

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Modelování a identifikace poddajného mechanismu s mechanicky
zesílenými piezoaktuátory

Vedoucí práce: prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D.

Autor: Ladislav Dvořák

Praha, 2018

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Dvořák** Jméno: **Ladislav** Osobní číslo: **457673**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Modelování a identifikace poddajného mechanismu s mechanicky zesílenými piezoaktuátory

Název bakalářské práce anglicky:

Modelling and identification of a flexible mechanism with mechanically amplified piezo-actuators

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s metodami fyzikálního modelování poddajné soustavy s piezoaktuátory a metodami redukce modelu.
- 2) Seznamte se s metodami experimentální identifikace poddajné soustavy s aktuátory a senzory.
- 3) Proveďte identifikační měření na rovinném poddajném mechanismu s mechanicky zesílenými piezoaktuátory.
- 4) Zvolte a realizujte vhodný postup tvorby simulačního modelu mechanismu.
- 5) Proveďte ověřovací simulace chování modelu mechanismu a porovnejte s chováním skutečného mechanismu.

Seznam doporučené literatury:

W.K. Gawronski, Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures, Springer-Verlag New York, Inc., 2004.
S. Graham Kelly, Mechanical vibrations: theory and applications, Cengage Learning, 2012.
Z. Šika et al., Cable driven spherical mechanism quadrosphere enhanced by 3 dof piezo-Actuated platform, Proceedings of the 8th ECCOMAS Thematic Conference on MULTIBODY DYNAMICS 2017, p. 551-558.
Z. Šika, J. Zavřel, M. Valášek, Residual Modes for Structure Reduction and Efficient Coupling of Substructures. Bulletin of Applied Mechanics. 2009, vol. 5, no. 19, p. 54-59.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

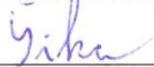
prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D., odbor mechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

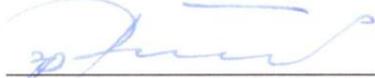
Datum zadání bakalářské práce: **26.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

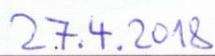

prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.


Datum převzetí zadání


Podpis studenta



Anotační list

Jméno autora:	Ladislav Dvořák
Název bakalářské práce:	Modelování a identifikace poddajného mechanismu s mechanicky zesílenými piezoaktuátory
Anglický název:	Modelling and identification of a flexible mechanism with mechanically amplified piezo-actuators
Akademický rok:	2017/2018
Studijní program	Teoretický základ strojního inženýrství
Obor studia:	Bez oboru
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor mechaniky a mechatroniky
Vedoucí bakalářské práce:	prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D.
Bibliografické údaje:	počet stran 61 počet obrázků 26 počet tabulek 11 počet příloh 1
Klíčová slova:	modelování, poddajná soustava, piezoaktuátory, experimentální identifikace, stavový popis, redukce dynamického systému, Eigensystem Realization Algorithm, vlastní frekvence
Keywords:	modelling, flexible structure, piezo-actuators, system identification, state space, structure reduction, Eigensystem Realization Algorithm, natural frequency

Anotace

Předmětem této práce jsou metody modelování a identifikace poddajných soustav s piezoaktuátory. První část se věnuje modelování kmitajících struktur. Uveden je přehled modelů užívaných k popisu dynamických systémů. Podrobněji jsou vysvětleny metody redukce poddajných soustav a metoda Eigensystem Realization Algorithm užívaná k experimentální identifikaci. V druhé části jsou vybrané metody aplikovány při experimentální identifikaci demonstrátoru Quadrosphere. Analyzovány jsou vlastní frekvence systému a úspěšně identifikován je i model ve formě stavového popisu.

Abstract

The paper deals with modelling and identification of flexible structures with piezo-actuators. The first part covers modelling of vibrating systems. An overview of common dynamic models is provided and methods of structure reduction and Eigensystem Realization Algorithm are introduced. In the second part, particular methods are applied for experimental identification of mechanism Quadrosphere. Natural frequencies of the system are analyzed and a corresponding model is identified in state space form.



Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně za použití uvedené literatury a programů.

V Praze dne

Ladislav Dvořák



Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat panu prof. Ing. Zbyňku Šikovi Ph.D. za možnost podílet se na tomto projektu, za vedení mé práce a především za poskytnutí inspirace, materiálů a odborných konzultací. Rovněž bych rád poděkoval Ing. Volechovi za spolupráci při měření. Děkuji také svým blízkým za podporu a motivaci, kterou mi pomáhají po celou dobu mého studia.



Obsah

1 Úvod	8
1.1 Kmitání strojů	8
1.2 Experimentální demonstrátor QuadroSphere	9
2 Cíle práce.....	12
3 Modelování poddajných mechanismů.....	13
3.1 Netlumené kmitání	13
3.1.1. Vlastní kmity a volné kmitání	13
3.1.2 Vynucené kmitání	15
3.2 Tlumené kmitání	16
3.2.1 Viskózní tlumení a poměrný útlum	17
3.2.2 Proporcionální tlumení	18
3.3 Modální transformace	18
3.4 Modely poddajných soustav	19
3.4.1 Popis diferenciálními rovnicemi druhého řádu	19
3.4.2 Stavový popis	21
3.4.3 Přenosový popis	22
3.5 Metody redukce	22
3.5.1 Redukce s úplným vynecháním vypuštěných stavů.....	24
3.5.2 Redukce s reziduem vypuštěných stavů	25
3.5.3 Porovnání obou metod	25
4 Experimentální identifikace poddajných soustav	29
4.1 Eigensystem Realization Algorithm (ERA).....	29
5 Identifikační měření aktivní struktury Quadrosphere	33
5.1 Cíle měření	33
5.2 Průběh měření	34



5.3 Opakovatelnost měření.....	36
5.4 Naměřené signály	37
6 Analýza naměřených dat.....	40
6.1 Vlastní frekvence systému	40
6.2 Hystereze.....	42
7 Syntéza modelu identifikačními metodami	44
7.1 System Identification Toolbox	44
7.2 Příprava dat	45
7.3 Strategie syntézy kvalitního modelu.....	46
7.4 Parametry identifikace	47
7.5 Výsledky identifikace.....	47
8 Simulace a porovnání chování modelů s reálným mechanismem	51
8.1 Diskrétní modely	51
8.2 Spojité modely	56
9 Závěr.....	58
9.1 Zhodnocení modelů	58
9.2 Shrnutí.....	58
Použité zdroje	59
Přílohy	61

1 Úvod

1.1 Kmitání strojů

Rozsáhlá automatizace průmyslu využívá široké nabídky robotů a manipulátorů. Jeden z nejdůležitějších parametrů těchto zařízení je přesnost. V mnoha případech však nelze dosáhnout požadované přesnosti z důvodu nedostatečné tuhosti mechanismu, která způsobuje buď statickou výchylku od požadované polohy, nebo kmitání koncového bodu okolo ní.

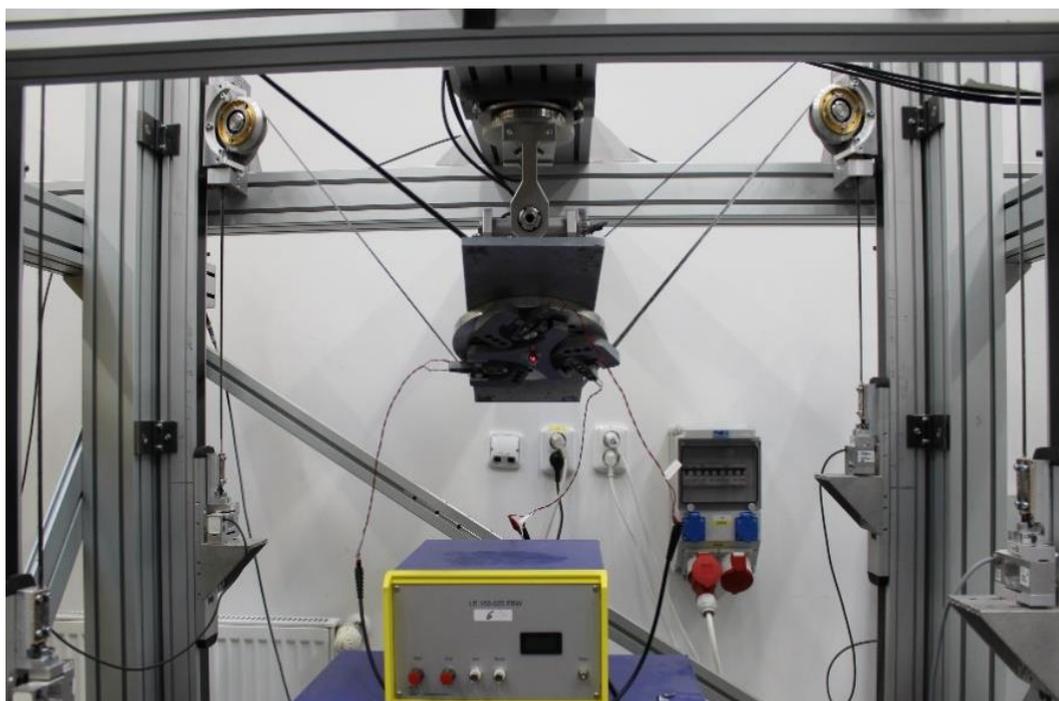
Nedostatečná přesnost mechanismu má dva základní zdroje. Prvním je nedokonalá geometrie kloubů a pohyblivých spojení. Tento jev má zásadní vliv u sériových kinematických struktur s velkým počtem kloubů. Druhým zdrojem je nedostatečná tuhost a následná elastické deformace jednotlivých součástí [5]. V průmyslu jsou v současnosti nejvíce používané manipulátory typu mechanická paže, které mají klouby zapojené sériově (např. svařovací roboty) [15]. Tyto mechanismy obsahují oba zmíněné zdroje nepřesností, což způsobuje nejen statickou výchylku, ale i kmitání koncového bodu při rychlé změně polohy. V současnosti již existují způsoby, které korigují statickou výchylku. Například metoda „Geometric and Elastic Error Compensation“ (GEC) opravuje polohu end-efektoru na základě aktuální konfigurace a zatížení stroje [5]. Pro zdokonalení mechanismu je ale nutné eliminovat i nežádoucí kmitání.

Způsobů snižování kmitání existuje mnoho. Jsou ale omezeny buď rozsahem účinnosti na omezený frekvenční rozsah (pasivní prvky), nebo nutností složitého řízení (aktivní prvky). Mezi základní metody patří vibroabsorpce, vibrokompenzace a vibroizolace. Vibroabsorpce funguje na základě připojení sekundární hmoty pohlcující energii a následném naladění na antirezonanční frekvenci. Zařízení fungující na tomto principu se nazývá dynamický hltič. Pasivní dynamický hltič je citlivý na přesné naladění a je tedy účinný jen na úzký frekvenční rozsah [9]. Tento nedostatek lze vyřešit použitím aktivního hltiče kmitů, jehož řízení je možné nastavit tím způsobem, že dokáže pokrýt širší rozsah frekvencí. Mezi jeho hlavní slabiny patří ale nebezpečí destabilizace soustavy a zesílení vysokých frekvencí [12]. Nicméně pokud je systém tlumený, nelze dosáhnout dokonalé eliminace ani při ideálním naladění hltiče [9]. Vibrokompenzace využívá

naopak přidání paralelní aktivně řízené síly působící mezi rámem a kmitajícím prvkem, na kterém je žádané vibrace zmírnit [16]. Řízení aktivní síly je v tomto případě náročné, jelikož vstupní signál musí správně korelovat se zdrojem vibrací [12]. Vibroizolace přichází v úvahu, když kmitá základna a je nutné určitou součást (např. end-efektor) od vibrací oddělit. Pasivní vibroizolace se realizuje vhodně zvoleným lineárním tlumičem a pružinou, aktivní vibroizolace využívá navíc řízení a akční člen (většinou piezoaktuátor) [12].

1.2 Experimentální demonstrátor Quadrosphere

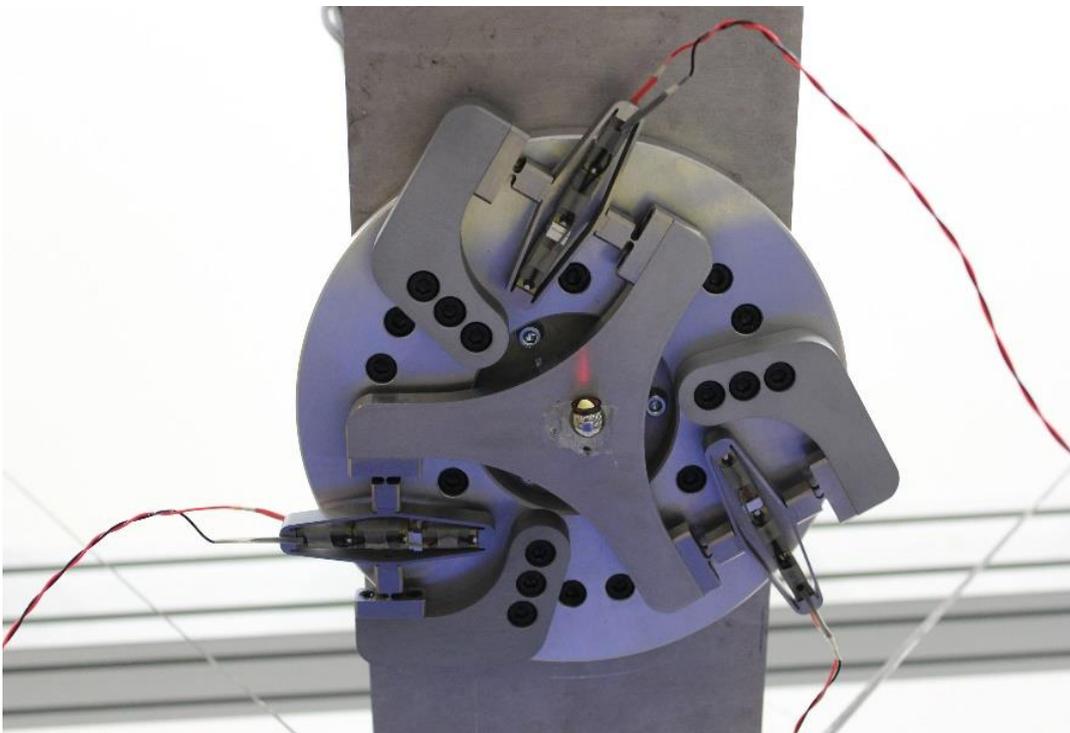
Již zmíněné roboty se sériovou kinematickou strukturou mají zásadní nevýhody oproti jejich méně využívaným protějškům s paralelní kinematickou strukturou. Paralelní kinematické mechanismy (PKM) vynikají především vysokou tuhostí a lepšími dynamickými vlastnostmi, kterých mohou dosáhnout vzhledem k nižší váze pohyblivých částí. Omezujícím parametrem je velikost pracovního prostoru a nutnost složitého řízení. Speciálními zástupci PKM jsou vláknové mechanismy, které k přenosu sil využívají lehkých struktur – lan. Pokud je při návrhu řízení zohledněna podmínka, že síly ve vláknech nabývají jen kladných hodnot, může být užitím lan namísto tyčí výrazně snížena hmotnost mechanismu. Současnou výhodou může být také zvětšení pracovního prostoru prodloužením lan [2].



Obr. 1: Experimentální demonstrátor Quadrosphere se sekundární strukturou

V této práci budou některé postupy aplikovány na příkladu experimentálního demonstrátoru Quadrosphere (viz Obr. 1), který je objektem základního výzkumu na Odboru mechaniky a mechatroniky, Fakulty strojní, ČVUT. Tento paralelní mechanismus se skládá z pohyblivé desky připojené sférickým kloubem k základnímu rámu. Deska má tedy tři stupně volnosti, které jsou řízeny čtyřmi lany udržovanými v tahovém předpětí. Délkou lan je jednoznačně definována poloha, resp. natočení, pohyblivé desky. Přestože jsou použity relativně tuhá karbonová vlákna, podléhá pohyblivá deska překmitům při náhlé změně polohy [11].

Tyto nežádoucí mechanické překmity jsou snižovány pomocí sekundární aktivní struktury připevněné na pohyblivé desce (primární struktuře). Jelikož má primární struktura jen tři stupně volnosti, na kompenzaci jejich výchylek postačuje rovinný mechanismus rovněž se třemi stupni volnosti. Sekundární struktura se skládá z desky ve tvaru hvězdice, která je pomocí trojice mechanicky zesílených piezoaktuátorů APA 400MML (Cedrat Technologies) připevněna k primární struktuře. Na sekundární struktuře je umístěn koncový bod celého vícestupňového mechanismu [11].



Obr. 2: Sekundární (aktivní) struktura tvořena rovinným mechanismem

Skutečná poloha koncového bodu je měřena lasertrackem Leica AT901 MR a následně porovnávána s požadovanou hodnotou. Aktivními zásahy piezoaktuátorů

jsou snižovány překmity základní desky. Sekundární struktura funguje tedy na principu vibroizolace zmíněné v kapitole 1.1.

Pro syntézu řízení aktivní struktury je potřeba kvalitní model, který bude odpovídat reálnému mechanismu. Model je nutný nejen k návrhu odpovídajícího regulátoru, ale i k simulacím, které ověří jeho funkčnost. Musí mít stejné dynamické vlastnosti jako skutečné zařízení, čehož je možné dosáhnout právě experimentální identifikací. Získání modelu za pomoci měření a následné identifikace je hlavním cílem této práce.

2 Cíle práce

Níže jsou rozepsány konkrétní cíle práce a k nim přiřazeny kapitoly, které se příslušnou problematikou zabývají.

- Seznámení se s modelováním poddajných mechanismů, přesněji se základy kmitání, modely poddajných soustav a metodami redukce (kap. 3)
- Seznámení se s problematikou experimentální identifikace, konkrétně s metodou Eigensystem Realization Algorithm (kap. 4)
- Provedení měření na rovinném poddajném mechanismu za účelem identifikace modelu ve formě stavového popisu a zjištění důležitých dynamických vlastností systému (kap. 5 a 6)
- Syntéza simulačního modelu vhodnou metodou identifikace z naměřených dat za účelem získání modelu odpovídajícímu reálné struktuře (kap. 7)
- Provedení validačních simulací chování modelu a porovnání s chováním skutečného mechanismu (kap. 8)

3 Modelování poddajných mechanismů

Pro pochopení metod a pojmů používaných při modelování poddajných mechanismů je nutné nejdříve porozumět základním principům dynamiky. V příkladech zde budou použity soustavy s N stupni volnosti.

3.1 Netlumené kmitání

Mechanické kmitání je pohyb hmotného bodu, který osciluje okolo své statické rovnovážné polohy [1]. Kmitání se dělí na volné a vynucené. Volné kmitání nastává, když na soustavu nepůsobí žádná budící síla a soustava kmitá jen na základě počátečních výchylek a rychlostí. Druhý případ je kmitání vynucené, při kterém na určitá místa soustavy působí síla harmonická, periodická, či obecná [10]. Pohyb netlumené kmitající soustavy je popsán diferenciální pohybovou rovnicí

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \quad (3.1)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{K} matice tuhosti, $\mathbf{f}(t)$ vektor budících sil, \mathbf{x} vektor výchylek a $\ddot{\mathbf{x}}$ vektor zrychlení.

3.1.1. Vlastní kmity a volné kmitání

V případě volného kmitání se jedná o soustavu homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Řešením této pohybové rovnice by měl být harmonický pohyb, při kterém jednotlivé hmoty kmitají se stejnou vlastní frekvencí, ale s různými amplitudami. Tento pohyb se nazývá vlastní kmity. Předpokladem je řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} \sin \Omega t = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \sin \Omega t, \quad (3.3)$$

kde u_i jsou amplitudy (m), Ω je vlastní úhlová frekvence (s^{-1}) a t je čas (s).

Po derivaci a dosazení přejde rovnice (3.2) do tvaru

$$(-\mathbf{M} \Omega^2 + \mathbf{K}) \mathbf{u} \sin \Omega t = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Jedno řešení této rovnice nastává, když jsou obě amplitudy nulové – soustava nekmitá. Netriviální řešení soustavy získáme, když platí, že determinant soustavy

$$\det [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

kde platí

$$\lambda = \Omega^2. \quad (3.6)$$

Tento determinant se nazývá frekvenční determinant. Řešením rovnice jsou vlastní čísla λ_i a k nim příslušné vlastní vektory \mathbf{u}_i . Vlastní úhlové frekvence lze jednoduše dopočítat ze vztahu (3.6). Harmonický pohyb (3.3) nastává pouze pro tyto vlastní úhlové frekvence. Z důvodu lineární závislosti řádků rovnice (3.4) nelze vlastní vektory \mathbf{u} jednoznačně určit a je tedy nutné je normovat. Vzhledem k dalším výpočtům je vhodné vlastní vektory normovat podle matice hmotnosti dle vztahu

$$\mathbf{v}_i = \alpha_i \mathbf{u}_i, \quad (3.7)$$

kde platí

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_i}}. \quad (3.8)$$

Další metody normování uvádí například [9]. Vlastní vektory \mathbf{u}_i , po znormování \mathbf{v}_i se nazývají vlastní tvary kmitu a udávají poměr amplitud jednotlivých hmotných bodů při harmonickém pohybu příslušnou vlastní úhlovou frekvencí. Jelikož se jedná o poměr, je možné tyto vektory libovolně normovat, aniž by to mělo vliv na výsledné řešení. Konkrétní hodnoty amplitud lze získat z počátečních podmínek [9]. S pomocí vlastních tvarů lze sestavit modální matici

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_N], \quad (3.9)$$

která po sloupcích obsahuje jednotlivé vlastní tvary kmitu, a spektrální matici

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_N^2 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

obsahující vzestupně srovnaná vlastní čísla λ_i , respektive umocněné vlastní úhlové frekvence Ω_i^2 .

