



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

**Fakulta stavební
Katedra fyziky**

**ANALÝZA A APLIKACE OPTICKÝCH PRVKŮ S PROMĚNNÝMI
A FIXNÍMI PARAMETRY V ZOBRAZOVACÍCH A MĚŘICÍCH
SYSTEMECH**

**Analysis and applications of optical elements with tunable
and fixed parameters in imaging and measuring systems**

DISERTAČNÍ PRÁCE

Ing. Petr Pokorný

Doktorský studijní program: (P3607) Stavební inženýrství

Studijní obor: (3911V005) Fyzikální a materiálové inženýrství

Školitel: prof. RNDr. Antonín Mikš, CSc.
doc. Ing. Pavel Novák, Ph.D. (školitel specialista)

Praha, 2018



PROHLÁŠENÍ

Jméno doktoranda: Ing. Petr Pokorný

Název disertační práce: Analýza a aplikace optických prvků s proměnnými a fixními parametry v zobrazovacích a měřicích systémech

Prohlašuji, že jsem uvedenou disertační práci vypracoval/a samostatně pod vedením školitele prof. RNDr. Antonína Mikše, CSc., a školitele specialisty doc. Ing. Pavla Nováka, Ph.D.

Použitou literaturu a další materiály uvádím v seznamu použité literatury.

Disertační práce vznikla v souvislosti s řešením projektů:

- SGS17/004/OHK1/1T/11 Adaptivní optické metrologické systémy, České vysoké učení technické v Praze, Česká republika;
- Simple and Flexible Interferometric Asphere Measurement Without Stitching, SCIEX-NMSch. nr. 14.077, 2015, Switzerland;
- SGS15/125/OHK1/2T/11 Adaptivní laserové skenery, České vysoké učení technické v Praze, Česká republika;
- SGS14/110/OHK1/2T/11 Optické metody měření deformací a tvarů ploch a vlnoploch, České vysoké učení technické v Praze, Česká republika;
- GA13-31765S Aktivní membránové prvky na bázi kapalin, Grantová agentura ČR, Česká republika;
- FR-TI2/074 - Technologie měření asférických ploch v optice, MPO ČR;
- FR-TI3/023 - Analyzátoři kvality zobrazení optických soustav, MPO ČR;
- Superachromáty - Meopta - optika, s.r.o.;

a s podporou organizací a nadací:

- Nadace Nadání Josefa, Marie a Zdeňky Hlávkových,
- Nadační fond ČVUT Stanislava Hanzla,
- Fond ČVUT,
- Fondu na stipendia SCIEX-NMSch. (Scientific Exchange Programme between Switzerland and the New Member States of the EU).

V Praze dne 9. 2. 2018

.....
podpis

Poděkování

V první řadě bych rád poděkoval členům Skupiny aplikované optiky z Katedry fyziky Fakulty stavební ČVUT v Praze za odborné konzultace a věcné připomínky vedoucí ke zvýšení kvality této disertační práce.

Dále bych rád poděkoval nadaci Nadání Josefa, Marie a Zdeňky Hlávkových za výraznou podporu a financování zahraničních cest na významné mezinárodní konference. Stejně tak děkuji Nadačnímu fondu ČVUT Stanislava Hanzla a Fondu ČVUT. Za podporu a možnost uskutečnění prestižní zahraniční stáže děkuji švýcarskému fondu na stipendia SCIEX-NMS^{ch}. (Scientific Exchange Programme between Switzerland and the New Member States of the EU).

Abstrakt

Disertační práce se podrobně zabývá analýzou a aplikací optických prvků s fixními a proměnnými optickými parametry, a to zejména v oblasti optické metrologie a zobrazovacích soustav. Konceptně je práce pojata jako doprovodný shrnující text k publikovaným článkům vydaných v prestižních mezinárodních impaktovaných časopisech.

V současnosti můžeme rozdělit optické prvky na klasické s fixními parametry, charakterizované svým neměnným tvarem a indexem lomu, a na prvky aktivní, které mohou své parametry definovaným způsobem modifikovat, a tedy dle požadavků měnit optické zobrazení. Hybridní optické soustavy kombinující optické prvky s proměnnými i fixními parametry jsou v centru zájmu a výzkum v této oblasti je velmi aktuální. Akademická a výzkumná činnost v rámci autorova doktorského studia zahrnovala široké spektrum analýzy a aplikace zmíněných optických prvků s fixními a proměnnými optickými parametry.

V první části práce autor představuje teoretické shrnutí základních znalostí a fyzikálně-matematického aparátu, který byl postupně využíván v řešení problémů a výzkumných výzev. Jsou ukázány fundamentální vztahy vlnové a geometrické optiky, zejména oblastí elektromagnetického pole a jeho šíření a difrakce, interference vln a rekonstrukce fáze vlnového pole. V rámci vybraných částí jsou prezentovány autorovy praktické realizace, zejména v části difrakce a rekonstrukce fáze vlnového pole. Následující kapitola je zaměřena zejména na shrnutí současného stavu klasických a aktivních komerčně dostupných optických prvků, které jsou základem pro metrologické a zobrazovací optické systémy. Poslední část prezentuje autorovy výzkumné výsledky, které byly publikovány v mezinárodních impaktovaných časopisech a prezentovány na mezinárodních konferencích. Zejména se jedná o teoretickou analýzu a experimentální potvrzení deformace membrán kapalinových čoček společně s návrhem metodiky pro určení mechanických parametrů těchto membrán, dále jde o problematiku adaptivních optických skenovacích systémů, aplikaci fázového modulátoru světla v optické metrologii při adaptivní interferometrii a pro možnost generace obrazu počítačem generovanými hologramy, nebo analýzu a realizace vybraných experimentálních metod pro měření vybraných parametrů klasických nebo aktivních optických prvků nebo optických soustav. V příloze jsou poté uvedeny vybrané autorovy publikace v mezinárodních časopisech, které dokazují hodnotu výzkumných aktivit.

Abstract

The doctoral thesis presents a detailed analysis and application of optical components with fixed and variable optical parameters focusing on optical metrology and imaging systems. This thesis is conceptually organised as an accompanying text to the author's published papers on the topics of classic and active optical components and systems.

As of this date, optical components could be divided into two main categories — classical parts with fixed parameters which cannot change their shape or the refraction index, or those with the disposal of possibilities for predefined modification of optical parameters, which can change their imaging properties according to specified demands. Hybrid optical systems, a combination of the classic and active optical components, are in the centre of focus for many subjects of current research in this field. The author's academic and research activities cover a broad spectrum of analyses and applications of the said optical components with fixed and variable parameters.

Firstly, a theoretical summary of the fundamental principles and physically-mathematical apparatus are set out, giving the basics to solutions to the research challenges. The fundamentals of wave and geometrical optics are presented, focusing on the electromagnetic field and its propagation and diffraction, interference, and wave-field reconstruction. During the aforementioned parts of the thesis, the author shows his research outputs and practical realisations. The following part of the thesis sums up the current situation in the commercially available classic and active optical components. The final part focuses on the author's specific results presented in international journals and conferences. It comprises a theoretical analysis and experimental verification of deformation of liquid lens membranes with the methodology of calculating the material parameters of the membranes, an analysis of adaptive optical scanning systems, an application of the spatial light modulator in adaptive interferometry and the possibility of a computer-generated hologram image, and an analysis and realization of experimental optical methods for the measurement of selected parameters of classic or active optical components or systems. Appended is a selection of the author's published papers as a testament to the value of the author's research activities.

Obsah

1 Úvod	1
2 Základy vlnové a geometrické optiky	3
2.1 Elektromagnetické pole	3
2.2 Šíření a difrakce elektromagnetických vln	16
2.3 Interference vln	31
2.4 Rekonstrukce fáze vlnového pole	38
3 Transformace vlnového pole v optice	61
3.1 Optické prvky a soustavy pro transformaci vlnového pole	63
4 Analýza a realizace kombinovaných optických systémů a vybraných experimentálních měření	79
4.1 Analýza deformace a mechanických parametrů membrán kapalinových čoček	80
4.2 Teorie adaptivních optických skenovacích systémů	87
4.3 Adaptivní interferometrie s využitím fázového modulátoru světla	90
4.4 Zobrazování digitálně generovaných hologramů fázovým modulátorem světla	95
4.5 Metody měření a analýza vybraných optických parametrů	96
5 Závěr	113
A Kopie vybraných publikací autora	125
B Ohlasy a recenze	197
B.1 Citace	197
B.2 Další ohlasy a recenze	197
B.3 Významná ocenění autora	198

1 Úvod

Tato práce se podrobně zabývá analýzou a aplikací optických prvků s fixními a proměnnými optickými parametry, zejména pak v oblasti optické metrologie a zobrazovacích soustav. Koncept práce autor pojal jako doprovodný shrnující text k publikovaným článkům vydaných v prestižních mezinárodních impaktovaných časopisech, na kterých se autor podílel v rámci činnosti ve Skupině aplikované optiky na katedře fyziky Fakulty stavební Českého vysokého učení technického v Praze pod vedením prof. RNDr. Antonína Mikše, CSc., školitele specialisty doc. Ing. Pavla Nováka, Ph.D., a dále na stáži v rámci projektu SCIEX-NMS^{ch} (Scientific Exchange Programme between Switzerland and the New Member States of the EU) pod vedením Prof. Stefana Rinnera z University of Applied Sciences NTB Buchs.

V současnosti můžeme rozdělit optické prvky na klasické s fixními parametry, charakterizované svým neměnným tvarem a indexem lomu, a na prvky aktivní, které mohou své parametry definovaným způsobem modifikovat, a tedy dle požadavků měnit optické zobrazení.

Klasické prvky (čočky, zrcadla, planparalelní desky, apod.) jsou v dnešní době velmi dobře dostupné a jejich výroba je téměř dokonale zvládnutá ve velmi vysoké přesnosti (až do řádu setin použité vlnové délky), zejména pro prvky sférické a rovinné. Optické soustavy skládající se z těchto prvků mohou být ale poměrně komplikované, zejména jsou-li kladeny vysoké požadavky na kvalitu zobrazení, jelikož korekce aberací může být v tomto případě velmi náročná. Případná změna vlastností takových soustav je bez mechanických pohybů nemožná. Výsledkem pak mohou být velmi nákladná zařízení náročná na konstrukci a justáž. Není tedy divu, že během posledních let dochází k prudkému rozvoji v oblasti výzkumu, vývoje a postupně i ve výrobě aktivních optických prvků, které jsou schopny své parametry variabilně a předem zadaným způsobem měnit, a tedy ovlivňovat dané optické zobrazení. Některé typy prvků jsou již komerčně poměrně dobře dostupné. Ovšem jejich pořizovací náklady jsou i tak značné, a to zejména proto, že teorie návrhu i výrobní technologie jsou stále nové a rozvíjející se. Je ale oprávněné očekávat, že s postupným zdokonalováním, optimalizací výrobního procesu, a tedy snižováním nákladů, se budou čím dál více uplatňovat v praxi. Pro blízkou budoucnost půjde o velký rozvoj tzv. hybridních optických soustav, které budou kombinovat prvky klasické a aktivní v jeden systém. Tím pádem bude možné téměř úplně odstranit stálé i variabilní aberace optických systémů a docílit takového zobrazení, které by pouze s klasickými prvky nebylo vůbec možné. Dalším trendem souvisejícím s takovými soustavami je možnost miniaturizace a efektivnějšího řízení těchto systémů.

Jak je patrné, hybridní optické soustavy kombinující optické prvky s proměnnými i fixními parametry jsou v centru zájmu a výzkum v této oblasti je velmi aktuální. Akademická a výzkumná činnost v rámci autorova doktorského studia zahrnovala široké spektrum analýzy a aplikace zmíněných optických prvků s fixními a proměnnými optickými parametry.

Obsahově první část této práce představuje teoretické shrnutí základních znalostí a fyzikálně-matematického aparátu, který byl postupně využíván v řešení problémů a výzkumných výzev. Jsou ukázány fundamentální vztahy vlnové a geometrické optiky, zejména oblastí elektromagnetického pole a jeho šíření a difrakce, interference vln a rekonstrukce fáze vlnového pole. V rámci vybraných částí jsou prezentovány autorovy praktické realizace, zejména v části difrakce a rekonstrukce fáze vlnového pole.

Následující kapitola, dotýkající se problematiky transformace vlnového pole v optice, je zamě-

řena zejména na shrnutí současného stavu klasických a aktivních komerčně dostupných optických prvků, které jsou základem pro metrologické a zobrazovací optické systémy.

Poslední část ukazuje autorovy výzkumné výsledky, které byly publikovány v mezinárodních impaktovaných časopisech a prezentovány na mezinárodních konferencích. Zejména se jedná o teoretickou analýzu a experimentální potvrzení deformace membrán kapalinových čoček společně s návrhem metodiky pro určení mechanických parametrů těchto membrán. Dále jde o problematiku adaptivních optických skenovacích systémů, zejména poté jedno-zrcadlových a dvou-zrcadlových skenerů s osazenou aktivní čočkou, která umožňuje fokusaci procházejícího záření. Následně práce popisuje aplikaci fázového modulátoru světla v optické metrologii při adaptivní interferometrii a pro možnost generace obrazu počítačem generovanými hologramy. Závěrem je představena analýza a realizace vybraných experimentálních metod pro měření vybraných parametrů klasických nebo aktivních optických prvků nebo optických soustav, jmenovitě se jedná o novou metodu snadného současného měření paraxiální ohniskové vzdálenosti a zkreslení optických soustav pomocí amplitudové difrakční mřížky, neinvazivní metodu určení vnitřních materiálových a geometrických parametrů tmeleného dubletu, vliv deformací sférických optických prvků, které jsou způsobené jejich vlastní vahou, na přesná interferometrická měření jejich povrchu a analýzu vlivu sférické aberace optické soustavy na její hloubku ostrosti.

V příloze jsou poté uvedeny vybrané autorovy publikace v mezinárodních impaktovaných časopisech, které publikoval společně se svými kolegy, a přehled ohlasů, recenzí a významných autorových ocenění.

Seznam vybraných publikací autora publikovaných v mezinárodních impaktovaných časopisech

1. P. Pokorný, F. Šmejkal, and A. Mikš. Deformation of a spherical lens caused by its own weight. *Appl. Opt.*, 56(36):9984–9991, 2017.
2. P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek. Deformation of a prestressed liquid lens membrane. *Appl. Opt.*, 56(34):9368–9376, 2017.
3. P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek. Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure. *Appl. Opt.*, 56(26):5939–5947, 2017.
4. A. Mikš and P. Pokorný. Spherical aberration of an optical system and its influence on depth of focus. *Appl. Opt.*, 56(17):5099–5105, 2017.
5. A. Mikš and P. Pokorný. Simple method for determination of parameters of cemented doublet. *Appl. Opt.*, 55(20):5456–5458, 2016.
6. A. Mikš and P. Pokorný. Edge spread function of Talbot phenomenon. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 127(19):8065 – 8069, 2016.
7. A. Mikš and P. Pokorný. Use of diffraction grating for measuring the focal length and distortion of optical systems. *Appl. Opt.*, 54(34):10200–10206, 2015.
8. P. Pokorný and A. Mikš. 3D optical two-mirror scanner with focus-tunable lens. *Appl. Opt.*, 54(22):6955–6960, 2015.
9. P. Pokorný. One-mirror and two-mirror three-dimensional optical scanners - position and accuracy of laser beam spot. *Appl. Opt.*, 53(12):2730–2740, 2014.
10. A. Mikš and P. Pokorný. Analytical expressions for the circle of confusion induced by plane-parallel plate. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(11):1517 – 1521, 2012.

2 Základy vlnové a geometrické optiky

Zabývejme se nejprve základním teoretickým nástrojem klasické optiky – vlnovou a geometrickou teorií. Vlnová teorie je založena na Maxwellových rovnicích, z nichž lze odvodit postupně potřebný aparát k charakteristice průchodu světla určitým prostředím nebo soustavou optických prvků. V rámci této práce se budeme držet šíření optických polí (světla) s malou intenzitou, která nebude ovlivňovat vlastnosti prostředí, kudy prochází, a dále často budeme uvažovat prostředí homogenní izotropní bez nábojů a proudů.

Maxwellovy rovnice samy o sobě nepostačují k popisu šíření světla, je třeba je doplnit materiálovými vztahy. Průchod materiálovým rozhraním dále charakterizují hraniční podmínky. Postupně bude ukázáno, že elektromagnetické pole se může šířit ve formě vln, bude odvozena tzv. vlnová rovnice. Budeme-li dále předpokládat, že se pole šíří ve formě harmonických vln, dojdeme k Helmholtzově rovnici, která je základním nástrojem popisu šíření elektromagnetického pole.

Řešením Helmholtzovy rovnice můžeme vyjádřit interakci světla s materiálem nebo materiálovými rozhraními – popíšeme šíření a difrakci elektromagnetických vln.

V rámci optické metrologie se velmi často používají jevy založené na interferenci světla. V krátkosti se tímto tématem budeme také zabývat, společně s problémem rekonstrukce fáze vlnového pole.

2.1 Elektromagnetické pole

2.1.1 Maxwellovy rovnice, materiálové vztahy a hraniční podmínky

Teorie elektromagnetického pole a jeho šíření je poměrně dobře známá a vztahy, které ji popisují, jsou potvrzovány řadou experimentů. V této práci se omezíme na makroskopický popis pole, který je charakterizován tzv. Maxwellovými rovnicemi [1–8]. Pod pojmem elektromagnetické pole rozumíme soubor čtyř vektorů \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} a \mathbf{H} . Vektor \mathbf{E} je vektor intenzity elektrického pole [V/m], \mathbf{B} je vektor magnetické indukce [T], \mathbf{D} je vektor elektrické indukce [C/m²] a \mathbf{H} je vektor intenzity magnetického pole [A/m] [1–8]. Předpokládejme, že tyto vektory jsou konečné, jsou spojitými funkcemi polohy a času ve všech bodech prostoru, tj. můžeme formálně psát $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, a také mají spojitě derivace. Pro usnadnění zápisu budeme v následujícím textu někdy závislost na poloze \mathbf{r} a čase t vynechávat, nicméně na uvedeném předpokladu nic neměníme.

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru můžeme psát jako [1–8]

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{zákon celkového proudu}) \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (\text{zákon elektromagnetické indukce}) \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad (\text{Gaussova věta elektrostatiky}) \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{Gaussova věta magnetismu}) \quad (2.1d)$$

kde $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ je vektor proudové hustoty [A/m^2] a $\rho(\mathbf{r}, t)$ je objemová hustota náboje [C/m^3] [1–8], ∇ je nabla operátor [9–11].

Soustavu Maxwellových rovnic (2.1a)–(2.1d) lze vyjádřit odpovídající soustavou integrálních rovnic. Použitím Stokesovy věty matematické analýzy [9–11] na rovnice (2.1a) a (2.1b) dostáváme

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.2)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.3)$$

kde S značí regulární plochu uzavřenou křivkou C , $d\mathbf{s}$ je element křivky C a \mathbf{n} je normálový vektor plochy dS . Integrální tvar třetí a čtvrté rovnice (2.1c) a (2.1d) získáme aplikací Gauss-Ostrogradského věty [9–11], po úpravě platí

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \rho dV, \quad (2.4)$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.5)$$

kde V je plocha uzavřená plochou S . V obou výše zmíněných případech Gauss-Ostrogradského věta i Stokesova věta platí za předpokladu, že vektory pole jsou spojitě funkce i se svými derivacemi [9–11].

Maxwellovy rovnice sami o sobě neříkají, jak se budou elektromagnetické procesy vyvíjet, budou-li probíhat v materiálovém prostředí. Soustavu je tak třeba doplnit tzv. materiálovými rovnicemi, které vyjadřují vzájemné závislosti vektorů pole a materiálového prostředí. Jinými slovy lze situaci zhodnotit tak, že mezi výše zmíněnými vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} a \mathbf{j} známe pouze dva nezávislé vztahy (2.1a), (2.1b), resp. (2.2), (2.3). Je tedy třeba soustavu doplnit tak, aby byla určena.

Materiálové vztahy mohou být obecně velmi komplikované, např. $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Ovšem pro ne příliš silná pole, kterými se tato práce výhradně zabývá, můžeme psát lineární formu materiálových vztahů, platí [1–8]

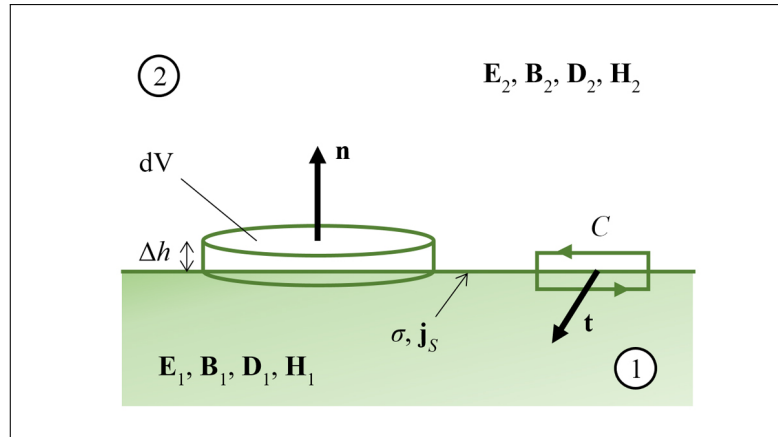
$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \bar{\gamma} \mathbf{E} + \mathbf{j}', \quad (2.6)$$

kde $\bar{\epsilon}$ je tenzor permitivity prostředí, $\bar{\mu}$ je tenzor permeability prostředí, $\bar{\gamma}$ je tenzor vodivosti prostředí a \mathbf{j}' je vektor proudové hustoty vnucených (vnějších) proudů. Obecný popis prostředí pomocí tenzorů uijeme zejména pro anizotropní prostředí. V prostředí homogenním izotropním, které zpravidla v optických aplikacích uvažujeme, přejdou tenzory ve skaláry ϵ , μ a γ . Velmi často jsou permeabilita a permitivita vázány na hodnoty ve vakuu, poté platí $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ a $\mu = \mu_r \mu_0$, kde ϵ_r je relativní permitivita, μ_r relativní permeabilita a dolní index 0 značí hodnoty ve vakuu.

Budou-li závislosti pole popsané vztahy (2.6) lineární, hovoříme o tzv. lineárním prostředí. Pro takové prostředí budou lineární i Maxwellovy rovnice a platí tzv. princip superpozice [1–8], tj. výsledné pole vytvořené několika zdroji lze určit součtem nezávislých příspěvků jednotlivých zdrojů.

Abychom byli schopni řešit šíření elektromagnetického pole při průchodu rozhraním mezi dvěma materiálovými prostředími, ukažme si nyní tzv. hraniční podmínky pro vektory pole. Jak bylo řečeno, integrální tvar Maxwellových rovnic předpokládá vektory pole jako spojitě funkce i se svými derivacemi. Skokový přechod mezi dvěma materiálovými prostředími tak může způsobit komplikace v matematickém popisu. Problém lze obejít předpokladem, že ostré rozhraní nahradíme infinitezimálně tenkou vrstvou, na které dochází k prudkému spojitému přechodu, viz např. [2–4]. Poté můžeme z integrálního tvaru Maxwellových rovnic snadno odvodit podmínky pro vektory pole na rozhraní.

Předpokládejme situaci zobrazenou na obr. 2.1. Na rozhraní mezi dvěma prostředími nechť je element dV výšky Δh , jehož podstavy jsou dány normálovým vektorem \mathbf{n} směřujícím z prostředí 1 do prostředí 2. Dále uvažujme uzavřenou křivku C kolmou k rozhraní směřovanou tak, jak je naznačeno na obr. 2.1. Jednotkový normálový vektor \mathbf{t} kolmý k ploše dané touto křivkou je tečný



Obrázek 2.1: Hraniční podmínky [2, 4]

k ploše rozhraní. Dále necht' je na rozhraní přítomna plošná hustota náboje $\sigma = dQ/dS$ a vektor proudové hustoty na ploše rozhraní \mathbf{j}_S .

Infinitezimálním přechodem pro nekonečně tenkou vrstvu a smyčku na rozhraní ($\Delta h \rightarrow 0$) lze ukázat, že pro vektory pole budou platit následující hraniční podmínky [1–8],

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_S, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.7b)$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma, \quad (2.7c)$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.7d)$$

kde indexy 1 a 2 značí první a druhé prostředí oddělené materiálovým rozhraním. Čtyři rovnice (2.7a), (2.7b), (2.7c) a (2.7d) můžeme využít k řešení úloh prostupu pole přes materiálové rozhraní. Pro slovní zhodnocení přepíšeme rovnice ještě do složkového tvaru, platí

$$H_{2t} - H_{1t} = j_S, \quad (2.8a)$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0, \quad (2.8b)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (2.8c)$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (2.8d)$$

a tedy změna velikosti tečných složek vektoru intenzity magnetického pole je rovna velikosti plošné hustoty proudu j_S , velikosti tečných složek vektoru intenzity elektrického pole jsou při průchodu rozhraním neměnné, změna velikosti normálových složek vektoru elektrické indukce je rovna plošné hustotě náboje σ a normálové složky vektoru magnetické indukce se zachovávají.

V literatuře je možné nalézt hraniční podmínky pro další speciální případy, viz např. [2–6]. V rámci této práce se jimi ale nebudeme zabývat a odkážeme čtenáře na zmíněné reference.

2.1.2 Energie elektromagnetického pole a její šíření

Abychom byli schopni správně popsat šíření elektromagnetického pole, zabývejme se nyní bilancí energie elektromagnetického pole. Vyjděme z diferenciálního tvaru Maxwellových rovnic (2.1a)–(2.1d).

Uvědomíme-li si rozměr skalárního součinu $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ [W/m³], čili výkon dodaný do jednotky objemu, intuitivně můžeme pro vyšetření tohoto procesu v elektromagnetickém poli skalárně násobit první zmíněnou Maxwellovu rovnici vektorem \mathbf{E} . Dále vynásobíme-li skalárně druhou rovnici vektorem \mathbf{H} , budou mít všechny členy také rozměr výkonu dodaného do jednotky objemu. Provedením zmíněných operací a odečtením dvou výsledných rovnic dostáváme

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.9)$$

Užitím identity vektorové analýzy [9–11] $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$ dostáváme

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.10)$$

Integrací přes objem V a následným použitím Gauss-Ostrogradského věty [9–11] dostáváme

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint_V \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV - \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV, \quad (2.11)$$

kde S značí uzavřenou plochu obklopující objem V . Snadno se můžeme přesvědčit, že platí identity $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$ a $\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$.

Zaved' me nyní tzv. Poyntingův vektor \mathbf{S} vztahem [1–8]

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (2.12)$$

který značí hustotu toku výkonu v nějakém bodě pole, tj. množství energie, která projde jednotkou plochy za jednotku času [W/m^2]. Dále zaved' me tzv. hustotu elektromagnetické energie w [W/m^3] [1–8],

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}). \quad (2.13)$$

Dosazením (2.12) a (2.13) do (2.11) následně s použitím výše zmíněných identit dostáváme tzv. Poyntingův teorém [1–8]

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w dV - \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV, \quad (2.14)$$

který představuje zákon zachování elektromagnetické energie.

Uvědomíme-li si, že první integrál pravé strany Poyntingova teorému (2.14) reprezentuje energii elektromagnetického pole W v objemu V , potom časová derivace tohoto integrálu značí změnu energie pole, a tedy platí

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV - \oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.15)$$

První integrál pravé strany rovnice (2.15) představuje tzv. Jouleovo teplo, resp. ztráty výkonu v důsledku přeměny energie v teplo [1–8]. Druhý integrál, uvědomíme-li si význam Poyntingova vektoru \mathbf{S} (hustota toku výkonu), reprezentuje výkon vyzářený z objemu V ohraničeném plochou S . Uvažujeme-li tedy pole bez působení vnějších vtištěných sil, poté časová změna jeho elektromagnetické energie $\partial W/\partial t$ je důsledkem přeměny části energie v Jouleovo teplo, a také vyzářením části energie plochou S obklopující objem V .

Uvažujme nyní působící vnější síly charakterizované vektorem \mathbf{E}' . Jak jsme uvedli v úvodu této kapitoly pro vektor intenzity elektrického pole, skalární součin $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{j}$ [W/m^3] představuje výkon dodaný do jednotky objemu. Působení vtištěných sil v objemu V poté můžeme zapsat vztahem [1–8]

$$\iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w dV + \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.16)$$

Dodávají-li vtištěné síly do objemu V výkon, ten je poté částečně spotřebován na změnu energie elektromagnetického pole, částečně se přemění na Jouleovo teplo, a také se částečně vyzáří plochou S , která je uzavřenou hranicí objemu V , do okolí.

Pro další potřeby této práce vyjádřeme ještě zákon zachování elektromagnetické energie v diferenciálním tvaru. Použitím Gauss-Ostrogradského věty [9–11] na levou stranu rovnice (2.14) a po úpravě dostáváme

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (2.17)$$

Obdobně můžeme upravit vztah (2.16), platí

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (2.18)$$

V situaci bez feromagnetických materiálů, kdy předpokládáme vztah mezi intenzitami polí lineární, a pro případ izotropního prostředí můžeme rovnici (2.17) zjednodušit na tvar [2]

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 \right) + \frac{1}{\gamma} j^2 + \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (2.19)$$

kde γ značí vodivost prostředí.

Zabývejme se nyní přenosem energie v případě harmonického elektromagnetického pole, tedy v situaci, kdy zdroj elektromagnetického pole a pole samotné uvažujeme jako periodické funkce času. V tomto případě je vhodné uvažovat vektory pole jako komplexní. Označme vektory harmonického pole jako $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ a $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$, kde \mathbf{E}_0 a \mathbf{H}_0 jsou komplexní funkce polohy, ω je úhlová frekvence a t značí čas. Jak bylo řečeno, šíření energie můžeme charakterizovat Poyntingovým vektorem \mathbf{S} . Pro jeho časovou střední hodnotu (hustotu toku výkonu harmonického elektromagnetického pole) bude platit [2]

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \text{Re}(\mathbf{E}) \times \text{Re}(\mathbf{H}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*) = \frac{1}{4} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0), \quad (2.20)$$

kde $*$ značí komplexně sdruženou část. Velikost (2.20) reprezentuje intenzitu I elektromagnetického pole,

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = \frac{1}{4} |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0|. \quad (2.21)$$

Vektor

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (2.22)$$

se nazývá komplexní Poyntingův vektor.

V případě lineárního nedispersního izotropního optického prostředí bez absorpce, v němž se nevyskytují volné náboje a proudy, můžeme zákon zachování energie (2.14) pro komplexní harmonické pole zapsat jako

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle + \frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{1}{4} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) \right] = 0. \quad (2.23)$$

Pro výše zmíněný předpoklad dále platí $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$, kde ε je permitivita, μ je permeabilita, \mathbf{j} je vektor proudové hustoty a ρ je objemová hustota náboje, a tedy Maxwellovy rovnice poté můžeme vyjádřit vztahy

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \quad \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (2.24)$$

Budeme-li dále předpokládat, že vektor intenzity elektrického pole \mathbf{E} bude dán harmonickou funkcí jedné frekvence ω ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp [i(\varphi(\mathbf{r}) - \omega t)], \quad (2.25)$$

kde i značí imaginární jednotku, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ je obecně komplexní vektor (amplituda vektoru pole), $\varphi(\mathbf{r})$ je fáze a t značí čas, můžeme dosazením (2.25) do druhé rovnice (2.24) a úpravami vyjádřit vektor \mathbf{H} a dalšími vhodnými úpravami odvodit zákon zachování energie v diferenciálním tvaru, platí

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu\omega} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*) \nabla \varphi + \frac{1}{2\mu\omega} [-(\mathbf{A} \cdot \nabla \varphi) \mathbf{A}^* + i \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}^*) - (\mathbf{A}^* \cdot \nabla \varphi) \mathbf{A} + i \mathbf{A}^* \times (\nabla \times \mathbf{A})] \right\} = 0 \quad (2.26)$$

Rovnice (2.26) vyjadřuje vztah pro šíření elektromagnetické energie v lineárním prostředí bez nábojů a proudů, je-li pole vyjádřeno harmonickými vektory. Vztah se ještě výrazně zjednoduší,

pokud předpokládáme funkci $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ reálnou. V tomto případě můžeme vyjádřit zjednodušený zákon zachování energie ve tvaru

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{\mu\omega} (I \nabla \varphi) \right] = 0, \quad (2.27)$$

kde jsme označili $I = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$. Pro homogenní prostředí (permitivita a permeabilita jsou konstanty) následně (2.27) přejde v ještě jednodušší formu, platí

$$\nabla \cdot (I \nabla \varphi) = \nabla I \cdot \nabla \varphi + I \cdot \Delta \varphi = 0, \quad (2.28)$$

kde jsme využili zápisu $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$, Δ je tzv. Laplaceův operátor [9–11].

2.1.3 Elektromagnetické vlny

Vlnová a Helmholtzova rovnice

V této části se zabýváme šířením elektromagnetického pole. Jak ukážeme, elektromagnetické pole se šíří ve formě elektromagnetických vln.

Uvažujme pro tento případ lineární izotropní nedispersní prostředí, kdy materiálové vztahy (2.6) přejdou ve tvar

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} + \mathbf{j}'. \quad (2.29)$$

Maxwellovy rovnice (2.1a) a (2.1b) poté můžeme psát jako

$$\nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \gamma \mathbf{E} + \mathbf{j}', \quad (2.30a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (2.30b)$$

Aplikací operátoru rotace na první rovnici (2.30a), časovou derivací druhé rovnice (2.30b), uvážením materiálových vztahů, sloučením a úpravami dostáváme [2–8]

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{j}', \quad (2.31)$$

kde jsme označili $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Vztah (2.31) je nehomogenní parciální diferenciální rovnice charakterizující závislost vektoru \mathbf{H} na prostorových souřadnicích a času při šíření energie elektromagnetické energie ve formě vlnění. Obdobně bychom našli vztah pro vektor \mathbf{E} , platí

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial t}. \quad (2.32)$$

V naprosté většině optických aplikací, kterými se tato práce zabývá, je materiálové prostředí bez nábojů a proudů, tj. $\rho = 0$ a $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. S tímto předpokladem se výše zmíněné rovnice významným způsobem zjednoduší, dostáváme [1–8]

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.33a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.33b)$$

Vztahy (2.33) jsou tzv. vlnové rovnice [1–8]. Můžeme tedy vyslovit závěr, že elektromagnetické pole, charakterizované vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} , se šíří ve formě elektromagnetických vln.

Výše představená veličina v značí rychlost šíření elektromagnetického vlnění. Bude-li prostředí charakterizované relativní permitivitou ε_r vzhledem k permitivitě vakua ε_0 a relativní permeabilitou μ_r vzhledem k permeabilitě vakua μ_0 , poté platí

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}. \quad (2.34)$$

Ve vakuu ($\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$) je tato rychlost, jak je známo, rovna $v = c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8$ m/s [12].

Zabývejme se nyní řešením vlnových rovnic (2.33). V případě periodicky opakujících se dějů, čemuž vlnění odpovídá, hledáme řešení ve formě harmonických vln. Vzhledem ke stejnému tvaru vlnových rovnic pro vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} uvažujme nyní pouze vektor \mathbf{E} .

Harmonické vlny předpokládáme ve tvaru

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (2.35)$$

kde $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ značí komplexní amplitudu závislou na poloze, $i = \sqrt{-1}$ je komplexní jednotka, $\omega = 2\pi/T$ je úhlová frekvence, T je perioda a t značí čas.

Aplikací operátoru ∇^2 na $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, časovou derivací tohoto vektoru a sloučením přejde vlnová rovnice (2.33b) do tvaru tzv. Helmholtzovy rovnice [1–8, 13–16]

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.36)$$

kde $k = \frac{\omega}{v}$ je tzv. vlnové číslo.

Hledáme-li řešení vlnové rovnice ve tvaru harmonických vln, musí komplexní amplituda splňovat Helmholtzovu rovnici. Problém se tedy redukuje na hledání řešení Helmholtzovy rovnice.

