

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vliv geometrických úchylek na spolehlivost zjišťování  
materiálových parametrů elastomeru

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Tomková** Jméno: **Veronika** Osobní číslo: **439076**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojího inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Vliv geometrických úchylek na spolehlivost zjišťování materiálových parametrů elastomeru**

Název bakalářské práce anglicky:

**Effect of imperfect geometry on a confidence of an elastomer material parameters estimation**

Pokyny pro vypracování:

- seznámit se s mechanickým chováním elastomerů
- seznámit se s teorií konečných deformací a s hyperelastickým popisem materiálů
- provést MKP simulaci nafukování ideální a kuželovité elastoemrní trubice
- analyticky odhadnout materiálové parametry trubice při zanedbání kuželovitosti
- porovnat odhadnuté parametry se vstupními hodnotami

Seznam doporučené literatury:

Petruška J. MKP v inženýrských výpočtech. Dostupné online z [www.kvm.tul.cz/getFile/id:2499](http://www.kvm.tul.cz/getFile/id:2499)  
Horný L (2014) Patobiomechanika srdečněcévního systému. Učební text ČVUT FS, ISBN: 978-80-01-05473-4

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

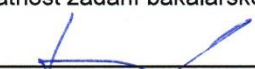
**doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D., odbor biomechaniky FS**


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:


Datum zadání bakalářské práce: **23.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

  
doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce


  
prof. Ing. Milan Růžička, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Studentka bere na vědomí, že je povinna vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.  
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studentky

# Anotační list

Jméno autora:	Veronika Tomková
Název BP:	Vliv geometrických úchylek na spolehlivost zjišťování materiálových parametrů elastomeru
Anglický název:	Effect of imperfect geometry on a confidence of an elastomer material parameters estimation
Rok:	2018
Studijní program:	Teoretický základ strojního inženýrství
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Vedoucí:	doc. Ing. Lukáš Horný Ph. D.
Bibliografické údaje	počet stran 41 počet obrázků 14 počet tabulek 2 počet grafů 15 počet příloh 0
Klíčová slova:	Válcová trubka, kuželovitost, hyperelastická, napětí, metoda konečných prvků, materiálové parametry
Keywords:	Cylindrical pipe, conicity, hyperelasticity, stress, finite element method, material parameters
Anotace:	Tato bakálářská práce se zabývá vlivem kuželovitosti trubky na odhad materiálových parametrů. V práci je provedený numerický výpočet nafukování trubky. Z hodnot získaných z tohoto výpočtu jsou odhadnuty materiálové parametry.
Abstract:	This Bachelor thesis deals with the effect of conicity of pipe on an estimation of material parameters. In the thesis, a numerical calculation of an inflation of a pipe is done. From values obtained by this calculation, an estimation of material parameters is done.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně s výjimkou poskytovaných konzultací a výhradně s použitím citovaných pramenů a literatury.

V Praze dne 8. 6. 2018

Veronika Tomková

# Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala doc. Ing. Lukáši Hornému Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích bakalářské práce. Dále děkuji své rodině za podporu během studia.

## Obsah

Použité značení .....	2
1 Úvod.....	4
2 Zadání .....	6
3 Popis deformace .....	8
4 Napjatost.....	13
5 Nafukování válcové trubice .....	16
6 Hyperelasticita .....	18
6.1 Modely pro vyjádření izotropní hustoty deformační energie $W$ .....	19
7 Rovnice obecné pružnosti .....	21
8 Řešení rovnic obecné pružnosti.....	22
8.1 Numerické řešení – Metoda konečných prvků .....	22
8.2 Využitý postup MKP pro válcovou trubku v programu ABAQUS.....	24
8.2.1 Modelování trubky.....	24
8.2.2 Materiál a orientace souřadného systému .....	24
8.2.3 Okrajové podmínky .....	25
8.2.4 Zatížení .....	25
8.2.5 Diskretizace .....	25
9 Analytický model nafukování tenkostěnné trubice .....	27
10 Způsob odhadu materiálových parametrů $C_1$ , $C_2$ a $C_3$ .....	28
11 Srovnání napětí a deformací podle velikosti kuželovitosti trubky .....	32
12 Odhad materiálových konstant $C_1$ , $C_2$ , $C_3$ .....	38
12.1 Kontrola odhadnutých materiálových parametrů .....	40
13 Závěr .....	42
15 Bibliografie .....	44

## Použité značení

$r$	Poloměr trubky	$[m]$
$l$	Délka trubky	$[m]$
$h$	Tloušťka stěny trubky	$[m]$
$C_1, C_2, C_3$	Materiálové parametry	$[Pa]$
$P$	Tlak	$[Pa]$
$d\mathbf{X}, dx$	Elementární polohový vektor referenční, resp. průběžné konfigurace	
$\mathbf{F}$	Deformační gradient	$[1]$
$t$	Čas	$[s]$
$\mathbf{E}_K, \mathbf{e}_i$	Bázové vektory referenční, resp. průběžné konfigurace	
$\mathbf{R}$	Tenzor rotace	
$\mathbf{U}$	Pravý tenzor strečů	
$\mathbf{v}$	Levý tenzor strečů	
$\mathbf{I}$	Jednotkový tenzor	
$\mathbf{C}$	Pravý Cauchyův-Greenův tenzor deformace	
$\mathbf{b}$	Levý Cauchyův-Greenův tenzor deformace	
$\ln\mathbf{U}$	Materiálový logaritmický tenzor	
$\lambda$	Streče	$[1]$
$I_1, I_2, I_3$	Hlavní invarianty tenzoru	
$d\mathbf{f}$	Diferenciální výslednice vnitřních sil	
$ds$	Diferenciální element plošky ve zdeformované konfiguraci	
$dS$	Diferenciální elementy plošky řezu v referenční konfiguraci	

$\mathbf{t}$	Vektor plošné intenzity vnitřních sil	
$\mathbf{T}$	Smluvní vektor intenzity vnitřních sil	
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenzor Cauchyova (skutečného) napětí	
$\mathbf{P}$	Tenzor smluvního (nominálního) napětí	
$G_i, G_K$	Normalizační koeficienty	
$W$	Hustota deformační energie	$[J \cdot m^{-3}]$
$J$	Relativní změna objemu elementu	$[1]$
$p$	Neurčitý Lagrangeův multiplikátor	$[Pa]$
$\mu$	Smykový modul v oblasti malých deformací	$[N \cdot m^{-2}]$
$E$	Modul pružnosti	$[N \cdot m^{-2}]$
$\nu$	Poissonovo číslo	$[1]$
$u, v, w$	Posuvy	$[m]$
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Přetvoření	$[1]$
$\Pi$	Potenciální energie	$[J]$
$U$	Energie napjatosti tělesa	$[J]$
$A$	Potenciál vnějšího zatížení	$[J]$
$\sigma_{\theta\theta}^{MOD}$	Modelové napětí	$[Pa]$
$\sigma_{\theta\theta}^{EXP}$	Experimentální napětí	$[Pa]$
$\sigma_{\theta\theta}^{TAH}$	Tahové napětí	$[Pa]$

Skalární veličiny jsou v této práci označovány kurzívou, vektorové veličiny tučně a kurzívou a tenzory druhého řádu tučně.



# 1 Úvod

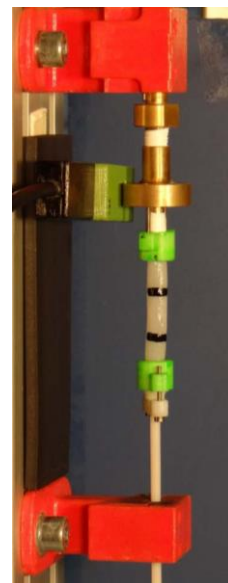
Tématem této bakalářské práce je vliv geometrických úchylek na zjišťování parametrů elastického materiálu.

Při zkoumání cév v technické praxi je často třeba znalosti mechanických vlastností cév. Pro zjištění těchto vlastností provádíme experimenty, při kterých zavádíme zjednodušující předpoklady. Jedním z nich je, že trubku považujeme za dokonale válcovou. Geometrických odchylek, které se při analýzách zatěžování válcové trubice zanedbávají, je samozřejmě víc, ale v této práci se budeme zabývat odchylkou ve formě kuželovitosti trubky.

Experiment, kterým zjišťujeme vlastnosti trubky při nafukování, se nazývá inflačně-extenzní. Dochází při něm k nafukování a protahování trubky. Pro vyhodnocení snímáme dosaženou deformaci. Příklad jeho uspořádání je na obrázku 1.1 a na obrázku 1.2 je zobrazeno uchycení trubky. [1]



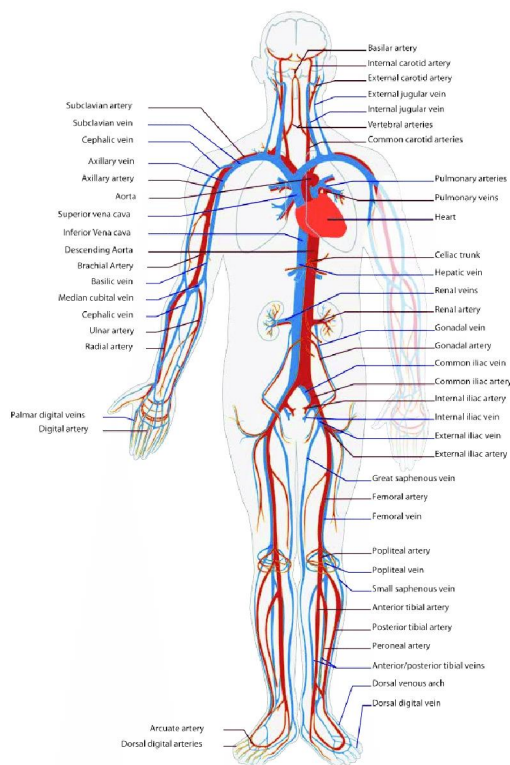
Obrázek 1.1 - Uspořádání inflačně-extenzivního testu [1]



Obrázek 1.2 - Uchycení trubky při inflačně-extenzivním testu [1]

Jedním z hlavních podnětů pro uvažování kuželovitosti u trubek z nelineárního materiálu je stavba lidského těla. Při experimentech, při kterých se zjišťují vlastnosti cév, se pracuje s určitým úsekem cévy. Na obrázku 1.3 je znázorněna cévní soustava člověka, ze které je patrné, že směrem od srdce dochází k zužování cév. Vzhledem k tomu je lze, pokud předpokládáme symetrii trubky, považovat za kuželovité. Samotný experiment a případně i numerický výpočet zachovávají tuto kuželovitost, nicméně analytický výpočet s ní nepracuje a kuželovitou trubku nahrazuje trubkou

dokonale válcovitou. V takovém případě je praktické vědět, jaký je rozdíl mezi takto provedeným výpočtem a výpočtem, kde by se započítala i kuželovitost.



Obrázek 1.3 - Cévní soustava člověka [2]

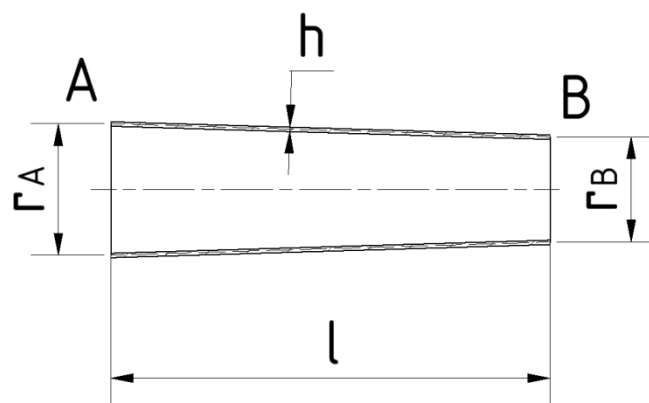
## 2 Zadání

Cílem této práce je zjistit, jak se kuželovitost trubek, kterou při analýze inflačních experimentů často zanedbáváme, projeví ve výpočtu parametrů hyperelastického materiálu. Budeme porovnávat několik trubek a zjišťovat, jak velký rozdíl pro vypočítané parametry vznikne v závislosti na velikosti kuželovitosti. Vzhledem k tomu, že se jedná o nelineární materiál, kdy různé sady materiálových parametrů mohou představovat stejnou mechanickou odezvu, budeme porovnávat sady křivek.

