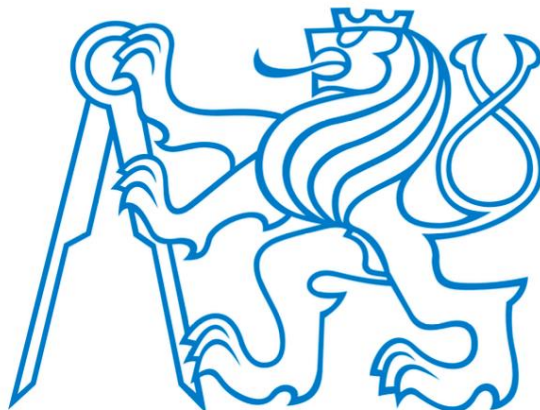


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

12105 – ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY



Bakalářská práce
Červen 2018

**Analýza napjatosti nalisovaného spoje využívajícího dutý
hřídel**

Vypracoval: Lukáš Valdman
Vedoucí práce: Ing. Karel Vítek, CSc.



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Valdman** Jméno: **Lukáš** Osobní číslo: **438631**
 Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
 Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
 Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
 Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Analýza napjatosti nalisovaného spoje využívajícího dutý hřídel

Název bakalářské práce anglicky:

Stress of state analysis of the compound pressed cylinders using a hollow shaft

Pokyny pro vypracování:

Bakalářská práce bude obsahovat části:

- 1) Rešerše teorie nalisovaných spojů a jejich uplatnění v praxi
- 2) Analytické numerické experimenty
- 3) Řešení nalisovaného spoje pro hřídel s otvorem v MKP - Abaqus
- 4) Analýza stavu napjatosti nalisovaného spoje při konstrukčních úpravách nalisované objímky
- 5) Závěry

Seznam doporučené literatury:

- [1] MICHALEC, Jiří a kolektiv. Pružnost a pevnost I. Praha: ČVUT, 2006.
- [2] MICHALEC, Jiří a kolektiv. Pružnost a pevnost II. Praha: ČVUT, 2006.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Karel Vítek, CSc., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **24.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Karel Vítek, CSc.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valásek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

2.5.2018

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Anotační list:

Jméno autora:	Lukáš Valdman
Název práce:	Analýza napjatosti nalisovaného spoje využívajícího dutý hřídel
Anglický název:	Analysis of the tension of the pressed joint using the hollow shaft
Akademický rok:	2017/2018
Studijní program:	Teoretický základ strojního inženýrství
Ústav:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Odbor:	Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí:	Ing. Karel Víttek, CSc.
Bibliografické údaje:	počet stran: 62 počet obrázků: 45 počet příloh: 2
Klíčová slova:	Tlustostěnná nádoba, nalisovaný spoj, osová napětí, dutý hřídel, metoda konečných prvků, kombinované namáhání, únava
Keywords:	Thick-wall container, press fit, axial tension, hollow shaft, finite element method, combined stress, fatigue
Abstrakt:	Tato bakalářská práce se zabývá analýzou napjatosti nalisovaného spojení náboje na dutý hřídel. V teoretické části je podrobně rozebrána teorie tlustostěnných válcových nádob a nalisovaných nádob. Praktická část obsahuje analytický návrh nalisovaného spoje. Dále je návrhový model řešen v softwaru konečných prvků Abaqus. Analytické výpočty jsou porovnávány s výsledky z MKP analýzy. Práce se dále zabývá vlivem osového napětí na konstrukci. Následuje návrh konstrukčních úprav za účelem snížení negativního vlivu osového napětí.
Abstract:	This bachelor thesis analyzes the mechanical properties of pressing the hub on the hollow shaft. In the theoretical part, the theory of thick-walled cylindrical vessels and pressurized vessels is analyzed in detail. The practical part contains the analytical design of the pressed joint. Furthermore, the design model is solved in the Abaqus finite element software. Analytical calculations are compared with the results of FEM analysis. The work also deals with the influence of the axial stress on the structure. The following is a design of structural modifications to reduce the negative impact of the axial stress.

Poděkování

Děkuji panu Ing. Karlu Vítkovi, CSc. za odborné vedení a konzultace této bakalářské práce. Dále bych rád touto formou poděkoval panu Ing. Jirímu Kuželkovi Ph.D. a panu Ing. Jirímu Černému za odbornou pomoc se softwarem SIMULIA Abaqus.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně, pod vedením pana Ing. Karla Vítka, CSc. Dále prohlašuji, že jsem všechny použité zdroje správně a úplně citoval a uvádím je v příloženém seznamu literatury.

V Praze dne 4. června 2018

Podpis:

Obsah

1	Úvod.....	9
2	Teorie tlustostěnných nádob.....	11
2.1	Tlustostěnné válcové otevřené nádoby	11
2.2	Tlustostěnné válcové uzavřené nádoby.....	11
3	Napětí v tlustostěnných nádobách	12
3.1	Rovnováha vytknutého elementu.....	13
3.2	Poměrná prodloužení	13
3.3	Hlavní napětí.....	14
3.4	Určení konstant C a K.....	16
3.5	Grafické znázornění hlavních napětí.....	17
4	Pevnostní podmínky tlustostěnných nádob	18
4.1	Houževnatý materiál	18
4.2	Křehký materiál	18
5	Nalisované silnostěnné nádoby.....	19
5.1	Pevnostní podmínky nalisovaných spojů	20
5.2	Optimální geometrie	20
5.3	Určení přesahu Δr_2 pro dvě nalisované nádoby.....	21
5.4	Výpočet přesahu pro různé materiály	22
5.5	Nalisování zastudena.....	23
5.6	Nalisování zatepla.....	23
6	Náboj na hřídeli	23
7	Náboj na dutém hřídeli.....	25
8	Silové poměry a únosnost spoje	26
8.1	Osová síla	26
8.2	Kroutící moment	27
8.3	Ohybový moment.....	28
9	Analytický návrh.....	30
9.1	Model – vstupní parametry.....	31
9.2	Určení hlavních napětí	31
9.3	Pevnostní kontrola dle HMM	32
9.4	Únosnost nalisovaného spoje.....	33
9.5	Grafické znázornění hlavních napětí.....	34
10	Numerické experimenty v softwaru Abaqus.....	35

10.1	Návrh modelu	35
10.2	Průběhy hlavních napětí	36
11	Kombinované namáhání – ohyb + tah/tlak	40
11.1	Určení momentů MH a MN	43
11.2	Celkové namáhání v místech 1 a 2.....	43
12	Průběh napětí v čase	44
12.1	Typy cyklického zatížení.....	45
12.2	Určení typu zatížení.....	46
13	Únava – Haighův diagram	46
14	Vliv tření a Poissonova čísla na osově napětí.....	47
14.1	Tření.....	47
14.2	Poissonovo číslo	50
15	Konstrukční úpravy	52
15.1	Hřídelová díra.....	53
15.2	Čelní zápich na náboji	57
16	Závěr.....	60
17	Seznam použité literatury	61

Seznam obrázků

Obrázek 1	– Ozubené kolo na plném hřídeli	9
Obrázek 2	– Ozubené kolo na dutém hřídeli	9
Obrázek 3	– Příklad použití nalisovaných spojů – převodovka	9
Obrázek 4	– Příklad použití nalisovaných spojů – rotor turbíny	9
Obrázek 5	- Hydraulický válec	11
Obrázek 6	– Jednoduchá silnostěnná nádoba	12
Obrázek 7	- Otevřená silnostěnná nádoba	13
Obrázek 8	- Vytknutý element.....	13
Obrázek 9	- Deformace elementu	14
Obrázek 10	- Okrajová podmínka.....	16
Obrázek 11	- Průběh hlavních napětí pro vnitřní přetlak	17
Obrázek 12	- Srovnání napětí pro jednoduchou a nalisovanou silnostěnnou nádobu	20
Obrázek 13	- Nalisování tlustostěnné nádoby.....	21
Obrázek 14	- rozložení napětí po nalisování	24
Obrázek 15	- Nalisování s dutým hřídelem, průběh hlavních napětí.....	25
Obrázek 16	- lisovací síla, rozložení sil	26
Obrázek 17	– kroutící moment, rozložení sil	28
Obrázek 18	- Rozdělení stykového tlaku při zatížení ohybovým momentem.....	29
Obrázek 19	- Příklad použití dutého náboje [6].....	30
Obrázek 20	- Popis výpočtového modelu.....	31
Obrázek 21	- Analytický výpočet – průběhy hlavních napětí	35

Obrázek 22 - Nalisování, díra v hřídeli 2 mm. Znázornění redukovaného napětí (dle HMM), deformace zvětšena 250x	36
Obrázek 23 - Díra 2 mm, srovnání hlavních napětí z Abaqusu s analytickým výpočtem	37
Obrázek 24 – Porovnání hlavních napětí z Abaqusu (nulové tření) s analytickým výpočtem.....	38
Obrázek 27 – Znázornění momentů na nalisování, podmínka natočení a jednotkový moment pro Mohrův integrál	40
Obrázek 28 – Průběhy napětí dvěma zkoumanými místy	42
Obrázek 29 – Průběh ohybového napětí bodu A v čase t [1]	44
Obrázek 30 - Popis cyklického namáhání [1].....	45
Obrázek 31 – Superpozice osového a ohybového napětí.....	46
Obrázek 32 - Haighův diagram.....	47
Obrázek 33 – Závislost osového napětí na třecím koeficientu f – cesta pro sběr dat vedena středem nalisování.....	48
Obrázek 34 – Průběh podélného osového napětí na povrchu hřídele v závislosti na třecím koeficientu f . Pozn.: Červená čára na schématickém obr. znázorňuje cestu sběru dat v Abaqusu	49
Obrázek 35 – Průběh kontaktního tlaku na hřídeli v závislosti na třecím koeficientu f	50
Obrázek 36 – Příčný průběh osového napětí v závislosti na Poissonově čísle– cesta pro sběr dat vedena středem nalisování.....	51
Obrázek 37 – Podélný průběh osového napětí v závislosti na Poissonově čísle	52
Obrázek 38 – Průběh tečných a radiálních napětí pro různé hřídelové díry– cesta pro sběr dat vedena středem nalisování.....	53
Obrázek 39 – Průběh osových napětí pro různé hřídelové díry– cesta pro sběr dat vedena středem nalisování.....	54
Obrázek 40 – Podélný průběh osového napětí na styčné ploše hřídele	55
Obrázek 41 – Průběh tlaku na nalisování hřídele pro různé hřídelové díry	57
Obrázek 42 - čelní zápich	58
Obrázek 43 – Zápich ($b = 5$ mm), redukované napětí, deformace 130x zvětšena	58
Obrázek 44 - Vliv zápichu ($b = 5$ mm) na kontaktní tlak na hřídeli.....	59
Obrázek 45 - Průběh osového napětí na hřídeli se zápichem a bez zápichu	60

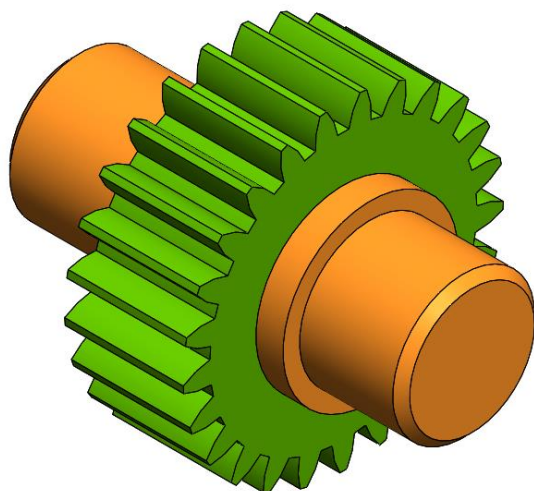
Seznam použitých označení

Název	Značka	Jednotka
Poloměr	R, r	mm
Délkové rozměry	l, a, b	mm
Obsah plochy	A	mm^2
Přesah	Δr_2	mm
Síla	F	N
Moment	M	$N \cdot m$
Tlak	p	MPa
Osově napětí	σ_o	$N \cdot mm^{-2}$
Tečné napětí	σ_t	$N \cdot mm^{-2}$
Radiální napětí	σ_r	$N \cdot mm^{-2}$
Redukované napětí	σ_{red}	$N \cdot mm^{-2}$
Mez kluzu	σ_k	$N \cdot mm^{-2}$
Mez pevnosti	σ_D	$N \cdot mm^{-2}$
Míra bezpečnosti	k	-

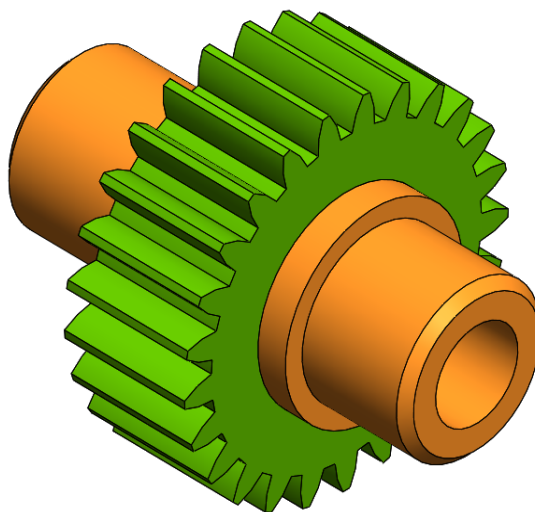
Modul pružnosti v tahu	E	MPa
Poissonovo číslo	ν	-
Třecí koeficient	f	-
Poměrné prodloužení	ε	-
Střední aritmetická odchylka drsnosti povrchu	R_a	μm

1 Úvod

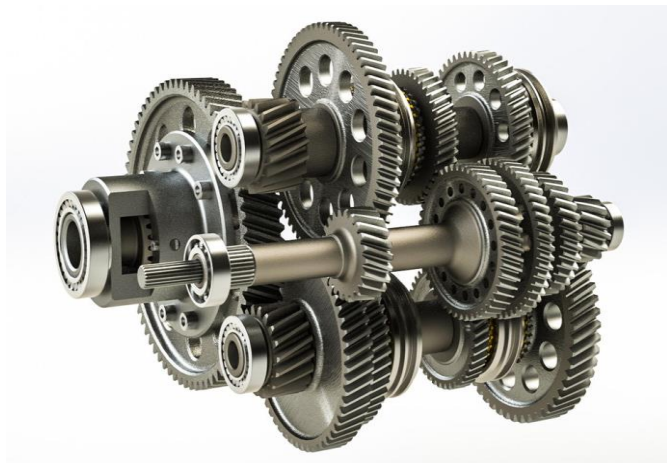
Nalisovaným spojem lze dosáhnout pevného spojení dvou součástí. Takové spoje patří mezi spojení nepohyblivá, předepjatá, bezprostřední a převážně nerozebíratelná. Jsou to spoje jednoduché, hospodárné a spolehlivé. Příkladem použití (obrázky 1,2,3 a 4) může být upevnění ozubeného kola na hřídeli, uložení valivých ložisek, řemenic, nebo také rotorů elektromotorů a turbín. Mezi výhody nalisovaných spojů patří jednoduchá konstrukce a velká únosnost. Mezi nevýhody se řadí nerozebíratelnost spoje, nebo velmi přesná výroba. U konstrukčního návrhu nalisovaného spoje se využívá teorie tlustostěnných nádob.



Obrázek 1 – Ozubené kolo na plném hřídeli



Obrázek 2 – Ozubené kolo na dutém hřídeli



Obrázek 3 – Příklad použití nalisovaných spojů – převodovka



Obrázek 4 – Příklad použití nalisovaných spojů – rotor turbíny

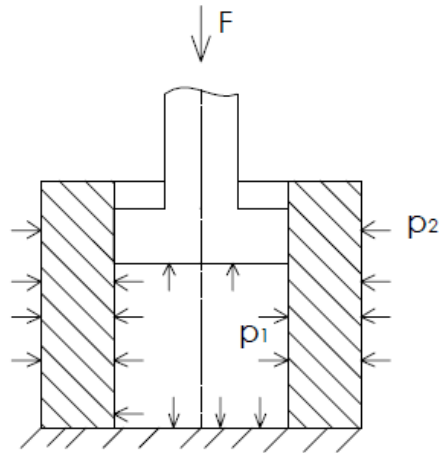
Teoretická část

2 Teorie tlustostěnných nádob

K analýzám nalisovaných spojů lze využít teorie tlustostěnných nádob, u kterých poměr tloušťky stěny k vnitřnímu průměru $s/(2 \cdot r_1)$ je větší než $1/20$. Rozložení tlaků na vnitřním a vnějším povrchu je rovnoměrné. Nádoby jsou namáhány vnějším tlakem p_2 a vnitřním tlakem p_1 .

2.1 Tlustostěnné válcové otevřené nádoby

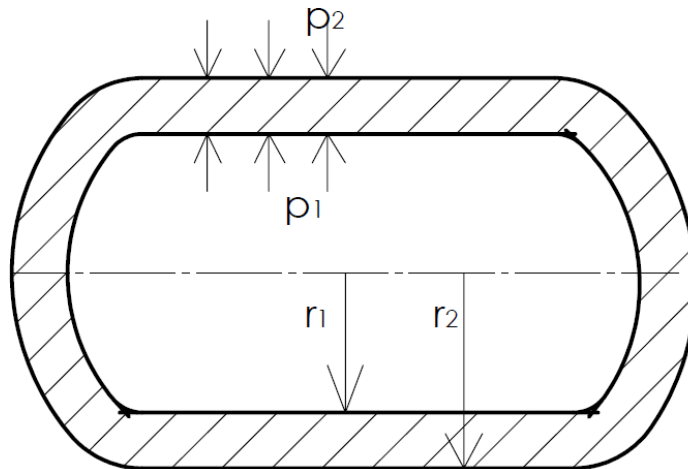
Nádoby otevřené nepřenášejí osovou sílu, osové napětí je tedy nula. Příkladem otevřené nádoby může být hydraulický lis, viz obr. 5. Stěny tohoto hydraulického válce nejsou pevně spojeny s pístem, proto stěny této nádoby nepřenášejí žádnou axiální sílu. Plný hřídel uvažujeme jako otevřenou tlustostěnnou nádobu s vnitřním poloměrem $r_1 = 0$. Dutý hřídel je pak už klasická otevřená silnostěnná nádoba, obdobně jako náboj nalisovaný na hřídeli.



Obrázek 5 - Hydraulický válec

2.2 Tlustostěnné válcové uzavřené nádoby

Nádoba uzavřená má z obou stran dno, nebo víko, viz obr. 6.



Obrázek 6 – Jednoduchá silnostěnná nádoba

Vnitřní a vnější tlak působící na dno (resp. víko) nádoby vyvolá sílu F o velikosti

$$F = p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 - p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2.$$

Osově napětí, vznikající ve válcové části má tvar

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 - p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2}{\pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (1)$$

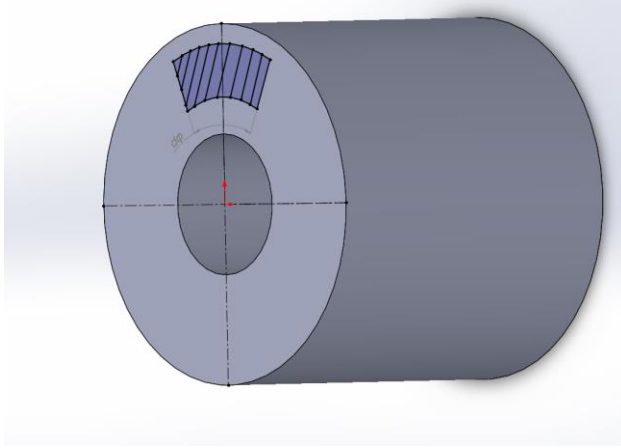
kde A je průřez pláště nádoby.

3 Napětí v tlustostěnných nádobách

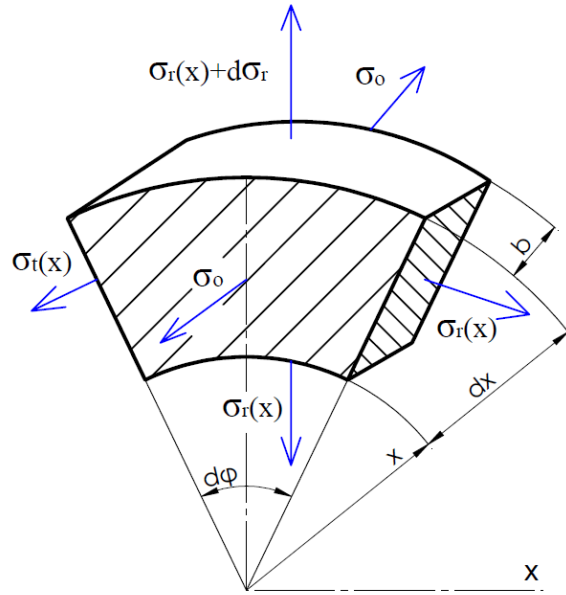
Při odvozování radiálního napětí σ_r a napětí tečného σ_t vycházíme z následujících předpokladů:

- 1) Platnost Hookeova zákona
- 2) Funkce napětí i deformace jsou funkcí jedné proměnné x – poloměru dané nádoby.
- 3) Uvažujeme jen tu část nádoby, která není ovlivněna okrajovými podmínkami, např. dno nádoby. Vyšetřovaný objekt si lze představit jako dlouhý dutý válec.

Uvažujeme otevřenou silnostěnnou nádobu (obr. 7), ze které vytkneme element, viz obr. 8. Na tento element působí tři hlavní napětí. Napětí radiální σ_r , které vzniká ve směru poloměru nádoby, napětí tečné σ_t působící tečně k obvodovým kružnicím a napětí osově σ_0 , které uvažujeme rovno nule.