Lze snadno ukázat, že Helmholtzovu rovnici splňují některé základní druhy vln. Jako první jmenujme sférické vlny. Předpokládejme, že zdrojem vlnění je bod a vlna se šíří všesměrově od tohoto bodu. Následně můžeme hledat takové řešení Helmholtzovy rovnice (2.36) pro skalární funkci, která bude závislá pouze na vzdálenosti r od zdroje. Bude nás zajímat pouze tedy skalární funkce amplitudy $E_0(r)$. Snadno lze ověřit, že zmíněné podmínky a zároveň Helmholtzovu rovnici splňuje [1, 13–16]

$$E_0(r) = K_1 \frac{\exp(ikr)}{r} + K_2 \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad (2.37)$$

kde K_1 a K_2 jsou konstanty. Řešení vlnové rovnice pro sférické vlny poté dosazením do (2.35) a s uvážením všech výše zmíněných předpokladů můžeme zapsat jako

$$E(r, t) = K_1 \frac{\exp[i(kr - \omega t)]}{r} + K_2 \frac{\exp[-i(kr + \omega t)]}{r}. \quad (2.38)$$

První člen rovnice (2.38) představuje rozbíhavou vlnu a druhý vlnu sbíhavou.

Zabývejme se nyní charakteristikou intenzity rozbíhavé sférické vlny. Vztah (2.20) se v tomto případě skalárního popisu výrazně zjednoduší. Označíme-li E_1 první sčítanec rovnice (2.38), poté pro intenzitu I rozbíhavé sférické vlny dostáváme

$$I = \|\langle \mathbf{S} \rangle\| = C \|E_1 \cdot E_1^*\| = C \frac{K_1^2}{r^2}, \quad (2.39)$$

kde C je konstanta. Je patrné, že intenzita rozbíhavé sférické vlny ubývá se čtvercem vzdálenosti.

Lze také snadno ukázat, že Helmholtzově rovnici (2.36) vyhovuje řešení [1, 3]

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.40)$$

kde \mathbf{e}_0 je konstantní vektor, neboť $\nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -k^2 \mathbf{e}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$. Rovnice harmonické vlny poté bude mít po dosazení do (2.35) tvar

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (2.41)$$

Označíme-li $\mathbf{k} = k \mathbf{n}$ jako tzv. vlnový vektor a dále použijeme vztah pro rychlost šíření $v = \omega/k$ (viz zavedení vlnového čísla v rovnici (2.36)), poté můžeme (2.41) dále upravit jako

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \mathbf{e}_0 \exp[ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt)]. \quad (2.42)$$

Argument ve vztazích (2.41) a (2.42) značí fázi vlny. Je zřejmé, že v daném případě je fáze pro danou hodnotu času t konstantní na rovině dané polohovým vektorem \mathbf{r} a normálovým vektorem \mathbf{n} vzdálené od počátku souřadnic o hodnotu νt . Od tohoto se odvíjí také název těchto vln. Plochu konstantní fáze nazýváme vlnoplochou. V daném případě je vlnoplochou rovina a hovoříme tedy o rovinných vlnách.

Zabývejme se nyní tvarem Maxwellových rovnic (2.1) pro rovinné vlny v homogenním izotropním prostředí bez nábojů a proudů ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\rho = 0$), které se v optice zpravidla uvažuje. Dosazením vztahů charakterizujících rovinné vlny (obdobný vztah jako (2.42) platí i pro vektor \mathbf{H}) do Maxwellových rovnic (2.1) a vhodnými úpravami dostáváme (pro zestručnění vynecháme zápis závislosti na poloze a času)

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.43a)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}, \quad (2.43b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.43c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (2.43d)$$

Dosadíme-li do prvních dvou rovnic (2.43) za vlnový vektor, dostáváme pro vzájemný vztah vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H}

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}), \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}). \quad (2.44)$$

Ze vztahů (2.44) je patrné, že vektory \mathbf{E} , \mathbf{H} a \mathbf{n} jsou na sebe vzájemně kolmé.

Určeme nyní výraz charakterizující intenzitu pole. Dosadíme-li (2.44) do výrazu (2.20), dostáváme s využitím komplexního Poyntingova vektoru

$$I = \|\langle \mathbf{S} \rangle\| = \frac{1}{2} \|\langle \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \rangle\| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \|\langle \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*)] \rangle\|. \quad (2.45)$$

S využitím známé identity pro dvojnásobný vektorový součin [9–11], kdy platí $\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*) = \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) - \mathbf{E}^*(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})$, po dosazení za rovnici harmonické vlny a časovém středování poté dostáváme výsledný výraz pro intenzitu

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \|\mathbf{E}_0\|^2. \quad (2.46)$$

Energie rovinných vln se tedy šíří po celém prostoru.

Z výrazu pro komplexní Poyntigův vektor můžeme soudit o další vlastnosti šíření rovinných vln. Po dosazení (2.44) do (2.22) a úpravě docházíme k závěru

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \mathbf{n}. \quad (2.47)$$

Směr šíření energie rovinných elektromagnetických vln je tedy stejný jako jednotkový vektor ve směru šíření rovinné vlny. A jelikož jsou vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} kolmé na vektor \mathbf{n} , jsou kolmé i k samotnému šíření energie. Vlnění je tedy příčné.

Zabývejme se nyní šířením rovinných vln ve smyslu studia trajektorie bodu ležícího v rovině kolmé na směr šíření energie, jehož poloha je dána vektorem \mathbf{E} , viz (2.42). Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že se rovinná vlna šíří v prostoru daném kartézskou soustavou souřadnic (x, y, z) ve směru osy z . Reálné složky vektoru \mathbf{E} , jakožto řešení vlnové rovnice, můžeme zapsat jako

$$E_x = E_{0,x} \cos(kz - \omega t + \delta_x), \quad E_y = E_{0,y} \cos(kz - \omega t + \delta_y), \quad E_z = 0, \quad (2.48)$$

kde k je vlnové číslo, ω je úhlová frekvence, δ_x a δ_y značí počáteční fáze ve směrech os x a y . Vyloučením členu $kz - \omega t$ dostáváme [1, 13, 14, 17]

$$\left(\frac{E_x}{E_{0,x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0,y}}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{0,x}} \frac{E_y}{E_{0,y}} \cos(\delta_y - \delta_x) = \sin^2(\delta_y - \delta_x). \quad (2.49)$$

Rovnice (2.49) je rovnicí elipsy, a tedy trajektorie koncového bodu vektoru intenzity elektrického pole v průmětu do roviny (x, y) je elipsa. Rovinná vlna je tedy obecně tzv. elipticky polarizovaná. Úhel α , který svírá hlavní poloosa elipsy s osou x , lze určit ze vztahu [1, 13, 14, 17]

$$\tan 2\alpha = 2 \frac{E_{0,x}E_{0,y}}{E_{0,x}^2 - E_{0,y}^2} \cos(\delta_y - \delta_x). \quad (2.50)$$

Ve speciálních případech může polarizace poté degradovat na kruhovou:

$$E_{0,x} = E_{0,y}, \quad (\delta_y - \delta_x) = \pm(2k+1)\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

nebo lineární:

$$(\delta_y - \delta_x) = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde se elipsa degeneruje na přímku o rovnici $E_x/E_{0,x} = \pm E_y/E_{0,y}$.

Polarizační stav vln, který v praxi můžeme pozorovat, je dán časovou střední hodnotou, obdobně jako bylo zavedeno u intenzity elektromagnetického pole. Definici časové střední hodnoty $\langle E_i(z, t)E_j(z, t) \rangle$ můžeme psát jako [1, 17]

$$\langle E_i(z, t)E_j(z, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_i(z, t)E_j(z, t) dx, \quad (2.51)$$

kde T je čas, přes který provádíme středování. Aplikací na 2.49 poté dostáváme

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (2.52)$$

kde

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0,x}^2 + E_{0,y}^2, & S_1 &= E_{0,x}^2 - E_{0,y}^2, \\ S_2 &= 2E_{0,x}E_{0,y} \cos(\delta_y - \delta_x), & S_3 &= 2E_{0,x}E_{0,y} \sin(\delta_y - \delta_x). \end{aligned}$$

Veličiny S_0 , S_1 , S_2 a S_3 jsou tzv. Stokesovy polarizační parametry [17], které můžeme určit měřením. Uspořádáním do sloupcové matice dostáváme tzv. Stokesův vektor pro elipticky polarizované záření, který lze využít pro snadné propočty a určení stavu pole při průchodu prostředím [17].

2.1.4 Lom a odraz vln na rozhraní dvou prostředí

Zabýváme se nyní případem průchodu elektromagnetických vln rozhraním mezi dvěma materiálovými prostředími, a to bez přítomnosti nábojů a proudů. Ukážeme tak vztahy užívané při analýze průchodu elektromagnetického pole optickými soustavami.

Zákon odrazu a lomu

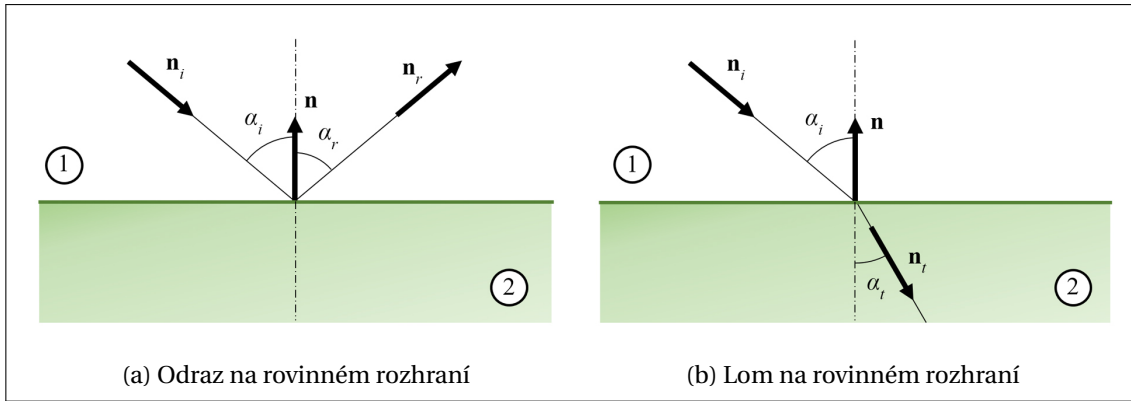
Ve většině případů klasické optiky uvažujeme prostředí v klidu bez nábojů a proudů. Poté hraniční podmínky (2.8) můžeme psát ve formě

$$H_{2t} = H_{1t}, \quad E_{2t} = E_{1t}, \quad D_{2n} = D_{1n}, \quad B_{2n} = B_{1n}. \quad (2.53)$$

Je tedy zřejmé, že tečné složky vektorů \mathbf{H} a \mathbf{E} se mění spojitě, obdobně jako normálové složky vektorů \mathbf{D} a \mathbf{B} .

Uvážíme-li vektory pole \mathbf{E} a \mathbf{H} ve formě rovinných harmonických vln a řešíme-li soustavu rovnic pro dopadající, odražené a prošlé složky, která vyplyne z podmínky spojitosti tečných složek intenzity elektrického pole (2.53), dostáváme základní podmínku pro nepohybující se rozhraní (prostředí v klidu) v jakémkoli čase t [1],

$$\omega_i = \omega_r, \quad \omega_i = \omega_t, \quad (2.54)$$



Obrázek 2.2: Zákon odrazu a lomu

kde i , r a t postupně značí vlnu dopadající, odraženou a prošlou. Je tedy zřejmé, že frekvence se při odrazu a lomu v daném případě (prostředí v klidu) zachovává. Dále můžeme snadno odvodit obdobným způsobem vztah mezi vlnovými vektory vln, pro všechny časy t musí platit

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}. \quad (2.55)$$

Z výrazu (2.55) je zřejmé, jelikož je \mathbf{r} polohový vektor libovolného bodu rozhraní, že vektory \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r a \mathbf{k}_t leží v jedné rovině dopadu.

Předpokládejme nyní, že vektor \mathbf{n}_i značí jednotkový normálový vektor k vlnoploše rovinné elektromagnetické vlny dopadající na rozhraní, jehož orientace je dána jednotkovým normálovým vektorem \mathbf{n} , jak je naznačeno na obr. 2.2. Bez újmy na obecnosti dále uvažujme, že rozhraní prochází počátkem soustavy souřadnic, a pro všechny body dané polohovým vektorem \mathbf{r} ležící v této rovině pak platí $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$. Pro polohový vektor \mathbf{r} dále platí $\mathbf{r} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})$, což je v naší situaci zřejmé z identity pro smíšený vektorový součin: $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})$ [9–11]. Dosazením do (2.55), s využitím $\mathbf{k}_i = k_i \mathbf{n}_i$, $\mathbf{k}_r = k_r \mathbf{n}_r$ pro vlnové vektory, kde k_i a k_r jsou vlnová čísla, dostáváme

$$k_i \mathbf{n}_i \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})] = k_r \mathbf{n}_r \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})]. \quad (2.56)$$

Snadnou úpravou s využitím Lagrangeovy identity [9–11] poté pro dopadající i odražené vlnění ve stejném prostředí, tj. platí $k_i = k_r$, dostáváme

$$\sin \alpha_i = \sin \alpha_r, \quad (2.57)$$

což je známý Snellův zákon odrazu. Ve vektorovém tvaru lze zákon odrazu vyjádřit jako [1, 13–16]

$$\mathbf{n}_r = \mathbf{n}_i - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i). \quad (2.58)$$

Obdobným způsobem jako v předchozí části dostaneme pro vlnění procházející rovinným rozhraním

$$k_i (\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}) = k_t (\mathbf{n}_t \times \mathbf{n}). \quad (2.59)$$

Dosadíme-li za vlnová čísla $k = \omega/v = n\omega/c$, kde ω je úhlová frekvence, v je rychlost šíření vlnění v daném prostředí, c je rychlost šíření vlnění ve vakuu a n je index lomu prostředí, poté s přihlédnutím k zákonu zachování frekvence (2.54) po úpravě dostáváme $n_i (\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}) = n_t (\mathbf{n}_t \times \mathbf{n})$, kde n_i reprezentuje index lomu prostředí, ze kterého vlnění dopadá na prostředí s indexem lomu n_t . Z definice velikosti vektorového součinu [9–11] poté ihned dostáváme Snellův zákon lomu, platí

$$n_i \sin \alpha_i = n_t \sin \alpha_t. \quad (2.60)$$

Použitím vektorového počtu a vhodnými úpravami můžeme zákon lomu vyjádřit vektorově jako

$$\mathbf{n}_t = \frac{n_i}{n_t} \mathbf{n}_i - \mathbf{n} \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i)^2]} + \frac{n_i}{n_t} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i) \right\}. \quad (2.61)$$

Pouze připomeňme, že vektorový zápis zákona odrazu a lomu je velmi vhodný pro obecný prostorový popis průchodu optického (elektromagnetického) záření soustavou rozhraní. Známe-li totiž tvar implicitní funkce $F(\mathbf{r}) = 0$ popisující geometrii rozhraní pro volené body \mathbf{r} , poté můžeme snadno vypočítat jednotkový normálový vektor v daném bodě ze vztahu [9–11]

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla F(\mathbf{r})}{\|\nabla F(\mathbf{r})\|}. \quad (2.62)$$

■ Fresnelovy vztahy

V předchozí části byly ukázány zákony odrazu a lomu, tj. vztahy popisující, jak se bude měnit směr jednotkového vektoru charakterizujícího směr šíření rovinné elektromagnetické vlny (normálového vektoru rovinné vlnoplochy). Přitom jsme předpokládali pole bez nábojů a proudů a nepohybující se rozhraní. V této části se budeme zabývat tím, jak se budou měnit samotné vektory intenzity elektrického pole \mathbf{E} a vektor intenzity magnetického pole \mathbf{H} při dopadu na rozhraní materiálových prostředí.

Předpokládejme opět rovinné elektromagnetické vlny a pole bez nábojů a proudů. Potom můžeme hraniční podmínky pro vlnění (vektory \mathbf{E} a \mathbf{H}) dopadající (index i), odražené (index r) a prošlé (index t) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r - \mathbf{H}_t) &= \mathbf{0}, & \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r - \mathbf{B}_t) &= 0, & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_i + \mathbf{D}_r - \mathbf{D}_t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

kde \mathbf{n} značí jednotkový normálový vektor rozhraní směřující do prvního prostředí (viz obr. 2.2).

Dosažením již známého vztahu pro \mathbf{H} rovinné elektromagnetické vlny,

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}), \quad (2.64)$$

kde ε je permitivita prostředí a μ permeabilita, do první rovnice (2.63) dostáváme

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_i)] + \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_r \times \mathbf{E}_r)] - \sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\mu_t}} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_t \times \mathbf{E}_t)] = \mathbf{0}. \quad (2.65)$$

Předpokládáme-li dále stejné prostředí pro dopadající a odražené záření ($\varepsilon_r = \varepsilon_i$ a $\mu_r = \mu_i$), dostáváme s použitím vztahu pro smíšený vektorový součin

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}} [\mathbf{n}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i) - \mathbf{E}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i)] + \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}} [\mathbf{n}_r (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_r) - \mathbf{E}_r (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_r)] \\ - \sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\mu_t}} [\mathbf{n}_t (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_t) - \mathbf{E}_t (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_t)] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Násobme nyní druhý vztah (2.63) vektorově zleva vektorem \mathbf{n} , po úpravě dostáváme

$$\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i + \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_t) - (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_t) = \mathbf{0}. \quad (2.67)$$

Vztahy (2.66) a (2.67) jsou obecné Fresnelovy vztahy [1, 13–17], pomocí kterých můžeme určit vektory \mathbf{E}_r a \mathbf{E}_t , známe-li vektor \mathbf{E}_i a geometrické rozložení rozhraní.

Zabývejme se nyní zjednodušující situací, a to že vektor \mathbf{E} je kolmý k rovině dopadu. Podle obr. 2.2 platí $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i) = -\cos \alpha_i$, $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_r) = \cos \alpha_r$ a $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_t) = -\cos \alpha_t$, kde α_i je úhel dopadu, α_r je úhel odrazu a α_t je úhel lomu. Dále platí $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_r = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_t = 0$. Dosazením a úpravou (2.66) a (2.67) a použitím zákona odrazu dostáváme [1, 13–17]

$$\mathbf{E}_t = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}} \cos \alpha_i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}} \cos \alpha_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\mu_t}} \cos \alpha_t} \mathbf{E}_i, \quad (2.68a)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t - \mathbf{E}_i = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}} \cos \alpha_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\mu_t}} \cos \alpha_t}{\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}} \cos \alpha_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\mu_t}} \cos \alpha_t} \mathbf{E}_i. \quad (2.68b)$$

V případě, že vektor \mathbf{E} leží v rovině dopadu, využijeme znalosti kolmosti mezi vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} , a tedy vektor \mathbf{H} bude k rovině dopadu kolmý. Obdobně jako v předchozím případě poté platí vztahy [1, 13–17]

$$\mathbf{H}_t = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}} \cos \alpha_i}{\sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}} \cos \alpha_i + \sqrt{\frac{\mu_t}{\varepsilon_t}} \cos \alpha_t} \mathbf{H}_i, \quad (2.69a)$$

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_i = \frac{\sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}} \cos \alpha_i - \sqrt{\frac{\mu_t}{\varepsilon_t}} \cos \alpha_t}{\sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}} \cos \alpha_i + \sqrt{\frac{\mu_t}{\varepsilon_t}} \cos \alpha_t} \mathbf{H}_i. \quad (2.69b)$$

V rámci studia polarizace a její změny při přechodu rozhraním zavádíme tzv. Fresnelovy amplitudové a energetické koeficienty. Uvažujeme-li dielektrická prostředí ($\mu_i = \mu_r = \mu_t$), poté pro Fresnelovy amplitudové koeficienty platí [1, 17]

$$r_s = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_s = -\frac{\sin(\alpha_i - \alpha_t)}{\sin(\alpha_i + \alpha_t)}, \quad t_s = \left(\frac{E_t}{E_i} \right)_s = \frac{2 \cos \alpha_i \sin \alpha_t}{\sin(\alpha_i + \alpha_t)}, \quad (2.70a)$$

$$r_p = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_p = \frac{\tan(\alpha_i - \alpha_t)}{\tan(\alpha_i + \alpha_t)}, \quad t_p = \left(\frac{E_t}{E_i} \right)_p = \frac{2 \cos \alpha_i \sin \alpha_t}{\sin(\alpha_i + \alpha_t) \cos(\alpha_i - \alpha_t)}, \quad (2.70b)$$

kde index s značí případ, kdy vektor \mathbf{E} je kolmý k rovině dopadu (tzv. s - polarizace) a index p označuje případ vektoru \mathbf{E} v rovině dopadu (p - polarizace). Fresnelovy energetické koeficienty jsou obecně definovány jako [1, 17]

$$R = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_r \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_i \rangle}, \quad T = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_t \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_i \rangle}, \quad (2.71)$$

kde $\langle \mathbf{S} \rangle$ značí časovou střední hodnotu Poyntingova vektoru. Dosazením z předcházejících vztahů pro s - polarizaci a p - polarizaci dostáváme

$$R_s = (r_s)^2, \quad T_s = \frac{n_t \cos \alpha_t}{n_i \cos \alpha_i} (t_s)^2, \quad (2.72a)$$

$$R_p = (r_p)^2, \quad T_p = \frac{n_t \cos \alpha_t}{n_i \cos \alpha_i} (t_p)^2. \quad (2.72b)$$

V případě, kdy vektor \mathbf{E} svírá s rovinou dopadu obecný úhel ξ , platí pro energetické koeficienty [1, 17]

$$R = R_p \cos^2 \xi + R_s \sin^2 \xi, \quad T = T_p \cos^2 \xi + T_s \sin^2 \xi. \quad (2.73)$$

Pro speciální případ kolmého dopadu ($\alpha_i = 0$) dostáváme

$$r_p = -r_s = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}, \quad t_p = t_s = \frac{2n_i}{n_t + n_i}, \quad (2.74a)$$

$$R = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2, \quad T = \frac{4n_i n_t}{(n_t + n_i)^2}. \quad (2.74b)$$

2.1.5 Eikonál – geometricko-optická aproximace

V předchozích částech jsme zavedli pojem vlnové číslo definované vztahem $k = \omega/v = n\omega/c = nk_0$, kde ω je úhlová frekvence, v je rychlost šíření vlnění v daném prostředí, c je rychlost šíření vlnění ve vakuu a n je index lomu prostředí. Hodnota $k_0 = \omega/c$ je vlnové číslo odpovídající šíření ve vakuu. Pro vlnové číslo dále platí $k = 2\pi/\lambda$, kde λ je vlnová délka. Jak je známo [1, 13, 14], index lomu prostřední n je závislý na vlnové délce.

Řešením Maxwellových rovnic pro limitní případ monochromatických harmonických rovinných vln, kdy předpokládáme $\lambda \rightarrow 0$, dostaneme základní vztahy používané v geometrické optice. Geometricko-optický popis je tedy možné chápat jako aproximativní řešení Maxwellových rovnic.

Uvažujme v dalším pro jednoduchost izotropní prostředí. V rámci geometricko-optického popisu definujeme vlnoplochu jako plochu konstantní fáze a tzv. paprsek jako křivku v každém svém bodě kolmou na vlnoplochu [1, 13, 14]. Paprsek se tedy bude šířit ve směru normály vlnoplochy. V případě rovinných vln poté bude kolineární s Poyntingovým vektorem \mathbf{S} a kolmý na vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} .

Vektory $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ pro rovinné vlny velmi vzdálené od zdroje můžeme obecně zapsat jako [13]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_0 \exp [i(k_0 S(\mathbf{r}) - \omega t)], \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}_0 \exp [i(k_0 S(\mathbf{r}) - \omega t)], \quad (2.75)$$

kde \mathbf{e}_0 a \mathbf{h}_0 jsou amplitudy (konstantní vektory), k_0 je již zmíněné vlnové číslo ve vakuu, ω je úhlová frekvence, t je čas a nově zavedený symbol $S(\mathbf{r})$ je tzv. eikonál [1, 13, 14].

Dosazením (2.75) do Maxwellových rovnic (2.1), s uvážením materiálových vztahů $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ a $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, kde ϵ je permitivita a μ permeabilita, a prostředí bez nábojů a proudů ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\rho = 0$), s uvážením, že pro rovinné vlny platí $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}$ a $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{H}$, po vyloučení členu $\exp(-i\omega t)$ a pro aproximaci pro velmi malé vlnové délky ($\lambda \rightarrow 0$, $k_0 \rightarrow \infty$) poté vhodnými úpravami dostáváme [1, 13, 14]

$$[\nabla S(\mathbf{r})]^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (2.76)$$

kde jsme dále použili $\epsilon\mu = 1/v^2$, $c^2/v^2 = n^2$ a $n = n(\mathbf{r})$ je index lomu prostředí závislý na poloze \mathbf{r} . Rozepsáním do složek můžeme ještě (2.76) vyjádřit jako

$$\left[\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial z} \right]^2 = n^2(x, y, z). \quad (2.77)$$

Výše uvedený vztah (2.76), resp. (2.77), je tzv. eikonálová rovnice [1, 13, 14]. Ta tvoří základ pro geometricko-optický popis šíření elektromagnetického záření.

Ze vztahu (2.76) lze vyvodit rovnice pro směrový vektor paprsku – tzv. paprskové rovnice. Platí

$$\nabla S(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) \mathbf{n}(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (2.78)$$

kde $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ je normálový vektor plochy $S(\mathbf{r}) = \text{konst.}$ a ds značí délkový element křivky v každém svém bodě kolmé k této ploše – paprsku. Jak je intuitivní a plyne z definice, $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ je směrový vektor paprsku v daném bodě \mathbf{r} . Uvážíme-li dále, že platí $\frac{d}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \nabla$, poté dosazením do (2.78) a úpravou dostáváme

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} (\nabla S) \cdot \nabla (\nabla S), \quad (2.79)$$

kde jsme pro přehlednost vynechali zápis závislosti na poloze \mathbf{r} . Použitím (2.76) následně dostáváme rovnici paprsku ve tvaru

$$\frac{d}{ds} \left[n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n(\mathbf{r}). \quad (2.80)$$

Jak je známo z matematiky, můžeme operátor ∇ symbolicky zapsat jako $\nabla = d/d\mathbf{r}$. Poté aplikací na vztah (2.78) a snadnou úpravou dostáváme

$$dS(\mathbf{r}) = d\mathbf{r} \left[n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right]. \quad (2.81)$$

Jelikož dále pro infinitezimální posunutí $d\mathbf{r}$ platí $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \approx (ds)^2$, dostáváme

$$dS(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})ds. \quad (2.82)$$

Nyní můžeme vyslovit definici tzv. optické dráhy ΔS_{AB} paprsku mezi dvěma body A a B, která je dána vztahem [1, 13–16]

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B n(\mathbf{r})ds. \quad (2.83)$$

2.2 Šíření a difrakce elektromagnetických vln

Základní popis elektromagnetického pole můžeme rozdělit do tří primárních skupin: generace, šíření a interakce elektromagnetického pole s materiálovým rozhraním. Toto dělení lze aplikovat i diferenciálním přístupem na nehomogenní materiálová prostředí. Prvním bodem, generací pole, se v rámci této práce zabývat nebudeme. Apriorně předpokládáme bod, ve kterém stav pole zkoumáme, dostatečně vzdálený od zdroje. Druhý a třetí bod - šíření a difrakce - spolu velmi úzce souvisí. Proto se jimi budeme v této kapitole zabývat současně.

Studium šíření elektromagnetického pole je založeno na řešení Maxwellových rovnic v čase a prostoru. V dřívějších kapitolách jsme si již ukázali, že vývoj pole lze charakterizovat vektory $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ proměnnými v čase, přičemž složky těchto vektorů splňují vlnovou rovnici. Je nutné zdůraznit, že vektory $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ jsou dále vázány zmíněnými Maxwellovými rovnicemi. Předpokládáme-li homogenní prostředí bez nábojů a proudů a harmonické pole v čase, poté vektory amplitud intenzity elektrického a magnetického pole $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ a $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ musí splňovat Helmholtzovu rovnici. Pro šíření pole tedy můžeme formulovat výchozí vztahy

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.84a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.84b)$$

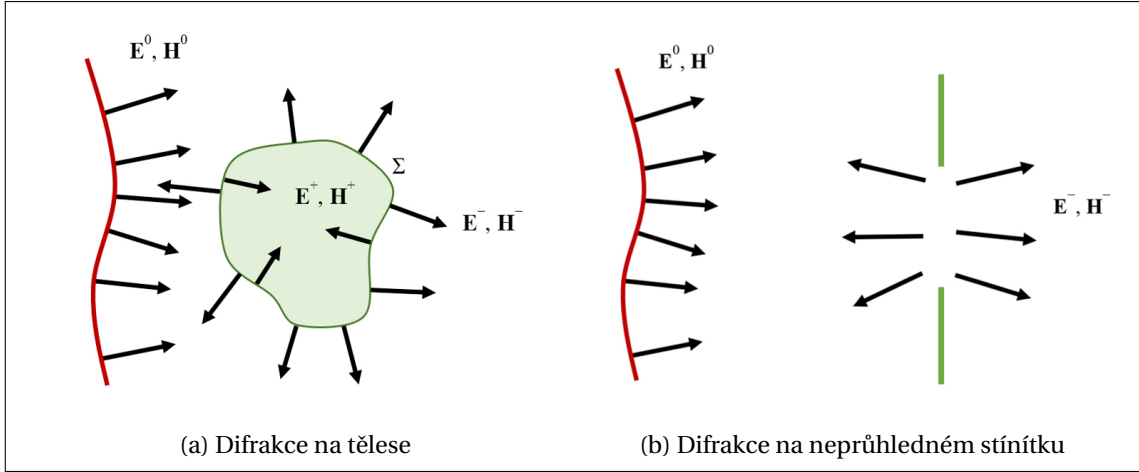
kde $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo a λ vlnová délka. Pro ilustraci rozepíšeme vztahy složky vektoru $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = [E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), E_z(\mathbf{r})]$, dostáváme

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}) + k^2 E_x(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla^2 E_y(\mathbf{r}) + k^2 E_y(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla^2 E_z(\mathbf{r}) + k^2 E_z(\mathbf{r}) &= 0, \\ \frac{\partial E_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial E_z(\mathbf{r})}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Z rovnic (2.84) je zřejmé, že obecně nelze studovat jednotlivé složky vektorů $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ a $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ samostatně, jelikož jsou vzájemně svázány čtvrtou rovnicí.

Bude-li se pole šířit prostorem v čase, bez pochyb v určitém okamžiku narazí na nehomogenitu nebo nespojitě rozhraní dvou materiálových prostředí. Interakcí elektromagnetického pole s rozhraním se zabývá difrakční teorie. V blízkých oblastech rozhraní nedostačuje pro popis aproximativní geometrický přístup, který byl nastíněn v předchozí kapitole pojednávající o eikonálové rovnici. Je tedy třeba zkoumat odchylky od geometrického popisu šíření elektromagnetického pole (světla), čímž se právě difrakce zabývá. Z pohledu řešení Maxwellových rovnic se v dané situaci jedná o již zmíněné splnění hraničních podmínek. Difrakční úloha je tedy formulací okrajové úlohy Maxwellových rovnic nebo z nich plynoucích rovnic vlnových.

Na obr. 2.3 jsou zobrazeny dva případy pro dopad elektromagnetického vlnového pole na tělesa – prostorově omezené těleso (obr. 2.3a) a neprůhledné stínítko (obr. 2.3b). Šipky znázorňují Poyntingův vektor. Dopadající pole ($\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$) interaguje na hranici, následně vzniká vnitřní difrakční pole ($\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$) a vnější difrakční pole ($\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-$). Určení těchto polí je matematicky velmi složité a rigorózní řešení bylo nalezeno jen v několika málo případech.



Obrázek 2.3: Difrakční úloha na tělese a stínítku [1]; $(\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0)$ – dopadající pole, $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$ – vnitřní difrakční pole, $(\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-)$ – vnější difrakční pole, šipky značí Poyntingův vektor

Budeme-li nyní chtít vyšetřit vnitřní a vnější difrakční pole, známe-li stav pole dopadajícího, tato pole musí splnit hraniční podmínky na ploše tělesa Σ , které můžeme v daném případě zapsat jako [1]

$$(\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^-) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}^+ \times \mathbf{n}, \quad (2.85)$$

$$(\mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^-) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}^+ \times \mathbf{n}, \quad (2.86)$$

kde \mathbf{n} značí normálu k ploše Σ , která obklopuje objem V . Navíc musí vnější difrakční pole splňovat tzv. vyzářovací podmínky a podmínky konečnosti. Ty mají pro homogenní a izotropní prostředí tvar [1, 18]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\mathbf{E}^- + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{r}^0 \times \mathbf{H}^- \right) = \mathbf{0}, \quad (2.87a)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\mathbf{H}^- + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{r}^0 \times \mathbf{E}^- \right) = \mathbf{0}, \quad (2.87b)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \mathbf{E}^- = \text{const.}, \quad (2.87c)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \mathbf{H}^- = \text{const.}, \quad (2.87d)$$

kde R je vzdálenost mezi bodem, kde vyšetřujeme stav pole, a bodem na ploše Σ a \mathbf{r}^0 je jednotkový vektor v tomto směru, tj. od bodu na ploše Σ k bodu, kde vyšetřujeme pole. Pro úplnost pouze poznamenejme, že pro dokonale vodivá prostředí platí $\mathbf{E}^+ = \mathbf{0}$ a $\mathbf{H}^+ = \mathbf{0}$, a tedy hraniční podmínky budou mít tvar

$$(\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^-) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (2.88a)$$

$$(\mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^-) \times \mathbf{n} = \mathbf{j}_\Sigma, \quad (2.88b)$$

kde \mathbf{j}_Σ je délková hustota proudu na ploše Σ .

V optické praxi se ukazuje, že obdivuhodně přesné výsledky dává tzv. skalární teorie difrakce, tj. uvažujeme případ, kdy vlastnosti pole budou dostatečně přesně popsány pouze jednou skalární veličinou, např. jednou složkou intenzity elektrického pole. V tu chvíli zanedbáváme vazbu mezi složkami danou vztahy (2.84). Experimenty toto potvrzují, jsou-li splněny následující podmínky [1, 13–16, 19]:

- difrakce nastává na tělesech, jejichž rozměry jsou několikanásobně větší, než je vlnová délka elektromagnetického záření,

- vzdálenosti od těles, ve kterých pozorujeme difrakční jevy, jsou dostatečně velké.

Skalární teorie má zásadní význam např. při studiu zobrazení optickými soustavami, kde nás zajímá především intenzita nepolarizovaného (přirozeného) světla.

2.2.1 Vektorové pole

Než přistoupíme k samotnému představení řešení šíření elektromagnetického pole ve vektorovém tvaru, zabývejme se řešením Helmholtzovy rovnice pro jednu složku vektoru $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ a $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ dle rovnic (2.84). Označme tuto složku jako $\phi(\mathbf{r})$. Naším cílem tedy bude najít řešení Helmholtzovy rovnice

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + k^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.89)$$

které dále bude splňovat vhodnou okrajovou podmínku [9–11]

$$\left[\alpha(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right]_{\Sigma} = f(\mathbf{r}) \quad (2.90)$$

na ploše Σ obklopující oblast, kterou vyšetřujeme, kde $\alpha(\mathbf{r})$, $\beta(\mathbf{r})$ a $f(\mathbf{r})$ jsou spojité funkce na Σ , a také pro ně platí $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ a $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Řešení je možné provést řadou způsobů, elegantním přístupem je např. metoda Greenovy funkce [9–11]. Hledáme-li řešení rovnice (2.89) v bodě prostoru daném polohovým vektorem \mathbf{p} a označíme-li $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ jako Greenovu funkci pro náš případ, ta poté musí splňovat vztah [1, 9–11]

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + k^2 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -4\pi \delta(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (2.91)$$

kde $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ je Diracova funkce [9–11], a okrajovou podmínku

$$\left[\alpha(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \beta(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial n} \right]_{\Sigma} = 0 \quad (2.92)$$

pro $\mathbf{p} \in \Sigma$. Dalším z požadavků je také spojitost Greenovy funkce ve vyšetřované oblasti, případně spojitost i jejích prvních derivací, jestliže $\beta(\mathbf{r}) \neq 0$.