Jedná se konkrétně o pět různých uspořádání trubek. První model slouží k porovnání, proto se jedná o dokonalou trubku se středním poloměrem  $r = 7,5 \text{ mm}$  o délce  $l = 50 \text{ mm}$  a s tloušťkou stěny  $h = 0,5 \text{ mm}$ . Tloušťka stěny a délka zůstávají konstantní pro všechny modely. Další čtyři modely mají poloměr na jedné straně vždy o 5% menší. Jejich rozměry jsou uvedeny v tabulce 2.1. Na obrázku 2.1 je zobrazený model trubky s obecnými rozměry.

Tabulka 2.1 - Rozměry jednotlivých modelů trubek

	Poloměr strana A $r_A$ (mm)	Poloměr strana B $r_B$ (mm)	Délka $l$ (mm)	Tloušťka stěny $h$ (mm)	Označení v grafech
Model 1	7,5	7,5	50	0,5	1
Model 2	7,5	7,125	50	0,5	0,95
Model 3	7,5	6,75	50	0,5	0,9
Model 4	7,5	6,375	50	0,5	0,85
Model 5	7,5	6	50	0,5	0,8



Obrázek 2.1 - Obecný model trubky

Všechny tyto modely byly vytvořeny v programu ABAQUS. Byl jim přiřazen hyperelastický materiál s konstantami  $C_1 = 188,5 \text{ kPa}$ ,  $C_2 = -26,14 \text{ kPa}$  a  $C_3 = 8,778 \text{ kPa}$ .

Hodnoty těchto konstant byly zjištěny z experimentu provedeného doc. L. Horným a v rámci této práce byla pouze zadána jejich hodnota.

Na těchto pět modelů byl v programu ABAQUS aplikován tlak na vnitřní stěnu trubky o velikosti  $P = 0 \div 25 \text{ kPa}$ .

Ze zjištěných hodnot napětí a deformací jsme zjistili dvě napětí, která jsme nazvali experimentální a modelové. Experimentální napětí jsme získali z numerického výpočtu a modelové napětí z analytického výpočtu. Minimalizací druhé mocniny rozdílu těchto napětí jsme odhadli hodnoty materiálových parametrů  $C_1, C_2, C_3$ .

### 3 Popis deformace

Tato kapitola vychází z [3], [4] a [5].

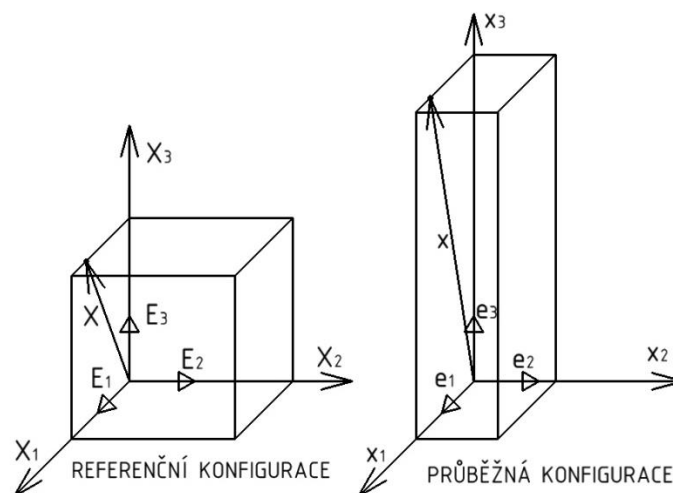
Deformací se obecně rozumí změna rozměrů tělesa.

Pro popis deformace tělesa z materiálu s nelineární charakteristikou se vychází ze dvou konfigurací sledovaného tělesa. První, před proběhnutím deformace, se nazývá počáteční, neboli referenční konfigurací a budeme pro ni používat souřadnicovou soustavu, jejíž osy budou označeny velkými písmeny  $X, Y, Z$ . Konfigurace ve stavu napjatosti bude mít osy totožné s osami referenční soustavy, které budou označeny malými písmeny  $x, y, z$ , a budeme ji nazývat konfigurací průběžnou.

Deformace tělesa je dána jeho pohybem. Předpokládáme, že se jedná o pohyb spojitý. Deformaci bereme jako zobrazení bodů tělesa z referenční konfigurace do bodů tělesa průběžné konfigurace. Existují dva základní typy popisu, materiálový a prostorový. Materiálový popis, nazývaný také lagrangeovský, zobrazuje původní stav na zdeformovaný. Prostorový popis vychází ze zdeformovaného stavu, který zobrazí na počáteční. Prostorový popis se nazývá eulerovský. V mechanice těles se častěji používá lagrangeovský popis.

Změnu konfigurace tělesa popisujeme pomocí deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ . Pro popis předpokládáme, že těleso je definované v eukleidovském prostoru. Deformační gradient je operátor, který transformuje diferenciální element referenční konfigurace na diferenciální element průběžné konfigurace.

$$dx(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \quad (3.1)$$



Obrázek 3.1 - Těleso v referenční a průběžné konfiguraci

Jedná se tedy o zobrazení elementárních polohových vektorů z referenční do průběžné konfigurace.

$$\mathbf{F}: \{(d\mathbf{X})\} \rightarrow \{(d\mathbf{x})\} \quad (3.2)$$

Vyjádříme-li  $\mathbf{F}$  v závislosti na  $d\mathbf{x}$  a  $d\mathbf{X}$ , platí

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.3)$$

V indexovém zápisu potom

$$F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K, \quad i = 1,2,3, \quad K = 1,2,3 \quad (3.4)$$

Vektory  $\mathbf{E}_K$  a  $\mathbf{e}_i$  jsou bázové vektory náležející referenční, resp. průběžné konfiguraci. Pro oba případy se jedná o vektory ve směru os  $x_1, x_2, x_3$ , resp.  $X_1, X_2, X_3$ . Znak  $\otimes$  označuje dyadický součin.

Na obrázku 3.1 je znázorněno těleso před deformací a po deformaci. Jsou zde zobrazeny vektory  $\mathbf{e}_i$  a  $\mathbf{E}_K$  a polohové vektory  $\mathbf{x}$ , resp.  $\mathbf{X}$ .

Jak již bylo zmíněno, ke každé deformaci dochází pohybem tělesa. Nicméně platí, že ne každý pohyb způsobí zdeformování tělesa. Deformační gradient popisuje změnu vzájemných poloh bodů v tělese. Vzhledem k tomu platí, že kromě změny rozměrů popisuje i natočení tělesa. V tomto natočení dochází k rotaci elementárních objemů tělesa jako tuhých celků a proto nedochází k deformaci.

Deformační gradient  $\mathbf{F}$  lze rozložit na čisté strečování a rotaci. K tomu využijeme větu o polárním rozkladu tenzoru. Deformační gradient tedy lze jednoznačně rozložit na součin symetrického pozitivně definitního tenzoru a ortogonálního tenzoru  $\mathbf{R}$ , tak, že platí rovnice (3.5).

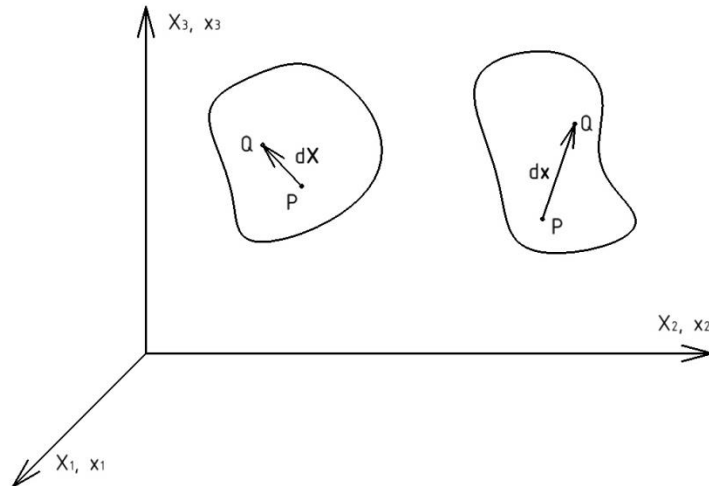
$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{v} \mathbf{R} \quad (3.5)$$

Pro ortogonální matici  $\mathbf{R}$  platí

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (3.6)$$

Tenzor  $\mathbf{R}$  také nazýváme rotační, protože představuje výše zmíněnou rotaci.

Tenzor  $\mathbf{U}$  nazýváme pravý tenzor strečů a tenzor  $\mathbf{v}$  nazýváme levý tenzor strečů.



Obrázek 3.2 - Definice deformace tělesa

Z obrázku 3.2 vyplývá, že těleso je zdeformované, pokud existuje alespoň jedna dvojice bodů PQ, pro které platí

$$|dx| \neq |dX| \quad (3.7)$$

Vztah (3.7) umocníme

$$(dx)^2 \neq (dX)^2 \quad (3.8)$$

$$dx \cdot dx \neq dX \cdot dX \quad (3.9)$$

Z (3.1) dosadíme za  $dx$

$$(\mathbf{F} d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} d\mathbf{X}) - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \neq 0 \quad (3.10)$$

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \neq 0 \quad (3.11)$$

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} \neq 0 \quad (3.12)$$

Kde  $\mathbf{I}$  je jednotkový tenzor.

Z (3.12) vyplývá, že k deformaci tělesa dojde právě když

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} \neq \mathbf{0} \quad (3.13)$$

Zavedeme pravý Cauchyův-Greenův tenzor deformace  $\mathbf{C}$ .

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (3.14)$$

Tenzor  $\mathbf{C}$  je symetrický.

Stejným způsobem lze zavést i levý Cauchyův-Greenův tenzor deformací  $\mathbf{b}$ .

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (3.15)$$

Pro tenzor  $\mathbf{b}$  také platí, že je symetrický.

Deformační gradient v obecném tvaru má devět nezávislých složek. Tenzory deformace zavádíme, abychom snížili počet nezávislých složek na šest a to odstraněním informace o rotaci. Pravý Cauchyův-Greenův tenzor deformací lze potom vyjádřit

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad (3.16)$$

Levý Cauchyův-Greenův tenzor deformací takto

$$\mathbf{b} = \mathbf{v}^2 \quad (3.17)$$

Další tenzory deformace jsou Greenův-Lagrangeův tenzor deformace  $\mathbf{E}$ , (materiálový) logaritmický tenzor deformace  $\ln \mathbf{U}$  a (prostorový) logaritmický tenzor deformace  $\ln \mathbf{v}$ . existují i další, které zde ale nebudeme uvádět.

Vektory, které při transformacích vektorových prostorů zachovávají svoji orientaci, nazýváme vlastní vektory. Pro zjištění vlastního vektoru  $\mathbf{v}$  tenzoru druhého řádu  $\mathbf{T}$  vyjdeme z této rovnice

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{pro } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad (3.18)$$

kde  $\lambda$  je reálné číslo.

Rovnici (3.18) upravíme do tvaru

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

Řešení rovnice (3.19) je netriviální pro singulární matici soustavy.