Obrázek 7 - Otevřená silnostěnná nádoba



Obrázek 8 - Vytknutý element

3.1 Rovnováha vytknutého elementu

Pro následující odvození vycházíme z [2]. Pro vytknutý element má silová rovnice rovnováhy pro radiální směr

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot d\varphi \cdot b - \sigma_r \cdot x \cdot d\varphi \cdot b = 2 \cdot \sigma_t \cdot b \cdot dx \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0. \quad (2)$$

Protože úhel φ je elementární, linearizujeme rovnici

$$\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2.$$

Po zkrácení členu $d\varphi \cdot b$ a roznásobení dostáváme tvar

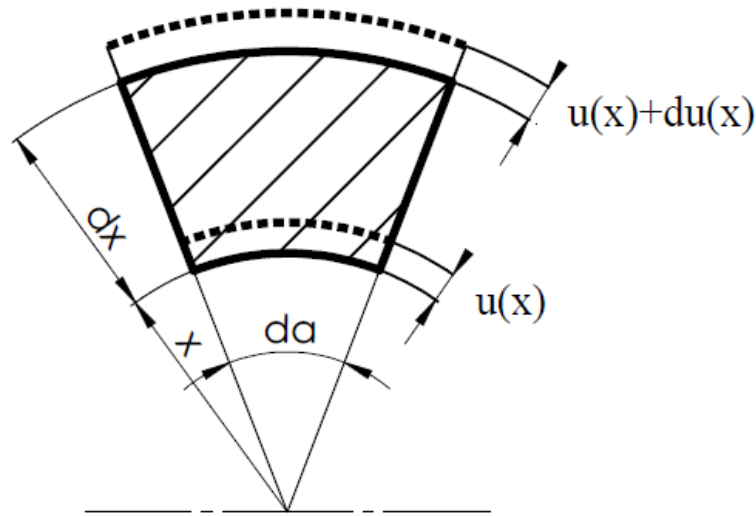
$$\sigma_r \cdot x + \sigma_r \cdot dx + d\sigma_r \cdot x + d\sigma_r \cdot dx - \sigma_r \cdot x - \sigma_t \cdot x = 0. \quad (3)$$

Zanedbáním nekonečně malého členu $d\sigma_r \cdot dx$ získáme

$$d(\sigma_r \cdot x) - \sigma_t \cdot dx = 0. \quad (4)$$

3.2 Poměrná prodloužení

Jelikož máme dvě neznámá napětí (σ_r , σ_t) a jen jednu rovnici, je tato rovnice pro napětí staticky neurčitá. Proto tuto rovnici rovnováhy doplníme o deformační podmínku. Transformujeme obě napětí na funkci posuvu u . Deformační podmínka vyplývá z obr. 9.



Obrázek 9 - Deformace elementu

Na obr. 9 je vyznačen element před deformací (plně) a po deformaci (čárkovaně). Radiální posuv u je funkcí poloměru x : $u = u(x)$.

Pro poměrné prodloužení v tečném směru platí vztah

$$\varepsilon_t = \frac{(x + u) \cdot d\alpha - x \cdot d\alpha}{x \cdot d\alpha} = \frac{u(x)}{x}.$$

Poměrné prodloužení elementu v radiálním směru má tvar

$$\varepsilon_r = \frac{(x + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u'(x).$$

Poměrná prodloužení ε_t a ε_r lze také vyjádřit pomocí Hookeova rozšířeného zákona. Zde E je modul pružnosti v tahu a ν je Poissonovo číslo

$$\varepsilon_r = u'(x) = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_r - \nu \cdot (\sigma_t + \sigma_o)] \quad (6)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u(x)}{x} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_o)]. \quad (7)$$

3.3 Hlavní napětí

Z rovnic (6) a (7) poté vyplývají vztahy pro tečné a radiální napětí, s tím, že osové napětí σ_o uvažujeme nulové.

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot [\varepsilon_t + \nu \cdot \varepsilon_r] = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left[\frac{u(x)}{x} + \nu \cdot u'(x) \right] \quad (8)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_t] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[u'(x) + \nu \cdot \frac{u(x)}{x} \right]. \quad (9)$$

Po dosazení napětí do rovnice rovnováhy (4) a matematické úpravě dostaneme výraz

$$x \cdot u'' + u' - \frac{u}{x} = 0. \quad (10)$$

Tato rovnice má tvar Eulerovy diferenciální rovnice 2. řádu. Pro řešení této homogenní rovnice lze použít odhad řešení

$$\begin{aligned} u(x) &= x^n \\ \text{I. derivace: } u'(x) &= n \cdot x^{n-1} \\ \text{II. derivace: } u''(x) &= n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}. \end{aligned}$$

Nyní lze tyto vztahy dosadit do rovnice rovnováhy (10)

$$\begin{aligned} x \cdot [n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}] + n \cdot x^{n-1} - \frac{x^n}{x} &= 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot x^{n-1} + n \cdot x^{n-1} - x^{n-1} &= 0 \\ x^{n-1} \cdot [n \cdot (n-1) + n - 1] &= 0 \\ x^{n-1} \cdot (n^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Platí, že výraz $x^{n-1} \neq 0$, proto jediným řešením jsou dva různé reálné kořeny $n_1 = 1$ a $n_2 = -1$.

Rovnice posuvu má tedy tvar: $u(x) = C_1 \cdot x^{n_1} + C_2 \cdot x^{n_2} = C_1 \cdot x + C_2 \cdot \frac{1}{x}$.

Dosazením za $u(x)$ do rovnic pro tečné napětí (8) dostáváme:

$$\begin{aligned} \sigma_t(x) &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[\frac{u(x)}{x} + \nu \cdot u'(x) \right] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[C_1 + \frac{C_2}{x^2} + \nu \cdot C_1 - \nu \cdot \frac{C_2}{x^2} \right] \\ \sigma_t(x) &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\nu) + \frac{C_2}{x^2} \cdot (1-\nu) \right] \\ \sigma_t(x) &= \underbrace{\frac{E \cdot C_1}{1-\nu^2} \cdot (1+\nu)}_{\mathbf{K}} + \underbrace{\frac{E \cdot C_2}{1-\nu^2} \cdot (1-\nu)}_{\mathbf{C}} \cdot \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Zavedením konstant K a C dostáváme rovnici polytropy pro tečné napětí

$$\sigma_t(x) = K + \frac{C}{x^2} \quad (11)$$

Obdobně dosadíme do rovnice pro radiální napětí

$$\sigma_r(x) = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[u'(x) + \nu \cdot \frac{u(x)}{x} \right] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[C_1 - \frac{C_2}{x^2} + \nu \cdot C_1 + \nu \cdot \frac{C_2}{x^2} \right]$$

$$\sigma_r(x) = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\nu) - \frac{C_2}{x^2} \cdot (1-\nu) \right]$$

$$\sigma_r(x) = \frac{E \cdot C_1}{1-\nu^2} \cdot (1+\nu) - \frac{E \cdot C_2}{1-\nu^2} \cdot (1-\nu) \cdot \frac{1}{x^2}$$

Po dosazení konstant K a C dostáváme

$$\sigma_r(x) = K - \frac{C}{x^2} \quad (12)$$

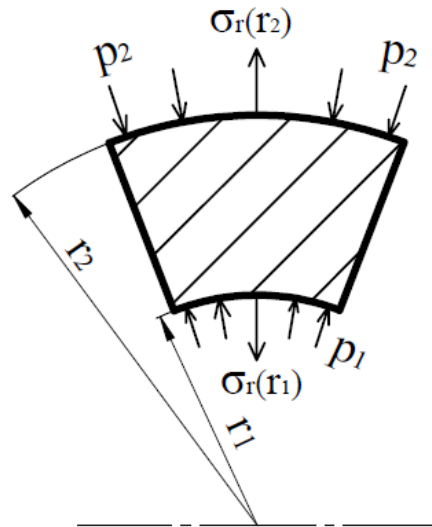
Sečtením rovnic (11) a (12) dostáváme

$$\sigma_t(x) + \sigma_r(x) = 2K.$$

To znamená, že po celé tloušťce nádoby je součet tečného a radiálního napětí konstantní.

3.4 Určení konstant C a K

Konstanty K a C zjistíme z okrajové podmínky pro radiální napětí (viz obr. 10), kdy záporná hodnota tlaku p_1 na poloměru r_1 je rovna radiálnímu napětí $\sigma_r(r_1)$ a záporná hodnota tlaku p_2 na poloměru r_2 je rovna radiálnímu napětí $\sigma_r(r_2)$.



Obrázek 10 - Okrajová podmínka

Okrajové podmínky:

$$1) \sigma_r(r_1) = -p_1 \quad \text{a} \quad 2) \sigma_r(r_2) = -p_2.$$

Dosadíme do rovnice (12)

$$-p_1 = K - \frac{C}{r_1^2} \Rightarrow K = \frac{C}{r_1^2} - p_1, \quad (13)$$

$$a \quad -p_2 = K - \frac{C}{r_2^2} \Rightarrow -p_2 = \frac{C}{r_1^2} - p_1 - \frac{C}{r_2^2}, \quad (14)$$

odkud vyplývá

$$C = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

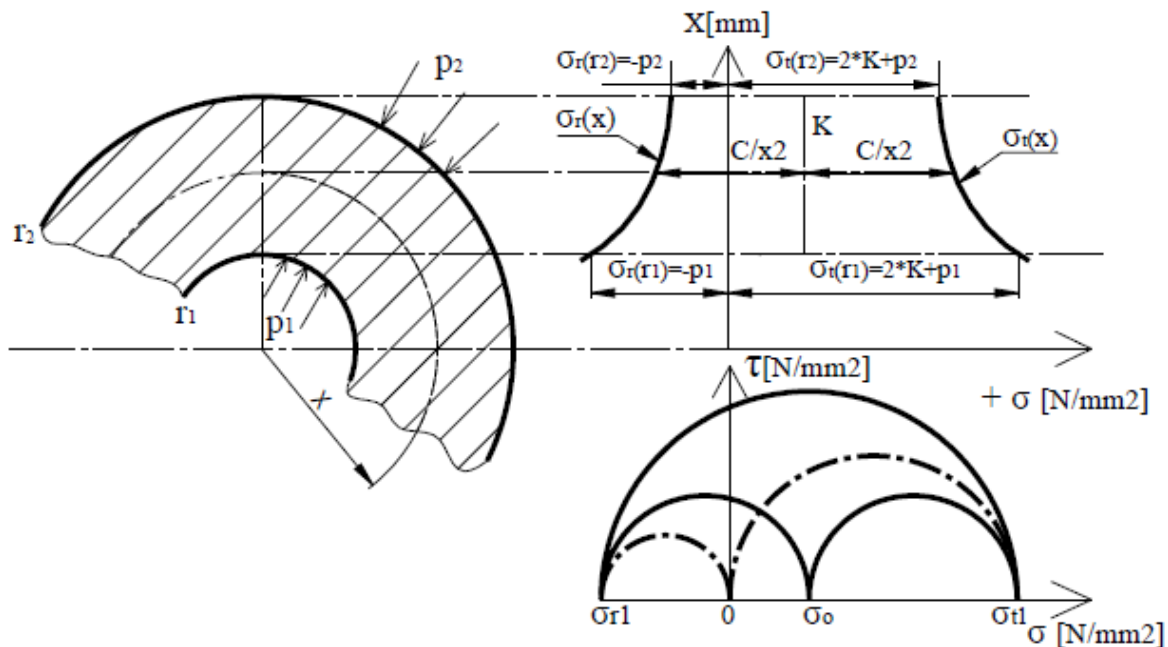
Zpětným dosazením do (13) za konstantu C dostáváme vyjádření pro konstantu K

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (15)$$

Zde je zřejmé, že u uzavřených nádob je σ_o rovno konstantě K, viz (1), zatímco u otevřených nádob uvažujeme $\sigma_o = 0$.

3.5 Grafické znázornění hlavních napětí

Závislosti z rovnic (11) a (12) vyneseme do grafu na obr. 10. Jedná se o případ kdy $p_1 > p_2$, tedy vnitřní přetlak.



Obrázek 11 - Průběh hlavních napětí pro vnitřní přetlak

Z rovnic (11), (12) a obr. 11 je zřejmé, že obě polytropy jsou osově souměrné podle přímky K. Grafy pro otevřenou a uzavřenou nádobu se liší pouze v tom, že u otevřené nádoby $\sigma_o = 0$, viz čárkované Mohrovi kružnice na obr. 11.

4 Pevnostní podmínky tlustostěnných nádob

Z průběhů funkcí napětí pláště tlustostěnné je zřejmé, že povrch na poloměru r_1 je nejvíce namáhám. Proto provádíme pevnostní kontroly na tomto poloměru.

4.1 Houževnatý materiál

Pro houževnatý stav materiálu používáme pevnostní kontrolu dle Trescovi hypotézu τ_{max} nebo energetickou HMM (Huber, Mises, Hencky) hypotézu.

1) Trescova τ_{max} hypotéza

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} \leq \sigma_D \quad (16)$$

Kde σ_{red} je redukované napětí, σ_{max} je maximální napětí, σ_{min} je minimální napětí a σ_D je napětí dovolené, které se vypočte z meze kluzu σ_k nebo z meze pevnosti σ_p materiálu.

$$\sigma_D = \frac{\sigma_k}{k_k} \quad \text{nebo} \quad \sigma_D = \frac{\sigma_p}{k_p},$$

kde k_k a k_p jsou bezpečnosti.

2) Energetická HMM hypotéza

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_D, \quad (17)$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí.

Konkrétní výpočet pro stav na obr. 11 s uvažováním uzavřené nádoby lze vyjádřit jako

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_r(r_1) - \sigma_o)^2 + (\sigma_o - \sigma_t(r_1))^2 + (\sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1))^2} \leq \frac{\sigma_k}{k}. \quad (18)$$

4.2 Křehký materiál

Pro křehký stav materiálu používáme hypotézu σ_{max} a Mohrovu pevnostní hypotézu.

1) Hypotéza σ_{max}

Podle této hypotézy kontrolujeme zvlášť tah a tlak

Pro tah:

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} \leq \sigma_{Dt},$$

kde σ_{max} je maximální hlavní napětí v tahu ($\sigma_{max} > 0$) a σ_{Dt} je dovolené napětí v tahu

$$\sigma_{Dt} = \frac{\sigma_{Pt}}{k}.$$

Pro tlak:

$$\sigma_{red} = |\sigma_{min}| \leq \sigma_{Dd},$$

kde σ_{min} je minimální hlavní napětí v tlaku ($\sigma_{min} < 0$) a σ_{Dd} je dovolené napětí v tlaku

$$\sigma_{Dd} = \frac{\sigma_{Pd}}{k}.$$

2) Mohrova pevnostní hypotéza

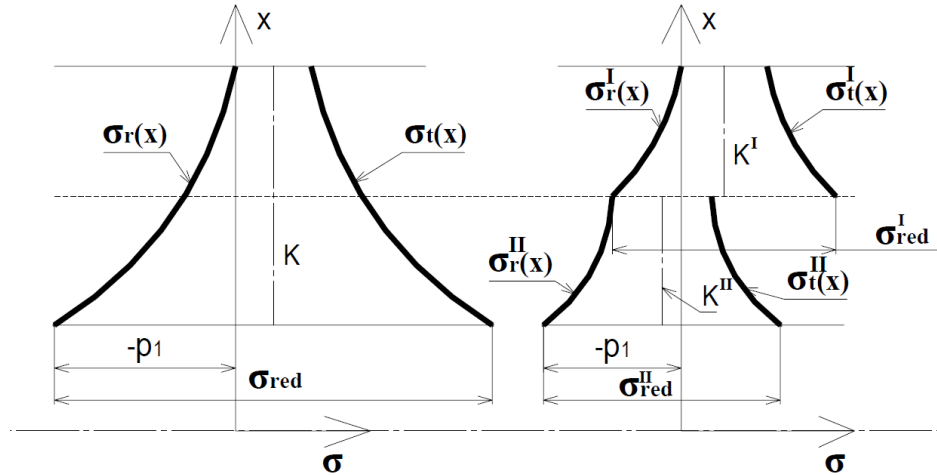
$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \frac{\sigma_{Pt}}{\sigma_{Pd}} \cdot \sigma_{min} \leq \sigma_{Dt},$$

kde σ_{max} je maximální hlavní napětí, σ_{min} je minimální hlavní napětí a σ_{Dt} je dovolené napětí v tahu.

5 Nalisované silnostěnné nádoby

Jednoduchá silnostěnná nádoba má největší redukované napětí σ_{red} , dle Trescovy hypotézy, na vnitřním poloměru r_1 a se zvětšujícím se poloměrem toto napětí klesá, viz obr. 12. To znamená, že většina materiálu nádoby je „pevnostně nevyužívaná“. Vlivem nalisování může být materiál efektivněji využit a součást může mít podstatně větší únosnost než jednoduchá nádoba ze stejného materiálu. Porovnání redukovaných napětí pro jednoduchou a nalisovanou nádobu je na obr. 12, kde je zobrazen případ pro vnitřní přetlak o velikosti $-p_1$.

Pomocí vlisování jedné nádoby do druhé se v místě styku objeví skok v průběhu tečného napětí, který snižuje napjatost vnitřní nádoby. Díky této skutečnosti může vnitřní povrch snést vyšší přetlak, než když by byla vyrobená z jednoho kusu [2].



Obrázek 12 - Srovnání napětí pro jednoduchou a nalisovanou silnostěnnou nádobu

5.1 Pevnostní podmínky nalisovaných spojů

Uvažujme dvě otevřené tlustostěnné nádoby, které jsou vlisovány jedna do druhé. Na vnitřním poloměru r_1 pak působí tlak p_1 , na styčném poloměru r_2 působí tlak p_2 a na vnějším poloměru r_3 působí tlak p_3 . S využitím již odvozené Trescovy hypotézy (16) platí pro obě nádoby pevnostní podmínky

$$p_1 - p_2 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right],$$

$$p_2 - p_3 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right].$$

Jestliže uvažujeme shodný materiál pro obě nádoby, můžeme pak sečíst obě nerovnosti a vychází nám podmínka pro maximální přetlak

$$p_1 - p_3 \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[2 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

5.2 Optimální geometrie

Vycházíme z odvozené podmínky pro maximální přetlak

$$p_1 - p_3 = \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[2 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right].$$

Jestliže jsou známé vnitřní a vnější poloměry nalisování, pak je přetlak $(p_1 - p_3)$ pouze závislý na r_2 : $(p_1 - p_3) = f(r_2)$. Pro nalezení optimálního poloměru r_2 najdeme maximum funkce, kdy je $(p_1 - p_3)$ maximální. Toto odpovídá nulové derivaci funkce přetlaku podle poloměru r_2 .

$$\frac{d}{dr_2} (p_1 - p_3) = \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[2 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] = \sigma_D \cdot \left(\frac{r_1^2}{r_2^3} - \frac{r_2}{r_3^2} \right) = 0.$$

Z toho plyne vyjádření r_2

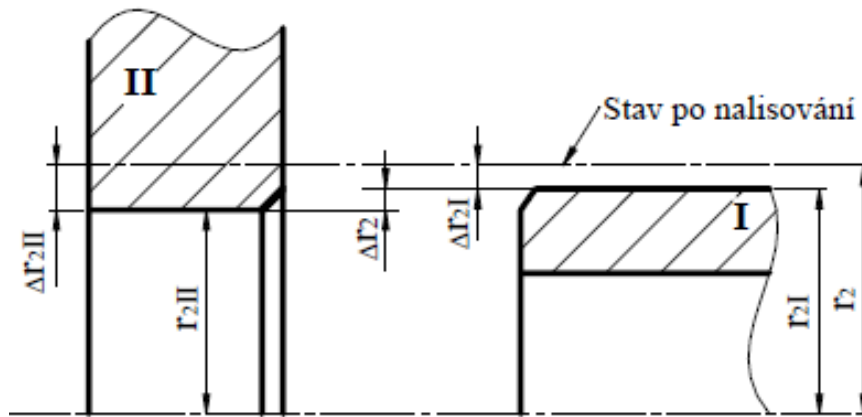
$$\frac{r_1^2}{r_2^3} = \frac{r_2}{r_3^2} \Rightarrow r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}.$$

5.3 Určení přesahu Δr_2 pro dvě nalisované nádoby

Na obr. 13 jsou naznačeny dvě nádoby s přesahem před nalisováním a po nalisování. Dále vycházíme z následujících předpokladů.