Z normování vlastních vektorů podle matice hmotnosti (3.7) a rovnice (3.4) vyplývají rovněž vztahy

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Omega}^2. \quad (3.12)$$

Jak bylo zmíněno v kap. 3.1, volné kmitání nastává na základě počátečních podmínek. Obecné počáteční podmínky jsou

$$\mathbf{x}_{(t=0)} = \mathbf{x}_0, \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{(t=0)} = \mathbf{v}_0. \quad (3.14)$$

Obecné řešení rovnice (3.2) je potom lineární kombinací vlastních tvarů kmitu, které nastávají při příslušných vlastních frekvencích, a lze ho zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_N] \begin{bmatrix} A_1 \cos \Omega_1 t + B_1 \sin \Omega_1 t \\ A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t \\ \vdots \\ A_N \cos \Omega_N t + B_N \sin \Omega_N t \end{bmatrix} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} A_1 \cos \Omega_1 t + B_1 \sin \Omega_1 t \\ A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t \\ \vdots \\ A_N \cos \Omega_N t + B_N \sin \Omega_N t \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Maximální řešení je možno dopočítat derivací této rovnice a následným užitím počátečních podmínek. Výsledkem je závislost výchylek na čase při volném netlumeném kmitání [9].

3.1.2 Vynucené kmitání

Vynucené kmitání se vyznačuje přítomností budicí síly, která může být harmonická, obecně periodická, či obecná. Text níže se bude zabývat pouze harmonickým buzením a řešením užitím modálního rozkladu. Modální rozklad bude využit i v následujících kapitolách.

V případě vynuceného netlumeného kmitání se jedná o soustavu nehomogenních diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f}_0 \sin \Omega t = \mathbf{f}(t), \quad (3.16)$$

kde ω je úhlová budicí frekvence (s^{-1}), \mathbf{f}_0 vektor amplitud budících sil a $\mathbf{f}(t)$ vektor zatížení. Vliv homogenního řešení není nutné uvažovat, jelikož volné kmity v reálné tlumené soustavě po ustálení zaniknou. Řešením ustáleného kmitání je pouze partikulární řešení rovnice (3.16), které je nezávislé na počátečních podmínkách [9].

Vzhledem k pravé straně rovnice je předpokládáno partikulární řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} \sin \Omega t, \quad (3.17)$$

kde \mathbf{r} je vektor amplitud vynucených výchylek. Modální rozklad využívá předpokladu, že vektor amplitud vynucených výchylek je možné vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů

$$\mathbf{r} = \mathbf{V} \mathbf{c}, \quad (3.18)$$

kde \mathbf{c} je vektor koeficientů lineární kombinace. Po dosazení do rovnic (3.16), (3.17) získáváme

$$(-\mathbf{M} \omega^2 + \mathbf{K}) \mathbf{V} \mathbf{c} = \mathbf{f}_0. \quad (3.19)$$

Následná úprava a užití vzorců (3.11), (3.12) umožňuje vyjádření vektoru koeficientů lineární kombinace ve tvaru

$$\mathbf{c} = (\mathbf{\Omega}^2 - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{f}_0. \quad (3.20)$$

Jakoukoliv amplitudovou charakteristiku je tedy možné vyjádřit lineární kombinací jednotlivých vlastních tvarů soustavy. Koeficienty vektoru \mathbf{c} určují, jakou měrou se jednotlivé vlastní tvary podílí na výsledných amplitudách hmotných bodů [10].

3.2 Tlumené kmitání

V předchozích kapitolách bylo uvažováno netlumené kmitání, u kterého se předpokládá, že se hmotné body pohybují bez třetí a obecně bez energetických ztrát. U reálných soustav se ale vždy vyskytují určité zdroje energetických ztrát. Tlumení je tedy nutné vhodně zahrnout i do modelu mechanické soustavy.

Kmitání, při kterém určité množství energie disipuje, se nazývá tlumené kmitání [9]. Tyto ztráty se do pohybových rovnic projevují v podobě tlumicí síly.

3.2.1 Viskózní tlumení a poměrný útlum

V tomto případě je tlumicí síla lineárně závislá na rychlosti hmotného bodu. Pohybovou rovnici lineárně tlumeného kmitání lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_t \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \quad (3.21)$$

kde \mathbf{B}_t je matice tlumení a $\dot{\mathbf{x}}$ vektor rychlostí.

V případě volného kmitání jednoho stupně volnosti s viskózním tlumením lze rovnici (3.21) upravit a získat

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0, \quad (3.22)$$

kde b je konstanta lineárního tlumení, m hmotnost hmotného bodu a k tuhost pružiny.

Vlastní frekvence tohoto systému jsou

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3.23)$$

což společně s užitím substituce

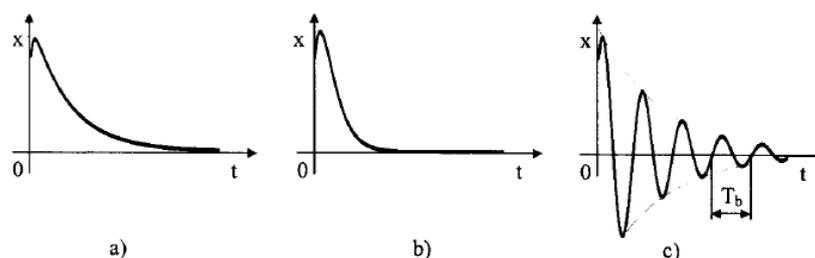
$$2b_r \Omega_0 = \frac{b}{m} \quad (3.24)$$

umožňuje upravit rovnici (3.22) do tvaru

$$\ddot{x} + 2b_r \Omega_0 \dot{x} + \Omega_0^2 x = 0, \quad (3.25)$$

kde b_r je bezrozměrný poměrný útlum.

Velikost poměrného útlumu zásadně ovlivňuje časový průběh amplitudy a dobu, během které případné kmitání ustane. Obecně se rozlišují tři případy:



Obr. 3: Vliv velikosti poměrného útlumu na kmitající hmotný bod. Převzato z [18].

- a) $b_r > 1$ nadkritické tlumení Výsledkem je aperiodický pohyb.
 b) $b_r = 1$ kritické tlumení Pohyb se ustálí v nejkratším možném čase.
 c) $b_r < 1$ podkritické tlumení Soustava kmitá, amplituda exponenciálně klesá.

[18]

Ve strojírenských aplikacích však obvykle platí, že $b_r < 1$, tudíž většina těchto struktur podléhá kmitání [6].

3.2.2 Proporcionální tlumení

Reálný systém s více stupni volnosti je tlumený a tyto tlumicí vlastnosti soustavy je nutné vhodným způsobem modelovat. Jednou z možností je využití modelu s proporcionálním tlumením. Systém je proporcionálně tlumený, pokud pro matici tlumení \mathbf{B}_t platí

$$\mathbf{V}^T \mathbf{B}_t \mathbf{V} = 2\mathbf{b}_r \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{diag}(2b_{r_i} \Omega_i), \quad (3.26)$$

kde \mathbf{b}_r je diagonální matice poměrných útlumů vlastních tvarů, $\boldsymbol{\Omega}$ diagonální matice vlastních frekvencí a \mathbf{V} modální matice netlumeného systému (viz kap. 3.1.1) [8][13].

3.3 Modální transformace

V předchozích kapitolách jsou v rovnicích užívány uzlové souřadnice. Příkladem může být vektor výchylek

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

kde x_i je výchylka i-tého stupně volnosti, resp. i-té hmoty, od jeho statické rovnovážné polohy a N počet stupňů volnosti [10].

Řešení pohybových rovnic, např. rovnice (3.1), lze vyjádřit pomocí vektoru výchylek \mathbf{x} . Při znalosti modální matice je však možné vyjádřit řešení i druhým způsobem.

Z vlastností modální matice vyplývá, že řešení pohybové rovnice lze v každém časovém okamžiku vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních tvarů [9]. Koeficienty lineární kombinace jsou časově závislé a celý vztah je možné považovat za transformaci souřadnic

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}, \quad (3.28)$$

kde \mathbf{q} jsou modální souřadnice a modální matice \mathbf{V} plní funkci transformační matice. Jelikož jsou prvky modální matice konstanty, platí i následující vztahy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.29)$$

a

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\ddot{\mathbf{q}}, \quad (3.30)$$

kde $\dot{\mathbf{q}}$ a $\ddot{\mathbf{q}}$ jsou příslušné časové derivace modálních souřadnic [7].

Při popisu soustav s více stupni volnosti lze užívat uzlové i modální souřadnice.

3.4 Modely poddajných soustav

Kmitání spojitých těles je popsáno parciálními diferenciálními rovnicemi, které je většinou obtížné analyticky vyřešit [9]. Z tohoto důvodu se v těchto případech využívají numerické metody, které spojitě kontinuum aproximují soustavou s konečným počtem stupňů volnosti. Tento diskrétní model poté umožňuje využít výše zmíněné principy řešení soustav s více stupni volnosti [10]. Cílem diskretizačních metod, jejichž příkladem může být metoda konečných prvků (MKP), je získat především matici hmotnosti \mathbf{M} , matici tuhosti \mathbf{K} a vektor zatížení \mathbf{f} [9][10]. Diskretizační metody nejsou však předmětem této práce. Parametry zkoumané soustavy jsou zde obdrženy již v diskretizované podobě s N stupni volnosti. V následujících kapitolách představuje N počet stupňů volnosti, s počet vstupů a r počet výstupů. V uvedených vztazích je předpokladem, že poddajný mechanismus je lineární a proporcionálně tlumený [3].

Obecně se používá popis systému buď pomocí diferenciálních rovnic druhého řádu, pomocí diferenciálních rovnic prvního řádu ve formě stavového popisu nebo pomocí přenosové funkce. Diferenciální rovnice druhého řádu se užívají při analytickém řešení kmitání, naopak z hlediska návrhu řízení je stavový popis či přenosová funkce vhodnější [3].

3.4.1 Popis diferenciálními rovnicemi druhého řádu

Tento popis byl užíván v předchozích kapitolách a je obvykle výsledkem aplikace Newton-Eulerových či Lagrangeových rovnic. Model může být vyjádřen užitím buď

uzlových, nebo modálních souřadnic. Pomocí doposud užívaných uzlových souřadnic lze rovnice zapsat ve formě

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_t \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{B}_0 \mathbf{u} , \quad (3.31)$$

kde \mathbf{B}_0 je matice řízení o rozměru $N \times s$, \mathbf{u} vektor vstupu o rozměru $s \times 1$ a \mathbf{M} , \mathbf{B}_t , \mathbf{K} matice hmotnosti, tlumení a tuhosti o rozměrech $N \times N$ [3].

Nejčastějšími výstupy jsou poloha, rychlost, zrychlení, popřípadě jejich libovolné kombinace

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}; \quad \mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{y} = \ddot{\mathbf{x}} . \quad (3.32)$$

Pro vyjádření rovnice (3.31) je možné použít rovněž souřadnice modální. Použitím modální transformace, viz kapitola 3.3, konkrétně rovnic (3.28), (3.29) a (3.30) je možné vyjádřit pohybovou rovnici ve tvaru

$$\mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_t \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{q} = \mathbf{B}_0 \mathbf{u} . \quad (3.33)$$

Tuto rovnici je možné upravit vynásobením transponovanou modální maticí zleva

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}_t \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{q} = \mathbf{V}^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u} . \quad (3.34)$$

Dále je možné užít substituci

$$\mathbf{V}^T \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_m , \quad (3.35)$$

kde \mathbf{B}_m je modální řídicí matice.

Při normování modální matice podle matice hmotnosti lze využít související rovnice (3.11) a (3.12) a společně se vztahy (3.26) a (3.35) zjednodušit rovnici (3.34) do přehledné formy

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{b}_r \Omega \dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} = \mathbf{B}_m \mathbf{u} . \quad (3.36)$$

Užitím modální transformace je možné vyjádřit i výstupy v podobě polohy, rychlosti a zrychlení

$$\mathbf{y} = \mathbf{V} \mathbf{q}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{V} \ddot{\mathbf{q}} . \quad (3.37)$$

Model poddajného mechanizmu je v tomto prípade vyjádřený pomocí diferenciálních rovnic druhého řádu (3.36) a (3.37) v modálních souřadnicích. Výhodou užití modálních souřadnic je diagonalita matic Ω a b_r , a s tím související možnost rozepsat soustavu rovnic (3.36) na N samostatně řešitelných rovnic [3].

3.4.2 Stavový popis

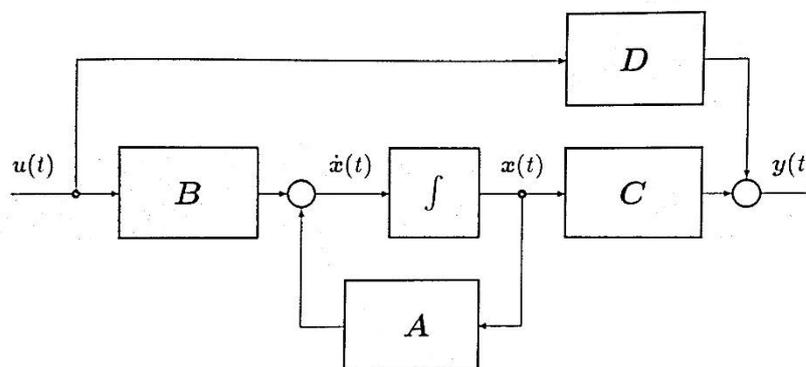
Diferenciální rovnice druhého řádu uvedené v předchozí kapitole nejsou ideálním modelem pro návrh řízení. Z tohoto hlediska je vhodné použít stavový popis, který zavádí stavové veličiny a chování systému popisuje soustavou stavových a výstupních rovnic. Stavové veličiny charakterizují stav, ve kterém se dynamický systém nachází, a při znalosti budoucího vnějšího působení popisují chování systému v budoucnosti [17].

Za předpokladu lineárního a časově neměnného dynamického systému se stavový popis vyjadřuje jako

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (3.38)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),$$

kde $\mathbf{z}(t)$ je stavový vektor o rozměru $n \times 1$, \mathbf{A} matice systému o rozměru $n \times n$, \mathbf{B} matice řízení o rozměru $n \times s$, \mathbf{C} matice vazeb stavu na výstup o rozměru $r \times n$ a \mathbf{D} matice vazeb vstupu na výstup o rozměru $r \times s$. Index n je v tomto případě počet stavů [14].



Obr. 4: Blokové schéma spojitého lineárního dynamického systému. Převzato z [14].

Model popsaný diferenciální rovnicí druhého řádu (3.36) je možné převést na stavový popis metodou snižování řádu derivace. Tato metoda převede rovnice druhého řádu na soustavu rovnic prvního řádu, z kterých se vyjádří stavy a rovnice se upraví do tvaru (3.38) [17].

Stavový popis je nejen v oblasti dynamiky hojně užívaným modelem, protože lze za jeho pomoci jednoduše a přehledně popsat systém s více vstupy a výstupy.

3.4.3 Přenosový popis

Druhou možností modelu vhodného k syntéze řízení je přenosový popis. Zatímco stavový popis poskytuje pomocí stavů informace o vnitřní struktuře modelu, přenos popisuje model z hlediska relace mezi vstupem a výstupem [3].

Pokud je dynamický systém časově neměnný, lze přenos systému vyjádřit jako poměr Laplaceova obrazu výstupu k Laplaceovu obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))}, \quad (3.39)$$

kde $G(s)$ je přenos systému [17][14].

Stavový popis lze převést na přenosový popis užitím Laplaceovy transformace a vyjádřením poměru výstupu ke vstupu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (3.40)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice o rozměru $n \times n$ [17].

Pro lineární systémy je tedy možné mezi sebou vzájemně transformovat modely ve formě diferenciální rovnice druhého řádu s modely ve formě stavového a přenosového popisu [17].

3.5 Metody redukce

Z hlediska řízení jsou požadavky na model poddajné soustavy protichůdné. Model by měl co nejpřesněji odpovídat realitě, ale zároveň musí být co nejmenší. V případě fyzikálního modelování je prvotní model nejčastěji vytvořen užitím metody konečných prvků. Počet stupňů volnosti takového modelu je pro účely řízení moc velký a je tedy nutné provést jeho redukci [13].

V této kapitole bude představena metoda redukce s úplným vynecháním vypuštěných stavů (truncation) a redukce s reziduem vypuštěných stavů

(residualization, popř. singular perturbation approximation). V obou případech je prvotní model, který je z MKP popsán uzlovými souřadnicemi, transformován do modálních souřadnic. Užitím modální transformace (viz kap. 3.3) lze model zapsat diferenciální rovnicí druhého řádu v modálních souřadnicích

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{b}_r\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{q} = \mathbf{V}^T\mathbf{u}, \quad (3.41)$$

kde je předpokladem, že modální matice je normována dle matice hmotnosti (viz kap. 3.1.1), tlumení je proporcionální (viz kap. 3.2.2) a vstupní veličinou je vektor zatížení ($\mathbf{u} = \mathbf{f}$) [13].

Pro převod rovnice (3.41) do stavového popisu je nutné užít metodu snižování řádu derivace a vhodně zvolit stavový vektor

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \cdot q_1 \\ \dot{q}_1 \\ \Omega_2 \cdot q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \Omega_N \cdot q_N \\ \dot{q}_N \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

kde q_i je modální souřadnice, \dot{q}_i modální rychlost a Ω_i příslušná vlastní frekvence. Vzhledem ke snížení řádu derivace má stavový vektor rozměr $2N \times 1$. Výhodou přítomnosti vlastní frekvence Ω_i v příslušných složkách stavového vektoru je, že hodnoty všech složek mají přibližně stejný řád [13].

Rovnici (3.41) je možné užitím stavového vektoru (3.42) převést na rovnici stavového popisu

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \cdot \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \Omega_2 \cdot \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \Omega_N \cdot \dot{q}_N \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\Omega_1 & -2b_{r1}\Omega_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_2 & -2b_{r2}\Omega_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Omega_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\Omega_N & -2b_{rN}\Omega_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \cdot q_1 \\ \dot{q}_1 \\ \Omega_2 \cdot q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \Omega_N \cdot q_N \\ \dot{q}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{V}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{V}_N^T \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (3.43)$$

kde matice systému \mathbf{A} má blokově diagonální strukturu a lze ji zjednodušeně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \Omega_1 \\ -\Omega_1 & -2b_{r1}\Omega_1 \end{matrix}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & \Omega_2 \\ -\Omega_2 & -2b_{r2}\Omega_2 \end{matrix}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{\begin{matrix} 0 & \Omega_N \\ -\Omega_N & -2b_{rN}\Omega_N \end{matrix}} \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

a řídicí matice \mathbf{B} obsahuje jednotlivé transponované vlastní tvary kmitu

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{V}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{V}_N^T \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

3.5.1 Redukce s úplným vynecháním vypuštěných stavů

Aby byly zachovány relevantní dynamické vlastnosti, je nutné v redukovaném modelu ponechat stupně volnosti patřící nejnižším frekvencím. Stavový vektor ponechaných stavů lze tedy vyjádřit

$$\mathbf{z}_a = \begin{bmatrix} \Omega_1 \cdot q_1 \\ \dot{q}_1 \\ \Omega_2 \cdot q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \Omega_n \cdot q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

kde n je počet stupňů volnosti redukovaného modelu ($n \ll N$).

Stavový vektor vynechaných stavů je analogicky

$$\mathbf{z}_b = \begin{bmatrix} \Omega_{n+1} \cdot q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \\ \Omega_{n+2} \cdot q_{n+2} \\ \dot{q}_{n+2} \\ \vdots \\ \Omega_N \cdot q_N \\ \dot{q}_N \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

kde N je počet stupňů volnosti původního modelu.

