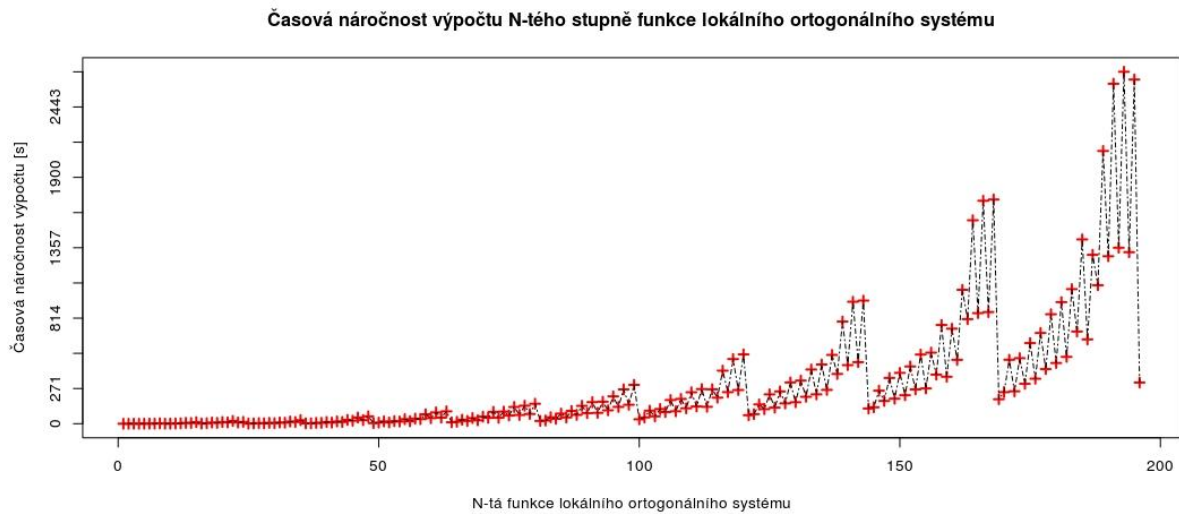
Tabulka 5.3: Výsledné hodnoty skalárního součinu funkcí lokálního ortogonálního sférického systému

$P_{00} * P_{10}$	1.7e-17
$P_{00} * P_{11}$	2.3e-17
$P_{10} * P_{11}$	1.6e-17
$P_{11} * P_{11}'$	8.3e-17
$P_{20} * P_{11}'$	-4.3e-17

Skalární součin je prováděn na části sféry. Konkrétně první skalární součin lokálních ortogonálních sférických funkcí vypadá následovně

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (\sqrt{3} \sin \varphi - 0.7644262759) \cos \varphi \, d\lambda d\varphi, \quad (5.1)$$

Časová náročnost výpočtu lokálního ortogonálního systému sférických funkcí je znázorněna v obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: Časová náročnost výpočtu funkcí lokálního ortogonálního systému sférických funkcí

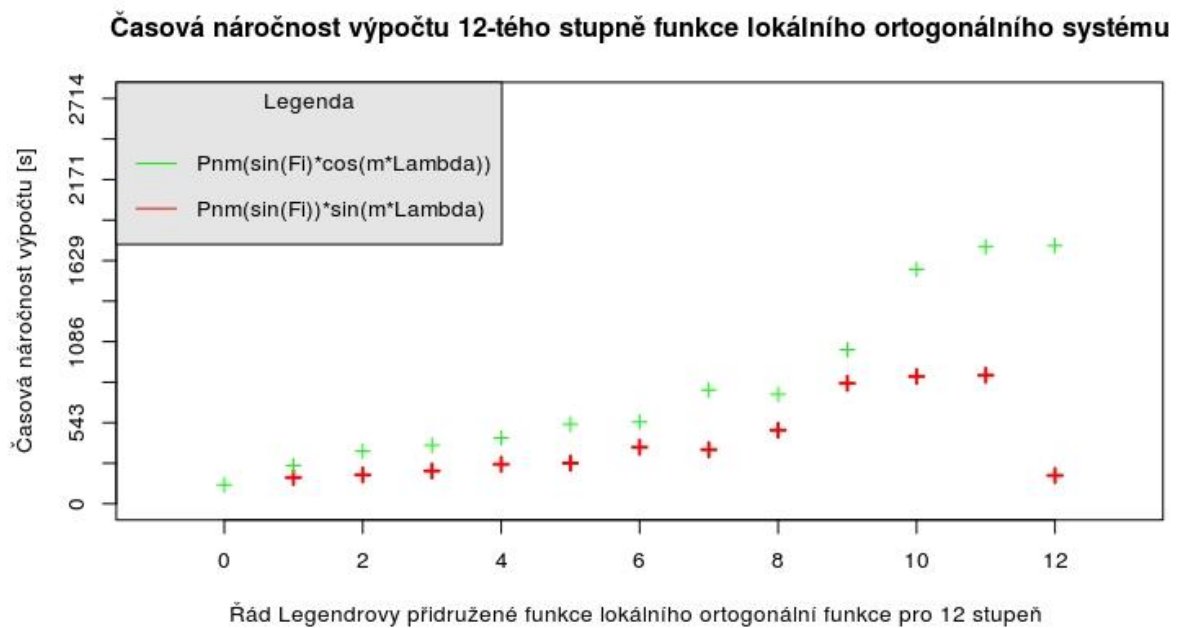
Časová náročnost je obecně pro sférické funkce s rostoucím stupněm Legendreových asociovaných funkcí rostoucí. Z grafu 5.2 je patrné, že pro každý stupeň dostáváme dvě rozdílné linie časové náročnosti v závislosti na podobě sférické funkce. Při výpočtu sférické funkce ve tvaru

$$P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda, \tag{5.2}$$

se s rostoucím řádem Legendreovy asociované funkce časová náročnost zvyšuje pro všechny řády. Při výpočtu sférické funkce ve tvaru

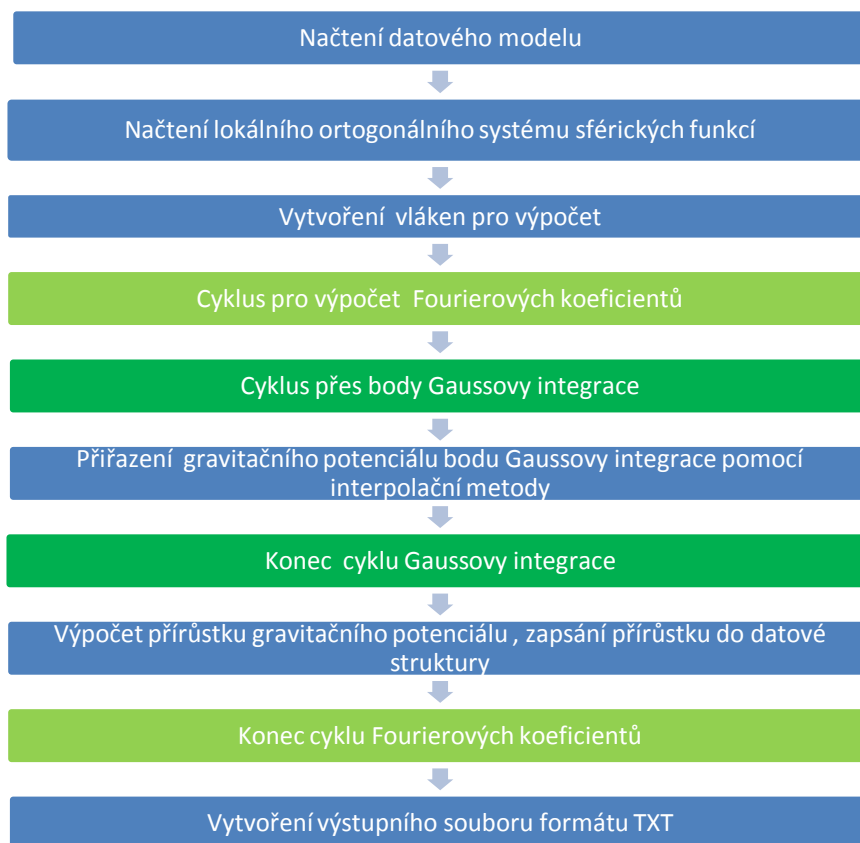
$$P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda, \tag{5.3}$$

se časová náročnost výpočtu pro vyšší řády opět zvyšuje, avšak oproti funkci (5.2), je časová náročnost celkově menší. Navíc pro poslední funkci, kde $m = n$, je porušen rostoucí trend funkce a časová náročnost je srovnatelná s náročností pro řád $m = 0$.