Předpoklady:

- 1) Obě nádoby jsou otevřené $\sigma_o^I = \sigma_o^{II} = 0$
- 2) Obě nádoby jsou vyrobené ze shodného Hookovského materiálu ($E_1 = E_2$)
- 3) Celý proces probíhá v oblasti malých deformací (např. v rámci výrobní tolerance)
- 4) Uvažujeme, že: $r_2^I \approx r_2^{II} \approx r_2$



Obrázek 13 - Nalisování tlustostěnné nádoby

Je patrné, že

$$\Delta r_2 = \Delta r_2^N - \Delta r_2^H.$$

Tuto rovnici vydělíme r_2 a využijeme předpokladu 4)

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{\Delta r_2^N}{r_2} - \frac{\Delta r_2^H}{r_2} \approx \frac{\Delta r_2^N}{r_2^{II}} - \frac{\Delta r_2^I}{\Delta r_2^H} \approx \varepsilon_t^N(r_2) - \varepsilon_t^H(r_2). \quad (20)$$

Tečné deformace vyjádříme z Hookeova zákona a využijeme skutečnosti, že $\sigma_r^{H,N}(r_2) = -p_2$ a $\sigma_o^H = \sigma_o^N = 0$

$$\varepsilon_t^H(r_2) = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t^H(r_2) - \nu \cdot \sigma_r^H(r_2)] = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t^H(r_2) + \nu \cdot p_2] \quad (21)$$

$$\varepsilon_t^N(r_2) = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t^N(r_2) - \nu \cdot \sigma_r^N(r_2)] = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t^N(r_2) + \nu \cdot p_2]. \quad (22)$$

Nyní dosadíme za vnější tečné napětí vztahy, které vyplívají z grafického znázornění polytrop, viz obr. 11.

$$\sigma_t^N(r_2) = 2 \cdot K^N + p_2, \quad \text{respektive} \quad \sigma_t^H(r_2) = 2 \cdot K^H + p_2.$$

Získáme

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \varepsilon_t^N(r_2) - \varepsilon_t^H(r_2) = \frac{1}{E} \cdot [(2 \cdot K^N + p_2) - (2 \cdot K^H + p_2)] = \frac{2}{E} \cdot (K^N - K^H). \quad (23)$$

Hledaný přesah má pak rovnici

$$\Delta r_2 = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot (K^N - K^H), \quad (24)$$

kde konstanty K^H a K^N jsou dány vztahem (15)

$$K^H = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$K^N = \frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}.$$

5.4 Výpočet přesahu pro různé materiály

Z konstrukčních důvodů se můžeme volit rozdílné materiály pro hřídel a pro objímku. To znamená, že $E^N \neq E^H$ a $\nu^N \neq \nu^H$. Pro odvození použijeme rovnici (20)

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \varepsilon_t^N(r_2) - \varepsilon_t^H(r_2).$$

Dosazením do Hookova zákona (21) získáváme

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{1}{E^N} \cdot [2 \cdot K^N + p_2 - \nu^N \cdot \sigma_o^N(r_2) - \nu^N \cdot \sigma_r^N(r_2)] - \frac{1}{E^H} \cdot [2 \cdot K^H + p_2 - \nu^H \cdot \sigma_o^H(r_2) - \nu^H \cdot \sigma_r^H(r_2)].$$

Z předpokladu, že $\sigma_r^N(r_2) = \sigma_r^H(r_2) = -p_2$ a jelikož se jedná o otevřenou nádobu, kde $\sigma_o^N(r_2) = \sigma_o^H(r_2) = 0$ dostáváme

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{E^H \cdot [2 \cdot K^N + p_2 + \nu^N \cdot p_2] - E^N \cdot [2 \cdot K^H + p_2 + \nu^H \cdot p_2]}{E^H \cdot E^N}.$$

Odkud již vyjádříme přesah

$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E^H \cdot E^N} \cdot [2 \cdot (E^H \cdot K^N - E^N \cdot K^H) + p_2 \cdot [E^H \cdot (1 + \nu^N) - E^N \cdot (1 + \nu^H)]]. \quad (25)$$

5.5 Nalisování zastudena

U nalisování zastudena dochází k poškození styčných ploch, část povrchu se strhne. Proto se pro tento způsob nalisování určuje přídavek materiálu, který se může během procesu strhnout, aniž by došlo ke zmenšení přesahu pod hodnotu Δd_{min} . Pro minimální výrobní přesah platí

$$\Delta d'_{min} = \Delta d_{min} + 5,4 \cdot (R_a^N + R_a^H),$$

kde R_a je aritmetická odchylka povrchu. Hodnoty R_a volíme dle následující tabulky 1.

způsob nalisování	d [mm]	R_a [μm]	
		hřídel	náboj
zastudena	<50	0,1	0,2
		0,4	0,8
		0,8	1,6
	50 až 120	0,8	1,6
	>120	1,6	1,6
zatepla	<250	1,6	1,6
	>250	1,6	3,2

Tabulka 1 - Doporučené hodnoty R_a [3]

5.6 Nalisování zatepla

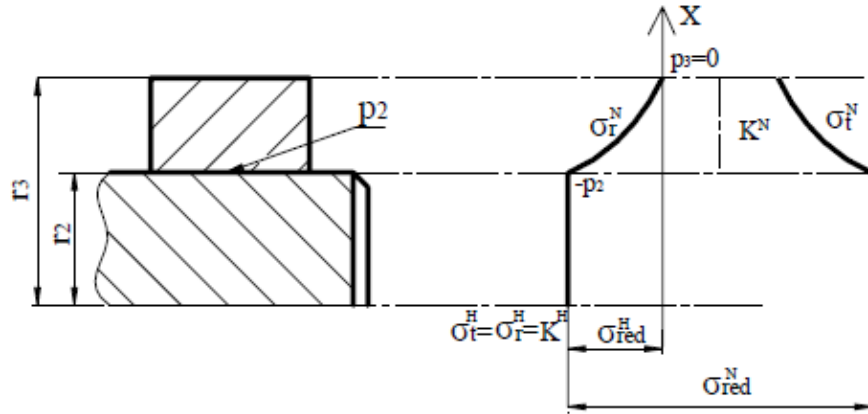
U tohoto typu nalisování nedochází ke ztrátě materiálu, proto $\Delta d'_{min} = \Delta d_{min}$. U nalisování za tepla se náboj zahřeje, kdy dojde ke zvětšení průměru díry Δd_N . Hřídel se naopak chladí, aby došlo ke zmenšení průměru hřídele Δd_H . Teplota, o kterou součást ochladit, případně ohřát je dána vztahem

$$\Delta d_{N,H} = d \cdot \alpha \cdot \Delta T,$$

kde ΔT je hledaný rozdíl teplot a α je tepelný součinitel délkové roztažnosti.

6 Náboj na hřídeli

Využitím teorie nalisovaných nádob se dají řešit úlohy nalisování, kdy hřídel i náboj jsou uvažovány jako otevřené nádoby. Rozložení napětí je patrné z obr. 14.



Obrázek 14 - rozložení napětí po nalisování

Dosazením do vztahu (24) pro náš konkrétní případ ($r_1 = 0, p_3 = 0$) dostáváme:

$$\Delta r_2 = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot \left[\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - (-p_2) \right]$$

Z této rovnice vyjádříme tlak na styčné ploše

$$p_2 = \frac{\Delta r_2 \cdot E}{2 \cdot r_2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right]. \quad (26)$$

Vyjádříme konstanty K a C, viz vztahy (15) a (16).

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{0 \cdot 0^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - 0^2} = -p_2,$$

$$C = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = (0 - p_2) \cdot \frac{0^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - 0^2} = 0.$$

Pro plný hřídel se rovnice hlavních napětí po dosazení těchto konstant do vztahů (11) a (12) zjednoduší na

$$\sigma_r(x) = K - \frac{C}{x^2} = -p_2 - \frac{0}{x^2} = -p_2,$$

$$\sigma_t(x) = K + \frac{C}{x^2} = -p_2 + \frac{0}{x^2} = -p_2.$$

Zde průběhy hlavních napětí jsou konstantní a jsou rovny zápornému tlaku na nalisování. Jestliže známe tlak p_2 , rozměry hřídele a náboje, pak pevnostní podmínky dle hypotézy τ_{max} mají tvar

1. Pro hřídel:

$$\sigma_{red}^H = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 0 - \sigma_r^H = -(-p_2) = p_2$$

2. Pro Náboj:

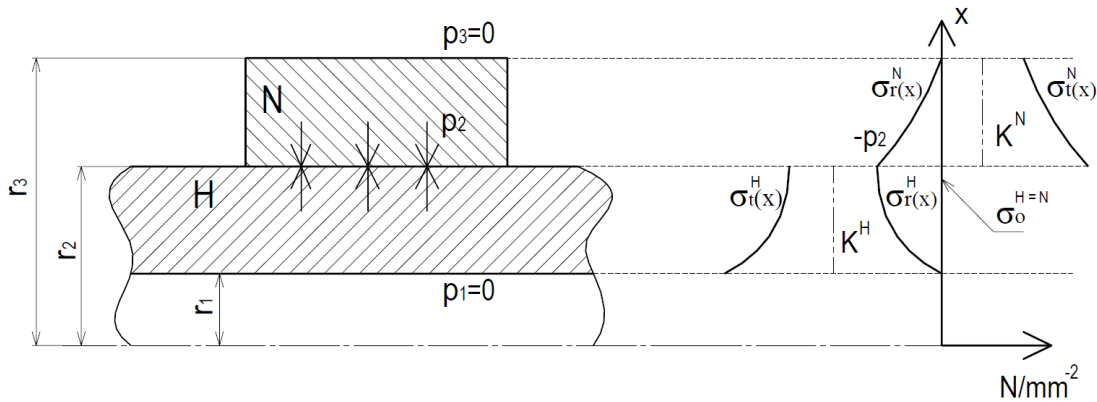
$$\sigma_{red}^N = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_t^N(r_2) - \sigma_r^N(r_2) = (2 \cdot K^N + p_2) - (p_2) = 2 \cdot \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + 2 \cdot p_2$$

$$\sigma_{red}^N = 2 \cdot \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot p_2$$

Je patrné, že náboj má redukované napětí dle Trescy větší než hřídel.

7 Náboj na dutém hřídeli

Schéma náboje na dutém hřídeli a průběhy hlavních napětí jsou na obr. 15.



Obrázek 15 - Nalisování s dutým hřídelem, průběh hlavních napětí

Uvažujeme statické namáhání, kdy nalisování je namáháno styčným tlakem p_2 . Zároveň platí, že p_3, p_1, σ_o^H a $\sigma_o^N = 0$. Tyto úvahy dosadíme do rovnic (14) a (15) a dostáváme konstanty K a C

$$K^H = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad K^N = \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

$$C^H = -p_2 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad C^N = -p_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

Dosazením těchto konstant do rovnic (12) a (13) dostáváme průběhy hlavních napětí
Pro hřídel:

$$\sigma_r^H = K^H - \frac{C^H}{x^2} = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_2 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad \text{pro } x \in \langle r_1, r_2 \rangle$$

$$\sigma_t^H = K^H + \frac{C^H}{x^2} = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad \text{pro } x \in \langle r_1, r_2 \rangle$$

Pro objímku:

$$\sigma_r^N = K^N - \frac{C^N}{x^2} = \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + p_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad \text{pro } x \in \langle r_2, r_3 \rangle$$

$$\sigma_t^N = K^N + \frac{C^N}{x^2} = \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - p_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad \text{pro } x \in \langle r_2, r_3 \rangle$$

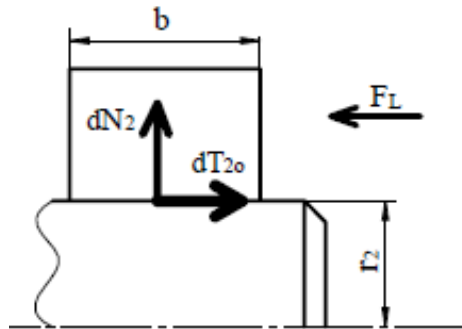
Dosazením konstant K do rovnice (24) pak dostáváme rovnici pro přesah

$$\Delta r_2 = \frac{2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(-\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) = \frac{2 \cdot r_2^3 \cdot p_2}{E} \cdot \left(\frac{1}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \right).$$

8 Silové poměry a únosnost spoje

8.1 Osová síla

Lisovací síla F_L podle obr.16 je určena konstantní plochou A a konstantním tlakem p_2 a součinitelem tření.



Obrázek 16 - lisovací síla, rozložení sil

Mezi dvěma nalisovanými částmi se indukuje tlak p_2 , který vyvolá na elementární ploše dA_2 normálovou sílu dN_2 , kterou lze vyjádřit jako

$$dN_2 = p_2 \cdot dA_2$$

Integrací pak získáme N_2

$$\int_0^{N_2} dN_2 = p_2 \cdot r_2 \cdot b \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$N_2 = 2 \cdot p_2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot b.$$

Využitím rovnice (26) za p_2 dosadíme

$$p_2 = \frac{\Delta r_2 \cdot E}{2 \cdot r_2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right]$$

$$N_2 = \Delta r_2 \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot b \cdot \pi.$$

Jestliže známe rozměry nalisovaného spoje, přesah Δr_2 , materiálovou konstantu E , a osový součinitel tření f_o , pak lisovací síla F_L má tvar

$$F_L = T_{2o} = N_2 \cdot f_o = 2 \cdot p_2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot b \cdot f_o. \quad (27)$$

Po úpravě

$$F_L = \Delta r_2 \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_o \cdot b \cdot \pi. \quad (28)$$

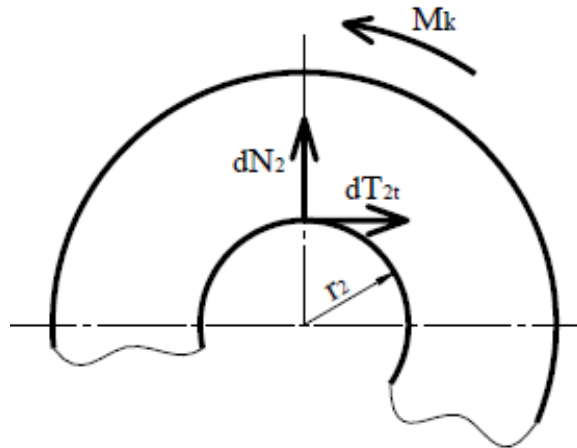
Rozmezí lisovací síly se pak určí podle přesahu Δr_2 , který se zjistí dle navrženého uložení hřídele na náboji.

$$F_{Lmin} = \Delta r_{2min} \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_o \cdot b \cdot \pi$$

$$F_{Lmax} = \Delta r_{2max} \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_o \cdot b \cdot \pi$$

8.2 Kroutící moment

Kroutící moment M_k nás zajímá tečná síla ve směru tečny k oběma stykovým plochám, viz obr. 17. M_k se vyjádří jako tečná síla vynásobená ramenem r_2 :



Obrázek 17 – kroucí moment, rozložení sil

$$M_k = T_{2t} \cdot r_2 = N_2 \cdot f_t \cdot r_2 = 2 \cdot p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot b \cdot f_t \cdot \quad (29)$$

Dosazením za p_2 pak dostáváme

$$M_K = \Delta r_2 \cdot r_2 \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_t \cdot b \cdot \pi. \quad (30)$$

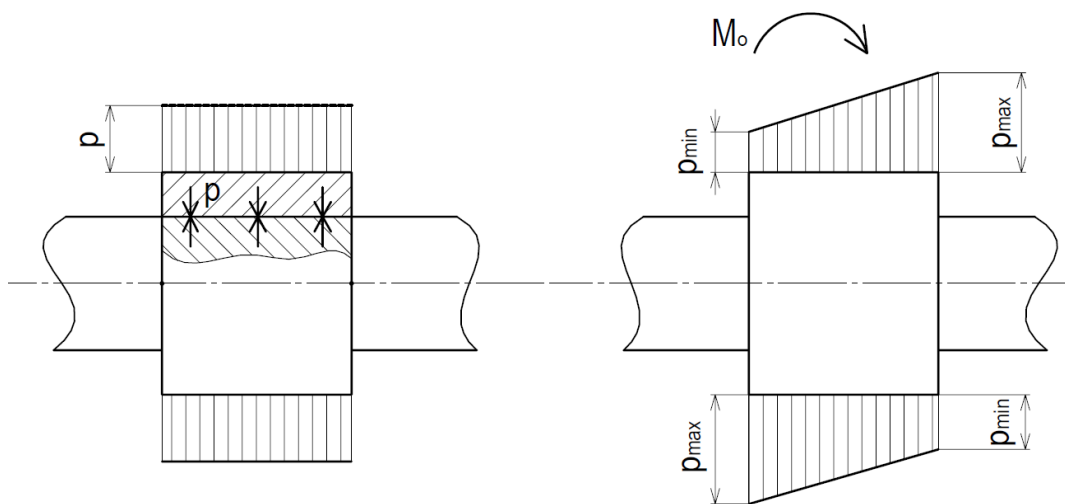
Obdobně jako u lisovací síly F_L , rozmezí kroucího momentu se určí podle přesahu Δr_2 , respektive podle rozmezí předepsaného uložení s přesahem.

$$M_{Kmin} = \Delta r_{2min} \cdot r_2 \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_t \cdot b \cdot \pi$$

$$M_{Kmax} = \Delta r_{2max} \cdot r_2 \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_t \cdot b \cdot \pi$$

8.3 Ohybový moment

Přídavné zatížení nalisovaného spoje ohybovým momentem M_o způsobí přerozdělení tlaku na styčné ploše, který byl díky nalisování rozdělen rovnoměrně, viz obr. 18. Přerozdělení tohoto tlaku nemění jeho celkovou hodnotu (obsah plochy pod křivkou je pořád stejný), což znamená, že se nemění ani celková únosnost spoje.



Obrázek 18 - Rozdělení stykového tlaku při zatížení ohybovým momentem

Praktická Část

9 Analytický návrh

V této bakalářské práci se zabýváme analýzou modelu nalisovaného na dutém trubkovém hřídeli, který má v praxi hojně využití.

- Snížení hmotnosti hřídele

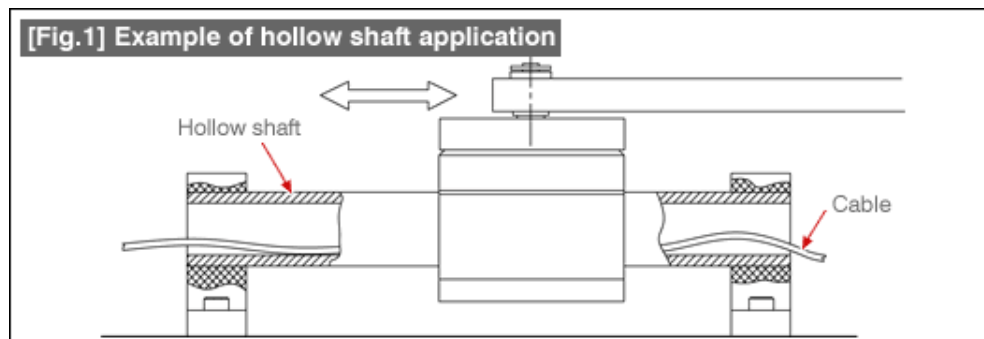
Hmotnost hřídelů ovlivňuje hmotnost pohonu. Snižování nákladů, úspory energie a snížení teploty motoru lze dosáhnout tím, že motor je co možná nejmenší. Duté hřídele však vytvářejí hlasitější zvuky, když jsou vystaveny pohybu ložisek, ve srovnání s plnými hřídeli [6].

- Chlazení hřídele

Vlivem tření se hřídel ohřívá, proto je výhodné ho chladit. Chladícím médiem v díře může být např. voda nebo vzduch.

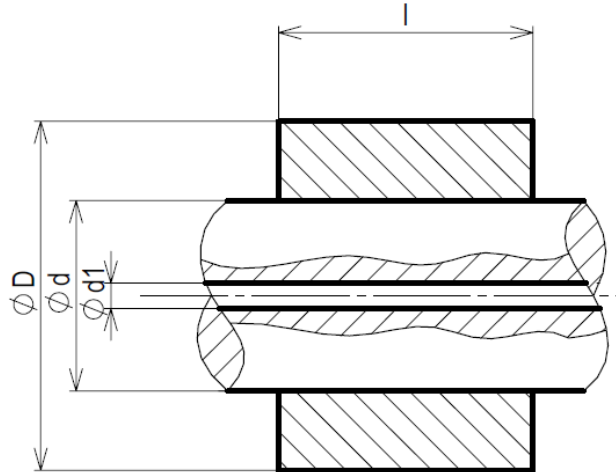
- Elektrické a další instalatérské součásti

Např. kabely motoru a přívod vzduchu z válce mohou být vedeny přes hřídelový otvor v případech, kdy kryty a další součásti brání cestám, viz obr. 29.



Obrázek 29 - Příklad použití dutého náboje [6]

9.1 Model – vstupní parametry

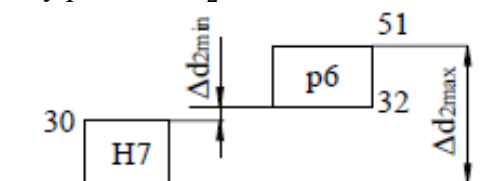


Obrázek 20 - Popis výpočtového modelu

Pro analýzu volíme konstrukci dle obr. 20. Průměr hřídele $\varnothing d = 30$ mm a průměr náboje $\varnothing D$ volíme podle vztahu $\varnothing D = (1,8 \div 2) \cdot d$, $\varnothing D = 55$ mm. Délku nalisování stanovíme dle vztahu $l = (1 \div 1,5) \cdot d$ [3], $l = 40$ mm. Průměr díry v hřídeli volíme $\varnothing d_1 = 2$ mm. Tlak v díře uvažujeme pouze atmosférický. Dále volíme uložení náboje na hřídeli s přesahem H7/p6 a materiál obou součástí ocel 14 220. Bezpečnost k mezi kluzu uvažujeme $k_k = 1,5$.