Takto je možné rozdělit stavový vektor na ponechanou a odříznutou část

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_a \\ \mathbf{z}_b \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Stavový model (3.43) lze formálně zapsat

$$\mathbf{SS}_{orig} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{ab} & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} & \mathbf{B}_b \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{C}_b & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

kde index b značí odříznuté části matic. Metoda redukce s úplným vynecháním vypuštěných stavů spočívá v čistém odtržení vypuštěných stavů, tudíž redukovaný model bude ve tvaru

$$\mathbf{SS}_{trun} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

3.5.2 Redukce s reziduem vypuštěných stavů

Při redukci s reziduem lze redukovaný stavový model zapsat obecně

$$\mathbf{SS}_{res} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{B}_a - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{B}_b \\ \mathbf{C}_a - \mathbf{C}_b \mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{D} - \mathbf{C}_b \mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{B}_b \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Za použití předpokladu, že matice systému \mathbf{A} je blokově diagonální (3.44) lze užít vztahy

$$\mathbf{A}_{ab} = \mathbf{0}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{A}_{ba} = \mathbf{0}. \quad (3.53)$$

Stavový model je potom možné vyjádřit ve formě

$$\mathbf{SS}_{res} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{D} - \mathbf{C}_b \mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{B}_b \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

3.5.3 Porovnání obou metod

Při porovnání stavového modelu redukovaného s úplným vynecháním vypuštěných stavů (3.50) a s reziduem vypuštěných stavů (3.54) je zřejmé, že se výsledný tvar při použití modálních stavů liší pouze ve vyjádření matice \mathbf{D} . Matice \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} mají stejnou formu v obou případech. Matice systému redukovaného modelu \mathbf{A}_{red} lze pro obě metody vyjádřit

$$\mathbf{A}_{red} = \mathbf{A}_{aa} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \Omega_1 \\ -\Omega_1 & -2b_{r1}\Omega_1 \end{matrix}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & \Omega_2 \\ -\Omega_2 & -2b_{r2}\Omega_2 \end{matrix}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{\begin{matrix} 0 & \Omega_n \\ -\Omega_n & -2b_{rn}\Omega_n \end{matrix}} \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

a matice řízení redukovaného modelu \mathbf{B}_{red} je v obou případech

$$\mathbf{B}_{red} = \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{V}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{V}_n^T \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Matice vazeb stavu na výstup \mathbf{C} je závislá na volbě výstupních veličin. Tyto veličiny jsou většinou poloha, rychlost nebo zrychlení. V případě výstupu ve formě polohy a stavového vektoru zvoleného dle (3.42) lze matici vazeb stavu na výstup redukovaného modelu $\mathbf{C}_{red,pos}$ vyjádřit

$$\mathbf{C}_{red,pos} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{V}_1}{\Omega_1} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{V}_2}{\Omega_2} & \mathbf{0} & \cdots & \frac{\mathbf{V}_n}{\Omega_n} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

v případě výstupu ve formě rychlosti se matice $\mathbf{C}_{red,vel}$ vyjádří

$$\mathbf{C}_{red,vel} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{V}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{V}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{V}_n], \quad (3.58)$$

a v případě výstupu ve formě zrychlení se matice $\mathbf{C}_{red,acc}$ vyjádří

$$\mathbf{C}_{red,acc} = [-\mathbf{V}_1\Omega_1 \quad -2\mathbf{V}_1b_{r1}\Omega_1 \quad -\mathbf{V}_2\Omega_2 \quad -2\mathbf{V}_2b_{r2}\Omega_2 \quad \cdots \quad -\mathbf{V}_n\Omega_n \quad -2\mathbf{V}_nb_{rn}\Omega_n]. \quad (3.59)$$

Matice vazeb vstupu na výstup \mathbf{D} je závislá na zvoleném výstupu a zároveň nabývá různých tvarů dle vybrané metody redukce. V případě redukce metodou truncate je možné odvodit výrazy pro \mathbf{D}_{red} z rovnice stavového popisu (3.38), z volby stavového vektoru (3.42) a z volby výstupních veličin. Pokud je zvolena redukce s reziduem vypuštěných stavů, je nutné provést složitější vyjádření, neboť vztah pro matici \mathbf{D}_{red} (3.54) je v tomto případě rozšířen o výraz

$$\Delta\mathbf{D} = -\mathbf{C}_b\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{B}_b. \quad (3.60)$$

Jelikož má matice \mathbf{A}_{bb} blokově diagonální strukturu, má i její inverzní forma stejnou strukturu

$$\mathbf{A}_{bb}^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cc} -2b_{r_{n+1}} & -1 & & \\ \Omega_{n+1} & \Omega_{n+1} & \dots & 0 \\ \hline 1 & 0 & & \\ \Omega_{n+1} & & & \end{array} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 0 & \dots & \begin{array}{cc|cc} -2b_{r_N} & -1 & & \\ \Omega_N & \Omega_N & \dots & \\ \hline 1 & 0 & & \\ \Omega_N & & & \end{array} \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Výraz $\Delta \mathbf{D}$ je možné následně vyjádřit za pomoci symbolických operací (např. Matlab Symbolic Math Toolbox).

V případě výstupu ve formě polohy a stavového vektoru zvoleného dle (3.42) lze matici vazeb vstupu na výstup redukováného modelu $\mathbf{D}_{red,pos}^{RES}$ vyjádřit

$$\mathbf{D}_{red,pos}^{RES} = \sum_{i=n+1}^N \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T}{\Omega_i^2}. \quad (3.62)$$

Výraz je možné dále zjednodušit užitím vztahu

$$\sum_{i=n+1}^N \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T}{\Omega_i^2} = \mathbf{v} \boldsymbol{\Omega}^{-2} \mathbf{v}^T = \mathbf{v} (\boldsymbol{\Omega}^2)^{-1} \mathbf{v}^T = \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{G}, \quad (3.63)$$

kde \mathbf{G} je matice poddajnosti, a následným vyjádřením

$$\mathbf{D}_{red,pos}^{RES} = \sum_{i=n+1}^N \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T}{\Omega_i^2} = \sum_{k=1}^N \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T}{\Omega_k^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T}{\Omega_j^2} = \mathbf{G} - \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T}{\Omega_j^2}. \quad (3.64)$$

Matici vazeb vstupu na výstup \mathbf{D}_{red}^{RES} lze pro případy, kdy je výstupem rychlost a zrychlení, vyjádřit analogicky. Tabulka níže přehledně ukazuje výrazy pro matici \mathbf{D}_{red} pro výstupní veličiny polohy, rychlosti a zrychlení za užití obou metod.

Výstupní veličina	Redukce s úplným vynecháním vypuštěných stavů	Redukce s reziduem vypuštěných stavů
poloha ($\mathbf{y} = \mathbf{x}$)	$\mathbf{D}_{\text{red,pos}}^{TRU} = \mathbf{0}$	$\mathbf{D}_{\text{red,pos}}^{RES} = \mathbf{G} - \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T}{\Omega_j^2}$
rychlost ($\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$)	$\mathbf{D}_{\text{red,vel}}^{TRU} = \mathbf{0}$	$\mathbf{D}_{\text{red,vel}}^{RES} = \mathbf{0}$
zrychlení ($\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{x}}$)	$\mathbf{D}_{\text{red,acc}}^{TRU} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$	$\mathbf{D}_{\text{red,acc}}^{RES} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$

Tabulka 1: Matice vazeb vstupu na výstup pro různé metody redukce a různé vstupy. Převzato z [13].

Z tabulky je zřejmé, že při užití redukce s reziduem vypuštěných stavů, je matice vazeb vstupu na výstup vyjádřena pomocí jen n vlastních tvarů namísto všech vlastních tvarů původního systému s N stupni volnosti [13][3].

4 Experimentální identifikace poddajných soustav

V předchozích kapitolách byly představeny postupy, kterých se užívá při tvorbě fyzikálního modelu. Fyzikální model se může vlivem určitých zjednodušení při jeho tvorbě od reálné soustavy výrazně lišit [3]. V takovém případě je vhodné vytvořit model jinou metodou. Druhým způsobem získání modelu je experimentální identifikace na základě měření reálné soustavy [3].

4.1 Eigensystem Realization Algorithm (ERA)

V oblasti experimentální identifikace se vyvinulo mnoho metod, které se nabízejí k analýze naměřených dat. Eigensystem Realization Algorithm (dále jen ERA) je metoda, jejímž výstupem je stavový model (viz kap. 3.4.2) v balancovaném tvaru. Jejím hlavním předpokladem je diskrétní systém, respektive časově diskrétní vstupní a výstupní signály. V současné době, kdy je mnoho měřících přístrojů zpracujících signál digitální, je tento předpoklad ve většině případů splněn [3].

Stavový popis v diskrétní podobě lze obdobně jako (3.38) vyjádřit

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i+1} &= \mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i, \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}\mathbf{z}_i + \mathbf{D}\mathbf{u}_i, \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde \mathbf{u}_i je vstupní hodnota v čase $i\Delta t$, \mathbf{y}_i výstupní hodnota v čase $i\Delta t$, \mathbf{z}_i a \mathbf{z}_{i+1} jsou stavové vektory v čase $i\Delta t$, respektive $(i + 1)\Delta t$.

Reakci systému s nulovými počátečními podmínkami $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ na obecné vstupní hodnoty \mathbf{u}_i lze při využití znalosti stavového popisu (3.65) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{D}\mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 = \mathbf{B}\mathbf{u}_0, \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1, \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1, \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_2, \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2, \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{C}\mathbf{x}_3 + \mathbf{D}\mathbf{u}_3 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u}_3,$$

což je možno zobecnit do formy

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{A}^1\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{C}\mathbf{A}^0\mathbf{B}\mathbf{u}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u}_3,$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{h}_3\mathbf{u}_0 + \mathbf{h}_2\mathbf{u}_1 + \mathbf{h}_1\mathbf{u}_2 + \mathbf{h}_0, \quad (4.2)$$

kde jsou \mathbf{h}_0 a \mathbf{h}_k Markovovy parametry

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{D}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, \text{ pro } k = 1, 2, 3 \dots \quad (4.4)$$

Tyto parametry jsou čísla pro SISO systémy, systémy s jedním vstupem a jedním výstupem, a matice pro MIMO systémy, systémy s více vstupy a výstupy.

Markovovy parametry tvoří Markovovu matici \mathbf{H} ve tvaru

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_0 \quad \mathbf{h}_1 \quad \dots \quad \mathbf{h}_p] = [\mathbf{D} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^0\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B}], \quad (4.5)$$

kde p je nejvyšší uvažovaný řád systému. Počet vzorků identifikovaného signálu značený q musí být pak větší než tento uvažovaný řád systému.

Vstupní a výstupní signály je nutné rovněž uspořádat do matic. Pomocnou matici vstupních signálů \mathbf{U} lze zapsat ve formě

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_p & \dots & \mathbf{u}_q \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_{p-1} & \dots & \mathbf{u}_{q-1} \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 & \dots & \mathbf{u}_{p-2} & \dots & \mathbf{u}_{q-2} \\ \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 & \dots & \mathbf{u}_{q-p} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

pomocná matice výstupních signálů \mathbf{Y} má potom formu

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_0 \quad \mathbf{y}_1 \quad \dots \quad \mathbf{y}_q]. \quad (4.7)$$

Za pomoci těchto matic je možné sestavit rovnici

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{U}, \quad (4.8)$$

ve které je při identifikaci jediným neznámým prvkem Markovova matice \mathbf{H} .

Tu je možné vyjádřit vynásobením rovnice pseudoinverzní maticí \mathbf{U}^+ zprava a získat

$$\mathbf{H} = \mathbf{YU}^+ = \mathbf{YU}^T(\mathbf{UU}^T)^{-1}. \quad (4.9)$$

Při znalosti Markovovy matice \mathbf{H} jsou známé i jednotlivé Markovovy parametry \mathbf{h}_0 a \mathbf{h}_k . To umožňuje přímo vyjádřit jednu ze čtyř matic stavového popisu, matici vazeb vstupu na výstup \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \mathbf{h}_0, \quad (4.10)$$

kteřá není závislá na konkrétní volbě stavového vektoru.

Ostatní Markovovy parametry je nutné uspořádat do základní a posunuté Hankelovy matice, které jsou dvěma základními prvky algoritmu ERA. Základní Hankelova matice \mathbf{H}_1 je definována jako

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_l \\ \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 & \cdots & \mathbf{h}_{l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_l & \mathbf{h}_{l+1} & \cdots & \mathbf{h}_{2l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \cdots & \mathbf{CA}^{l-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^l\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{l-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^l\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{2l-2}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

kde je zaveden index l , pro který platí $2l = p$. Podobným způsobem je definována i posunutá Hankelova matice \mathbf{H}_2

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 & \cdots & \mathbf{h}_{l+1} \\ \mathbf{h}_3 & \mathbf{h}_4 & \cdots & \mathbf{h}_{l+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{l+1} & \mathbf{h}_{l+2} & \cdots & \mathbf{h}_{2l} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Jak bylo uvedeno v úvodu kapitoly, výsledkem algoritmu je stavový popis v balancovaném stavu. Balancovaný stav je stav, při kterém je model stejnou měrou říditelný i pozorovatelný. Tím je zajištěna vyváženost mezi těmito dvěma vlastnostmi a jsou vybrány stavy, které jsou důležité pro chování systému [3].

Matice říditelnosti \mathbf{Q} a matice pozorovatelnosti \mathbf{P} jsou definovány ve tvaru

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{l-1}\mathbf{B}], \quad (4.13)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{l-1} \end{bmatrix} \quad [17]. \quad (4.14)$$

Pomocí těchto matic je možné sestavit základní (4.11) i posunutou (4.12) Hankelovu matici. Výsledkem jsou vztahy

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}\mathbf{Q}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}. \quad (4.16)$$

V těchto rovnicích známe pouze levé strany, matice \mathbf{H}_1 a \mathbf{H}_2 . Vyjádření matic říditelnosti \mathbf{Q} a pozorovatelnosti \mathbf{P} je dosaženo konkrétní volbou rozkladu, při kterém je zajištěna balancovaná forma stavového modelu, tedy stejná pozorovatelnost i říditelnost. Stav je nutné ohodnotit dle toho, jaký mají pro model význam. Váhy významu jednotlivých stavů se nazývají singulární Hankelova čísla γ_i a vznikají singulárním rozkladem základní Hankelovy matice \mathbf{H}_1 . Výsledkem singulárního rozkladu, popsaného například v [3], jsou matice říditelnosti \mathbf{Q} a pozorovatelnosti \mathbf{P} . Matice řízení \mathbf{A} se poté vyjádří z rovnice (4.16) pomocí pseudoinverzních matic \mathbf{P}^+ a \mathbf{Q}^+ ve formě

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^+\mathbf{H}_2\mathbf{Q}^+ = (\mathbf{P}^T\mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)^{-1}. \quad (4.17)$$

Zbývající matice stavového popisu jsou prvními submaticemi matice říditelnosti a matice pozorovatelnosti. Vyjádří se jednoduše jako

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{E}_s, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{E}_s = [\mathbf{I}_s \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]^T$$

a

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}_r^T\mathbf{P}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{E}_r = [\mathbf{I}_r \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]^T,$$

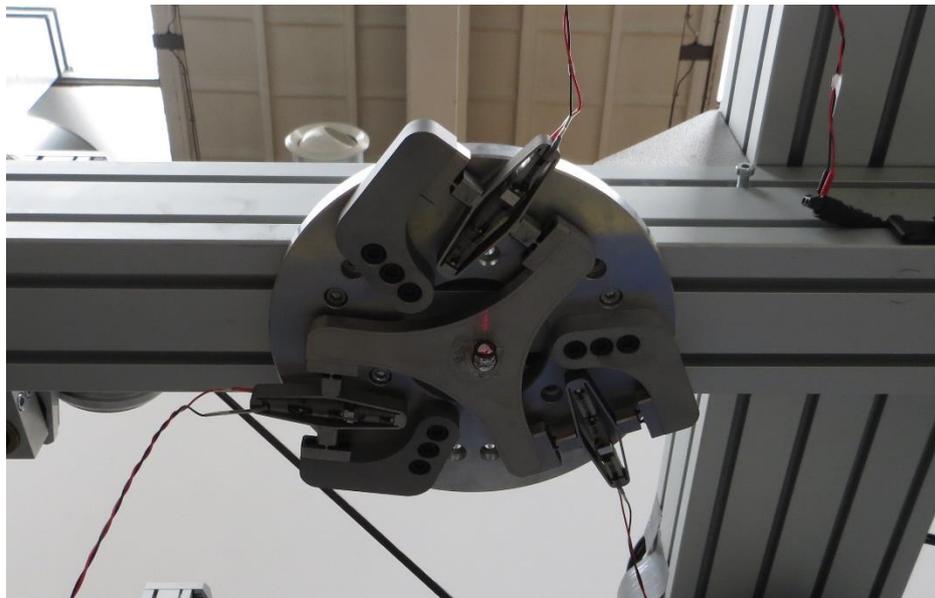
kde \mathbf{I}_s a \mathbf{I}_r jsou jednotkové matice příslušného rozměru.

Uvedeným způsobem je možné z diskrétního vstupního a výstupního signálu získat model systému ve formě stavového popisu. Eigensystem Realization Algorithm je základní metodou v oblasti identifikace a v mnoha případech je princip v určitých obměnách užíván i v dalších identifikačních metodách [3].

5 Identifikační měření aktivní struktury Quadrosphere

5.1 Cíle měření

Experimentální demonstrátor Quadrosphere představený v kap. 1.2 se skládá z primární struktury, desky spojené sférickým kloubem s rámem, a z aktivní sekundární struktury, která kompenzuje kmitání primární struktury. Sekundární struktura je rovinný mechanismus, který má tři stupně volnosti a tři pohony v podobě mechanicky zesílených piezoaktuátorů. Mechanismus je staticky určitý, vysunutí piezo-prvků určuje polohu koncového bodu. Strukturu nelze považovat za dokonale tuhou. Značně poddajné jsou především mechanicky zesílené piezoaktuátory. Při návrhu řízení je tedy nutné uvažovat dynamiku. Zpětnou vazbu zajišťuje lasertracker, který snímá okamžitou polohu koncového bodu.



Obr. 5: Sekundární (aktivní) struktura připevněná pro účely měření k rámu

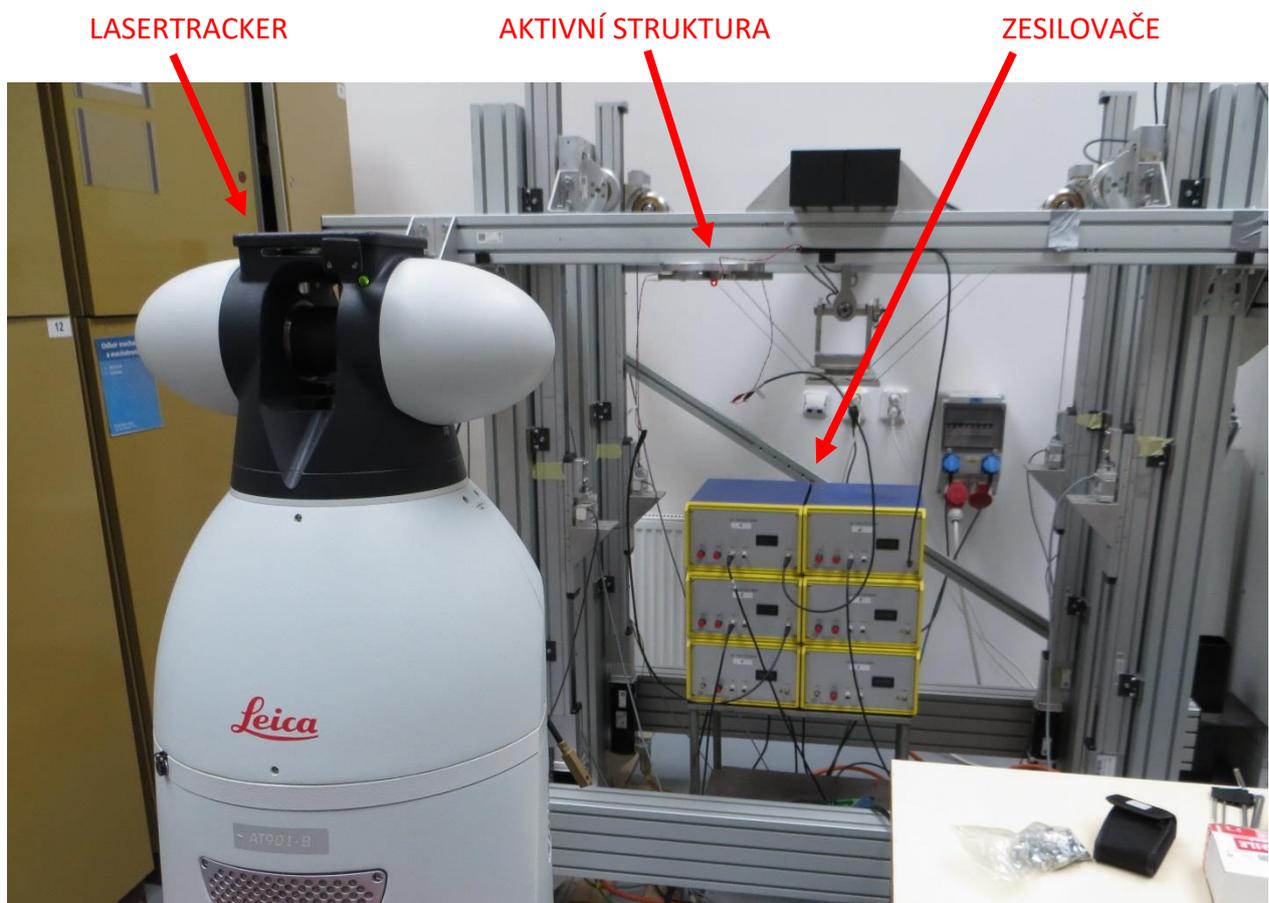
Hlavním cílem tohoto projektu je návrh regulátoru, který bude mechanismus řídit a kompenzovat tak nežádoucí kmitání primární struktury. Pro návrh regulátoru je nutné mít přesný model systému, v tomto případě aktivní sekundární struktury. Vzhledem ke složitosti mechanicky zesílených piezoaktuátorů byl vytvořen fyzikální model užitím metody konečných prvků a zároveň model získaný experimentální identifikací. Tyto modely budou v budoucnu užity k návrhu robustního regulátoru, který dokáže řídit oba modely a zároveň v regulaci zohlední všechny rezonanční frekvence struktury. MKP model byl vytvořen v programu Ansys dříve v rámci jiné práce na tomto projektu.