Obrázek 5.3: Graf časové náročnosti výpočtu funkce 12. stupně lokálního ortogonálního systému sférických funkcí

5.3.2 Postup výpočtu



Obrázek 5.4: Schéma výpočtu gravitačního potenciálu pro lokální model

Běh programu je stručně naznačen na obrázku 5.4. Oproti programu pro výpočet gravitačního potenciálu v bodech globálního modelu se liší pouze na začátku před spuštěním výpočtu. V prvním kroku je načten lokální model gravitačního potenciálu. Model je načítán ze zdrojového textového souboru. Každý řádek souboru představuje jeden bod. Bod je definován svou sférickou šířkou, sférickou délkou a hodnotou gravitačního potenciálu. Oddělovačem jednotlivých záznamů může být mezerník nebo středník. Body v textovém souboru nemusí být setříděny podle velikosti sférické šířky nebo délky. V dalším kroku je nutné definovat na jakém dvourozměrném intervalu sférické šířky a sférické délky bude výpočet realizován. Před spuštěním programu je nutné nahrát zdrojový textový soubor obsahující lokální ortogonální systém sférických funkcí. Zdrojový soubor obsahuje koeficienty, kterými jsou přenásobovány sférické funkce (část 2.3). Před jednotlivými koeficienty je uveden stupeň a řád dané funkce. Pokud není řád roven nule, dostáváme pro každý řád dvě lokální ortogonální sférické funkce. V takovém případě je vždy první v souboru uváděna lokální ortogonální sférická funkce stupně n a řádu m , která je tvořena sférickou funkcí ve tvaru (5.2) a následně (5.3). Jeden řádek záznamu je tak na prvním místě tvořen stupněm funkce n následně řádem m a poté jednotlivými koeficienty pro sférické funkce počínaje koeficientem pro sférickou funkci $f_{0,0}$, viz tabulka 5.2. Oddělovačem jednotlivých záznamů na řádce může být opět mezerník nebo středník. V případě, že lokální ortogonální sférický systém nemá uživatel k dispozici, je nejdříve nutná jeho tvorba. Zde je na uživateli, aby zadal, do kolikátého stupně n bude výpočet lokálního ortogonálního systému sférických funkcí realizován. Ostatní části běhu programu jsou již totožné s programem pro výpočet gravitačního potenciálu globálního modelu (část 5.2).

Kapitola 6

6 Výsledky

Kapitola shrnuje dosažené výsledky vytvořeného programu pro výpočet gravitačního potenciálu na sféře aproximující reálný tvar zemského tělesa. První část se zabývá výpočtem gravitačního potenciálu v bodě pro globální model definovaný na celé sféře. Srovnáváme zde dva vytvořené modely a zkoumáme dosaženou přesnost výpočtu na několika bodech, které jsou součástí modelu a jejichž přesná hodnota gravitačního potenciálu je tak známa. V druhé části je shrnut výpočet lokálního modelu gravitačního potenciálu na sféře.

6.1 Globální model

V této části jsou výsledky shrnuty do tabulek podle velikosti globálního modelu gravitačního potenciálu. Pro práci byly vytvořeny dva modely gravitačního potenciálu, jejich tvorba je popsána v kapitole 5. V prvních tabulkách je zkoumán průběh gravitačního potenciálu pro první menší model. V tomto modelu zkoumáme především časovou náročnost jednotlivých metod při použití různých stupňů Gaussovy-Legendreovy numerické integrace. Pro druhý model jsou již vybrány pouze interpolační metody, které dávají nejlepší výsledky s použitím stupně n Gaussovy-Legendreovy numerické integrace, pro kterou dosahují nejvyšší rychlosti.

6.1.1 Model 1

Model se skládá z 2500 bodů o známých sférických souřadnicích a hodnotě gravitačního potenciálu. Interpolační metody jsou zkoumány v bodech modelu. První tři tabulky shrnují výpočty gravitačního potenciálu při použití numerické integrace 11., 6. a 4. stupně Gaussovy-Legendreovy numerické integrace při použití bilineární metody interpolace.

Tabulka 6.1: Výpočet gravitačního potenciálu bilineární interpolací užitím Gaussovy-Legendreovy integrace 11. stupně

Bod: ϕ [rad], λ [rad]	V [J/Kg]	SF 20 stupně [J/Kg]	Čas [s]	Odchylka [J/Kg]
1.51 4.87	62 635 944.388	62 635 943.755	596	0.633
0.0 0.385	62 635 779.624	62 635 779.758	586	0.134
-0.98 4.87	62 635 851.917	62 635 851.824	634	0.093

Tabulka 6.2: Výpočet gravitačního potenciálu bilineární interpolací užitím Gaussovy-Legendreovy integrace 6. stupně

Bod: ϕ [rad], λ [rad]	V [J/Kg]	SF 20 stupně [J/Kg]	Čas [s]	Odchylka [J/Kg]
1.51 4.87	62 635 944.388	62 635 943.755	616	0.633
0.0 0.385	62 635 779.624	62 635 779.758	601	0.134
-0.98 4.87	62 635 851.917	62 635 851.824	647	0.093

Tabulka 6.3: Výpočet gravitačního potenciálu bilineární interpolací užitím Gaussovy-Legendreovy integrace 4. stupně

Bod: ϕ [rad], λ [rad]	V [J/Kg]	SF 20 stupně [J/Kg]	Čas [s]	Odchylka [J/Kg]
1.51 4.87	6 2635 944.388	62 635 943.770	2061	0.648
0.0 0.385	62 635 779.624	62 635 779.806	2056	0.182
-0.98 4.87	62 635 851.917	62 635 851.872	2079	0.045

Přesnost výpočtu gravitačního potenciálu dle tabulek závisí na poloze bodu na sféře. V případě, kdy se bod nachází okolo pólů je dosahováno nejmenší přesnosti. Z hlediska časové náročnosti je dosaženo nejlepších výsledků při použití 11. stupně Gaussovy-Legendreovy numerické integrace, která je oproti integraci 4. stupně až 3x rychlejší. Pro výpočty bude tedy dále používána Gaussova-Legendreova numerická integrace 11. stupně. Další interpolační metodou pro výpočet gravitačního potenciálu je metoda inverzních vzdáleností. Pro tuto metodu vycházelo v kapitole 3 jako nejlepší řešení použití silového parametru 2. a 4. stupně. V následujících tabulkách jsou shrnuty výsledky pro tyto metody při použití 11. stupně Gaussovy-Legendreovy numerické integrace.

Tabulka 6.4: Výpočet gravitačního potenciálu metodou IDW 4 s užitím Gaussovy-Legendreovy integrace 11. stupně

Bod: ϕ [rad], λ [rad]	V [J/Kg]	SF 20 stupně [J/Kg]	Čas [s]	Odchylka [J/Kg]
1.51 4.87	62 635 944.388	62 635 943.785	15 721	0.603

V tabulce 5.7 je první výsledek pro metodu inverzní vzdálenosti při použití silového parametru 4. stupně. Metoda dosahuje podobné přesnosti, které bylo dosaženo v případě bilineární interpolace. Vzhledem k časovým nárokům a k možnostem softwaru, na kterém jsou výpočty realizovány je ovšem tato metoda interpolace zcela nevhodná pro další výpočty gravitačního potenciálu. Pro další testování tak budeme výhradně používat bilineární metodu interpolace, která se jako jediná z testovaných interpolačních metod osvědčila z hlediska přesnosti a časové náročnosti. V následující tabulce testujeme dále její přesnost na vzorku dalších 10 bodů s částečným rozvojem Fourierovy řady do 40. stupně Legendreových asociovaných funkcí.

Tabulka 6.5: Hodnoty gravitačního potenciálu v bodech pro 1. globální model

Souřadnice bodu		Hodnota gravitačního potenciálu v bodě modelu [J/Kg]	Fourierova řada 20. stupeň [J/Kg]	Fourierova řada 30. stupeň [J/Kg]	Fourierova řada 40. stupeň [J/Kg]
ϕ [rad]	λ [rad]				
-1.50	-1.53	62 635 944.385	62 635 943.755	62 635 945.018	62 635 945.063
-1.37	0.89	62 635 918.224	62 635 918.407	62 635 917.964	62 635 918.384
-1.05	5.64	62 635 861.617	62 635 861.504	62 635 861.676	62 635 861.703
-0.79	2.05	62 635 818.951	62 635 818.849	62 635 819.004	62 635 818.971
-0.39	0.77	62 635 791.416	62 635 791.417	62 635 791.436	62 635 791.445
0.06	1.54	62 635 779.953	62 635 780.019	62 635 780.021	62 635 779.993
0.46	3.07	62 635 795.656	62 635 795.626	62 635 795.720	62 635 795.706
0.78	5.00	62 635 826.274	62 635 826.290	62 635 826.277	62 635 826.302
1.05	5.64	62 635 861.623	62 635 861.504	62 635 861.679	62 635 861.700
1.31	1.03	62 635 905.875	62 635 905.394	62 635 906.080	62 635 905.864

Pro snazší analyzování přesnosti výpočtu gravitačního potenciálu je pro každý částečný součet Fourierovy řady spočtena odchylka v od správné hodnoty gravitačního potenciálu v bodě

$$v = V_{model} - V_{Fourier} \quad (6.1)$$

Pro vyhodnocení který z použitých částečných součtů Fourierovy řady dosahuje nejlepších výsledků je spočítána průměrná odchylka ze všech výpočtů pro každý použitý stupeň n .