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (3.20)$$

Rozepsáním získáme charakteristikou rovnici

$$\lambda^3 - I_1(\mathbf{T}) \cdot \lambda^2 + I_2(\mathbf{T}) \cdot \lambda - I_3(\mathbf{T}) = 0 \quad (3.21)$$

Kořeny (3.21)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  nazýváme vlastní čísla.

Reálná čísla  $I_1, I_2, I_3$  nazýváme hlavní invarianty tenzoru  $\mathbf{T}$ .

Hlavní invarianty symetrického pozitivně definitního tenzorů lze určit takto

$$I_1(\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (3.22)$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}(\text{tr}^2(\mathbf{T}) - \text{tr}(\mathbf{T}^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \quad (3.23)$$

$$I_3(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (3.24)$$

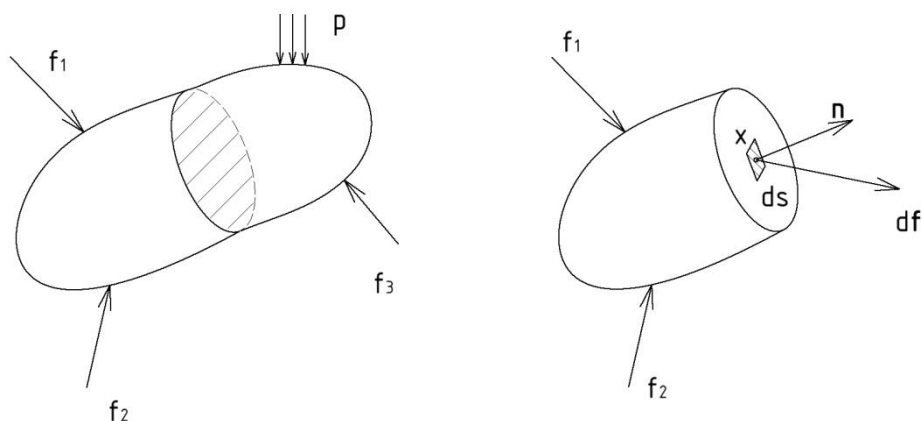


Platí, že vlastní čísla tenzorů  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{v}$  jsou shodná, a stejně tak vlastní čísla tenzorů  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{b}$  jsou stejná. Vlastní čísla tenzorů  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{v}$  nazýváme hlavní streče.

## 4 Napjatost

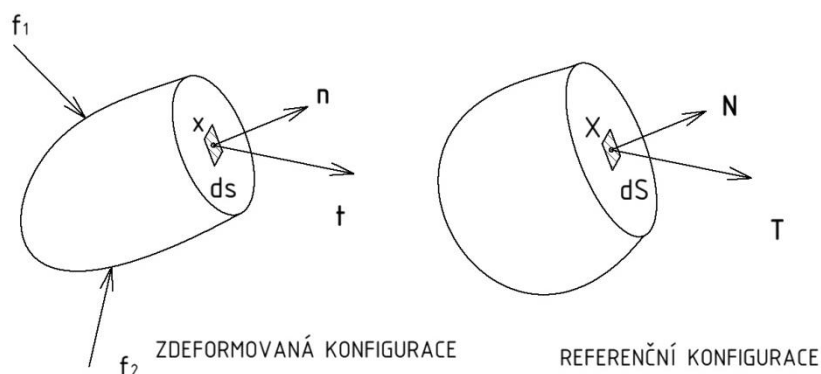
Napjatost je stav tělesa, který lze matematicky popsat existencí vnitřních sil v tělese.

Máme obecné těleso, na které působí vnější zatížení a které je ve statické rovnováze. Pro zjištění vnitřních sil tělesa provedeme zvoleným bodem tělesa myšlený řez. Zvolme tedy bod  $x$ , kterým provedeme myšlený řez, a tím oddělíme část tělesa. Do bodu  $x$  vložíme diferenciální výslednici vnitřních sil  $df$ . Vektor  $df$  uvádí těleso do rovnováhy po myšleném odříznutí jeho části. Vektor  $df$  je zobrazen na obrázku 4.1, kde vektor  $n$  představuje normálu roviny řezu. [6]



Obrázek 4.1 - Rozdělení tělesa metodou řezu a zavedení vektoru  $df$

Zavedme vektor plošné intenzity vnitřních sil  $t$  a to tak, že v ploše  $ds$  řezu bude vytvářet ekvivalentní silové působení jako  $df$ . Takto definovaný vektor  $t$  budeme nazývat Cauchyův, neboli skutečný vektor intenzity vnitřních sil, často označovaný jako napěťový vektor. V rovnici (4.1)  $ds$  představuje diferenciální element plošky řezu. [7] [5]



Obrázek 4.2 - Zavedení vektorů intenzity vnitřních sil  $t$ , resp.  $T$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds \quad (4.1)$$

Dále zavedeme vektor intenzity vnitřních sil definovaný pro referenční konfiguraci, který nazveme smluvní a označíme  $T$ . Vektor  $T$  získáme tak, že těleso převedeme do referenční konfigurace při zachování vnějších sil. Bodem  $X$ , který v čase  $t$  odpovídá bodu  $x$ , vedeme řez s normálovým vektorem  $N$ . Umístění  $d\mathbf{f}$  do této referenční konfigurace nám umožní definovat  $T$  tak, aby vytvářel ekvivalentní silové působení k  $d\mathbf{f}$ .

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T} dS \quad (4.2)$$

Tenzor napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ , resp.  $\mathbf{P}$  definujeme jako lineární transformaci vektoru normály roviny řezu  $\mathbf{n}$ , resp.  $N$  na vektor plošné intenzity vnitřních sil  $\mathbf{t}$ , resp.  $T$ . Tenzorem Cauchyova (skutečného) napětí nazýváme  $\boldsymbol{\sigma}$  a  $\mathbf{P}$  označujeme jako tenzor nominálního (smluvního) napětí.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} N \quad (4.4)$$

Tenzor Cauchyova napětí je symetrický.

Rozepíšeme-li rovnici (4.3) po složkách, dostaneme

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

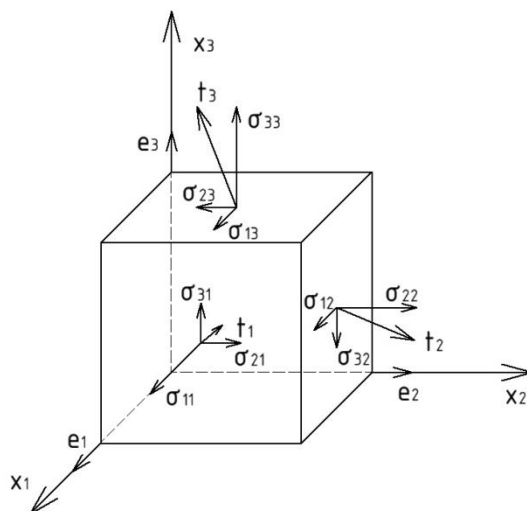
Pro každou složku tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  platí skalární součin uvedený v rovnici (4.6).

$$\sigma_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{t}_k \quad (4.6)$$

A pro složky vektoru  $\mathbf{t}$  platí

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 \quad (4.7)$$

Na obrázku 4.3 jsou zobrazeny složky tenzoru skutečného napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  a složky vektoru skutečné intenzity vnitřních sil v infinitesimálním elementu. První index jednotlivých složek označuje směr, ve kterém složka působí, a druhý index označuje normálu plochy, které složka náleží.



Obrázek 4.3 - Zobrazení složek tenzoru  $\sigma$  a složek vektoru  $t$

## 5 Nafukování válcové trubice

Při popisu nafukování válcové trubice je výhodnější použití válcových, spíš než kartézských souřadnic. Převod mezi kartézskými  $X, Y, Z$  a válcovými  $R, \Theta, Z$  souřadnicemi popisují rovnice (5.1) a (5.2). [5] [7]

$$(R, \theta, Z) = \left( \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \arctg \left( \frac{X_2}{X_1} \right), X_3 \right) \quad (5.1)$$

$$(X_1, X_2, X_3) = (R \cos \theta, R \sin \theta, Z) \quad (5.2)$$

Bázové vektory válcového souřadného systému vyjádřené pomocí bázových vektorů kartézského souřadného systému lze psát

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R &= \cos \theta \mathbf{E}_1 + \sin \theta \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{E}_1 + \cos \theta \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_Z &= \mathbf{E}_3 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Polohový vektor  $\mathbf{X}$  je potom popsán takto

$$\mathbf{X} = R \mathbf{E}_R(\theta) + Z \mathbf{E}_Z \quad (5.4)$$

Z popisu bázových vektorů je zřejmé, že jsou závislé na okamžité poloze, respektive na velikosti úhlu  $\Theta$ .

Deformační gradient je pro deformaci válcové trubice definován podle (5.5), kde koeficienty  $|g_i|$  a  $|G_K|$  představují normalizační koeficienty.

$$\mathbf{F} = \frac{|g_i| \partial x_i}{|G_K| \partial X_K} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K \quad (5.5)$$

Kde za  $i$  dosazujeme  $r, \theta, z$  a za  $K$   $R, \Theta, Z$ .

Normalizační koeficienty  $g_i$  lze vyjádřit

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_r &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial r} \mathbf{e}_3 = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \mathbf{g}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \mathbf{e}_3 \\ &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \\ \mathbf{g}_z &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial z} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial z} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial z} \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Stejným způsobem vyjádříme koeficienty  $G_K$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_R &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \mathbf{G}_\theta &= (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) \\ \mathbf{G}_Z &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pro velikosti normalizačních vektorů pak platí

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}_i| &= 1, r, 1 & i &= r, \theta, z \\ |\mathbf{G}_K| &= 1, R, 1 & K &= R, \theta, Z \end{aligned} \quad (5.8)$$

Po dosazení (5.8) do (5.5) dostaneme obecné vyjádření pro deformační gradient

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{rR} & F_{r\theta} & F_{rZ} \\ F_{\theta R} & F_{\theta\theta} & F_{\theta Z} \\ F_{zR} & F_{z\theta} & F_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial R} & r \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Člen  $F_{rR}$  je nenulový, pokud dochází ke změně tloušťky trubky.  $F_{r\theta}$  popisuje závislost zdeformovaného poloměru  $r$  na úhlu  $\theta$ .  $F_{rZ}$  není roven nule, pokud dochází k vyboulení trubky, respektive pokud je velikost zdeformovaného poloměru  $r$  závislá na souřadnici  $Z$ .

$F_{\theta R}$  popisuje zkosení po obvodu. Pro úlohy, které se deformují symetricky, k této deformaci nedochází. Pro  $F_{\theta\theta}$  platí, že je pro většinu úloh roven 1. Člen  $F_{\theta Z}$  je nenulový v případě, že dochází k podélnému zkrutu.

Člen  $F_{zR}$  není rovný nule, pokud deformace válcových vrstev trubky závisí na poloměru  $R$ .  $F_{z\theta}$  je nenulový, pokud axiální deformace trubky závisí na úhlu  $\theta$ .  $F_{zZ}$  popisuje axiální deformaci trubky.

Nejjednodušší varianta deformačního gradientu je pro nafukování a protahování válcové trubky

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

## 6 Hyperelasticita

Tato kapitola vychází z [3], [4] a [7].

Hyperelasticitou se nazývá tzv. Greenův přístup, pomocí kterého sestavujeme konstitutivní rovnice pro nelineární materiál. Konstitutivní rovnice pro pružná tělesa popisují závislost mezi složkami tenzorů deformace a napětí.