9.2 Určení hlavních napětí

Nejdříve určíme mezní hodnoty přesahu Δr_2 :



$$\Delta d_{2min} = 32 - 30 = 2 \mu m$$

$$\Delta r_{2min} = \frac{\Delta d_{2min}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \mu m$$

$$\Delta d_{2max} = 51 - 0 = 51 \mu m$$

$$\Delta r_{2max} = \frac{\Delta d_{2min}}{2} = \frac{51}{2} = 25,5 \mu m$$

V dalším kroku pevnostně kontrolujeme nalisování podle energetické hypotézy HMH. Jelikož se zabýváme analýzou napjatosti, počítáme s maximálním přesahem Δr_{2max} . Využitím rovnice (26) stanovíme tlak na stykových plochách p_2 .

$$p_2 = \frac{\Delta r_2 \cdot E}{2 \cdot r_2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right]$$

$$p_2 = \frac{0,0255 \cdot 210 \cdot 10^5}{2 \cdot 15} \cdot \left[1 - \left(\frac{15}{27,5} \right)^2 \right] = 116,71 \text{ MPa.}$$

Dle vztahů (14) a (15) určíme konstanty K^N , C^N , K^H a C^H

$$K^H = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{0 \cdot 1^2 - 116,71 \cdot 15^2}{15^2 - 1^2} = -117,2 \text{ N/mm}^{-2}$$

$$C^H = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = (0 - 116,71) \cdot \frac{15^2}{15^2 - 1^2} = -117,2 \text{ N/mm}^{-2}$$

$$K^N = \frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{116,71 \cdot 15^2}{27,5^2 - 15^2} = 49,4 \text{ N/mm}^{-2}$$

$$C^N = (p_2 - p_3) \cdot \frac{r_3^2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = (116,71) \cdot \frac{27,5^2 \cdot 15^2}{27,5^2 - 15^2} = 37\,378,3 \text{ N/mm}^{-2}.$$

9.3 Pevnostní kontrola dle HMM

Stanovíme hlavní napětí pro energetickou hypotézu.

1) Hřídel

Radiální napětí je dle vztahu (12)

$$\sigma_r^H(x) = K^H - \frac{C^H}{x^2}$$

$$\sigma_r^H(r_1) = -117,2 - \frac{-117,2}{1^2} = 0 \text{ N/mm}^{-2}.$$

Dále vyjádříme tečné napětí dle vztahu (11)

$$\sigma_{teč}^H(x) = K^H + \frac{C^H}{x^2}$$

$$\sigma_{teč}^H(r_1) = -117,2 + \frac{-117,2}{1^2} = -234,4 \text{ N/mm}^{-2}.$$

Osová napětí uvažujeme nulové.

$$\sigma_{os}^H(x) = 0$$

Nyní provedeme pevnostní kontrolu dle vzorce (17)

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_D,$$

$$kde \sigma_D = \frac{\sigma_k}{k} = \frac{590}{1,5} = 393,3 \text{ N/mm}^2.$$

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(-1 + 234,4)^2 + (-234,4 - 0)^2 + (0 + 0)^2} \leq 393,3$$

$$\sigma_{red} = 232,9 \leq 393,3$$

Pevnostní kontrola dle energetické hypotézy pro hřídel s dírou vyhovuje. Výsledná bezpečnost pro hřídel má hodnotu

$$k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}} = \frac{590}{232,9} = 2,53.$$

2) Náboj

Nyní provedeme stejným způsobem kontrolu náboje

$$\sigma_{rad}^N(x) = K^N - \frac{C^N}{x^2}$$

$$\sigma_{rad}^H(r_2) = 49,4 - \frac{37\,378,3}{15^2} = -116,71 \text{ N/mm}^{-2}.$$

Radiální napětí na poloměru r_2 je zde rovno tlaku p_2 na nalisování. Dále vyjádříme tečné napětí

$$\sigma_{teč}^N(x) = K^N + \frac{C^N}{x^2}$$

$$\sigma_{teč}^H(r_1) = 49,4 + \frac{37\,378,3}{15^2} = 215,5 \text{ N/mm}^{-2}.$$

Osové napětí uvažujeme nulové.

$$\sigma_{os}^N(x) = 0.$$

Nyní provedeme pevnostní kontrolu dle vztahu pro HMM

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_D,$$

kde $\sigma_D = \frac{\sigma_k}{k} = \frac{590}{1,5} = 393,3 \text{ N/mm}^2.$

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(-116,7 - 215,5)^2 + (215,5 - 0)^2 + (0 + 116,7)^2} \leq 393,3$$

$$\sigma_{red} = 291,9 \leq 393,3.$$

Pevnostní kontrola dle energetické hypotézy pro náboj vyhovuje. Výsledná bezpečnost náboje má hodnotu

$$k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}} = \frac{590}{291,9} = 2,02.$$

9.4 Únosnost nalisovaného spoje

Určíme rozsah lisovací síly F_L , kterou můžeme nalisovat objímku na hřídel, viz rovnice (28)

$$F_{Lmax} = \Delta r_{2max} \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_o \cdot l \cdot \pi$$

$$F_{Lmax} = 25,5 \cdot 10^{-3} \cdot 210000 \cdot \left[1 - \left(\frac{15}{27,5} \right)^2 \right] \cdot 0,15 \cdot 40 \cdot \pi = 70\,907,9 \text{ N.}$$

$$F_{Lmin} = \Delta r_{2min} \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_o \cdot l \cdot \pi$$

$$F_{Lmin} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 210000 \cdot \left[1 - \left(\frac{15}{27,5} \right)^2 \right] \cdot 0,15 \cdot 40 \cdot \pi = 2\,780,7 \text{ N.}$$

$$F_L \in \langle 2,78; 70,9 \rangle \text{ kN}$$

Dále určíme rozsah kroutícího momentu M_k , který je nalisování schopné přenést, viz rovnice (30).

$$M_{Kmax} = \Delta r_{2max} \cdot r_2 \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_t \cdot l \cdot \pi$$

$$M_{Kmax} = 25,5 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 210000 \cdot \left[1 - \left(\frac{15}{27,5} \right)^2 \right] \cdot 0,15 \cdot 40 \cdot \pi = 1\,063,61 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

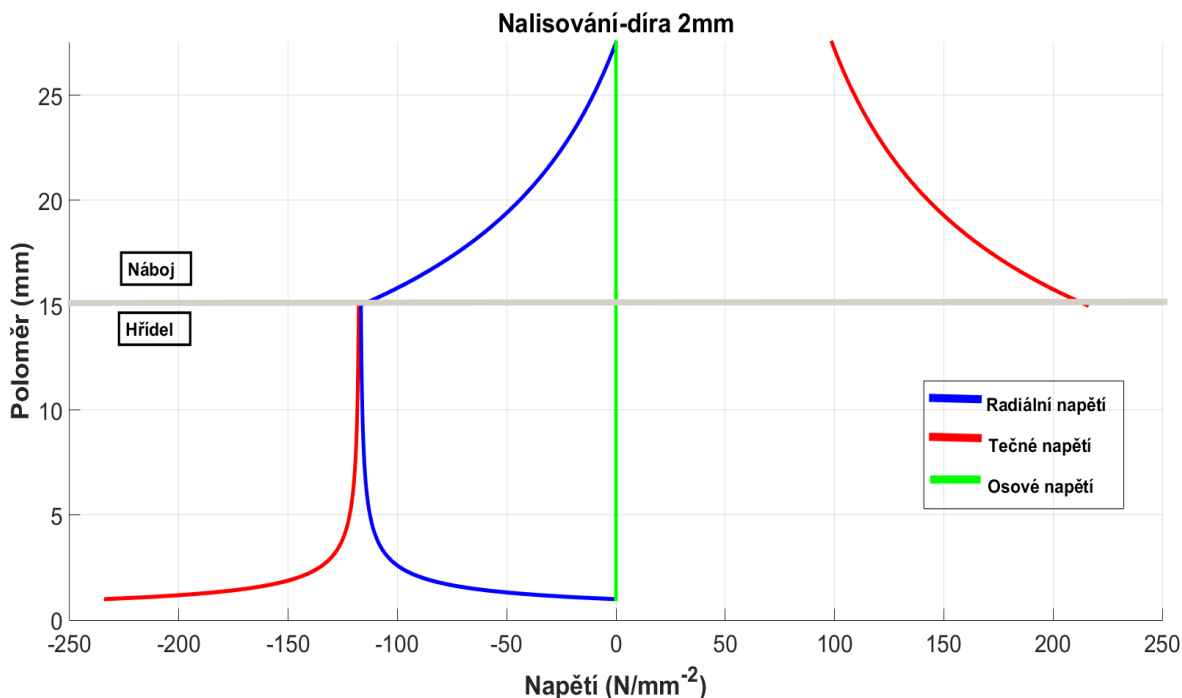
$$M_{Kmin} = \Delta r_{2min} \cdot r_2 \cdot E \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \cdot f_t \cdot l \cdot \pi$$

$$M_{Kmin} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 210000 \cdot \left[1 - \left(\frac{15}{27,5} \right)^2 \right] \cdot 0,15 \cdot 40 \cdot \pi = 41,71 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

$$M_K \in \langle 41,7; 1\,063,6 \rangle \text{ N} \cdot \text{m}$$

9.5 Grafické znázornění hlavních napětí

Průběhy hlavních napětí jsou na obr. 21.



Obrázek 21 - Analytický výpočet – průběhy hlavních napětí

10 Numerické experimenty v softwaru Abaqus

Pro ověření konstrukčních úprav nalisovaného spoje použijeme metodu konečných prvků (MKP). FS ČVUT disponuje studentskými licencemi pro MKP software – Abaqus SIMULIA, který uijeme v této bakalářské práci. Simulace nalisování se nejvíce podobá radiálnímu nalisování za tepla, kdy hřídel je pevná součást a náboj na začátku simulace má shodnou stykovou plochu, která penetruje do hřídele až na požadovaný přesah. K realizaci výpočtových modelů byl použit manuál CAE Abaqus User's Guide (6.14) [4].

10.1 Návrh modelu

Při řešení tohoto modelu náboje nalisovaného na hřídeli využijeme skutečnosti, že model je rotačně symetrický a lze jej řešit ve 2D. Toto výrazně zrychluje výpočty v Abaqusu a umožňuje použít jemnější síť, čímž se získá větší přesnost ve výpočtech. Uvažujeme pouze Hookovský lineárně elastický materiál, což znamená, že při simulacích nedojde k plastizaci materiálu.

Uvažujeme vstupní parametry:

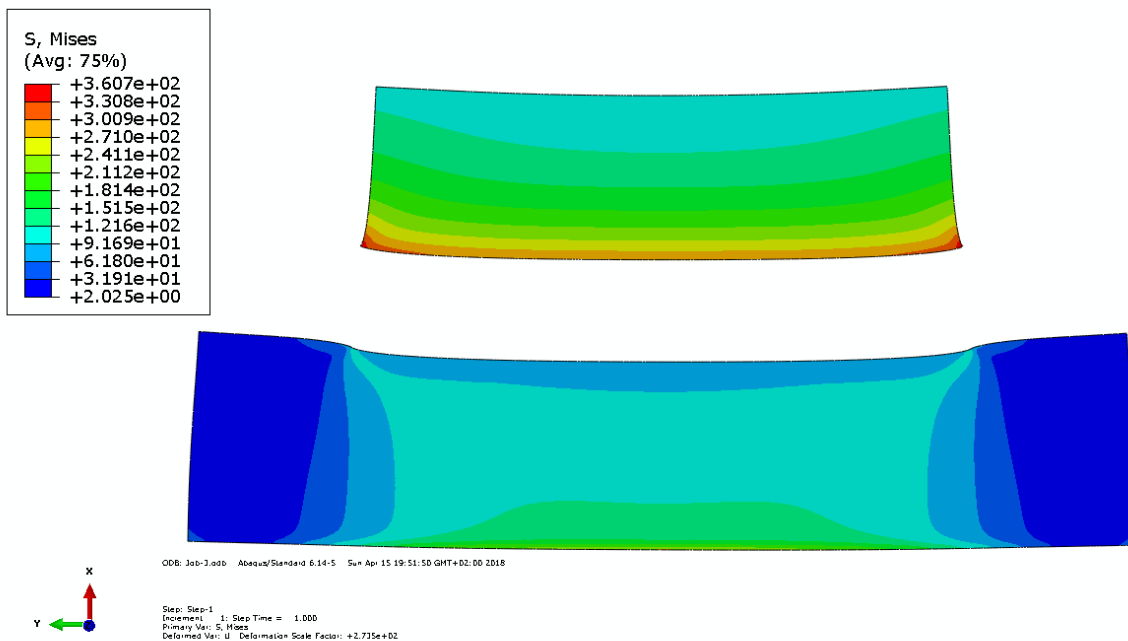
- Rozměry modelu (shodné s analytickým řešením, obr. 20)
- Model pružnosti v tahu $E = 210000$ MPa
- Poissonovo číslo $\nu = 0.3$
- Součinitel tření $f = 0.15$
- Přesah $\Delta r_2 = 0.0255$ mm

Síť volíme co nejvíce jemnou. Předpokládáme, že čím více jemná síť, tím může být větší přesnost výsledků. Výpočet modelu s jemným vysítováním je ovšem časově náročný. Pro tento model volíme vysítování s velikostí prvku 0,2, s tím, že na důležitých místech, jako jsou styčné plochy nalisování nebo na vnitřním poloměru r_1 volíme vysítování ještě jemnější – min. velikost prvku =

0,02. Takto zvolená síť zajišťuje požadovanou přesnost, přičemž výpočty trvají rozumnou dobu. Pro kontrolu porovnáme výsledky zvoleného modelu s výsledky modelu, který má vysíťování s velikostí prvku 0,1. Rozdíl dat těchto dvou modelů je jen nepatrný, viz příloha 1.

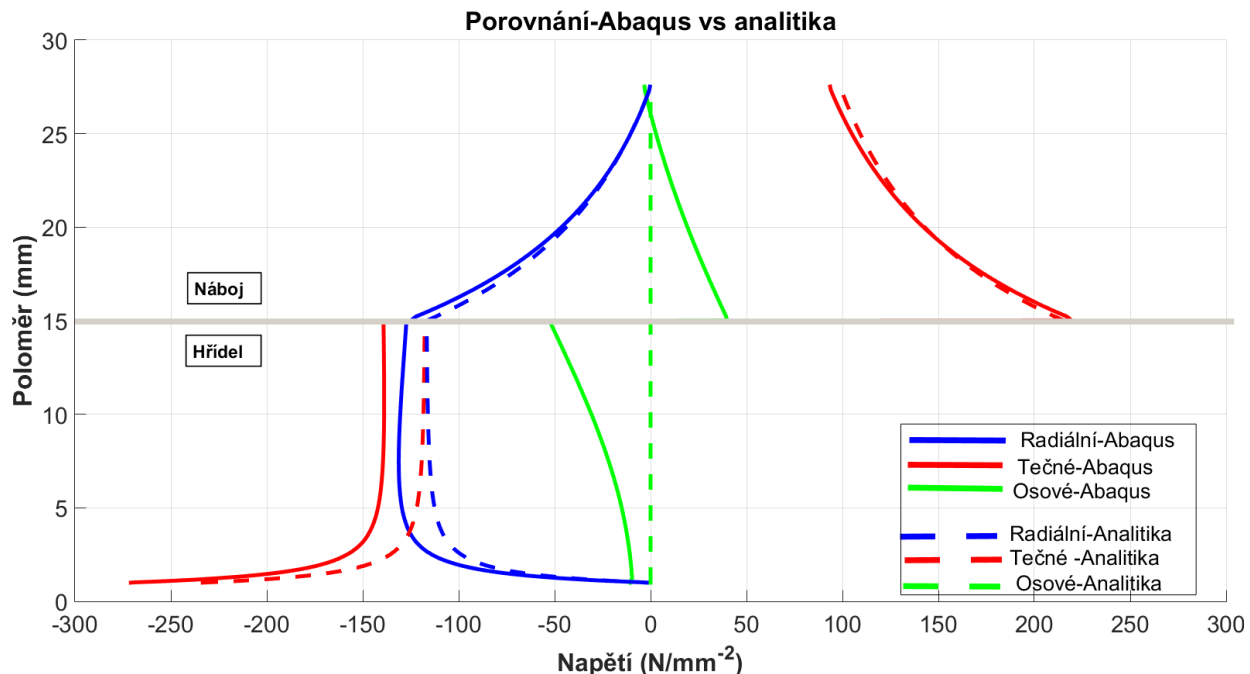
10.2 Průběhy hlavních napětí

Výsledky z Abaqusu jsou na obr. 22 v osovém řezu v podobě redukovaného napětí dle HMM.



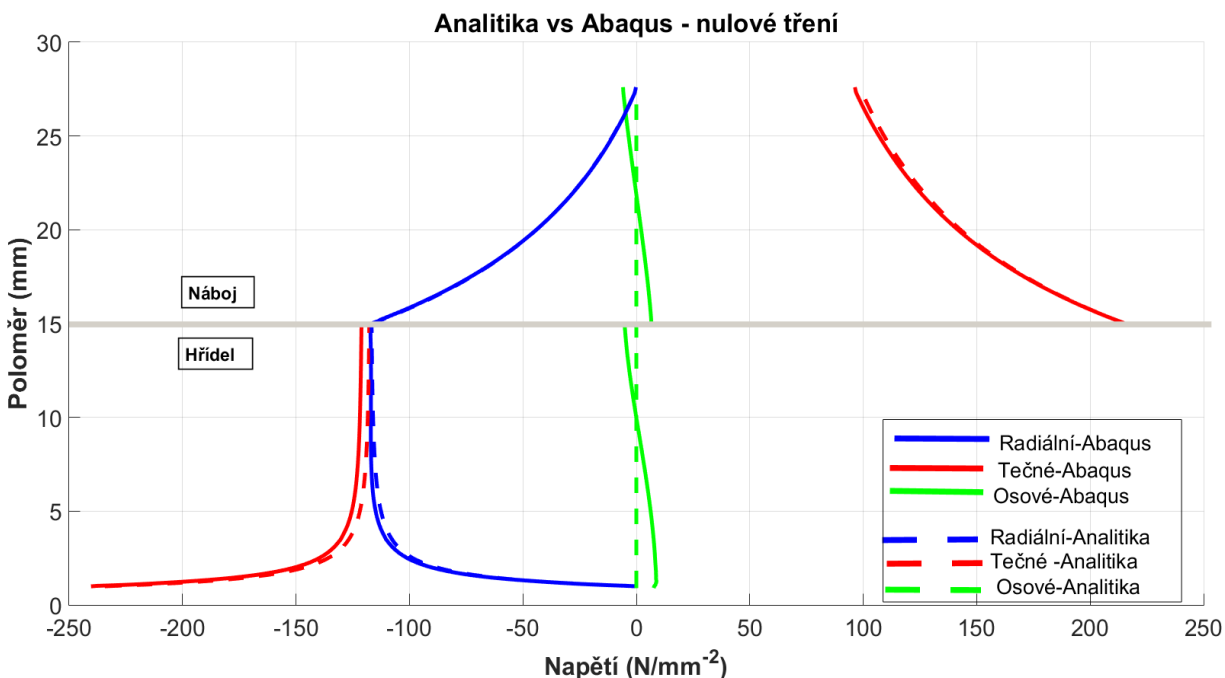
Obrázek 22 - Nalisování, díra v hřídeli 2 mm. Znáznornění redukovaného napětí (dle HMM), deformace zvětšena 250x

Průběhy hlavních napětí dokumentujeme v grafech na obr.23 a následně je porovnáváme s analytickým řešením. Data z analýzy MKP pro graf na obr. 23 jsou uvedena na cestě v modelu nalisování, která je definována úsečkou vedoucí v podílném středu objímky z vnitřního povrchu hřídele na vnější povrch objímky po přísmce kolmé na osu symetrie modelu nalisování.



Obrázek 23 - Díra 2 mm, srovnání hlavních napětí z Abaqusu s analytickým výpočtem

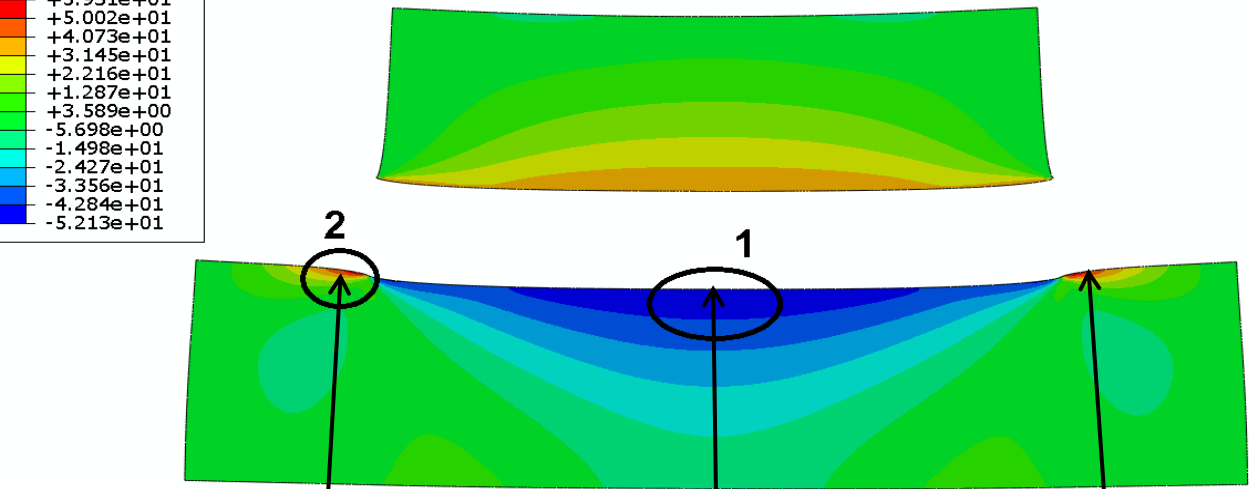
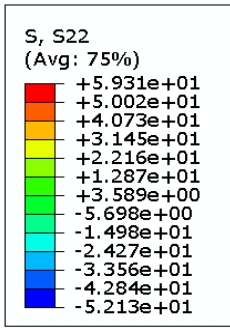
Na obr. 23 je možné u dat z Abaqusu pozorovat posunutí polytrop tečného a radiálního napětí na hřídeli. Zároveň si můžeme všimnout, že tyto polytropy na poloměru $r = 15\text{mm}$ nekonvergují. Rozdíl mezi modelem v Abaqusu a analytickým řešením je pravděpodobně ten, že v Abaqusu máme nastaveno tření $f = 0,15$, zatímco v analytickém výpočtu tření neuvažujeme. Sestrojíme další graf, kde v MKP modelu zvolíme nulové tření. Výsledek je na obr. 24, kde již můžeme konstatovat jen malý rozdíl průběhů napětí vůči analytickému řešení.