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \quad (6.2)$$

Pro každý n -tý částečný součet je nakonec spočtena směrodatná odchylka průměrné chyby výpočtu gravitačního potenciálu.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2} \quad (6.3)$$

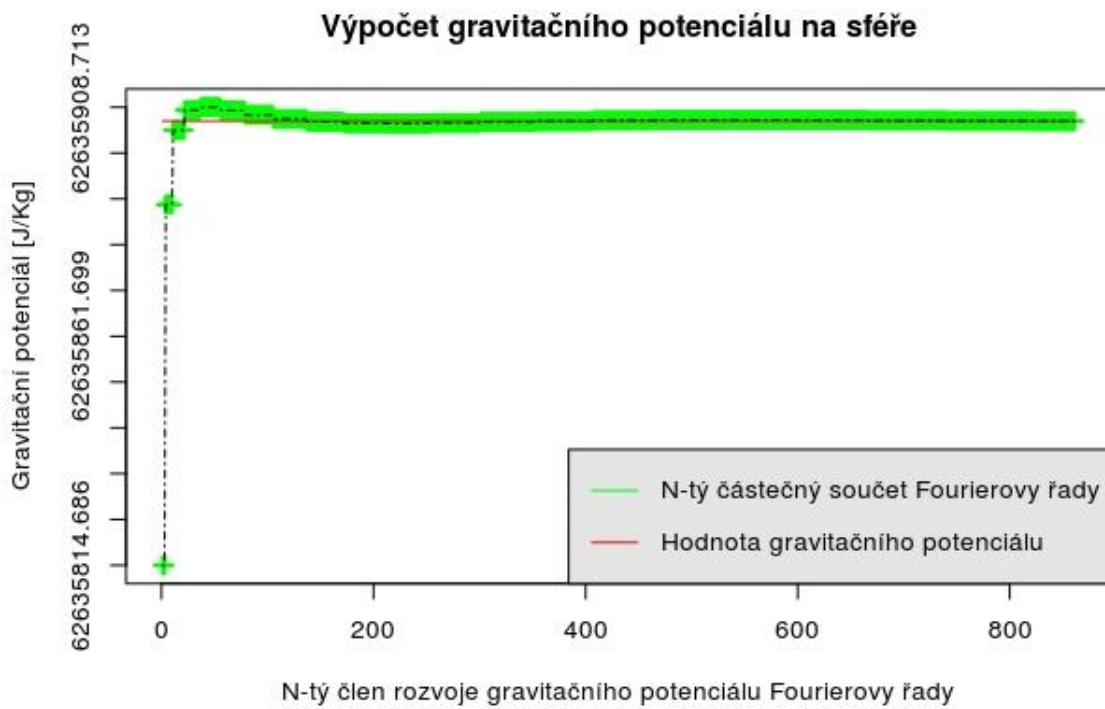
Tabulka 6.6: Odchytky vypočtených hodnot gravitačního potenciálu od skutečných hodnot v bodech 1. globálního modelu

Souřadnice bodu		Fourierova řada 20. stupeň [J/Kg]	Fourierova řada 30. stupeň [J/Kg]	Fourierova řada 40. stupeň [J/Kg]
ϕ [rad]	λ [rad]			
-1.50	-1.53	0.63	-0.63	-0.68
-1.37	0.89	-0.18	0.26	-0.16
-1.05	5.64	0.11	-0.059	-0.086
-0.79	2.05	0.10	-0.053	-0.020
-0.39	0.77	-0.001	-0.020	-0.029
0.06	1.54	-0.066	-0.068	-0.040
0.46	3.07	0.030	-0.064	-0.050
0.78	5.00	-0.016	-0.003	-0.028
1.05	5.64	0.12	-0.056	-0.077
1.31	1.03	0.48	-0.21	0.011

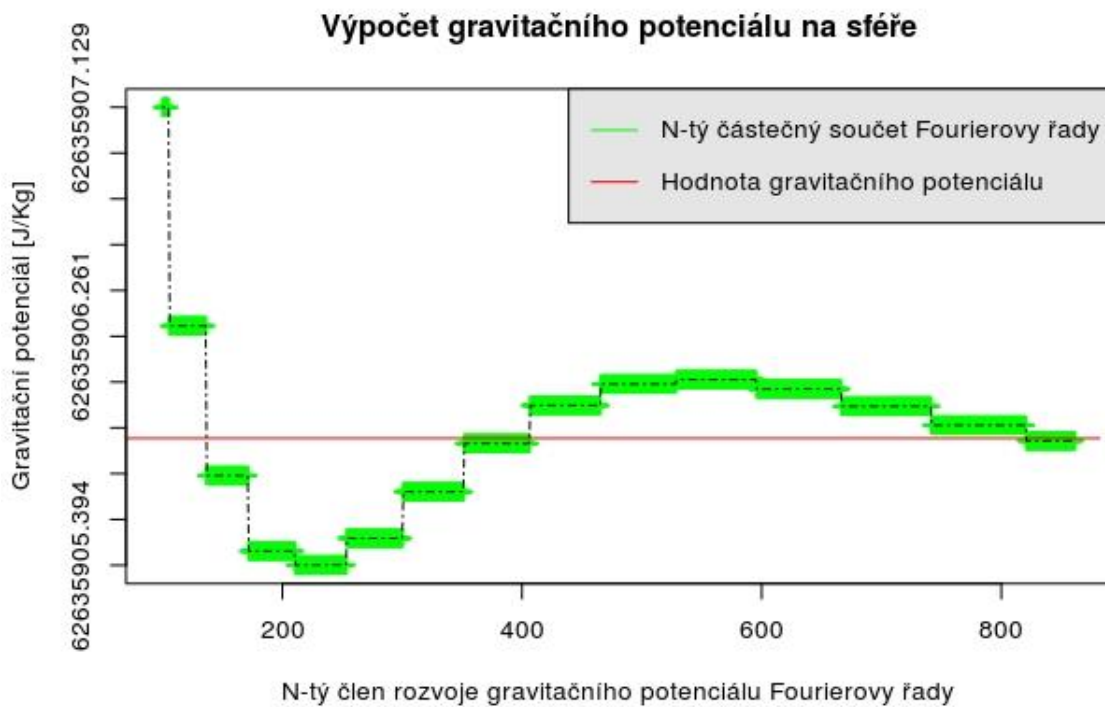
Tabulka 6.7: Průměrná a směrodatná odchylka výpočtu gravitačního potenciálu pro 1. globální model

	Fourier 20. stupeň	Fourier 30. stupeň	Fourier 40. stupeň
\bar{v} [J/Kg]	0.12	0.09	0.12
σ [J/Kg]	0.25	0.22	0.20

Z tabulky 5.8 je patrné, že výpočet gravitačního potenciálu na vytvořeném modelu se pohybuje okolo 8 a více platných cifer. V případě bodu nacházejícího se v okolí pólů je dosahováno menší přesnosti oproti bodům v okolí rovníku. Odchytky od správné hodnoty gravitačního potenciálu ovšem dosahují i pro oblasti kolem pólů stejného řádu jako v oblastech v okolí rovníku a výpočet je tak možno na celé sféře považovat za korektní bez větších změn v přesnosti v závislosti na poloze interpolovaného bodu. Podle průměrných odchylek částečných součtů Fourierovy řady je patrné, že volba kteréhokoli z uvedených stupňů částečného součtu poskytuje stejnou přesnost výpočtu pohybující se v řádu setin. Směrodatné odchylky jednotlivých částečných součtů v tabulce 6.6 potvrzují předpoklad, že pro zvyšující stupeň částečného součtu Fourierovy řady se rozdíl od skutečné hodnoty gravitačního potenciálu v bodech snižuje a při stupni $n \rightarrow \infty$ se bude rozdíl funkční hodnoty aproximující řady a gravitačního potenciálu v bodech blížit nule. V obrázku 6.1 je zobrazen kompletní průběh částečného součtu Fourierovy řady do 40. stupně Legendreových asociovaných funkcí pro poslední bod tabulky 6.4. Obrázek 6.2 je potom průběhem Fourierovy řady pro stejný bod s vynecháním prvních 100 členů částečného součtu Fourierovy řady.