Najdeme-li Greenovu funkci, snadno poté získáme řešení dané úlohy. Násobením rovnice (2.89) funkcí $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, rovnice (2.91) funkcí $\phi(\mathbf{r})$ a jejich vzájemným odečtením dostáváme

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 4\pi \delta(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \phi(\mathbf{r}). \quad (2.93)$$

Integrací přes objem V , který je obklopen plochou Σ , a použitím Greenovy identity [9–11] dostáváme

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} - \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial n} \right] d\Sigma, \quad (2.94)$$

přičemž derivace jsou brány ve směru vnější normály k ohraničující ploše Σ .

Analogicky k rovnici (2.94) lze ve vektorové formě vyjádřit vztahy pro prostorovou složku vektorů intenzity elektrického a magnetického pole \mathbf{E}_0 a \mathbf{H}_0 . Lze ukázat, že platí [18, 20]

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}))] d\Sigma, \quad (2.95a)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p})(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_0(\mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}))] d\Sigma. \quad (2.95b)$$

Jedno z prvních řešení vektorového pole představil Kottler [18, 20]. Další z řešení představili například autoři Stratton a Chu [2]. Problematiku řešení šíření elektromagnetického pole můžeme založit také na Fourierovské analýze vyšetřovaného vlnového pole – tzv. metoda úhlového spektra rovinných vln. Šířící se pole můžeme totiž vyjádřit superpozicí rovinných vln, jestliže jednotlivé

prostorové Fourierovské složky ztotožníme s rovinnými vlnami, které se šíří v různých směrech [21].

Předpokládejme homogenní izotropní prostředí bez nábojů a proudů a elektromagnetické pole uvažujme ve formě harmonických vln. Dále nejprve předpokládejme, že se jednotlivé složky vektoru \mathbf{E} šíří tak, že splňují Helmholtzovu rovnici

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + k^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.96)$$

kde $\phi(\mathbf{r})$ značí libovolnou složku vektoru \mathbf{E}_0 , $\mathbf{r} = [x, y, z]$. Vědomě tak nejprve zanedbáme vzájemnou vazbu mezi složkami danou vztahem $\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. Dále předpokládejme apriorní znalost pole v rovině $z = z_0$. Řešení poté hledíme ve tvaru dvourozměrné Fourierovy transformace [1, 9–11, 21]

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(p, q, z) \exp [ik(px + qy)] dpdq. \quad (2.97)$$

Lze ukázat, že řešením Helmholtzovy rovnice pomocí teorie Fourierovy transformace můžeme složky ϕ v rovině $z \geq z_0$ vyjádřit jako [1]

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(p, q) \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (2.98)$$

kde

$$m = \begin{cases} \sqrt{1 - p^2 - q^2}, & p^2 + q^2 \leq 1, \\ \sqrt{p^2 + q^2 - 1}, & p^2 + q^2 > 1. \end{cases}$$

Vztah (2.98) představuje řešení pro složku vektoru \mathbf{E}_0 ve tvaru spektra rovinných vln. Pole je v tomto případě vyjádřeno jako superpozice homogenních vln (případ $p^2 + q^2 \leq 1$), kdy se tyto rovinné vlny šíří ve směrech svírajících s kladným směrem osy z úhly v intervalu od $-\pi/2$ do $\pi/2$, a vln nehomogenních (evanescentních) (případ $p^2 + q^2 > 1$), které se šíří kolmo k ose z a jsou exponenciálně tlumeny s rostoucím z .

Využijme nyní výše zmíněné řešení pro jednu složku k přechodu na řešení soustavy rovnic (2.84). Pro jednoduchost zápisu označme dále složky vektoru \mathbf{E}_0 jako $E_x = E_{0,x}(\mathbf{r})$, $E_y = E_{0,y}(\mathbf{r})$, $E_z = E_{0,z}(\mathbf{r})$ (obdobně pro vektor $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$), $A_x = A_x(p, q)$ a $A_y = A_y(p, q)$. Zvolíme-li složky E_x a E_y ve tvaru daném (2.98) a uvážíme-li, že složky vektoru \mathbf{E}_0 nejsou nezávislé, dostáváme [1]

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_x \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (2.99a)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_y \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (2.99b)$$

$$E_z = - \int \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) dz, \quad (2.99c)$$

kde třetí rovnice je přímým důsledkem podmínky $\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. Derivací složky E_x podle x a složky E_y podle y , následným dosazením do třetí rovnice a úpravou dostáváme

$$E_z = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{p}{m} A_x + \frac{q}{m} A_y \right) \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq. \quad (2.100)$$

Tím je vyjádřeno řešení pro složky vektoru $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$. Řešení pro složky vektoru \mathbf{H}_0 najdeme dosazením výše zmíněných vztahů do Maxwellových rovnic a následnou snadnou úpravou, kterou čtenář může nalézt např. v [1].

Shrneme-li nyní výše popsané vyjádření řešení šíření elektromagnetického pole ve formě úhlového spektra rovinných vln, známe-li stav pole v rovině $z = z_0$, dostáváme pro složky vektoru intenzity elektrického pole

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(p, q) \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (2.101a)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_y(p, q) \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (2.101b)$$

$$E_z = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{p}{m} A_x(p, q) + \frac{q}{m} A_y(p, q) \right] \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (2.101c)$$

a pro složky vektoru intenzity magnetického pole

$$H_x = - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{pq}{m} A_x(p, q) + \frac{1-p^2}{m} A_y(p, q) \right] \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (2.102a)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1-q^2}{m} A_x(p, q) + \frac{pq}{m} A_y(p, q) \right] \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (2.102b)$$

$$H_z = - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [qA_x(p, q) - pA_y(p, q)] \exp [ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (2.102c)$$

kde

$$A_x(p, q) = \frac{\exp(-ikmz_0)}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(x, y, z_0) \exp [-ik(px + qy)] dx dy,$$

$$A_y(p, q) = \frac{\exp(-ikmz_0)}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x, y, z_0) \exp [-ik(px + qy)] dx dy,$$

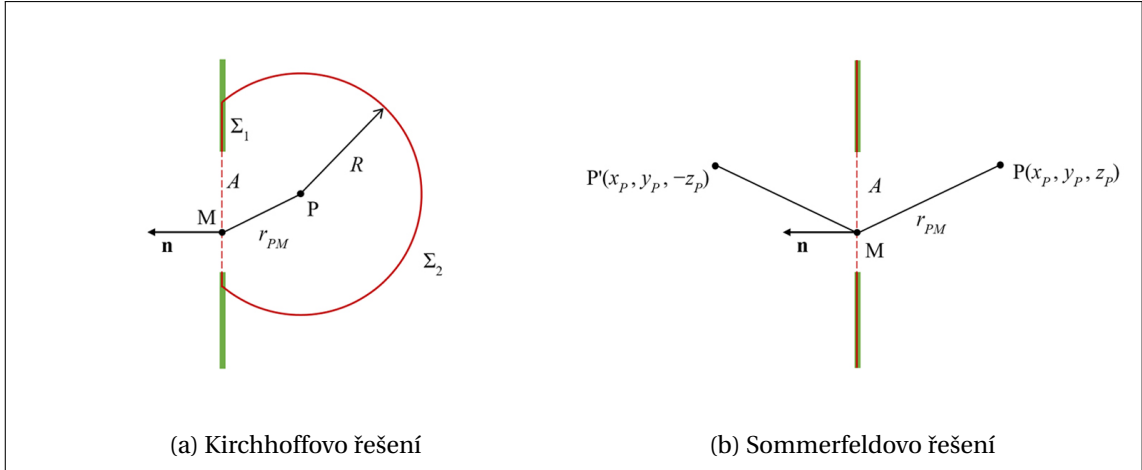
$$m = \begin{cases} \sqrt{1 - p^2 - q^2}, & p^2 + q^2 \leq 1, \\ \sqrt{p^2 + q^2 - 1}, & p^2 + q^2 > 1. \end{cases}$$

2.2.2 Skalární teorie difrakce

Zabývejme se nyní skalárním vyjádřením šíření elektromagnetického pole, zejména poté řešením difrakční úlohy na rovinném stínítku. V tomto přístupu studujeme pouze jednu skalární veličinu, zpravidla jednu ze složek vektorů \mathbf{E} nebo \mathbf{H} , a předpokládáme, že dostatečně vyjadřuje vlastnosti pole. Dále předpokládáme, že ostatní složky můžeme zkoumat nezávisle stejným způsobem. Toto je značně aproximativní úvaha, která zanedbává vazby mezi jednotlivými složkami vektorů elektromagnetického pole. V experimentální praxi optiky se ale ukazuje, že řešení je poměrně přesné, jsou-li splněny podmínky, které byly již zmíněny v úvodu této kapitoly, tedy že:

- difrakce nastává na tělesech, jejichž rozměry jsou několikanásobně větší, než je vlnová délka elektromagnetického záření,
- vzdálenosti od těles, ve kterých pozorujeme difrakční jevy, jsou dostatečně velké.

Již v první části této kapitoly bylo nastíněno řešení difrakční úlohy pomocí Greenovy funkce, které využil Kirchhoff. Uvažujme situaci znázorněnou na obr. 2.4a. V rovině apertury A leží bod M ,



Obrázek 2.4: Difrakční úloha na rovinném stínítku [1]

který je zdrojem elementární elektromagnetické vlny. Pole vyšetřujeme v bodě P. Pro přehlednost zde opišíme výsledný vztah (2.94), kde symbolicky označíme $\mathbf{r} \sim M$, $\mathbf{p} \sim P$, poté platí

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\psi(M, P) \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} - \phi(M) \frac{\partial \psi(M, P)}{\partial n} \right] d\Sigma. \quad (2.103)$$

Známe-li stav pole v libovolném bodě M na hraniční ploše Σ , která ohraničuje objem V, a dále známe-li Greenovu funkci $\psi(M, P)$ ve stejné oblasti V ohraničené plochou Σ , poté můžeme určit stav pole v bodě P nacházejícím se v této oblasti.

Kirchhoffovo řešení uvažuje plochu Σ složenou ze dvou částí Σ_1 a Σ_2 , jak je zobrazeno na obr. 2.4a, kdy plocha Σ_1 se těsně přimyká k rovině stínítka a plocha Σ_2 je částí kulové plochy se středem v bodě P, ve kterém stav pole vyšetřujeme. Tím se integrace rozdělí na dvě oblasti. Kirchhoff dále uvažoval Greenovu funkci ve tvaru kulové vlny [1, 13, 22]

$$\psi(M, P) = \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}}, \quad (2.104)$$

kde r_{PM} je vzdálenost mezi body M a P a dále okrajové podmínky [1, 13, 22]:

- v oblasti apertury (otvoru) A mají pole ϕ a jeho derivace $\partial\phi/\partial n$ stejnou hodnotu, jako by měly, kdyby nebylo přítomno stínítko,
- na části plochy Σ_1 mimo otvor A je pole rovno nule, stejně jako jeho derivace.

Kirchhoffovy hraniční podmínky si vzájemně odporují. Jsou-li totiž pole ϕ a jeho derivace $\partial\phi/\partial n$ rovny nule na nějaké části plochy, pak jsou nulové v celém prostoru, jak je známo z teorie diferenciálních rovnic [9–11]. Řešení tak není konzistentní, jelikož pole a jeho derivace ve skutečnosti nenabývají na hranici takových hodnot, jaké předpokládají volené hraniční podmínky. Experimentální pozorování ovšem potvrzují, že Kirchhoffovo řešení dává i přes vnitřní matematický rozpor velmi přesné výsledky. Kirchhoffovo řešení difrakční úlohy tedy můžeme zapsat jako

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left[\psi(M, P) \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} - \phi(M) \frac{\partial \psi(M, P)}{\partial n} \right] dA, \quad (2.105)$$

kde integrujeme přes plochu A otvoru ve stínítku (plochu apertury).

Nekonzistentní Kirchhoffovo řešení zmírnil Sommerfeld [1, 13], a to dvěma možnými způsoby:

- Greenova funkce má být na ploše Σ_1 nulová,

$$\psi(M, P)|_{\Sigma_1} = 0, \quad (2.106)$$

- nebo derivace ve směru normály má být nulová,

$$\left. \frac{\partial \psi(M, P)}{\partial n} \right|_{\Sigma_1} = 0. \quad (2.107)$$

Greenova funkce pro případ rovinného stínítka, která odpovídá výše zmíněné podmínce (2.106), má tvar

$$\psi(M, P) = \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} - \frac{\exp(ikr'_{P'M})}{r'_{P'M}}, \quad (2.108)$$

kde k je vlnové číslo, r_{PM} je vzdálenost mezi bodem P, ve kterém vyšetřujeme stav pole, a bodem M v místě otvoru, $r'_{P'M}$ je vzdálenost zrcadlově zobrazeného bodu P do bodu P' a bodem M, jak je zobrazeno na obr. 2.4b. Pro podmínku (2.107) bude mít Greenova funkce tvar [1]

$$\psi(M, P) = \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} + \frac{\exp(ikr'_{P'M})}{r'_{P'M}}. \quad (2.109)$$

Pro podmínku (2.106) a Greenovu funkci (2.108) poté Sommerfeld ukázal řešení

$$\phi(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_A \phi(M) \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \cos \alpha \, dA, \quad (2.110)$$

kde jsme dále použili předpoklad velmi krátkých vlnových délek λ , tj. platí $r \gg \lambda$, a kde α je úhel mezi vektory \mathbf{r}_{PM} a $-\mathbf{n}$ (viz obr. 2.4b a obr. 2.5).

Obdobně jako v případě vektorového pole můžeme difrakční úlohu ve skalárním případě formulovat pomocí úhlového spektra rovinných vln. Využijeme již výše odvozený vztah (2.98) pro jednu složku vektoru pole. Uvážení pouze jedné složky bez vazby na další je v souladu s předpoklady skalární teorie difrakce.

Známe-li tedy stav pole $\phi(x, y, z_0)$ v rovině z_0 , poté můžeme určit pole $\phi(x, y, z)$ v rovině $z \geq z_0$ pomocí vztahu [1, 9–11, 21]

$$\phi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(p, q) \exp[ik(px + qy + mz)] \, dpdq, \quad (2.111)$$

kde

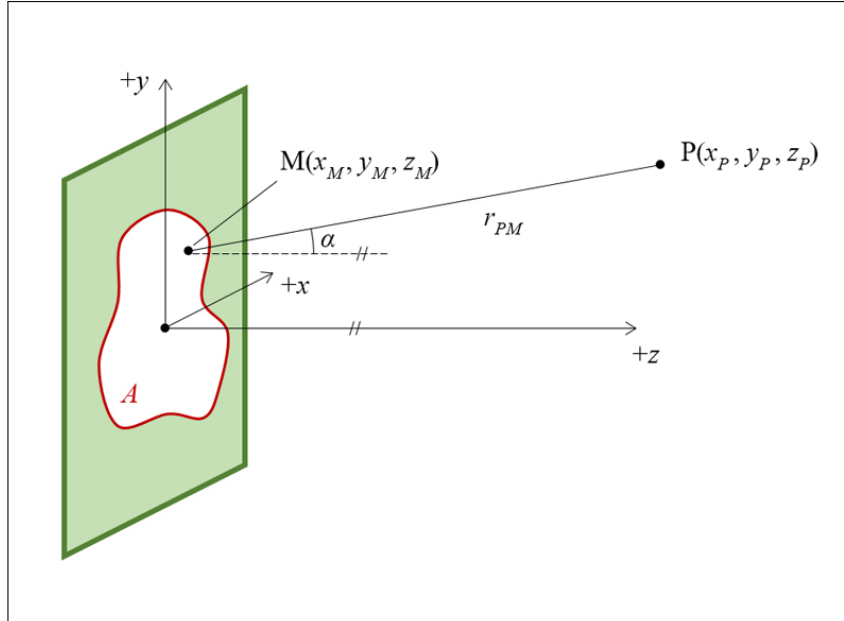
$$A(p, q) = \frac{\exp(-ikmz_0)}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y, z_0) \exp[-ik(px + qy)] \, dx dy,$$

$$m = \begin{cases} \sqrt{1 - p^2 - q^2}, & p^2 + q^2 \leq 1, \\ \sqrt{p^2 + q^2 - 1}, & p^2 + q^2 > 1. \end{cases}$$

Představme nyní dvě aproximativní řešení difrakční úlohy, které je vhodné v řadě praktických aplikací využít, dovoluje-li to geometrie uvažované úlohy. Výchozím vztahem bude Sommerfeldův difrakční integrál (2.110), který nemá analytické řešení a jeho numerický výpočet může být velmi komplikovaný vzhledem k vysoce oscilujícímu integrandu.

Bez újmy na obecnosti můžeme rovinu stínítka umístit do počátku soustavy, a tedy lze uvažovat $z_M = 0$ (viz obr. 2.5). Poté pro vzdálenost r_{PM} můžeme psát

$$r_{PM} = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + z_P^2} = z_P \sqrt{1 + \frac{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}{z_P^2}}. \quad (2.112)$$



Obrázek 2.5: Difrakce na otvoru v rovinném stínítku

Aproximativní řešení difrakční úlohy můžeme nalézt Taylorovým rozvojem [9–11] vztahu pro vzdálenost r_{PM} . Jelikož platí $\sqrt{1+\gamma} = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{8} + \dots$, můžeme psát se zanedbáním vyšších řádů

$$r_{PM} \approx z_P + \frac{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}{2z_P}. \quad (2.113)$$

Dále v rámci aproximace předpokládejme pouze malé difrakční úhly, tj. $\cos \alpha \approx 1$ a $r_{PM} \approx z_P$, poté můžeme psát tzv. Fresnelovu aproximaci Sommerfeldova difrakčního integrálu, platí

$$\phi(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikz_P)}{z_P} \iint_A \phi(M) \exp \left\{ \frac{ik}{2z_P} [(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2] \right\} dx_M dy_M. \quad (2.114)$$

Umocněním členů v exponentu a úpravou dále také můžeme získat Fresnelovu aproximaci ve tvaru

$$\phi(P) = C \iint_A \phi(M) \exp \left[\frac{ik}{2z_P} (x_M^2 + y_M^2) \right] \exp \left[-\frac{ik}{z_P} (x_P x_M + y_P y_M) \right] dx_M dy_M, \quad (2.115)$$

kde

$$C = -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikz_P)}{z_P} \exp \left[\frac{ik}{2z_P} (x_P^2 + y_P^2) \right].$$

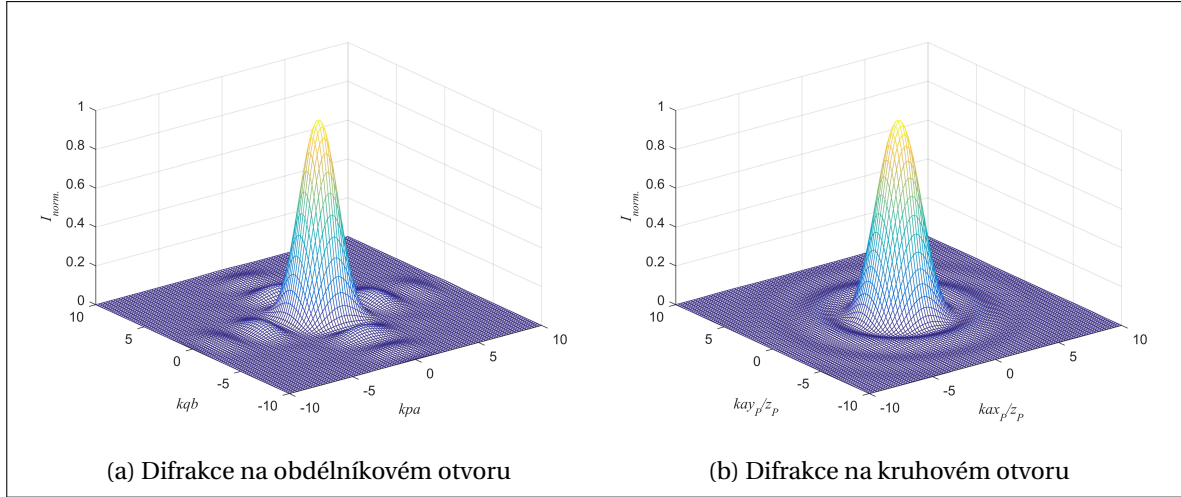
Fresnelova aproximace v podstatě nahradila původní sférickou vlnu vlnou parabolickou, jak je patrné z (2.113).

Další výrazné zjednodušení výpočtu difrakční úlohy nastane v případě, že rozměry otvoru A ve stínítku, na kterém nastává difrakce, jsou mnohem menší než vzdálenost z_P , ve které vyšetřujeme stav pole. Poté můžeme psát [1, 13, 14, 16]

$$\exp \left[\frac{ik}{2z_P} (x_M^2 + y_M^2) \right] \approx 1. \quad (2.116)$$

Označíme-li dále $p = x_P/z_P$ a $q = y_P/z_P$, dostáváme dosazením do (2.114) tzv. Fraunhoferovu aproximaci difrakčního integrálu ve tvaru

$$\phi(P) = C \iint_A \phi(M) \exp [-ik(p x_M + q y_M)] dx_M dy_M. \quad (2.117)$$



Obrázek 2.6: Normované intenzity Fraunhoferovy difrakce na obdélníkovém a kruhovém otvoru

Obdobný vztah dostaneme, předpokládáme-li, že na stínítko dopadá alespoň přibližně kulová konvergentní vlna, tj.

$$\phi(M) = \phi_s(M) \exp \left[-\frac{ik}{2z_P} (x_M^2 + y_M^2) \right], \quad (2.118)$$

kde funkce $\phi_s(M)$ charakterizuje vlastnosti této vlny v rovině stínítka. Poté dosazením do (2.114) dostáváme obdobný vztah jako (2.117), platí

$$\phi(P) = C \iint_A \phi_s(M) \exp [-ik(px_M + qy_M)] dx_M dy_M. \quad (2.119)$$

Jak je zřejmé, v rámci Fraunhoferovy aproximace je pole v bodě P úměrné Fourierově transformaci [9–11] pole v bodě M.

Jako příklad ukažme aproximativní řešení difrakční úlohy na obdélníkovém a kruhovém otvoru, které jsou fundamentální v rámci zobrazovací optiky. Difrakce na kruhovém otvoru je například základní ukázkou vlastností optického zobrazení s kruhovou aperturou.

Bude-li obdélníkový otvor rozměru $2a$ a $2b$ a jeho strany budou rovnoběžné s osami souřadnic x a y , a předpokládáme-li dále pole $\phi(M) = K$, kde K je konstanta, dostáváme pro rozložení intenzity, $I(P) = \phi(P)\phi^*(P)$, použitím (2.117) a provedením zmíněné integrace

$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 \left(\frac{\sin kqb}{kqb} \right)^2, \quad (2.120)$$

kde

$$I_0 = \frac{K^2(4ab)^2}{\lambda^2 z_P^2}.$$

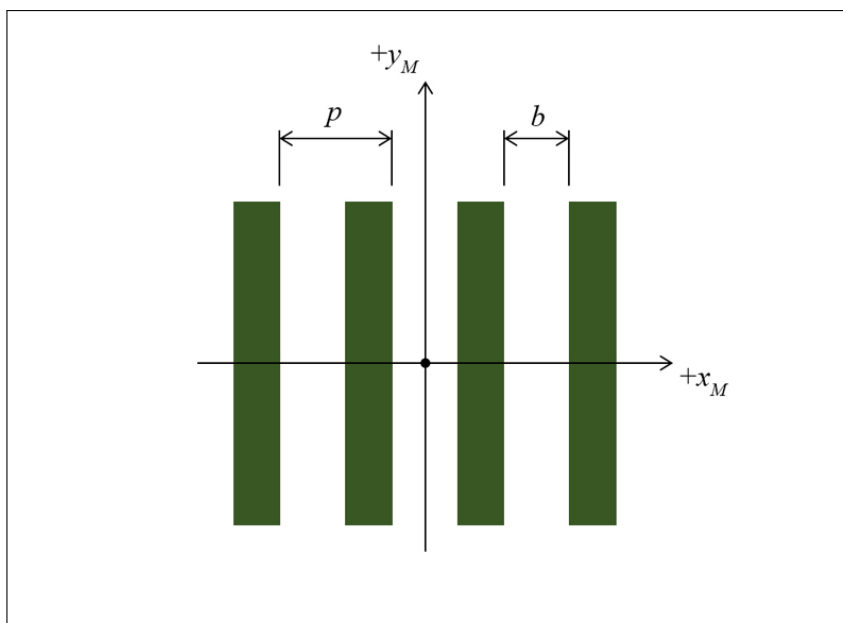
Na obr. 2.6a je zobrazena normovaná intenzita pro difrakci na obdélníkovém otvoru.

Pro difrakci na kruhovém otvoru předpokládejme jeho poloměr rovný a a počátek souřadné soustavy necht' je ve středu tohoto otvoru. Poté dostáváme s využitím Besselových funkcí [10, 11] vztah pro intenzitu v bodě P

$$I(P) = I_0 \left[\frac{2J_1 \left(ka \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{z_P} \right)}{ka \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{z_P}} \right]^2, \quad (2.121)$$

kde J_1 značí Besselovu funkci prvního druhu prvního řádu [10, 11] a kde

$$I_0 = \frac{K^2(\pi a^2)^2}{\lambda^2 z_P^2}.$$



Obrázek 2.7: Amplitudová difrakční mřížka (Ronchiho mřížka)

Normovaná intenzita pro difrakci na kruhovém otvoru je zobrazena na obr. 2.6b.

2.2.3 Difrakce na mřížce

Zabýváme se nyní difrakcí na amplitudové (Ronchiho) mřížce. Pro popis využijeme Fresnelovy aproximace pro řešení difrakční úlohy, která byla představena výše. Studium difrakce na mřížce a s ní souvisejících jevů autor publikoval například v pracích [23, 24].

Abychom správně popsali pole šířící se za difrakční mřížkou, musíme nejprve vhodně určit pole v rovině mřížky. Schematicky je mřížka naznačena na obr. 2.7. Štěrbiny jsou bez újmy na obecnosti voleny rovnoběžné s osou y_M . Dále na obrázku p značí periodu mřížky a b je šířka štěrbin. Označíme-li A jako amplitudu propustnosti mřížky, poté lze zapsat propustnost $T(x_M)$ nekonečně široké mřížky vztahem

$$T(x_M) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{x_M - np}{b}\right). \quad (2.122)$$

Pro další analýzu je výhodné zapsat vztah (2.122) formou Fourierovy řady [9–11], platí

$$T(x_M) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i\frac{2\pi}{p}nx_M\right), \quad (2.123)$$

kde jsou Fourierovy koeficienty c_n dány vztahem [23, 24]

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{A}{p} \int_{-p/2}^{+p/2} \text{rect}\left(\frac{x_M}{b}\right) \exp\left(-i\frac{2\pi x_M}{p}n\right) dx_M \\ &= \frac{A}{p} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left(-i\frac{2\pi x_M}{p}n\right) dx_M \\ &= A\frac{b}{p} \text{sinc}\left(\frac{nb}{p}\right), \end{aligned} \quad (2.124)$$

kde $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Vzhledem k tomu, že funkce sinc je sudá, můžeme propustnost mřížky zjednodušit na

$$T(x_M) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi}{p}nx_M\right). \quad (2.125)$$

Nyní předpokládejme, že pole dopadající na mřížku lze popsat funkcí $\phi_i(x_M, y_M)$, kterou lze vyjádřit jako součin dvou nezávislých funkcí souřadnic x_M a y_M , tj. $\phi_i(x_M, y_M) = \phi_x(x_M)\phi_y(y_M)$. Poté pole $\phi(x_M, y_M)$ v infinitezimální vzdálenosti za mřížkou můžeme zapsat jako

$$\phi(x_M, y_M) = \phi_x(x_M)\phi_y(y_M)T(x_M) = \phi_x(x_M)\phi_y(y_M) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i\frac{2\pi}{p}nx_M\right). \quad (2.126)$$

Dosažením do Fresnelovy aproximace difrakčního integrálu (2.114) dostáváme po snadné úpravě pro pole $\phi(x_P, y_P, z_P)$ za nekonečně rozlehlou mřížkou vztah

$$\begin{aligned} \phi(x_P, y_P, z_P) = K \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ c_n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(x_M) \exp\left(i\frac{2\pi}{p}nx_M\right) \exp\left[ik\frac{(x_P - x_M)^2}{2z_P}\right] dx_M \right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_y(y_M) \exp\left[ik\frac{(y_P - y_M)^2}{2z_P}\right] dy_M, \end{aligned} \quad (2.127)$$

kde

$$K = -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikz_P)}{z_P}.$$

Uved' me nyní vztahy, které mohou ulehčit výpočet integrálů ve výrazu (2.127). Jak lze snadno ukázat, platí [9–11]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)] dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \exp\left[i\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right]. \quad (2.128)$$

V případě, že budeme chtít vyšetřit difrakci na mřížce konečných rozměrů, nahradíme meze integrálu konkrétními hodnotami. Předpokládejme, že $x_M \in [-c, c]$ a $y_M \in [-d, d]$, poté pro vyhodnocení vztahu (2.127) řešíme integrál [23, 24]

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \exp[i(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)] dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp\left[i\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right] \int_{\varepsilon_1\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}^{\varepsilon_2\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} \exp(iv^2) dv. \quad (2.129)$$

S využitím Fresnelových integrálů [9–11] a substituce $v = \sqrt{\alpha}\left(t + \frac{\beta}{2\alpha}\right)$ lze integrál na pravé straně rovnice (2.129) upravit a dostáváme [23, 24]

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \exp[i(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)] dt = \exp(i\gamma) f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha, \beta), \quad (2.130)$$

kde

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha, \beta) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \exp\left(-i\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \left[F\left(\varepsilon_2\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right) - F\left(\varepsilon_1\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right) \right], \\ F(\tau) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\tau} \exp(i\zeta^2) d\zeta = C\left(\tau\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + iS\left(\tau\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right), \\ C(s) &= \int_0^s \cos\left(\frac{\pi}{2}\rho^2\right) d\rho, \quad S(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi}{2}\rho^2\right) d\rho. \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že na difrakční mřížku dopadá sférická vlna. Poté můžeme psát pro stav pole při dopadu

$$\begin{aligned}\phi_i(x_M, y_M) &= \exp\left(-ik \frac{x_M^2 + y_M^2}{2R}\right) \\ &= \exp\left(-ik \frac{x_M^2}{2R}\right) \exp\left(-ik \frac{y_M^2}{2R}\right) \\ &= \phi_x(x_M) \phi_y(y_M),\end{aligned}\quad (2.131)$$

kde R je poloměr dopadající sférické vlnoplochy. Zaved' me nyní substituci

$$\begin{aligned}x_P - x_M = t, \quad \alpha_x &= \frac{\pi}{\lambda z_P} \left(1 - \frac{z_P}{R}\right), \quad \beta_x = -\frac{2\pi n}{p} + \frac{2\pi x_P}{\lambda R}, \quad \gamma_x = \frac{2\pi n x_P}{p} - \frac{\pi x_P^2}{\lambda R}, \\ y_P - y_M = u, \quad \alpha_y &= \alpha_x = \alpha, \quad \beta_y = \frac{2\pi y_P}{\lambda R}, \quad \gamma_y = -\frac{\pi y_P^2}{\lambda R}.\end{aligned}\quad (2.132)$$

Dosazením do (2.127) po úpravě pro nekonečně rozlehlou mřížku dostáváme

$$\begin{aligned}\phi(x_P, y_P, z_P) &= -i \exp(ik z_P) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ i c_n \exp\left[i\left(\gamma_x + \gamma_y - \frac{\beta_x^2}{4\alpha} - \frac{\beta_y^2}{4\alpha}\right)\right] \right\} \\ &= -i \exp(ik z_P) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ i c_n \exp\left[-i \frac{\pi(x_P^2 + y_P^2)}{\lambda(R - z_P)}\right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left[i \frac{2\pi n x_P}{p\left(1 - \frac{z_P}{R}\right)}\right] \exp\left[-i \left(\frac{R z_P}{R - z_P}\right) \frac{\pi n^2 \lambda}{p^2}\right] \right\}.\end{aligned}\quad (2.133)$$

Pro mřížku konečných rozměrů můžeme pomocí (2.130) psát

$$\begin{aligned}\phi(x_P, y_P, z_P) &= -\frac{i}{2} \exp(ik z_P) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ c_n \bar{F}(x_P, c, \alpha, \beta_x) \bar{F}(y_P, d, \alpha, \beta_y) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left[i\left(\gamma_x + \gamma_y - \frac{\beta_x^2}{4\alpha} - \frac{\beta_y^2}{4\alpha}\right)\right] \right\},\end{aligned}\quad (2.134)$$

kde

$$\bar{F}(\tau, \varepsilon, \alpha, \beta) = F\left(\tau\sqrt{\alpha} - \frac{2\varepsilon\alpha - \beta}{2\sqrt{\alpha}}\right) - F\left(\tau\sqrt{\alpha} + \frac{2\varepsilon\alpha + \beta}{2\sqrt{\alpha}}\right).$$

Bude-li na mřížku dopadat rovinná vlna, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že pole $\phi_i(x_M, y_M)$ bude konstantní. Poté limitním přechodem pro $R \rightarrow \infty$ dostáváme pro substituci vztahy

$$\begin{aligned}x_P - x_M = t, \quad y_P - y_M = u, \quad \alpha_x = \alpha_y = \alpha &= \frac{\pi}{\lambda z_P}, \quad \beta_x = \beta = -\frac{2\pi n}{p}, \\ \gamma_x = \gamma = \frac{2\pi n x_P}{p}, \quad \beta_y = 0, \quad \gamma_y = 0.\end{aligned}\quad (2.135)$$

Dosazením do (2.127) dostáváme pro nekonečně rozlehlou mřížku

$$\begin{aligned}\phi(x_P, y_P, z_P) &= -i \exp(ik z_P) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ i c_n \exp\left[i\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right] \right\} \\ &= -i \exp(ik z_P) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ i c_n \exp\left[i \frac{2\pi n x_P}{p}\right] \exp\left[-i \frac{\pi n^2 \lambda}{p^2} z_P\right] \right\}.\end{aligned}\quad (2.136)$$

Pro mřížku konečných rozměrů a dopadající rovinnou vlnu můžeme pomocí vztahů (2.130) psát

$$\begin{aligned}\phi(x_P, y_P, z_P) &= -\frac{i}{2} \exp(ik z_P) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ c_n \left[F\left(x\sqrt{\alpha} - \frac{2c\alpha - \beta}{2\sqrt{\alpha}}\right) - F\left(x\sqrt{\alpha} + \frac{2c\alpha + \beta}{2\sqrt{\alpha}}\right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[F(y\sqrt{\alpha} - d\sqrt{\alpha}) - F(y\sqrt{\alpha} + d\sqrt{\alpha}) \right] \exp\left[i\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right] \right\}.\end{aligned}\quad (2.137)$$

Talbotův jev

V roce 1836 objevil anglický vědec William Henry Fox Talbot (1800 — 1877) následující jev [23–26]. Zjistil, že při dopadu vlnového pole (např. rovinné vlny) na nějakou periodickou strukturu (např. amplitudová mřížka, pole otvorů v neprůhledném stínítku apod.) existují určité vzdálenosti od této struktury, ve kterých se tato struktura bude opakovat (samo-zobrazovat). Tento jev má řadu technických aplikací v oblasti měření, interferometrie, výroby integrovaných obvodů atd.

Jak je z předchozí kapitoly zřejmé, difrakční mřížka je periodická struktura, a tedy měli bychom v určitých vzdálenostech pozorovat zmíněný Talbotův jev.