Greenův přístup vychází z popisu hustoty deformační energie, kterou hledáme ve formě potenciálové funkce. Deformační energie je skalární funkcí tenzoru deformace. Derivováním hustoty deformační energie  $W$  podle složek tenzoru deformace dostaneme složku tenzoru napětí.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad (6.1)$$

Hyperelastický materiál je takový, který je pružný, což znamená, že při jeho deformaci nedochází k maření energie. Platí pro něj, že změna deformační energie je dána pouze přírůstkem vnitřní energie.

V počáteční konfiguraci bereme

$$W(\mathbf{F} = \mathbf{I}) = 0 \quad (6.2)$$

Elastomery považujeme za nestlačitelné materiály.

Pro determinant deformačního gradientu platí, že představuje relativní změnu objemu elementu  $J$ .

$$\det \mathbf{F} = J \quad (6.3)$$

Kde pro  $J$  platí

$$dv = J dV \quad (6.4)$$

Pro nestlačitelný materiál platí, že se jeho objem nemění. To znamená, že  $J = 1$  a tedy

$$J = 1 \rightarrow \det \mathbf{F} = J = 1 \quad (6.5)$$

Pro nestlačitelný hyperelastický materiál platí rovnice pro popis deformační energie ve tvaru

$$W = W(\mathbf{F}) - p(J - 1) \quad \text{pro } J = 1 \quad (6.6)$$

Tenzor smluvního napětí  $\mathbf{P}$  lze po dosazení do rovnice (6.1) vyjádřit v závislosti na deformační energii tímto způsobem

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-T} \quad (6.7)$$

V rovnici (6.7) představuje  $p$  neurčitý Lagrangeův multiplikátor, který musíme určit ze silové okrajové podmínky. Obvykle se nazývá hydrostatický tlak a určuje se z okrajových podmínek.

Rovnici (6.7) lze převést na závislost skutečného tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  na deformačním gradientu

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p\mathbf{I} \quad (6.8)$$

## 6.1 Modely pro vyjádření izotropní hustoty deformační energie $W$

Základní model, který pro vyjádření hustoty deformační energie využívá první invariant tenzoru  $\mathbf{C}$ ,  $I_1(\mathbf{C})$ , se nazývá neo-hookeovský model.  $W$  je definované podle rovnice

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (6.9)$$

Kde  $\mu$  považujeme za smykový modul v oblasti malých deformací a lze ho pro malé deformace vyjádřit

$$\mu = \frac{E}{[2(1 + \nu)]} \quad (6.10)$$

Kde  $E$  je modul pružnosti a  $\nu$  je Poissonovo číslo.

Neo-hookeovský model odpovídá pozorovanému chování pouze v oblasti malých deformací.

Hustota deformační energie rivlinovského typu je definovaná

$$W = \sum_{i=1, k=1}^n C_{ik}(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^k + \sum_{q=1}^m D_q (J - 1)^{2m} \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (6.11)$$



Koeficienty  $C_{ik}$  a  $D_q$  jsou materiálové parametry.  $D_q$  představuje objemovou stlačitelnost.

Model, který použijeme pro popis hustoty deformační energie  $W$  v této práci, vychází z popisu  $W$  rivlinovského typu, kdy  $W$  vyjádří pouze jako závislost na  $I_1$  a materiálových parametrech  $C_i$  a kde pro  $n$  platí  $n = 3$ . Tento model se nazývá Yeohův.

$$W = \sum_{i=1}^{n=3} C_i (I_1 - 3)^i \quad (6.12)$$

## 7 Rovnice obecné pružnosti

Tato kapitola vychází z [8] a [9].

V obecné prostorové statické úloze o deformaci pružného tělesa existuje celkem 15 neznámých, které jsou funkcemi souřadnic  $x, y, z$ . Jsou to posuvy  $(u, v, w)$ , přetvoření  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  a napětí  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$ .

Uvnitř řešené oblasti musí být splněny rovnice rovnováhy (7.1). To znamená, že tenzor napětí odpovídající okamžitému stavu tělesa je musí v každém okamžiku splňovat.

Kromě rovnic rovnováhy musí platit i rovnice konstitutivní a rovnice geometrické. Tyto rovnice se dohromady nazývají rovnicemi obecné pružnosti. K řešení úlohy pro daný problém je třeba znát okrajové podmínky.

Rovnice rovnováhy váží dohromady normálová a smyková napětí. Získají se z podmínek rovnováhy vnitřního elementu tělesa, na které působí objemová síla o složkách  $o_x, o_y, o_z$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + o_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + o_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + o_z &= 0\end{aligned}\tag{7.1}$$

Okrajové podmínky stanovující posuvy na určitém úseku povrchu tělesa bývají obvykle známy z uložení tělesa. Druhý typ okrajových podmínek jsou takové, které popisují silové působení na povrchu tělesa.

Při aplikaci rovnic obecné pružnosti pro konkrétní úlohy se neřeší všech 15 neznámých. Postupným dosazením rovnic se sníží počet neznámých, nejčastěji tak, že zůstanou rovnice pro jednu skupinu neznámých funkcí. Tyto funkce se nazývají nezávislé neznámé funkce. Podle volby neznámých funkcí se postup řešení dělí na silový a deformační, případně smíšený. Pro silový postup jsou neznámé funkce složky napětí, pro deformační pak složky posuvů.

## 8 Řešení rovnic obecné pružnosti

Pro vlastní výpočet řešení je možné použít jednu ze dvou základních možností, a to analytické nebo numerické řešení. [9] [10]

Analytické řešení poskytuje řešení ve tvaru spojitých funkcí. Při nalezení řešení v uzavřeném tvaru udává obecnou závislost mezi vstupními a výstupními veličinami dané úlohy. Takovéto řešení nicméně existuje pouze pro malý počet typů úloh, nejčastěji s jednoduchou geometrií.

Numerické řešení je platné pouze pro konkrétní zadání. Jedná se o způsob výpočtu založený na diskretizaci tělesa na konečný počet malých oblastí, elementů, pro které jsou jednotlivě získána řešení. Těleso je zde tedy vnímáno jako diskrétní oblast a nikoli kontinuum, což snižuje počet neznámých parametrů z nekonečného na konečný počet. Při výpočtu se využívá interpolace pro získání řešení pro jednotlivé elementy. Řešení pro celé těleso se získá složením jednotlivých řešení elementů do celkového řešení.

### 8.1 Numerické řešení - Metoda konečných prvků

Vznik výpočetní metody se řadí do 50. let minulého století, kdy také nastal rozvoj tohoto způsobu výpočtu díky rozvoji počítače, který umožnil výpočet větších soustav rovnic. Pokrok v oblasti aplikace MKP pokračoval dále a dnes existuje velké množství programů, které ji k získání řešení používají. Mezi nejznámější patří programy ABAQUS a ANSYS. [10] [9]

Pro matematickou formulaci problému existují dva základní přístupy, diferenciální a variační.

Diferenciální přístup popisuje daný problém soustavou diferenciálních rovnic.

Princip variační formulace spočívá v hledání řešení jako stavu, ve kterém energie tělesa dosahuje extrémní hodnoty. Tento přístup je využíván v souvislosti s numerickými metodami a MKP.

Deformační varianta MKP je založena na lagrangeově variačním principu. Ten zní takto:

„Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udílejí celkové potenciální energii  $\Pi$  stacionární hodnotu.“

Stacionární hodnota je jednoznačná a představuje minimum potenciální energie  $\Pi$ . Pro celkovou potenciální energii platí:

$$\Pi = U - A \quad (8.1)$$

kde  $U$  je energie napjatosti tělesa  $\Omega$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV \quad (8.2)$$

a  $A$  je potenciál vnějšího zatížení

$$A = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{o} \cdot dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dS \quad (8.3)$$

Celková potenciální energie se vypočítá jako součet dílčích potenciálních energií jednotlivých elementů.

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (8.4)$$

Proměnné použité v rovnicích jsou posuvy, přetvoření, napětí, objemové zatížení a plošné zatížení.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= [u, v, w] \\ \boldsymbol{\varepsilon}^T &= [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}] \\ \boldsymbol{\sigma}^T &= [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}] \\ \mathbf{o}^T &= [o_x, o_y, o_z] \\ \mathbf{p}^T &= [p_x, p_y, p_z] \end{aligned} \quad (8.5)$$

Jak již bylo zmíněno, pro nalezení numerického řešení je nutné těleso rozdělit, diskretizovat, na konečný počet elementů. Toto rozdělení umožňuje i potenciální energii  $\Pi$  vyjádřit jako funkci konečného počtu parametrů.

Těleso je tedy rozděleno na konečný počet elementů. Pomocí elementů musí být řešené těleso spojitě a jednoznačně definováno. Existují různé charakteristiky elementů, mezi základní potom patří jejich počet a poloha uzlů.

Uzel je bod, ve kterém zjišťujeme koeficienty  $u_i, v_j, w_k$ .

Určením tvaru, typu a počtu elementů definujeme síť, pomocí které se při výpočtu zjišťuje řešení. Přesnost řešení je velmi ovlivněna hustotou a rozložením sítě.

Bázové funkce  $N_i(x, y, z), N_j(x, y, z), N_k(x, y, z)$  jsou předem známé funkce, jejichž součet se využívá jako aproximační funkce posuvů.

Neznámé složky posuvů v uzlových bodech sítě označujeme  $u_i, v_j, w_k$ .

Pro získání aproximace posuvů těmito složkami vynásobíme báze funkce.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) \cdot u_i \\ v(x, y, z) &= \sum_{j=1}^m N_j(x, y, z) \cdot v_j \\ w(x, y, z) &= \sum_{k=1}^n N_k(x, y, z) \cdot w_k \end{aligned} \tag{8.6}$$

Použitím této aproximace vyjádříme potenciální energii jako funkci konečného počtu proměnných.

Z minima potenciální energie vyplývá soustava rovnic, ze kterých určíme koeficienty  $u_i, v_j, w_k$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_j} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w_k} &= 0 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Pro potřeby výpočtu MKP, který jsme provedli v programu ABAQUS, použijeme hybridní formulaci MKP.

## 8.2 Využitý postup MKP pro válcovou trubku v programu ABAQUS

V programu ABAQUS jsme nafoukli pět různých uspořádání trubek. Pro bod ležící v polovině délky trubky jsme zjistili deformační průběhy a ty jsme dále použili pro odhad materiálových parametrů.

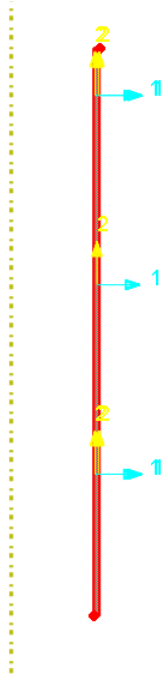
### 8.2.1 Modelování trubky

Prvním krokem při použití programu ABAQUS pro numerický výpočet deformací a napětí bylo zkonstruování požadovaného tvaru. Model byl 2D a symetrický. Rozměry a názvy jednotlivých modelů jsou uvedeny v tabulce 2.1. [11]

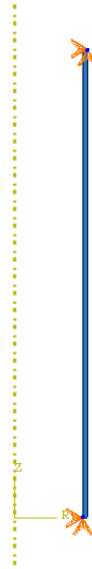
### 8.2.2 Materiál a orientace souřadného systému

Použitý materiál byl zadaný jako izotropní hyperelastický materiál. Popsán byl rovnicí ((6.12)).