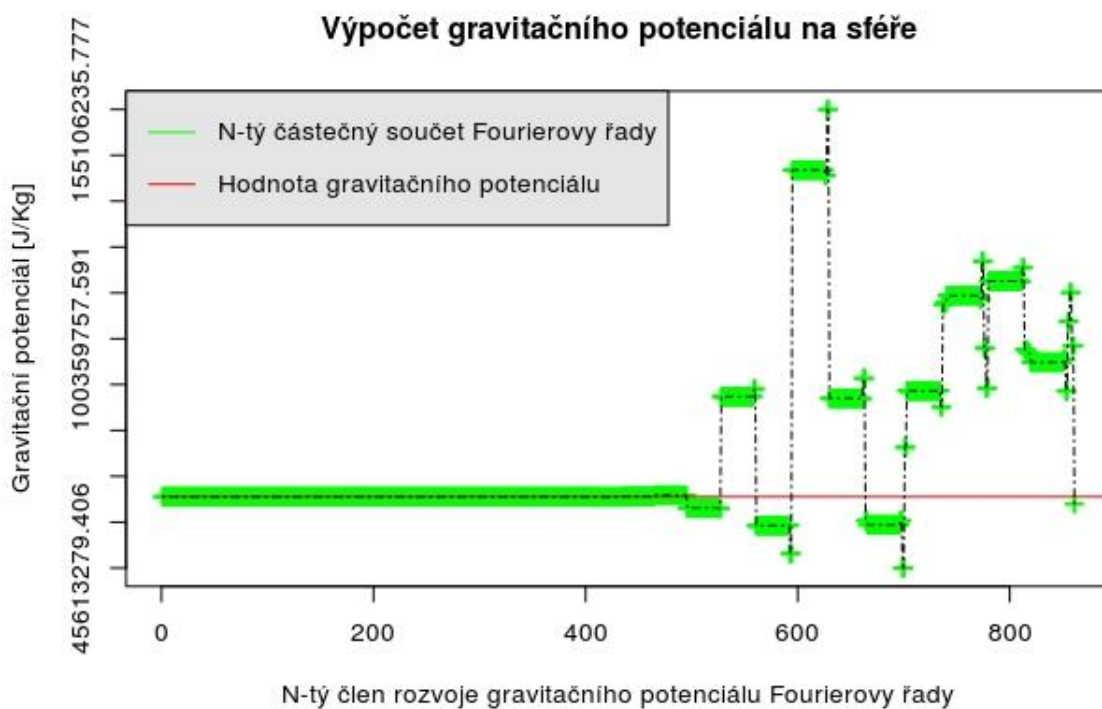


Obrázek 6.1: Graf průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod (1.31, 1.01)



Obrázek 6.2: Detail grafu průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod (1.31, 1.01)

V tabulce 6.4 již není řešena časová náročnost výpočtu, která ovšem není zanedbatelná a se zvyšujícím se stupněm částečného součtu Fourierovy řady rychle narůstá. V případě použitého modelu se časová náročnost pro 40. stupeň částečného součtu pohybuje okolo 6300 sekund. Pro úplnost na závěr zmiňme výsledky, kterých bychom dosáhli při použití zvyšování stupně numerické Gaussovy-Legendreovy integrace (část 2.4.1). Vzhledem k časové náročnosti lze logicky uvažovat o použití vyššího stupně integrace bez dělení na menší podintervaly. Výsledky této metody byly na jednoduchých dvourozměrných funkcích uvedeny v (část 3.2). Obrázek 6.3 ukazuje kompletní průběh Fourierovy řady do 40. stupně Legendreových asociovaných funkcí při použití 50. stupně Gaussovy-Legendreovy numerické integrace bez postupného dělení intervalu.



Obrázek 6.3: Graf průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod (1.31, 1.01), užitím Gaussovy integrace 50. stupně, bez dělení intervalu

Při nižší časové náročnosti dostáváme zcela chybné výsledky pro stupeň Legendreových asociovaných funkcí $n > 30$.

6.1.2 Model 2

Model se skládá z více než 130 000 bodů a je tak podstatně detailnějším oproti prvnímu modelu. Při výpočtu gravitačního potenciálu v bodech modelu vycházíme z předpokladů, které vyplynuly z testování prvního modelu. Pro výpočet je tedy použito pouze bilineární metody interpolace, která jako jediná dává dobré výsledky z hlediska přesnosti a časové náročnosti, která je v případě takto velkého modelu zásadní. Pro integraci je použito 11. stupně Gaussovy-Legendreovy numerické integrace s postupným dělením intervalu (část 2.4.1). Výpočty shrnuje tabulka 6.7, která je v tomto případě rozšířena oproti tabulce 6.4 o časovou náročnost výpočtu.

Tabulka 6.8: Hodnoty gravitačního potenciálu v bodech pro 2. globální model

Souřadnice bodu		Hodnota gravitačního potenciálu v bodě modelu [J/Kg]	Fourierova řada 20. stupeň [J/Kg]	Fourierova řada 30. stupeň [J/Kg]	Časová náročnost výpočtu [s]
ϕ [rad]	λ [rad]				
-0.78	0.37	62 636 319.268	62 636 319.268	62 636 319.268	41 675
-0.82	1.05	62 636 356.858	62 636 356.855	62 636 356.858	42 100
1.15	4.56	62 636 680.278	62 636 680.218	62 636 680.235	40 867
1.01	2.04	62 636 555.756	62 636 555.736	62 636 555.732	41 571
0	0	62 635 779.624	62 635 779.680	62 635 779.659	42 008
0.49	3.98	62 636 017.488	62 636 017.517	62 636 017.449	40 850
1.25	3.68	62 636 755.748	62 636 755.710	62 636 755.715	41 250

Pro analyzování výpočtu gravitačního potenciálu je uveden menší vzorek testovacích bodů a to především z časové náročnosti výpočtu. Ta se pro výpočet částečného součtu Fourierovy řady pro 30. stupeň Legendreových asociovaných funkcí blíží 12 hodinám. Vzhledem k tomu bylo také upuštěno od výpočtů vyšších stupňů částečného součtu Fourierovy řady. Pro zhodnocení výsledků bylo použito vzorců (6.1), (6.2), (6.3).

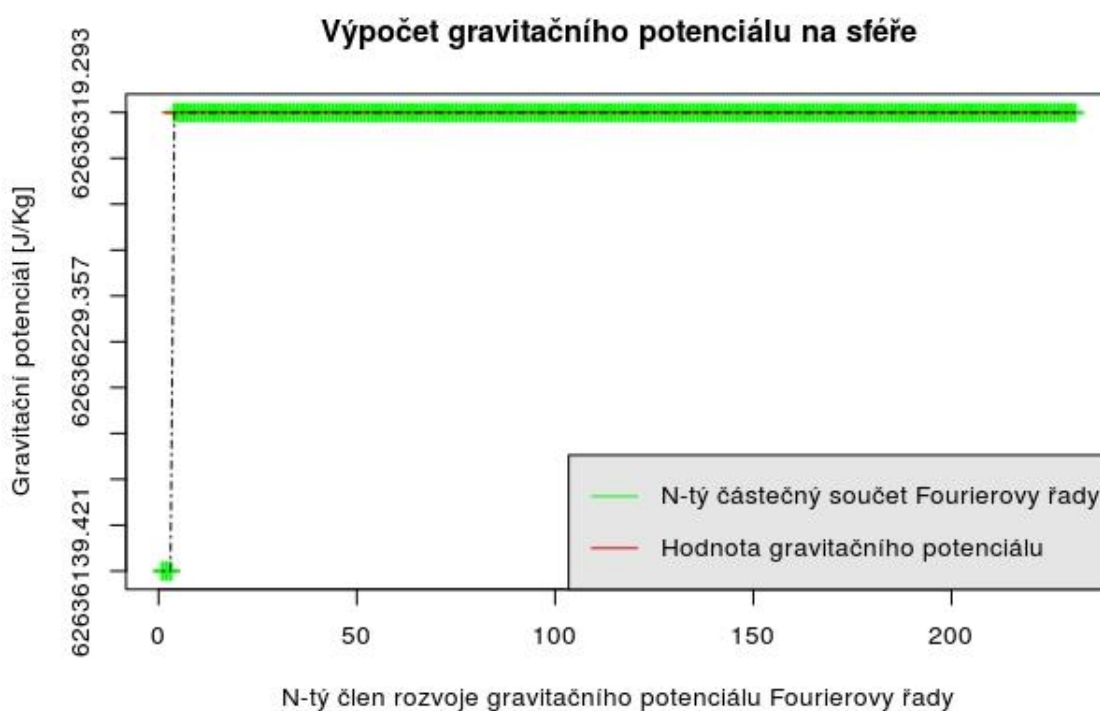
Tabulka 6.9: Odchytky vypočtených hodnot gravitačního potenciálu od skutečných hodnot v bodech 2. globálního modelu