Zabývejme se nejprve mřížkou, na kterou dopadá rovinná monochromatická vlna. Samo-zobrazení můžeme studovat použitím známého vztahu pro výpočet intenzity elektromagnetického pole $I(x_P, y_P, z_P) = |\phi(x_P, y_P, z_P)|^2$, do kterého dosadíme ze vztahu (2.137). Po provedení vhodných úprav dostáváme

$$I(x_P, y_P, z_P) = L \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{p} x_P\right) \exp\left(-i \frac{\pi n^2 \lambda}{p^2} z_P\right) \right|^2, \quad (2.138)$$

kde L představuje konstantu, kterou můžeme vyčíslit pomocí vztahu (2.137). Porovnáme-li první exponent sčítance s modelem propustnosti mřížky (2.123),

$$T(x_M) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i \frac{2\pi}{p} n x_M\right),$$

je zřejmé, že bude-li druhý exponent v (2.138) roven jedné, bude intenzita až na konstantu L odpovídat té v rovině mřížky samotné, a dojde k výše popsanému samo-zobrazení. Můžeme tedy psát podmínku pro vznik Talbotova jevu při dopadu rovinné vlny na amplitudovou difrakční mřížku, musí platit

$$\cos\left(\frac{\pi n^2 \lambda}{p^2} z_P\right) - i \sin\left(\frac{\pi n^2 \lambda}{p^2} z_P\right) = 1, \quad (2.139)$$

kde jsme využili známý tvar Eulerova vzorce pro zápis komplexního čísla [9–11]. Tato podmínka bude splněna pro vzdálenosti

$$z_P = N z_T = N \frac{2p^2}{\lambda}, \quad (2.140)$$

kde $z_T = \frac{2p^2}{\lambda}$ je tzv. Talbotova vzdálenost, $N = 1, 2, \dots$

V krátkosti ještě analyzujme stav, kdy bude komplexní část (2.139) rovna nule. To je splněno vždy pro $z_P = N \frac{p^2}{\lambda} = N \frac{z_T}{2}$, tedy v každém násobku poloviny Talbotovy vzdálenosti. Dosadíme-li tuto vzdálenost do exponentu (2.138), dostáváme

$$\exp\left(i \frac{2\pi n}{p} x_P\right) \exp(-i\pi n^2 N) = \exp\left[i \frac{2\pi n}{p} \left(x_P - nN \frac{p}{2}\right)\right], \quad (2.141)$$

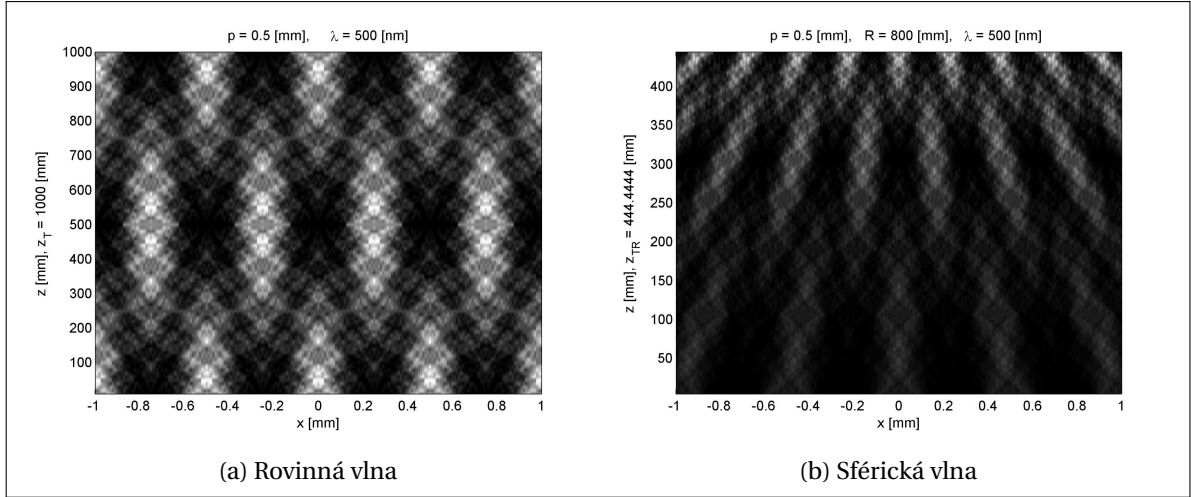
a tedy mřížka bude také samo-zobrazena, ovšem její obraz bude posunut ve směru osy x o násobky poloviny její periody. Na obr. 2.8a je zobrazeno rozložení intenzity za difrakční mřížkou periody $p = 0.5 \text{ mm}$ při osvětlení monochromatickou rovinnou vlnou vlnové délky $\lambda = 500 \text{ nm}$.

Obdobnou analýzu můžeme provést pro dopadající sférickou vlnu. V tomto případě bude pro intenzitu za difrakční mřížkou platit

$$I(x_P, y_P, z_P) = L \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left[i \frac{2\pi n x_P}{p \left(1 - \frac{z_P}{R}\right)}\right] \exp\left[-i \left(\frac{R z_P}{R - z_P}\right) \frac{\pi n^2 \lambda}{p^2}\right] \right|^2. \quad (2.142)$$

Požadujeme-li nyní, aby druhý exponent ve sčítanci byl roven jedné, obdobně jako v případě dopadu rovinné vlny, poté musí být splněna podmínka

$$\left(\frac{R z_P}{R - z_P}\right) \frac{\pi n^2 \lambda}{p^2} = 2\pi N, \quad (2.143)$$



Obrázek 2.8: Talbotův jev pro dopad monochromatické vlny na amplitudovou (Ronchiho) difrakční mřížku

a tedy pro vzdálenost z_{TR} , která bude této podmínce vyhovovat, dostáváme

$$z_{TR} = \frac{2Np^2R}{2Np^2 + \lambda R} = \frac{Nz_T}{1 + N\frac{z_T}{R}}, \quad (2.144)$$

kde $z_T = \frac{2p^2}{\lambda}$. Pro intenzitu pole ve vzdálenosti z_{TR} poté dostáváme

$$I(x_P, y_P, z_{TR}) = L \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp \left[i \frac{2\pi n x_P}{p \left(1 - \frac{z_P}{R} \right)} \right] \right|^2. \quad (2.145)$$

Je zřejmé, že také dojde k určité formě samo-zobrazení, nicméně perioda mřížky bude změněna. Pro periodu p_R intenzitního obrazu mřížky ve vzdálenosti z_{TR} za svou předlohou při osvětlení sférickou monochromatickou vlnou platí

$$p_R = p \left(1 - \frac{z_P}{R} \right). \quad (2.146)$$

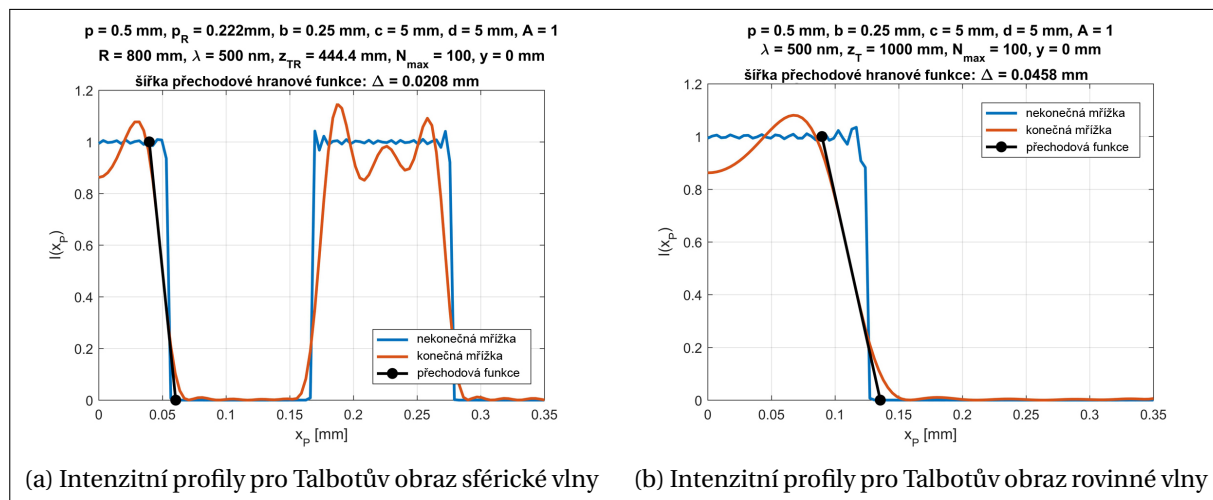
Na obr. 2.8b je zobrazen příklad intenzitního pole za difrakční mřížkou, na kterou dopadá sférická monochromatická vlna.

Až do této chvíle jsme se zabývali Talbotovým jevem na nekonečné mřížce. Pro výpočet intenzitního obrazce konečné mřížky můžeme využít výše zmíněné vztahy z předchozí části této kapitoly. Zabývejme se nyní případem, kdy na mřížku dopadá sférická vlna. Srovnáním vztahů (2.133) pro nekonečnou mřížku a (2.134) pro mřížku konečnou dostáváme následující výsledky. Označíme-li φ_n jako n -tý člen sumy charakterizující konečnou mřížku a ι_n představuje n -tý člen pro součet řady pro pole za nekonečnou mřížkou, dostáváme [24]

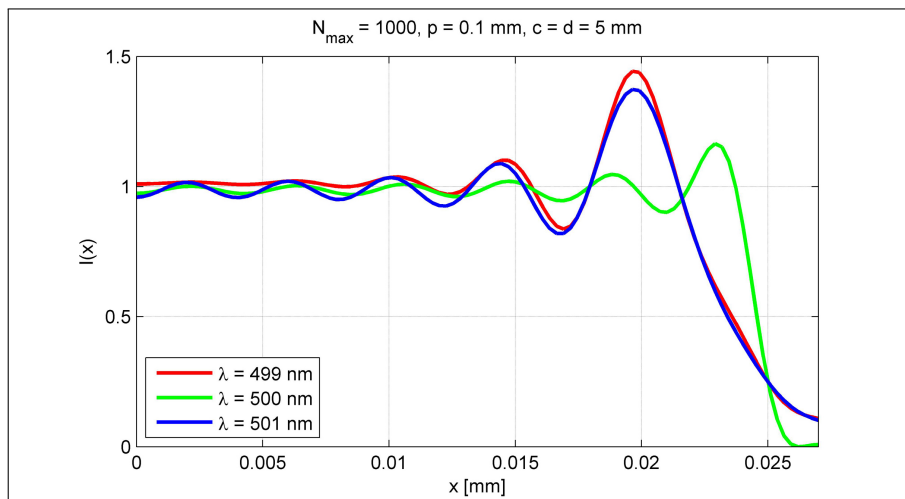
$$\frac{\varphi_n}{\iota_n} = \frac{1}{2i} \bar{F}(x, c, \alpha, \beta_x) \bar{F}(y, d, \alpha, \beta_y), \quad (2.147)$$

kde funkce $\bar{F}(\tau, \varepsilon, \alpha, \beta)$ byla zavedena v (2.134). Lze ukázat, že pravá strana rovnice (2.147) je pro všechna n menší než 1. Tím pádem koeficienty c_n u mřížky konečných rozměrů jsou modifikovány v porovnání s koeficienty u mřížky nekonečných rozměrů. Dochází tak k rozmazání ostrých hran intenzitního obrazu. Tento jev lze charakterizovat tzv. přechodovou hranovou funkcí.

Zabývejme se nyní analýzou šířky Δ přechodové hranové funkce, která může být definována následovně [23, 24]: Šířka přechodové hranové funkce je vzdálenost mezi x -ovými souřadnicemi bodů, které vytíná přímka vedená inflexním bodem hranového intenzitního profilu na dolní a



Obrázek 2.9: Srovnání intenzitních profilů Talbotových obrazů mřížky pro dopadající sférickou a rovinnou vlnu



Obrázek 2.10: Vliv spektrální šířky záření na Talbotovo zobrazení

horní hraně pulzu, jejíž směrnice odpovídá derivaci intenzitního profilu $I'(x_i)$ v inflexním bodě o x -ové souřadnici x_i . Platí tedy $\Delta = -\frac{A}{I'(x_i)}$, kde A značí amplitudu pulzu.

Na obr. 2.9a je zobrazeno srovnání intenzitních profilů Talbotova obrazu difrakční mřížky, která byla osvětlena sférickou monochromatickou vlnou, ve vzdálenosti $z_P = z_{TR}$ a $y_P = 0$. Parametry mřížky byly voleny následovně: $c = 5$ mm, $d = 5$ mm, $p = 0.5$ mm, $b = 0.25$ mm, $A = 1$. Dopadající pole má vlnovou délku $\lambda = 500$ nm. Řady pro výpočet intenzit byly uvažovány pro rozsah od $-N_{\max}$ do $+N_{\max}$, kde $N_{\max} = 100$. Jak je patrné, šířka přechodové hranové funkce je $\Delta = 0.0208$ mm, což je v daném případě přibližně jedna pětina šířky pulzu. To může být pro některé aplikace nepřijatelné.

Obdobná analýza pro na mřížku dopadající rovinnou vlnu je zobrazena na obr. 2.9b. Parametry mřížky a vlnová délka byly voleny shodně s předchozím příkladem. Šířka přechodové hranové funkce je v tomto případě $\Delta = 0.0458$ mm.

Z rozsáhlejší studie šířek přechodových hranových funkcí lze vyvodit následující závěr. Pro dopadající rovinné vlny na konečnou difrakční mřížku, která splňuje podmínku $p/c > 0.1$, lze šířku přechodové hranové funkce určit z přibližného vztahu [23, 24]

$$\Delta \approx 0.75 \frac{p^2}{c}. \quad (2.148)$$

Pro úplnost se zabýváme ještě vlivem spektrální šířky $d\lambda$ použitého záření na kvalitu Talbotova obrazu při zobrazování mřížkou. Uvážíme-li výše uvedený vztah pro Talbotovu vzdálenost, $z_T = 2p^2/\lambda$, je patrná její závislost na vlnové délce λ . Diferencováním vztahu pro Talbotovu vzdálenost dostáváme pro malé změny vlnové délky $d\lambda \ll \lambda$ výraz pro změnu dz_T Talbotovy vzdálenosti, platí

$$dz_T = -2 \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2 d\lambda = -z_T \left(\frac{d\lambda}{\lambda} \right). \quad (2.149)$$

Je patrné, že pro praktické aplikace, kde je perioda p zpravidla výrazně větší než vlnová délka λ , a tedy hodnota $(p/\lambda)^2$ je velká, má spektrální šířka významný vliv na změnu Talbotovy vzdálenosti. Například pro mřížku periody $p = 0.1$ mm, použitou vlnovou délku 500 nm a spektrální šířku $d\lambda = 20$ nm dostáváme $dz_T = -1.6$ mm, což je značná hodnota vzhledem k nominální Talbotově vzdálenosti $z_T = 40$ mm. Pro praktické technické aplikace je tedy třeba využívat zdroje záření s velmi malou spektrální šířkou (lasery, laserové diody, apod.).

Na obr. 2.10 je ukázán vliv spektrální šířky $d\lambda = 1$ nm na přechodovou hranovou funkci. Výpočet byl proveden pro rovinu vzdálenou od mřížky v Talbotově vzdálenosti $z_T = 40$ mm pro vlnovou délku $\lambda = 500$ nm. Je patrné, že i takto malá změna vlnové délky má výrazný vliv na Talbotovo zobrazení, obraz hran mřížky bude rozmazán.

2.3 Interference vln

2.3.1 Základní předpoklady, princip superpozice

Interference (vzájemná interakce) elektromagnetických vln je využívána v řadě praktických aplikací, které používají teoretické formulace vzájemného působení polí k rekonstrukci vybraných (např. prostorových nebo materiálových) informací. Jako příklad jmenujme interferometrické testování kvality optických povrchů, kde se fáze získá vyhodnocením registrované intenzity interferenčního pole vzniklého interferencí vln odražených od referenčních a testovaných předmětů.

Pro veškeré další podrobnější formulace a studium předpokládáme, že se pole šíří v lineárním prostředí, tedy v takovém, kde procházející elektromagnetický rozruch (vlna) sama neovlivňuje vlastnosti daného prostředí. Tato podmínka je splněna, není-li intenzita vln příliš velká, což platí ve většině praktických aplikací optické metrologie nebo v případech optického zobrazování.

Je-li prostředí lineární, poté platí tzv. princip superpozice [1, 13] pro vektory elektromagnetického pole. Nachází-li se v prostoru několik zdrojů elektromagnetických vln, poté je výsledný vektor pole roven vektorovému součtu dílčích vektorů, které v daném místě vytváří jednotlivé zdroje

navzájem nezávisle. Pro případ vektoru intenzity elektrického pole $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ v bodě \mathbf{r} a čase t a k zdrojů světla můžeme tedy psát

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^k \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t). \quad (2.150)$$

Obdobný vztah bychom poté aplikovali pro vektory magnetické intenzity $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Intenzita výsledného pole poté bude dána jako (použijeme-li dříve uvedený definiční vztah pro intenzitu pole, předpokládáme-li harmonický komplexní vektor $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$, kde \mathbf{E}_0 je komplexní funkce polohy, obdobně pro vektor \mathbf{H} , a vynecháme-li pro přehlednost zápis závislosti na poloze \mathbf{r} a čase t)

$$\begin{aligned} I = \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \left| \operatorname{Re} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{E}_{0,i} \times \sum_{i=1}^k \mathbf{H}_{0,i}^* \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.151)$$

2.3.2 Interference dvou obecných vektorových vln

Zabývejme se nyní obecnou energetickou charakteristikou interagujících elektromagnetických polí. Uvažujme pro jednoduchost dvě elektromagnetické vlny $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$. Výsledné pole $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ bude poté podle principu superpozice (2.150) dáno vztahem

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (2.152)$$

Energie výsledného pole je úměrná druhé mocnině velikosti výsledného pole, platí

$$E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) = E_1^2 + E_2^2 + (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2), \quad (2.153)$$

kde $E_1^2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^* = |\mathbf{E}_1|^2$ je druhá mocnina normy komplexního vektoru \mathbf{E}_1 a obdobně pro E_2^2 .

Vzhledem k tomu, že v současnosti neexistují detektory, kterými by bylo možné detekovat okamžitou hodnotu energie na ně dopadajícího elektromagnetického pole (pro viditelnou oblast spektra se perioda kmitů pohybuje v řádu 10^{-15} s), detekujeme vždy určitou střední hodnotu energie v čase. Je tedy třeba vztah (2.153) časově středovat, tj. aplikujeme operaci časové střední hodnoty na veličinu E^2 ,

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt, \quad (2.154)$$

kde T značí detekční čas. Poté dostáváme

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 \rangle. \quad (2.155)$$

Výraz $\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 \rangle$ v rovnici (2.155) je tzv. interferenční člen [1, 13]. Platí-li

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 \rangle \neq 0, \quad (2.156)$$

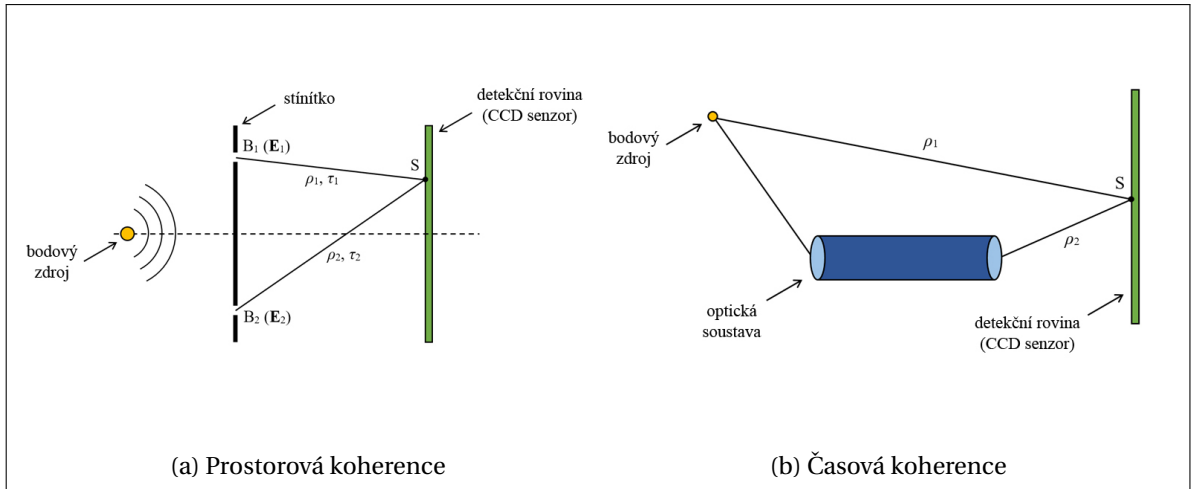
dochází k tzv. interferenci vlnění (světla). Prostor, ve kterém k interferenci dochází, je poté nazýván interferenční prostor.

Jako jednoduchý příklad uvažujme monochromatické lineárně polarizované vlny se stejným směrem polarizace, které můžeme charakterizovat vektory elektrické intenzity vyjádřenými vztahy

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_{0,1} \exp [i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_1)], \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_{0,2} \exp [i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_2)], \quad (2.157)$$

kde $\mathbf{e}_{0,1}$ a $\mathbf{e}_{0,2}$ jsou vektory amplitud vzájemně stejného směru a různé velikosti, \mathbf{k}_1 a \mathbf{k}_2 jsou vlnové vektory, \mathbf{r} značí polohu, ω je úhlová rychlost, t je čas a δ_1 a δ_2 vyjadřují fázové posuny. Dosazením do (2.156), užitím Eulerovy identity [9–11] a po úpravě dostáváme pro interferenční člen

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = 2\mathbf{e}_{0,1} \cdot \mathbf{e}_{0,2} \cos [(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \delta_1 - \delta_2]. \quad (2.158)$$



Obrázek 2.11: Koherence elektromagnetických vln [1]

2.3.3 Prostorová a časová koherence vln, kontrast interferenčního pole

V reálných situacích se setkáváme s interferencí vln, u kterých v interferenčním prostoru dochází k variacím frekvence, amplitudy nebo počáteční fáze. Tedy pole nejsou prostorově nebo časově stálá. Výsledné interferenční pole, registrované například na detektoru intenzity (CCD senzoru), je těmito variacemi ovlivněné. K interferenci může pak dojít pouze tehdy, jsou-li pole tzv. částečně nebo absolutně koherentní [1, 13, 14, 16].

Koherence vlnění vyjadřuje vzájemnou korelaci (souvislost) vlnění. Zkoumáme-li jevy pro vlnění, které vycházejí z různých míst světelného zdroje (např. v případě registrace záření vycházejícího z jednoho světelného zdroje a procházejícího skrze stínítko se dvěma otvory, viz obr. 2.11a), hovoříme o tzv. prostorové koherenci. Jde-li o korelaci vlnění vycházejícího z jednoho zdroje zkoumaného s časovým odstupem (např. prochází-li část světelného svazku volným prostorem a druhá je vedena a zpomalována průchodem optickou soustavou - viz obr. 2.11b), poté mluvíme o tzv. časové koherenci.

Pro popis prostorové koherence uvažujme situaci na obr. 2.11a. Ze zdroje záření vychází vlnění, které dopadá na stínítko, v němž jsou prakticky bodové otvory B_1 a B_2 . Vlnění v bodě B_1 charakterizuje vektor elektrické intenzity E_1 a obdobně v bodě B_2 vektor E_2 . Z otvorů se vlnění šíří dál a dopadá na pozorovací rovinu (např. CCD senzor). Otázkou je, jaká bude vzájemná korelace (koherence) vlnění jdoucích z bodů B_i do bodu S na senzoru po drahách ρ_i ($i = 1, 2$). Pro jednoduchost uvažujme lineárně polarizované vlnění, kdy vektory amplitud interferujících polí jsou rovnoběžné a různé velikosti, čili můžeme bez ztráty na obecnosti přistoupit ke skalárnímu popisu. Čas, který vlnění E_1 potřebuje k překonání vzdálenosti ρ_1 mezi body B_1 a S , označme τ_1 , obdobně pro vlnění E_2 použijeme označení τ_2 . Aplikace principu superpozice poté pro vlnění v bodě S v čase t vede k vyjádření výsledné intenzity interferujících polí ve tvaru [1, 13, 14, 16, 27]

$$I = I_1 + I_2 + 2\text{Re}\langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) \rangle, \quad (2.159)$$

kde $\tau = \tau_2 - \tau_1$. Korelace vyšetřovaných vln bude tedy dána posledním členem $2\text{Re}\langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) \rangle$. Zavedeme-li nyní tzv. funkci vzájemné koherence $\Gamma_{12}(\tau)$ [1, 13, 14, 16, 27] vztahem

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) \rangle \quad (2.160)$$

a tzv. komplexní stupeň koherence $\gamma_{12}(\tau)$ [1, 13, 14, 16, 27] výrazem

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) \rangle, \quad (2.161)$$

potom pro intenzitu v bodě S dostáváme

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} [\gamma_{12}(\tau)] . \quad (2.162)$$

Užitím Eulerovy identity následně platí

$$\operatorname{Re} [\gamma_{12}(\tau)] = |\gamma_{12}| \cos \varphi_{12} , \quad (2.163)$$

kde φ_{12} značí argument komplexního čísla γ_{12} . Pro intenzitu tedy dostáváme

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| \cos \varphi_{12} . \quad (2.164)$$

Veličina $|\gamma_{12}|$ se mění v intervalu od 0 do 1. Ze vztahu (2.164) je zřejmé, že pro $|\gamma_{12}| = 0$ nedojde k interferenci. O takovém vlnění vycházejícím z bodů B_1 a B_2 (viz obr. 2.11a) říkáme, že je nekoherentní. Pokud naopak platí $|\gamma_{12}| = 1$, je vlnění absolutně koherentní. Částečně koherentní vlnění dostáváme, platí-li $0 < |\gamma_{12}| < 1$.

Časová koherence popisuje korelaci (závislost) vlnění vycházejícího z jednoho zdroje zkoumaného v jednom bodě v různé časové okamžiky. Komplexní stupeň koherence $\gamma_{11}(\tau)$ bude mít v tomto případě tvar [1, 13, 14, 16, 27]

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{1}{I_1} \Gamma_{11}(\tau) = \frac{1}{I_1} \langle E_1(t+\tau) E_1^*(t) \rangle , \quad (2.165)$$

který dostaneme snadno úpravou vztahu (2.161).

Jako příklad časově nekoherentního zdroje vln můžeme uvažovat například atom, který vyzařuje vlnění o střední frekvenci ν_0 po dobu t_0 . Takto vzniklé vlnové pulzy, které jsou atomem vysílány zcela nahodile, nejsou navzájem korelovány a nemůže mezi nimi dojít k interferenci.

Předpokládejme nyní, že vlnění vychází z jednoho zdroje a jedna jeho část je zpomalena např. optickou soustavou. Schéma takového případu je ukázáno na obr. 2.11b. Záření z bodového zdroje postupuje po dvou cestách a dopadá na senzor v bodě S. Po první, přímé, cestě elektromagnetické vlny urazí optickou dráhu ρ_1 . Po druhé cestě skrze optickou soustavu urazí optickou dráhu ρ_2 . Optický dráhový rozdíl $\delta\rho$ mezi oběma vlněními poté bude dán vztahem

$$\delta\rho = \rho_1 - \rho_2 . \quad (2.166)$$

Doba δt potřebná k uražení zmíněného optického dráhového rozdílu bude

$$\delta t = \delta\rho / c , \quad (2.167)$$

kde c značí rychlost šíření vlnění ve vakuu. Bude-li tato doba menší než doba t_0 , po kterou bodový zdroj (atom) vyzařuje vlnový pulz ($\delta t < t_0$), potom se spolu setkají v bodě S dvě části stejného vlnového pulzu, které spolu mohou interferovat. V případě opačném ($\delta t > t_0$) interference není možná, protože mezi nahodile vyslanými různými pulzy nemůže nastat žádná korelace.

Délka trvání jednoho vlnového pulzu je nazývána koherenční čas a je označována jako τ_{coh} [1, 13, 14, 16, 27]. Je-li doba potřebná k uražení dráhového rozdílu mezi dvěma cestami z bodového zdroje do jednoho bodu v prostoru menší než koherenční čas τ_{coh} , může dojít k interferenci. Vzdálenost, kterou záření urazí za koherenční čas τ_{coh} , je nazývána koherenční délka l_{coh} . Pro praktické aplikace ji můžeme vyjádřit ze vztahu [1, 13, 14, 16, 27]

$$l_{coh} = c\tau_{coh} = \frac{\lambda_0^2}{\pi\Delta\lambda} , \quad (2.168)$$

kde c je rychlost šíření vlnění, λ_0 je střední vlnová délka a $\Delta\lambda$ je spektrální šířka vlnění. Chceme-li tedy dosáhnout dobrého kontrastu v interferenčním obrazci, je třeba použít zdroj světla, jehož

koherenční délka bude mnohem větší, než je největší dráhový rozdíl mezi interferujícími vlnami. Musí tedy platit

$$l_{coh} \gg \delta\rho. \quad (2.169)$$

V praxi optické metrologie jsou používány jako zdroje lasery s velmi dlouhými koherenčními délkami, řádově 10^6 m a více.

Kontrast v určitém místě obrazu definujeme vztahem [1, 13]

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (2.170)$$

kde I_{\max} , resp. I_{\min} , značí maximální, resp. minimální, hodnotu intenzity v dané blízké podoblasti registrovaného obrazu.

Vyjádříme-li ze vztahu (2.164) maximální a minimální hodnotu intenzity, platí

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|, \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|. \quad (2.171)$$

Dosazením do definičního vztahu (2.170) poté dostáváme

$$K = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}|. \quad (2.172)$$

Je tedy zřejmé, že kontrast je přímo úměrný modulu komplexního stupně koherence $|\gamma_{12}|$. V praxi se tento jev vyznačuje více či méně kontrastním obrazem zaznamenaného interferenčního pole.

2.3.4 Interference kvazimonochromatického záření

V praxi optické metrologie jsou nejčastěji jako zdroje záření používány lasery nebo laserové diody. I když se zpravidla vyznačují velmi dlouhými koherenčními délkami, není reálně možné generovat záření pouze jedné vlnové délky. Laserové zdroje jsou generátory tzv. kvazimonochromatického záření, tj. záření velmi úzké spektrální šířky $\Delta\lambda$, která je mnohem menší než střední vlnová délka daného záření λ_0 . V některých aplikacích se používá i polychromatické záření, například při interferometrii bílého světla.

Využijeme-li obecného interferenčního zákona (2.162), poté pro interferenci dvou polychromatických stacionárních záření (neuvažujeme-li polarizační vlastnosti, a tedy můžeme použít skalární popis) v bodě Q můžeme psát [13, 27]

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)} \operatorname{Re} [\gamma_{12}(\tau)], \quad (2.173)$$

kde $\operatorname{Re} [\gamma_{12}(\tau)]$ je reálná část komplexního stupně vzájemné koherence $\gamma_{12}(\tau)$, $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$, a τ je vzájemné časové zpoždění. Pro kontrast poté platí [13, 27]

$$K = 2 \frac{\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q) + I_2(Q)} \operatorname{Re} [\gamma_{12}(\tau)]. \quad (2.174)$$

Pro kvazimonochromatické záření následně pro intenzitu v bodě Q můžeme psát [13, 27]

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)} |\gamma_{12}(\tau)| \cos [2\pi f_0 t + \Delta\delta_{12}(\tau)], \quad (2.175)$$

kde $|\gamma_{12}(\tau)|$ a $\Delta\delta_{12}(\tau)$ jsou funkcemi vzájemného časového zpoždění τ pomalu proměnné vůči funkci $\cos(2\pi f_0 t)$, f_0 je střední frekvence záření. Pro kontrast poté dostáváme [13, 27]

$$K = 2 \frac{\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q) + I_2(Q)} |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (2.176)$$

Kvazimonochromatické záření je tzv. částečně koherentní a kontrast interferenčního pole závisí na hodnotě modulu komplexního stupně koherence $|\gamma_{12}(\tau)|$.

2.3.5 Interference monochromatických rovinných vln

Interference elipticky polarizovaných monochromatických rovinných vln stejné frekvence

V praktických aplikacích ve velké míře využíváme, vzhledem k jejich výhodným vlastnostem, rovinné monochromatické vlny (resp. vlny s velmi úzkou spektrální šířkou). V této části tedy budeme charakterizovat interferenci takových vln.

Předpokládejme, že rovinné monochromatické vlny jsou obecně elipticky polarizované [1, 13, 27]. Jak bylo ukázáno v předchozích částech, můžeme vlny popsat vektorem intenzity elektrického pole, který v daném případě rovinných vln bude mít tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \\ &= \mathbf{e}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)], \end{aligned} \quad (2.177)$$

kde \mathbf{e}_0 je vektor počáteční amplitudy, $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$ je vlnový vektor, \mathbf{n} je jednotkový normálový vektor rovinné vlnoplochy, λ je vlnová délka, \mathbf{r} je polohový vektor, ω je úhlová frekvence, t je čas a δ je počáteční fáze.

Uvážíme-li, že pro rovinné vlny platí $\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$, kde ε je permitivita a μ permeabilita prostředí, viz (2.44), dostáváme pro intenzitu výsledného pole použitím vztahů (2.151) a po úpravě

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2. \end{aligned} \quad (2.178)$$

Předpokládejme dvě interferující pole charakterizované vektory elektrické intenzity vyjádřené vztahy (2.157). Dle principu superpozice bude výsledné pole charakterizováno součtem jednotlivých vektorů intenzit elektrického pole, tedy $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Vektor \mathbf{E} můžeme rozložit do směru kolmého a rovnoběžného s rovinou, jež je dána vlnovými vektory interferujících polí \mathbf{k}_1 a \mathbf{k}_2 . Úhel, který spolu vlnové vektory svírají, označme α . Poté můžeme výsledný vektor \mathbf{E} zapsat jako

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel = (\mathbf{E}_{1,\perp} + \mathbf{E}_{2,\perp}) + (\mathbf{E}_{1,\parallel} + \mathbf{E}_{2,\parallel}), \quad (2.179)$$

kde \perp značí kolmé a \parallel rovnoběžné složky a číselné indexy označují vektory interferujícího pole. Pro velikosti jednotlivých složek poté použitím kosinové věty [9–11] platí [28]

$$E_\perp^2 = |\mathbf{E}_\perp|^2 = |\mathbf{E}_{1,\perp}|^2 + |\mathbf{E}_{2,\perp}|^2 + 2|\mathbf{E}_{1,\perp}||\mathbf{E}_{2,\perp}|, \quad (2.180a)$$

$$E_\parallel^2 = |\mathbf{E}_\parallel|^2 = |\mathbf{E}_{1,\parallel}|^2 + |\mathbf{E}_{2,\parallel}|^2 + 2|\mathbf{E}_{1,\parallel}||\mathbf{E}_{2,\parallel}| \cos \alpha. \quad (2.180b)$$

Jelikož totéž, rozklad do kolmé a rovnoběžné složky, bude platit pro vektor \mathbf{E}_0 , dostáváme použitím (2.178) a (2.180)

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (|\mathbf{E}_{0,\perp}|^2 + |\mathbf{E}_{0,\parallel}|^2) = I_\perp + I_\parallel. \quad (2.181)$$

Výsledná intenzita je tedy dána jako součet intenzit v jednotlivých složkách (kolmé a paralelní k rovině dané vlnovými vektory interferujících vln). Předpokládáme-li každou z těchto intenzit jako důsledek interference rovinných harmonických vln, poté pro jednotlivé složky I_\perp a I_\parallel dostáváme po úpravě [28]

$$I_\perp = I_{1,\perp} + I_{2,\perp} + 2\sqrt{I_{1,\perp}I_{2,\perp}} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \delta_{1,\perp} - \delta_{2,\perp}], \quad (2.182a)$$

$$I_\parallel = I_{1,\parallel} + I_{2,\parallel} + 2\sqrt{I_{1,\parallel}I_{2,\parallel}} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \delta_{1,\parallel} - \delta_{2,\parallel}] \cos \alpha. \quad (2.182b)$$

Zavedením substituce $\Delta = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \delta_{1,\parallel} - \delta_{2,\parallel}$ a $\Phi = \delta_{1,\perp} - \delta_{2,\perp} - \delta_{1,\parallel} + \delta_{2,\parallel}$ dostáváme pro výslednou intenzitu v bodě \mathbf{r} vztah [28]

$$I = I_{1,\perp} + I_{2,\perp} + I_{1,\parallel} + I_{2,\parallel} + 2\sqrt{I_{1,\perp}I_{2,\perp}} \cos(\Delta + \Phi) + 2\sqrt{I_{1,\parallel}I_{2,\parallel}} \cos \Delta \cos \alpha. \quad (2.183)$$

Rozepsáním a úpravou uvedeného vztahu můžeme intenzitu také vyjádřit jako [28]

$$I = (I_{1,\perp} + I_{2,\perp} + I_{1,\parallel} + I_{2,\parallel}) \left[1 + K \cos(\Delta + \delta) \right], \quad (2.184)$$

kde K je kontrast interferenčního pole daný výrazem

$$K = \frac{2\sqrt{(\sqrt{I_{1,\perp}I_{2,\perp}} \cos \Phi + \sqrt{I_{1,\parallel}I_{2,\parallel}} \cos \alpha)^2 + I_{1,\perp}I_{2,\perp} \sin^2 \Phi}}{I_{1,\perp} + I_{2,\perp} + I_{1,\parallel} + I_{2,\parallel}}, \quad (2.185)$$

a δ je konstantní fázový člen, pro který platí

$$\tan \delta = \frac{\sqrt{I_{1,\perp}I_{2,\perp}} \sin \Phi}{\sqrt{I_{1,\perp}I_{2,\perp}} \cos \Phi + \sqrt{I_{1,\parallel}I_{2,\parallel}} \cos \alpha}. \quad (2.186)$$

Na tomto místě ještě poznamenejme, že výše uvedené vztahy pro intenzitu jsou funkcemi polohy \mathbf{r} . Pro kompaktnost jsme zápis této závislosti vynechali, jelikož je zřejmá.