V současnosti probíhá paralelně i tvorba komplexního dynamického modelu v programu Adams.

Úkolem této práce je syntéza modelu naprosto odlišnou cestou, experimentální identifikací. Hlavním cílem zde prezentovaného měření je získání modelu na základě měření reálné struktury. Zároveň je druhotným cílem i analýza naměřených dat za účelem zjištění rezonančních frekvencí.

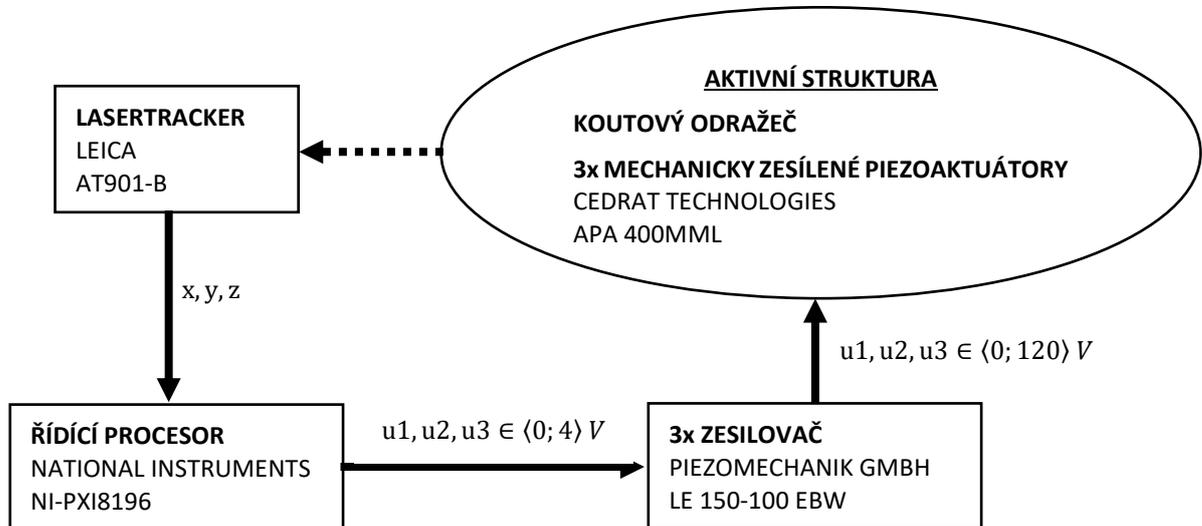
5.2 Průběh měření

Měření proběhlo v úterý 29. května 2018 v prostorách laboratoře mechatroniky na Fakultě strojní, ČVUT. Měření neprobíhalo „in situ“ – mechanismus nebyl připojen k primární struktuře lanového manipulátoru – ale bylo zvoleno pevné uložení. Mechanismus byl přišroubován k rámu ve vodorovné poloze (viz Obr. 5 a Obr. 6).



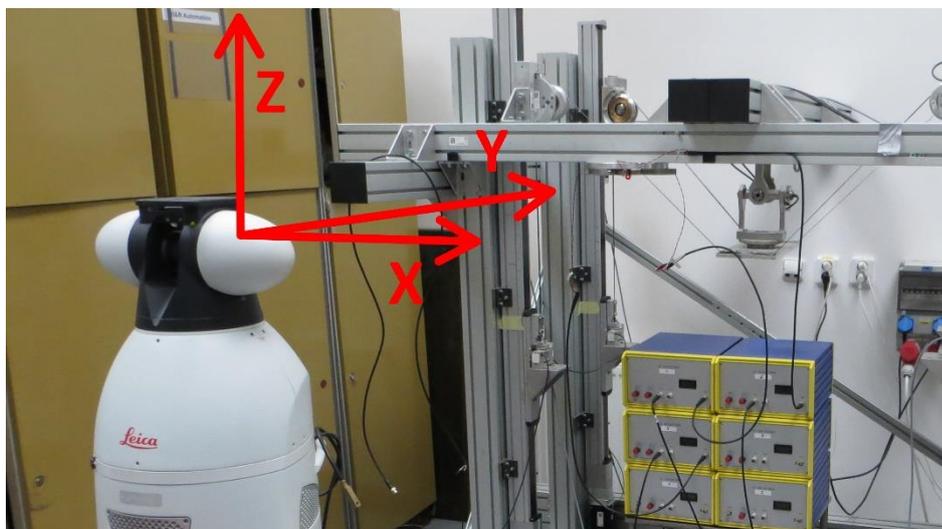
Obr. 6: Pohled na měřící stanoviště

Vstupním signálem bylo napětí na piezoaktuátorech. Výstupním signálem byla poloha koncového bodu, respektive koutového odražeče připevněného na pohyblivé části mechanismu.



Obr. 7: Schéma měření

Zařízení byla zapojena dle schématu (viz Obr. 7). Řídicí procesor NI-PXI8196 generoval diskrétní napěťové vstupní signály při taktovací frekvenci 1 kHz , které byly třemi analogovými zesilovači LE 150-100 EBW zesilovány až na hodnoty 120 V . Piezoaktuátory byly napojeny přímo na zesilovače a v závislosti na napětí se vysouvaly. Poloha koutového odražeče byla snímána lasertrackerem Leica AT901-B, který má vzorkovací frekvenci 1 kHz . Hodnoty souřadnic v souřadném systému lasertrackeru (viz Obr. 8) byly zaznamenávány opět řídicím procesorem NI-PXI8196.



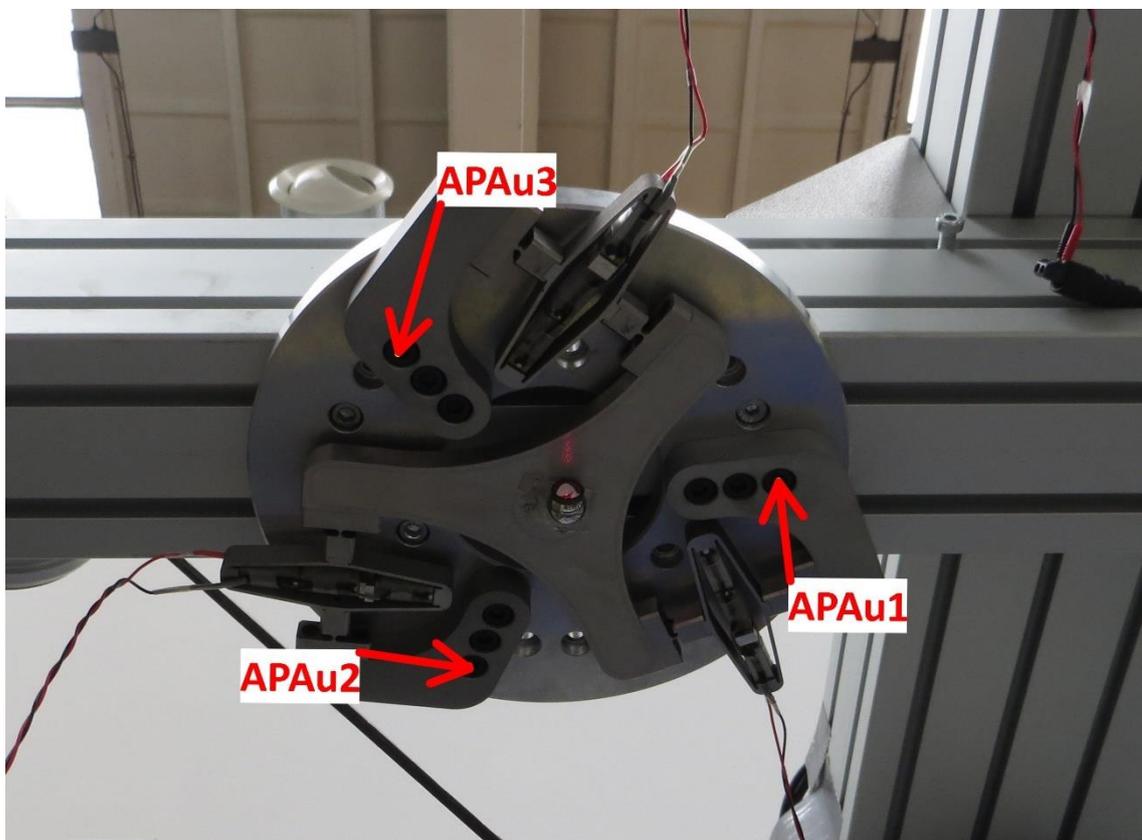
Obr. 8: Souřadný systém lasertrackeru

5.3 Opakovatelnost měření

Aby byla zajištěna opakovatelnost měření a bylo možno v budoucnu naměřené signály transformovat do souřadného systému lasertrackeru postaveného na jiném místě, byla zaznamenána vzájemná poloha lasertrackeru a mechanismu. Změřena byla konkrétně poloha tří děr mechanismu v souřadném systému lasertrackeru.

název bodu	poloha x [mm]	poloha y [mm]	poloha z [mm]
bod "APAu1"	46.4063267	1335.1661217	-17.2392739
bod "APAu2"	-59.9900423	1403.1056456	-17.6927762
bod "APAu3"	-65.5269895	1276.8240920	-17.1270673

Tabulka 2: Přesná poloha tří děr aktivní struktury v souřadném systému lasertrackeru



Obr. 9: Poloha a názvy zaznamenaných bodů na aktivní struktuře

Souřadnice byly získány následujícím způsobem. Do vyznačených děr na Obr. 9 byl vkládán koutový odražeč o průměru 1,5 palce. Koutový odražeč má tvar přesné koule a lasertracker zaznamenává polohu jeho geometrického středu. Vzhledem k tomu, že bude v budoucnu řízení realizováno stejným lasertrackerem, jsou v tabulce 2 uvedeny souřadnice geometrického středu koutového odražeče přiloženého do příslušné díry.

5.4 Naměřené signály

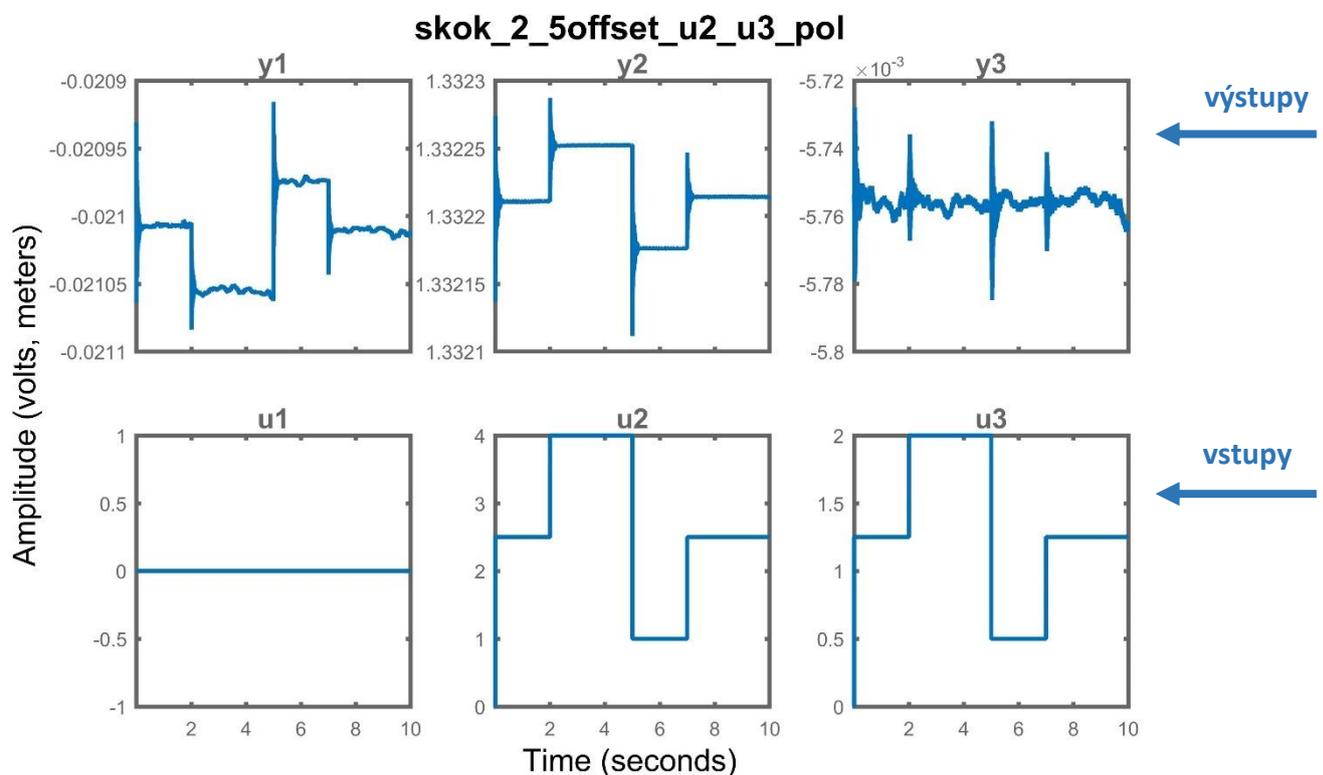
Pro úspěšnou identifikaci je nutné mít dostatek kvalitně zaznamenaných dat. Důležitou součástí identifikace je totiž i validace modelu na jiných datech než na těch, které byly použity pro tvorbu modelu. První požadavek byl proto naměřit dostatek charakterově odlišných dat. Dále bylo požadováno, aby bylo z dat možné určit rezonanční frekvence, které jsou důležitou informací vypovídající o dynamice systému. Z těchto požadavků vyplynulo, že piezoaktuátory budou buzeny skoky a jejich příslušnými kombinacemi, chirpy a bílým šumem. Chirp má průběh sinusoidy s lineárně rostoucí frekvencí, bílý šum je náhodný signál, ve kterém jsou rovnoměrně zastoupeny všechny frekvence určitého rozsahu.

název měření	počet vzorků	délka stopy [s]	u1	u2	u3
bily_sum_2_5offset_u1	10001	10	bílý šum - ampl. 0.25 V stř.hodn. 2.5 V	0 V	0 V
bily_sum_2_5offset_u2	10001	10	0 V	bílý šum - ampl. 0.25 V stř.hodn. 2.5 V	0 V
bily_sum_2_5offset_u3	10001	10	0 V	0 V	bílý šum - ampl. 0.25 V stř.hodn. 2.5 V
bily_sum_2_5offset_vse	10001	10	bílý šum - ampl. 0.25 V, stř.hodn. 2.5 V		
chirp_250hz_u1	20001	20	chirp - ampl. 0.2 V, stř.hodn. 2.5 V	0 V	0 V
chirp_250hz_u2	20001	20	0 V	chirp - ampl. 0.2 V, stř.hodn. 2.5 V	0 V
chirp_250hz_u3	20001	20	0 V	0 V	chirp - ampl. 0.2 V, stř.hodn. 2.5 V
chirp_250hz_u3_mereni_2	20001	20	0 V	0 V	chirp - ampl. 0.2 V, stř.hodn. 2.5 V
chirp_208hz_u1	20827	20.8	chirp - ampl. 0.25 V, stř.hodn. 2.5 V	0 V	0 V
skok_2_5offset_u1	10001	10	skok 2.5 - 4 - 1 - 2.5 V	0 V	0 V
skok_2_5offset_u1_u2	10001	10	skok - 2.5 - 3 - 1 - 2.5 V		0 V
skok_2_5offset_u1_u2_pol	10001	10	skok 2.5 - 4 - 1 - 2.5 V	skok 1.25 - 2 - 0.5 - 1.25 V	0 V
skok_2_5offset_u1_u3	10001	10	skok 2.5 - 3 - 1 - 2.5 V	0 V	skok 2.5 - 3 - 1 - 2.5 V
skok_2_5offset_u2	10001	10	0 V	skok 2.5 - 4 - 1 - 2.5 V	0 V
skok_2_5offset_u2_u3	10001	10	0 V	skok - 2.5 - 3 - 1 - 2.5 V	
skok_2_5offset_u2_u3_pol	10001	10	0 V	skok 2.5 - 4 - 1 - 2.5 V	skok 1.25 - 2 - 0.5 - 1.25 V
skok_2_5offset_u3	10001	10	0 V	0 V	skok 2.5 - 4 - 1 - 2.5 V
skok_2_5offset_u3_u1_pol	10001	10	skok 1.25 - 2 - 0.5 - 1.25 V	0 V	skok 2.5 - 4 - 1 - 2.5 V
skok_2_5offset_vse	10001	10	skok - 2.5 - 3 - 1 - 2.5 V		

Tabulka 3: Seznam naměřených dat

Na základě měření aktivní struktury, které proběhly dříve, bylo zároveň požadováno, aby napětí na buzeném piezoaktuátoru nebylo nulové. Při buzení piezoaktuátorů harmonickým signálem, jehož nejnižší hodnota se rovnala nule, docházelo k nárazům mechanicky zesíleného piezoaktuátoru, což mělo za následek rezonanci při výrazně nižších frekvencích vstupního signálu. Konkrétně se tento jev objevil při buzení signálem typu chirp s rozsahem výchylky od nuly do 4 V. Z tohoto důvodu byla pro nová měření u signálů nastavena vyšší střední hodnota.

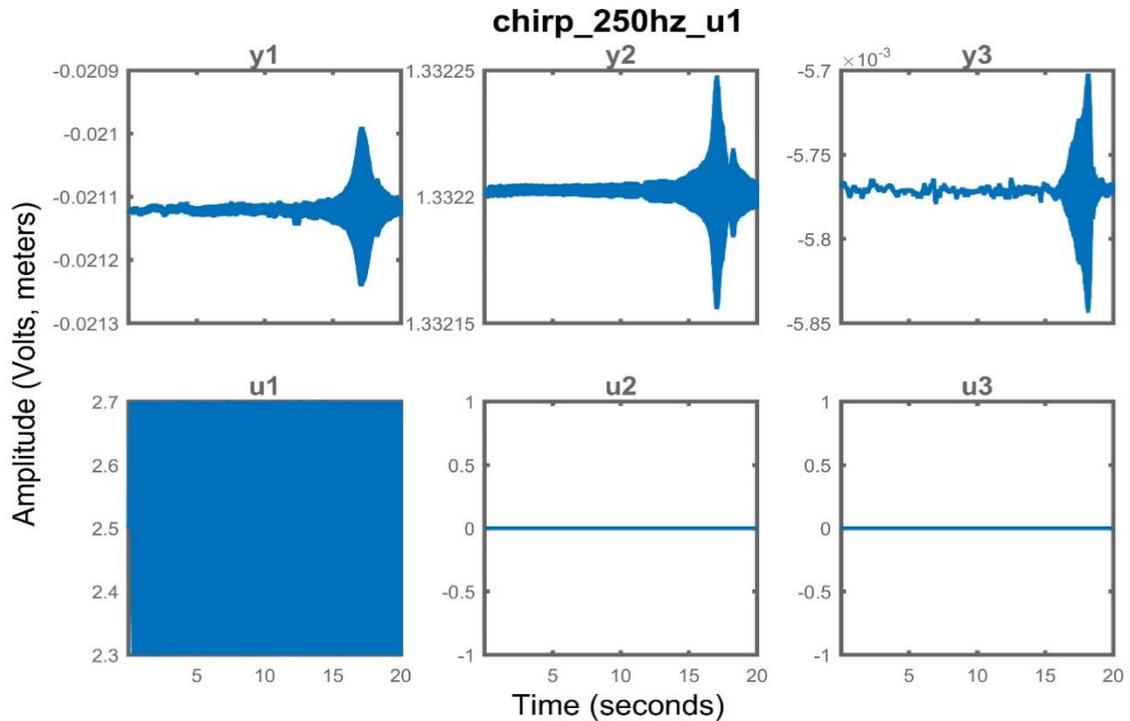
Celkem bylo naměřeno 19 měření. Jejich přehled je uveden v tabulce 3. Průběh některých z nich je možno vidět na Obr. 10, 11 a 12.