Souřadnice bodu		Fourierova řada 20. stupeň [J/Kg]	Fourierova řada 30. stupeň [J/Kg]
ϕ [rad]	λ [rad]		
-0.78	0.37	0.0	0.0
-0.82	1.05	0.0030	0.0
1.15	4.56	0.060	0.043
1.01	2.04	0.020	0.024
0	0	-0.056	-0.035
0.49	3.98	-0.029	0.039
1.25	3.68	0.038	0.033

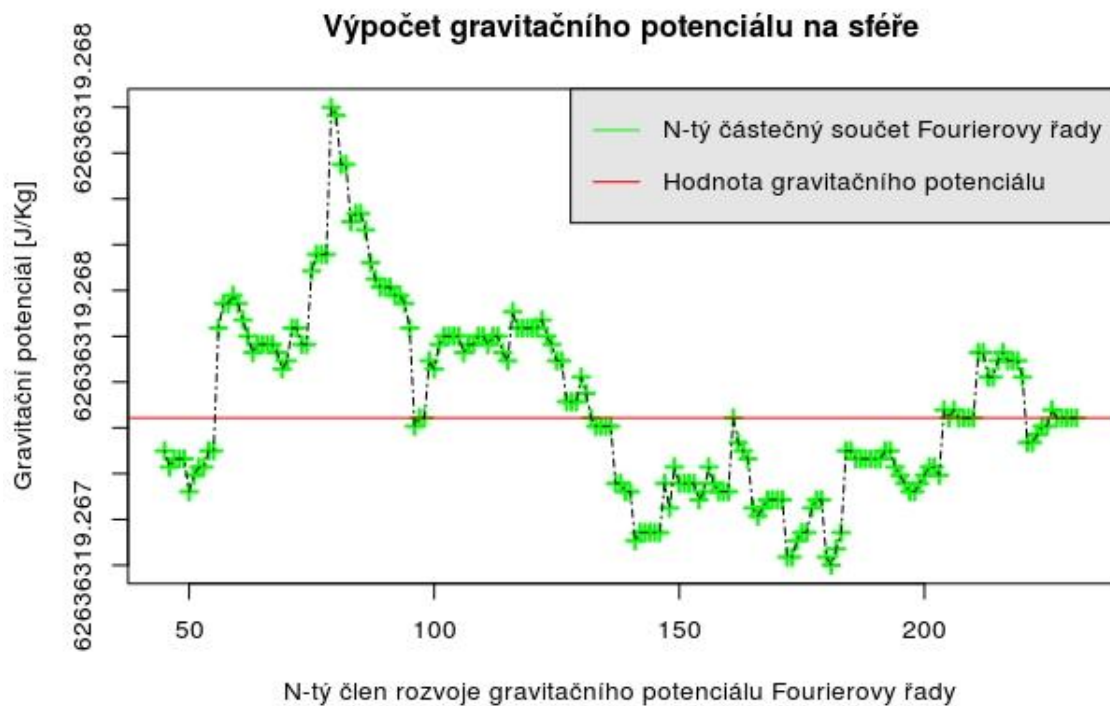
Tabulka 6.10: Průměrná a směrodatná odchylka výpočtu gravitačního potenciálu pro 2. globální model

	Fourier 20. stupeň	Fourier 30. stupeň
\bar{v} [J/Kg]	0.029	0.025
σ [J/Kg]	0.024	0.018

Z výsledků tabulky 6.8 je patrné, že použitá metoda výpočtu dává dobré výsledky i pro modely o velké hustotě bodů. Celkově dochází ke zlepšení přesnosti výpočtu gravitačního potenciálu v bodě oproti prvnímu modelu, kde rozložení bodů bylo podstatně řidší. Podle tabulky 6.9 dochází ke zmenšení průměrné odchylky od hodnot gravitačního potenciálu v bodech s rostoucím stupněm částečného součtu Fourierovy řady stejně, jako klesá i střední chyba odchylky. Tím je potvrzena správnost výpočetní metody. Pro představu o průběhu výpočtu gravitačního potenciálu na sféře s použitím Fourierovy řady s 30. stupněm Legendreových asociovaných funkcí uvádíme dva grafy.



Obrázek. 6.4 Graf průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod (-0.78, 0.37)



Obrázek 6.5 Detail grafu průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod $(-0.78, 0.37)$

6.2 Lokální model

Tvorba lokálního modelu vychází z části 5.3.2, kde je řešen postup výpočtu, kterým byl realizován lokální ortogonální systém sférických funkcí. Tento systém je následně využit pro rozvoj gravitačního potenciálu Fourierovy řady na geografickém lichoběžníku. Vzhledem k rychle narůstající časové náročnosti bylo pro výpočet gravitačního potenciálu v bodech lokálního modelu použito částečného součtu Fourierovy řady do 10. stupně Legendreových asociovaných funkcí. Přesnost výpočtu byla testována na 5 náhodně vybraných bodech lokálního modelu gravitačního potenciálu.

Tabulka 6.11: Hodnoty gravitačního potenciálu v bodech pro lokální gravitační model

Souřadnice bodu		Hodnota gravitačního potenciálu v bodě modelu [J/Kg]	Fourierova řada 10. stupeň [J/Kg]	Časová náročnost výpočtu [s]
ϕ [rad]	λ [rad]			
0.42	0.31	62 635 826.274	62 635 828.868	843
0.46	1.17	62 635 779.953	62 635 780.422	852
0.39	1.02	62 635 931.070	62 635 930.301	844
0.41	1.43	62 635 851.921	62 635 854.249	860
0.49	1.36	62 635 784.877	62 635 786.916	847

Pro vyhodnocení přesnosti výpočtu gravitačního potenciálu v zájmových bodech lokálního modelu bylo použito vzorců (6.1), (6.2), (6.3). Dosaženou přesnost výpočtu gravitačního potenciálu shrnují tabulky 6.11, 6.12.

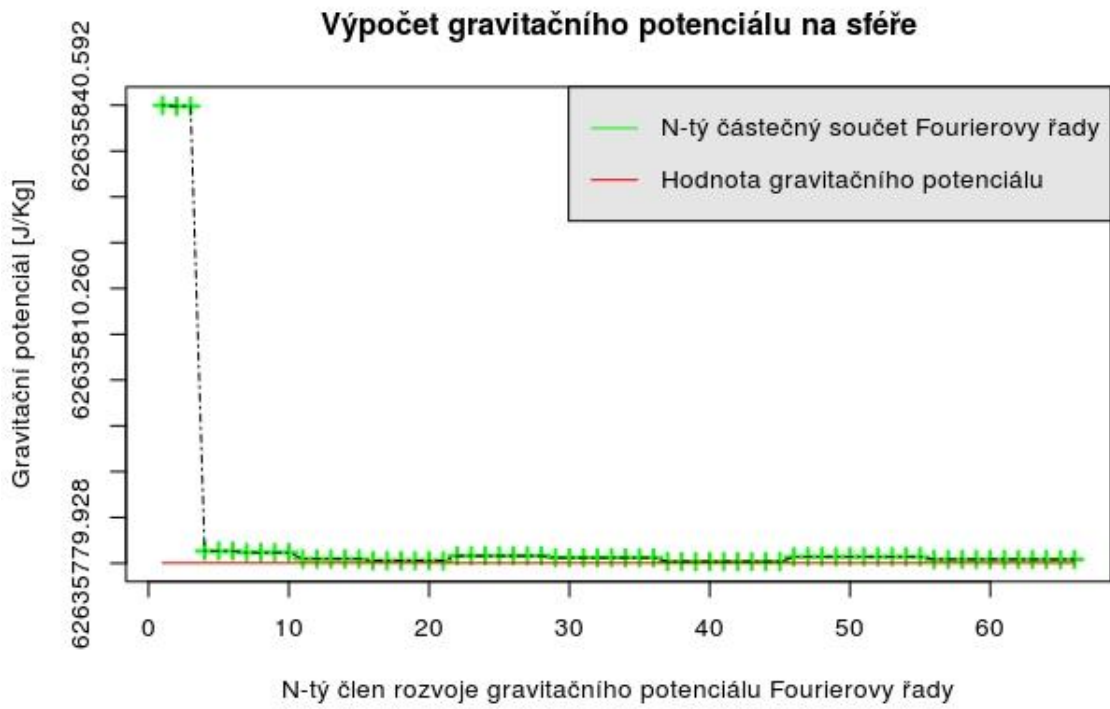
Tabulka 6.12: Odchyly vypočtených hodnot gravitačního potenciálu od skutečných hodnot v bodech lokálního modelu