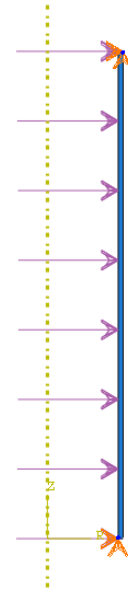
Vzhledem k tomu, že se zkoumaly kuželovité trubky, bylo praktické zavést souřadný systém v závislosti na velikosti sklonu obrysových hran trubky před deformací. Nový souřadný systém měl osy nazvané 1, 2 a 3. Tyto osy korespondovaly s lokálním válcovým souřadným systémem, kde osa 1 představovala osu  $Rr$ , osa 2 představovala osu  $Zz$  a osa 3 pak osu  $\Theta\theta$ . Souřadný systém je znázorněn na obrázku 8.1. [11]



Obrázek 8.1 - Zobrazení souřadného systému



Obrázek 8.2 - Zobrazení uložení



Obrázek 8.3 - Zobrazení zatížení

### 8.2.3 Okrajové podmínky

Oba konce trubky byly zadané jako vetknuté. Na obrázku 8.2 je zobrazeno uložení trubky. Šipky znázorňují místa vetknutí. [11]

### 8.2.4 Zatížení

Trubky byly, podle zadání, zatíženy vnitřním tlakem  $P$  o maximální velikosti  $P = 25 \text{ kPa}$ . Na začátku výpočtu byl tlak  $P = 0 \text{ kPa}$  a ve 29 krocích byl postupně zvyšován na hodnotu  $P = 25 \text{ kPa}$ . Zatížení trubky je znázorněno na obrázku Obrázek 8.3, kde fialové šipky mají význam tlaku. [11]

### 8.2.5 Diskretizace

Síť byla na tělese vytvořena tímto způsobem. Těleso bylo po tloušťce stěny rozděleno na 6 stejně velkých elementů. Po délce pak bylo těleso rozděleno na 100 elementů, jejichž hustota byla směrem ke krajům na obou stranách zvýšena. Detailní zobrazení sítě na části trubky je zobrazeno na obrázku 8.4, kde je možné vidět změny hustoty elementů směrem ke kraji. [11]

Použitý typ elementu byl označen CAX8H. Jedná se o standardní, symetrický, kvadratický element s použitím hybridní formulace.



Obrázek 8.4 - Detail diskretizace trubky

## 9 Analytický model nafukování tenkostěnné trubice

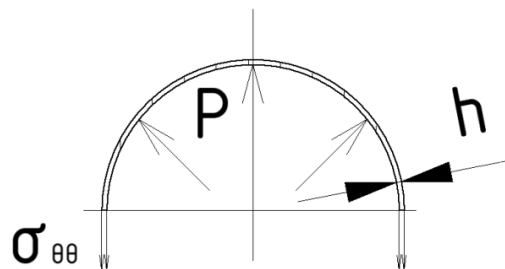
Tato kapitola vychází z [6] a [1].

Modely trubky, se kterými zde pracujeme, lze, vzhledem k tomu, že tloušťka stěny  $h$  je více než desetkrát menší než ostatní rozměry, pro všech pět variant považovat za tenkostěnnou nádobu.

Vzhledem k tenkostěnnosti nádoby a k poloze vyšetřovaného bodu v polovici délky trubky, kde již se již neprojevují vlivy vetknutí, můžeme předpokládat, že se skořepina nachází v membránovém stavu.

Jsou také splněny nutné podmínky zachování skořepinového stavu. Velikost spojitého zatížení skořepiny se nemění náhle, je konstantní a rovno  $P$ . Vzhledem k tomu, že se jedná o tlak, platí, že je v každém místě povrchu kolmý ke stěně trubky, tím je splněna i podmínka směru vnější působící síly. Tloušťka stěny skořepiny je také konstantní a rovna  $t$ . Poloměry křivosti ani poloha středu křivosti se nemění.

Tečné napětí  $\sigma_{\theta\theta}$



Obrázek 9.1 - Řez trubkou ve směru kolmém na osu trubky

Z obrázku 9.1 vyplývá

$$P \cdot l \cdot 2 \cdot r - \sigma_{\theta\theta} \cdot h \cdot l \cdot 2 = 0 \quad (9.1)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P \cdot r}{h}$$

Radiální napětí  $\sigma_{rr}$

Radiální napětí se z důvodu tenkostěnnosti zanedbává a považuje se za nulové.

$$\sigma_{rr} = 0 \quad (9.2)$$

Axiální napětí  $\sigma_{zz}$

Vzhledem k tomu, že se jedná o otevřenou nádobu, je axiální napětí rovno nule.

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (9.3)$$



## 10 Způsob odhadu materiálových parametrů $C_1$ , $C_2$ a $C_3$

Tato kapitola vychází z [1] a [5].

Při odhadu materiálových parametrů vyjdeme z vyjádření hustoty deformační energie podle Yeohova modelu, který rozepíšeme pro  $n = 3$ .

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_1 - 3)^3 \quad (10.1)$$

Vyjádríme první invariant tenzoru  $\mathbf{C}$  jako závislost hlavních strečů  $\lambda_{rR}$ ,  $\lambda_{\theta\theta}$ ,  $\lambda_{zZ}$ .

$$I_1 = \lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 \quad (10.2)$$

Podle rovnice (6.8) vyjádríme jednotlivé složku tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  pomocí hlavních strečů.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} - p \\ \sigma_{zz} &= \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p \end{aligned} \quad (10.3)$$

Po dosazení (10.1), (10.2) do (10.3) a po provedení derivací získáme složky napětí v tomto tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda_{rR} \left[ 2C_1 \lambda_{rR} + 4C_2 (\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3) \lambda_{rR} \right. \\ &\quad \left. + 6C_3 (\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3)^2 \lambda_{rR} \right] - p \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \lambda_{\theta\theta} \left[ 2C_1 \lambda_{\theta\theta} + 4C_2 (\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3) \lambda_{\theta\theta} \right. \\ &\quad \left. + 6C_3 (\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3)^2 \lambda_{\theta\theta} \right] - p \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \lambda_{zZ} \left[ 2C_1 \lambda_{zZ} + 4C_2 (\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3) \lambda_{zZ} \right. \\ &\quad \left. + 6C_3 (\lambda_{rR}^2 + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3)^2 \lambda_{zZ} \right] - p \end{aligned} \quad (10.6)$$

Z rovnic (9.1), (9.2), (9.3) víme, že

$$\sigma_{rr} = 0 \quad (10.7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P \cdot r}{h} \quad (10.8)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (10.9)$$

Předpokládáme, že se jedná o nestlačitelný hyperelastický materiál, z čehož vyplývá

$$\lambda_{rR} \cdot \lambda_{\theta\theta} \cdot \lambda_{zZ} = 1 \quad (10.10)$$

Z rovnice (10.10) vyjádříme  $\lambda_{rR}$

$$\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ}} \quad (10.11)$$

Pro vyjádření  $p$  spojíme rovnice (10.4) a (10.7) a dosadíme rovnici (10.11)

$$p = \frac{\frac{2C_1}{\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ}} + \frac{4C_2 \left( \frac{1}{\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3 \right)}{\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ}} + \frac{6C_3 \left( \frac{1}{\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3 \right)}{\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ}}}{\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ}} \quad (10.12)$$

Popíšeme závislost průběžného poloměru  $r$  a průběžné tloušťku stěny  $h$  na referenčních hodnotách  $R$ , resp.  $H$ .

$$r = \lambda_{\theta\theta} R \quad (10.13)$$

$$h = \lambda_{rR} H \quad (10.14)$$

Vyjádříme  $\sigma_{\theta\theta}$  pomocí rovnic (10.4) b) a (10.7) b), do kterých dosadíme (10.11) a (10.13). Pro zkrácení zápisu použijeme vyjádření  $p$  v rovnici (10.12). Zavedeme dvě vyjádření  $\sigma_{\theta\theta}$ , jedno v závislosti na strečích  $\lambda_{\theta\theta}$  a  $\lambda_{zZ}$  a materiálových parametrech  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , které nazveme modelové a druhé v závislosti na strečích  $\lambda_{\theta\theta}$  a  $\lambda_{zZ}$  a tlaku  $P$ , které nazveme experimentální.

Pro modelové  $\sigma_{\theta\theta}$  vyjdeme z rovnice (10.5), do které dosadíme z rovnic (10.10), (10.11) a (10.12).

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{MOD} = & \lambda_{\theta\theta} \left[ 2C_1 \lambda_{\theta\theta} + 4C_2 \left( \frac{1}{\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3 \right) \lambda_{\theta\theta} \right. \\ & \left. + 6C_3 \left( \frac{1}{\lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ}^2} + \lambda_{\theta\theta}^2 + \lambda_{zZ}^2 - 3 \right)^2 \lambda_{\theta\theta} - p \right] \end{aligned} \quad (10.15)$$

Experimentální  $\sigma_{\theta\theta}$  získáme z rovnice (10.8), kam dosadíme (10.11), (10.13) a (10.14).

$$\sigma_{\theta\theta}^{EXP} = \frac{P \cdot \lambda_{\theta\theta}^2 \cdot R \cdot \lambda_{zZ}}{H} \quad (10.16)$$

Pro dodržení podobnosti úlohy řešené v programu ABAQUS a úlohy řešené analyticky je třeba zavést podmínku, která zamezí deformaci ve směru osy trubky. Pro numerické řešení je totiž trubka uchycená z obou stran.

$$\lambda_{zz} = 1 \quad (10.17)$$

Koeficienty  $C_1, C_2, C_3$  získáme tak, že od sebe odečteme modelové a experimentální napětí, které umocníme a pomocí programu MAPLE minimalizujeme s podmínkou, že směrnice tečny ke křivce závislosti obvodového napětí na obvodové deformaci musí být kladná, tedy že  $E$  musí být kladný. [12] [6]

$$\mathbf{E}_\theta = \boldsymbol{\sigma}_{\theta\theta}^{MOD} - \boldsymbol{\sigma}_{\theta\theta}^{EXP} \quad (10.18)$$

$$Q = \mathbf{E}_\theta \cdot \mathbf{E}_\theta \quad (10.19)$$

Podmínku pro modul pružnosti vyjádříme

$$E = \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{TAH}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} > 0 \quad (10.20)$$

Pro rozepsání podmínky uvedené v rovnici (10.20) vyjdeme z tahové zkoušky pro část trubky. Budeme-li předpokládat, že natahování probíhá ve směru osy trubky, platí pro radiální a obvodovou deformaci

$$\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta} \quad (10.21)$$

Použijeme rovnici (10.5), do které dosadíme rovnice (10.11), (10.12) a (10.21), a získáme vyjádření pro  $\sigma_{\theta\theta}^{TAH}$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{TAH} = & \lambda_{\theta\theta} \left[ 2 C_1 \cdot \lambda_{\theta\theta} + 4 C_2 \left( \frac{2}{\lambda_{\theta\theta}} + \lambda_{\theta\theta}^2 - 3 \right) \lambda_{\theta\theta} \right. \\ & \left. + 6 C_3 \left( \frac{2}{\lambda_{\theta\theta}} + \lambda_{\theta\theta}^2 - 3 \right)^2 \lambda_{\theta\theta} \right] \\ & - \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\theta\theta}}} \left( 2 C_1 \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\theta\theta}}} + 4 C_2 \left( \frac{2}{\lambda_{\theta\theta}} + \lambda_{\theta\theta}^2 - 3 \right) \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\theta\theta}}} \right. \\ & \left. + 6 C_3 \left( \frac{2}{\lambda_{\theta\theta}} + \lambda_{\theta\theta}^2 - 3 \right)^2 \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\theta\theta}}} \right) \end{aligned} \quad (10.22)$$

Po zderivování rovnice (10.22) získáme závislost  $E$  na  $\lambda_{\theta\theta}$  a na materiálových parametrech, což využijeme jak pro minimalizaci  $Q$ , tak pro kontrolu fyzikální správnosti získaných parametrů  $C_1, C_2, C_3$ .