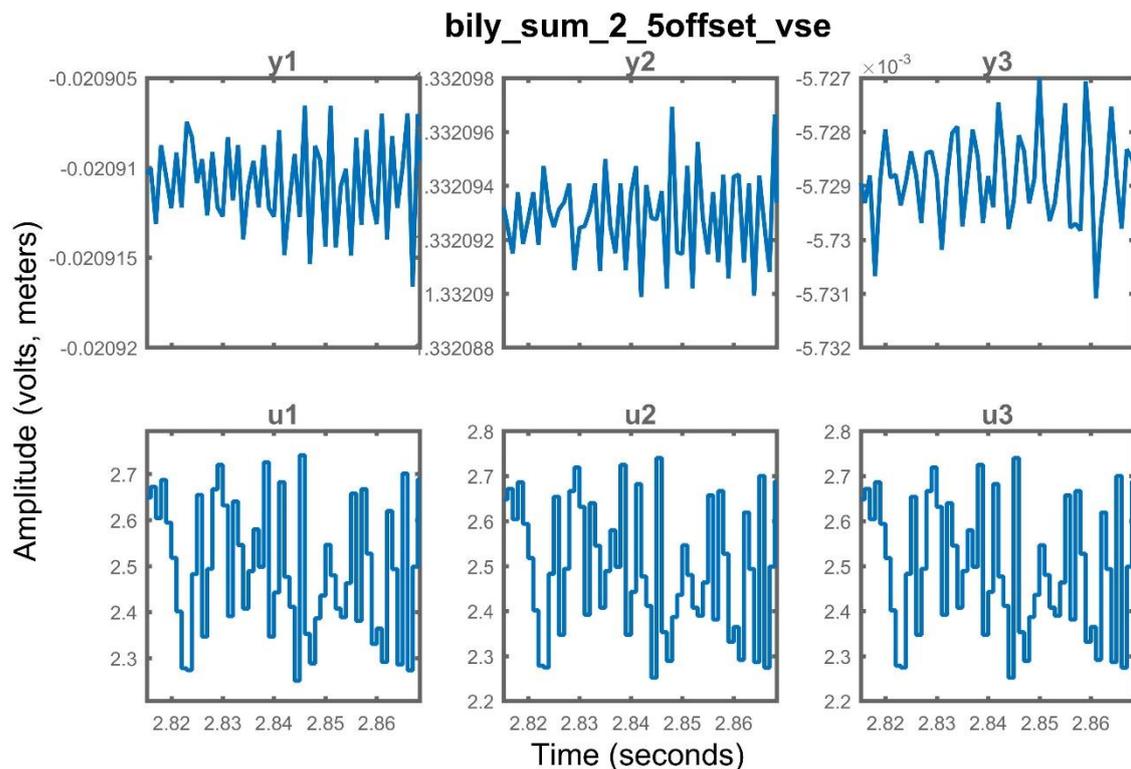
Obr. 10: Měření typu skok s budícím signálem na u2 a u3

Data z jednotlivých měření byla v programu Matlab sjednocena ve formátu iddata. Ten umožňuje signály uložit do jednoho souboru při zachování informace, která data jsou vstupy a která výstupy. Formát rovněž ukládá hodnotu vzorkovací periody. V tomto případě byla nastavena 0.001 sekundy, což odpovídá taktovací frekvenci řídicí smyčky. Z důvodu užití formátu iddata budou v následujících kapitolách výstupy označovány y1, y2 a y3. Výstup y1 odpovídá souřadnici x, y2 souřadnici y a y3 odpovídá souřadnici z.

Uváděné hodnoty napětí odpovídají hodnotám, které byly na výstupu z řídicího procesoru. Skutečné napětí na piezo-prvcích bylo vlivem zesilovačů 30 násobně vyšší. V grafech na Obr. 10, 11 a 12 je výchylka uvedena v metrech tak, jak byly hodnoty originálně zaznamenány.



Obr. 11: Měření typu chirp s budícím signálem na u_1

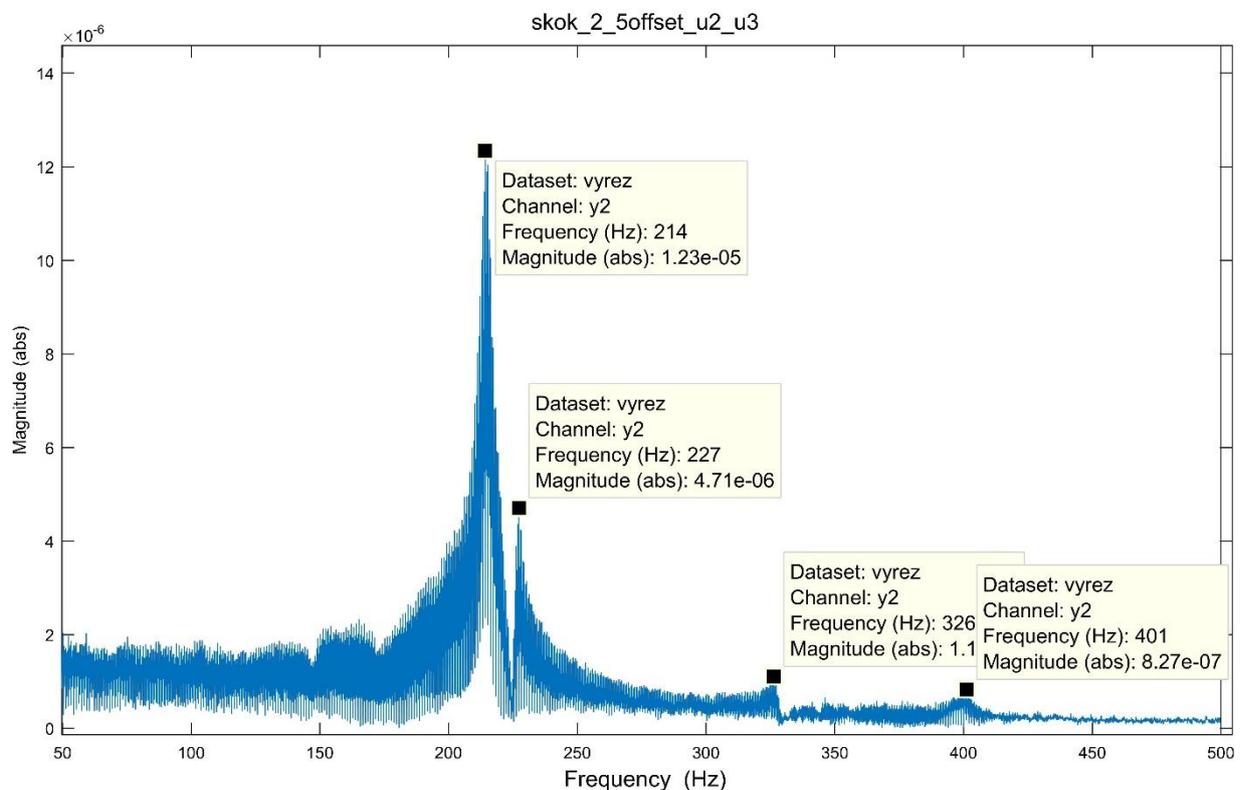


Obr. 12: Výřez z měření bílého šumu s buzením všech piezoaktuátorů

6 Analýza naměřených dat

6.1 Vlastní frekvence systému

Jednou z nejdůležitějších informací, kterou je možná z dat získat, jsou rezonanční frekvence systému. Přestože je možné odečíst některé rezonanční frekvence například z průběhu chirpů, ve kterých amplituda při rezonanční frekvenci výrazně roste (viz Obr. 11), je vhodné analyzovat i ostatní měření. Při měřeních typu chirp budící frekvence lineárně rostla pouze do 250 Hz, proto se v těchto signálech nemohly projevit vyšší rezonanční frekvence. Vlastní frekvence z ostatních měření je možné odečíst z amplitudových charakteristik.

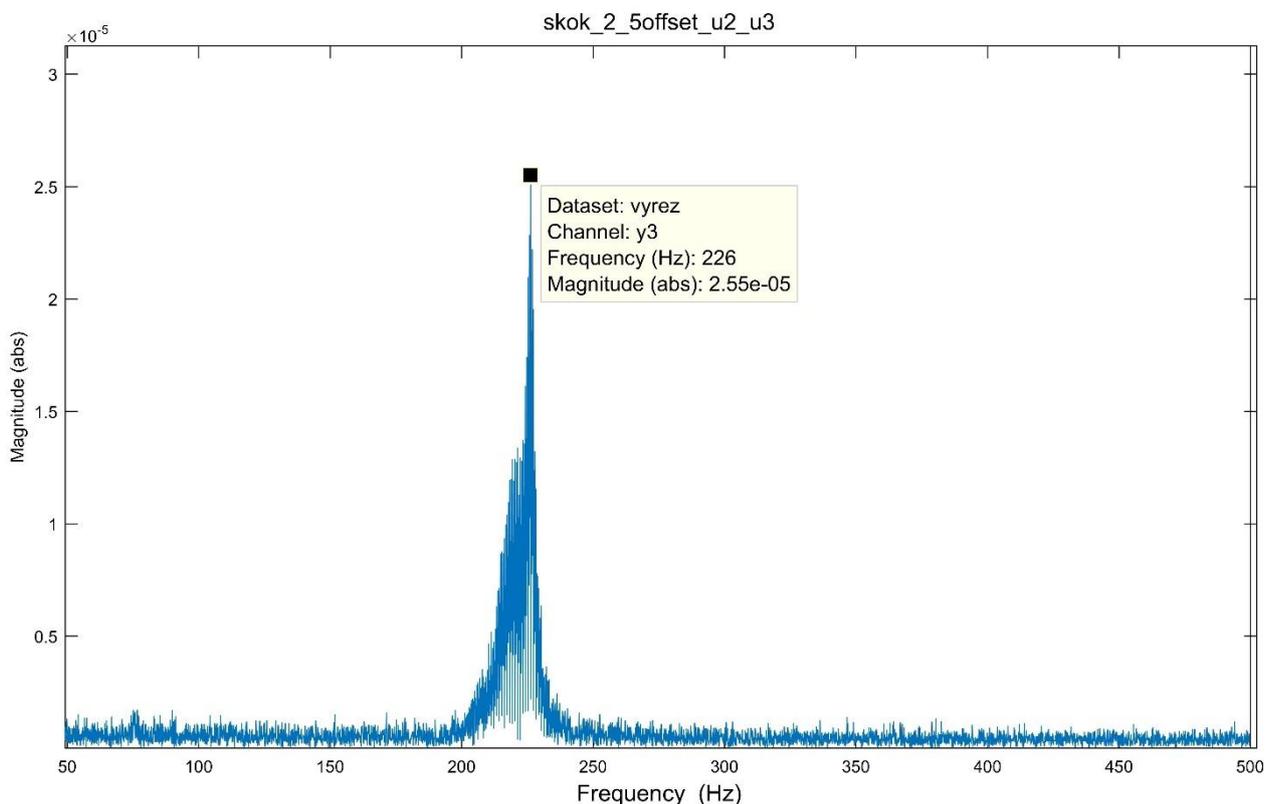


Obr. 13: Amplitudová charakteristika výstupu y_2 získaná příkazem FFT z měření skokové změny u_2 a u_3

Amplitudovou charakteristiku skokové změny u_2 a u_3 získanou příkazem *FFT*, příkazem realizujícím rychlou Fourierovu transformaci, je možné vidět na Obr. 13 a 14. Oba grafy mají na horizontální ose frekvenci pro názornost v lineárním měřítku, ne logaritickém. Na Obr. 13 se jedná o amplitudovou charakteristiku výstupu y_2 , respektive y . Rezananční frekvence z tohoto grafu se projevují růstem amplitudy ve směru y_2 . Amplitudová charakteristika výstupu y_1 , respektive x , má průběh velmi podobný jako na Obr. 13. Dominantní vlastní frekvence v rovině xy je tedy 214 Hz.

Na Obr. 14 je možné vidět amplitudovou charakteristiku ze stejného měření pro jiný výstup. Výstupem je v tomto případě y_3 , respektive z .

Jak bylo uvedeno v úvodu, sekundární struktura je rovinný mechanismus, který by neměl v kolmém směru, ve směru z , vůbec kmitat. Ve skutečnosti je mechanismus ale poddajný a při vlastní frekvenci 226 Hz kmitá i ve směru kolmém. Je nutné podotknout, že vlastní frekvence 226 Hz se v menší míře projeví i do roviny xy . To lze vidět opět na Obr. 13.



Obr. 14: Amplitudová charakteristika výstupu y_3 (tj. z) získaná příkazem FFT z měření skokové změny u_2 a u_3

Amplitudová charakteristika byla vykreslena pro všechna měření a odečtené vlastní frekvence byly zaneseny do tabulky 4. V rovině xy se projevují vlastní frekvence 215 , 326 a 400 Hz a v kolmém směru, ve směru z , se projevuje frekvence 227 Hz .

Hodnoty naměřených rezonančních frekvencí byly následně porovnány s vlastními frekvencemi z MKP analýzy provedené v rámci tohoto projektu dříve. Je zřejmé, že naměřené vlastní frekvence odpovídají frekvencím z MKP, jen jsou přibližně o 10% nižší. V MKP modelu se vyskytují navíc nižší vlastní frekvence dvě, 236 a 238 Hz . V naměřených datech by se tedy měly vyskytovat okolo 214 Hz vlastní frekvence rovněž

dvě. Z amplitudových charakteristik nebylo možné dvě takto blízké frekvence rozlišit. Pozornost byla proto zaměřena na tvorbu stavového modelu, ve kterém by se tyto dvě blízké frekvence mohly projevit. Jejich přítomnost v modelu se potvrdila a je diskutována v dalších kapitolách.

Vlastní frekvence zaznamenané z FFT

název	rovina XY [Hz]			Z [Hz] navíc
	první	druhá	třetí	
bily_sum_2_5offset_u1	214	326	401	226
bily_sum_2_5offset_u2	215	326	399	226
bily_sum_2_5offset_u3	216	327	401	227
bily_sum_2_5offset_vse	214		399	227
chirp_250hz_u1	214			225
chirp_250hz_u2	214			226
chirp_250hz_u3	214			227
chirp_250hz_u3_mereni_2	214			227
chirp_208hz_u1		nic		
skok_2_5offset_u1	216	ne	402	227
skok_2_5offset_u1_u2	216	327	398	ne
skok_2_5offset_u1_u2_pol	217	327	398	227
skok_2_5offset_u1_u3	216	326	401	226
skok_2_5offset_u2	215	327	402	226
skok_2_5offset_u2_u3	214	326	401	226
skok_2_5offset_u2_u3_pol	216	326	397	226
skok_2_5offset_u3	216	326	405	227
skok_2_5offset_u3_u1_pol	215	326	400	226
skok_2_5offset_vse	213	326	398	226
odečtené hodnoty	215	326	400	227 Hz
MKP model	236	238	nic	417 252 Hz

in plane in plane 2 rotation perpendicular

Tabulka 4: Vlastní frekvence systému odečtené z naměřených dat

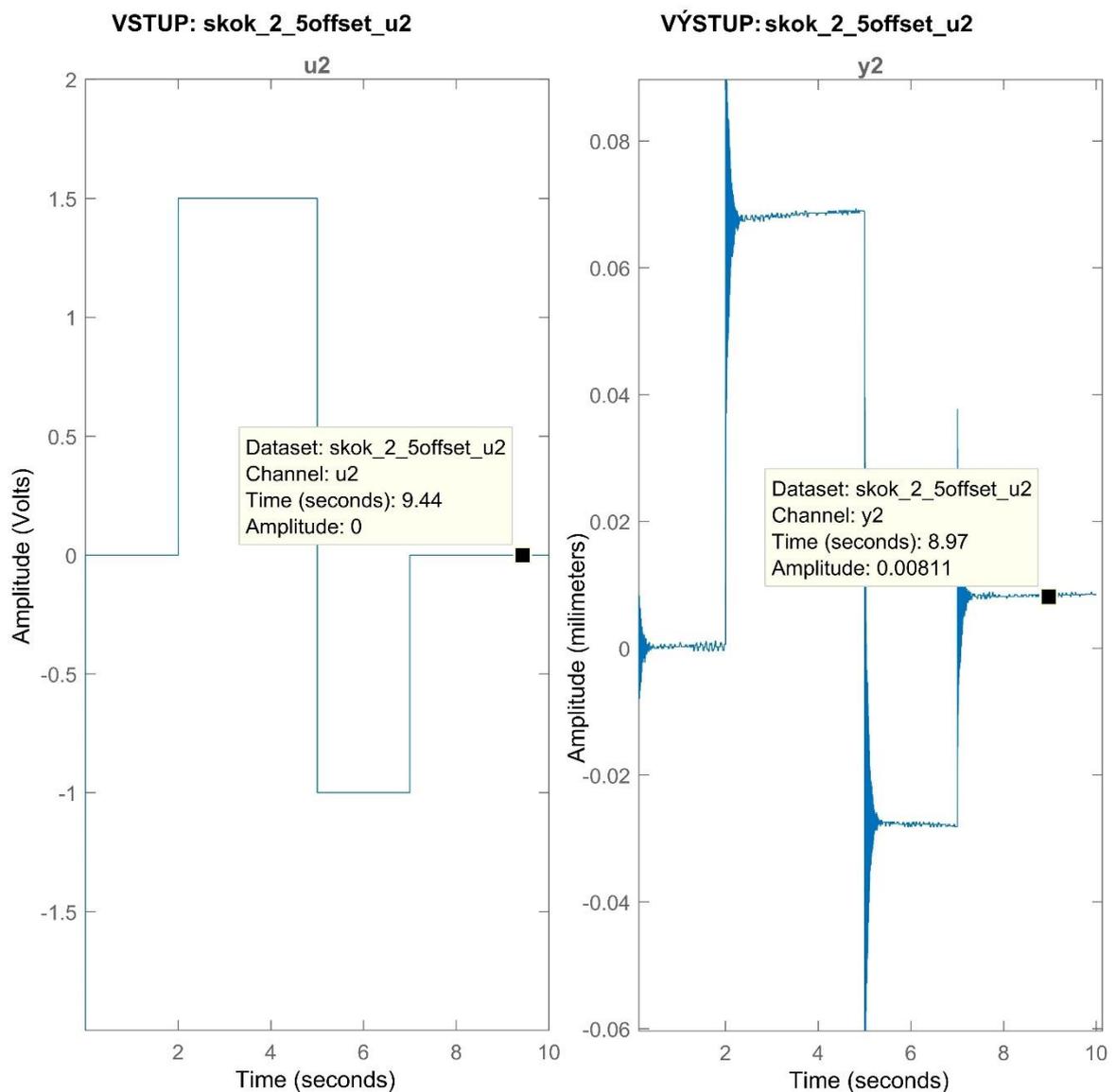
6.2 Hystereze

Předpokladem pro tvorbu stavového modelu je, že systém je lineární. Neměl by mimo jiné při zatěžování vykazovat prvky hystereze.

Při měřeních typu skok se vstupní veličina po uplynutí sedmi vteřin opět vrátí na počáteční hodnotu 2,5 V. Výchylka lineárního systému by se v tomto případě měla rovněž vrátit na počáteční hodnotu.

Reálná soustava však dokonale lineární není. Na základě naměřených hodnot byla potvrzena přítomnost hystereze. U skokových změn dosahovala odchylka od teoretické hodnoty, kterou by vykazoval lineární systém, od 3 do 8,5 μm .

Grafy na Obr. 15 byly pro názornost posunuty tak, aby počáteční hodnoty napětí i polohy odpovídaly nulové hodnotě. Poloha je v tomto případě v milimetrech. Zobrazené měření vykazuje hysterezi přibližně 8,1 μm .



Obr. 15: Vliv skokové změny u_2 na výstup y_2 - Graf v levé části ukazuje průběh vstupní veličiny, která se po sedmi vteřinách opět vrací na původní hodnotu. Graf v pravé části ukazuje průběh výstupní veličiny, která se po daném čase ustálí na výchylce 8 μm od počáteční hodnoty.

7 Syntéza modelu identifikačními metodami

7.1 *System Identification Toolbox*

Pro potřeby experimentální identifikace je vhodným nástrojem System Identification Toolbox, který je součástí softwaru Matlab. V nástroji je implementováno mnoho současných metod užívaných k identifikaci jak lineárních, tak nelineárních systémů. Kromě základních algoritmů nabízí toolbox i funkce umožňující přípravu dat včetně odstranění střední hodnoty, ořezu delších měření, filtrování určitých frekvencí či spojování více měření do jednoho identifikačního souboru.

V System Identification Toolboxu je k dispozici vícero metod na identifikaci modelů ve formě stavového popisu. Mezi hlavní metody patří N4SID (Numerical Algorithm for Subspace State Space System Identification) a metoda PEM (Prediction Error Method).

N4SID je neiterační, numericky stabilní metoda, která vypočítává stavy na základě projekcí vstupních a výstupních dat uspořádaných v Hankelových maticích. Stejně jako metoda Eigensystem Realization Algorithm (ERA), představené v kap. 4, využívá rozklad na singulární čísla. Od základní verze metody ERA se liší mimo jiné uvažováním šumu, který by se projevil na pravé straně rovnice (4.8). N4SID má několik variant, které jsou uživateli v toolboxu k dispozici. Mezi ně patří MOESP (Multivariable Output Error State Space), CVA (Canonical Variable Algorithm) a metoda SSARX [4].

Prediction Error Method je iterační metoda, která využívá parametrizace stavových matic a pomocí iteračního cyklu minimalizuje chybu predikce. Počáteční odhad pro iteraci je model vytvořený metodou N4SID. Výsledek tedy není závislý jen na parametrech metody PEM, ale i na počátečním odhadu. Autor identifikačního toolboxu, Lennart Ljung, v [4] uvádí, že PEM dosahuje ve většině případů lepších výsledků než N4SID. Vzhledem k faktu, že se jedná o iterační metodu, je ale výpočetně mnohonásobně náročnější [4].

System Identification Toolbox umožňuje provést rovněž porovnání výstupů identifikovaného modelu s naměřenými daty. K číselnému vyjádření této schody využívá parametr fit

$$fit = 100 \left(\frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y - \bar{y}\|} \right), \quad (7.1)$$

kde y je vektor výstupů z validačních dat, \hat{y} vektor výstupních hodnot modelu, \bar{y} je aritmetický průměr z validačních dat a fit je shoda v procentech [4].

7.2 Příprava dat

Aktivní struktura byla k rámu připevněna ve vodorovné poloze, veškerý pohyb se tudíž odehrával ve směru x a y . Naměřená data ve směru osy z obsahovala především šum. Z tohoto důvodu byl systém považován za systém se třemi vstupy (u_1, u_2, u_3) a dvěma výstupy (x, y). První skupině dat, určených k identifikaci, byla odstraněny data pro osu z .