Souřadnice bodu		Fourierova řada 10. stupeň [J/Kg]
ϕ [rad]	λ [rad]	
0.42	0.31	-2.6
0.46	1.17	-0.47
0.39	1.02	0.77
0.41	1.43	-3.3
0.49	1.36	-2.0

Tabulka 6.13: Průměrná a směrodatná odchylka výpočtu gravitačního potenciálu pro lokální model

	Fourier 10. stupeň
\bar{v} [J/Kg]	1.8
σ [J/Kg]	1.2

Výpočetní přesnost gravitačního potenciálu v zájmových bodech lokálního modelu se pohybuje v řádu jednotek. Pro body ležící na okraji definované lokální oblasti výpočtu, je dosahováno nižších přesností výpočtu gravitačního potenciálu. V tabulce 6.11 se jedná o první, čtvrtý a pátý bod. Z obrázku 6.6 je vidět, že částečný součet Fourierovy řady osciluje okolo správné hodnoty gravitačního potenciálu. Lze tak předpokládat, že se výpočty gravitačního potenciálu v zájmových bodech lokálního modelu budou dále zpřesňovat s rostoucím stupněm n částečného součtu Fourierovy řady. Vzhledem k tvaru a způsobu tvorby lokálního ortogonálního systému sférických funkcí nebyly vyšší stupně sférických funkcí lokálního ortogonálního systému počítány.



Obrázek 6.6 Průběh výpočtu gravitačního potenciálu lokálního modelu pro bod (0.46, 1.17)

Závěr

V práci jsme se zabývali výpočtem gravitačního potenciálu na sféře aproximující reálný tvar zemského tělesa. Pro výpočet gravitačního potenciálu pomocí vzorce (1.15) bylo nutné definovat matematický aparát, jehož definicí jsme se zabývali v kapitole 2. Tyto matematické vztahy byly následně implementovány do výpočetního programu napsaného v objektivě orientovaném programovacím jazyce C++. V 2. kapitole jsme se zabývali možnostmi zpřesnění výpočtu Gaussovy-Legendreovy numerické integrace (část 2.4). Pro zvyšování přesnosti byla použita metoda zvyšování stupně integrace n a metoda postupného dělení intervalu. Ukázali jsme, že pomocí metody postupného dělení intervalů, je dosahováno vyšší přesnosti výsledků numerické integrace bez nutnosti zvyšování stupně integrace n .

Ve čtvrté kapitole jsme se zabývali plošnými metodami interpolace. Z uvedených výsledků vyšla jako nejlepší bilineární interpolační metoda. Kromě té byly do výpočetní části také uvažovány metody inverzních vah vzdáleností silového parametru 2. a 4. stupně.

V šesté kapitole byly porovnávány dosažené výsledky výpočtu gravitačního potenciálu na dvou vytvořených modelech. Oba modely mají body, kterými jsou definovány, uspořádány v gridu. Na prvním menším modelu byly nejdříve testovány různé stupně Gaussovy-Legendreovy numerické integrace pro výpočet gravitačního potenciálu v uvažovaném bodě s použitím bilineární metody interpolace za účelem nalezení optima. Jako optimální byl zvolen 11. stupeň numerické integrace, jenž v kratším čase dosahoval stejné výpočetní přesnosti jako ostatní testované stupně. Následně byl testován výpočet gravitačního potenciálu pomocí stejného stupně numerické integrace při použití interpolační metody inverzních vah vzdáleností se silovým parametrem 4. stupně. Ačkoliv výpočty byly přesnější, bylo od této metody výpočtu ustoupeno kvůli její velké časové náročnosti, jež několikrát přesáhla časovou náročnost bilineární metody interpolace. Z tohoto důvodu byla v dalších částech používána pouze ta. Pro další porovnání dosažené přesnosti byl vybrán vzorek 10 bodů na sféře. Z tabulky 5.10 je patrné, že výpočet gravitačního potenciálu s rostoucím částečným součtem Fourierovy řady dosahuje lepších výsledků. Metoda tak potvrzuje správnost vztahu (1.15) pro výpočet gravitačního potenciálu. V druhém modelu dochází opět k testování výpočetní přesnosti na náhodně vybraných bodech modelu gravitačního potenciálu. Tabulka 5.13 opět potvrzuje předpoklad rostoucí přesnosti výpočtu gravitačního potenciálu v uvažovaném bodě s rostoucím stupněm částečného součtu Fourierovy řady. Navíc oproti prvnímu modelu dochází ke zpřesnění výpočtu, což potvrzuje předpoklad uvedený v kapitole 4, že přesnost interpolačních metod se zvyšuje s rostoucím počtem bodů o známé funkční hodnotě v modelu, případně na intervalu (tabulka 3.5). V obou případech

byl model vytvořen jako pravidelný grid bodů. Výpočetní program ovšem nevyžaduje pravidelnou síť a je tak možné v různých místech sféry model libovolně zahustit dalšími naměřenými daty, pokud je vyžadována vyšší přesnost určení gravitačního potenciálu v uvažovaném bodě. Pokud ovšem síť není pravidelná, je uživatel nucen použít interpolační metodu inverzních vah vzdáleností s volbou silového parametru. Tato metoda, jak ukazuje tabulka 5.7, je časově podstatně náročnější.

Seznam tabulek

Tabulka 2.1: Gaussova-Legendreova integrace 2. stupně.....	22
Tabulka 2.2: Gaussova-Legendreova integrace 4. stupně.....	22
Tabulka 2.3: Gaussova-Legendreova integrace 6. stupně.....	23
Tabulka 2.4 : Gaussova-Legendreova integrace 11. stupně.....	23
Tabulka 2.5: Gaussova-Legendreova integrace 50. stupně bez dělení intervalu	23
Tabulka 2.6 : Hodnoty integrace spočtené z prostředí WolframAlpha.....	24
Tabulka 3.1: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $fx, y = xy + y^2$	30
Tabulka 3.2: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $fx, y = xy + x^5y$	31
Tabulka 3.3: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $x, y = \sin y + 2x - \cos x$	32
Tabulka 3.4: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $fx, y = 2xy + \sin x \cos y$	33
Tabulka 3.5: Výsledné hodnoty pro interpolaci funkce $fx, y = xy + x^5y$, pro pravidelný 100 bodový grid.....	34
Tabulka 4.1: Konstanty GRS1980 použité pro výpočet gravitačního potenciálu [7].....	35
Tabulka 5.1 Funkce lokálního ortogonálního sférického systému do 2. stupně	39
Tabulka 5.2: Sférické funkce do 2. stupně.....	40
Tabulka 5.3: Výsledné hodnoty skalárního součinu funkcí lokálního ortogonálního sférického systému	40
Tabulka 6.1: Výpočet gravitačního potenciálu bilineární interpolací užitím Gaussovy-Legendreovy integrace 11. stupně	44
Tabulka 6.2: Výpočet gravitačního potenciálu bilineární interpolací užitím Gaussovy-Legendreovy integrace 6. stupně	45
Tabulka 6.3: Výpočet gravitačního potenciálu bilineární interpolací užitím Gaussovy-Legendreovy integrace 4. stupně	45
Tabulka 6.4: Výpočet gravitačního potenciálu metodou IDW 4 s užitím Gaussovy-Legendreovy integrace 11. stupně	45
Tabulka 6.5: Hodnoty gravitačního potenciálu v bodech pro 1. globální model.....	46
Tabulka 6.6: Odchyly vypočtených hodnot gravitačního potenciálu od skutečných hodnot v bodech 1. globálního modelu.....	47
Tabulka 6.7: Průměrná a směrodatná odchylka výpočtu gravitačního potenciálu pro 1. globální model	47
Tabulka 6.8: Hodnoty gravitačního potenciálu v bodech pro 2. globální model.....	50