Interference kruhově a lineárně polarizovaných monochromatických rovinných vln stejné frekvence

Výše uvedené vztahy pro eliptickou polarizaci můžeme elegantně transformovat pro případ polarizace kruhové nebo lineární, jelikož ty jsou speciálním případem eliptické.

Pro kruhově polarizované vlny bude platit [28]

$$\begin{aligned} I_{1,\perp} &= I_{1,\parallel} = I_1, \\ I_{2,\perp} &= I_{2,\parallel} = I_2. \end{aligned}$$

Poté dosazením do (2.184) dostáváme [28]

$$I = 2(I_1 + I_2) [1 + K \cos(\Delta + \delta)], \quad (2.187)$$

kde

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{(\sqrt{I_1 I_2} \cos \Phi + \sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha)^2 + I_1 I_2 \sin^2 \Phi}}{I_1 + I_2}, \\ \tan \delta &= \frac{\sqrt{I_1 I_2} \sin \Phi}{\sqrt{I_1 I_2} \cos \Phi + \sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Lineární polarizace ve stejné rovině nastává tehdy, pokud $I_{1,\parallel} = I_{2,\parallel} = 0$. Poté dosazením do (2.184) pro intenzitu a kontrast dostáváme [28]

$$\begin{aligned} I &= I_{1,\perp} + I_{2,\perp} + 2\sqrt{I_{1,\perp}I_{2,\perp}} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \delta_{1,\perp} - \delta_{2,\perp}] \\ &= (I_{1,\perp} + I_{2,\perp}) \left\{ 1 + K \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \delta_{1,\perp} - \delta_{2,\perp}] \right\}, \\ K &= \frac{2\sqrt{I_{1,\perp}I_{2,\perp}}}{I_{1,\perp} + I_{2,\perp}}. \end{aligned} \quad (2.188)$$

2.4 Rekonstrukce fáze vlnového pole

2.4.1 Rekonstrukce fáze vlnového pole pomocí interference vln

V předchozí kapitole jsme se zabývali teorií interference vln. V této části ukážeme, jak lze představené vztahy použít v metrologických aplikacích – interferometrii.

Interferometrie [1, 13, 16, 27, 29–31] je optická bezkontaktní metoda, pomocí které lze s využitím interference světla určovat relativní vzdálenosti s přesností v řádu až zlomků vlnových délek použitého záření.

Vlnová pole využívaná v optice jsou popsána teorií elektromagnetického pole, jak bylo ukázáno v předchozích kapitolách. Tato pole jsou charakterizována (definována) základním souborem parametrů: amplituda, fáze, frekvence a polarizační stav. Tyto parametry nesou informace o vlastnostech a chování pole. Interakcí záření (transmise, odraz) s materiálovým rozhraním nebo spojitými variacemi materiálu dochází ke změně zmíněných parametrů. Jsme-li schopni tyto změny určitým způsobem zaznamenat nebo vyhodnotit, můžeme vhodnou metodou kvantitativně hodnotit např. topografii plochy, změnu indexu lomu prostředí a další. Například fáze dvou interferujících polí odražených od dvou různých ploch nese informaci o jejich geometrických rozdílech.

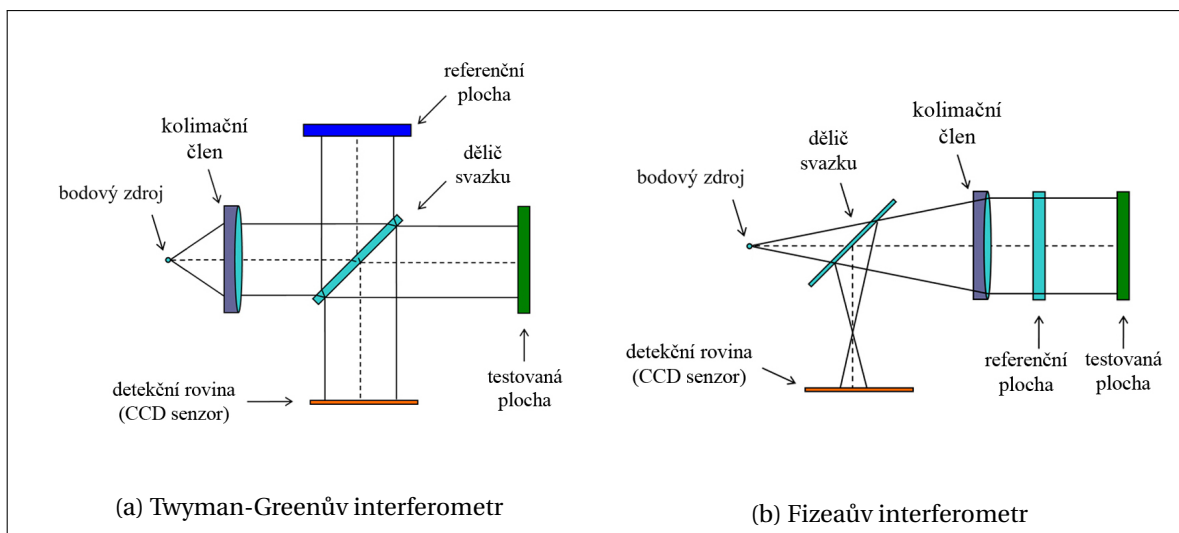
V optické praxi zatím nejsme schopni přímo měřit fázi nebo frekvenci (čili i její změnu). Neexistují totiž tak citlivé detektory, jejichž odezva by byla srovnatelná s periodou použitého optického záření. Využíváme tak nepřímých metod, kde měříme zpravidla pouze intenzitu záření (tj. časovou střední hodnotu energie). Následně inverzními postupy zpětně určujeme ze zaznamenaných hodnot intenzity hodnoty fáze nebo frekvence vlnových polí.

Interferometrická měření se vyznačují svou vysokou přesností v řádu zlomků vlnových délek [1, 13, 16, 27, 29–31]. Na druhou stranu je ale třeba poznamenat, že vysoká přesnost je vyvážena vysokými nároky na praktickou realizaci. První z omezujících podmínek v minulosti bývala koherence použitého záření. Jak bylo ukázáno v předchozích kapitolách, aby mohlo dojít k interferenci, musí být interferující pole vzájemně koherentní, resp. výsledná intenzita je závislá na hodnotě komplexního stupně vzájemné koherence. V současnosti jsou k dispozici ale takové zdroje záření (lasery), které podmínky koherence splňují velmi dobře. I nekoherentní zdroje nacházejí své praktické uplatnění v optické metrologii, v rámci této práce se jimi ale zabývat nebudeme. Další z nevýhod interferometrických měření je vysoká citlivost na termomechanické vlastnosti prostředí (změna vlhkosti, teploty, tlaku, nepříznivé vibrace, apod.). Pro získání velmi vysoké přesnosti je tak třeba provádět měření ve specializovaných laboratořích.

V další části práce se budeme zabývat zejména interferometrií používanou v praxi optické metrologie. Rozumějme tedy měření při výrobě a kontrole optických prvků – jak rovinných (planárních), sférických, tak i asférických. Popsané principy jsou ale převeditelné i do jiných aplikací.

Jedním z dnes již historických způsobů interferometrických měření v optickém průmyslu je kontaktní srovnání s tzv. kalibrem, tedy kontrolním prvkem, který je vyroben alespoň o jeden řád přesněji. Kalibr je přikládán na vyráběnou testovanou plochu a při vhodném osvětlení jsou patrné interferenční Newtonovy kroužky [1, 13, 16, 27, 29–31], z jejichž tvaru lze posuzovat míru dodržení předepsaných výrobních tolerancí. Touto vizuální metodou může zacvičený personál odhadnout velikost výrobní chyby s rámcovou přesností $\lambda/8$, kde λ značí vlnovou délku použitého osvětlení.

Díky současnému trendu digitalizace, prudkého rozvoje zobrazovací a výpočetní techniky a automatizace výroby je cílem nalézat řešení založená na digitálním záznamu s automatizovaným kvantitativním vyhodnocením. Měření by také měla být bezkontaktní. Vybraným metodám dvou-svazkové interferometrie je věnována následující část práce. Zvolené příklady nekladnou náročnou požadavky na laboratorní vybavení, a jsou proto poměrně snadno realizovatelné. V rámci doktorského studia autor jeden ze zmíněných interferometrických systémů konstruoval. Vzápětí je ukázán základní model interferometrie, který je předpokládán při kvantitativním vyhodnocování registrované intenzity pole, a nejednoznačnost rekonstrukce fáze. V dalších částech je ukázána metoda Fourierovy transformace jako přístup rekonstrukce interferogramů se zavedenou prosto-



Obrázek 2.12: Schéma interferometrů dvousvazkové interferometrie pro testování rovinných ploch

rovou nosnou frekvencí a vybrané metody fázového posuvu v časové oblasti. Obecně však existuje celá řada dalších algoritmů a z nich vyplývajících metod měření, vybrané přístupy jsou také zmíněny. V závěru této kapitoly je shrnut výčet autorových praktických realizací rekonstrukce fáze vlnového pole.

Interferometrická měření mohou být obecně založena na mnoha principech. Zmíníme se o jednom ze základních, a to je tzv. dvousvazková interferometrie, která využívá ke vzniku interferenčního pole dva svazky záření. Ty zpravidla vznikají dělením počátečního svazku generovaného jedním zdrojem na dva, které po průchodu optickou soustavou vhodné konfigurace společně interferují. Tímto postupem lze nastavit takové podmínky měření, aby interference nastala. Jeden zdroj záření (zpravidla kvazimonochromatický laser) totiž umožňuje snadno generovat dostatečně koherentní svazky.

V optické praxi se používá řada základních konfigurací interferometrů [27, 29, 30]. Jedno z dělení může být na soustavy, kde referenční a testovací svazek neprochází po stejné optické ose (angl. tzv. off-axis metody), nebo soustavy s jednou cestou pro oba svazky (angl. tzv. common-path metody). Na obr. 2.12 jsou ukázány základní schemata zástupců zmíněných konfigurací pro testování rovinných optických odrazných ploch.

Na obr. 2.12a je zobrazeno schéma tzv. Twyman-Greenova interferometru, zástupce první z výše zmíněných skupin. Ten byl představen roku 1918 [29, 30]. Bodový zdroj (který může být realizován různými způsoby – nepřímo osvětlená malá dírka, laserový svazek fokusovaný na dírkovou clonu, výstup jednomodového optického vlákna) generuje vlnu velmi blízkou sférické, která je transformována kolimačním členem, v jehož předmětovém ohnisku je umístěn bodový zdroj, na rovinnou. Dále vlna pokračuje na dělič svazků. Na něm vždy dojde k částečnému průchodu a částečnému odrazu. Jedna část vlnění tedy projde děličem a pokračuje k testované ploše, druhá část děleného svazku se odráží a jde k referenční ploše. Od testované i referenční plochy se následně svazky odrážejí, na děliči se jeden opět láme a druhý projde přímo. Tímto způsobem prochází až k pozorovací rovině, kde interferují, a na senzoru je zaznamenáváno rozložení intenzity interferenčního pole.

Optické komponenty musí být co nejčistší, aby se pokud možno neprojevovaly nepříznivé difrakční jevy. Dále zejména dělič svazků musí být vysoké kvality. Pro potlačení „parazitní“ interference se nejčastěji používají antireflexní vrstvy. Také materiál děliče musí být extrémně homogenní. Od roviny, na které dochází k odrazu, se očekává, že je vyrobena s minimálně desetinásobnou přesností, než jakou požadujeme od vyhodnocovaných vlnoploch [29, 30].

Na obr. 2.12b je zobrazeno schéma tzv. Fizeauova interferometru. Jedná se také o dvousvazkový interferometr, jak tomu bylo v případě Twyman-Greenova, poloha referenčního elementu je ale jiná, testovaná i referenční plocha leží v jednom rameni. Nejprve svazek prochází děličem přímo a pokračuje přes kolimační člen a referenční prvek až k testované ploše, kde se odráží. Na přední ploše referenčního elementu dochází také k částečnému odrazu. Oba odražené svazky jsou při zpětném průchodu soustavou děličem směřovány na detektor, kde je snímáno rozložení intenzity.

V obou výše zmíněných případech dostáváme referenční vlnoplochu odrazem od referenční plochy. Porovnáním s vlnoplochu odraženou od plochy testované poté můžeme usuzovat o odchylkách tvaru testované plochy od referenční. Vyhodnocení interferogramu přináší informace o fázovém rozdílu vlnoploch, který nese informace i o rozdílu dráhovém. Interferometrické měření tedy dává informace relativní vzhledem k referenčním prvkům.

Pomocí Twyman-Greenova a Fizeauova interferometru můžeme testovat různé optické elementy. Nejsnazší je testování planoparalelních desek nebo členů se sférickým povrchem. Měření topografie asférických ploch je komplikovanější a nebyla prozatím vyvinuta obecná metoda, která by umožňovala testovat se stejnou přesností libovolnou asférickou plochu. Pro testování asférických optických ploch jsou často užívány speciální adaptéry nebo difrakтивní optické elementy, které jsou navrženy pro každou testovanou asférickou plochu zvlášť (pro tvar této plochy). Tyto elementy jsou ale velmi drahé a jejich výroba je časově náročná (několik týdnů). Dále existují i další speciální metody měření asférických ploch, které přišly do nabídky komerčních firem nedávno. Komerčně jsou pro zmíněné metrologické účely v optice dostupné přístroje např. od firmy ZYGO [32], 4D-Technology [33], Mahr [34], Schneider [35], OptoTech [36] nebo Trioptics [37]. Difraktivní optické elementy pro měření asférických ploch nabízí např. firmy Diffraction International [38] a Silios Technology [39]. Na trhu se objevují i jiné způsoby měření asférických ploch, např. tzv. Aspheric Stitching Interferometer firmy QED Technologies (USA) [40].

■ Základní model interferometrie a nejednoznačnost úlohy

Pro zapsání modelu dvousvazkových interferometrických měření uvažujme, že zdrojem záření je kvazimonochromatický laser. Dále pro jednoduchost předpokládejme, že interferující pole jsou lineárně polarizovaná, kdy vektory amplitud jsou vzájemně rovnoběžné a různé velikosti, a šíří se stejným směrem. Jak bylo ukázáno v předchozí kapitole, intenzita $I = I(\mathbf{r})$ v bodě \mathbf{r} (v praktických aplikacích v určitém bodě detektoru, kterým výsledné pole snímáme) bude dána vztahem

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| \cos \varphi, \quad (2.189)$$

kde $I_1 = I_1(\mathbf{r})$ a $I_2 = I_2(\mathbf{r})$ jsou intenzity interferujících polí, pokud by se v prostoru vyskytovala samostatně, $|\gamma_{12}|$ je modul komplexního stupně vzájemné koherence a $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ je výsledná fáze (fázový rozdíl interferujících polí). Poznamenejme jen pro úplnost, že všechny vystupující veličiny jsou obecně funkcí polohy \mathbf{r} , a tedy pro různá místa detektorů dostáváme jejich jiné hodnoty.

Pro kontrast $K = K(\mathbf{r})$ následně platí

$$K = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}|. \quad (2.190)$$

Zavedeme-li substituci

$$A = I_1 + I_2, \quad B = 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|, \quad (2.191)$$

představuje $A = A(\mathbf{r})$ tzv. rozložení intenzity pozadí a $B = B(\mathbf{r})$ modulaci amplitudy. Vztah pro základní model interferometrických měření následně můžeme psát jako

$$I = A + B \cos \varphi, \quad (2.192)$$

a pro kontrast poté platí

$$K = \frac{B}{A}. \quad (2.193)$$

Použitím (2.192) a (2.193) můžeme vztah (2.189) zapsat dále jako

$$I = A [1 + K \cos \varphi]. \quad (2.194)$$

Předpokládáme-li, že v bodě daném polohovým vektorem \mathbf{r} interferují dvě monochromatické rovinné lineárně polarizované vlny, poté bude jejich fázový rozdíl dán vztahem (viz (2.188))

$$\varphi = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \Delta\delta_{12}, \quad (2.195)$$

kde $\mathbf{k}_1 = k\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{k}_2 = k\mathbf{n}_2$ jsou vlnové vektory, $k = \frac{2\pi}{\lambda_0} n$ je vlnové číslo, λ_0 je vlnová délka použitého zdroje ve vakuu, $n = n(\mathbf{r})$ je index lomu prostředí, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1(\mathbf{r})$ a $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2(\mathbf{r})$ jsou normálové vektory vlnoploch a $\Delta\delta_{12}$ je počáteční fázový rozdíl, který pro případy jednoho zdroje můžeme považovat za nulový. Vztah (2.195) můžeme poté zapsat jako

$$\varphi = k |\rho_1 - \rho_2| = n \frac{2\pi}{\lambda_0} W, \quad (2.196)$$

kde ρ_1 a ρ_2 jsou průměty polohového vektoru \mathbf{r} do směrů daných normálovými vektory vlnoploch \mathbf{n}_1 a \mathbf{n}_2 a $W = W(\mathbf{r})$ je dráhový rozdíl mezi vlnoplochami. Je-li předmětem zájmu právě tento dráhový rozdíl W , lze ho po rekonstrukci fáze φ snadno získat ze vztahu (2.196).

Registrované intenzitní rozložení budou ovlivňovat při reálných měřeních další jevy, jako například šum detektoru. Principiálně můžeme vliv šumu charakterizovat pomocí funkcí aditivního šumu $N_a = N_a(\mathbf{r})$ a násobného (multiplikativního) šumu $N_m = N_m(\mathbf{r})$. Model registrovaného obrazu interferenčního pole poté můžeme zapsat jako

$$I = A [1 + K \cos \varphi] N_m + N_a. \quad (2.197)$$

V další části práce ovšem předpokládejme, že šum je zanedbatelný, resp. pomocí vybraných metod předzpracování obrazu byl výrazně potlačen (tj. pro všechna \mathbf{r} platí $N_m = 1$ a $N_a = 0$).

Výše uvedené formy základního modelu mají jedno společné, a to že ve vztazích vystupuje funkce kosinus. To vnáší do rekonstrukčních metod, při kterých se snažíme získat hodnoty fáze $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, základní nejednoznačnost. Jak je známo, pro funkci kosinus platí

$$\cos \varphi = \cos(m\varphi + 2\pi l), \quad m \in \{-1, +1\}, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.198)$$

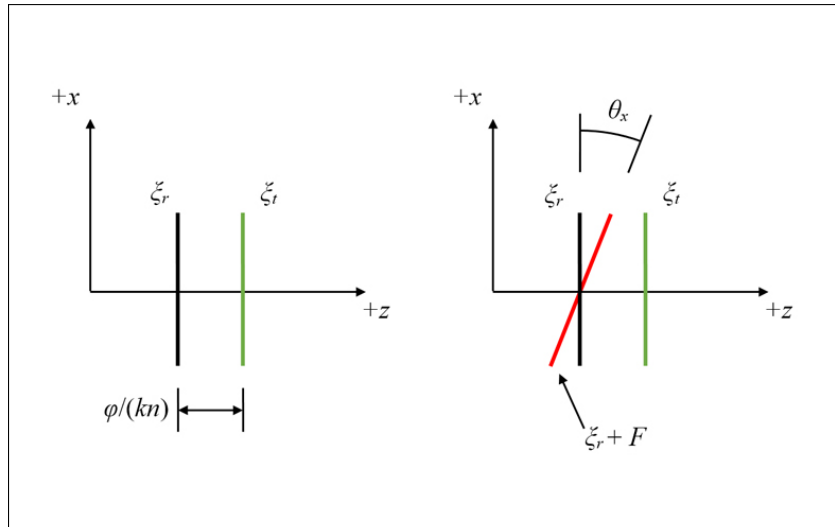
Díky konstantě m ve vztahu (2.198) není možné bez další apriorní informace říci, zda by byla rekonstruovaná fáze z jednoho záznamu interferogramu konvexní nebo konkávní. V praktických situacích testování optických ploch, kdy nás zajímají především odchylky vzhledem k referenční ploše, je tato nejednoznačnost zpravidla odstraněna vstupem znalosti o základním tvaru plochy.

Konstanta l ve vztahu (2.198) způsobuje, že není možné v jednom záznamu rozlišit hodnoty o násobky 2π větší nebo menší. V rámci praktického měření je tento problém odstraňován zaváděním tzv. nosných frekvencí buď v prostorové nebo časové oblasti.

Třetí obecná nejednoznačnost vyplývá z toho, že, jak bude ukázáno dále u vybraných rekonstrukčních metod, většina z postupů vede na použití funkce arctan. Zapišeme-li registrovanou intenzitu pole I pomocí komplexní amplitudy U (viz skalární difrakční teorie dříve, kde jsme nyní pro přehlednost zavedli označení U místo φ), tj. $I = UU^*$, kde $U = U_0 \exp(i\varphi)$, U_0 je amplituda a φ fáze, poté platí

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\text{Im}\{U\}}{\text{Re}\{U\}} \right). \quad (2.199)$$

Hledáme tedy argument komplexního čísla (resp. hlavní hodnotu argumentu komplexního čísla), tj. úhel, který svírá průvodič s kladným směrem reálné osy v komplexní rovině. Ve výpočetních softwarech je pro tuto funkci implementována funkce atan2, jejíž obor hodnot je v intervalu $-\pi$ až π . Rekonstruovaná fáze v sobě poté obsahuje 2π nejednoznačnost (2π nespojivosti), kterou je třeba dalšími vhodnými algoritmy odstranit. V jedné z následujících kapitol se této problematice také dotkneme.



Obrázek 2.13: Prostorová nosná frekvence pro rovinné vlnoplochy

■ Vyhodnocení interferogramu s prostorovou nosnou frekvencí – metoda Fourierovy transformace

Zabývejme se nyní případem eliminace nejednoznačnosti rekonstrukce interferogramu, která je důsledkem vztahu (2.198), pomocí tzv. prostorové nosné frekvence. Na obr. 2.13 je schematicky zobrazeno její zavedení pro rovinné vlnoplochy. Předpokládejme, že interferují rovinné vlny odražené od referenčního a testovaného předmětu. Referenční fázi označme $\xi_r = \xi_r(\mathbf{r})$ a testovanou $\xi_t = \xi_t(\mathbf{r})$, které jsou v nominálním stavu rovnoběžné. Jejich fázový rozdíl je poté $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$. Můžeme tak symbolicky psát

$$\varphi = \xi_t - \xi_r. \quad (2.200)$$

Zavedme nyní funkci $F = F(\mathbf{r})$ vztahem

$$\begin{aligned} F &= k (x \sin \theta_x + y \sin \theta_y) \\ &= 2\pi \left(x \frac{\sin \theta_x}{\lambda} + y \frac{\sin \theta_y}{\lambda} \right) \\ &= 2\pi (x f_{0x} + y f_{0y}) \\ &= 2\pi \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Veličina $\mathbf{f}_0 = \frac{1}{\lambda} [\sin \theta_x, \sin \theta_y]$ je lineární prostorová nosná frekvence, θ_x, θ_y jsou sklony ve směrech os x a y , jak je naznačeno na obr. 2.13 pro případ θ_x , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo a λ je vlnová délka v daném prostředí.

Jak je patrné, funkce F je rovnicí roviny nakloněné vzhledem k souřadným osám. Zvedení nosné frekvence do registrované intenzity interferenčních polí lze tedy provést náklonem referenční nebo testované plochy.

Model registrované intenzity se zavedenou prostorovou nosnou frekvencí můžeme následně obecně psát ve tvaru (neuvažujeme-li šum)

$$I(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) \cos [2\pi \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{r} + \varphi(\mathbf{r})]. \quad (2.202)$$

Použitím Eulerovy identity [9–11] lze vztah (2.202) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= A(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} B(\mathbf{r}) \exp \{i [2\pi \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{r} + \varphi(\mathbf{r})]\} + \frac{1}{2} B(\mathbf{r}) \exp \{-i [2\pi \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{r} + \varphi(\mathbf{r})]\} \\ &= A(\mathbf{r}) + C(\mathbf{r}) \exp (i 2\pi \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{r}) + C^*(\mathbf{r}) \exp (-i 2\pi \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.203)$$

kde $i = \sqrt{-1}$ a

$$C(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}B(\mathbf{r}) \exp [i\varphi(\mathbf{r})],$$

$$C^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}B(\mathbf{r}) \exp [-i\varphi(\mathbf{r})].$$

Vyhodnocení interferogramu se zavedenou lineární prostorovou nosnou frekvencí poprvé představil Takeda et al. roku 1982 [41]. Metoda je založena na použití Fourierovy transformace [9–11], a nese tak její jméno.

Označíme-li $\tilde{g}(\mathbf{f}) = FT\{g(\mathbf{r})\}$ jako operátor dvourozměrné Fourierovy transformace [9–11] aplikovaný na funkci $g(\mathbf{r})$, poté použitím na vztah (2.203) dostáváme

$$\tilde{I}(\mathbf{f}) = FT\{I(\mathbf{r})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\mathbf{r}) \exp(-i2\pi\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}) \, d\mathbf{r}, \quad (2.204)$$

kde po úpravě platí

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\mathbf{f}) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{r}) \exp(-i2\pi\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}) \, d\mathbf{r} \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\mathbf{r}) \exp[-i2\pi\mathbf{r} \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)] \, d\mathbf{r} \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mathbf{r}) \exp[-i2\pi\mathbf{r} \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{f}_0)] \, d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.205)$$

Formálně můžeme vztah (2.205) přepsat jako

$$\tilde{I}(\mathbf{f}) = \tilde{A}(\mathbf{f}) + \tilde{C}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) + \tilde{C}^*(\mathbf{f} + \mathbf{f}_0), \quad (2.206)$$

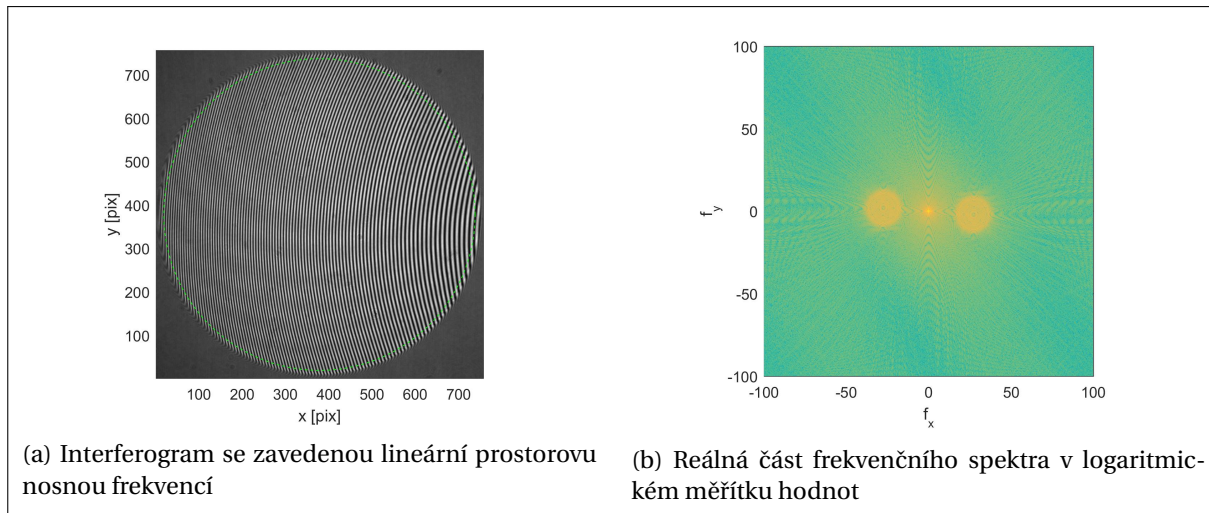
kde

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\mathbf{f}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{r}) \exp(-i2\pi\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}) \, d\mathbf{r}, \\ \tilde{C}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\mathbf{r}) \exp[-i2\pi\mathbf{r} \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)] \, d\mathbf{r}, \\ \tilde{C}^*(\mathbf{f} + \mathbf{f}_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mathbf{r}) \exp[-i2\pi\mathbf{r} \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{f}_0)] \, d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že Fourierovské frekvenční spektrum zaznamenané intenzity lze rozdělit do tří částí. Jedné, která odpovídá rozložení intenzity pozadí – $\tilde{A}(\mathbf{f})$, a poté dvěma, které souvisí se zavedenou nosnou frekvencí – $\tilde{C}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)$ a $\tilde{C}^*(\mathbf{f} + \mathbf{f}_0)$. Budou-li se funkce $A(\mathbf{r})$, $B(\mathbf{r})$ a $\varphi(\mathbf{r})$ měnit pomalu vzhledem k nosné frekvenci \mathbf{f}_0 , poté budou tři části frekvenčního spektra $\tilde{A}(\mathbf{f})$, $\tilde{C}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)$ a $\tilde{C}^*(\mathbf{f} + \mathbf{f}_0)$ jednoznačně odděleny právě danou frekvencí \mathbf{f}_0 . Na obr. 2.14a je ukázán příklad interferogramu se zavedenou nosnou frekvencí, která se zde projeví zhuštěním interferenčních proužků. Na obr. 2.14b je poté zobrazena reálná část spektra v logaritmickém měřítku hodnot pro oblast interferogramu vyznačenou zelenou čárkovanou čarou. Na spektru je jasně patrné odsazení členů $\tilde{C}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)$ a $\tilde{C}^*(\mathbf{f} + \mathbf{f}_0)$ o hodnotu nosné frekvence $\pm\mathbf{f}_0$.

Je-li známo frekvenční spektrum interferogramu (po použití Fourierovy transformace), rekonstrukce fáze probíhá následujícím způsobem [41–43]:

1. odfiltrování střední a jedné z bočních částí spektra,



Obrázek 2.14: Interferogram a jeho frekvenční spektrum

2. vyhledání maxima druhého z bočních spekter, tomuto maximu v ideálním případě odpovídá nosná frekvence \mathbf{f}_0 (v případě nesymetrických aberací může být maximum mírně vychýleno, tj. v rekonstruované fázi bude patrný s tím související náklon, který je třeba dodatečně numericky odstranit),
3. centrace bočního spektra tak, aby platilo: $\mathbf{f}_0 \rightarrow \mathbf{0}$, $\tilde{C}(\mathbf{f}-\mathbf{f}_0) \rightarrow \tilde{C}_0(\mathbf{f})$, případně $\tilde{C}^*(\mathbf{f}+\mathbf{f}_0) \rightarrow \tilde{C}_0^*(\mathbf{f})$, tj. poloha maxima bočního spektra je přesunuta na nulové hodnoty prostorové frekvence,
4. provedení inverzní Fourierovy transformace a vyhodnocení fáze φ .

Aplikací inverzní Fourierovy transformaci na centrovaný člen $\tilde{C}_0(\mathbf{f})$ dostáváme

$$\begin{aligned}
 FT^{-1}\{\tilde{C}_0(\mathbf{f})\} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{s}) \exp[i\varphi(\mathbf{s})] \exp(-i2\pi \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}) \, d\mathbf{s} \right\} \exp(i2\pi \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}) \, d\mathbf{f} \quad (2.207) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{s}) \exp[i\varphi(\mathbf{s})] \, d\mathbf{s} \right\} \exp[i2\pi (\mathbf{r}-\mathbf{s}) \cdot \mathbf{f}] \, d\mathbf{f} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{s}) \exp[i\varphi(\mathbf{s})] \delta(\mathbf{r}-\mathbf{s}) \, d\mathbf{s},
 \end{aligned}$$

kde $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})$ je Diracova funkce [9–11]. Z jejích vlastností plyne, že v bodech spojitosti bude integrace rovna

$$FT^{-1}\{\tilde{C}_0(\mathbf{f})\} = \frac{1}{2} B(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})]. \quad (2.208)$$

Ze vztahu (2.208) poté již snadno dostáváme fázi $\varphi(\mathbf{r})$ jako hlavní hodnotu argumentu komplexního čísla,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im} [FT^{-1}\{\tilde{C}_0(\mathbf{f})\}]}{\text{Re} [FT^{-1}\{\tilde{C}_0(\mathbf{f})\}]} \right\}. \quad (2.209)$$

Výše popsaná metoda Fourierovy transformace má několik výhod i nevýhod. Hlavním pozitivem je nutnost záznamu pouze jednoho interferogramu se zavedenou prostorovou frekvencí. Metoda tak může snadno nalézt uplatnění v aplikacích, kde je třeba vyhodnocovat měření s vysokou frekvencí opakování.

Slabinou metody je vliv šumu na registrovaný interferogram. Vysokofrekvenční šum v obraze ovlivňuje spektrum, a tedy i rekonstruovanou fázi. Nicméně v současnosti lze vliv šumu velmi

dobře potlačovat. Významnější nevýhodou oproti jiným metodám je ovšem nesoulad definice použité Fourierovy transformace na nekonečné oblasti s její aplikací na rekonstruovaný obraz, který je konečných rozměrů. V rekonstruované fázi je tak patrný tzv. Gibbsův jev [44, 45], který se projevuje v okrajových oblastech. Existují metody, jimiž lze tento nepříznivý jev částečně potlačit, ovšem není prozatím známý jednoznačný způsob, který by problém řešil úplně. Jednou z metod je maskování pruhu pixelů po kompletním vyhodnocení v hraničních oblastech. Čili výsledná data nebudou vůbec hodnoty o fázovém rozdílu v těchto částech obrazu obsahovat. Další metodou je extrapolace interferenčních proužků mimo oblast zaznamenaného interferenčního pole. Iterativní algoritmus představuje Gerchberg v [46], Roddier a Roddier v [42] a jeho modifikovanou verzi poté Massig a Heppner v [43], kde je použito speciálního frekvenčního filtru s pozvolným tlumením. Jinou možnost extrapolace představuje Dai a Wang v [47].

■ Vyhodnocení interferogramů s fázovým posuvem v časové oblasti

Jak již bylo uvedeno, jedním z postupů vyhnout se komplikacím s nejednoznačnostmi vyhodnocení je zavádění časové nosné frekvence, resp. zavedení tzv. fázového posuvu. Tato procedura dala vzniknout velkému množství algoritmů, které analyzují sekvenci zaznamenaných interferogramů, kde každý z nich má určitým způsobem modifikovanou fázi v čase. Metoda se obecně označuje jako metoda fázového posuvu (PSI – z angl. Phase Shifting Interferometry).

Dle formátu zaváděného časového posuvu můžeme nepoužívanější PSI algoritmy dělit na [13, 16, 27, 29–31]:

- se známým fázovým posuvem (tzv. synchronní nebo lineární PSI),
- s konstantním neznámým fázovým posuvem (tzv. asynchronní nebo nelineární PSI).

Uvažujeme-li konstantní fázový posuv, poté model registrované intenzity v místě \mathbf{r} a čase t můžeme zapsat jako (zanedbáme-li pro jednoduchost výkladu šum)

$$I(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) \cos[\varphi(\mathbf{r}) + \omega_0 t], \quad (2.210)$$

kde $A(\mathbf{r})$ je prostorové rozložení intenzity pozadí, $B(\mathbf{r})$ je modulace amplitudy, $\varphi(\mathbf{r})$ je fáze interferujících polí a ω_0 je frekvence fázového posuvu. Takto uvedenou formulací, kde se vyskytuje frekvence fázového posuvu, můžeme jednotlivé algoritmy analyzovat Fourierovskými metodami. Tyto postupy se v posledních letech staly velmi moderními a účinnými a poskytují možnosti volby případně tvorby robustních algoritmů [31].