Pro každou konfiguraci tímto způsobem získáme sadu parametrů, které odpovídají minimální hodnotě  $Q$ .

## 11 Srovnání napětí a deformací podle velikosti kuželovitosti trubky

V této kapitole budou uvedeny výsledky výpočtu napětí a deformací podle programu ABAQUS. [11]

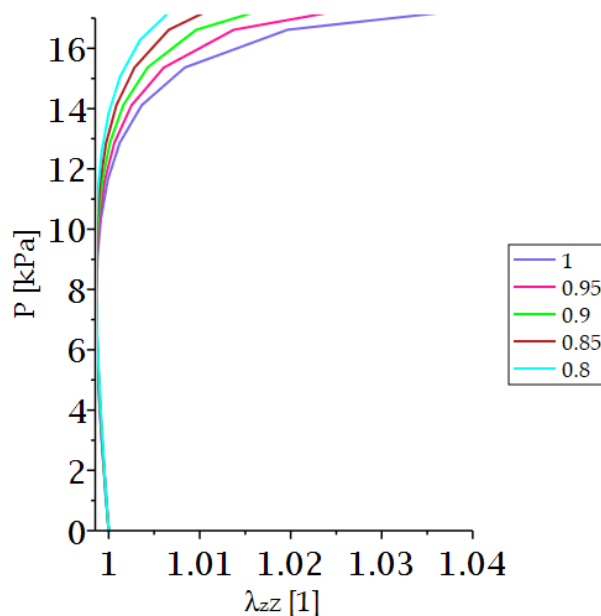
Program ABAQUS využívá pro výpočet deformací (materiálový) logaritmický tenzor deformace  $\ln U$ .

Data získaná z ABAQUSu byla přepočítána na hodnoty, se kterými dále pracujeme tímto způsobem.

$$\begin{aligned} \lambda_{iK} &= e^{L_{iK}} \quad \text{pro } i = r, \theta, z \quad K = R, \theta, Z \\ \sigma_{ik} &= S_{ik} \quad \text{pro } i, k = r, \theta, z \\ P &= -S_{11} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Kde hodnoty  $L_{iK}$  a  $S_{ik}$  představují deformace, resp. napětí získaná numerickým výpočtem.

Maximální hodnota tlaku musí být kvůli podmínce uvedené v (10.17) omezena do hodnoty tlaku  $P = 17 \text{ kPa}$ . Je to hodnota, která odpovídá deformaci  $\lambda_{zZ} \approx 1$ , resp. konkrétně hodnotě  $\lambda_{zZ} = 1,02$ , což se dá považovat za splnění podmínky podle (10.17).

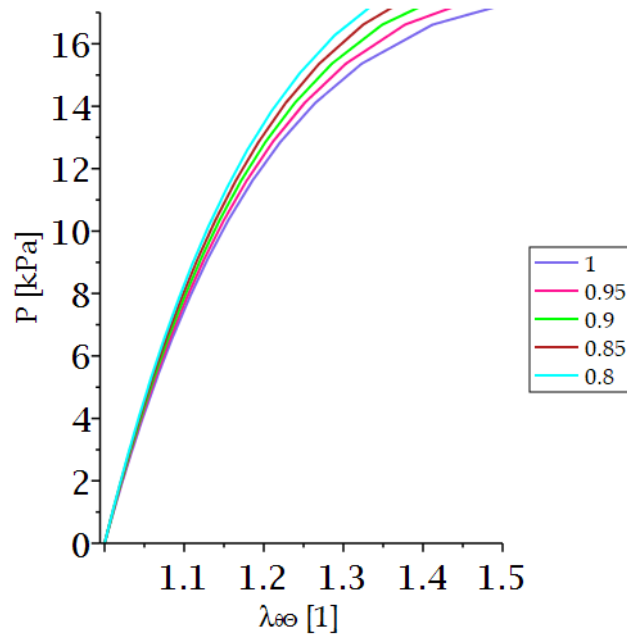


Graf 11.1 - Závislost tlaku na axiální deformaci

V grafu 11.1 je vykreslena závislost tlaku na axiální deformaci. Zejména pro vyšší hodnoty tlaku je patrné, že se jedná o nelineární závislost, což odpovídá použitému materiálu. Pro hodnoty tlaku až k přibližně  $P = 10 \text{ kPa}$  platí, že se deformace

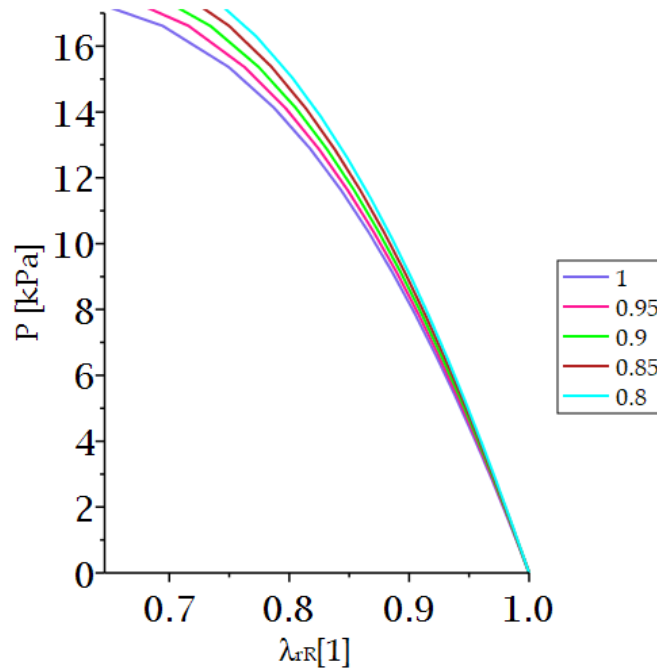
jednotlivých trubek příliš neliší a deformace je téměř nulová. Nicméně pro vyšší hodnoty tlaku platí, že hodnota tlaku, při kterém se dosáhne určité deformace je pro různé konfigurace trubky různě velká, přičemž pro ideálně válcovitou je nejmenší. Lze tedy říct, že vyšší kuželovitost odpovídá vyšší tuhosti trubky.

Graf 11.2 zobrazuje závislost tlaku na tečné deformaci. Jedná se také o nelineární závislost. Je z něj možné usoudit, že trubka s menší kuželovitostí je poddajnější než trubka s vyšší kuželovitostí.



Graf 11.2 - Závislost tlaku na tečné deformaci

Závislost tlaku na radiální deformaci trubky je zobrazena v grafu 11.3.

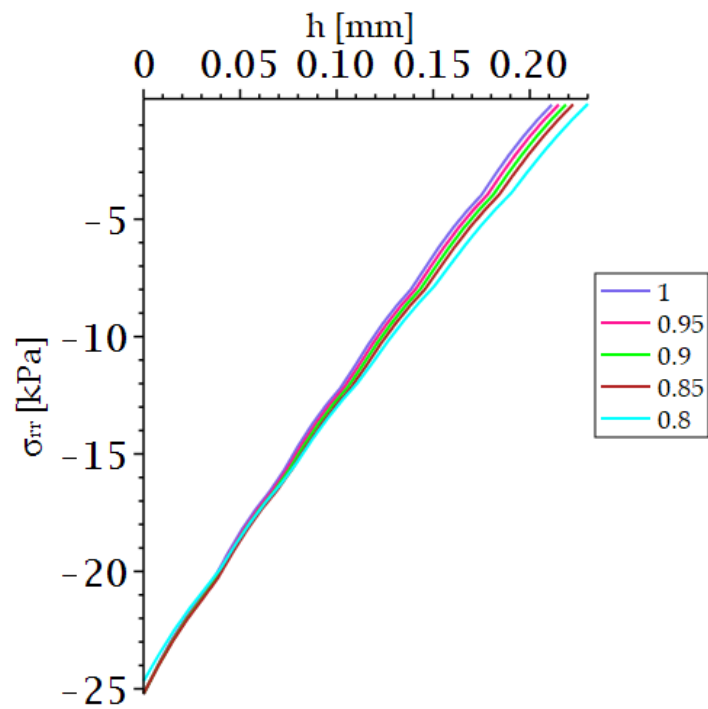


Graf 11.3 - Graf závislosti tlaku na radiální deformaci

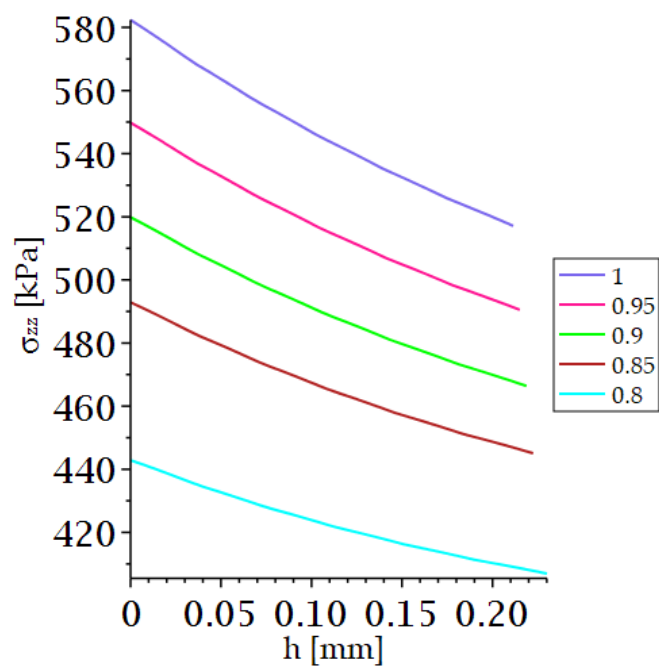
Graf 11.4 znázorňuje průběh radiálního napětí po tloušťce stěny trubky  $h$ . V grafu je použita zdeformovaná tloušťka stěny. Platí, že na vnitřním poloměru je radiální napětí rovno tlaku, který ve trubce působí  $\sigma_{rr}(r_i) = -P$  a na vnějším poloměru je rovno nule  $\sigma_{rr}(r_e) = 0$ .

V grafech 11.5 a Graf 11.6 jsou zobrazeny průběhy axiálního, resp. tečného, napětí po tloušťce zdeformované stěny. Pro obě tyto závislosti platí, že rozdíly mezi jednotlivými stupni kuželovitosti trubek jsou značné. V obou případech je nejvyšších napětí dosaženo u válcové trubky a nejmenších napětí u trubky s největší kuželovitostí.

Smykové napětí působící ve stěně trubek není nulové, nicméně vzhledem k hodnotám ostatních působících napětí jsou jeho hodnoty zanedbatelné. Hodnoty zkosu by měly, vzhledem k tomu, že se jedná o symetrickou úlohu, být nulové. Ze simulace vyšly jejich maximální hodnoty v řádu tisícín procent a lze je tedy skutečně považovat za nulové.