Tabulka 6.9: Odchyly vypočtených hodnot gravitačního potenciálu od skutečných hodnot v bodech 2. globálního modelu.....	50
Tabulka 6.10: Průměrná a směrodatná odchylka výpočtu gravitačního potenciálu pro 2. globální model	51
Tabulka 6.11: Hodnoty gravitačního potenciálu v bodech pro lokální gravitační model.....	53
Tabulka 6.12: Odchyly vypočtených hodnot gravitačního potenciálu od skutečných hodnot v bodech lokálního modelu.....	53
Tabulka 6.13: Průměrná a směrodatná odchylka výpočtu gravitačního potenciálu pro lokální model	53

Seznam obrázků

Obrázek 2.1: Průběh Legendreových polynomů na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ [5]	16
Obrázek 2.2: Schematické znázornění zonální sférické funkce 7. stupně [1].....	18
Obrázek 2.3: Schematické znázornění sektorální sférické funkce 12. stupně [1]	19
Obrázek 2.4: Schematické znázornění tesserální sférické funkce 21. stupně a 12.řádu [1]	19
Obrázek 3.1: IDW metoda pro různé silové parametry $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ [1].....	28
Obrázek 3.2: Bilineární interpolace na jednotkové čtvercové oblasti [1]	29
Obrázek 3.3: vrstevnice funkce $f(x, y) = xy + y^2$	30
Obrázek 3.4: vrstevnice funkce $f(x, y) = xy + x^2y$	31
Obrázek 3.5: vrstevnice funkce $f(x, y) = \sin y + 2x - \cos x$	32
Obrázek 3.6: vrstevnice funkce $f(x, y) = 2xy + \sin x \cos y$	33
Obrázek 5.1: Schéma výpočtu gravitačního potenciálu pro globální model	38
Obrázek 5.2: Časová náročnost výpočtu funkcí lokálního ortogonálního systému sférických funkcí	41
Obrázek 5.3: Graf časové náročnosti výpočtu funkce 12. stupně lokálního ortogonálního systému sférických funkcí	42
Obrázek 5.4: Schéma výpočtu gravitačního potenciálu pro lokální model	42
Obrázek 6.1: Graf průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod (1.31, 1.01)	48
Obrázek 6.2: Detail grafu průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod (1.31, 1.01)	48
Obrázek 6.3: Graf průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod (1.31, 1.01), užitím Gaussovy integrace 50. stupně, bez dělení intervalu	49
Obrázek 6.4 Graf průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod (-0.78, 0.37)	51
Obrázek 6.5 Detail grafu průběhu výpočtu gravitačního potenciálu pro bod (-0.78, 0.37)	52
Obrázek 6.6 Průběh výpočtu gravitačního potenciálu lokálního modelu pro bod (0.46, 1.17)	54

Seznam literatury

- [1] Burša, Milan. *Dynamika umělých družic v tíhovém poli Země*. Praha: Academia, 1993.
- [2] Andrle, Pavel. *Nebeská mechanika: analytické metody*. Praha: Academia, 1987.
- [3] Pick, Miloš, Jan Pícha a Vincenc Vyskočil. *Úvod ke studiu tíhového pole Země: vysokoškolská příručka*. Praha: Academia, 1973.
- [4] Heiskanen, W. A.; Moritz, H.: *Physical Geodesy*. W.H.Freeman & Co Ltd, 0 vydání, 5 1967.
- [5] Nádeník, Zbyněk. *Matematické základy ke knize H.Moritz: Advanced physical geodesy, 1984*. Zdiaby: Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický 1984.
- [6] Nádeník, Zbyněk. *Kulové funkce pro geodézii: matematická příprava ke studiu knihy W.A. Heiskanen-H. Moritz: Physical Geodesy, 1967*. Zdiaby: Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, 2000. Publikace (Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický).
- [7] Zeman, Antonín. *Fyzikální geodezie*. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005.
- [8] Kočandrlová, Milada. *Geo-matematika II*. V Praze: České vysoké učení technické, 2008.
- [9] Mikš, Antonín a Jiří Novák. *Fyzika I*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2006.
- [10] Nodes and Weights of Gaussian quadrature Calculator. *Keisan online calculator* [online]. [cit. 2016-05-19]. Dostupné z: <http://keisan.casio.com/exec/system/1329114617>.
- [11] Gaussian quadrature. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-05-19]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature.
- [12] Associated Legendre polynomials. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-05-19]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Associated_Legendre_polynomials.
- [13] Williams, Anthony. *C++ concurrency in action: practical multithreading*. Shelter Island, NY: Manning, c2012.

- [14] Rektorys, Karel. *Přehled užití matematiky*. 3., nezměň. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1973. Česká matice technická (SNTL).
- [15] NGA: NGA/NASA EGM96, N=M=360 Earth Gravitational Model [Citace: 16.května2018]<http://earthinfo.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm96/egm96.html>.
- [16] Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)[Citace: 16. května 2018]
<http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008>.
- [17] Burden, Richard L. a J. Douglas. Faires. *Numerical analysis*. 9th ed. Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning, c2011.
- [18] Multivariate interpolation. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-05-16]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_interpolation.
- [19] Eckel, Bruce a Chuck Allison. *Myslíme v jazyku C++*. Praha: Grada, 2006.
- [20] Hilbert space. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-05-16]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_space.
- [21] Karásek, Michal. *Užití Gaussovy integrace pro výpočet Fourierových koeficientů gravitačního potenciálu*. [Bakalářská práce] Praha: ČVUT, 2016.
- [22] Kočandrlová, Milada a Jaroslav Černý. *Geo-matematika I*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2008.

Seznam příloh

<u>A Tištěné přílohy</u>	63
<u>A.1 Hodnoty Fourierových koeficientů 2. globálního modelu v bodě (-0.78, 0.37)</u>	63
<u>A.2 Hodnoty Fourierových koeficientů lokálního modelu v bodě (0.42, 1.02)</u>	67

A Tištěné přílohy

A.1 Hodnoty Fourierových koeficientů 2. globálního modelu v bodě (-0.78, 0.37)

m	k	An,m	Bn,m
0	0	62636139,420840	0,000000
1	0	0,000005	0,000000
1	1	-0,000217	-0,000193
2	0	321,717935	0,000000
2	1	-0,000030	0,000034
2	2	0,000175	0,000067
3	0	-0,000044	0,000000
3	1	0,000008	0,000052
3	2	0,000186	0,000027
3	3	0,000001	-0,000039
4	0	-0,001133	0,000000
4	1	0,000129	0,000057
4	2	-0,000027	-0,000074
4	3	-0,000016	0,000036
4	4	-0,000022	0,000020
5	0	0,000122	0,000000
5	1	-0,000010	0,000092
5	2	-0,0056	-0,000060
5	3	-0,000037	-0,000063
5	4	-0,000014	0,000015
5	5	-0,000011	-0,000023
6	0	-0,000145	0,000000
6	1	0,000074	-0,000031
6	2	0,000125	0,000183
6	3	0,000037	-0,000035
6	4	0,000000	0,000001
6	5	-0,000017	-0,000012
6	6	-0,000013	-0,000008
7	0	-0,000002	0,000000
7	1	0,000004	-0,000073
7	2	-0,000023	-0,000012
7	3	0,000051	0,000018
7	4	0,000031	-0,000013
7	5	-0,000016	-0,000023
7	6	0,000000	-0,000002
7	7	-0,000002	0,000011
8	0	-0,0251	0,000000
8	1	-0,000025	0,000015
8	2	0,000005	-0,000023
8	3	-0,000013	-0,000005
8	4	-0,000063	0,000018
8	5	-0,000015	-0,000008
8	6	-0,000022	-0,000017

8	7	0,000018	-0,000015
8	8	-0,000021	0,000007
9	0	0,000013	0,000000
9	1	-0,000002	0,000020
9	2	0,000009	-0,000008
9	3	-0,000011	0,000008
9	4	-0,000021	0,000066
9	5	-0,000004	0,000008
9	6	0,000008	-0,000002
9	7	0,000005	0,000016
9	8	0,000033	0,000003
9	9	-0,000014	0,000000
10	0	0,000279	0,000000
10	1	-0,000022	0,000004
10	2	-0,000001	-0,000001
10	3	0,000018	-0,000004
10	4	-0,000039	0,000025
10	5	0,000016	0,000016
10	6	0,000018	0,000001
10	7	-0,000010	-0,000002
10	8	-0,000008	-0,000001
10	9	-0,000009	-0,000002
10	10	0,000005	-0,000005
11	0	-0,000001	0,000000
11	1	-0,000011	0,000015
11	2	0,000022	-0,000001
11	3	0,000009	-0,000015
11	4	0,000005	0,000020
11	5	0,000016	0,000004
11	6	-0,000011	0,000008
11	7	-0,000004	0,000000
11	8	0,000048	-0,000008
11	9	-0,000025	0,000002
11	10	0,000014	0,000002
11	11	-0,000018	-0,000003
12	0	-0,000144	0,000000
12	1	0,000015	0,000013
12	2	-0,000042	-0,000004
12	3	-0,000012	0,000016
12	4	-0,000006	0,000033
12	5	-0,000018	0,000003
12	6	-0,000008	-0,000004
12	7	-0,000018	-0,000006
12	8	0,000018	0,000004
12	9	-0,000018	0,000021
12	10	0,000006	-0,000002
12	11	0,000009	-0,000010
12	12	-0,000014	0,000009
13	0	-0,000012	0,000000
13	1	0,000005	-0,000017
13	2	-0,000002	0,000012