Známe-li posuv dostatečně přesně a máme-li kontrolu nad jeho volbou, je jako nejlepší alternativa vyhodnocení považováno užití některého algoritmu s aplikací metody nejmenších čtverců (dále jen LS-PSI – Least Squares Phase Shifting Interferometry). Označíme-li $I_i(\mathbf{r}) = I_i(\mathbf{r}, t_i)$ jako i -tý registrovaný obraz intenzity v čase t_i a $\delta_i = \omega_0 t_i$ jako i -tý fázový posuv, $i = 0, \dots, N-1$, kde N je počet měření, poté můžeme vztah (2.210) rozepsat jako

$$\begin{aligned} I_i(\mathbf{r}) &= A(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) \cos \varphi(\mathbf{r}) \cos \delta_i - B(\mathbf{r}) \sin \varphi(\mathbf{r}) \sin \delta_i \\ &= C_0(\mathbf{r}) + C_1(\mathbf{r}) \cos \delta_i + C_2(\mathbf{r}) \sin \delta_i, \end{aligned} \quad (2.211)$$

kde $C_0(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})$, $C_1(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}) \cos \varphi(\mathbf{r})$ a $C_2(\mathbf{r}) = -B(\mathbf{r}) \sin \varphi(\mathbf{r})$. Soustavu rovnic pro N měření můžeme snadno zapsat maticově, tj.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2.212)$$

kde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} I_0(\mathbf{r}) \\ I_1(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ I_{N-1}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \delta_0 & \sin \delta_0 \\ 1 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ & \vdots & \\ 1 & \cos \delta_{N-1} & \sin \delta_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} C_0(\mathbf{r}) \\ C_1(\mathbf{r}) \\ C_2(\mathbf{r}) \end{bmatrix}.$$

Pro nadbytečný počet měření, $N > 3$, lze získat řešení soustavy metodou nejmenších čtverců [9–11], platí

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}. \quad (2.213)$$

Rekonstruovanou fázi poté dostáváme ze vztahu

$$\varphi(\mathbf{r}) = \arctan \left[-\frac{C_2(\mathbf{r})}{C_1(\mathbf{r})} \right]. \quad (2.214)$$

Bude-li však fázový posuv ovlivněn systematickou chybou ε , tj. $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \varepsilon$, potom je vhodné zaznamenané interferogramy Fourierovsky analyzovat a nalézt vhodnější robustnější řešení [31, 48]. Jako příklady některých velmi dobře známých LS-PSA algoritmů uved' me následující:

- tří-krokový algoritmus, který navrhl Brunning et al. [49], pro $\omega_0 = 2\pi/3$:

$$\varphi = \arctan \left[\frac{I_0 - 2I_1 + I_2}{\sqrt{3}(I_0 - I_2)} \right], \quad (2.215)$$

- čtyř-krokový algoritmus autorů Brunning et al. [49] a Wyant [50] pro $\omega_0 = \pi/2$:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{I_3 - I_1}{I_0 - I_2} \right), \quad (2.216)$$

- pěti-krokový algoritmus autorů Schwider et al. [51] a Hariharan et al. [52] pro $\omega_0 = \pi/2$:

$$\varphi = \arctan \left[\frac{2(I_1 - I_3)}{2I_2 - I_0 - I_4} \right]. \quad (2.217)$$

Poslední ze zmíněných algoritmů daný vztahem (2.217) je velmi známý a často používaný zejména pro svou robustnost vůči chybě z fázového posuvu.

V praxi je někdy poměrně komplikované určit přesnou hodnotu fázového posuvu. Snadnější variantou je realizovat posuv konstantní s neznámou hodnotou [53, 54]. Jako zástupce algoritmů pro vyhodnocení s neznámým konstantním fázovým posuvem uved' me velmi známý čtyř-krokový algoritmus, který představil Carré [53]:

$$\varphi = \arctan \left[\frac{\sqrt{(I_0 - I_3 + I_1 - I_2)(-I_0 + I_3 + 3I_1 - 3I_2)}}{-I_0 - I_3 + I_1 + I_2} \right], \quad (2.218)$$

kde fázový posuv může být vypočten ze vztahu [53]

$$\omega_0 = \arccos \left[\frac{I_0 - I_3 - I_1 + I_2}{2(I_1 - I_2)} \right]. \quad (2.219)$$

Celou řadu dalších algoritmů může čtenář nalézt např. v [48, 54].

■ Regularizační (optimalizační) vyhodnocení bez nosných frekvencí

Vyhodnocování fáze z interferometrických měření bez dodání apriorních informací nebo modifikace experimentu je nejednoznačný inverzní problém. V této části práce se zmíníme o přístupu regularizačních metod. V daných řešeních je situace doplněna omezeními na tzv. funkční prostor [31].

Jako ukázkou představme metody založené na lineární filtraci obrazu. Předpokládejme, že fáze obsahuje pouze nízké frekvence oproti šumu a ostatním nepříznivým jevům. Poté můžeme předpokládat registrovanou intenzitu v bodě (x, y) oblasti P jako [31, 55]

$$I(x, y) = f(x, y) + n(x, y), \quad (2.220)$$

kde $f(x, y)$ je hladká a spojitá funkce a $n(x, y)$ je funkce náhodného šumu. Cílem regularizačních metod založených na lineární filtraci je poté minimalizace vybraného energetického funkcionálu. Označíme-li tento funkcionál jako U , můžeme ho zapsat např. jako [31]

$$U\{f(x, y)\} = \iint_P \left\{ [I(x, y) - f(x, y)]^2 + \lambda \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right]^2 + \lambda \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^2 \right\} dP, \quad (2.221)$$

kde integrace probíhá přes vyhodnocovanou plochu P a λ značí regularizační konstantu, která je vhodně volena. Vztah (2.221) je v literatuře označován jako rubber-membrane funkcionál, jelikož odpovídá potenciální energii membrány používané v mechanice [31]. První člen integrandu je meritní funkce ve smyslu metody nejmenších čtverců pro podobnost hledané funkce $f(x, y)$ a měřených dat $I(x, y)$. Čtverce prvních derivací poté vyjadřují spojitost výsledného řešení až do první derivace. Obdobným způsobem může být definován další z často uvažovaných modelů, a to tzv. funkcionál tenké kovové desky, kdy platí [31]

$$U\{f(x, y)\} = \iint_P \left\{ [I(x, y) - f(x, y)]^2 + \lambda \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right]^2 + \lambda \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right]^2 + \lambda \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right]^2 \right\} dP. \quad (2.222)$$

Cílem metod lineární filtrace je nyní nalézt takový obraz $f(x, y)$, který bude minimalizovat funkcionál (2.221) nebo (2.222). Pro digitálně zaznamenaný obraz intenzity $I(x, y)$ přejde integrace v sumaci přes vyhodnocovanou oblast a parciální derivace jsou nahrazeny jejich numerickými odhady. Např. pro (2.221) můžeme psát [31]

$$U\{f(x, y)\} = \sum_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2} \left\{ [I(x, y) - f(x, y)]^2 P(x, y) + \lambda [f(x, y) - f(x-1, y)]^2 P(x, y)P(x-1, y) + \lambda [f(x, y) - f(x, y-1)]^2 P(x, y)P(x, y-1) \right\}, \quad (2.223)$$

kde $P(x, y)$ značí pupilovou funkci (masku), která je rovna 1 pro body uvnitř vyhodnocované oblasti a 0 pro body ostatní. Obdobně bychom zapsali diskrétní formu funkcionálu (2.222).

Pomocí regularizace lze vyjádřit vyhodnocení, která byla představena v předchozích částech práce – metodu Fourierovy transformace a metodu s posuvem fáze v časové oblasti [31]. Na tomto místě se tomuto tématu nebudeme věnovat, ale zaměříme se na ukázkou vyhodnocení fáze z interferogramu s uzavřenými interferenčními proužky.

Zabývejme se vyhodnocením fáze pomocí modelování její podobnosti pomocí roviny. Předpokládejme, že pomocí např. Hilbertovy transformace [10, 11, 31] byl nejprve odstraněn vliv pozadí interferogramu stejně jako modulace amplitudy. Poté můžeme model tzv. normalizovaného interferogramu [27, 29] zapsat jako

$$I_n(\mathbf{r}) = \cos \varphi(\mathbf{r}). \quad (2.224)$$

Popišme nyní fázi na dostatečně malé oblasti jako rovinu vztahem

$$p(\mathbf{r}, \alpha, \beta) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \varphi_x(\mathbf{r})(x - \alpha) + \varphi_y(\mathbf{r})(y - \beta), \quad (2.225)$$

kde $\mathbf{r} = [x, y] \in \mathbb{R}^2$ je polohový vektor pixelu v interferogramu, $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R}$ jsou proměnné charakterizující okolí bodu \mathbf{r} , $\varphi_0, \varphi_x, \varphi_y$ jsou parametry roviny počítané pro každou pozici \mathbf{r} pomocí minimalizace cílové funkce M dané vztahem [56]

$$M = \sum_{\mathbf{r}} M_i(\varphi_0, \varphi_x, \varphi_y), \quad (2.226)$$

kde sumace probíhá přes všechny polohy \mathbf{r} a

$$M_i(\varphi_0, \varphi_x, \varphi_y) = \sum_{\alpha, \beta} \left\{ [I_n(\alpha, \beta) - \cos [p(\mathbf{r}, \alpha, \beta)]]^2 + \lambda \sum_{\alpha, \beta} [\varphi_0 - p(\mathbf{r}, \alpha, \beta)]^2 m(\alpha, \beta) \right\} \quad (2.227)$$

kde sumace probíhá přes plochu podoblasti definované koeficienty α, β kolem pozice \mathbf{r} , λ je regularizační parametr a $m(\alpha, \beta)$ určuje pomocí hodnot 1 a 0, zda pixel už byl vyhodnocen nebo ne. Nalezením parametrů φ_0, φ_x a φ_y , které budou minimalizovat cílovou funkci M , poté můžeme rekonstruovat tvar fáze pro jednotlivé podoblasti.

Další alternativou regularizačního (optimalizačního) přístupu, na jehož studiu se autor práce podílel a publikoval, je využití korelace měřeného a modelovaného interferogramu [57].

Předpokládejme, že registrovaný interferogram je možno charakterizovat následujícím vztahem,

$$I_m(\mathbf{r}) = A_m(\mathbf{r}) \left\{ 1 + K_m(\mathbf{r}) \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} W_m(\mathbf{r}) \right] \right\} + N(\mathbf{r}), \quad (2.228)$$

kde $A_m(\mathbf{r})$ charakterizuje intenzitu pozadí v bodě \mathbf{r} , $K_m(\mathbf{r})$ je kontrast interferenčních proužků, $W_m(\mathbf{r})$ je měřený optický dráhový rozdíl a funkce $N(\mathbf{r})$ představuje další jevy v interferogramu, například šum a podobně.

Budeme-li znát nominální referenční tvar optického dráhového rozdílu $W_r(\mathbf{r})$, můžeme syntetický interferogram popsat obdobným vztahem

$$I_r(\mathbf{r}) = A_r(\mathbf{r}) \left\{ 1 + K_r(\mathbf{r}) \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} W_r(\mathbf{r}) \right] \right\}, \quad (2.229)$$

kde podobně jako v předchozím případě $A_r(\mathbf{r})$ značí intenzitu pozadí referenčního interferogramu a $K_r(\mathbf{r})$ kontrast proužků referenčního interferogramu.

Bude-li rozdíl mezi měřeným dráhovým rozdílem a referenčním dráhovým rozdílem malý, můžeme psát $W_m \approx W_r + \delta W$. Poté korigovaný syntetický interferogram můžeme formulovat jako

$$I_c(\mathbf{r}) = A_r(\mathbf{r}) \left\{ 1 + K_r(\mathbf{r}) \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (W_r(\mathbf{r}) + \delta W(\mathbf{r})) \right] \right\}. \quad (2.230)$$

Cílem vyhodnocovací metody je určit takové δW , pro které bude rozdíl mezi referenčním interferogramem I_m a korigovaným I_c minimální pro všechny hodnoty \mathbf{r} . Pro numerické řešení představené metody lze hodnotu δW vyjádřit vhodným rozvojem v řadu polynomů. V optické praxi se nejčastěji používají Zernikeho polynomy [27, 29, 57] pro své výhodné vlastnosti na kruhových aperturách, tj. pro rozvoj řádu N můžeme obecně psát

$$\delta W(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^N \gamma_k Z_k(\mathbf{r}), \quad (2.231)$$

kde $Z_k(\mathbf{r})$ značí Zernikeho polynom a γ_k představuje koeficienty rozvoje.

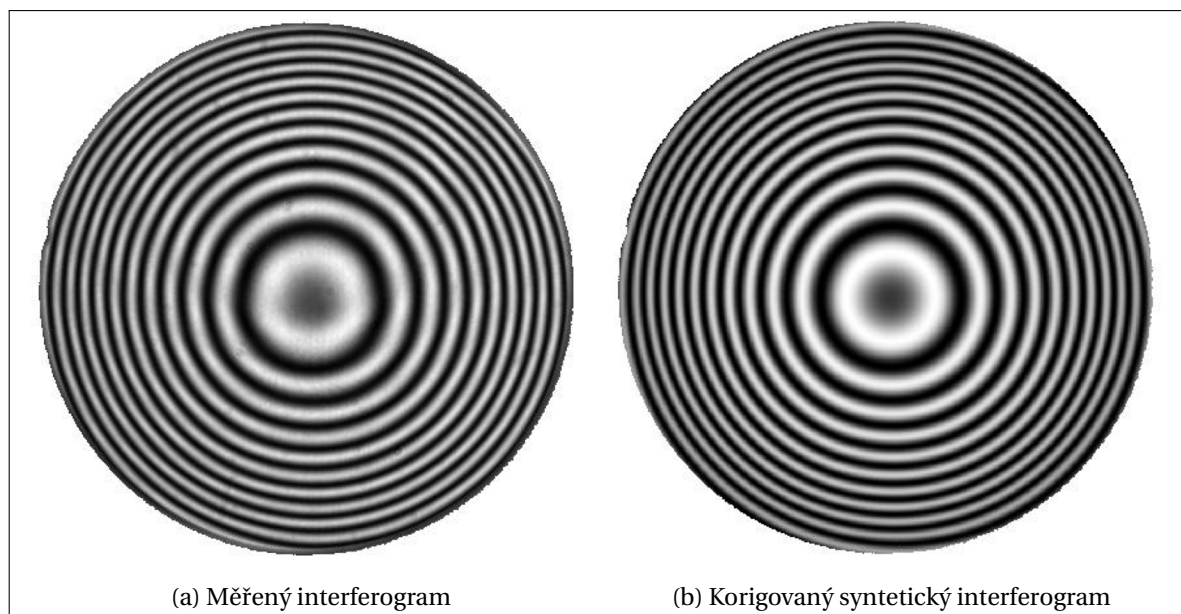
Míru podobnosti mezi korigovaným syntetickým a měřeným interferogramem následně můžeme vyjádřit pomocí korelačního koeficientu $R(\gamma_k)$ [10, 11, 57]

$$R(\gamma_k) = \frac{\sum_{\mathbf{r}} [I_c(\mathbf{r}) - \bar{I}_c] [I_m(\mathbf{r}) - \bar{I}_m]}{\sqrt{\sum_{\mathbf{r}} [I_c(\mathbf{r}) - \bar{I}_c]^2 \sum_{\mathbf{r}} [I_m(\mathbf{r}) - \bar{I}_m]^2}}, \quad (2.232)$$

kde sumace probíhá přes oblast interferogramu, \bar{I}_c značí střední hodnotu korigovaného syntetického interferogramu a \bar{I}_m střední hodnotu interferogramu měřeného.

Cílem metody je následně najít takové koeficienty rozvoje γ_k , pro které bude korelační koeficient $R(\gamma_k)$ maximální.

Na obr. 2.15a je ukázán příklad měřeného interferogramu a na obr. 2.15b optimalizovaný korigovaný syntetický interferogram, kdy korelační koeficient $R(\gamma_k) = 0.976$. Na obr. 2.16 je poté zobrazeno porovnání vyhodnocení fáze pomocí představené metody optimalizace korelačního koeficientu a vyhodnocení pomocí komerčního software Zygo MetroPro. Z výsledků je zřejmé, že přístupy dosahují obdobných výsledků (metoda optimalizace korelačního koeficientu – RMS = 0.041λ , Zygo MetroPro – RMS = 0.040λ) [57].



Obrázek 2.15: Měřený a korigovaný interferogram po optimalizaci korelačního koeficientu

2.4.2 Rekonstrukce fáze vlnového pole pomocí rovnice pro transport energie

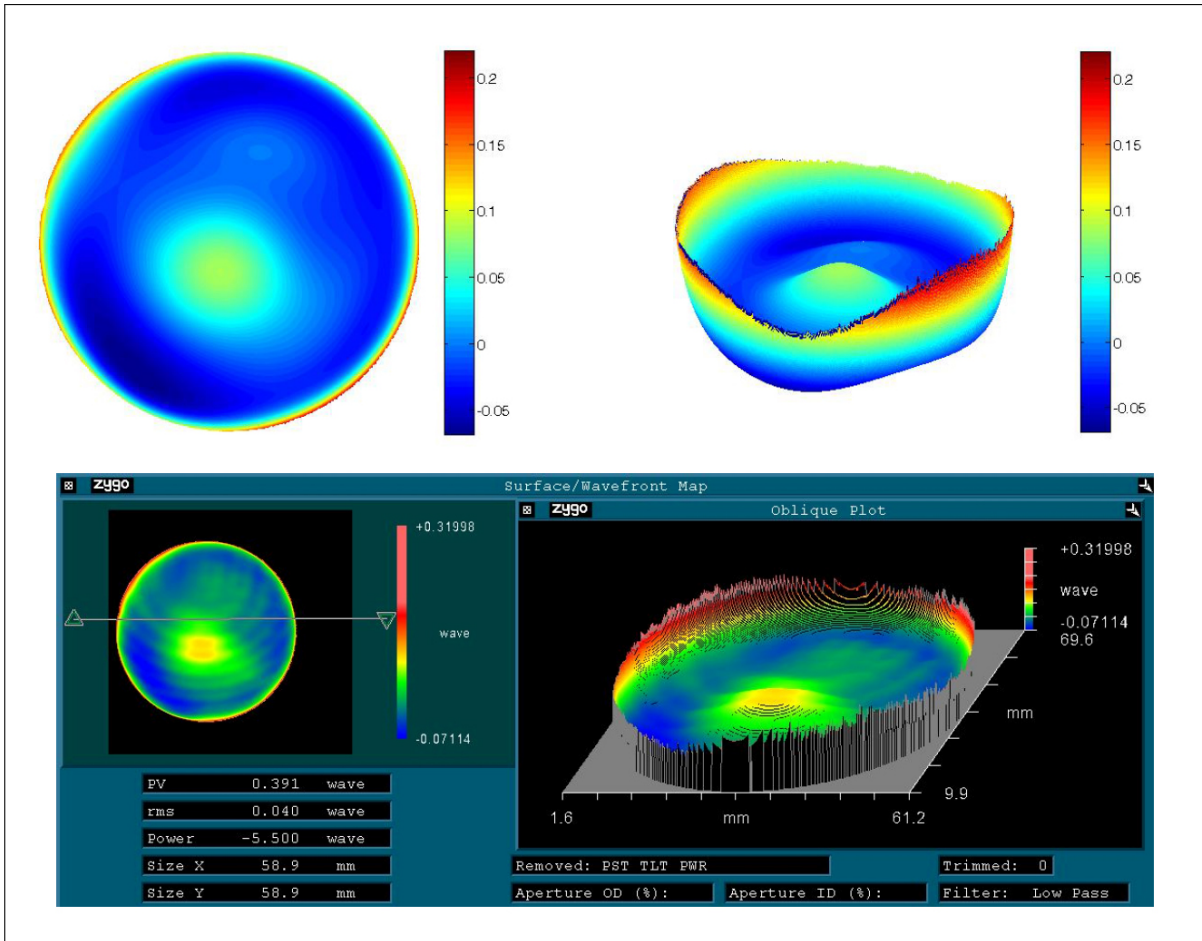
V předchozí části bylo ukázáno, jak rekonstruovat fázi elektromagnetického pole pomocí interference. V této kapitole se budeme zabývat metodami vyhodnocení fáze, které používají přímého měření intenzity pole ve vybraných místech pole a následné numerické rekonstrukce pomocí vhodných algoritmů. Jedná se o poměrně nový směr, který byl odstartován v osmdesátých letech 20. století a začal být intenzivně studován zejména v posledním desetiletí. S rozvojem rychlosti výpočetních výkonů počítačů a kvalitou detektorů intenzity pole lze očekávat, že tyto metody budou v budoucnu patřit k velmi rychlým a přesným s velmi jednoduchými experimentálními zařízeními.

Jak bylo již zmíněno, počátky jsou datovány do 80. let 20. století, kdy M. R. Teague roku 1983 formuloval vztah mezi axiální změnou intenzity pole a gradientem fáze [58] pomocí Greenovy funkce. Od té doby nachází tzv. rovnice pro transport intenzity (TIE) elektromagnetického pole široké uplatnění, a to nejen pro rekonstrukci fáze. Například Petruccelli et al. [59] představil metodu měření tenkých optických vzorků a demonstroval verzi TIE pro částečně koherentní osvětlení. Chao Zuo et al. [60, 61] ukázal řešení pomocí diskrétní kosinové transformace, které umožňuje vyhodnotit fázi bez okrajových nežádoucích efektů. Stejní autoři v pracích [62, 63] řeší odchylky rekonstrukce pomocí FFT od skutečné fáze, které vznikají v důsledku tzv. Teaguova předpokladu, že příčná změna fáze je konzervativní, což v reálné situaci není. Uplatnění rekonstrukce fáze pomocí TIE v mikroskopii studoval např. Bostan et al. [64]. Analýzu řešení TIE pomocí konečných diferencí a rychlé Fourierovy transformace ukázal Hangbo Zhang et al. [65]. Použití digitální holografie pro rekonstrukci fáze s využitím TIE ukázal např. Wen-Jing Zhou [66]. Kromě přímé rekonstrukce fáze nachází TIE uplatnění i např. v metodách odstranění 2π nejednoznačnosti rekonstrukce interferogramu, viz práce Pandeye et al. [67] nebo Martineze-Carranzy et al. [68].

Algoritmy rekonstrukce fáze pomocí TIE můžeme dělit na dvě základní skupiny:

- analytické metody – kdy je fáze vyjádřena zpravidla rozvojem v řadu polynomů a cílem je určení, odhad, koeficientů řady takovým způsobem, aby byla fáze co nejpřesněji rekonstruována,
- iterativní metody – kdy jsou využívány algoritmy nelineární optimalizace pro nalezení optimálního rozdělení fáze.

Praktická realizace měřicího procesu může být provedena více způsoby. Jednou z možností je registrace rozložení intenzity ve více (minimálně dvou) obrazových rovinách. V tomto případě



Obrázek 2.16: Srovnání vyhodnocení fáze pomocí optimalizace korelačního koeficientu a pomocí komerčního software Zygo MetroPro

nejsou kladeny žádné další požadavky na šíření elektromagnetického pole. Druhá z možností předpokládá znalost rozložení v rovině obrazové i předmětové, která je před vyšetřovanou optickou soustavou. Nejčastěji se jedná o velmi malý otvor – bodový předmět, a registrována je rozptylová funkce bodu, která nese informace o fázi.

S teoretickým popisem transportu intenzity už jsme se setkali v předchozích částech této práce. Předpokládáme-li elektromagnetické pole ve formě harmonických vln

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp [i(\varphi(\mathbf{r}) - \omega t)],$$

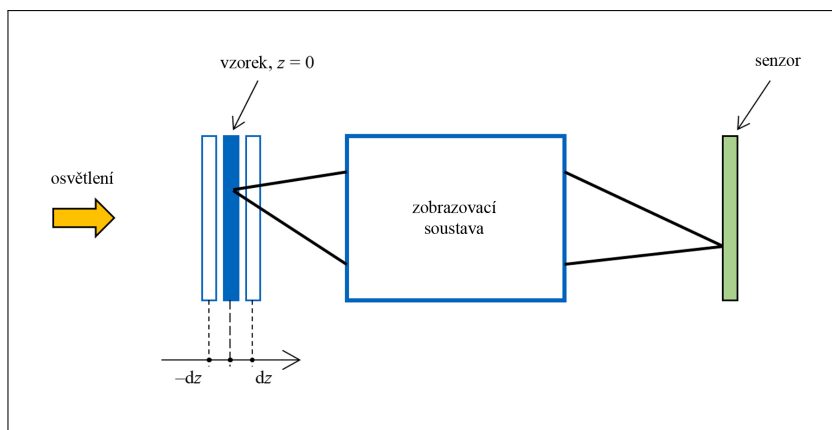
kde $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ je amplituda, φ je fáze a ω je úhlová frekvence vln, t značí čas, zákon zachování energie dostáváme za předpokladu homogenního lineárního nedispersního prostředí bez absorpce, volných nábojů a proudů ve tvaru (2.28),

$$\nabla \cdot (I \nabla \varphi) = \nabla I \cdot \nabla \varphi + I \cdot \Delta \varphi = 0, \quad (2.233)$$

kde $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$, Δ je tzv. Laplaceův operátor [9–11]. Předpokládejme dále, že se pole šíří pouze ve směru osy z . Poté označme ∇_{\perp} jako operátor gradientu v příčném směru, tj. můžeme psát

$$\nabla = \nabla_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \quad \nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}, \quad (2.234)$$

kde \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} jsou ortonormální báze vektory kartézského souřadného systému. Pro velmi krátké vlnové délky a paraxiální aproximaci lze vhodnou úpravou ukázat, že pro šíření intenzity v axiálním



Obrázek 2.17: Schematické znázornění experimentální realizace pro vyhodnocení fáze pomocí rovnice pro transport intenzity

směru bude platit transportní rovnice intenzity ve tvaru

$$\nabla_{\perp} \cdot (I \nabla_{\perp} \varphi) + k \frac{\partial I}{\partial z} + I \frac{\partial k}{\partial z} = 0, \quad (2.235)$$

kde $k = k(\mathbf{r}) = k_0 n(\mathbf{r})$ je vlnové číslo obecně závislé na poloze, k_0 je vlnové číslo ve vakuu, $n(\mathbf{r})$ je index lomu prostředí závislý na poloze. Vztah (2.235) popisuje šíření intenzity elektromagnetického pole opticky nehomogenním prostředím při uvážení paraxiální aproximace (tj. dominantním směrem změny intenzity příp. fáze je pouze axiální směr, příčný zanedbáváme).

Budeme-li dále předpokládat neměnnost vlnového čísla se změnou axiální souřadnice, tj. $\frac{\partial k}{\partial z} = 0$, poté dostáváme transportní rovnici v opticky homogenním prostředí ve tvaru [58–62]

$$\nabla_{\perp} \cdot (I \nabla_{\perp} \varphi) + k \frac{\partial I}{\partial z} = 0. \quad (2.236)$$

Tento vztah je základem pro řadu algoritmů rekonstrukce fáze z měření intenzity. Zavedením substituce $\nabla_{\perp} \psi = I \nabla_{\perp} \varphi$ můžeme rovnici (2.236) převést na Poissonovu diferenciální rovnici [9–11]

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -k \frac{\partial I}{\partial z} = -F. \quad (2.237)$$

Jejím řešením s vhodně stanovenými okrajovými podmínkami lze získat hodnoty gradientu fáze $\nabla_{\perp} \varphi$ v příčných směrech oproti směru šíření. Z gradientu je možné následně rekonstruovat hodnoty fáze např. integrací. Řešení transportní rovnice lze provést různými způsoby, například metodou ortonormálních polynomů [9–11], nebo pomocí Greenovy funkce, kterou rozebral již zmíněný Teague [58].

Na obr. 2.17 je ukázáno schematické znázornění možné experimentální realizace pro vyhodnocení fáze pomocí rovnice pro transport intenzity. Místo, ve kterém vyhodnocujeme fázi, je zobrazeno na detektor. Poté je vzorek posunut o hodnotu dz , případně zobrazovací systém mírně defokusován, a jsou registrovány další obrazy intenzit. Z rozdílů mezi registrovanými obrazy je odhadnuta změna (derivace) intenzity v axiálním směru $\frac{\partial I}{\partial z}$. Následně je řešením rovnice (2.236) vyhodnocen gradient fáze $\nabla_{\perp} \varphi$, a poté fáze φ samotná. Jinou možností záznamu intenzit v různých rovinách je polohování detektoru. Každopádně je zřejmé, že oproti např. interferometrickým sestavám jsou tyto varianty vyhodnocení fáze experimentálně nenáročné.

2.4.3 Odstranění 2π nejednoznačnosti fáze – unwrapping

Jak bylo ukázáno v předchozích kapitolách, velmi často je rekonstruovaná fáze dána výstupem vztahu arctan, který je ve výpočetních softwarech zpravidla definován v intervalu $-\pi$ až π . Rekonstruovaná fáze v sobě poté obsahuje 2π nejednoznačnost (2π nespojitosti), kterou je třeba dalšími vhodnými algoritmy odstranit, neboli provést tzv. unwrapping.

Matematický problém odstraňování zmíněné nespojitosti rekonstruovaného obrazu fáze je odborníky řešen po několik desetiletí. Velmi přehledné shrnutí základních typů algoritmů představil Ghiglia et al. [69].

Prvotní myšlenka odstranění nespojitosti je velmi jednoduchá, ovšem aplikovatelná pouze na data bez významného podílu šumu (vzniklého například různou citlivostí jednotlivých pixelů), diskontinuit nebo residuů (jako artefaktů po rozptylu na prachových částicích v optickém systému nebo poškození povrchu optických ploch). Rozvoj sofistikovaných algoritmů, které dokážou vliv diskontinuit a residuů eliminovat, byl zapříčiněn zejména díky radarové satelitní interferometrii, kdy samotný povrch není spojitou plochou (uvážíme-li přítomnost lesů nebo stavebních objektů).

Kromě vlivu šumu, diskontinuit a residuů na rekonstrukci fáze má vliv vzorkování v rovině detektoru. V důsledku Nyquist-Shannonova kritéria [70, 71] nesmí být mezi dvěma pixely změna fáze $|\Delta\varphi|$ větší než π . Označíme-li Δx jako vzdálenost mezi dvěma pixely, poté bude v prvním přiblížení platit

$$|\Delta\varphi| = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x \right| < \pi. \quad (2.238)$$

Bude-li obraz v jednom směru zaznamenán v rozsahu x_{\min} až x_{\max} s počtem N vzorků (pixelů), poté $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min}) / N$, a tedy po dosazení do předchozího vztahu a úpravě dostáváme podmínku pro minimální počet vzorků (pixelů) v závislosti na velikosti měřené oblasti a derivaci (sklonu) fáze, platí

$$N > \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \left(\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\pi} \right) \right|. \quad (2.239)$$

Jako ukázkou jednoho z prvních sofistikovanějších algoritmů ukažme ten, který roku 1982 představil Itoh [72]. Uvažujme pro jednoduchost jednodimenzionální případ. Označme W jako tzv. wrap operátor, kterým ze spojitě fáze φ získáme funkci φ_w obsahující 2π nejednoznačnost, čili obecně platí

$$W\{\varphi(x_i)\} = \varphi(x_i) + 2\pi k(x_i), \quad (2.240)$$

kde x_i značí polohu pixelu v obraze a $k(x_i)$ je diskrétní funkce celých čísel například ve tvaru $k(x_i) = -\text{mod}\{\varphi(x_i), 2\pi\}$, kde mod je modulo operátor zbytku po dělení. Označíme-li dále Δ jako operátor difference, tj. $\Delta\{f(x_i)\} = f(x_i) - f(x_{i-1})$, poté jeho použitím na wrap operátor fáze dostáváme

$$\Delta\{W\{\varphi(x_i)\}\} = \Delta\{\varphi(x_i)\} + 2\pi\Delta\{k(x_i)\}. \quad (2.241)$$

Opakovaným použitím wrap operátoru na (2.241) dostáváme

$$W\{\Delta\{W\{\varphi(x_i)\}\}\} = \Delta\{\varphi(x_i)\} + 2\pi[\Delta\{k_1(x_i)\} + k_2(x_i)], \quad (2.242)$$

kde $k_1(x_i)$ a $k_2(x_i)$ značí funkce celých čísel příslušných k prvnímu a druhému wrap operátoru. Za předpokladu Nyquist-Shannonova kritéria platí podmínka hladkosti $-\pi < \Delta\{\varphi(x_i)\} < \pi$. Vzhledem k definici wrap operátoru pak také musí platit

$$2\pi[\Delta\{k_1(x_i)\} + k_2(x_i)] = 0, \quad (2.243)$$

a tedy

$$\Delta\{\varphi(x_i)\} = W\{\Delta\{W\{\varphi(x_i)\}\}\} = W\{\Delta\{\varphi_w(x_i)\}\}. \quad (2.244)$$

Fázi tedy můžeme rekonstruovat jako

$$\begin{aligned} \varphi(x_i) &= \varphi(x_0) + \sum_{j=1}^i \Delta\{\varphi(x_j)\} \\ &= \varphi(x_0) + \sum_{j=1}^i W\{\Delta\{\varphi_w(x_j)\}\}. \end{aligned} \quad (2.245)$$

Itohův algoritmus je speciálním případem vztahu

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}_0) + \int_C \nabla\varphi(\mathbf{r}') ds', \quad (2.246)$$

který popisuje to, že odstranění 2π nespojitosti po křivce C z počátečního bodu \mathbf{r}_0 do bodu \mathbf{r} lze provést jako integraci fázového gradientu po křivce C , jsou-li hodnoty gradientu podél této křivky známy společně s počáteční hodnotou fáze v bodě \mathbf{r}_0 . Tento vztah je také jedním ze základních nástrojů používaných k vyhledání residuí ve vyhodnocovaném obrazu fáze. Za předpokladu, že bude fáze ideální bez reziduí a nespojitostí, bude platit podmínka

$$\oint_C \nabla\varphi(\mathbf{r}') ds' = 0, \quad (2.247)$$

tedy integrál gradientu po uzavřené křivce bude nulový. Pokud tato podmínka nebude splněna, je volená integrační cesta podezřelá na obsah residua.

Jak už bylo řečeno, algoritmů řešících problém odstranění 2π nejednoznačnost existuje celá řada a není cílem této práce přednést jejich kompletní výčet a detailní popis. Ukažme ale jedno z jejich možných základních dělení. Ghiglia et al. [69] zavádí dělení na:

- algoritmy sledující předem definovanou cestu (PFA – z angl. Path-Following Algorithms),
- metody minimalizující normu (MNM – z angl. Minimum-Norm Methods).

Jako další kategorii bychom mohli zařadit algoritmy, které vhodně kombinují výše zmíněné dva přístupy a doplňují je, nazvěme je tedy

- kombinované algoritmy.

Poměrně novou kategorií, o které se také krátce zmíníme, jsou

- algoritmy založené na rovnici pro transport intenzity (UnwTIE – z angl. Unwrapping with Transport of Intensity Equation).

PFA a některé MNM provádějí unwrapping obecně pomocí tzv. map kvality nebo vhodných masek, které jsou použity k prvotní definici cesty integrace (2.246). Případné nalezení diskontinuit a residuí v obrazu fáze se liší v závislosti na použitém algoritmu.

Tvorba map kvality a detekce residuí jsou založeny na dvou základních podmínkách [69]:

- Křivkový integrál

$$I = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f dx + g dy) \quad (2.248)$$

je nezávislý na cestě integrace C , je-li splněna některá z následujících podmínek:

- $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = (f dx + g dy)$ je totální diferenciál [9–11],
 - $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla\varphi(\mathbf{r})$, neboli \mathbf{F} je gradient fáze $\varphi(\mathbf{r})$,
 - $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$, integrace po libovolné uzavřené křivce je rovna nule,
 - $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, rotace \mathbf{F} je nulová, tedy jednotlivé parciální derivace jsou si rovny.
- Tzv. teorém residuí pro dvoudimenzionální unwrapping reálných hodnot fáze zní:

$$\oint_{\text{residuum}} \nabla\varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 2\pi k, \quad (2.249)$$

kde integrace probíhá kolem residua a k je celé číslo. Jinými slovy je-li přítomné residuum, poté bude křivkový integrál kolem něj roven k -násobku 2π .