Přestože se v ose z projevoval při většině frekvencí pouze šum, poskytoval záznam pohybu v této ose důležitou informaci o vlastní frekvenci 227 Hz . Aby byla modelem zachycena i tato frekvence, byla vytvořena druhá skupina dat, u kterých byl výstup v podobě osy z zachován.

Pro úspěšnou identifikaci je nutné mít na tvorbu modelu data, ve kterých se projeví vliv každého vstupu na každý výstup. Formát `iddata`, zmíněný v kap. 5.4, umožňuje spojit data z více měření do jednoho souboru. Data určená k identifikaci byla tedy sloučena, aby obsahovala účinky všech vstupů. Byly vytvořeny skupiny dat uvedené v tabulce 5, pro každou skupinu byla vytvořena verze s dvěma výstupy (x, y) a verze se třemi výstupy (x, y, z).

Z validačních i identifikačních dat byla odstraněna střední hodnota.

skupina dat k identifikaci	sloučená měření	slovně
skok	skok_2_5offset_u1/u2/u3	jednotlivé skoky
skok_chirp	skok_2_5offset_u1/u2/u3 chirp_250hz_u1/u2/u3	jednotlivé skoky jednotlivé chirpy
skok_polo	skok_2_5offset_u1/u2/u3 skok_2_5offset_u1_u2_pol/u2_u3_pol/u3_u1_pol	jednotlivé skoky skoky po dvojicích
chirp_polo_skok	chirp_250hz_u1/u2/u3 skok_2_5offset_u1_u2_pol/u2_u3_pol/u3_u1_pol skok_2_5offset_u1/u2/u3	jednotlivé chirpy skoky po dvojicích jednotlivé skoky
skok_sum_chirp	skok_2_5offset_u1/u2/u3 bily_sum_2_5offset_u1/u2/u3 chirp_250hz_u1/u2/u3	jednotlivé skoky jednotlivé bílé šумы jednotlivé chirpy

Tabulka 5: Seznam sloučených měření k následné identifikaci.

7.3 Strategie syntézy kvalitního modelu

Cílem identifikace bylo získání modelu, který bude dobře odpovídat vlastnostem a dynamice reálné struktury. Model by měl mít co nejvyšší shodu s validačními daty a zároveň by měly jeho vlastní frekvence odpovídat rezonančním frekvencím odečteným z naměřených dat (viz tabulka 4).

Pro syntézu modelu byla zvolena metoda PEM, která dosahuje obecně lepších výsledků za cenu časově náročnějších výpočtů. Iteracemi zlepšuje shodu modelu, který byl vytvořen metodou N4SID. Pro úspěšnou identifikaci je nutné, aby už počáteční model měl dobrou shodu. Je tedy potřeba vhodně nastavit parametry metody N4SID, aby bylo dosaženo co nejlepšího modelu pro následné iterace metodou PEM.

N4SID má několik parametrů, které výrazně ovlivňují výsledek identifikace. Nejdůležitější je volba dat, z kterých bude model identifikován, výsledek je ale ovlivněn také zvoleným počtem stavů modelu a variantou N4SID.

Vzhledem k vysokému počtu nastavitelných parametrů byl navržen dvoufázový postup tvorby modelu. V první fázi byly stanoveny kombinace hodnot jednotlivých parametrů, ze kterých byl sestaven seznam modelů k identifikaci. Na základě tohoto seznamu byly poté automatickým cyklem vytvořeny modely metodou N4SID, která je výpočetně nenáročná. V rámci stejného cyklu byly generované modely okamžitě porovnávány s validačními daty a hodnoty shody byly zapisovány do tabulky výsledků. V druhé fázi byly na základě tabulky výsledků vybrány modely, které měly nejlepší fit (shodu). Parametry těchto modelů byly zařazeny do druhého automatického cyklu, ve kterém proběhla tvorba nových modelů, tentokrát už metodou PEM.

V první fázi bylo metodou N4SID vytvořeno 100 až 200 modelů (výpočetní čas 3 hodiny), v druhé fázi bylo metodou PEM vylepšeno obvykle 20 modelů (výpočetní čas 10 hodin).

Jako validační data musí být použita jiná data než ta, která byla použita k identifikaci. V rámci automatického cyklu se každý model porovnával se všemi naměřenými daty. V tabulce výsledků byla poté posouzena jeho shoda s validačními daty. Jako validační data byla použita všechna jiná naměřená data než ta, která byla použita k identifikaci modelu. Měření typu bílý šum k validaci použita nebyla.

7.4 Parametry identifikace

Parametry identifikace byly zvoleny dle tabulek 6 a 7. V prvním cyklu byly modely tvořeny metodou N4SID, v druhém cyklu metodou PEM. Takto byly vytvořeny modely s výstupem XY. Stejný postup se poté zopakoval pro tvorbu modelů s výstupem XYZ.

pevně nastavené parametry	
Ts (vzorkovací perioda)	0.001
Form	modal
Disturbance model	estimate
Input delay	0
Feedthrough (D)	no
Estimation method	N4SID / PEM
N4Horizon	auto
Focus	simulation
Estimate covatiance	yes
Initial state	estimate
Max. number of iterations	100, později 50

Tabulka 6: Pevně nastavené parametry identifikace.

automaticky kombinované parametry		
výstup	XY	XYZ
skupiny dat, ze kterých byl model identifikován	skok skok_chirp skok_polo chirp_polo_skok skok_sum_chirp	skok skok_chirp chirp_polo_skok
počet stavů (Model order)	6 až 18	6 až 16
N4Weight	MOESP / CVA / SSARX	

celkem 294 kombinací

Tabulka 7: Automaticky kombinované parametry identifikace pro modely s výstupem XY a modely s výstupem XYZ

7.5 Výsledky identifikace

Na základě výsledků prvního cyklu, během kterého byly modely identifikovány metodou N4SID, byly vybrány modely s nejlepší shodou. Tabulka 8 ukazuje pouze část celkové tabulky výsledků prvního cyklu. V řádcích jsou jednotlivé modely s uvedenými parametry, při kterých byly identifikovány. Sloupec n značí počet stavů. V barevné části tabulky jsou pak vyznačeny hodnoty shody modelu s naměřenými daty. Každý sloupec náleží jednomu měření, žlutou barvou jsou zvýrazněna validační data.

výstup XYZ		chirp_u1			chirp_u2			chirp_u3			chirp_u3_mer2			chirp_stop_u1			skok_u1			skok_u1_u2			skok_u1_u2pol			skok_u1_u3			skok_u2			skok_u2_u3			skok_u2_u3pol			skok_u3			skok_u3_u1pol		
		fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z	fit x	fit y	fit z			
skok 6	MOESP	9	12	-1	1	8	0	8	3	-8	7	3	-9	17	28	3	79	76	-11	78	83	-15	80	58	-24	28	85	-1	72	74	-2	83	72	1	77	84	-4	78	78	1	76	83	-5
skok 7	MOESP	13	10	-1	0	9	0	14	3	-3	12	3	-3	16	49	3	79	76	-11	79	82	-15	80	57	-24	28	85	-1	72	74	-2	83	72	1	77	84	-4	78	78	1	76	83	-5
skok 8	MOESP	11	7	-1	3	9	0	13	8	-3	11	7	-3	18	14	3	79	76	-11	79	84	-15	80	59	-24	28	85	-1	72	74	-2	83	72	1	77	84	-4	78	78	1	76	83	-5
skok 9	MOESP	12	7	-1	4	9	0	13	8	-2	12	7	-2	17	23	2	79	76	-11	79	83	-15	80	59	-24	28	85	-1	72	74	-2	83	72	1	77	84	-4	78	78	1	76	83	-5
skok 10	MOESP	11	9	0	0	9	0	12	7	-7	11	7	-8	10	32	5	79	76	-10	79	83	-15	80	58	-24	28	85	-1	72	74	-2	83	72	1	77	84	-4	78	78	1	76	83	-5
skok 11	MOESP	12	16	-1	1	11	0	11	4	-5	10	3	-5	13	38	6	79	76	-11	79	83	-15	80	58	-24	28	85	-1	72	74	-2	83	72	1	77	84	-4	78	78	1	76	83	-5
skok 12	MOESP	13	15	-1	0	11	0	12	4	-5	11	3	-5	13	40	5	79	76	-11	79	83	-15	80	58	-25	28	85	-1	72	74	-2	83	72	1	77	84	-4	78	78	1	76	83	-5
skok 13	MOESP	14	14	-1	-4	11	0	15	6	-6	14	5	-6	14	42	1	80	76	-11	80	83	-15	80	58	-25	28	85	-1	72	74	-2	83	72	1	77	84	-4	78	78	1	75	83	-5
skok 14	MOESP	13	12	-1	-4	14	1	14	13	-2	13	12	-2	13	31	-2	79	76	-11	79	84	-15	80	58	-25	28	86	-1	72	75	-2	83	72	1	77	85	-4	78	79	1	76	84	-5
skok 15	MOESP	13	13	-1	-4	14	1	14	13	-1	13	11	-1	14	31	4	79	76	-11	79	84	-15	80	58	-25	28	86	-1	72	74	-2	83	72	1	77	85	-4	78	79	1	76	84	-5
skok 16	MOESP	10	15	0	-5	14	0	12	12	-1	11	10	-1	7	25	-7	79	76	-11	79	84	-15	80	58	-25	28	86	-1	72	74	-2	83	72	1	77	85	-5	78	79	1	76	84	-5
skok 6	CVA	9	-1	0	-33	20	1	17	22	-8	16	21	-9	19	-10	-8	79	76	-11	80	85	-15	80	57	-24	25	87	-1	71	75	-2	83	71	1	77	85	-4	78	79	1	76	84	-4
skok 7	CVA	14	28	-1	5	24	0	14	22	-1	13	20	-2	14	37	-63	79	77	-11	79	86	-15	80	59	-25	28	87	-1	72	75	-2	83	73	1	77	86	-5	78	79	2	76	84	-5
skok 8	CVA	20	40	0	11	30	1	17	29	-3	15	26	-3	17	20	-1	80	77	-10	79	86	-15	80	58	-23	29	88	-1	73	76	-2	84	73	1	77	86	-4	78	80	1	76	85	-5
skok 9	CVA	29	24	29	-20	41	15	11	44	-19	10	39	-22	22	26	4	81	77	0	80	87	-15	81	58	-23	29	90	8	73	76	9	84	72	3	78	87	9	78	80	1	75	85	2
skok 10	CVA	55	39	30	-56	31	24	62	34	-39	56	31	-41	76	37	28	82	78	1	84	85	-18	82	58	-25	29	88	6	72	76	9	85	72	4	78	86	9	80	80	-3	76	85	-4
skok 11	CVA	54	43	33	-48	40	26	71	45	-35	65	40	-37	67	53	18	82	77	1	84	87	-19	82	59	-28	28	89	8	72	76	11	86	72	3	78	87	11	80	80	-2	77	85	-1
skok 12	CVA	64	20	29	-13	42	14	62	59	-32	54	53	-35	66	48	27	82	77	2	84	87	-15	82	58	-25	28	90	8	72	77	11	86	72	5	78	86	11	80	81	0	76	86	0
skok 13	CVA	55	58	39	-54	54	22	56	57	-3	52	48	-3	75	77	28	82	85	-1	83	82	-12	82	68	-21	26	86	5	72	85	16	85	61	5	79	85	11	79	87	-3	76	88	4
skok 14	CVA	52	31	53	-78	61	21	63	53	5	59	44	4	69	50	26	82	79	5	83	84	-12	82	62	-22	26	88	8	71	79	16	86	68	6	79	85	16	80	83	1	76	86	3
skok 15	CVA	64	38	53	-8	44	20	63	50	-4	59	41	-8	69	60	24	82	82	3	83	83	-8	84	69	-9	25	88	7	62	90	15	86	69	6	76	89	17	84	92	-21	72	91	2
skok 16	CVA	56	35	48	-39	47	21	64	48	3	59	39	1	61	59	19	82	79	5	84	84	-10	82	61	-22	27	89	8	72	79	15	86	69	7	78	86	17	81	83	1	76	86	2
skok 6	SSARX	0	-5	0	-9	3	0	1	1	0	0	1	0	-2	27	-1	70	70	-13	75	81	-15	74	48	-26	5	84	-2	55	74	-2	72	60	-1	68	81	-5	74	77	1	75	83	-5
skok 7	SSARX	-1	4	0	-1	5	0	1	2	0	1	2	0	20	22	-8	78	76	-11	78	82	-14	79	59	-24	27	84	-1	72	74	-2	82	71	1	77	83	-4	77	78	1	75	83	-5
skok 8	SSARX	1	-9	0	-4	6	0	5	7	0	4	6	0	24	19	0	79	75	-11	78	83	-14	79	58	-23	27	84	-1	72	74	-2	82	69	1	77	83	-4	77	78	2	75	83	-5
skok 9	SSARX	4	1	0	3	5	0	5	4	-1	5	3	-1	17	26	-8	79	76	-11	78	83	-14	79	59	-23	28	84	-1	72	74	-2	83	71	1	77	83	-4	77	78	1	76	83	-5
skok 10	SSARX	4	4	-1	6	5	-1	5	4	-1	5	4	-2	22	11	-17	79	76	-11	78	83	-15	79	59	-24	28	85	-1	72	74	-2	82	71	1	77	84	-5	77	78	1	75	83	-5
skok 11	SSARX	5	2	0	6	5	0	6	5	-3	6	4	-3	23	12	-9	79	76	-11	78	83	-15	80	59	-23	28	85	-1	72	74	-2	83	71	1	77	83	-5	78	78	1	76	83	-5
skok 12	SSARX	5	0	0	6	5	-1	6	5	-3	6	5	-3	23	16	-9	79	76	-11	78	83	-15	80	59	-23	28	85	-1	72	74	-2	83	71	1	77	83	-5	78	78	1	76	83	-5
skok 13	SSARX	50	39	7	19	44	20	48	55	0	41	49	-1	58	11	26	81	79	-7	82	86	-13	82	59	-23	28	87	3	71	78	5	84	63	3	80	84	2	79	81	2	75	85	-1
skok 14	SSARX	54	43	8	6	44	20	48	33	-12	42	26	-15	47	52	-22	81	77	-7	83	87	-13	81	58	-23	27	88	3	73	76	4	85	73	3	78	86	2	80	80	2	75	85	-2
skok 15	SSARX	53	9	8	10	48	20	43	24	-17	35	18	-20	55	47	18	81	76	-7	83	87	-13	82	55	-24	28	88	3	73	76	4	85	71	3	78	87	2	80	80	2	74	85	-1
skok 16	SSARX	56	54	9	18	51	21	52	65	2	46	57	2	50	50	23	81	77	-6	83	88	-13	81	59	-22	29	89	3	73	76	5	85	73	3	78	87	2	80	81	2	76	85	-1

Tabulka 8: Výstup prvního cyklu, během kterého byly modely identifikovány metodou N4SID

Tabulka 8 obsahuje modely, pro které byl uvažován výstup XYZ. Z tabulky je zřejmé, že shoda modelového výstupu s naměřenými daty v ose z je nízká. Tento jev je způsoben tím, že v ose z se projevuje především šum, který model není schopný simulovat.

V prvním cyklu bylo z modelů, které uvažují výstup XYZ, vybráno 22 nejlepších, jejichž parametry byly vloženy do identifikace iterační metodou PEM. Podobným způsobem bylo vybráno i 21 nejlepších modelů, které uvažují výstup XY.

Metodou PEM bylo identifikováno celkem 43 modelů, které byly následně vzájemně porovnávány. Cílem bylo vybrat model, který má dobrý fit (shodu) na validační data a jeho vlastní frekvence se shodují s naměřenými vlastními frekvencemi. Z tohoto důvodu byly u modelů určeny jejich vlastní frekvence, které byly následně porovnány s vlastními frekvencemi naměřenými (viz tabulka 4).

Na základě uvedených parametrů byly vybrány 4 nejlepší modely s výstupem XY a tři nejlepší modely s výstupem XYZ. Při výběru byly upřednostňovány modely nižšího řádu.

	označení modelu	parametry identifikace				průměrný fit na naměřená data [%]			
		data použitá k identifikaci	počet stavů	metoda	N4Weight	identifik. data	validační (skoky)	validační (chirpy)	šum u2, u3
výstup XYZ	PEM_xyz_A3	skok	8	PEM	MOESP	79	77	50	57
	PEM_xyz_B3	skok_chirp	8	PEM	MOESP	76	77	75	50
	PEM_xyz_B14	skok_chirp	8	PEM	CVA	76	77	75	49
výstup XY	PEM_xy_A1	skok	6	PEM	MOESP	79	77	52	58
	PEM_xy_A5	skok	10	PEM	MOESP	84	78	57	60
	PEM_xy_A27	skok	6	PEM	CVA	79	77	52	57
	PEM_xy_B1	skok_chirp	6	PEM	MOESP	75	77	75	49

Tabulka 9: Průměrná shoda modelů s naměřenými daty. Shoda s validačními daty je rozdělena na shodu s validačními daty typu skok a validačními daty typu chirp. Pro zajímavost je uvedena i shoda s daty typu bílý šum.

V tabulce 9 jsou uvedeny všechny vybrané modely s průměrnými hodnotami shody. Jako validační data byla použita všechna jiná naměřená data než ta, která byla použita k identifikaci modelu. Z výsledků jsou zřejmé tyto skutečnosti:

- Průměrná shoda modelů na validační data typu skok je dobrá. Modely v tomto ohledu dosahují srovnatelných výsledků.
- Při validaci na datech typu chirp dosahují modely vytvořené identifikací datového souboru skok_chirp lepších výsledků než modely vytvořené z dat typu skok.
- Shoda s daty typu šum je u všech modelů špatná bez ohledu na to, jestli byl model tvořen z dat typu skok nebo skok_chirp.
- Z hlediska shody jsou výsledky modelů s výstupem XY a výsledky modelů s výstupem XYZ srovnatelné.

V tabulce 10 jsou modely porovnávány z hlediska jejich vlastních frekvencí. Za účelem zjištění vlastních frekvencí byly modely převedeny z diskrétní formy do spojitě pomocí příkazu *d2c*. Pro převod byl užit tvarovač nultého řádu neboli Zero-Order Hold (volba tvarovače je vysvětlena v kapitole 8.2). U spojitých modelů byla následně vypočtena poloha jejich pólů a z velikosti imaginárních složek vyjádřeny vlastní frekvence tlumených kmitů. Jejich hodnoty jsou v tabulce 10.

Vlastní frekvence modelů byly rozřazeny do kategorií „rovinná 1./2.“ a „kolmá“ v případě, kdy se číselně blížíly příslušným naměřeným vlastním frekvencím (viz tab. 4).

	označení modelu	parametry identifikace				vlastní frekvence modelu [Hz]				
		data použita k identifikaci	počet stavů	metoda	N4Weight	nižší	rovinná 1./2. (xy)	kolmá (z)	vyšší	
výstup XYZ	PEM_xyz_A3	skok	8	PEM	MOESP	47.6	215.3	215.8	226.4	
	PEM_xyz_B3	skok_chirp	8	PEM	MOESP		212.9	214.1	225.5	
	PEM_xyz_B14	skok_chirp	8	PEM	CVA		212.9	214.1	225.5	
výstup XY	PEM_xy_A1	skok	6	PEM	MOESP		215.2	215.6		
	PEM_xy_A5	skok	10	PEM	MOESP	79.9	214.9	215.5		437.9
	PEM_xy_A27	skok	6	PEM	CVA		215.2	215.6		
	PEM_xy_B1	skok_chirp	6	PEM	MOESP		212.8	214.0		

Tabulka 10: Vlastní frekvence tlumených kmitů výsledných modelů

Z tabulky 10 vyplývá několik závěrů:

- Modely ověřily, že v okolo 214 Hz se nachází dvě různé vlastní frekvence. Tímto se potvrzuje, že vlastní frekvence z MKP analýzy odpovídající 1. a 2. vlastnímu tvaru se v mechanismu skutečně vyskytují – jen jsou přibližně o 10% nižší. Porovnání vlastních frekvencí z měření a modelů je uvedeno v tab. 11.

odečtené hodnoty	215	326	400	227	Hz	
MKP model	236	238	nic	417	252	Hz
	in plane	in plane 2		rotation	perpendicular	
identifikovaný model	214	215	nic	nic	226	Hz

Tabulka 11: Porovnání naměřených vlastních frekvencí, vlastních frekvencí z MKP modelu a průměrných hodnot vlastních frekvencí z identifikovaných modelů

- Vlastní frekvence okolo 400 Hz, která se objevovala na některých amplitudových charakteristikách měření typu skok, se v modelech neprojevila.
- Modely, které byly identifikovány s výstupy XYZ, vykazují vlastní frekvenci 226 Hz. Potvrdila se tedy úvaha, že při užití dat ze směru z se kolmá vlastní frekvence projev i na modelech.
- Modely PEM_xyz_A3 a PEM_xy_A5 vykazují neznámé vlastní frekvence 48 Hz a 80 Hz. PEM_xy_A5 vykazuje navíc neznámou vlastní frekvenci okolo 440 Hz.

Všech sedm výsledných modelů je v elektronické podobě na přiloženém CD.