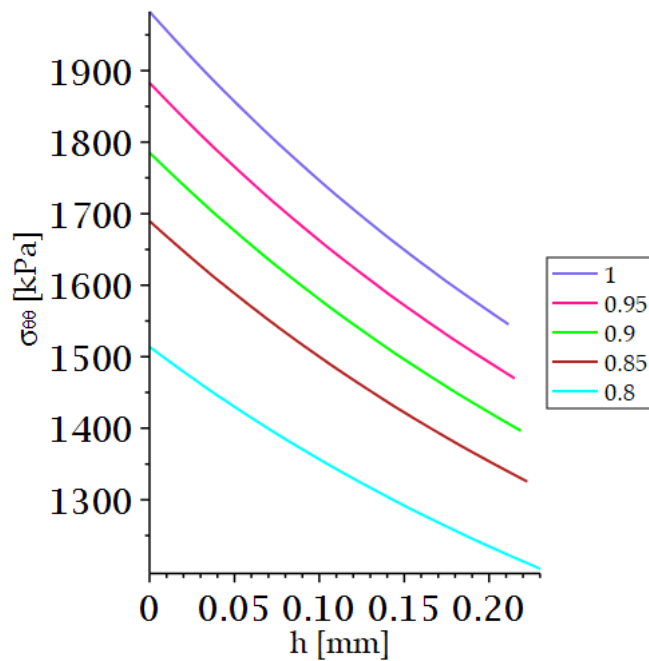


Graf 11.4 - Průběh radiálního napětí po tloušťce stěny



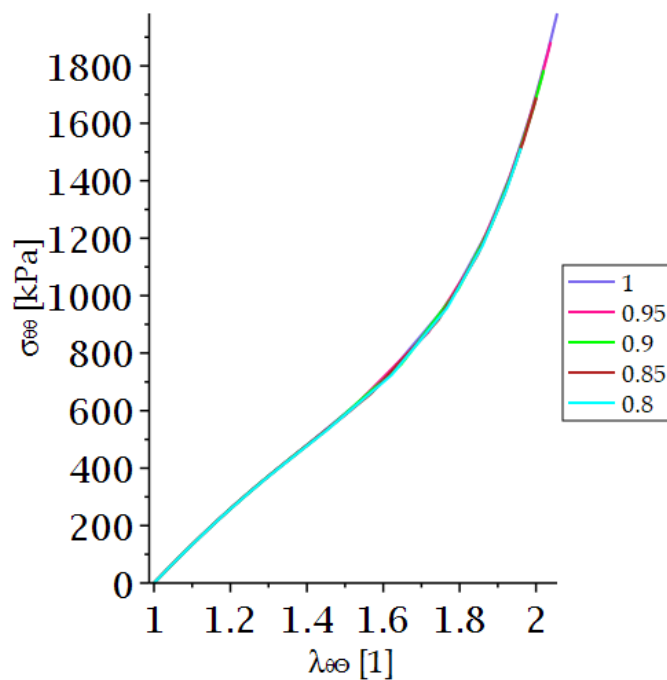
Graf 11.5 - Průběh axiálního napětí po tloušťce stěny





Graf 11.6 - Průběh tečného napětí po tloušťce stěny

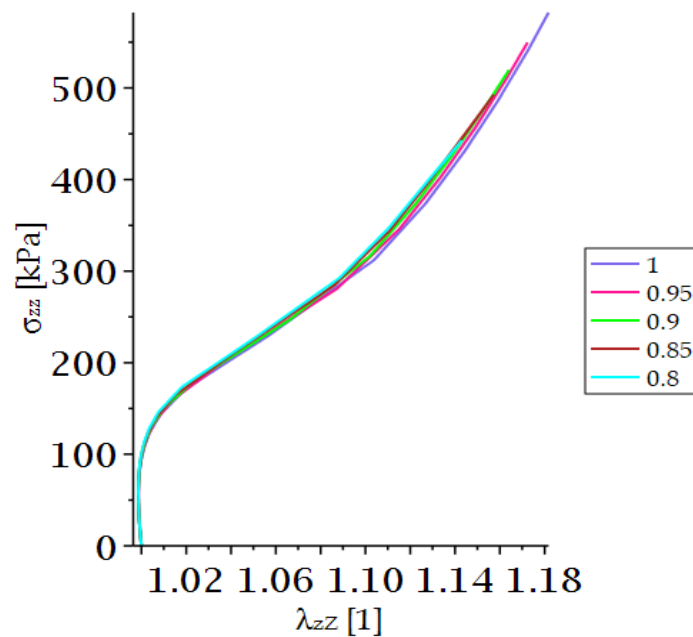
Závislost tečného napětí na tečné deformaci je pro všech pět modelů téměř totožná. Z grafu 11.7 lze vysledovat, že závislost do přibližně 60% deformace roste pomaleji a od 80% prudce stoupá.



Graf 11.7 - Závislost tečného napětí na tečné deformaci

Také pro závislost axiálního napětí na axiální deformaci, zobrazenou v grafu 11.8, lze prohlásit, že se pro jednotlivá uspořádání trubek téměř neliší. Zpočátku je deformace téměř nulová, okolo napětí  $\sigma_{zz} = 150 \text{ kPa}$  začne postupně růst. Podle grafu lze říci, že

mezi hodnotami napětí  $\sigma_{zz} = 150 \div 250 \text{ kPa}$  se jedná o téměř lineární růst, kdy okolo hodnoty  $\sigma_{zz} = 300 \text{ kPa}$  dojde ke zrychlení růstu deformace s růstem napětí.



Graf 11.8 - Závislost axiálního napětí na axiální deformaci

## 12 Odhad materiálových konstant $C_1$ , $C_2$ , $C_3$

Pro odhad materiálových konstant  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  použijeme postup uvedený v kapitole 10.

Pro samotný výpočet byl použitý program MAPLE. [12]

Hodnoty parametrů získané pro jednotlivé konfigurace trubek

Tabulka 12.1 - Materiálové parametry pro jednotlivé konfigurace trubek

	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5
$C_1$ (kPa)	178,9	178,8	178,8	178,7	178,5
$C_2$ (kPa)	-12,76	-11,70	-12,03	-12,12	-11,81
$C_3$ (kPa)	2,194	0,3665	0,3876	0,3938	0,3744

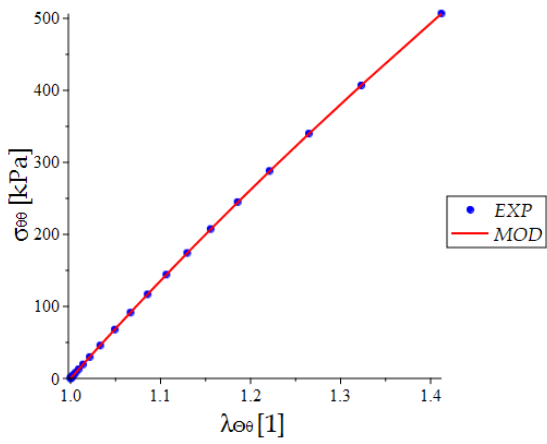
Zadané hodnoty parametrů byly  $C_1 = 188,5$  kPa,  $C_2 = -26,14$  kPa a  $C_3 = 8,778$  kPa.

Pro srovnání parametrů vykreslíme grafy závislosti napětí na deformaci pro experimentální a modelové napětí. Do rovnice pro experimentální napětí dosadíme hodnoty  $\lambda_{\theta\theta}$ ,  $\lambda_{zz}$  a  $P$  získané z numerického výpočtu a do rovnice pro modelové napětí dosadíme hodnoty  $\lambda_{\theta\theta}$ ,  $\lambda_{zz}$  a hodnoty  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  získané odhadem pro jednotlivé trubky.

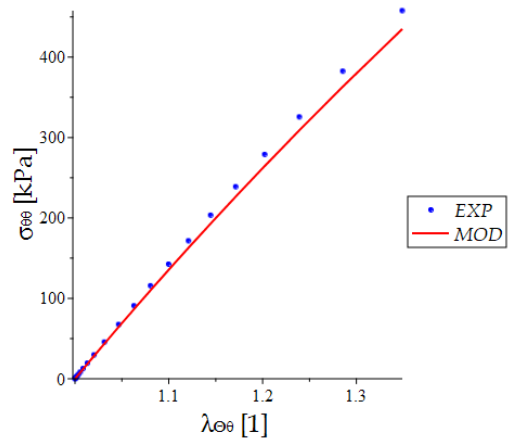
Jak je vidět na grafech 12.1, 12.2, 12.3, 12.4 a Graf 12.5, se zvětšující se kuželovitostí se zvětšuje i rozdíl mezi experimentálním a modelovým napětím.

Pro model 1 je z grafu 12.1 patrná shoda experimentálního a modelového napětí, což vzhledem k tomu, že se jedná o dokonale válcovou trubku, odpovídá. Také to ukazuje, že i když podle odhadu materiálové parametry vyšly číselně odlišně, vedou obě sady ke stejnému chování materiálu.

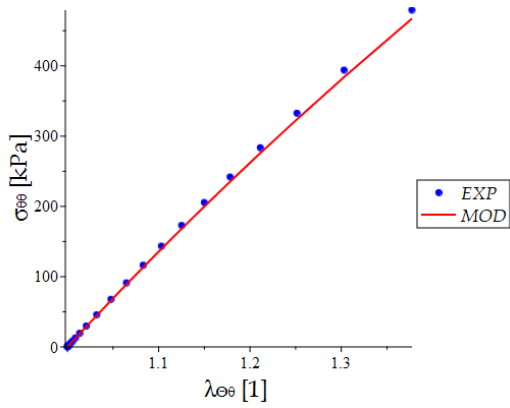
Při odhadu materiálových parametrů jsme se snažili o co největší shodu pro obvodové napětí. Vypočítané materiálové parametry proto mají dobrou shodu pro závislost obvodového napětí na deformaci. Pro odhad závislosti axiálního napětí na deformaci výpočet s použitím zjištěných materiálových parametrů neodpovídá průběhu skutečné deformace.