Výše zmíněné podmínky, a zejména třetí z nich (tj. integrace po uzavřené křivce je rovna nule), jsou základem ke všem PFA. Pokud je součet diferencí fáze s 2π nejednoznačností po libovolné uzavřené křivce v rámci měřených dat nulový, jsou data tzv. konzistentní, a lze použít libovolnou integrační cestu – integrál nezávisí na zvolené cestě. Jsou-li však v obraze přítomna residua, je unwrapping závislý na cestě integrace. Detekce residuí pro 2D unwrapping může poté probíhat s užitím výše uvedeného teorému (2.249). Vyberou se nejmenší možné uzavřené cesty (křivky), sousední pixely, a provede se integrace diferencí fáze po této elementární cestě (kolem vybraných 4 pixelů zpravidla proti směru hodinových ručiček, tj. v kladném matematickém směru). Je-li výsledek nulový, jsou data konzistentní. Bude-li ale roven $\pm 2\pi$, je detekováno tzv. kladné, resp. záporné, residuum. Hovoříme poté o tzv. polaritě residua.

Mapy kvality jsou obecně matice (datová pole) stejného rozměru jako vyhodnocovaný obraz fáze. Na jednotlivých místech těchto polí jsou umístěny váhy (charakteristiky hodnocení kvality) odpovídajících pixelů. Automatizovaná tvorba map kvality je prováděna různými způsoby v závislosti na zvolených matematických kritériích, poté mluvíme např. o [69]: korelačních mapách, pseudokorelačních mapách, mapách variance fázové derivace, mapách maximálního fázového gradientu. První dva zmíněné typy nejsou příliš vhodné pro velké změny měřené fáze (data s vysokou hodnotou šumu nebo diskontinuit). Třetí ze zmíněných jsou založeny na varianci fázové derivace z_{mn} [69],

$$z_{mn} = \frac{\sqrt{\sum_{i,j=1}^k (\Delta_{i,j}^x - \bar{\Delta}_{m,n}^x)^2} + \sqrt{\sum_{i,j=1}^k (\Delta_{i,j}^y - \bar{\Delta}_{m,n}^y)^2}}{k^2}, \quad (2.250)$$

kde je každá z variancí počítána pro okno velikosti $k \times k$ centrované na pozici $[m, n]$, $\Delta_{i,j}^x$ a $\Delta_{i,j}^y$ jsou difference vyhodnocované fáze ve směrech x a y , $\bar{\Delta}_{m,n}^x$ a $\bar{\Delta}_{m,n}^y$ jsou průměrné hodnoty těchto diferencí pro jednotlivá okna. Mapy maximálního fázového gradientu jsou poté založeny na výpočtu maximálního gradientu vyšetřované fáze ve vhodně zvoleném okně kolem pixelu. Velkým hodnotám maxima gradientu jsou poté přiřazovány menší váhy (pro podezření na diskontinuitu) a opačně. V tomto přístupu může ovšem dojít k nesprávnému snížení váhy pro fázi velkého sklonu.

Jako základního zástupce PFA jmenujme Goldsteinův algoritmus, který publikoval roku 1988 Goldstein et al. [73]. Ten generuje tzv. větvené řezy (BC – z angl. branch cuts), které spojují jednotlivá residua a vytváří tak oblasti, ve kterých následně probíhá unwrapping. V rámci tří základních kroků vyhodnocení jsou nejprve residua identifikována, následně jsou generovány zmíněné hranice (větvené řezy), a poté je prováděna integrace podél hranic. Goldsteinův algoritmus je velmi rychlý a spolehlivý. Jeho další vylepšení pomocí tzv. dipole cuts navrhli Ghiglia a Pritt [69].

Dalším ze zástupců PFA můžeme jmenovat známý Flynnův algoritmus z roku 1997 [74], který minimalizuje váženou sumu diskontinuit pomocí iterativního výpočtu L_1 -normy mezi jednotlivými regiony obrazu, které jsou odděleny 2π nejednoznačností.

Algoritmy MNM zavádí matematicky formální hledisko, kdy je problém odstranění nespojitosti fáze řešen ve smyslu minimalizace L_p normy [69]

$$J = \varepsilon^P = \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j} - \Delta_{i,j}^x \right|^P + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-2} \left| \varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j} - \Delta_{i,j}^y \right|^P, \quad (2.251)$$

kde $\varphi_{i,j}$ je hledaná hodnota fáze v bodě o souřadnicích $[x_i, y_j]$, $\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}$ je difference hledané skutečné fáze ve směru osy x , $\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}$ je difference ve směru osy y , $\Delta_{i,j}^x = W\{\varphi_{i+1,j}\} - W\{\varphi_{i,j}\}$ je difference fáze po aplikaci wrap operátoru ve směru osy x , $\Delta_{i,j}^y = W\{\varphi_{i,j+1}\} - W\{\varphi_{i,j}\}$ ve směru osy y , W je wrap operátor, M a N značí rozměry obrazu fáze ve směru x a y . Jsou-li k daným sčítancům definovány váhy, mluvíme poté o minimalizaci vážené L_p normy. Minimalizaci vztahu (2.251) lze provádět z pohledu spojitého nebo diskrétního variačního přístupu. Pro první případ můžeme (2.251) formulovat jako [69]

$$J = \iint_{\Omega} f(\varphi_x, \varphi_y, x, y) dx dy, \quad (2.252)$$

kde je funkce f definována jako

$$f(\varphi_x, \varphi_y, x, y) = |\varphi_x - \psi_x|^P + |\varphi_y - \psi_y|^P, \quad (2.253)$$

kde φ_x, φ_y jsou diference hledané fáze ve směrech x a y , ψ_x, ψ_y jsou odpovídající diference rekonstruované fáze. Diference fáze jsou následně nahrazeny spojitými parciálními derivacemi. Použitím variačního počtu jsou poté hledány takové podmínky, při kterých je J konstantní. Lze ukázat, že spojitým variačním přístupem lze problém převést na řešení parciální diferenciální rovnice [69]

$$\frac{\partial}{\partial x} [U(x, y)(\varphi_x + \psi_x)] + \frac{\partial}{\partial y} [V(x, y)(\varphi_y + \psi_y)] = 0, \quad (2.254)$$

kde $U(x, y) = |\varphi_x + \psi_x|^{P-2}$ a $V(x, y) = |\varphi_y + \psi_y|^{P-2}$ mohou být považovány jako zobecněné váhy závislé na vstupních datech. Pro případ metody nejmenších čtverců, tedy $P = 2$, se stávají váhy jednotkovými a řešení se redukuje na řešení Poissonovy diferenciální rovnice

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \psi_{xx} + \psi_{yy}, \quad (2.255)$$

neboli

$$\nabla^2 \varphi = \rho, \quad (2.256)$$

kde $\rho = \psi_{xx} + \psi_{yy}$, φ_{ii} značí druhou derivaci hledané fáze ve směru i , ψ_{ii} poté druhou derivaci rekonstruované fáze. Diskrétním variačním přístupem bychom poté dostali diskrétní formu Poissonovy diferenciální rovnice ve tvaru [69]

$$(\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}) + (\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}) = \rho_{i,j}, \quad (2.257)$$

kde

$$\rho_{i,j} = \left(\Delta_{i,j}^x - \Delta_{i-1,j}^x \right) + \left(\Delta_{i,j}^y - \Delta_{i,j-1}^y \right). \quad (2.258)$$

Řešení výše zmíněných definičních rovnic MNM lze nalézt různými způsoby, např. pomocí rychlé Fourierovy transformace nebo tzv. multi-gridovými algoritmy (metody více sítí), které problém převádí do mřížek (sítí) různých hustot (rozlišení), a hledají poté nejlepší řešení vyhovující daným podmínkám. Zpravidla jsou založeny na Gauss-Seidelově iterační metodě, metodě sdružených gradientů nebo metodě největšího spádu [69, 75].

Z kombinovaných algoritmů zmiňme v krátkosti PUMA algoritmus (z angl. Phase Unwrapping MAx-flow/min-cut) [76], který je založený na optimalizaci grafů. Tento algoritmus má vlastnost exaktní minimalizace L_P normy pro $P \geq 1$. Jako další jmenujme například SRNCP algoritmus (z angl. Sorting by Reliability, following a Non-Continuous Path) [77], který lze řadit ke skupině PFA, kde jsou procházeny pixely po nespojitě cestě, čímž se výrazně liší od klasických výše zmíněných přístupů. Poslední z kombinovaných algoritmů jmenujme Iso-phase algoritmus [78], který řeší problém odstranění nespojitosti fáze pomocí dekompozice obrazu po oblastech, které mají podobnou hodnotu fáze (po homogenních částech). Tento algoritmus umí velmi rychle reagovat na místa s vysokou mírou šumu nebo diskontinuit v rekonstruovaném obraze.

Poslední ze skupin algoritmů, které se budeme v této části věnovat, jsou přístupy založené na řešení transportní rovnice intenzity. Jak bylo ukázáno v předchozích kapitolách, obecně lze model zaznamenané intenzity $I(\mathbf{r})$ a rekonstruované fáze $\varphi(\mathbf{r})$ formulovat jako

$$I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[I(\mathbf{r})]}{\text{Re}[I(\mathbf{r})]} \right\}, \quad (2.259)$$

kde $U(\mathbf{r})$ je komplexní amplituda vlnového pole a \mathbf{r} značí polohu v rovině detektoru. Dále budeme-li předpokládat šíření pole ve směru osy z a záznam interferogramu provádíme v rovině (x, y) můžeme psát transportní rovnici intenzity (viz (2.236))

$$\nabla_{\perp} \cdot (I \nabla_{\perp} \varphi) + k \frac{\partial I}{\partial z} = 0. \quad (2.260)$$

Jeden z možných přístupů odstranění 2π nejednoznačnosti prezentoval roku 2016 Pandey et al. [67]. Označíme-li φ_w jako fázi s přítomnými nespojitostmi, poté můžeme první přiblížení komplexní amplitudy v rovině $z = 0$ psát ve tvaru

$$U_0(x, y, 0) = \exp [i\varphi_w(x, y)] . \quad (2.261)$$

Následně použitím např. metody úhlového spektra rovinných vln lze vypočítat pole v malých vzdálenostech $\pm\Delta z$ od roviny záznamu, a poté určit numerický odhad derivace intenzity $\partial I / \partial z$ například jako

$$\frac{\partial I(x, y, 0)}{\partial z} \approx \frac{|U(x, y, +\Delta z)|^2 - |U(x, y, -\Delta z)|^2}{2\Delta z} . \quad (2.262)$$

Rekonstrukci spojitě fáze φ následně autoři algoritmu řeší inverzí Laplaceova operátoru pro případ transportní rovnice s rovnoměrným osvětlením pole (malou příčnou variací intenzity) formou [67]

$$\varphi(x, y, 0) = -\frac{k}{I(x, y)} \nabla_{\perp}^{-2} \left[\frac{\partial I(x, y, 0)}{\partial z} \right] , \quad (2.263)$$

kde je inverzní operátor $\nabla_{\perp}^{-2} L$ funkce L vypočten pomocí Fourierovy transformace [9–11] jako

$$\nabla_{\perp}^{-2} L(x, y) = \text{IFT} \left\{ \frac{D(f_x, f_y) \text{FT}\{L(x, y)\}}{D(f_x, f_y)^2 + \varepsilon^2} \right\} , \quad (2.264)$$

kde FT a IFT značí Fourierovu transformaci a její inverzi, $[f_x, f_y]$ jsou prostorové frekvence, $D(f_x, f_y) = -4\pi^2 (f_x^2 + f_y^2)$ a ε^2 je faktor zamezující dělení nulou. Vypočtená fáze vztahem (2.263) je následně dosazena do vztahu (2.261) a v případě potřeby výpočet probíhá iterativně, dokud není změna fáze menší než požadovaná hodnota.

Další z algoritmů využívající transportní rovnici intenzity pole představil roku 2017 Martinez-Carranza et al. [68]. Také je předpokládáno rovnoměrné osvětlení rekonstruovaného pole a axiální změna intenzity je počítána přímo z fáze φ_w v rovině $z = 0$ dle vztahu [68]

$$\frac{\partial I}{\partial z} \approx 2I \text{Im} \left[\exp(-i\varphi_w) \text{IFT} \left\{ -i\pi\lambda |f|^2 \text{FT} \left\{ \exp(i\varphi_w) \right\} \right\} \right] , \quad (2.265)$$

kde λ je vlnová délka a $|f|^2 = f_x^2 + f_y^2$ a kde jsme pro přehlednost vynechali zápis závislosti na poloze v rovině obrazu. Rekonstruovanou fázi poté lze vypočítat jako [68]

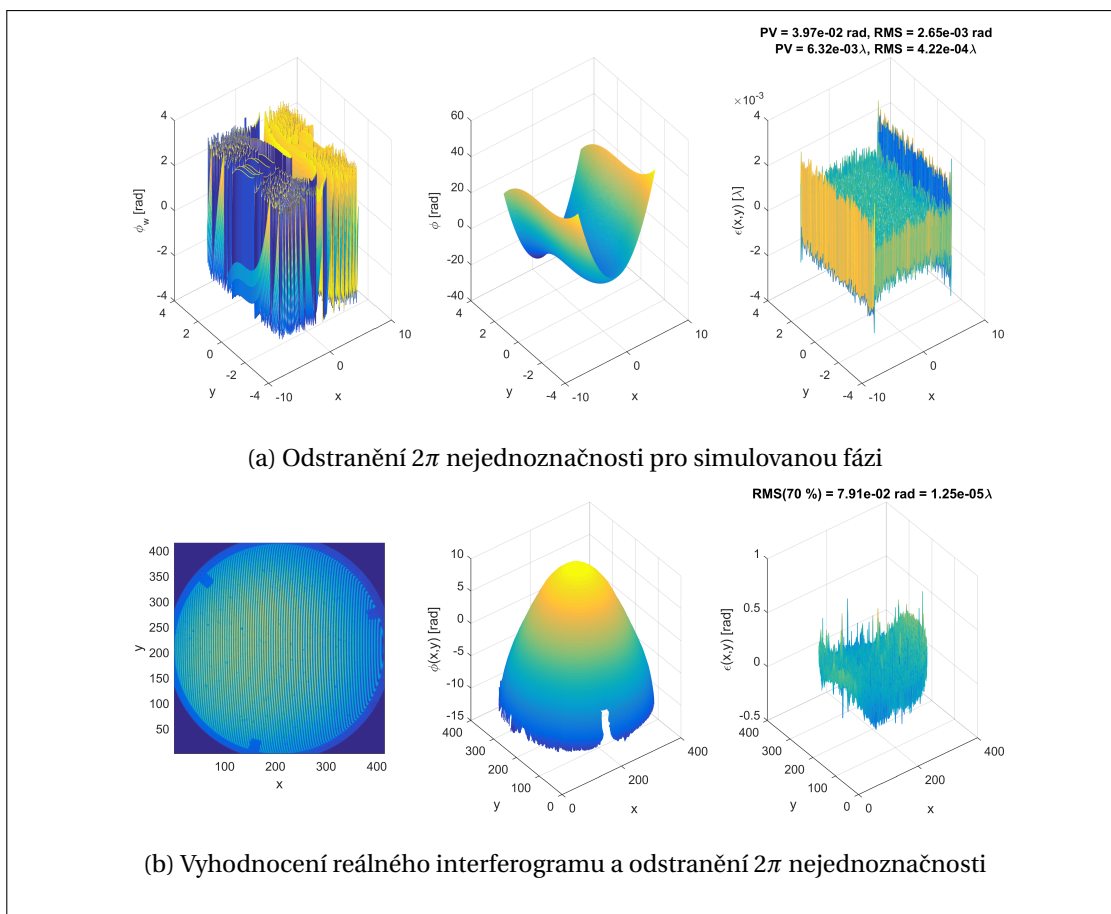
$$\varphi = \text{IFT} \left\{ \frac{1}{|f|^2} \text{FT} \left\{ \text{Im} \left[\exp(-i\varphi_w) \text{IFT} \left\{ |f|^2 \text{FT} \left\{ \exp(i\varphi_w) \right\} \right\} \right] \right\} \right\} . \quad (2.266)$$

Na obr. 2.18a je zobrazena ukázka vyhodnocení simulované fáze s 2π nejednoznačnostmi pomocí prvního zmíněného přístupu s využitím řešení transportní rovnice intenzity a vztahu (2.263). Levá část je fáze s nespojitostmi, střední ukazuje rekonstruovanou fázi, a pravá část poté rozdíl mezi simulovanou fází před zavedení wrap operátoru a fází rekonstruovanou. Na okrajích jsou zřejmé artefakty v důsledku použití Fourierovy transformace. I tak je ale přesnost vyhodnocení velmi velká. V praktických aplikacích jsou navíc tyto oblasti velmi často zanedbávány. Na obr. 2.18b je poté ukázáno srovnání vyhodnocení reálného interferogramu metodou Fourierovy transformace a odstranění nespojitostí pomocí rovnice pro transport intenzity s komerčním výstupem softwaru MetroPro firmy Zygo. I zde je shoda velmi velká.

2.4.4 Praktická realizace rekonstrukce fáze vlnového pole

V rámci doktorského studia autor řešil několik případů praktické realizace vyhodnocení fáze vlnového pole. V této části zmíníme dva výstupy, a to:

- vyhodnocení interferogramu se zavedenou prostorovou nosnou frekvencí metodou Fourierovy transformace s automatizovaným vyhledáním optimální polohy maxima bočního spektra,



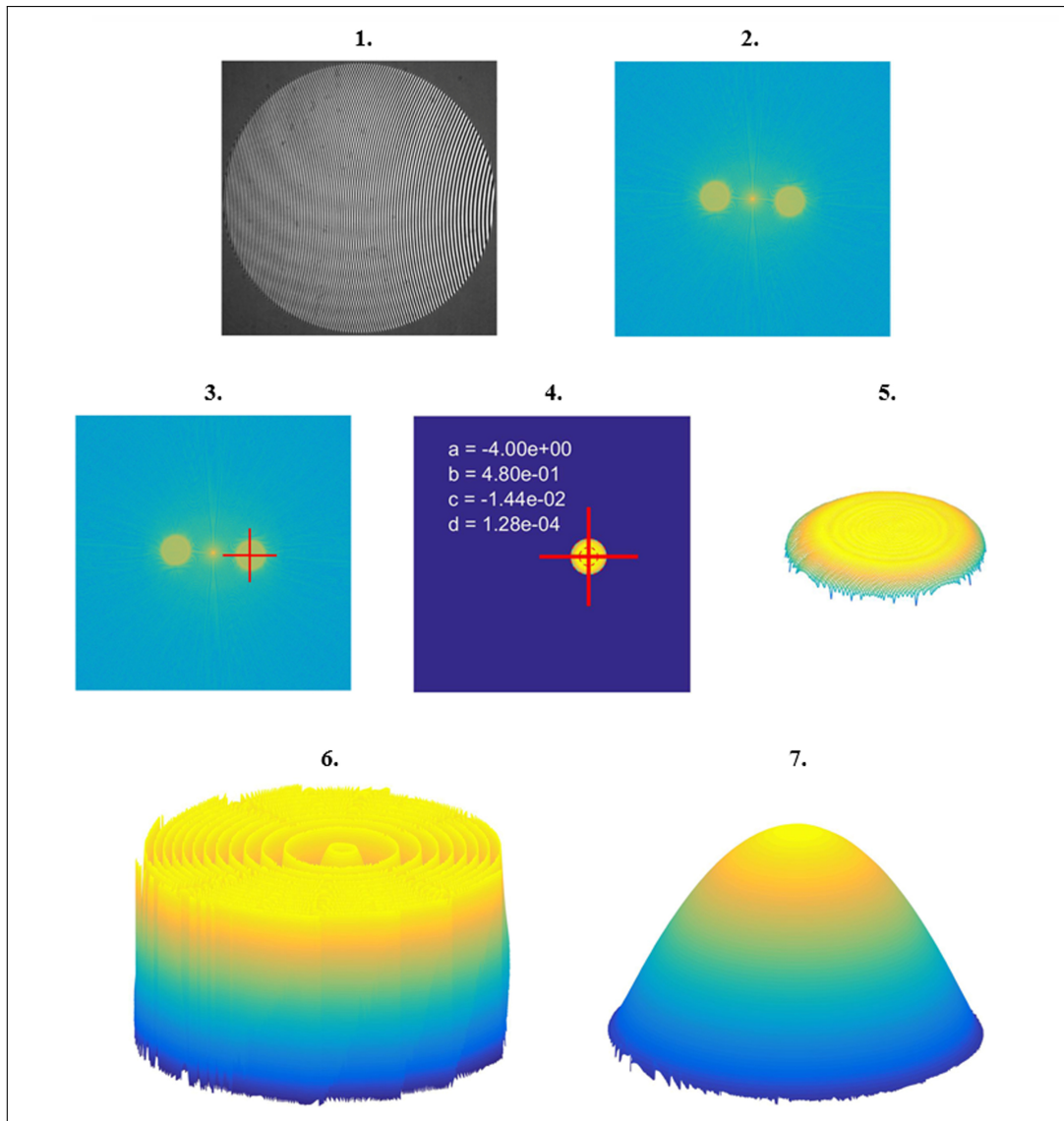
Obrázek 2.18: Odstranění 2π nejednoznačnosti řešením rovnice pro transport intenzity

- komplexní řešení modulace a záznamu interferenčního pole a vyhodnocení fáze metodami PSI a FTM pro Twyman-Greenův interferometr s osazeným prostorovým modulátorem světla.

Prvním z výstupů je softwarové řešení napsané v jazyce MATLAB [79]. Algoritmus lze shrnout do následujících kroků

1. kontrola vstupů – interferogram, uživatelsky definovaná maska, další volitelné parametry výpočtu,
2. Fourierova transformace měřeného interferogramu,
3. nalezení polohy maxima bočního spektra – vážený průměr polohy v závislosti na četnosti frekvencí,
4. výpočet masky spektrální filtrace s plynulým přechodem okrajů definovaných jako polynom třetího stupně,
5. filtrace a centrace bočního spektra,
6. výpočet fáze s 2π nejednoznačnostmi – inverzní Fourierova transformace.

Grafická dokumentace vyhodnocovacího algoritmu je ukázána na obr. 2.19. Na prvním snímku je ukázán zaznamenaný reálný interferogram, na druhém je jeho frekvenční spektrum, následuje identifikace maxima bočního spektra na třetí části, na čtvrtém snímku jsou poté ukázány kromě filtrace bočního spektra i hodnoty polynomu třetího stupně pro plynulý přechod hraniční oblasti,

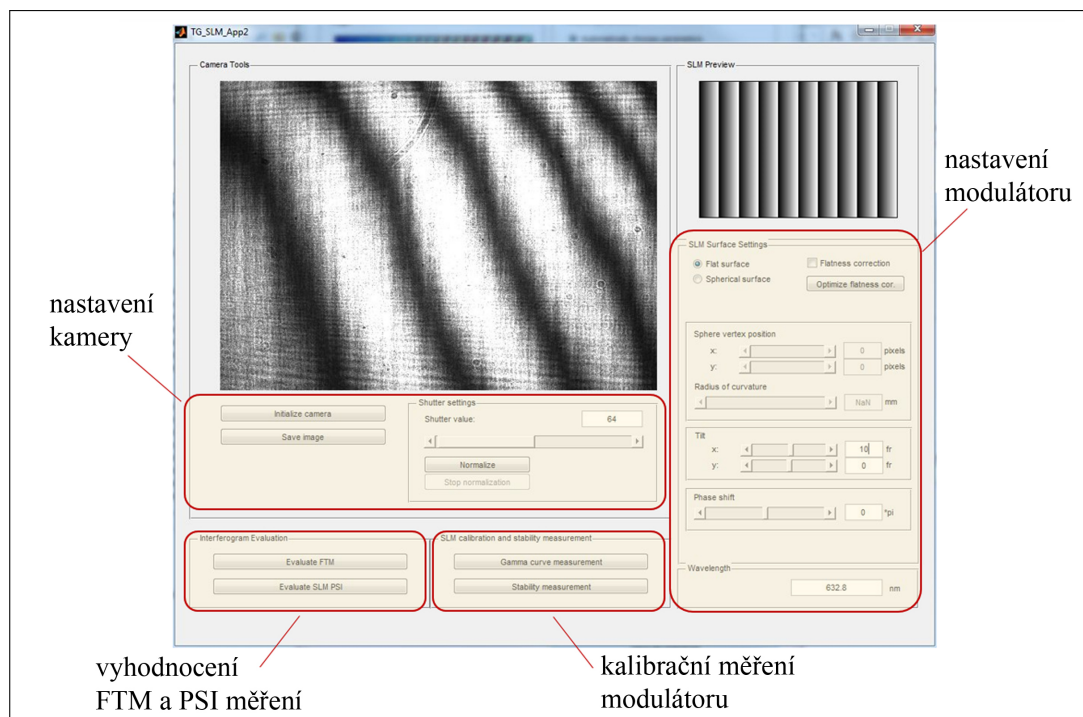


Obrázek 2.19: Grafické znázornění automatizovaného vyhodnocovacího algoritmu FTM

pátý snímek představuje centrované spektrum. Na šestém a sedmém snímku je ukázána rekonstruovaná fáze s přítomnými 2π nejednoznačnostmi a fáze výsledná po aplikaci Itoho algoritmu. Poznamenejme, že měřítko vertikálních os bylo přizpůsobeno pro vyplnění obrázku, dále také hodnoty pro frekvenční spektrum jsou zobrazeny v logaritmickém měřítku.

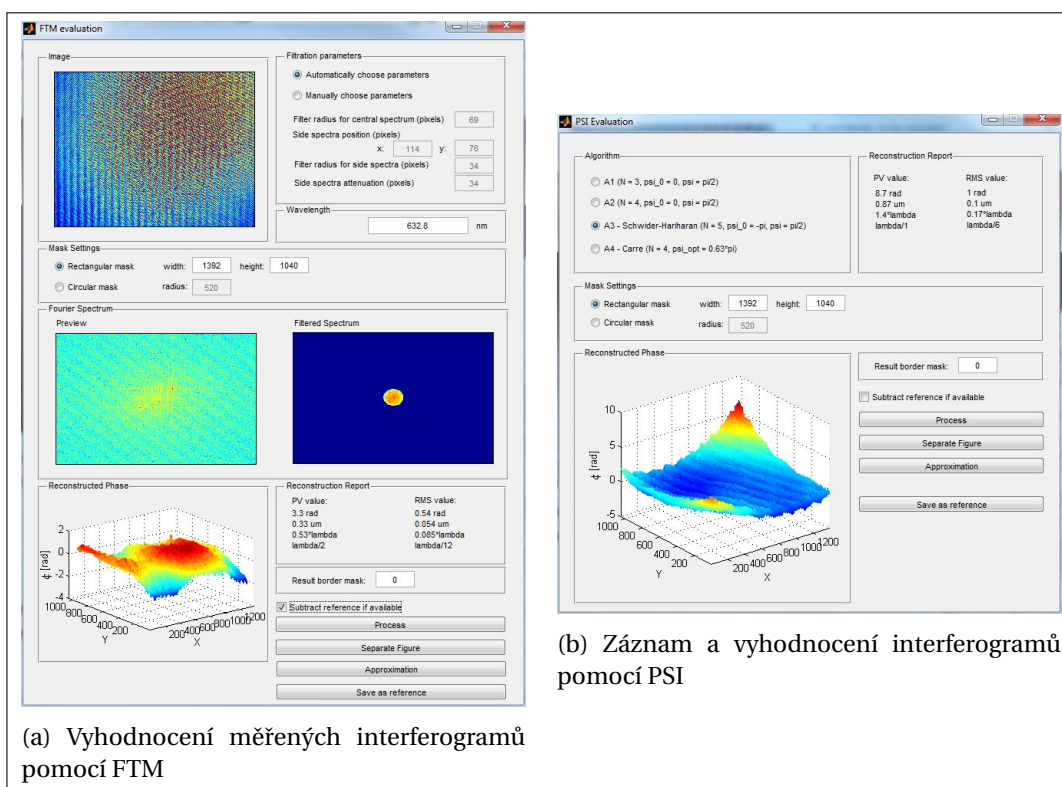
V rámci švýcarského stipendijního programu SCIEX-NMS^{ch} (Scientific Exchange Programme between Switzerland and the New Member States of the EU) a projektu Simple and Flexible Interferometric Asphere Measurement Without Stitching vytvořil autor komplexní řešení pro manipulaci a záznam interferenčního pole při měření asférických ploch pomocí Twyman-Greenova interferometru a fázového modulátoru světla. Kromě samotného adresování modulátoru a modulační fáze požadovaným způsobem bylo třeba automatizovaně vyhodnocovat fázi pole.

Na obr. 2.20 je zobrazeno grafické prostředí základní aplikace pro provádění analýzy, které byly založeny na přístupech popsáných v předchozích částech práce. Na obrázku jsou zvýrazněny tematické oblasti jak pro nastavení parametrů použité kamery, tak fázového modulátoru světla. Stěžejní je oblast vyhodnocení pomocí metod FTM a PSI. Samotná prostředí pro jednotlivé typy vyhodnocení jsou poté ukázána na obr. 2.21. První část metody FTM zobrazuje zaznamenaný interferogram, uživatel může volit mezi automatizovanou nebo manuální detekcí boční části frekvenčního spektra a typ masky. Po vyhodnocení jsou ihned k dispozici parametry rekonstrukce (PV



Obrázek 2.20: Grafické prostředí programu pro komplexní ovládání prostorového modulátoru světla a záznam a vyhodnocení interferogramu pomocí FTM a PSI

a RMS hodnoty) a je možné provést další zpracování (aproximace, export rekonstruované fáze do samostatného grafického okna, apod.). V případě PSI uživatel nejprve volí algoritmus zaváděného fázového posuvu, dle kterého je modifikován způsob modulace adresovaných dat na fázový modulátor. Ze zaznamenaných dat je následně rekonstruována fáze a uživatel může provést obdobné kroky pro další použití dat jako v předchozím případě FTM.



(a) Vyhodnocení měřených interferogramů pomocí FTM

(b) Záznam a vyhodnocení interferogramů pomocí PSI

Obrázek 2.21: Části programu pro záznam a vyhodnocení interferogramů pomocí FTM a PSI

3 Transformace vlnového pole v optice

Vlnové pole a jeho šíření v prostoru je obecně dáno několika základními parametry. Předpokládáme-li, že se prostředím daného materiálu šíří rovinná elektromagnetická vlna relativně malé intenzity, tedy samotná intenzita záření neovlivňuje materiálové parametry prostředí (uvažujeme tedy lineární prostředí), potom bude záření charakterizováno svou amplitudou (intenzitou), frekvencí (vlnovou délkou), polarizací a směrem šíření. Tyto parametry lze vhodným způsobem měnit a transformovat tak procházející vlnové pole. Zpravidla je k tomu využíváno tzv. optických prvků. Optický prvek tedy můžeme obecně popsat jako předem materiálově a geometricky definovaný element, který slouží k transformaci vlnového pole.

Optické prvky jsou komponenty, které určitým (definovaným) způsobem transformují optické záření. Kombinací a umístěním prvků do správných relativních (vzájemných) vzdáleností můžeme vytvořit takovou optickou soustavu, která bude modifikovat vstupní záření právě jedním požadovaným způsobem. Tato transformace pole může být využívána k různým účelům — zobrazování, osvětlování, směřování světelných svazků a podobně.

Abychom mohli správně definovat optickou soustavu a její vlastnosti, tj. požadovanou transformaci vlnového pole, je třeba umět popsat základní parametry optického záření (světla). Vlnovou teorií a z ní odvozenou geometrickou se zabývaly předcházející kapitoly této práce.

Při optickém návrhu jsou na prvním místě hodnoceny optické soustavy z pohledu geometrické optiky. Nástroje potřebné k řešení problémů geometricko-optické transformace pole byly představeny dříve – Fresnelovy vztahy, zákon odrazu a lomu, eikonál a eikonálová rovnice. Na tomto místě zdůrazníme několik základních pojmů, pomocí kterých můžeme záření geometricko-opticky charakterizovat, a to: optická dráha, paprsek, vlnoplocha, polarizace:

- Optická dráha *OPD* mezi dvěma body A a B je dána křivkovým integrálem [1, 13–16]

$$OPD = \int_A^B n(s) ds, \quad (3.1)$$

kde $n(s)$ je index lomu daného prostředí závislý na poloze s a ds je element křivky. Je tedy patrné, že optická dráha je jednoznačně závislá na indexu lomu prostředí. V principu je to veličina odpovídající vzdálenosti, kterou by světlo urazilo ve vakuu.

- Paprsek je definován jako křivka, jejíž tečna má v libovolném bodě směr šíření elektromagnetické energie (směr Poyntingova vektoru v daném bodě). V homogenním izotropním prostředí, které je v klasické praxi nejčastější, je paprskem přímka.
- Vlnoplocha je plocha konstantní fáze v daný časový okamžik. V homogenním izotropním prostředí je kolmá na paprsky a optická dráha mezi dvěma vlnoplochami, které přísluší stejnému svazku záření, je vždy stejná pro všechny paprsky.
- Pojem polarizace můžeme zjednodušeně vysvětlit jako termín vycházející z elektromagnetické teorie světla, který hovoří o směru, ve kterém kmitá vektor intenzity elektrického pole [17].

Změnu v šíření záření, tj. variaci ve směru paprsků a změnu tvaru vlnoplochy, můžeme obecně připsat změně v indexu lomu daného materiálového prostředí. Ve většině případů klasické praxe (tj. předpokládáme-li prostředí bez nábojů a proudů a záření malých intenzit) můžeme rozlišit změny indexu lomu spojité a nespojité (skokové). Spojitým případem je např. gradientní optika, kdy je v daném optickém prvku změna indexu lomu vyjádřena spojitou funkcí polohy. Známe-li funkci rozložení indexu lomu, trasování paprsku je poté založeno na řešení eikonálové rovnice (2.76), resp. (2.77),

$$[\nabla S(\mathbf{r})]^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (3.2a)$$

$$\left[\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial z} \right]^2 = n^2(x, y, z), \quad (3.2b)$$

kde $S(\mathbf{r})$ je eikonál [1, 13–16] a $n(x, y, z) = n(\mathbf{r})$ je index lomu prostředí závislý na poloze. Nespojitým případem je většina klasických optických prvků z homogenního materiálu (čochky, zrcadla, hranoly, apod.), kde šíření paprsků (změnu směru při průchodu rozhraním nebo odrazu) můžeme popsat zákonem lomu a odrazu (2.61) a (2.58),

$$\mathbf{n}_t = \frac{n_i}{n_t} \mathbf{n}_i - \mathbf{n} \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \right)^2 [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i)^2]} + \frac{n_i}{n_t} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i) \right\}, \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{n}_r = \mathbf{n}_i - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i), \quad (3.3b)$$

kde \mathbf{n}_i , \mathbf{n}_r a \mathbf{n}_t značí normálové vektory vlnoplochy dopadající, odražené a procházející (tj. směrové vektory paprsků), n_i , n_r a n_t jsou indexy lomu prostředí v infinitezimálně malé oblasti kolem rozhraní, odkud paprsek dopadá, kam se odráží a kam prochází, \mathbf{n} je normálový vektor rozhraní. Známe-li tvar rozhraní, můžeme v jeho každém místě určit normálový vektor (jednotkový vektor směrově odpovídající gradientu plochy), a tedy i směrové parametry šíření záření při průchodu tímto rozhraním. Principu této transformace využívá většina optických prvků. Polarizační transformaci můžeme popsat Fresnelovými vztahy (2.66)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}} [\mathbf{n}_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i) - \mathbf{E}_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i)] + \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} [\mathbf{n}_r(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_r) - \mathbf{E}_r(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_r)] \\ - \sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\mu_t}} [\mathbf{n}_t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_t) - \mathbf{E}_t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_t)] = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

a (2.67)

$$\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i + \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_t) - (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_t) = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

kde ε je permitivita prostředí, μ je permeabilita prostředí a \mathbf{E} je vektor elektrické intenzity pole.