Obrázek 24 – Porovnání hlavních napětí z Abaqusu (nulové tření) s analytickým výpočtem

Z analýzy uvedené na obr. 23 je dále patrné, že osově napětí vzniklé při nalisování není nulové, jak se uvažuje v teorii pro silnostěnné otevřené nádoby. Maximum hodnot osově napětí dosahuje na kontaktních površích ve středu objímky nalisování a u hříděle vedle nalisovaného náboje. Toto osově napětí sice neovlivní výpočet redukovaného napětí podle Trescovi hypotézy, kde se σ_2 zanedbává, viz (15). Ovšem při použití komplexnější energetické hypotézy už toto osově napětí vliv má, viz (16). Toto osově napětí má také vliv na provozní ohybové napětí a ovlivňuje tedy i výpočet únavy obou nalisovaných součástí. Místa s maximálními hodnotami osově napětí jsou vyznačena na obrázcích 25 a 26, kde místo 1 je místo s největším tlakovým osovým napětím a místo 2 s největším tahovým napětím. Tyto osově napětí se připojí k napětí ohybovému a změní tak výsledné namáhání nalisování v ohybu.

ČVUT FS

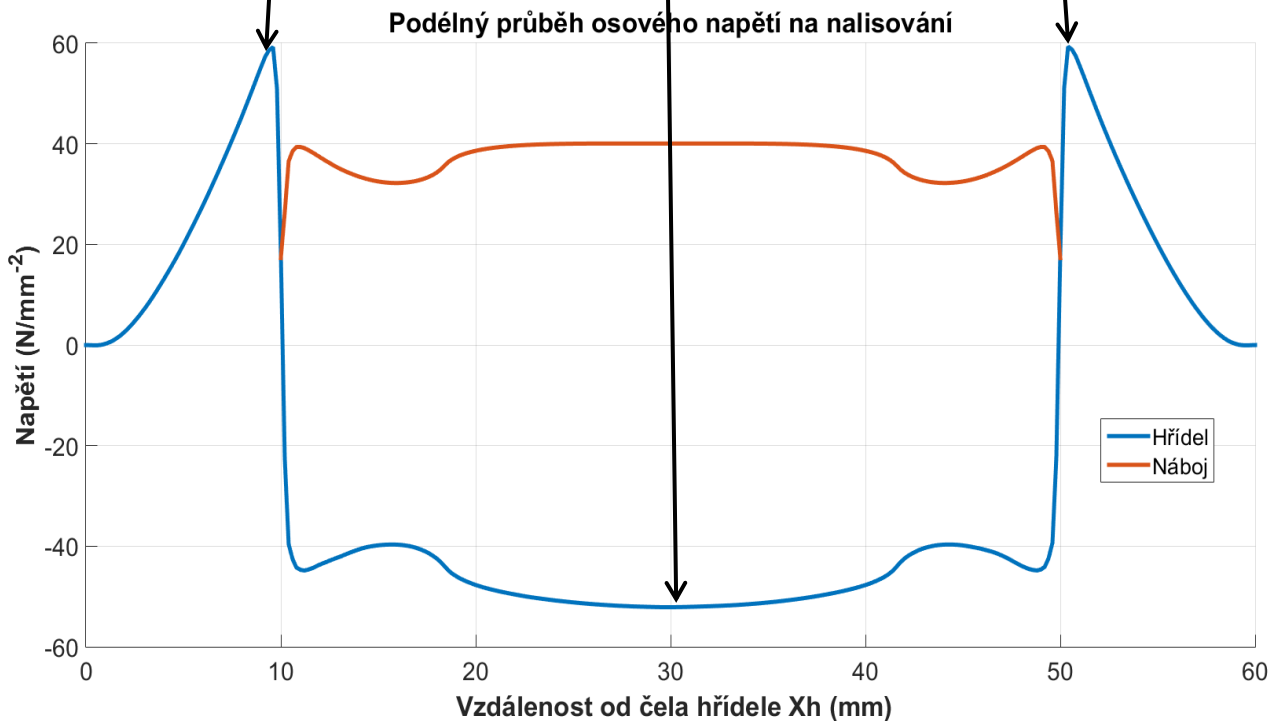


ODB: Job-3.odt Abaqus/Standard 6.14-5 Sun Apr 15 19:51:50 GMT+02:00 2018

Step: Step-1
Increment: 1; Step Time = 1.000
Primary Var: S, S22
Deformed Var: U; Deformation Scale Factor: +2.500e+02



Obrázek 25 – Osově napětí na nalisování. Deformace zvětšena 250x



Obrázek 26 - Podélný průběh osového napětí

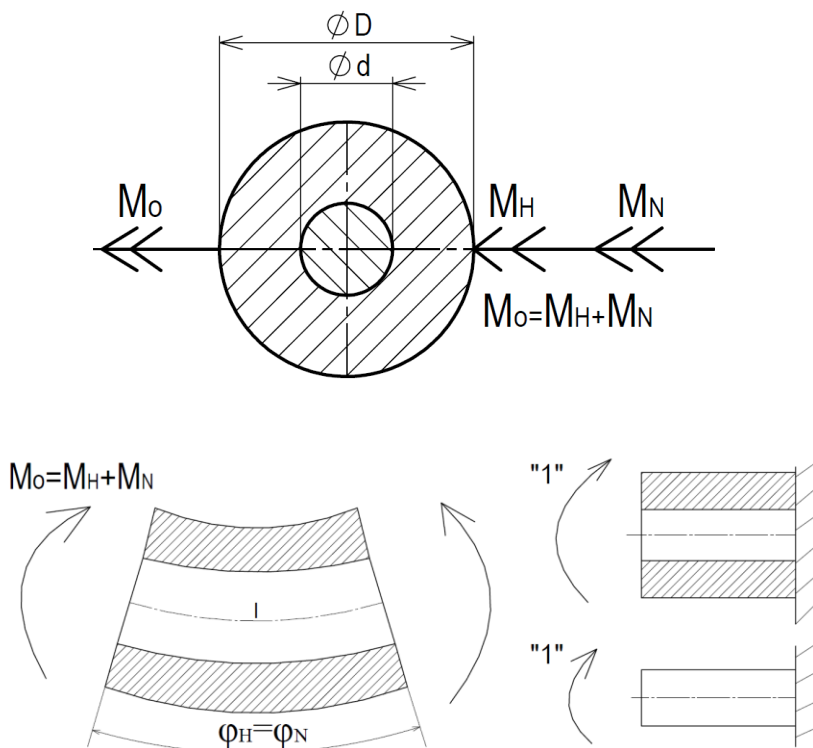
11 Kombinované namáhání – ohyb + tah/tlak

Pozn.: Následující část této bakalářské práce se věnuje úvahám o osovém napětí. Pro zjednodušení odvození a grafických výstupů užitíme nalisování s plným hřídelem.

Analyzujeme, jak se změní průběh výsledného namáhání v ohybu vlivem nenulového osového napětí pro dva vyznačené extrémy (MÍSTO 1 a MÍSTO 2). Zvolíme ohybový moment M_o , který působí na hřídel. Tento moment se na nalisování dle obr. 27 rozdělí mezi moment na hřídeli M_H a moment na náboji M_N .

$$M_o = M_H + M_N \quad (31)$$

V jakém poměru se tyto momenty rozdělí určujeme z podmínky shodného potočení náboje a hřídele dle obr. 27.



Obrázek 27 – Znárodnění momentů na nalisování, podmínka natočení a jednotkový moment pro Mohrův integrál

Využijeme Mohrův integrál

$$\varphi_H = \varphi_N$$

$$\varphi = \frac{1}{E} \cdot \int_{(l)} \frac{M_o(x) \cdot m_o(x)}{J_o(x)} \cdot dx$$

, zde $m_o(x)$ je jednotkový moment a $J_o(x)$ je polární kvadratický moment průřezu v ohybu.

$$\int_0^l \frac{M_H \cdot 1}{E \cdot J_H} dx = \int_0^l \frac{M_N \cdot 1}{E \cdot J_N} dx.$$

Po integraci a vykrácení l a E vyjde

$$\frac{M_d}{J_d} = \frac{M_D}{J_D}.$$

Odkud si můžeme vyjádřit poměr momentů jako

$$\frac{M_N}{M_H} = \frac{J_N}{J_H}. \quad (32)$$

Podle obr. 27 je hřídel na nalisování namáhán ohybovým napětím o velikosti

$$\sigma_{oH} = \frac{M_H}{J_H} \cdot r_H \quad J_H = \frac{\pi \cdot d^4}{64},$$

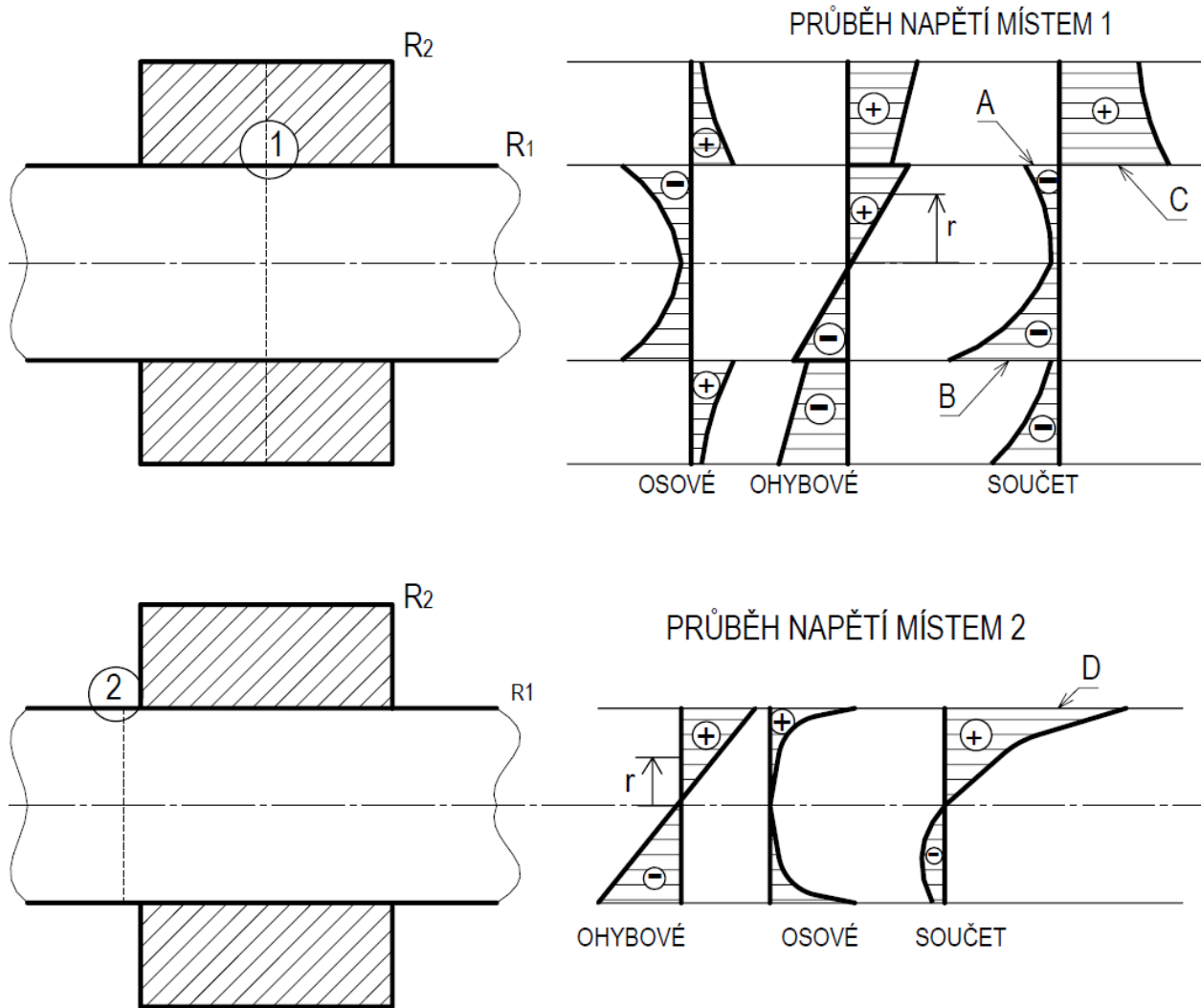
kde r_H je poloměr vlákna na hřídeli, a J_H je polární kvadratický moment průřezu hřídele v ohybu.

Náboj je namáhán ohybovým napětím o velikosti

$$\sigma_{oN} = \frac{M_N}{J_N} \cdot r_N \quad J_N = \frac{\pi \cdot D^4}{64} - \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right],$$

kde r_N je poloměr vlákna na náboji, a J_N je polární kvadratický moment průřezu náboje v ohybu.

Průběhy osového a ohybového napětí pro místa 1 a 2 uvádí obr. 28. *Pozn.: průběhy osového napětí na obr. 28 byly určeny z obr. 25.*



Obrázek 28 – Průběhy napětí dvěma zkoumanými místy

Místo 1 na hřídeli, na obr. 28 označeno jako A – namáhané kladným ohybem a tlakem. Celkové napětí má tvar

$$\sigma_{celk} = \sigma_{ohyb} - \sigma_{osov\acute{e}_hřidel} = \frac{M_H}{J_H} \cdot R_1 - \sigma_{osov\acute{e}_hřidel} .$$

Průběh místem 1, na hřídeli, na obr. 28 označeno jako B – namáhané záporným ohybem a tlakem. Celkové napětí má tvar

$$\sigma_{celk} = -\sigma_{ohyb} - \sigma_{osov\acute{e}_hřidel} = -\frac{M_H}{J_H} \cdot R_1 - \sigma_{osov\acute{e}_hřidel} .$$

Místo 1 na náboji, na obr. 28 označeno jako C – namáhané kladným ohybem a tahem. Celkové napětí má tvar

$$\sigma_{celk} = \sigma_{ohyb} + \sigma_{osov\acute{e}_n\acute{a}boj} = \frac{M_N}{J_N} \cdot R_1 + \sigma_{osov\acute{e}_n\acute{a}boj}$$

Místo 2, na obr. 28 označeno jako D – namáhané kladným ohybem a tahem. Celkové napětí má tvar

$$\sigma_{celk} = \sigma_{ohyb} + \sigma_{osov\acute{e}} = \frac{M_H + M_N}{J_H} \cdot R_1 + \sigma_{osov\acute{e}}$$

Místo 2 (označeno jako D) bude nejvíce namáháno, protože se zde ohybový moment rozkládá na napětí jinak než při nalisování, viz rovnice (1) a (2). Zároveň se v tomto místě k ohybovému napětí přičítá tahové napětí. Výsledný součet těchto dvou napětí je poměrně velké kladné normálové osové napětí.

11.1 Určení momentů M_H a M_N

Pro dokumentaci chování řešeného spoje si výchozí ohybový moment volíme $M_o = 200 Nm$. Tento moment se na nalisování rozdělí mezi hřídel a náboj dle vztahů (31) a (32)

$$M_o = M_H + M_N$$

$$\frac{M_N}{M_H} = \frac{J_N}{J_H}$$

Průřezové charakteristiky hřídele a náboje uvažujeme

$$J_H = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 30^4}{64} = 39\,760 \text{ mm}^4$$

$$J_N = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{\pi \cdot 55^4}{64} \cdot \left[1 - \left(\frac{30}{55}\right)^4\right] = 409,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$

Pak momenty jsou

$$\frac{M_N}{M_H} = \frac{J_N}{J_H} = \frac{409,4 \cdot 10^3}{39\,760} = 10,3.$$

$$M_N = 10,3 \cdot M_H$$

$$M_o = M_H + M_N$$

$$200 = M_H + 10,3M_H$$

$$M_H = 17,7 \text{ Nm}$$

$$M_N = 200 - 17,7 = 182,3 \text{ Nm}.$$

11.2 Celkové namáhání v místech 1 a 2

Místo 1 – hřídel, na obr. 28 označeno jako A

$$\sigma_{celk} = \sigma_{ohyb} + \sigma_{osov\acute{e}_h\acute{r}\acute{i}del} = \frac{M_H}{J_H} \cdot R_1 + \sigma_{osov\acute{e}_h\acute{r}\acute{i}del}$$

$$\sigma_{celk} = \frac{17\,700}{39\,790} \cdot 30 - 52,3 = -38,94 \text{ N/mm}^2$$

Místo 1 – hřídel, na obr. 28 označeno jako B

$$\sigma_{celk} = -\sigma_{ohyb} - \sigma_{osové_{hřidel}} = -\frac{M_H}{J_H} \cdot R_1 - \sigma_{osové_{hřidel}}$$

$$\sigma_{celk} = -\frac{17\,700}{39\,790} \cdot 30 - 52,3 = -65,64 \text{ N/mm}^2$$

Místo 1 – náboj, na obr. 28 označeno jako C

$$\sigma_{celk} = \sigma_{ohyb} + \sigma_{osové_{náboj}} = \frac{M_N}{J_N} \cdot R_1 + \sigma_{osové_{náboj}}$$

$$\sigma_{celk} = \frac{182\,300}{409\,400} \cdot 30 + 35,6 = 49,95 \text{ N/mm}^2$$

Místo 2, na obr. 28 označeno jako D

$$\sigma_{celk} = \sigma_{ohyb} + \sigma_{osové} = \frac{M_H + M_N}{J_H} \cdot R_1 + \sigma_{osové}$$

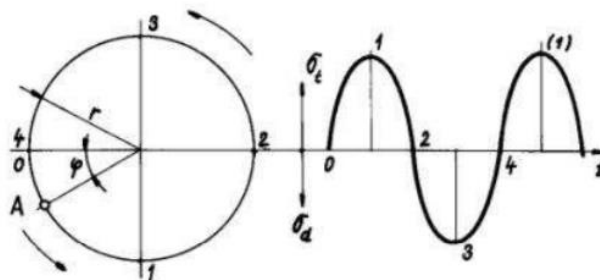
$$\sigma_{ohyb} = \frac{17,7 + 182,3}{39\,760} \cdot 30 = 150,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{celk} = \frac{17,7 + 182,3}{39\,760} \cdot 30 + 59,3 = 210 \text{ N/mm}^2$$

Je zřejmé, že hřídel je na vnějším povrchu v místě 2 namáhán 3x více než hřídel v místě 1 a 4x více než náboj v místě 1. Vlivem osového napětí se zde extrém napětí zvětší vůči počáteční hodnotě o 38%. Proto při dimenzování nalisovaných spojů by se toto místo mělo brát v úvahu. Zároveň je hřídel v okolí místa 2 namáhán velkou tlakovou špičkou, která vzniká vlivem skokového zvýšení kontaktního tlaku na začátku náboje. Problematice těchto tlakových špiček se ve své práci věnuje Schankin [5]. Vlivem napjatosti je proto místo 2 kritické.

12 Průběh napětí v čase

Nalisovaný spoj (ozubené kolo, řemenice) je namáhán ohybovým momentem M_o . Při otáčení hřídele se ohybové napětí v průřezu cyklicky mění, viz obr. 29.



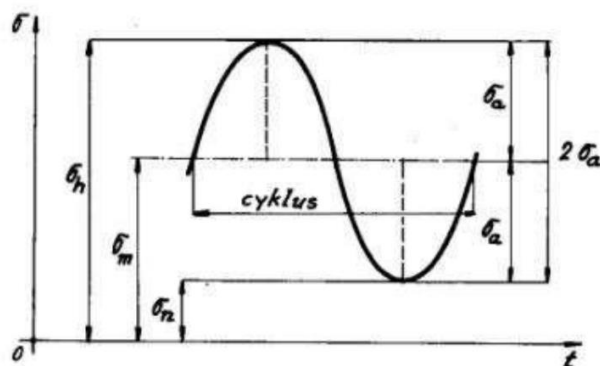
Obrázek 29 – Průběh ohybového napětí bodu A v čase t [1]

Napětí v bodě A lze vyjádřit jako

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} \cdot \sin \varphi, \text{ kde } \varphi = \omega \cdot t.$$

Odkud plyne, že toto napětí je funkcí času $\sigma_o = f(t)$.

Napětí v jednotlivých vláknech nosné části se mění periodicky během zatěžujícího cyklu v určitých mezích z maximální do minimální hodnoty. Jeho průběh, idealizovaný funkcí sinus je dán superpozicí základního napětí stálého (středního) a proměnlivé složky napětí střídavého o dané amplitudě [1]. Popis cyklického zatížení uvádí obr. 30.