13	3	-0,000017	-0,000019
13	4	-0,000007	-0,000109
13	5	0,000003	-0,000008
13	6	0,000001	-0,000005
13	7	-0,000043	0,000016
13	8	-0,000001	0,000019
13	9	-0,000013	-0,000011
13	10	-0,000009	0,000023
13	11	-0,000014	0,000003
13	12	-0,000001	0,000005
13	13	-0,000013	0,000002
14	0	0,000037	0,000000
14	1	0,000007	-0,000008
14	2	0,000003	0,000004
14	3	-0,000014	0,000004
14	4	0,000033	0,000011
14	5	-0,000019	-0,000012
14	6	-0,000021	-0,000026
14	7	-0,000021	-0,000019
14	8	0,000005	-0,000011
14	9	-0,000006	0,000004
14	10	-0,000031	-0,000007
14	11	-0,000012	-0,000009
14	12	-0,000034	0,000011
14	13	0,000002	-0,000020
14	14	-0,000014	-0,000002
15	0	-0,000006	0,000000
15	1	0,000001	-0,000019
15	2	-0,000025	-0,000004
15	3	-0,000004	-0,000011
15	4	0,000009	0,000010
15	5	-0,000003	-0,000002
15	6	0,000038	0,000000
15	7	-0,000007	0,000002
15	8	0,000004	-0,000002
15	9	-0,000008	-0,000021
15	10	-0,000002	-0,000010
15	11	0,000009	0,000015
15	12	-0,000022	-0,000011
15	13	-0,000012	0,000005
15	14	-0,000001	-0,000002
15	15	-0,000006	0,000000
16	0	-0,000051	0,000000
16	1	-0,000008	-0,000015
16	2	0,000003	0,000004
16	3	0,000015	-0,000007
16	4	0,000010	-0,000031
16	5	0,000016	-0,000011
16	6	-0,000030	-0,000022
16	7	-0,000005	-0,000004
16	8	-0,000002	0,000023

16	9	0,000004	-0,000040
16	10	-0,000022	-0,000009
16	11	-0,000022	0,000002
16	12	-0,000028	-0,000025
16	13	-0,000008	-0,000022
16	14	-0,000027	-0,000008
16	15	-0,000010	0,000012
16	16	-0,000010	-0,000001
17	0	0,000018	0,000000
17	1	0,000012	0,000005
17	2	0,000024	-0,000003
17	3	0,000003	0,000010
17	4	0,000014	0,000010
17	5	0,000003	0,000003
17	6	0,000000	0,000001
17	7	0,000033	-0,000032
17	8	0,000025	0,000002
17	9	0,000007	0,000020
17	10	0,000002	-0,000014
17	11	0,000014	0,000019
17	12	-0,000001	-0,000007
17	13	0,000012	-0,000010
17	14	-0,000033	0,000001
17	15	0,000001	-0,000010
17	16	0,000019	0,000000
17	17	-0,000001	0,000003
18	0	-0,000134	0,000000
18	1	-0,000004	-0,000004
18	2	-0,000011	-0,000028
18	3	-0,000001	0,000009
18	4	-0,000003	-0,000003
18	5	0,000010	-0,000011
18	6	-0,000011	0,000001
18	7	0,000005	0,000007
18	8	-0,000029	0,000013
18	9	0,000008	0,000003
18	10	-0,000005	-0,000013
18	11	0,000000	0,000014
18	12	-0,000026	-0,000033
18	13	-0,000016	-0,000004
18	14	-0,000023	0,000000
18	15	-0,000014	0,000003
18	16	-0,000016	-0,000002
18	17	-0,000005	0,000000
18	18	-0,000008	0,000008
19	0	-0,000003	0,000000
19	1	0,000009	-0,000002
19	2	-0,000001	0,000011
19	3	-0,000002	0,000013
19	4	-0,000028	-0,000005
19	5	0,000011	0,000000

19	6	-0,000002	0,000006
19	7	0,000012	0,000006
19	8	-0,000002	0,000013
19	9	0,000004	0,000023
19	10	-0,000051	0,000018
19	11	0,000003	0,000000
19	12	0,000005	-0,000005
19	13	0,000009	-0,000034
19	14	-0,000020	-0,000014
19	15	0,000002	-0,000003
19	16	0,000002	-0,000041
19	17	-0,000015	-0,000010
19	18	-0,000007	-0,000001
19	19	-0,000011	-0,000006
20	0	-0,000067	0,000000
20	1	0,000003	0,000006
20	2	-0,000022	0,000004
20	3	-0,000014	-0,000005
20	4	0,000003	-0,000011
20	5	-0,000006	0,000018
20	6	0,000001	-0,000006
20	7	0,000013	0,000019
20	8	-0,000005	-0,000001
20	9	0,000007	0,000000
20	10	-0,000058	-0,000019
20	11	0,000020	-0,000005
20	12	-0,000004	-0,000002
20	13	0,000024	0,000007
20	14	-0,000022	-0,000009
20	15	-0,000008	0,000010
20	16	-0,000015	0,000015
20	17	0,000002	0,000013
20	18	0,000008	0,000003
20	19	0,000001	0,000003
20	20	-0,000004	0,000000

A.2 Hodnoty Fourierových koeficientů lokálního modelu v bodě (0.42, 1.02)

m	k	An,m	Bn,m
0	0	62635840,592230	0,000000
1	0	-22,892808	0,000000
1	1	-0,186746	-6,335209
2	0	15591,829929	0,000000
2	1	-0,039017	-1,222157
2	2	0,001725	-0,003318
3	0	4511,597665	0,000000
3	1	0,519526	16,186072
3	2	0,005267	-0,212823
3	3	-0,095808	-0,262092

4	0	-65143,773861	0,000000
4	1	22,176642	1093,590074
4	2	-2,180552	513,822688
4	3	-15,835289	19,938756
4	4	-18,254869	131,049504
5	0	-961927,701019	0,000000
5	1	-15003,256133	-984097,253124
5	2	5415,732034	-449282,606675
5	3	46108,278169	-25778,536131
5	4	-9072,889236	835,597654
5	5	1028,200259	-114285,453790
6	0	2823493,587952	0,000000
6	1	9120588,400590	650064,020526
6	2	-868947,317953	104969,055260
6	3	-78088,178297	1031,853710
6	4	-8764,379400	-92619,846222
6	5	4762,582581	7442,120274
6	6	-12622,485844	3055,350868
7	0	-220261,427070	0,000000
7	1	-263713,048721	6943,617809
7	2	-39281,711732	223839,954158
7	3	-743073,539528	-81774,095303
7	4	-957,733062	-5742,665372
7	5	6467,609208	-170,636385
7	6	567,461232	323,536848
7	7	-343,372284	-1618,534186
8	0	-65458,045467	0,000000
8	1	-49250,227491	35057,151343
8	2	-8360,953409	2965,682195
8	3	13372,574542	-3591,333616
8	4	519,487707	-2091,641826
8	5	2954,824016	-218,481394
8	6	250,052545	1696,892399
8	7	-259,001482	88,930370
8	8	20,270542	-129,031762
9	0	349248,545950	0,000000
9	1	-16275,343478	-4815,802632
9	2	-8666,537102	2886,355560
9	3	-3615,975886	5718,150524
9	4	849,050026	-4729,761664
9	5	911,797978	-15,027224
9	6	42,530426	195,824743
9	7	59,632588	86,269958
9	8	-8,783555	-620,700723
9	9	253,420129	-5,247663
10	0	12706,654064	0,000000
10	1	24387,327314	-1686,379464
10	2	1885,244698	-3198,147403
10	3	-863,793467	2177,707781
10	4	-122,615403	1100,048001
10	5	910,640216	-543,379890

10	6	47,003076	80,139609
10	7	14,322429	42,392010
10	8	-51,887864	9,780953
10	9	-6,890795	-1,291021
10	10	6,974205	4,400409