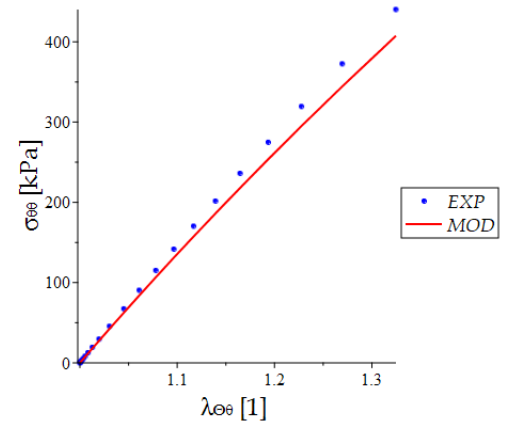
**Graf 12.1 - Model 1**



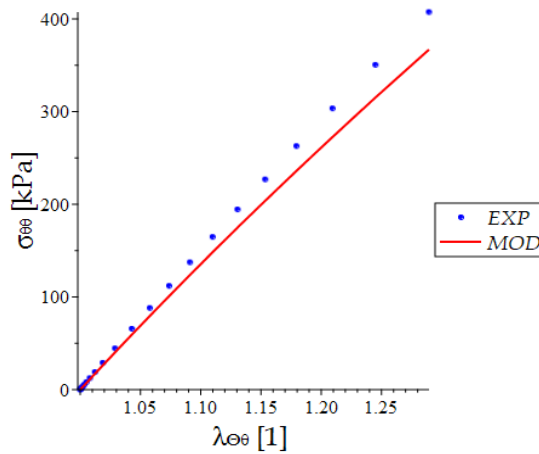
**Graf 12.3 - Model 3**



**Graf 12.2 - Model 2**



**Graf 12.4 - Model 4**

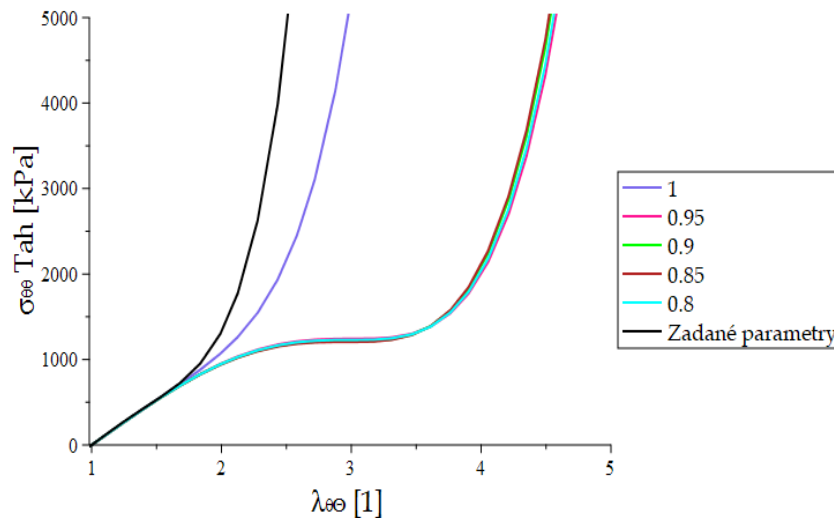


**Graf 12.5 - Model 5**

## 12.1 Kontrola odhadnutých materiálových parametrů

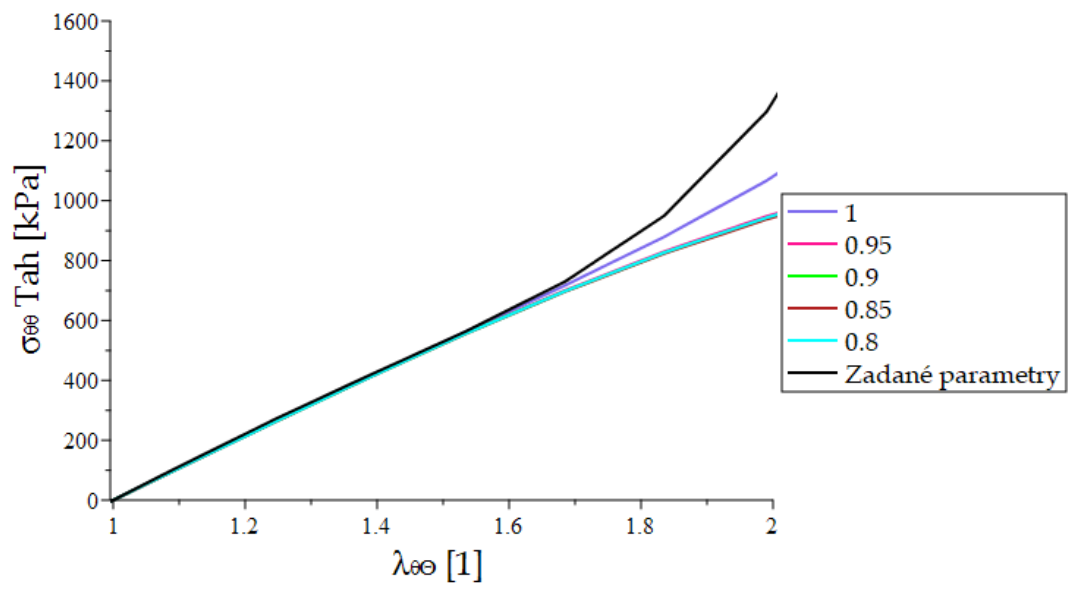
Při odhadu materiálových parametrů jsme jako podmínku určili, že modul pružnosti musí být kladný.

Pro kontrolu fyzikální správnosti odhadnutých parametrů využijeme podmínky uvedené v rovnici (10.20) a zobrazíme průběh závislosti  $\sigma_{\theta\theta}^{TAH}$  na  $\lambda_{\theta\theta}$  s použitím vypočítaných materiálových parametrů pro jednotlivé konfigurace trubek. Z grafu 12.6 je patrné, že nedojde k tomu, aby směrnice tečny ke grafu byla záporná. Napětí  $\sigma_{\theta\theta}^{TAH}$  je v následujících grafech označeno jako  $\sigma_{\theta\theta} Tah$ .



Graf 12.6 - Kontrola odhadnutých materiálových parametrů pomocí tahové zkoušky

V grafu Graf 12.6 je zobrazena závislost  $\sigma_{\theta\theta}^{TAH}$  na  $\lambda_{\theta\theta}$ . Pro všechny sady parametrů je rostoucí. Závislost pro zadané materiálové parametry a materiálové parametry získané pro Model 1, tedy dokonale válcovitou trubky, jsou, co se týče tvaru průběhu, celkem podobné. Průběhy závislosti pro Modely 2 až 5 mají navzájem téměř totožný průběh. Na grafu 12.7 je detail závislosti  $\sigma_{\theta\theta}^{TAH}$  na  $\lambda_{\theta\theta}$  pro hodnoty  $\lambda_{\theta\theta}$  v intervalu  $1 \div 2$ . Z tohoto grafu je patrné, že až do hodnoty deformace přibližně 70 %, které odpovídá napětí 800 kPa, je průběh závislosti pro všechny sady materiálových parametrů stejný. Od hodnoty deformace zhruba 70 % vzniká rozdíl mezi průběhy závislosti, přičemž platí, že sady materiálových parametrů, které jsme získali pro Modely 2 až 5 mají průběh deformace stále stejný. Pro hodnoty  $\lambda_{\theta\theta}$  větší než 2 platí, že se předpovědi Modelů 2 až 5 zásadně liší od Modelu 1 a od modelu s materiálovými parametry ze zadání.



Graf 12.7 - Závislost  $\sigma_{\theta\theta}^{TAH}$  na  $\lambda_{\theta\theta}$  při tahové zkoušce pro  $\lambda_{\theta\theta} = 1 \div 2$

## 13 Závěr

V této práci jsme zjišťovali vliv kuželovitosti trubky na odhad materiálových parametrů. Vzali jsme pět konfigurací, na které jsme aplikovali tlak  $P = 0 \div 25$  kPa. Pro srovnatelnost numerického a analytického výpočtu bylo nutné omezit maximální hodnotu tlaku na  $P = 17$  kPa.

Z programu ABAQUS jsme postupnou aplikací tlaku  $P$  získali hodnoty napětí a deformací.

Závislost působícího tlaku na deformaci je nelineární a platí pro ni, že rozdílné průběhy pro jednotlivá uspořádání trubek začínají přibližně při tlaku  $P = 10$  kPa. Pro vyšší tlaky je rozdíl deformací jednotlivých trubek značný. Rozdíly průběhů závislosti tlaku na deformaci byly i pro obvodové a radiální deformace. I pro ně platí, že pro malé hodnoty tlaku není rozdíl příliš patrný a se zvětšujícím se tlakem roste. Z grafů závislosti lze usoudit, že větší hodnota kuželovitosti odpovídá i vyšší tuhosti trubky.

Závislosti obvodového, resp. axiálního napětí na obvodové, resp. axiální deformaci mají nelineární průběh a příliš se pro individuální uspořádání trubek neliší.

Smykové napětí získané z numerického výpočtu dosahovalo hodnot, které byly ve srovnání s ostatními napětími zanedbatelné.

Při analytickém výpočtu jsme předpokládali, že se jedná o tenkostěnnou nádobu a proto jsme pro výpočet zanedbali radiální napětí. Tenkostěnná trubka má průběh obvodového napětí po tloušťce stěny konstantní. Při vykreslení závislosti obvodového napětí na tloušťce stěny jsme získali průběhy pro jednotlivé trubky, kdy rozdíl mezi vnitřní a vnější stěnou trubky dosahoval až 20%. Z toho vyplývá, že trubka ve skutečnosti tenkostěnná není. Výsledky, které jsme získali, jsou ovlivněny tímto zanedbáním.

Při odhadu materiálových parametrů jsme získali sadu tří koeficientů pro každý model trubky. Získané koeficienty  $C_1$  se od zadané hodnoty liší nejméně, dosahují přibližně 95% zadané hodnoty. Hodnoty koeficientu  $C_2$  pak zhruba 50% a hodnoty  $C_3$  se pohybují okolo 4%, kromě modelu 2, jehož velikost je přibližně 25% zadané hodnoty.

Chování materiálu, které tyto sady parametrů popisují, pro dokonale válcovitou trubku odpovídá chování zjištěnému z numerického výpočtu s využitím zadaných materiálových parametrů. S rostoucí kuželovitostí pak roste i rozdíl mezi závislostí obvodového napětí na deformaci zjištěného

z numerického výpočtu a závislosti vypočítané pomocí nově zjištěných parametrů.

Pokud použijeme materiálové parametry získané odhadem z nafukování trubek k odhadu chování materiálu při tahové zkoušce, zjistíme, že do hodnoty deformace přibližně 70 %, chování, které jednotlivé sady parametrů popisují, je stejné. Pro vyšší hodnoty deformace pak dochází k rozdílu mezi dokonale válcovitou trubicí a kuželovými trubicemi.

Pro vypočítané materiálové parametry lze prohlásit, že se liší od zadaných. Konkrétní číselné hodnoty se, zejména pro koeficienty  $C_2$  a  $C_3$ , liší významně.

Tento rozdíl bude dán zejména zanedbáním kuželovitosti, nicméně se na něm určitě projeví zanedbání, kterého jsme se dopustili, když jsme předpokládali, že se jedná o tenkostěnnou trubicí a i nepřesnost numerického výpočtu. Vliv na rozdíl bude mít i předpoklad, že při nafukování nedochází k axiální deformaci.



## 15 Bibliografie

- [1] HORNÝ, Lukáš. *Projekt II - Podstata výpočtového modelu: Simulace inflace tenkostěnné nádoby versus experiment* [online prezentace]. Praha, b.r. [cit. 2018-05-07]. Dostupné z: [http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Projekt\\_2\\_2018-Biomechanika-a-lekarske-pristroje.pdf](http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Projekt_2_2018-Biomechanika-a-lekarske-pristroje.pdf)
- [2] Human Circulatory system. In: *ResearchGate* [online]. b.r. [cit. 2018-06-07]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/figure/Figure-A2-The-human-circulatory-system-simplified-Red-indicates-oxygenated-blood\\_fig28\\_323336995](https://www.researchgate.net/figure/Figure-A2-The-human-circulatory-system-simplified-Red-indicates-oxygenated-blood_fig28_323336995)
- [3] SACCOMANDI, Giuseppe a Raymond W. OGDEN. *Mechanics and thermomechanics of rubberlike solids*. 1. CISM, Udine, 2004. ISBN 3-211-21251-5.
- [4] HOLZAPFEL, Gerhard A. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. New York: John Wiley & Sons, 2000. ISBN 04-718-2319-8.
- [5] HORNÝ, Lukáš. *Patobiomechanika srdečněcévního systému: I. díl*. 1. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2014. ISBN 978-80-01-05473-4.
- [6] MICHALEC, Jiří, Zdeněk KULIŠ, František VALENTA, Miroslav SOCHOR, Jan ŘEZNÍČEK a Ladislav ŠUBRT. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 20-010-4224-3.
- [7] HORNÝ, Lukáš. *Projekt I - Kinematika konečných deformací, míry napětí a hyperelastická* [online prezentace]. 2015. Praha, b.r. [cit. 2018-04-05]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Nelinearni-pruznost-projekt-I.pdf>
- [8] MICHALEC, Jiří, František VALENTA, Ladislav ŠUBRT a Zdeněk KULIŠ. *Pružnost a pevnost II*. 2. vyd. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001. ISBN 80-010-2375-3.
- [9] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Vysoké učení technické v Brně, 2010 [cit. 2018-03-02]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>

- [10] ŠPANIEL, Miroslav a Zdeněk HORÁK. *Úvod do metody konečných prvků*. Praha: České vysoké učení technické, 2011. ISBN 978-80-01-04665-4.
- [11] *DS Simulia: Abaqus 6.14* [online]. b.r. [cit. 2018-04-05]. Dostupné z: <https://www.sharcnet.ca/Software/Abaqus/6.14.2/v6.14/index.html>
- [12] *Maple User Manual* [online]. b.r. [cit. 2018-05-08]. Dostupné z: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=UserManual%2FContents>