Obrázek 30 - Popis cyklického namáhání [1]

$$\begin{aligned} \sigma_h &- \text{horní napětí, } \sigma_h = \sigma_m + \sigma_a \\ \sigma_n &- \text{dolní napětí, } \sigma_n = \sigma_m - \sigma_a \\ \sigma_m &- \text{střední napětí (předpětí), } \sigma_m = \frac{\sigma_h + \sigma_n}{2} \\ \sigma_a &- \text{amplitudové napětí, } \sigma_a = \frac{\sigma_h - \sigma_n}{2} \end{aligned}$$

12.1 Typy cyklického zatížení

Uvažujeme součinitel nesouměrnosti cyklu R a typy napěťových cyklů:

$$R = \frac{\sigma_n}{\sigma_h}$$

1) Napětí tepavé

$$\begin{aligned} |\sigma_m| &> \sigma_a \\ R &\in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

2) Napětí míjivé

$$\begin{aligned} |\sigma_m| &= \sigma_a \\ R &= 0 \end{aligned}$$

3) Napětí nesymetricky střídavé

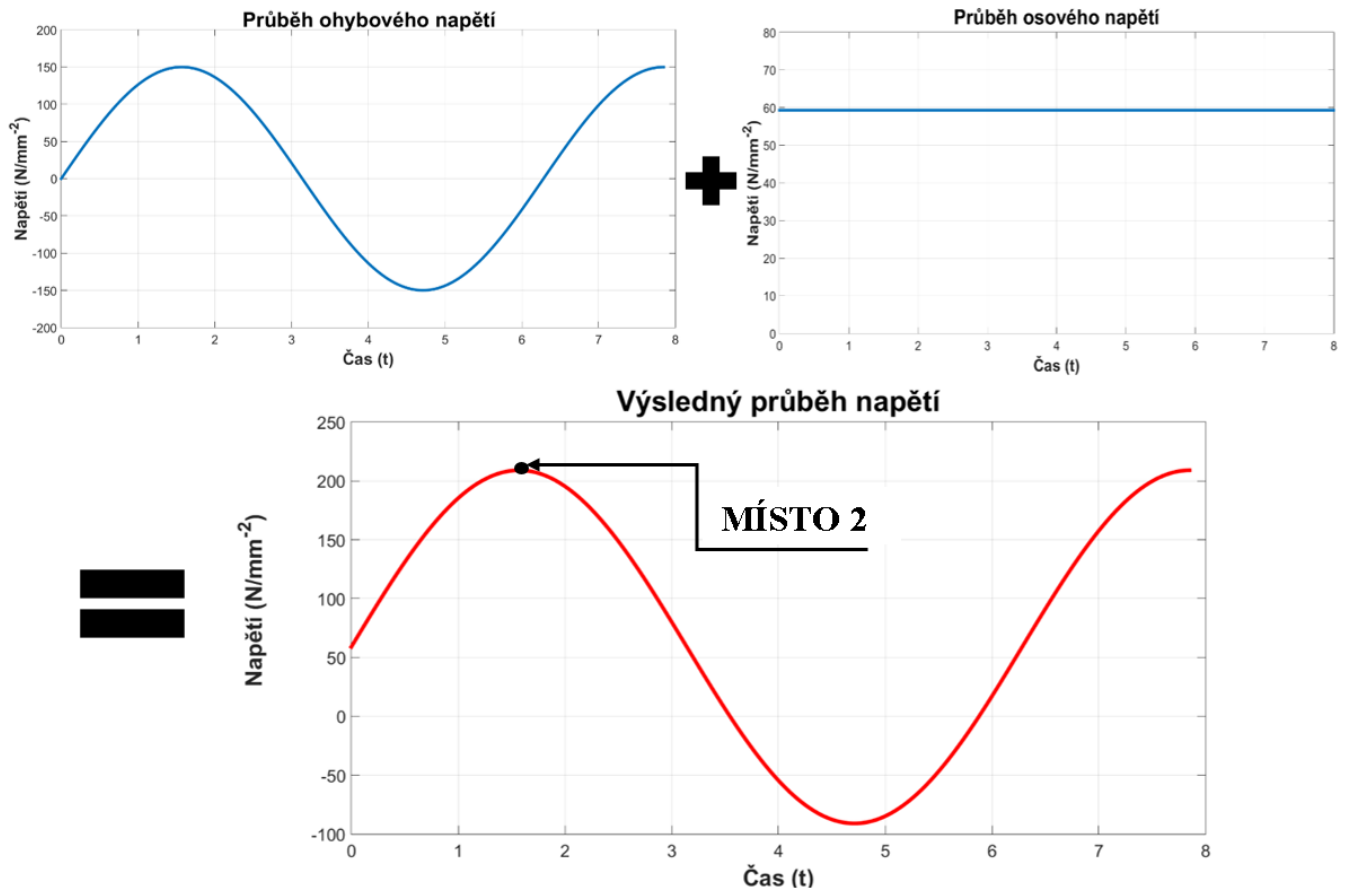
$$\begin{aligned} |\sigma_m| &< \sigma_a \\ R &< 0 \end{aligned}$$

4) Napětí symetricky střídavé

$$\begin{aligned} \sigma_m &= 0, \sigma_h = \sigma_a, \sigma_n = -\sigma_a \\ R &= -1 \end{aligned}$$

12.2 Určení typu zatížení

Osově napětí od nalisování se superpozicuje na cyklický průběh ohybového napětí, takže průřezy hřídele jsou namáhány nesymetricky střídavým ohybem. Předpětí tohoto cyklu σ_m je rovno osovému napětí. Jestliže se jedná o tlakové osově napětí, sinusovka se posune do záporných hodnot a extrém bude tlakové napětí $\sigma_{tlak} = \sigma_n$. Jestliže se jedná o tahové osově napětí, pak se sinusovka posune do kladných hodnot a extrém bude tahové napětí $\sigma_{tah} = \sigma_h$. Z konstrukčního hlediska je tahové napětí nevýhodné, protože při případném lomu rozevívá trhlinu. Právě toto je případ místa 2, kde je extrém, protože ohybové napětí je v daný okamžik na maximální hodnotě a osově napětí je tu kladné. Tento případ je zobrazen na obr. 31.



Obrázek 31 – Superpozice osového a ohybového napětí

13 Únava – Haighův diagram

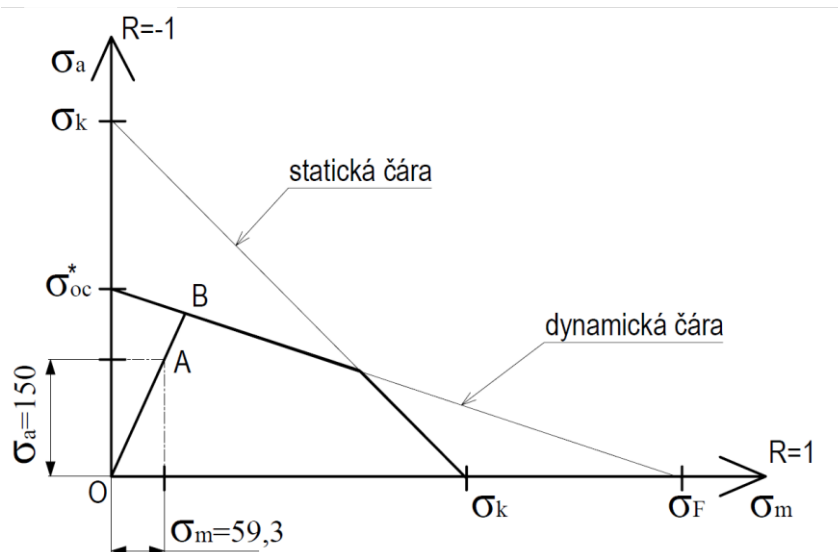
Diagram znázorňující závislost $\sigma_a = f(\sigma_m)$ se nazývá upravený Haighův diagram, pomocí kterého je možno stanovit míru bezpečnosti v ohybu. Haighův diagram je na obr. 32, na kterém je

vidět, jak se změní bezpečnost v ohybu vlivem osového napětí. Jestliže uvažujeme, že součást je namáhána jen symetrickým ohybem ($R = -1$), pak výpočet bezpečnosti na únavu v ohybu má tvar

$$k = \frac{\sigma_{oc}^*}{\sigma_a}, \quad \text{kde } \sigma_{oc}^* \text{ je mez únavy konstrukce v ohybu}$$

Tento výpočet se ovšem mění vlivem osovému napětí, které se projeví jako střední napětí σ_m . Na obr. 32 je zobrazen výpočet únavy pro případ v místě 2. Výpočet bezpečnosti na únavu v ohybu je dán poměrem úseček

$$k = \frac{|OB|}{|OA|}.$$



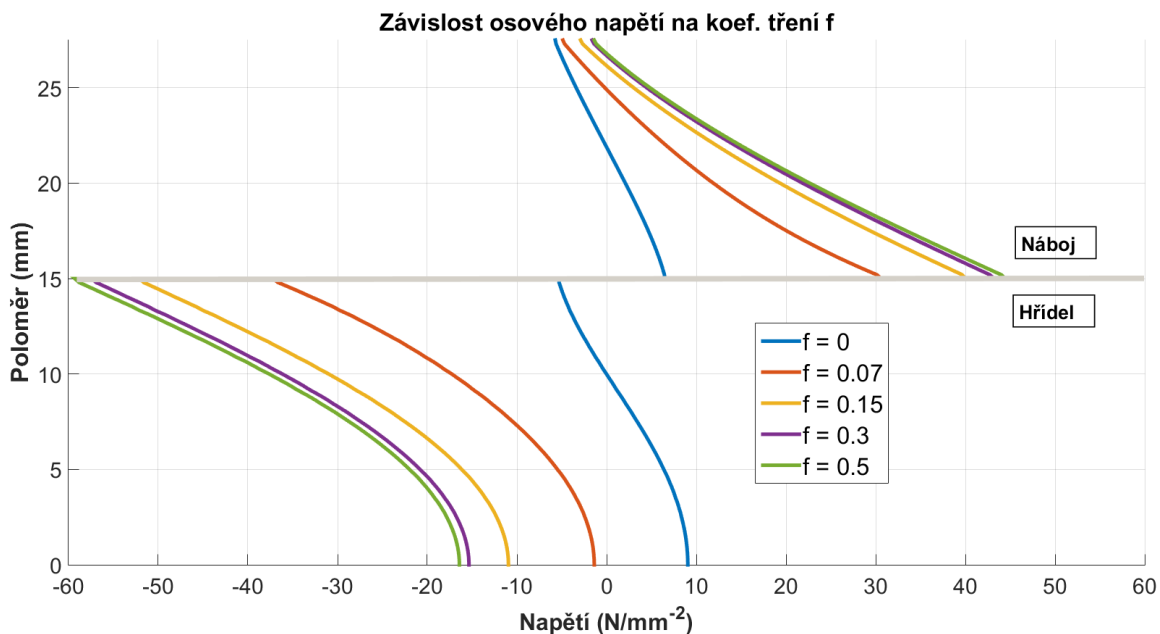
Obrázek 32 - Haighův diagram

14 Vliv tření a Poissonova čísla na osově napětí

Variantami výpočtů zjišťujeme vliv Poissonova čísla ν a třecího koeficientu f na osově napětí.

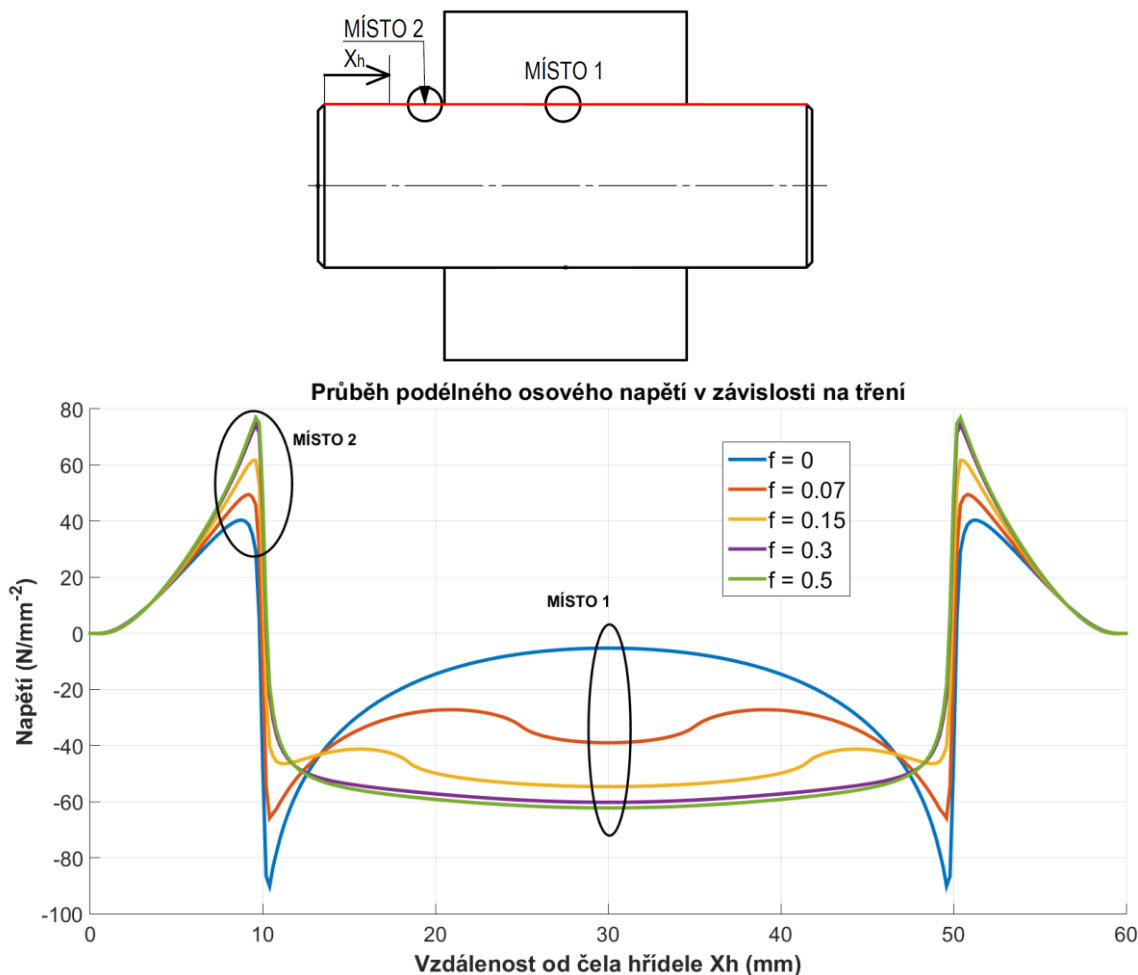
14.1 Tření

Třecí koeficienty uvažujeme v rozmezí $f \in \langle 0 \div 0,5 \rangle$. Výsledky těchto numerických experimentů mohou být viděny na obrázcích 33,34 a 35. Na obr. 33 je zobrazen příčný průběh osového napětí v závislosti na třecím koeficientu f . Je patrné, že tření má vliv na výsledné průběhy osového napětí. Obrázek 33 ukazuje, že čím větší je tření, tím větší je velikost osového napětí. Maximum hodnot osově napětí dosahuje na styčné ploše hřídele. Pro nulové tření má osově napětí na styčné ploše hřídele hodnotu $\sigma_{osov\acute{e}}^H(r_2) = -6 \text{ N/mm}^{-2}$ a pro $f = 0,5$ je $\sigma_{osov\acute{e}}^H(r_2) = -58,5 \text{ N/mm}^{-2}$.



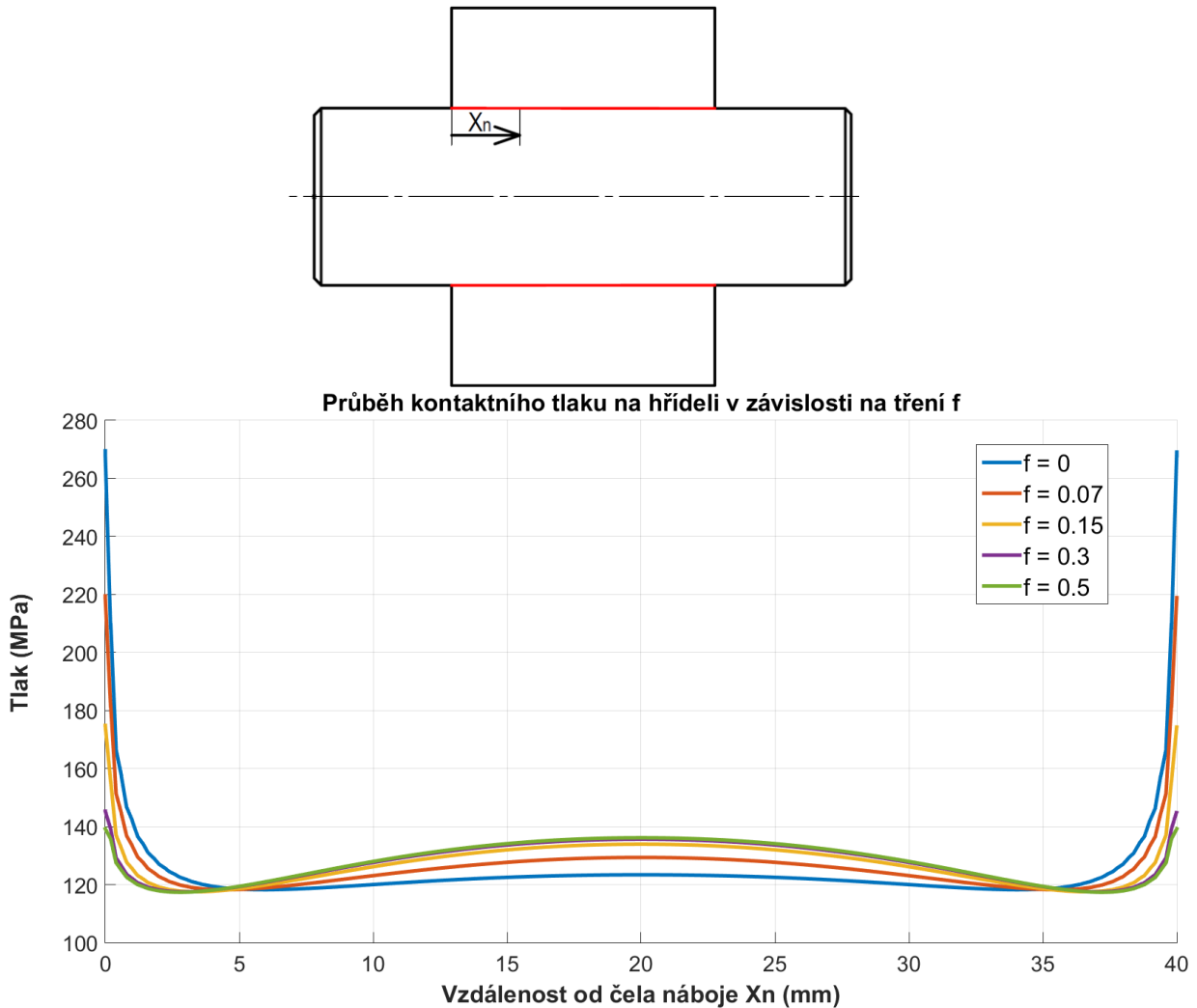
Obrázek 33 – Závislost osového napětí na třecím koeficientu f – cesta pro sběr dat vedena středem nalisování

Obrázek 34 zobrazuje podélný průběh osového napětí na povrchu hřídele v závislosti na třecím koeficientu f . Pro nulové tření jsou hodnoty osového napětí nejmenší a s rostoucím třením se zvyšuje i osové napětí. Je vidět, že při nulovém tření se téměř daří eliminovat tlakový extrém (místo 1), kdy se napětí v tomto místě sníží o 89,5% vůči výchozí hodnotě ($f = 0,15$). Zatímco tahový extrém (místo 2) se pro nulové tření sníží jen o 33% vůči výchozí hodnotě. Z obr. 34 je dále patrná tlaková špička na začátku nalisování ($Xh \approx 10\text{mm}$), která je největší pro nulové tření. Ovšem se zvyšujícím se třením tento extrém mizí.



Obrázek 34 – Průběh podélného osového napětí na povrchu hřídele v závislosti na třecím koeficientu f . Pozn.: Červená čára na schématickém obrázku znázorňuje cestu sběru dat v Abaqusu

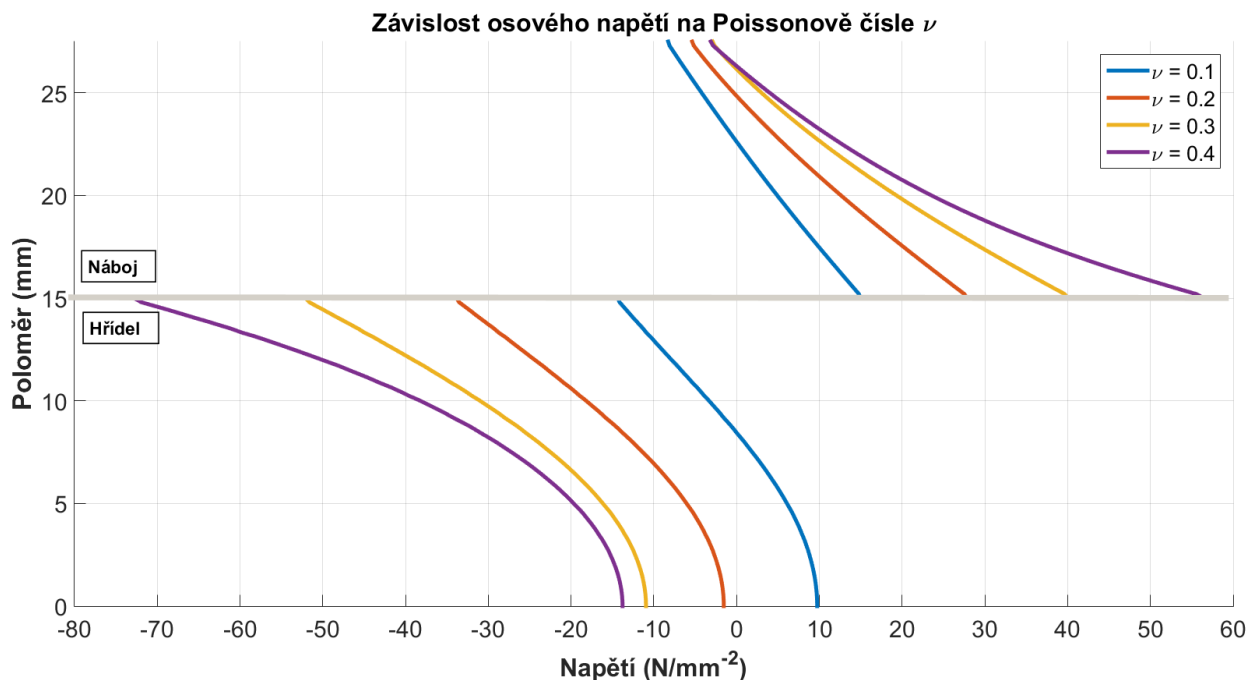
Obr. 35 zobrazuje závislost kontaktního tlaku na hřídeli na třecím koeficientu f . Jsou zde vidět tlakové špičky na okrajích nalisování. Důvodem vzniku těchto špiček je začátek přesahu na čele náboje. Tyto tlakové špičky více zvyšují únosnost nalisovaného spoje. Pokud bychom ovšem dimenzovali nalisovaný spoj podle tohoto nejzatíženějšího místa, pak zbývající část nalisovaného spoje zůstane pevnostně nevyužita. Z obr. 35 je patrné, že špičky dosahují maxima pro třecí koeficient roven nule. Zvyšováním tření se spoj stává více celistvý a velikost tlakových špiček se podstatně snižuje.