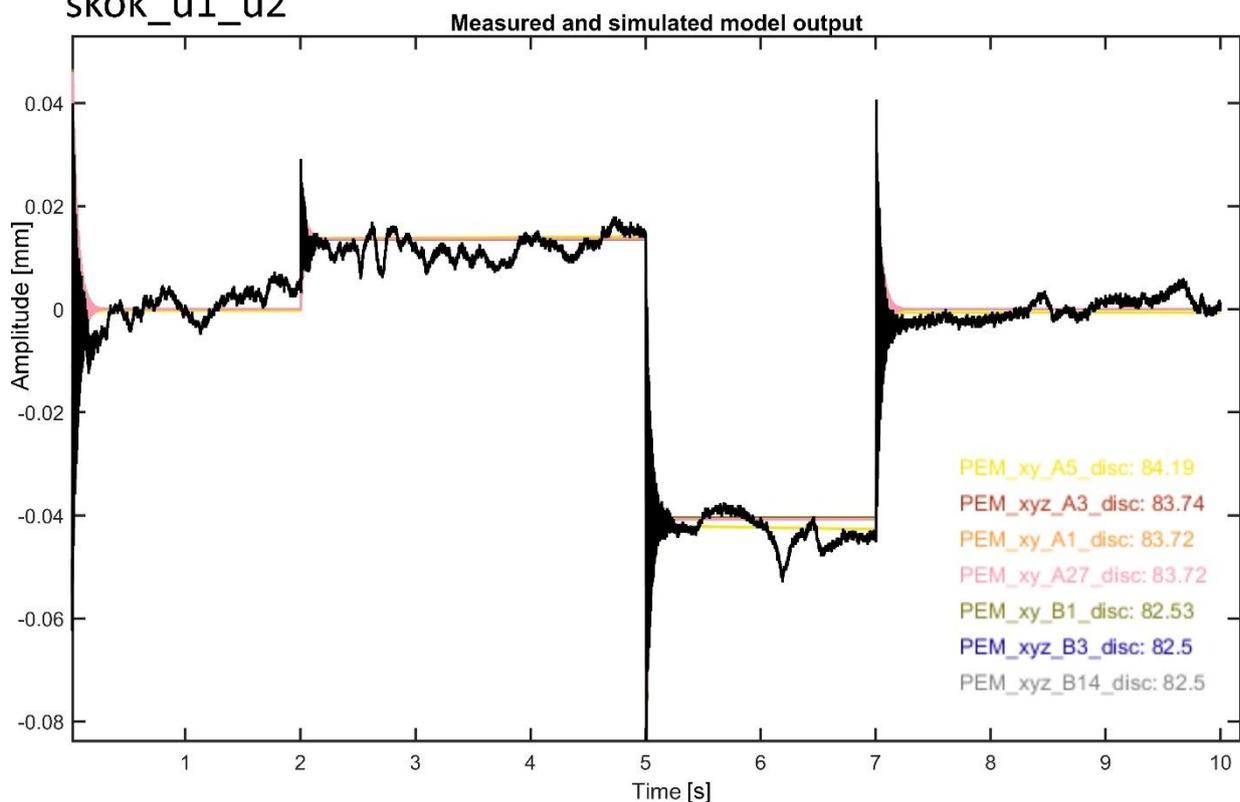
8 Simulace a porovnání chování modelů s reálným mechanismem

8.1 Diskrétní modely

V rámci přechodí kapitoly byly modely srovnávány s naměřenými daty a hodnota shody (fitu) byla ukládána. Výsledky pro sedm vybraných modelů jsou uloženy v tabulce, která je vzhledem ke své velikosti součástí příloženého CD. V této tabulce jsou uvedeny shody jednotlivých modelů s všemi měřeními.

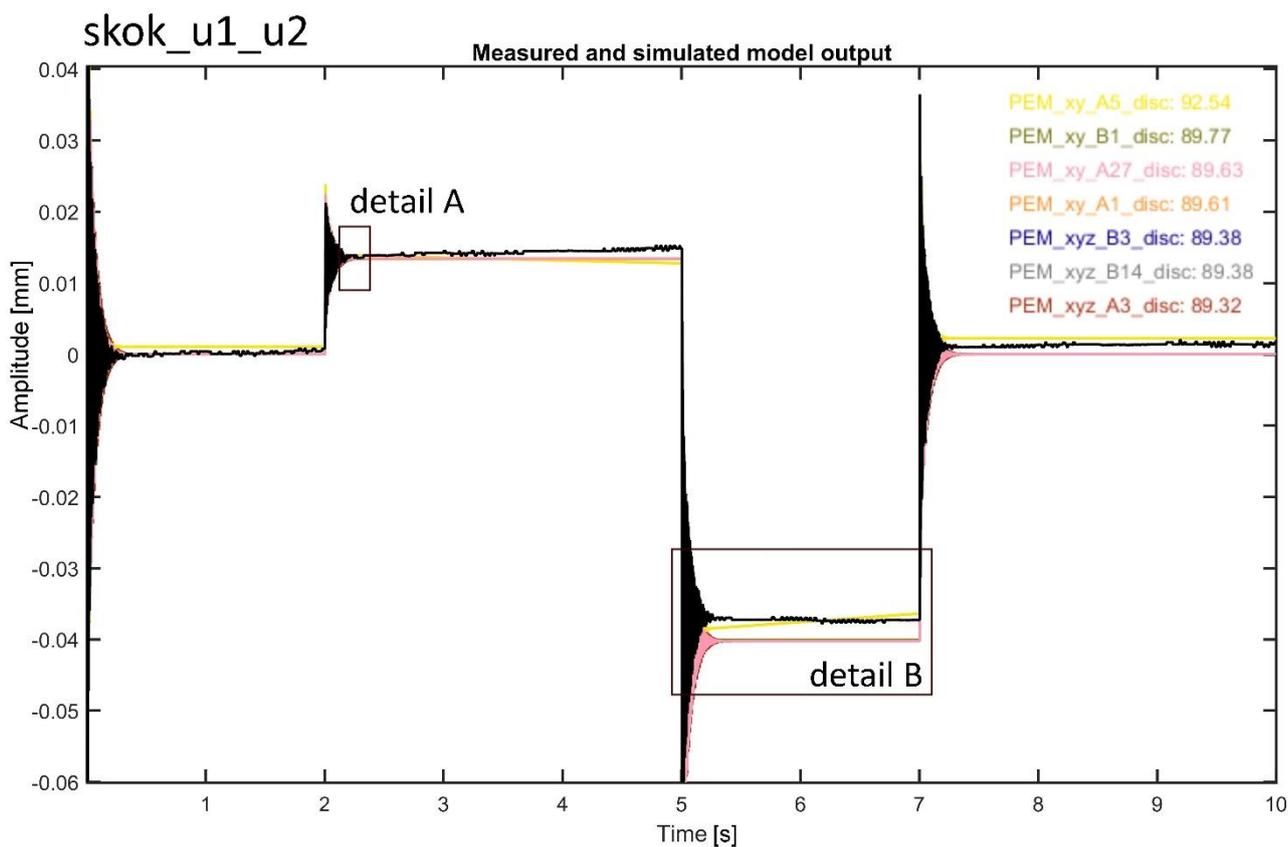
V grafech na následujících stranách jsou zobrazeny simulované výstupy z diskrétních modelů společně s naměřenými daty. Vzhledem k velice podobnému průběhu u vícero modelů byly vytvořeny detaily, na kterých je možné chování modelů rozeznat. V první řadě byly modely testovány na datech skok_2_5offset_u1_u2. Data typu skok na dvou piezoaktuátorech nebyla použita k identifikaci žádného z výsledných modelů.

skok_u1_u2



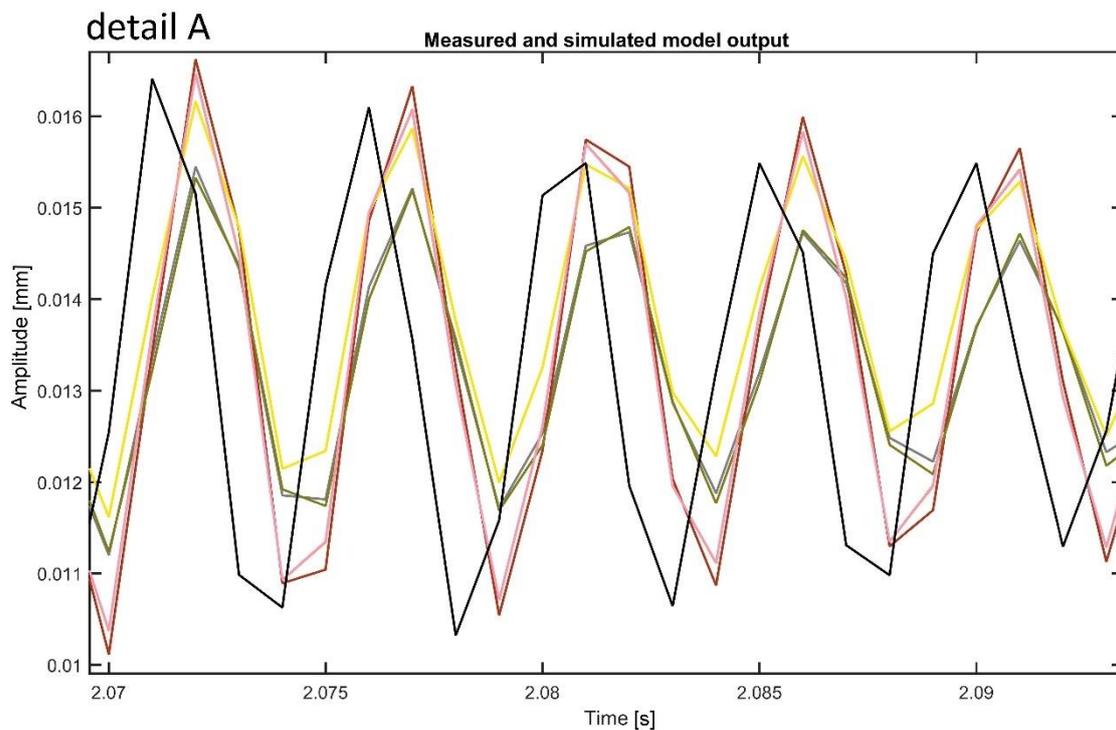
Obr. 16: Porovnání simulovaných výstupů s měřením skok_2_5offset_u1_u2 ve směru y1, respektive x.

Na Obr. 16 je možné vidět, že modely vykazují ideální průběh v porovnání s naměřenými daty (černá čára). Ta jsou ovlivněna především šumem a nepřesností lasertrackeru.

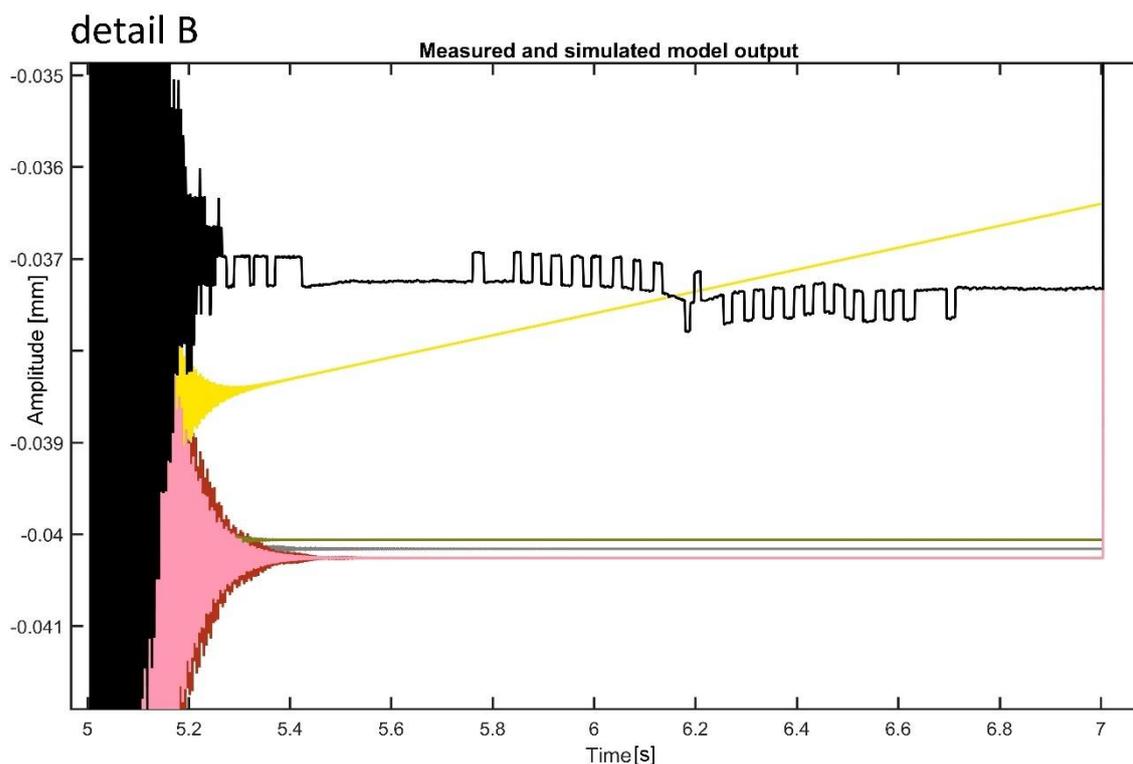


Obr. 17: Porovnání simulovaných výstupů s měřením skok_2_offset_u1_u2 ve směru y2, respektive y

Ve směru y2, respektive y, je naměřený průběh výrazně lepší, což je dáno pravděpodobně vyšší přesností lasertrackeru v tomto směru.

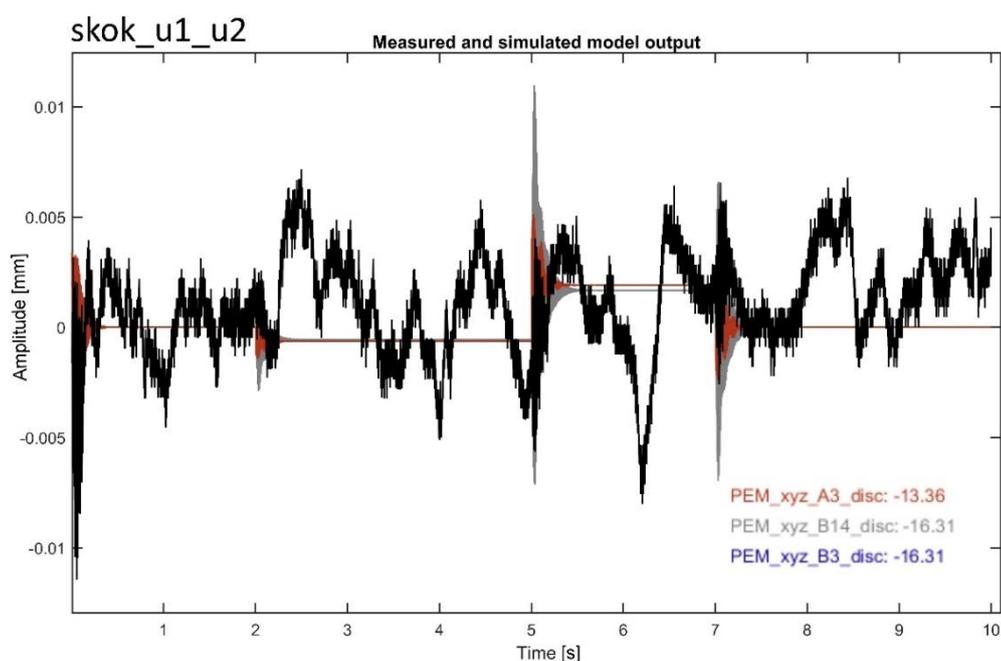


Obr. 18: Porovnání simulovaných výstupů s měřením skok_2_offset_u1_u2 ve směru y2, respektive y (DETAIL A)



Obr. 19: Porovnání simulovaných výstupů s měřením `skok_2_offset_u1_u2` ve směru y_2 , respektive y (DETAIL hysterese)

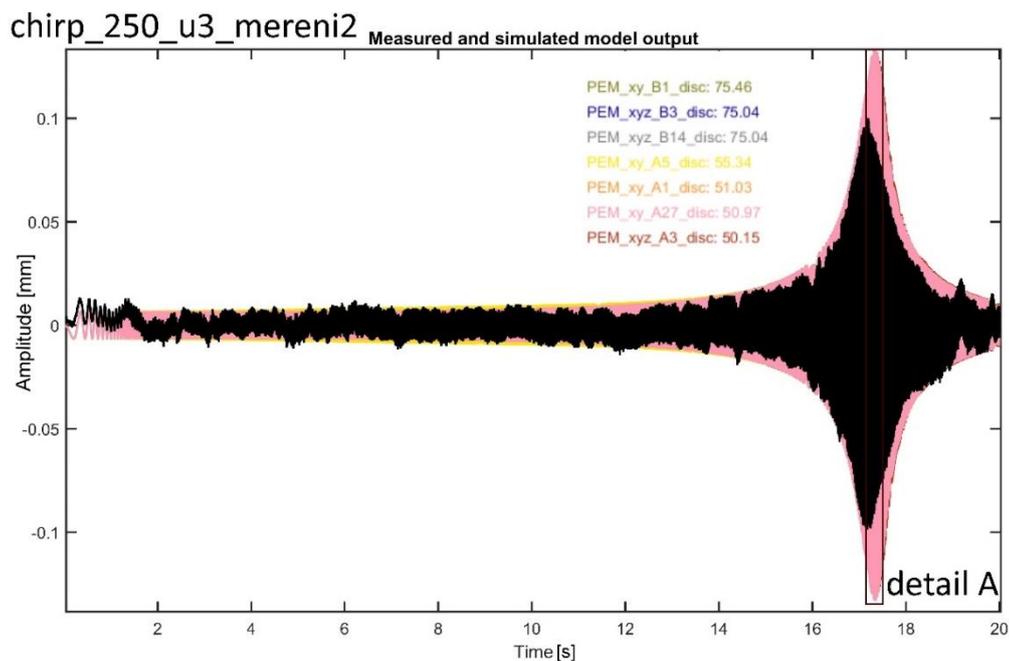
Na Obr. 19 je možné vidět rozdíl o velikosti $3 \mu\text{m}$ mezi výstupy jednotlivých simulací a skutečnou hodnotou. Evidentně se v tomto případě jedná o situaci, kdy je reálná struktura ovlivněna hysterezí, tj. nelinearitou, a lineární modely ve formě stavových popisů nedokáží průběh sledovat. Pouze model PEM_xy_A5 (žlutá čára), který operuje s více stavy, sleduje průběh skutečné veličiny v tomto konkrétním případě lépe.



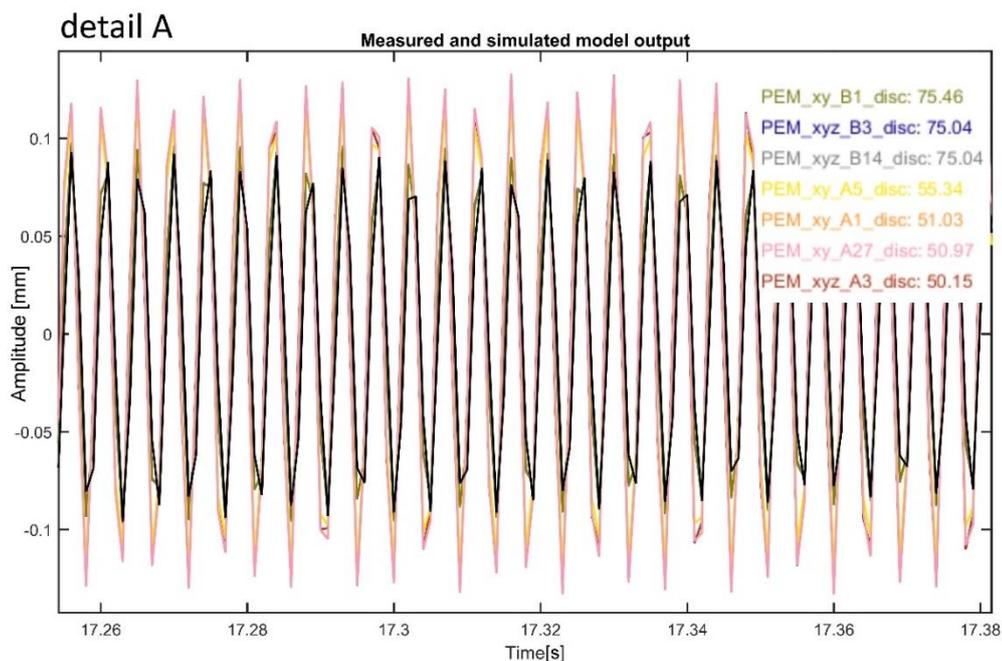
Obr. 20: Porovnání simulovaných výstupů s měřením `skok_2_offset_u1_u2` ve směru y_3 , respektive z

Na Obr. 20 je k nahlédnutí shoda identifikovaných modelů s naměřenými daty v ose z. V porovnání figurují pouze modely, u kterých byl výstup v ose z uvažován. Množství šumu způsobuje špatnou shodu.

V následujících grafech byly modely testovány na datech typu chirp, konkrétně z měření chirp_250hz_u3_mereni2. Toto měření rovněž nebylo použito k identifikaci modelů, je užito pouze k validaci.