Obrázek 35 – Průběh kontaktního tlaku na hřídeli v závislosti na třecím koeficientu f

14.2 Poissonovo číslo

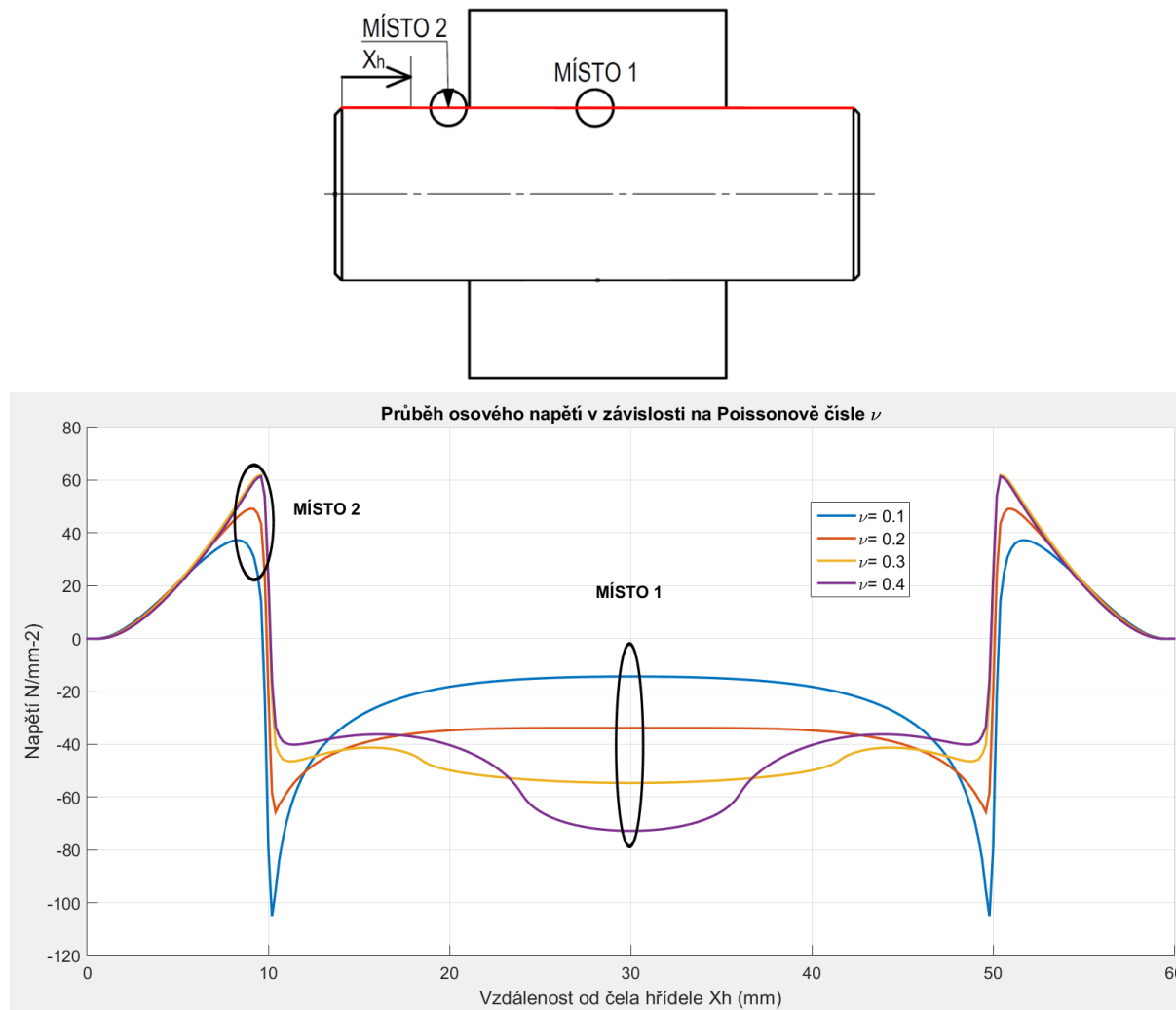
Další zkoumaný parametr, který může ovlivňovat osově napětí je Poissonovo číslo ν . Měníme proto Poissonovo číslo v rozmezí $\nu \in < 0,1 \div 0,4 >$ a sledujeme, jak se mění osově napětí. Výsledky uvádí obr. 36 a 37. Příčný průběh osového napětí v závislosti na ν uvádí obr. 36. Je patrné, že Poissonovo číslo ν má vliv na osově napětí a to tak, že se zvětšujícím se ν se zvětšuje i osově napětí. Maximální velikosti dosahuje osově napětí na povrchu hřídele. Pro $\nu = 0,1$ je maximální hodnota $\sigma_o^H(r_2) = -9 \text{ N/mm}^{-2}$, ale při $\nu = 0,4$ je osově napětí $\sigma_o^H(r_2) = -72,5 \text{ N/mm}^{-2}$.



Obrázek 36 – Příčný průběh osového napětí v závislosti na Poissonově čísle – cesta pro sběr dat vedena středem nalisování

Na obr. 37 je zobrazen podélný průběh osového napětí na povrchu hřídele v závislosti na Poissonově čísle. Zde je osově napětí uprostřed nalisování (místo 1) nejmenší pro Poissonovo číslo $\nu = 0,1$. Se stoupajícím ν pak stoupá i toto tlakové osově napětí. Dále je zřejmé, že tahová špička osového napětí před nalisováním (místo 2) je nejmenší pro Poissonovo číslo ν rovné 0,1. Tato špička se též zvětšuje s vyšším Poissonovým číslem. Z obr. 37 je dále patrná tlaková špička na začátku nalisování ($Xh \approx 10\text{mm}$ a 50mm), která je největší pro $\nu = 0,1$. Se zvyšujícím se ν tento extrém mizí.

ČVUT FS



Obrázek 37 – Podélný průběh osového napětí v závislosti na Poissonově čísle

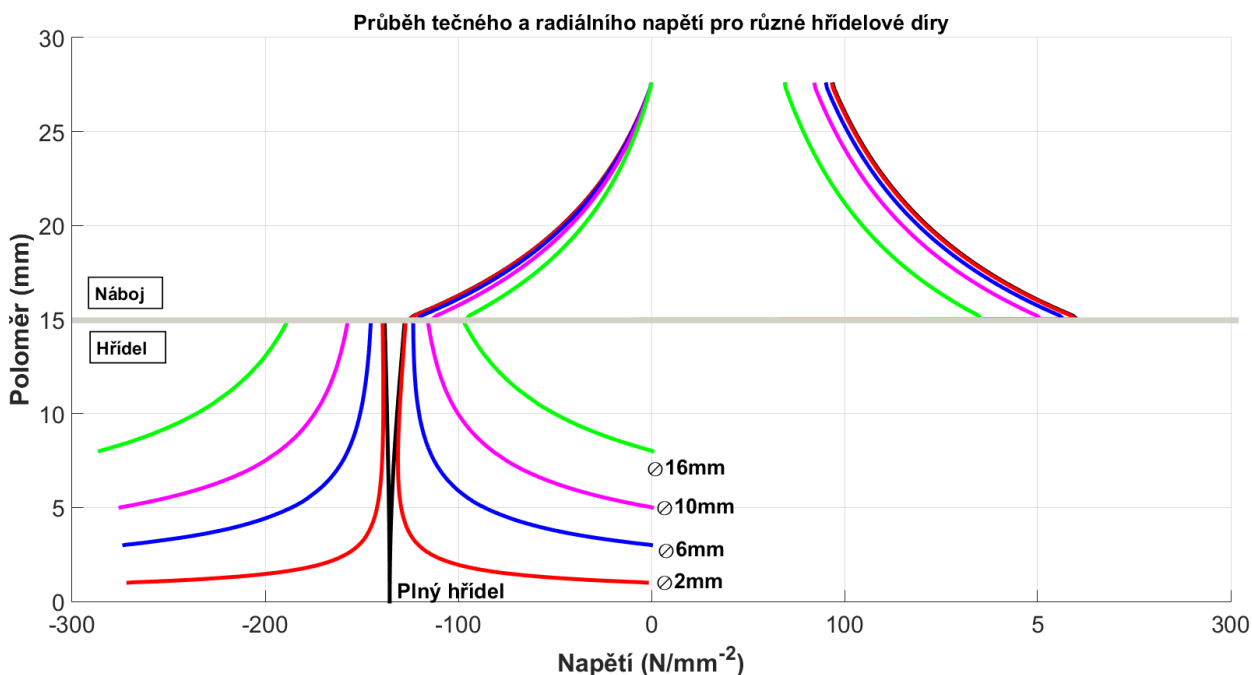
Z analýz vyplívá, že osové napětí je závislé na tření a Poissonově čísle. Ke snížení osového napětí je třeba malého tření ($f \in < 0; 0,07 >$) a malého Poissonova čísla ($\nu \in < 0,1; 0,2 >$). Snižovat třecí koeficient f např. lapováním, je ekonomicky náročné. Poissonovo číslo je závislé na materiálu, takže jestliže nechceme změnit materiál, Poissonovo číslo ν je neměnné. V případech, kdy je nevýhodné měnit parametry f a ν , se zaměříme na další vstupní parametry, kterými lze ovlivnit osové napětí.

15 Konstrukční úpravy

Osové napětí má na začátku a na konci nalisování (místo 2) a uvnitř nalisování (místo 1) negativní vliv na celkové namáhání součástí. Zvětšuje zde extrémy tahového, nebo tlakového napětí, které představují riziko pro lom. Proto ověřujeme konstrukční úpravy, které by mohly toto napětí eliminovat.

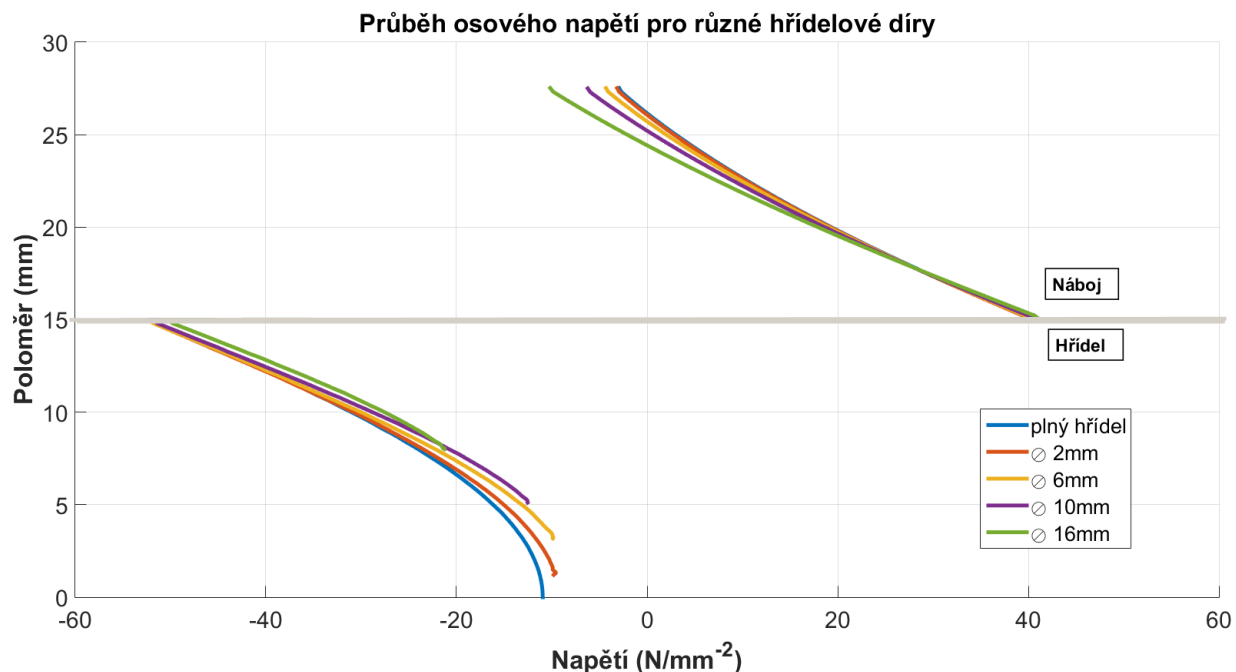
15.1 Hřídelová díra

Zkoumáme, jaký vliv má díra v hřídeli na průběhy hlavních napětí. Průměr díry volíme v rozsahu $\varnothing d_1 = 0$ až 16mm . Výsledky této analýzy jsou na obrázcích 38,39,40 a 41. Na obr. 38 je zobrazen průběh tečného a radiálního napětí. Je patrné, že se zvětšováním průměru díry v hřídeli se snižuje tuhost hřídele a polytropy průběhů tečného a radiálního napětí zvětšují svoji vzdálenost. Dále je podle obr. 38 patrné, že při zvětšování díry v hřídeli se na styčné ploše hřídele zvětšuje velikost tečného napětí, a naopak klesá velikost napětí radiálního. U náboje zvětšováním díry dochází ke zmenšení velikosti tečného i radiálního napětí.



Obrázek 38 – Průběh tečných a radiálních napětí pro různé hřídelové díry – cesta pro sběr dat vedena středem nalisování

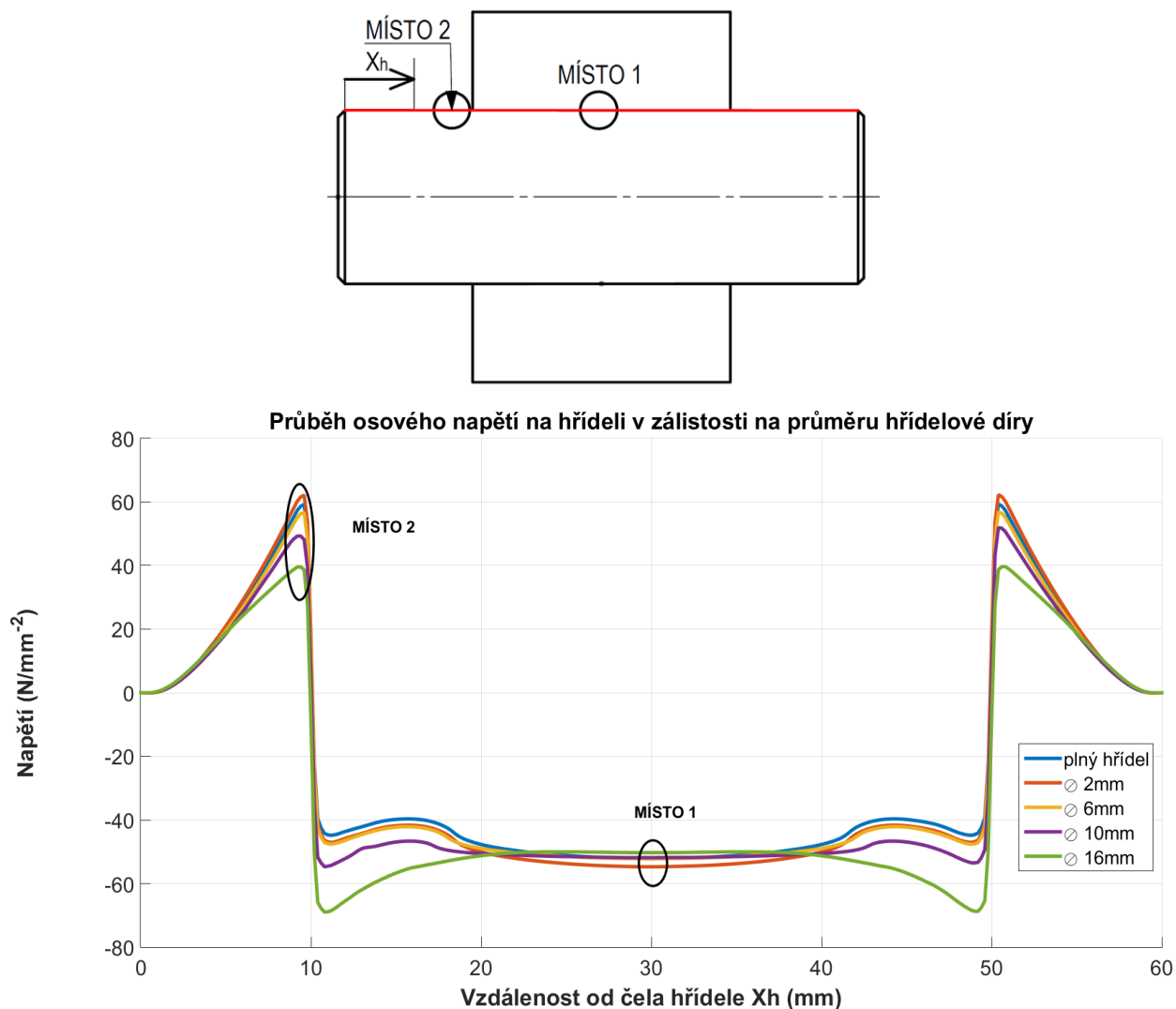
Na obr. 39 je zobrazen příčný průběh osového napětí v závislosti na $\varnothing d_1$. Je patrné, že velikost hřídelové díry nemá velký vliv na osově napětí v radiálním směru.



Obrázek 39 – Průběh osových napětí pro různé hřídelové díry– cesta pro sběr dat vedena středem nalisování

Na obr. 40 je zobrazen podélný průběh osového napětí na hřídeli. Výsledky potvrzují, že velikost díry nemá velký vliv na tlakový extrém uprostřed nalisování (místo 1). Tahový extrém na hřídeli před nalisováním (místo 2) je ovlivňován velikostí díry, a to tak, že se zvětšující se dírou klesá extrém. Tyto extrémy jsou pro $\varnothing d_1 = 0\text{mm}$ $\sigma_o = 58\text{ N/mm}^{-2}$ a pro $\varnothing d_1 = 16\text{mm}$ je osově napětí v tomto místě rovno 40 N/mm^{-2} , což znamená snížení napětí v tomto místě o 31%.

ČVUT FS



Obrázek 40 – Podélný průběh osového napětí na styčné ploše hřídele

Na obr. 41 je zobrazen vliv velikosti hřídelové díry na styčný tlak. Tlakové špičky pro různé průměry děr se příliš neliší. Pro $\varnothing d_1 = 0 \text{ mm}$ je maximální hodnota tlaku rovna 176 MPa a pro největší díru $\varnothing d_1 = 16 \text{ mm}$ je tato hodnota 182 MPa. Z obr. 41 je ovšem patrné, že velikost střední hodnoty tlaku se se zvětšující dírou snižuje. Pro plný hřídel je tato hodnota 133,9 MPa a pro největší díru 97,66 MPa. Tato skutečnost má vliv na únosnost nalisovaného spoje. Z kapitoly *Únosnost a silové poměry* (8.1) a (8.2) je zřejmé, že velikost kroutícího momentu M_K a axiální síly F_a , které je nalisovaný spoj schopný přenést závisí na tlaku nalisování p_2 , viz rovnice (27) a (29).

$$F_L = F_a = 2 \cdot p_2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot b \cdot f_o$$

$$M_k = 2 \cdot p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot b \cdot f_t$$

Tyto rovnice aplikujeme pro případy styčných tlaků u plného hřídele a u hřídele s dírou $\varnothing d_1 = 16 \text{ mm}$. Ovšem tentokrát neuvažujeme průběh p_2 za konstantní, ale využíváme data z Abaqusu (obr. 41). Rovnice pro M_k a F_a mají tvar

$$F_a = \int_0^l 2 \cdot p_2(x_n) \cdot \pi \cdot r_2 \cdot f_o \cdot dx_n = 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot f_o \cdot \int_0^l p_2(x_n) \cdot dx_n$$

$$M_k = \int_0^l 2 \cdot p_2(x_n) \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot f_{t_o} \cdot dx_n = 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot f_t \cdot \int_0^l p_2(x_n) \cdot dx_n$$

kde výraz $\int_0^l p_2(x_n) \cdot dx_n$ stanovíme funkcí integrace v Matlabu.

Nyní porovnáme únosnosti pro model s plným hřídelem pro model s hřídelovou dírou $\varnothing d_1 = 16 \text{ mm}$:

$$F_{a-\text{plný hřídel}} = 2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 0,15 \cdot 5080,9 = 71,83 \text{ kN}$$

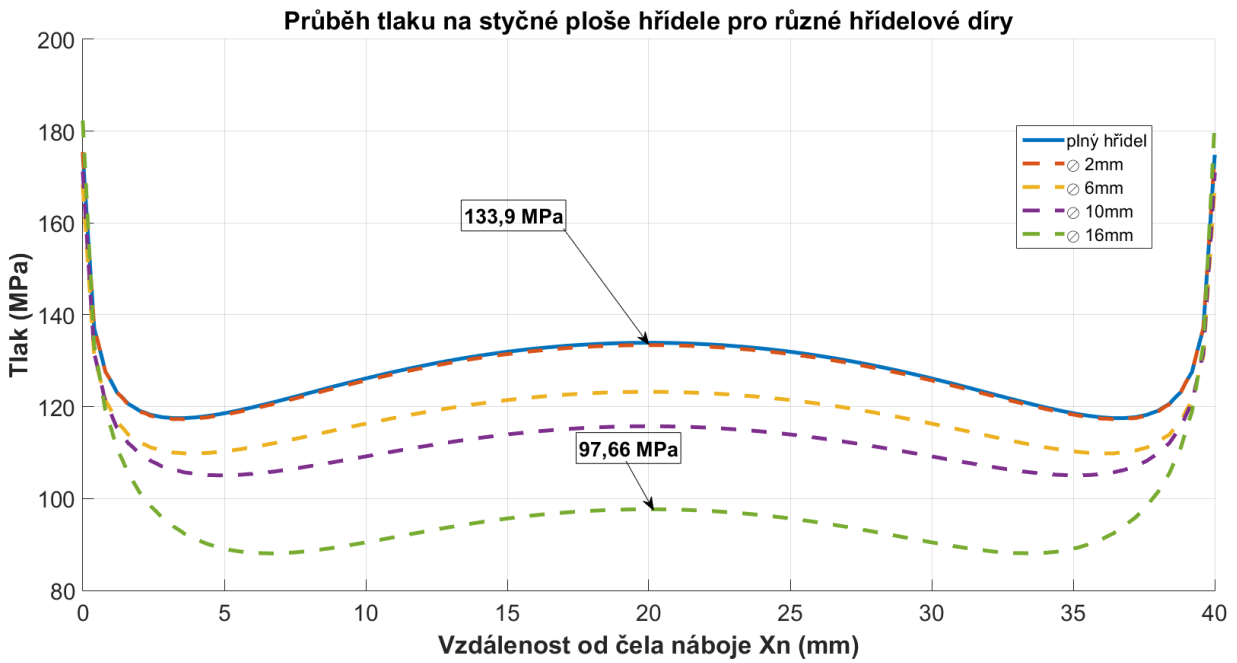
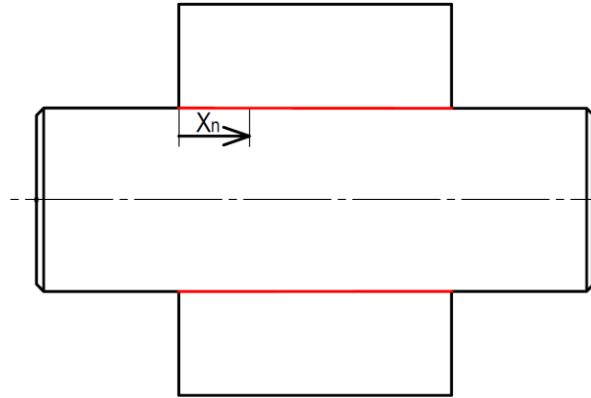
$$F_{a-\text{hřídel s dírou}} = 2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 0,15 \cdot 3840,1 = 54,29 \text{ kN}$$

$$M_{K-\text{plný hřídel}} = 2 \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 0,15 \cdot 5080,9 = 1\,077,4 \text{ Nm}$$

$$M_{K-\text{hřídel s dírou}} = 2 \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 0,15 \cdot 3840,1 = 814,3 \text{ Nm}.$$

Velikost díry ovlivňuje celkový průběh styčného tlaku a to tak, že hřídelová díra snižuje celkovou hodnotu styčného tlaku na nalisování. To má za následek snížení únosnosti nalisovaného spoje. Pro náš konkrétní model s největší hřídelovou dírou se maximální axiální síla F_a a kroutící moment M_k sníží o 24,4% vůči nalisování s plným hřídelem.

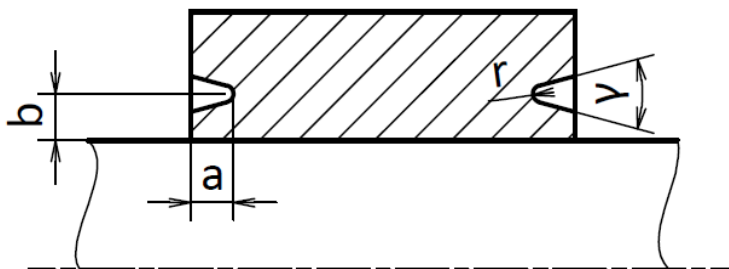
ČVUT FS



Obrázek 41 – Průběh tlaku na nalisování hřídele pro různé hřídelové díry

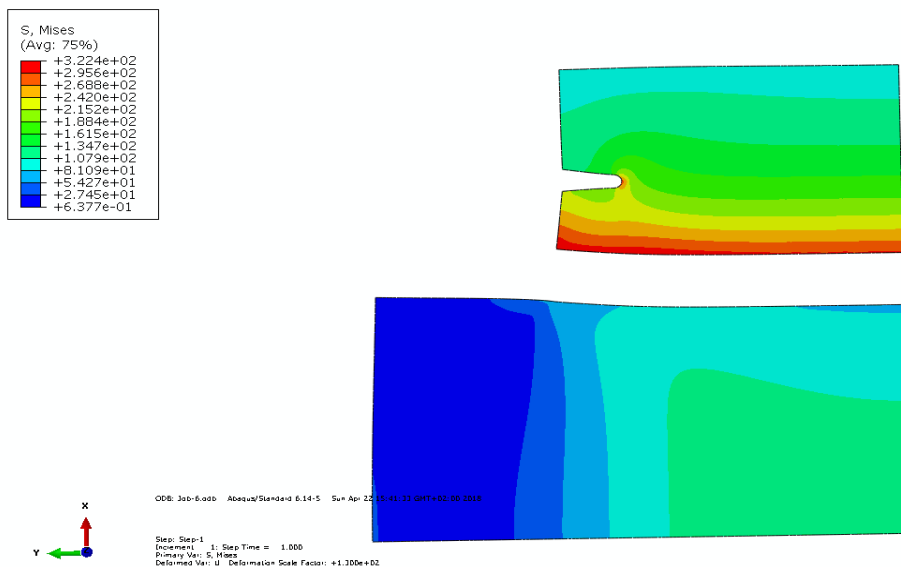
15.2 Čelní zápich na náboji

Čelní zápich snižuje radiální tuhost náboje, a tudíž by mohl ovlivnit i osové napětí. Uvažujeme zápich na obr. 42.

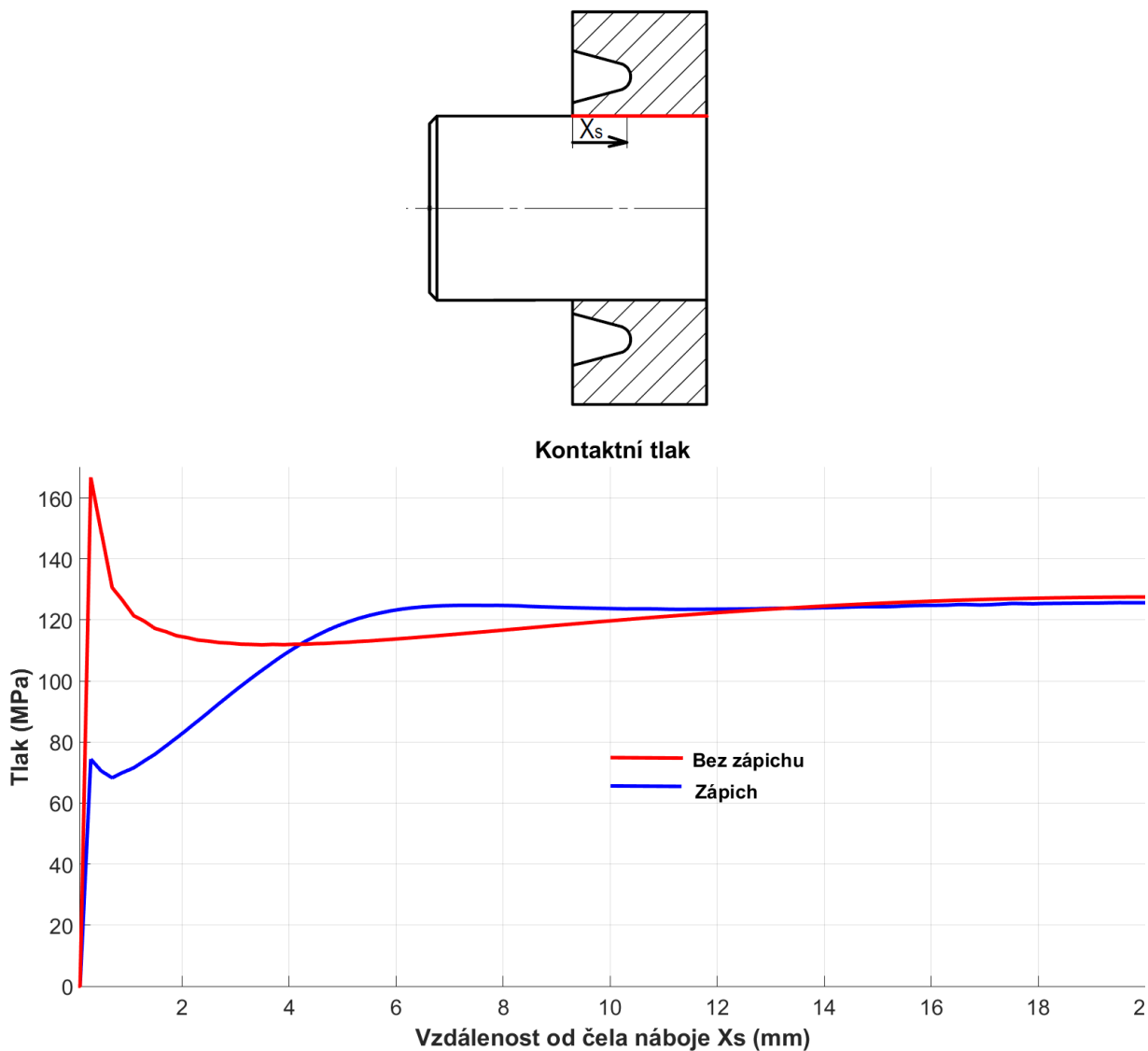


Obrázek 42 - čelní zápich [5]

Čelní zápichy analyzoval ve své práci též Schankin [5], který je používal ke snížení tlakových špiček na začátku nalisování. Tyto tlakové špičky snižují pevnost obou nalisovaných součástí. Schankin zjistil, že rozměry a a b ovlivňují tlakové špičky, zatímco r a γ nemají na tyto špičky vliv. Jelikož naše hodnoty nalisování jsou podobné, použijeme již zjištěné ‘ideální’ hodnoty $a = 3,5 \text{ mm}$, $r = 0,6 \text{ mm}$ a $\gamma = 30^\circ$. Vzdálenost b měníme od $b = 2 \text{ mm}$ do $b = 10 \text{ mm}$ a sledujeme průběh osového napětí. Na obr. 43 je zobrazeno redukované HMM napětí pro navržený zápich. Vliv zápichu na tlakové špičky na okraji nalisování ukazuje obrázek 44. Je patrné, že pomocí zápichu eliminujeme tyto špičky a vzniká tak rovnoměrný průběh styčného tlaku.

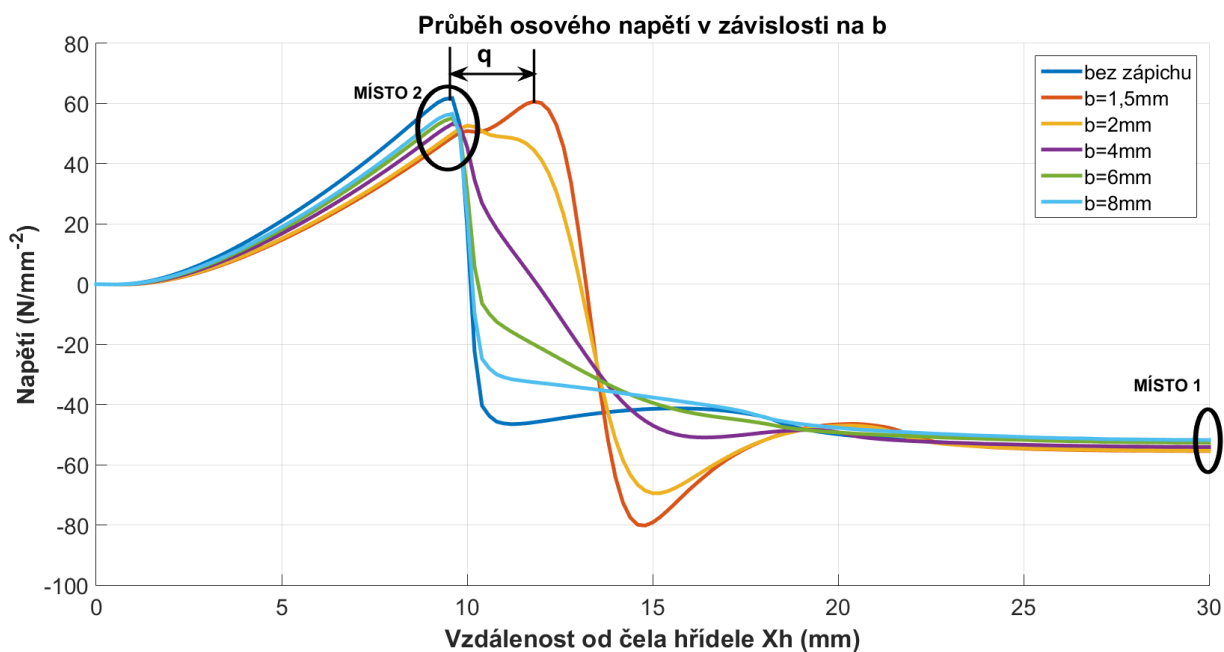
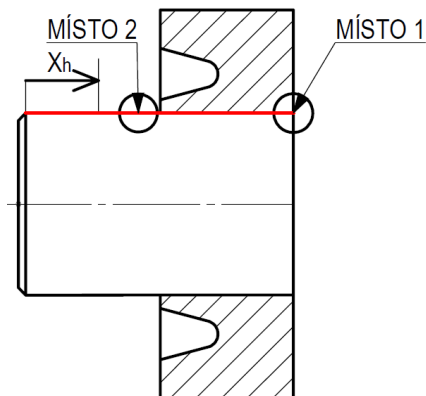


Obrázek 43 – Zápich ($b = 5 \text{ mm}$), redukované napětí, deformace 130x zvětšena



Obrázek 44 - Vliv zápichu ($b = 5 \text{ mm}$) na kontaktní tlak na hřídeli

Na obr. 45 jsou znázorněny průběhy podélného osového napětí na hřídeli v závislosti na vzdálenosti b . Radiální poloha zápichu nemá velký vliv na extrémní osového napětí. Na obr. 45 v místě 2 můžeme pozorovat malé snížení tahového maxima pro hodnoty $b = 2,4,6$ a 8 mm . Je ovšem zajímavé, že pro nejmenší vzdálenost zápichu od hřídele ($b = 1,5 \text{ mm}$) je tahový extrém téměř stejně veliký jako pro model bez zápichu. Tento extrém se pouze posune směrem dovnitř do nalisování. Toto posunutí je na obr. 45 zakotováno souřadnicí q . Posunutí extrému může být způsobeno tím, že na čele náboje pro $b = 1,5 \text{ mm}$ už není téměř žádný materiál a objímka se zde deformuje více. Dále je z obr. 45 vidět, že pro polohu zápichu blíže hřídeli ($b = 1,5$ a 2 mm) se objevuje nový tlakový extrém ($X_h \approx 15 \text{ mm}$).



Obrázek 45 - Průběh osového napětí na hřídeli se zápichem a bez zápichu

16 Závěr

Tato bakalářská práce zkoumá vliv hřídelové díry na napjatost nalisovaného spoje. Dále se tato práce zabývá osovým napětím, které má negativní vliv na konstrukci nalisovaného spoje.

V praktické části je navržen nalisovaný spoj s dutým hřídelem. Poté je vytvořen model tohoto nalisování v programu Abaqus. Numerické experimenty jsou realizovány s vypočteným přesahem $\Delta r_2 = 25,5 \mu m$. Analýza z Abaqusu je porovnávána s analytickým řešením. Výsledky z MKP ukazují vznik osového napětí, při konstantním přesahu, které se v analytickém výpočtu uvažuje nulové. Extrémy osového napětí jsou identifikovány uprostřed nalisování na styčné ploše hřídele a vedle nalisování na hřídeli. Místo s tahovým extrémem osového napětí vedle nalisování je místo kritické.

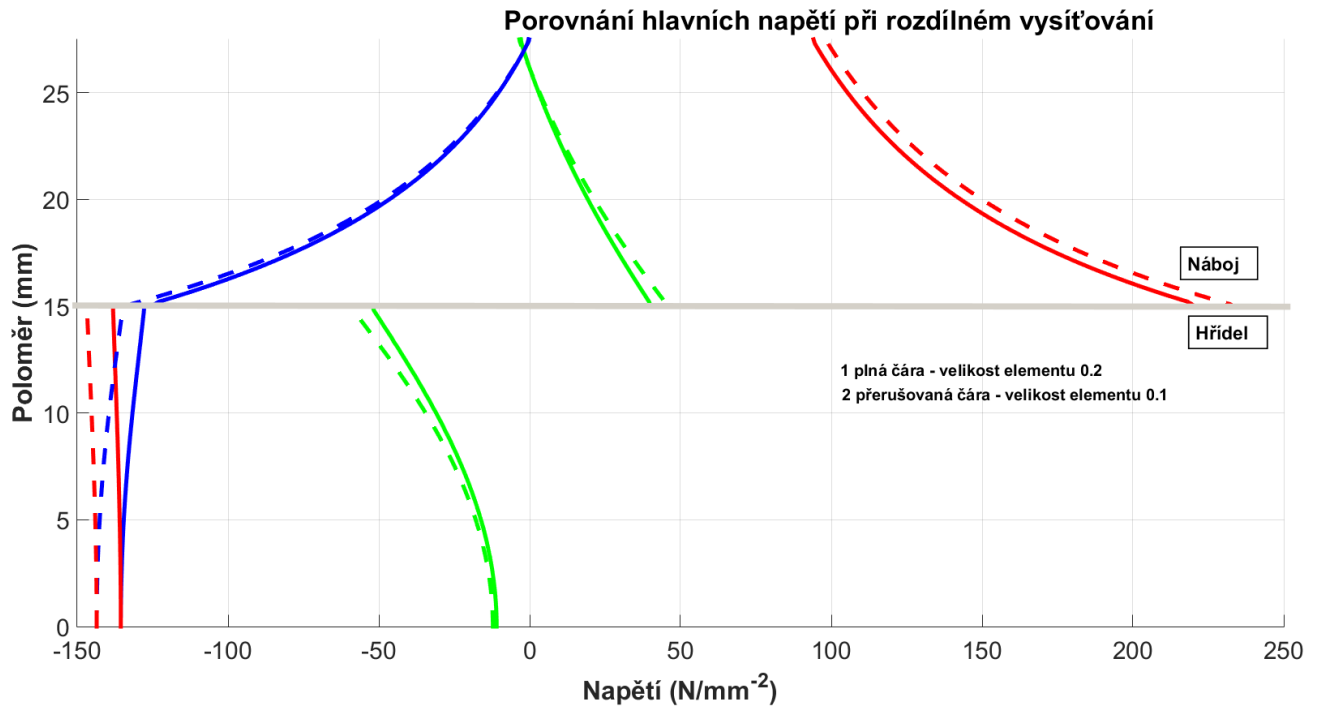
Je analyzován vliv tření a Poissonova čísla na průběh osového napětí. Extrémy osového napětí je možné minimalizovat pomocí snížení třecího koeficientu f a pomocí snížení Poissonova čísla ν .

Je zkoumán vliv velikosti hřídelové díry na hlavní napětí. Tečné napětí na hřídeli roste se zvětšující se hřídelovou dírou a radiální napětí naopak klesá. Velikost tahového extrému osového napětí se snižuje s rostoucí hřídelovou dírou. Dále je zjištěno, že hřídelová díra snižuje celkovou hodnotu styčného tlaku na nalisování, což má za následek snížení únosnosti nalisovaného spoje. Druhá konstrukční úprava je zápich na náboji. Zápich snižuje tlakové špičky na začátku a na konci nalisování.

17 Seznam použité literatury

- [1] MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 2009. ISBN: 978-80-01-04224-3.
- [2] MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost II*. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1994. ISBN: 978-80-01-01087-7.
- [3] ŠVEC, Vladimír. *Části a mechanismy strojů: spoje a části spojovací*. 3. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 2008. ISBN: 978-80-01-04138-3.
- [4] Abaqus/CAE User's Guide (6.14). [online]. [cit. 2018-06-06]. Dostupné z: <http://abaqus.software.polimi.it/v6.14/>
- [5] Shchankin Yan, “Analýza mechanických vlastností při zatížení spoje osovými silami”. Bakalářská práce. České vysoké učení v Praze, srpen 2017.
- [6] Dutý hřídel. *Technical Tutorial*. [online]. [cit. 2018-06-06]. Dostupné z: <http://www.misumi-techcentral.com/tt/en/lca/2009/08/008-application-examples-on-hollow-shafts.html>

Příloha A



Porovnání hlavních napětí stejného modelu pro dvě různá vysíťování

Příloha B – přiložené CD

- Elektronická podoba práce
- Zdrojové soubory SIMULIA Abaqus
- Zdrojové soubory MATLAB