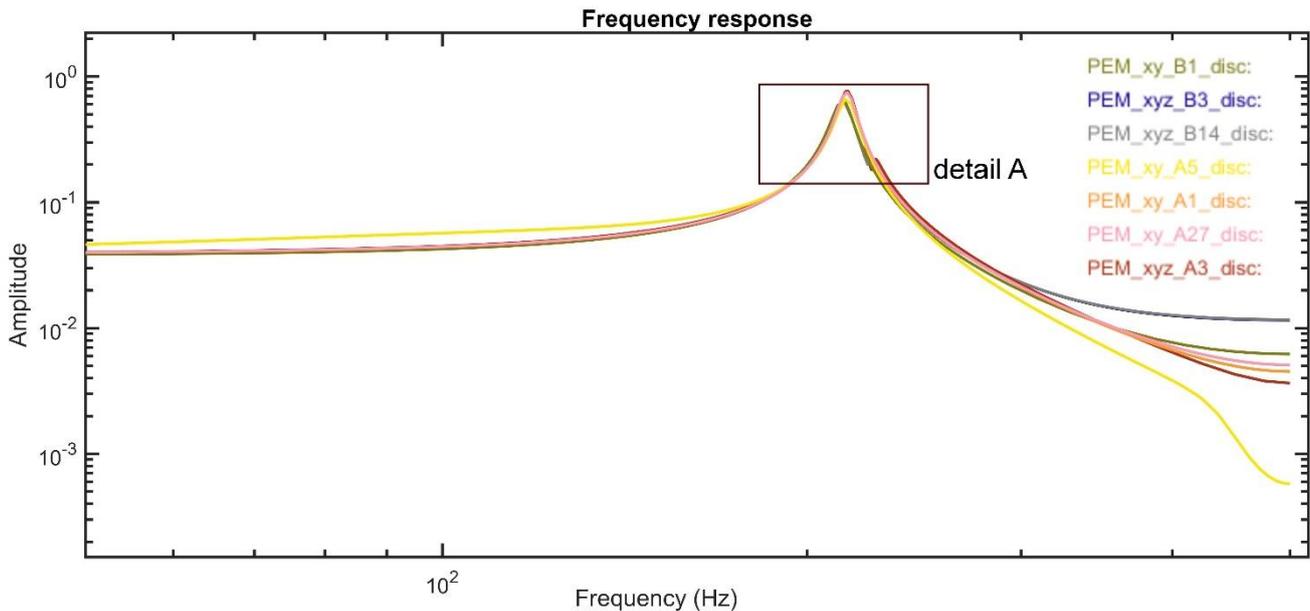


Obr. 21: Porovnání simulovaných výstupů s měřením chirp_250hz_u3_mereni2 ve směru y1, respektive x

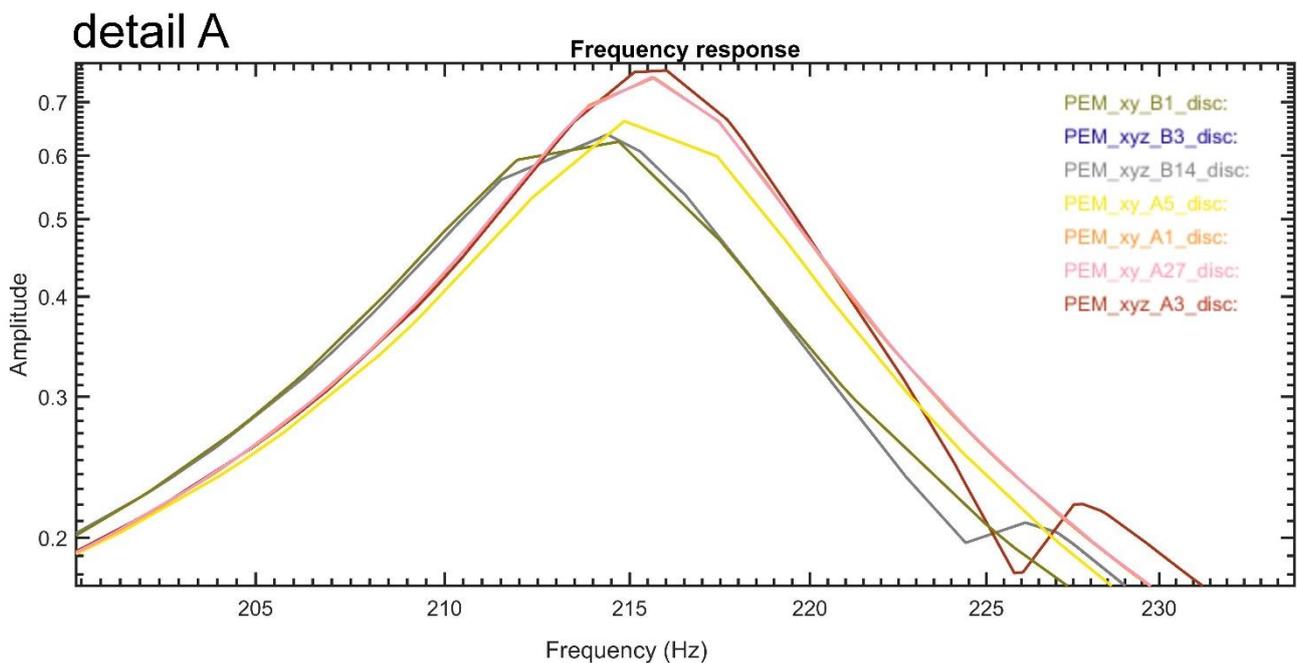


Obr. 22: Porovnání simulovaných výstupů s měřením chirp_250hz_u3_mereni2 ve směru y1, respektive x (DETAIL)

Lepší představu o chování modelů dávají amplitudové charakteristiky.



Obr. 23: Amplitudová frekvenční charakteristika vybraných modelů pro vstup u_1 a výstup y_1 , resp. x



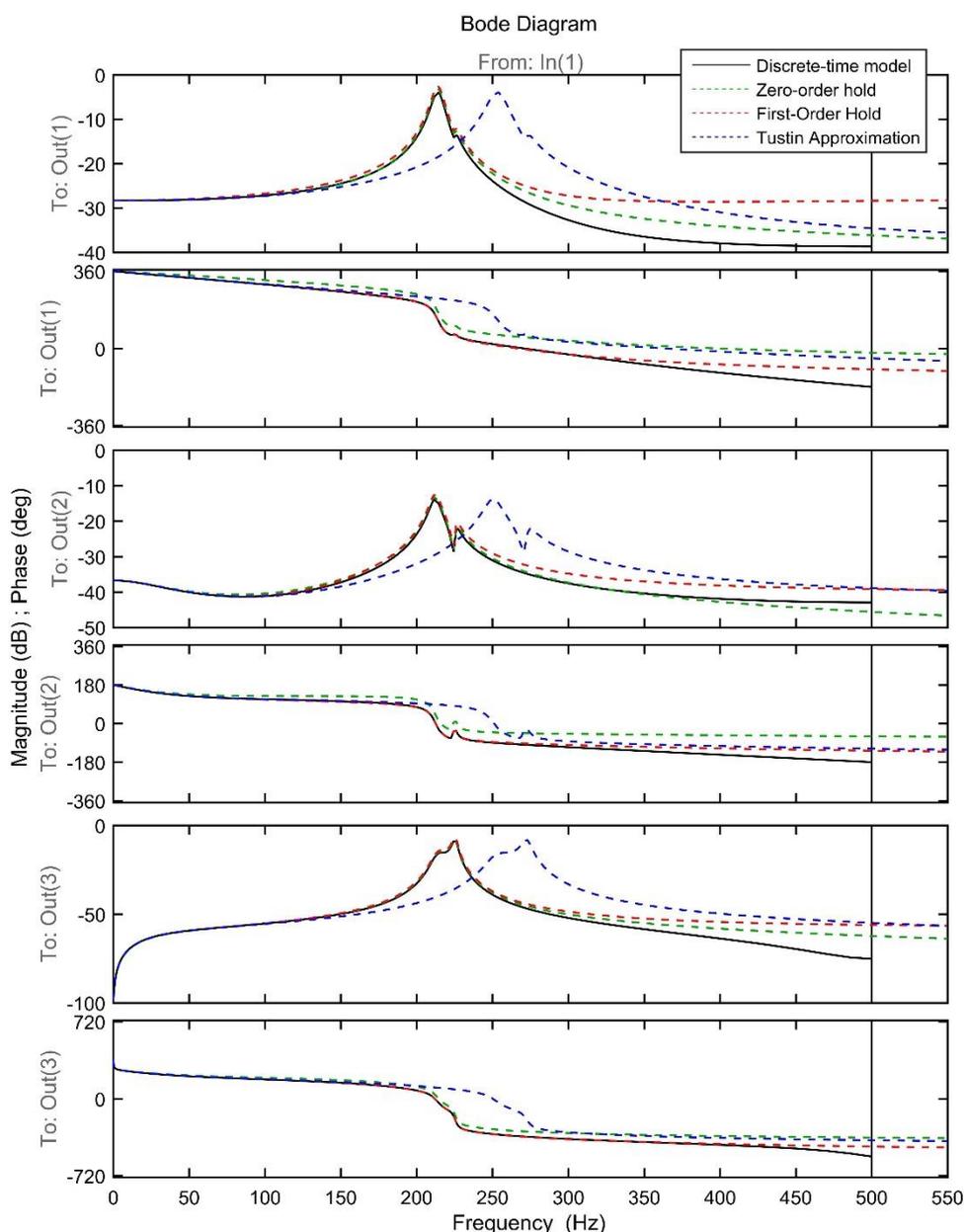
Obr. 24: Amplitudová frekvenční charakteristika vybraných modelů pro vstup u_1 a výstup y_1 , resp. x (DETAIL)

Z amplitudových charakteristik lze potvrdit, co už bylo uvedeno v tabulce 10. Modely zahrnující výstup v ose z mají, kromě vlastních frekvencí 214 Hz a 215 Hz, ještě třetí vlastní frekvenci 226 Hz. Model PEM_xyz_B3 (modrá) má stejný průběh jako PEM_xyz_B14 (šedá), a proto není v grafu vidět.

8.2 Spojité modely

Identifikací byly získány modely v diskrétní podobě. Pro syntézu řízení je v mnoha případech vhodnější model ve spojitě formě. Modely bylo nutné převést z diskrétní do spojitě podoby.

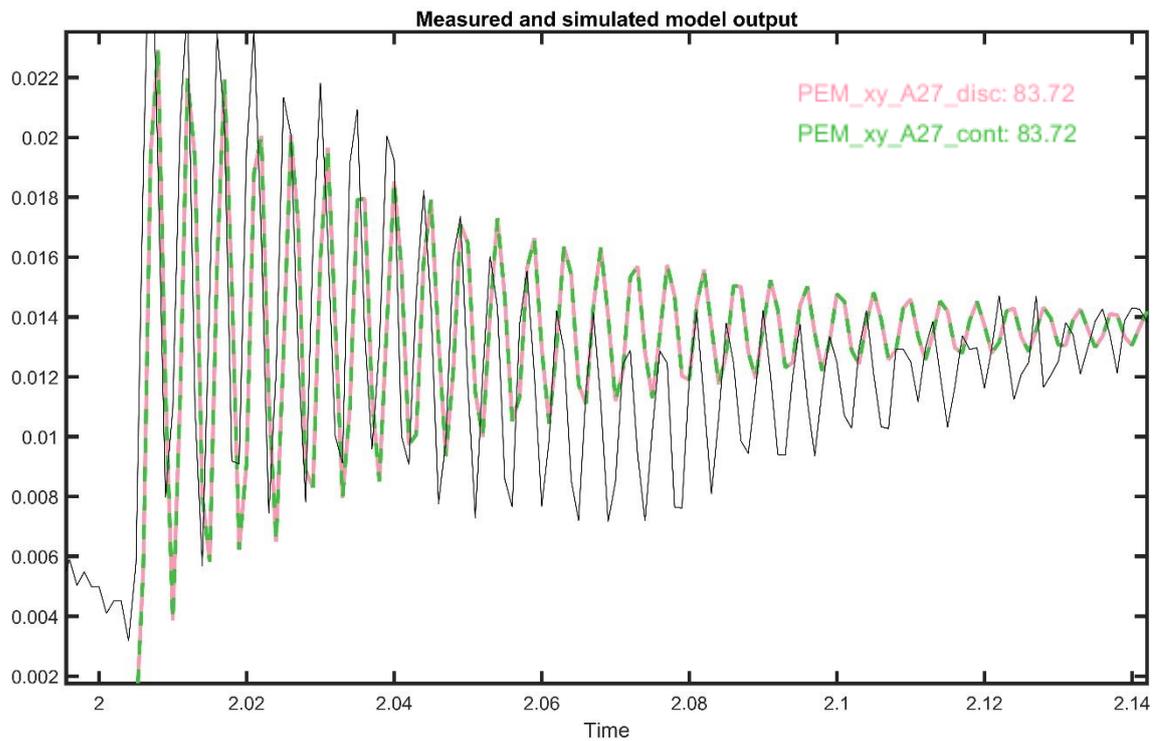
V softwaru Matlab jsou k dispozici celkem čtyři metody převodu diskrétního modelu na spojitý. Výchozí metodou je užití tvarovače nultého řádu (Zero-Order Hold). Druhou metodou je užití tvarovače prvního řádu (First-Order Hold), další metodou je Tustinova aproximace a poslední možností pro převod modelu z diskrétního na spojitý je metoda párování póly-nuly, která je ale k dispozici pouze pro SISO systémy.



Obr. 25: Porovnání metod pro příkaz `d2c` na modelu `PEM_xyz_B14`

První tři metody, které jsou pro MIMO systémy k dispozici, byly na modelu PEM_xyz_B14 vyzkoušeny a pomocí Bodeho diagramů porovnány (viz Obr. 25).

Na základě Bodeho diagramů byla pro převod modelů zvolena metoda Zero-Order Hold. Všechny modely byly touto metodou následně převedeny do spojitě podoby. Na Obr. 26 je možné vidět simulaci výstupu spojitěho a diskrétního modelu.



Obr. 26: Shoda průběhu výstupu simulace spojitěho a diskrétního modelu PEM_xy_A27

9 Závěr

9.1 Zhodnocení modelů

Jedním z hlavních cílů bylo získat kvalitní modely, které dobře odpovídají reálné struktuře. Výsledných sedm prezentovaných modelů (kap. 7 a 8) tento cíl naplňuje.

V první řadě bylo provedeno měření, během kterého byla získána data vhodná k identifikaci. Počet měření byl dostatečný a jednotlivá data byla pro identifikaci informačně bohatá. Byla zajištěna i opakovatelnost měření. Pomocí softwaru Matlab byla data poté připravena k identifikaci. Pro nalezení nejlepších parametrů byl zvolen systematický postup, který rozumně využíval výpočetní kapacity. V první fázi byly nalezeny vhodné parametry pro výpočetně náročnější druhou fázi. Během druhé fáze identifikace byl vytvořen dostatek modelů pro finální výběr. Nejenom na základě shody s validačními daty, ale i za uvažování vlastních frekvencí modelů, bylo vybráno zde prezentovaných sedm nejlepších modelů ve formě stavových popisů.

Výsledné modely dobře odpovídají reálné struktuře, mají podobné vlastní frekvence a dokáží proto dobře simulovat chování systému. Modely jsou vhodné pro syntézu řízení poddajné struktury. Mohou být využity především pro simulace a ověřování funkce regulátoru, ale i pro jeho návrh.

9.2 Shrnutí

V této bakalářské práci byla řešena problematika modelování a identifikace poddajného mechanismu s mechanicky zesílenými piezoaktuátory. Způsoby modelování poddajných mechanismů včetně metod redukce byly představeny v kapitole 3. V kapitole 4 byl vysvětlen základní princip metod experimentální identifikace. Praktická část bakalářské práce začíná kapitolou 5, ve které je popsán průběh měření aktivní struktury demonstrátoru Quadrosphere. V kapitole 6 jsou naměřená data analyzována a v kapitole 7 je popsán způsob identifikace dynamického modelu z naměřených dat. Výsledky jsou představeny na konci sedmé kapitoly. Kapitola 8 se věnuje simulacím a porovnává výsledné modely s reálným mechanismem.

Cíle bakalářské práce byly splněny. Bylo vytvořeno sedm simulačních modelů, které budou užity v rámci navazujícího výzkumu na Odboru mechaniky a mechatroniky.

Použité zdroje

1. BEER, Ferdinand P., E. Russell JOHNSTON a David F. MAZUREK. *Vector mechanics for engineers*. Eleventh edition. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2016. ISBN 978-0-07-339824-2.
2. DIAO, Xiumin a Ou MA. A method of verifying force-closure condition for general cable manipulators with seven cables. *Mechanism and Machine Theory*. Elsevier, 2007, 42(2007), 1563-1576. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2007.06.008.
3. GAWRONSKI, Wodek K. *Advanced structural dynamics and active control of structures*. New York: Springer-Verlag, 2004. Mechanical engineering series (Berlin, Germany). ISBN 0-387-40649-2.
4. LJUNG, Lennart. Aspects and Experiences of User Choices in Subspace Identification Methods. *IFAC Proceedings Volumes* [online]. 2003, 36(16), 1765-1770 [cit. 2018-06-10]. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)35015-2. ISSN 14746670. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1474667017350152>.
5. MEGGIOLARO, M. A., P. C. I. JAFFE a S. DUBOWSKY. Achieving fine absolute positioning accuracy in large powerful manipulators. In: *1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.99CH36288C)*. Detroit, MI, USA: IEEE, 1999, s. 2819-2824. DOI: 10.1109/ROBOT.1999.774024. ISBN 0-7803-5180-0. ISSN 1050-4729.
6. MILÁČEK, Stanislav. *Modální analýza mechanických kmitů*. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02333-8.
7. ONDROUCH, Jan a Jiří PODEŠVA. *Aplikovaný mechanik jako součást týmů konstruktérů a vývojářů: teorie a příklady k předmětu "Technické kmitání"*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2012. ISBN 978-80-248-2762-9.
8. PREUMONT, André. *Vibration Control of Active Structures An Introduction*. Dordrecht: Springer Verlag, 2013. ISBN 9789401063852.

9. S. GRAHAM KELLY. *Mechanical vibrations: theory and applications*, S1. SI ed. Australia: Cengage Learning, 2012. ISBN 9781439062142.
10. STEJSKAL, Vladimír, Václav BAUMA a Tomáš VAMPOLA. *Kmitání mechanických soustav: doplňkové skriptum*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-01-02752-x.
11. ŠIKA, Z., P. BENEŠ, M. VALÁŠEK, K. BULÍN, J. VOLECH, K. KRAUS, M. HAJŽMAN a P. POLACH. Cable driven spherical mechanism quadrosphere enhanced by 3 dof piezo-Actuated platform. In: *Proceedings of the 8th ECCOMAS Thematic Conference on MULTIBODY DYNAMICS 2017*. Prague; Czech Republic: National Technical University of Athens, 2017, s. 551-558. ISBN 978-800106174-9.
12. ŠIKA, Zbyněk. *Aktivní a poloaktivní snižování mechanického kmitání strojů*. Praha, 2004. Habilitační práce. České vysoké učení technické v Praze.
13. ŠIKA, Z., J. ZAVŘEL a M. VALÁŠEK. Residual Modes for Structure Reduction and Efficient Coupling of Substructures. *BULLETIN OF APPLIED MECHANICS*. 2009, 5(19), 54-59. ISSN 1805-9422.
14. ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. *Teorie dynamických systémů*. Vyd. 2. Praha: České vysoké učení technické, 1999. ISBN 80-01-01971-3.
15. ŠTORKÁN, Jaroslav. *Optimalizace mechanických vlastností mechanismu TetraSphere*. Praha, 2015. Diplomová práce. České vysoké učení technické v Praze. Vedoucí práce Michael Valášek.
16. VALASEK, M., Z. SIKÁ, J. SVEDA, M. B. NECAS a J. BOHM. Variants of Mechatronic Vibration Suppression of Machine Tools. JABŁOŃSKI, Ryszard, Mateusz TURKOWSKI a Roman SZEWCZYK, ed. *Recent Advances in Mechatronics* [online]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, s. 458-463 [cit. 2018-06-10]. DOI: 10.1007/978-3-540-73956-2_90. ISBN 978-3-540-73955-5. Dostupné z: http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-73956-2_90.
17. VALÁŠEK, Michael. *Mechatronika*. Dot. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1996. ISBN 80-01-01276-x.
18. VALÁŠEK, Michael, Zbyněk ŠIKA a Václav BAUMA. *Mechanika B*. V Praze: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-01-02919-0.

Přílohy

CD obsahuje především výsledné modely. Byly přiloženy ale i další soubory (viz. níže).
Veškeré soubory jsou kompatibilní se softwarem Matlab, verze R2015b, popř. novější.

Složky na CD s komentářem:

a1_modely_final	Obsahuje 7 výsledných modelů v diskrétní i spojitě formě.
a2_namerena_data	Obsahuje naměřená data v původním formátu z LabView, naměřená data sloučená do formátu iddata s výstupem XY a výstupem XYZ, seznam měření.
a3_for_cycle	Obsahuje program užívaný k hromadné identifikaci N4SID a PEM modelů, veškeré modely identifikované v rámci této práce – vše ve verzi s výstupem XY a XYZ.
a4_tabulky_vysledku	Tabulka výsledků (shoda všech identifikovaných modelů se všemi měřeními) ve verzi s výstupem XY a XYZ. Srovnání prezentovaných modelů (shoda se všemi měřeními).