Obecně tedy lze říci, že transformaci světelného záření v klasické optické praxi můžeme ovlivnit změnou indexu lomu, a to buď spojitou, nebo skokovou. Vstupní záření dopadá na optický prvek, který je charakterizován rozdílnými materiálovými vlastnostmi než okolní prostředí (index lomu, disperze, apod.). Poté dochází k vzájemné interakci a modifikaci záření.

Vedle klasického geometricko-optického přístupu lze pro transformaci vlnového pole využít teorii difrakční, která byla také představena v předchozích kapitolách práce. Difrakčních jevů je využíváno v případě tzv. difrakčních optických prvků (z angl. DOE – diffractive optical elements) [80, 81]. Takový prvek si můžeme v jednoduchosti představit jako planoparalelní desku, která má na jednom svém rozhraní nanesenu například nepropustnou vrstvu, ve které jsou vyryté vzory předem definovaného tvaru takovým způsobem, aby se pole, které projde touto deskou, v důsledku difrakčních jevů vzniklých na difrakční struktuře (masce) transformovalo požadovaným způsobem. Šíření pole je v tomto případě velmi přesně popsáno Sommerfeldovým řešením pro difrakci na rovinném stínítku (2.110),

$$\phi(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_A \phi(M) \frac{\exp(ikr_{PM})}{r_{PM}} \cos \alpha \, dA, \quad (3.6)$$

kde $\phi(M)$ je pole v rovině stínítka v bodě M , $\phi(P)$ je výsledné pole ve vyšetřovaném bodě P , $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo, λ je vlnová délka, r_{PM} je vzdálenost mezi body M a P , α je úhel mezi spojnicí r_{PM} a směrem osy z , leží-li stínítka v rovině (x, y) , A značí aperturu, přes kterou integrace probíhá. Jak bylo ukázáno, Sommerfeldův integrál lze ve vhodných případech zjednodušit aproximativním řešením – Fresnelovou (2.114) nebo Fraunhoferovou aproximací (2.117). Kromě řešení zmíněných integrálů lze ke generaci struktury DOE využít popis šíření pomocí úhlového spektra rovinných vln (2.98).

V následující části této kapitoly se budeme zabývat optickými prvky s konstantními charakteristikami a aspekty důležitými k vhodnému popisu šíření (transformace) vlnového pole optickou soustavou. Zejména představíme základy matematického popisu asférických ploch klasických optických prvků a základy generace difraktivních optických prvků, které mohou v některých případech klasické prvky nahradit. V další části kapitoly se poté zaměříme na vybrané partie týkající se aktivních optických prvků, zejména kapalinových membránových čoček a fázových modulátorů světla. Kombinované (hybridní) optické soustavy, na které bude zaměřena následující kapitola této práce, ve kterých jsou implementovány aktivní optické prvky, mohou bez na přesnost náročných mechanických pohybů měnit parametry zobrazení, korigovat jeho aberace, může docházet k miniaturizaci takových soustav, a tedy celkové optimalizaci zobrazovacího procesu pro širší oblast působnosti, než kterou nabízí tradiční optické systémy s optickými prvky fixních parametrů.

3.1 Optické prvky a soustavy pro transformaci vlnového pole

3.1.1 Optické prvky s konstantními charakteristikami

Základní dělení a charakteristiky

Optické prvky s konstantními optickými charakteristikami můžeme obecně dělit do několika základních kategorií dle jejich materiálových nebo zobrazovacích vlastností.

Podle propustnosti využíváme prvky

- transmisní (propustné),
- reflexní (odrazné);

dle tvaru optického rozhraní poté

- prvky s rovinnými rozhraními – např. optické hranoly, planoparalelní desky, nebo rovinná zrcadla,
- prvky sférické – zrcadla, čočky bikonvexní, bikonkávní, konvexkonkávní, plankonvexní, plankonkávní,
- prvky s rotačně symetrickými asférickými rozhraními,
- prvky s obecně nesymetrickými rozhraními (tzv. free-form plochy nebo plochy vyššího stupně).

Z pohledu difrakce jsou všechny zmíněné prvky svým způsobem

- prvky difraktivní,

protože jejich apertura není nekonečná. Obrazem bodového zdroje světla potom v důsledku difrakce není bod ale jisté prostorové rozložení intenzity v obrazové rovině – tzv. rozptylová funkce bodu (PSF – z angl. point spread function). Nicméně pod pojmem difraktivní optický prvek (DOE)

budeme rozumět optický prvek, který provádí požadovanou změnu procházejícího nebo odraženého vlnového pole primárně v důsledku interakce vlnového pole s danou difrakční strukturou. Pro popis transformace vlnového pole je v tomto případě třeba uvažovat vlnové vlastnosti světla a použít skalární či vektorovou teorii difrakce, na rozdíl od klasických refraktivních či odrazných optických prvků, kde transformaci tvaru procházející vlnoplochy lze dobře popsat pomocí zákonů geometrické optiky (zákon odrazu a lomu, eikonálová rovnice).

Uspořádáním zmíněných optických prvků do vhodného pořadí a volbou jejich jednotlivých materiálů je možné zkonstruovat optickou soustavu, která provádí požadovanou transformaci optického záření. Změnu parametrů optické soustavy (např. změna zvětšení zobrazovací optické soustavy) tvořené z klasických optických prvků s fixními parametry lze poté realizovat změnou vzájemné polohy jednotlivých optických prvků. Každá optická soustava vykazuje odchylky od ideálního zobrazení – tzv. aberace optické soustavy. Tyto odchylky lze charakterizovat a kvantitativně popsat pomocí teorie paprskových a vlnových aberací [1, 13–16, 82]. Ucelenou teorií aberací se zde nebudeme zabývat, protože to není cílem této práce, odkážeme čtenáře ale na dostupnou literaturu, kde je problematika velmi dobře probrána.

Pro obecnou představu vzniku aberací optických soustav zmiňme ale, že vznikají důsledkem volby tvarů optických rozhraní, jejich umístěním v rámci optické soustavy, závislosti indexu lomu materiálu na vlnové délce (disperze), vlivem umístění předmětu do míst, pro které nebyla optická soustava optimalizována, a v neposlední řadě také vlivem nepřesností při justáži. Například samotná jedna sférická čočka nemůže ze své geometrické podstaty zobrazit bod jako bod. Totéž platí pro další optické prvky. Vhodným optickým návrhem (optimalizací tvarů, materiálů a umístěním optických prvků) jsme schopni aberace poměrně dobře potlačit, ale někdy je situace natolik komplikovaná, že by výsledná soustava sestávala z desítek sférických a rovinných optických prvků, nebo by nebylo možné některé aberace potlačit vůbec.

Problém potlačení aberací částečně řeší asférické prvky. V posledních letech se tyto komponenty, zejména rotačně symetrické, staly velmi aktuální a čím dál více se uplatňují v závislosti na zvyšujících se požadavcích na kvalitu zobrazení optických soustav v sériové produkci. Také výrazně stoupá schopnost automatizované výroby těchto prvků.

Všechny výše zmíněné optické komponenty jsou s fixními parametry, a tedy optická soustava, která takové prvky obsahuje, nemůže aktivně modifikovat záření a jeho vlastnosti (amplitudu nebo fázi, frekvenci záření, polarizační vlastnosti, atp.). Změnu parametrů optické transformace lze částečně provádět mechanickým pohybem některých částí. Nicméně tento pohyb je logicky omezen a přináší s sebou i další komplikace (komplexnost návrhu optické soustavy, nejistoty v určení polohy vyplývající z mechanického posuvu, apod.). Od určité hranice nelze tyto soustavy miniaturizovat, což je v současnosti trendem ve velkém množství komerčních aplikací. Dále je omezující časová odezva změny parametrů zobrazení.

Matematické vyjádření asférických optických ploch

Zabývejme se nyní charakterizací a matematickým popisem asférických ploch v optice. Praxe se v rámci této problematiky řídí normou ISO 10111-12 [83]. Předpokládejme, že osa z je optickou osou. Poté je asférická plocha dána obecně vztahem $z = f(x, y)$.

Základními plochami mohou být [83]:

- plochy druhého řádu, speciálně poté
 - středové kvadriky a parabolické plochy dané obecným vztahem

$$z = f(x, y) = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + \kappa_x)(c_x x)^2 - (1 + \kappa_y)(c_y y)^2}}, \quad (3.7)$$

kde $c_x = 1/R_x$, $c_y = 1/R_y$ jsou vrcholové křivosti v rovinách (z, x) , (z, y) , R_x , R_y jsou odpovídající vrcholové poloměry křivosti, κ_x a κ_y jsou kónické konstanty. Protíná-li

plochu $z = f(x, y)$ rovina $y = 0$, resp. $x = 0$, poté v závislosti na hodnotě κ_y , resp. κ_x , vznikají průniky typů:

- * $\kappa > 0$ zploštělá elipsa,
- * $\kappa = 0$ kružnice,
- * $-1 < \kappa < 0$ protáhlá elipsa,
- * $\kappa = -1$ parabola,
- * $\kappa < -1$ hyperbola.

Bude-li platit speciální případ, kdy $c_x = c_y = c$, $\kappa_x = \kappa_y = \kappa$ a $\rho^2 = x^2 + y^2$, dostáváme vztah pro základní rotačně symetrickou plochu

$$z = f(\rho) = \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + \kappa)c^2\rho^2}}. \quad (3.8)$$

Pro $c_x = 0$ nebo $c_y = 0$ bychom získali základní plochu cylindrickou.

Dalším zástupcem základních ploch druhého řádu jsou poté

- kuželové plochy, které můžeme zapsat jako

$$z = f(x, y) = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \quad (3.9)$$

kde a, b, c jsou reálné konstanty. Pro $a \neq b$ dostáváme kužel z eliptickým průřezem, pro $a = b$ s průřezem kruhovým.

Další z kategorie obecných základních ploch norma jmenuje

- plochy vyššího stupně, zejména
 - polynomické plochy

$$z = f(x, y) = A_4x^4 + B_4y^4 + A_6x^6 + B_6y^6 + \dots + C_3|x|^3 + \dots + D_3|y|^3 + \dots \quad (3.10)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(A_{2i+2}x^{2i+2} + B_{2i+2}y^{2i+2} + C_{2i+1}|x|^{2i+1} + D_{2i+1}|y|^{2i+1} \right),$$

kde A_i, B_j jsou koeficienty polynomického rozvoje;

- torické plochy, které vzniknou rotací definující křivky v rovině okolo osy ležící v téže rovině. Například rovnice torické plochy s definující křivkou $z = g(x)$ v rovině (x, z) a osou rotace rovnoběžnou s osou x může být popsána vztahem

$$z = f(x, y) = R_y \mp \sqrt{[R_y - g(x)]^2 - y^2}, \quad (3.11)$$

kde R_y je z -ová souřadnice, ve které rotační osa protíná osu z , a

$$g(x) = \frac{x^2}{R_x \left[1 + \sqrt{1 - (1 + \kappa_x) \left(\frac{x}{R_x} \right)^2} \right]}.$$

- kombinované plochy, které vzniknou modifikací základní plochy přidáním vhodné mocninné řady, tedy

$$z = f(x, y) + f_1(x, y), \quad (3.12)$$

kde $f(x, y)$ je některá z výše zmíněných základních ploch a $f_1(x, y)$ je vhodná mocninná řada vyjadřující odchylky od základní plochy.

V optické praxi se pro standardní vyjádření asférických rotačně symetrických ploch poté využívá forma kombinovaná, tedy

$$\begin{aligned} z &= f(\rho) + f_1(\rho) \\ &= \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + \kappa)c^2\rho^2}} + \sum_{i=3}^N A_i \rho^i, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ je průvodič bodu v rovině (x, y) , $c = 1/R$ je vrcholová křivost, R je vrcholový poloměr křivosti, κ je kónická konstanta a A_i jsou koeficienty rozvoje, N je stupeň rozvoje. Často se poté také hovoří o tzv. sudých aférách, kdy je přidáný polynomický rozvoj dán vztahem

$$f_1(\rho) = \sum_{m=0}^M A_{2m+4} \rho^{2m+4}. \quad (3.14)$$

Výše zmíněná polynomická modifikace základní kvadriky (3.13) je velmi často používaná, o všem z pohledu numerické stability a kvality vyjádření plochy není příliš vhodná. Bázové funkce rozvoje odchylky asféry od základní rotační kvadriky nejsou ortogonální, mají podobný tvar a jednotlivé členy působí vzájemně proti sobě – navzájem se kompenzují. I pro velmi malé hodnoty každý z členů A_i přispívá v důsledku vysoké mocniny u ρ velmi velkou numerickou hodnotou k výsledné ploše. Díky výpočtům v aritmetice konečné přesnosti (výpočet na počítačích) tak dochází k výrazným ztrátám několika platných cifer. Neortogonálnost způsobuje také komplikace při optimalizaci tvaru plochy. Změna počtu členů řady $f_1(\rho)$ způsobí zásadní modifikaci hodnot koeficientů. Soustava je tak špatně podmíněná, je nutný vysoký počet platných cifer, koeficientům navíc nelze přiřadit jednoduchý praktický význam.

Zmíněný problém zmírňuje zavedení tzv. Q-polynomů, neboli po jejich tvůrci – Forbesových polynomů [84–88]. Poté může být rotačně symetrická asféra s velkou odchylkou od základní kvadriky (tzv. hluboká asféra) vyjádřena vztahem

$$z = \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + \kappa)c^2\rho^2}} + D_{con}(u), \quad (3.15)$$

kde $u = \rho/\rho_{\max}$ a pro odchylku D_{con} od základní kvadriky platí [84]

$$D_{con}(u) = u^4 \sum_{m=0}^M \alpha_m Q_m^{con}(u^2),$$

kde α_m je koeficient rozvoje a Q_m^{con} je Forbesův Q-polynom pro hluboké asféry definovaný vztahem

$$Q_m^{con}(u^2) = P_m^{(0,4)}(2u^2 - 1), \quad (3.16)$$

kde $P_m^{(0,4)}$ je Jakobiho polynom [9–11], nebo platí rekurentní vztah [85]

$$\begin{aligned} Q_0^{con} &= 1, \quad Q_1^{con} = 6u^2 - 5, \\ \forall m \geq 1: Q_{m+1}^{con} &= (a_m + b_m u^2) Q_m^{con} - c_m Q_{m-1}^{con}, \\ a_m &= -\frac{(2m+5)(m^2+5m+10)}{(m+1)(m+2)(m+5)}, \\ b_m &= \frac{2(m+3)(2m+5)}{(m+1)(m+5)}, \\ c_m &= \frac{m(m+3)(m+4)}{(m+1)(m+2)(m+5)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Mezi základní vlastnosti polynomů Q_m^{con} patří to, že jsou ortogonální na jednotkovém kruhu a to tak, že pro $u = 1$ je $\max\{Q_m^{con}\} = 1$ [84]. Koeficienty mají také jednoznačný praktický význam a jejich jednotky jsou délkové (mm, nm). Velikost jednotlivých koeficientů vyjadřuje odchylku plochy

od základní kvadriky na okraji kruhové apertury, pro $u = 1$. Velkým benefitem je, že polynomiální rozvoj D_{con} nemá vliv na paraxiální zobrazovací vlastnosti (nemění osovou křivost optické plochy). Při změně hodnot koeficientů, například v rámci optimalizačního procesu návrhu plochy, zůstávají paraxiální zobrazovací vlastnosti plochy stejné. Zpravidla je tak možné výrazným způsobem redukovat počet členů polynomického rozvoje asféry.

Dále Forbes odvodil sadu polynomů pro tzv. mělké asféry [84], tedy plochy málo se lišící od základní kvadriky, kterou je v tomto případě vhodně zvolená sférická plocha. Označíme-li $f(\rho_{max})$ jako hodnotu základní sféry na okraji apertury, poté bude vrcholová křivost c_{bfs} této sféry, která prochází vrcholem a okrajem apertury, dána jako $c_{bfs} = 2f(\rho_{max}) / [\rho_{max}^2 + f^2(\rho_{max})]$. Vztah popisující povrch mělké asféry potom můžeme vyjádřit jako [84]

$$z = \frac{c_{bfs}\rho^2}{1 + \sqrt{1 - c_{bfs}^2\rho^2}} + D_{bfs}(u), \quad (3.18)$$

kde $u = \rho/\rho_{max}$ a pro D_{bfs} platí

$$D_{bfs}(u) = \frac{u^2(1 - u^2)}{\sqrt{1 - c_{bfs}^2\rho_{max}^2u^2}} \sum_{m=0}^M \alpha_m Q_m^{bfs}(u^2), \quad (3.19)$$

α_m jsou koeficienty rozvoje a Q_m^{bfs} jsou Forbesovy Q-polynomy pro mělké asféry. Obecně se dají analyticky také vyjádřit, viz [84], ovšem výpočet nebývá numericky tak přesný jako pro případ asfér hlubokých. Výhodnější je užívat netradičního rekurentního vztahu [86]

$$Q_0^{bfs}(u^2) = 1, \quad Q_1^{bfs}(u^2) = \frac{1}{\sqrt{19}}(13 - 16u^2), \quad (3.20)$$

$$\forall m \geq 1: Q_{m+1}^{bfs}(u^2) = \left[P_{m+1}(u^2) - g_m Q_m^{bfs}(u^2) - h_{m-1} Q_{m-1}^{bfs}(u^2) \right] / f_{m+1},$$

kde

$$P_0(u^2) = 2, \quad P_1(u^2) = 6 - 8u^2,$$

$$\forall m \geq 1: P_{m+1}(u^2) = (2 - 4u^2)P_m(u^2) - P_{m-1}(u^2),$$

$$f_0 = 2, \quad f_1 = \sqrt{19}/2, \quad g_0 = -1/2,$$

$$\forall m \geq 2: h_{m-2} = -\frac{m(m-1)}{2f_{m-2}}, \quad g_{m-1} = -\frac{1 + g_{m-2}h_{m-2}}{f_{m-1}},$$

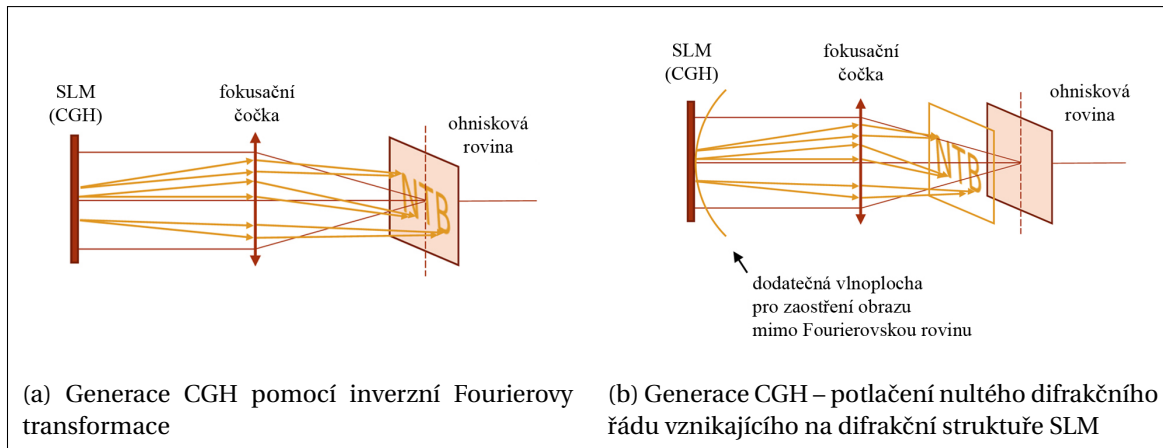
$$f_m = \sqrt{m(m+1) + 3 - g_{m-1}^2 - h_{m-2}^2}.$$

Rozvoj pro mělké asféry má vliv na paraxiální křivost základní kvadriky, tj. při změně hodnot koeficientů α_m se mění osová křivost výsledné plochy. Polynomy byly ale navrženy tak, aby jednoduše umožňovaly vyjádřit střední hodnotu kvadrátu sklonu (derivace) odchylky od základní sféry ve směru její normály. Koeficienty tak nevyjadřují odchylku daného členu od základní plochy, jako u polynomů Q_m^{con} , ale souvisí s normálovou odchylkou. Je tak možné zahrnout do procesu návrhu a optimalizace dané plochy požadavky, které mohou zjednodušit výrobu a testování dané asférické plochy. Také se podstatným způsobem redukuje počet potřebných uchovávaných cifer a zpravidla je možné redukovat počet členů rozvoje.

Přechod mezi jednotlivými bázemi Forbes publikoval v článku [86], rozšíření pro popis free-form ploch poté v pracích [87, 88].

■ Základy generace struktury difraktivních optických elementů

Difraktivní optické prvky (z angl. DOE – diffractive optical elements) jsou prvky konstantních optických vlastností, které rozptylují světlo tak, aby výsledné daným prvkem transformované vlnové



Obrázek 3.1: Schéma generace CGH a potlačení nultého difrakčního řádu vznikajícího na difrakční struktuře SLM

pole splňovalo apriorně kladené požadavky [81, 89, 90]. Například v optické interferometrické metrologii je možné modifikovat referenční vlnoplochu z počáteční sférické na asférickou, a měřit tak velmi přesně tvary povrchů asférických optických prvků (referenční vlna je co nejvíce přizpůsobena testované, a jsou tak redukovány interferenční proužky). K tomu zpravidla slouží tzv. počítačem generované hologramy (z angl. CGH – computer generated holograms) [89, 90]. Princip transformace vlnového pole pomocí difrakčních optických prvků, jak jejich název napovídá, je založen na difrakci na vhodné struktuře, která ovlivňuje procházející pole buď změnou amplitudy, fáze, případně kombinací obou. Nejjednodušší prvek je difrakční mřížka, ale lze generovat i složitější požadovanou změnu transformovaného vlnového pole – holografické difraktivní prvky.

Zabývejme se nyní zjednodušenou situací generace difraktivního optického elementu pomocí počítačem generovaného hologramu. Předpokládejme, že známe rozložení intenzity obrazu, který chceme pozorovat. Cílem je vygenerovat takovou masku pro danou rovinu, která zapříčiní v určité obrazové rovině formaci právě požadovaného rozložení intenzity. Tento případ můžeme aplikovat při použití fázového modulátoru světla, jak bude ukázáno později. Na obr. 3.1a je zobrazena uvažovaná situace. SLM představuje fázový modulátor světla, pro který je třeba fázovou masku (počítačem generovaný hologram – CGH) vygenerovat. S pomocí fokusačního členu (optické soustavy) poté chceme zobrazit požadované rozložení intenzity do ohniskové (obrazové) roviny.

Výše popsaná situace může být snadno řešitelná iterativním algoritmem založeným na Fraunhoferově difrakci. Možný algoritmus prezentoval Hirsch [91], nebo obdobný přístup využili v podobné době Gerchberg a Saxton [92] při rekonstrukci fáze.

Teorie byla představena dříve v této práci. Bylo ukázáno, že Fraunhoferovo řešení difrakční úlohy je úměrné Fourierově transformaci. Dopadá-li na stínítko rovinná vlna a prvky, na kterých nastává difrakce, jsou výrazným způsobem menší, než vzdálenost, ve které pole vyšetřujeme, můžeme výsledné pole určit pomocí vztahu (2.117), platí

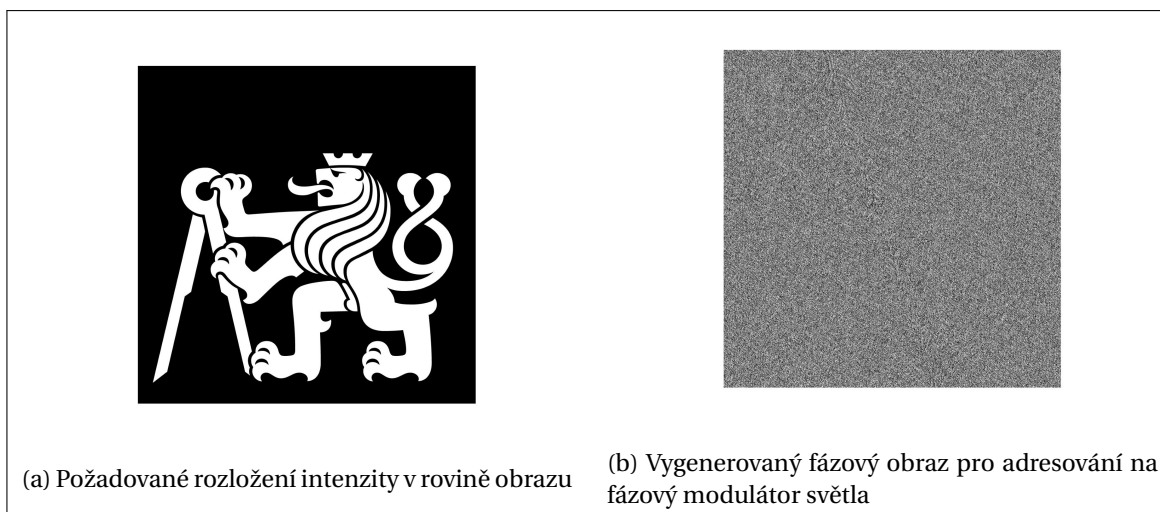
$$\phi(P) = C \iint_A \phi(M) \exp[-ik(px_M + qy_M)] dx_M dy_M, \quad (3.21)$$

kde

$$C = -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikz_P)}{z_P} \exp\left[\frac{ik}{2z_P}(x_P^2 + y_P^2)\right],$$

$\phi(M)$ je pole v rovině stínítka, $\phi(P)$ je pole v místech, kde situaci vyšetřujeme, $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo, λ je vlnová délka, $p = x_P/z_P$, $q = y_P/z_P$, $P = [x_P, y_P, z_P]$, $M = [x_M, y_M, z_M]$. Je zřejmé, že pole v rovině pozorování je úměrné Fourierově transformaci.

Problém generace difrakčního pole v rovině SLM může být tedy formulován na základě výše představených vztahů pro Fraunhoferovu difrakci. Vztah mezi rozložením amplitudy v předěťové a obrazové rovině je úměrný Fourierově transformaci. Známe-li rozložení komplexní am-



Obrázek 3.2: Generace počítačem generovaného hologramu

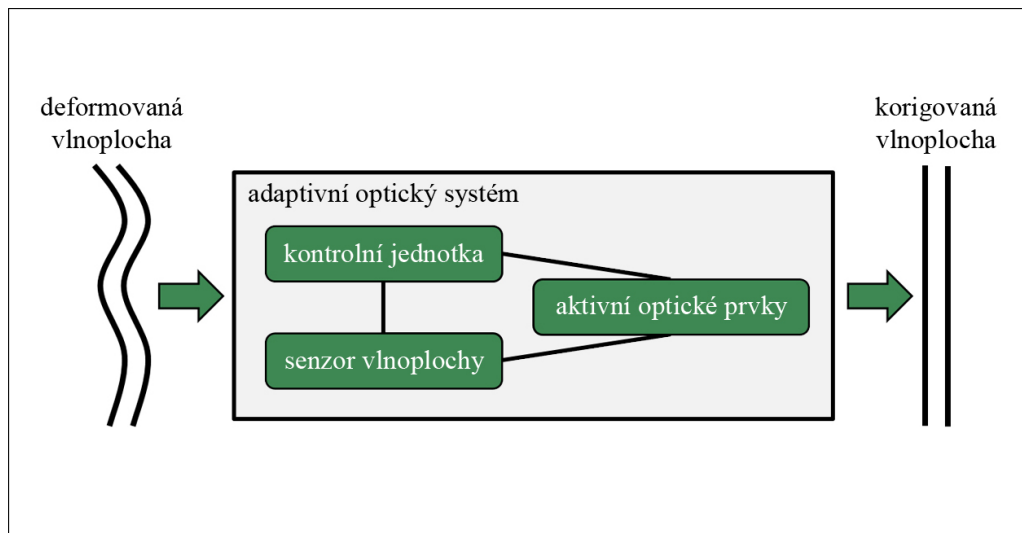
plitudy v obrazové rovině, snadnou modifikací Fourierovy transformace můžeme určit rozložení v rovině předmětové. Ve výše popsaném případě neznáme přímo rozložení amplitudy nebo fázovou masku v obrazové rovině. Je ale dáno rozložení intenzity, kterou můžeme formulovat jako $I = K|\phi(P)|^2$, kde K je konstanta a $\phi(P)$ rozložení komplexní amplitudy. Algoritmus v první iteraci volí amplitudu rovnou zadané intenzitě. Iterativním postupem poté pomocí přímé a inverzní Fourierovy transformace hledá rozložení amplitudy (resp. fázovou masku) v předmětové rovině takové, které generuje požadované rozložení intenzity v rovině obrazové.

V jednotlivých krocích může být algoritmus generace pole (fázové masky) v rovině SLM popsán následovně [89–92]:

1. Obraz (nebo fázová maska), který chceme zobrazit, je zvolen jako první rozložení amplitudy cílového pole.
2. Fourierovou transformací tohoto rozložení amplitudy je vypočteno frekvenční spektrum.
3. Spektrum je upraveno vzhledem k vhodně voleným podmínkám. Například je možné využít omezení, kdy rozložení amplitudy musí být rovnoměrné [89].
4. Výpočet pokračuje inverzní Fourierovou transformací upraveného spektra, jejíž výsledek generuje pole v prostorové oblasti.
5. Na vypočtené pole v prostorové oblasti je následně použita další vhodná podmínka, kterou je ve zmíněném případě vstupní rozložení amplitudy. Poli tedy přiřadíme takové rozložení amplitudy, které odpovídá požadovanému výstupu, aniž bychom ale změnili fázi [89].
6. Takto vypočtené pole je vstupem pro další iteraci, dokud není splněna volená tolerance na rozdíl mezi generovaným a požadovaným rozložením intenzity.

Na obr. 3.2 je ukázána intenzita a odpovídající difrakční obrazec. Adresujeme-li takto generovanou fází na fázový modulátor světla, můžeme ve Fourierově rovině (v ohniskové rovině zobrazující optické soustavy) pozorovat zadané rozložení intenzity.

Poznamenejme na tomto místě ještě fakt velmi často řešený při použití fázového modulátoru světla. V důsledku pixelové struktury modulátoru se tento aktivní optický prvek chová mimo jiné jako difrakční mřížka. Ve Fourierovské rovině poté lze pozorovat parazitní nultý difrakční řád. Na obr. 3.1b je ukázán principiální způsob, jak můžeme modifikovat výše zmíněnou proceduru a potlačit tak vliv nultého difrakčního řádu. Pokud k vygenerované fázi zahrneme modulaci odpovídající defokusující sféře, poté bude generovaný obraz posunut do místa, které bude úměrné poloměru křivosti defokusující sféry. Maximum nultého difrakčního řádu ovšem zůstane v původní



Obrázek 3.3: Principiální schéma adaptivního optického systému

poloze, protože poloha hran pixelů se nijak nezmění. Tímto postupem lze snadno potlačit vliv nultého difrakčního řádu a v posunuté rovině pozorovat čistý generovaný obraz.

Experimentální realizace generace difrakční struktury pro adresování fázového modulátoru světla bude představena v následující kapitole této práce.

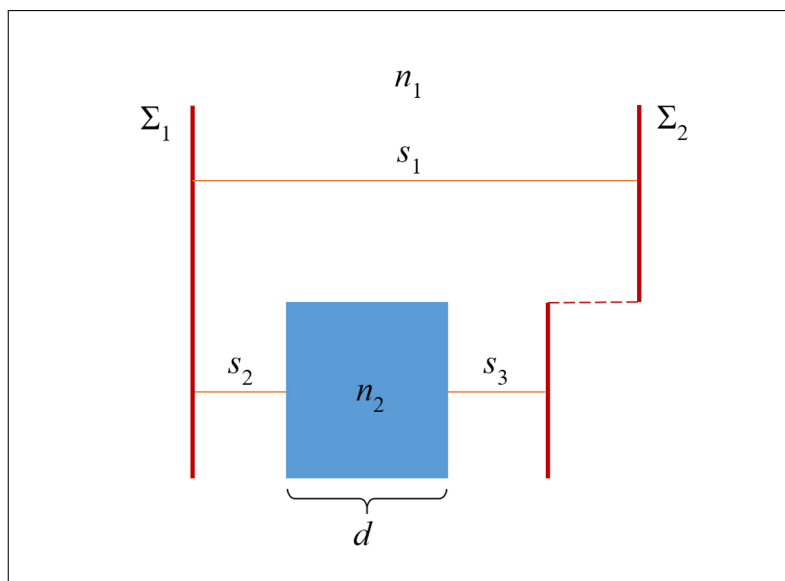
3.1.2 Optické prvky s proměnnými charakteristikami

Optické prvky s proměnnými optickými parametry, nebo také aktivní optické prvky, jsou charakteristické možností předem definované změny vlastností optického zobrazení s minimálními mechanickými nebo časovými nároky. Obecně jsou schopny prostorově měnit geometrický tvar funkčních ploch (např. ploch čoček, zrcadel) a prostorové rozložení indexu lomu, a tím přímo ovlivňovat světelné záření, které daným prostředím prochází nebo které se odráží od funkčních ploch daného prvku.

Myšlenku aplikace aktivních optických prvků můžeme datovat do 60. let 20. století, kdy H. W. Babcock r. 1953 poprvé publikoval teoretickou práci zabývající se korekcí vlnoploch pomocí adaptivní optiky v astronomii [93]. Adaptivní optický systém (viz obr. 3.3) se obecně skládá ze tří základních komponent: senzoru vlnoplochy, který snímá příchozí deformovanou vlnoplochu; kombinované optické soustavy s aktivními optickými prvky, které transformují příchozí záření; a řídicí jednotky, která celý proces iterativně řídí a adaptuje. Dochází tak ke korekci příchozí vlnoplochy a lze docílit kvalitního optického zobrazení, které by v případě použití klasické optiky nebylo možné. Od prvního uvedení principu adaptivní optiky došlo k prudkému rozvoji v oblastech výzkumu, vývoje a aplikací aktivních optických prvků. V posledních letech se začínají tyto komponenty uplatňovat např. v oblastech inspekční techniky, záznamu dat, spotřební elektronice, medicíně (korekce zraku, zrakové simulátory, zobrazovací a diagnostické optické systémy), optické mikroskopie, komunikace ve volném prostoru, laserových technologiích, holografii a dalších [81, 94–104].

Zabývejme se nyní případem aktivních optických prvků, které jsou založeny na změně tvaru plochy rozhraní mezi dvěma optickými prostředími s různými optickými vlastnostmi (rozhraní mezi dvěma různými optickými materiály s různým indexem lomu). Vyjádříme-li rozhraní mezi dvěma prostředími o indexech lomu n_i a n_t funkcí $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}(\xi)) = 0$, kde \mathbf{r} představuje polohový vektor, a tedy funkční závislost na poloze, a \mathbf{p} je vektor dalších parametrů závislých na proměnné ξ (např. čas), poté jednotkový normálový vektor daného rozhraní můžeme vyjádřit jako [9–11]

$$\mathbf{n}(\xi) = \frac{\nabla F(\mathbf{r}, \mathbf{p}(\xi))}{|\nabla F(\mathbf{r}, \mathbf{p}(\xi))|}. \quad (3.22)$$



Obrázek 3.4: Šíření vlnoplochy prostředím s variací materiálu

Normálový vektor rozhraní je tedy proměnný v závislosti na proměnné ξ . Dosazením do zákona odrazu, lomu, nebo Fresnelových vztahů můžeme charakterizovat závislost směrových charakteristik transformovaného záření daným rozhraním na proměnné ξ , a následně vlastnosti zobrazení daným optickým elementem.

Aktivními prvky, které využívají výše popsaný případ změny tvaru rozhraní mezi dvěma prostředími, jsou např. deformovatelná zrcadla [94–100, 105–109] nebo aktivní čočky [101–103, 110–116]. Pomocí deformovatelných zrcadel můžeme kontrolovaně ovlivňovat odražené záření, kdežto u aktivních čoček transformujeme záření procházející. V adaptivních systémech poté nachází uplatnění oba dva typy těchto komponent v závislosti na pozici v daném systému.

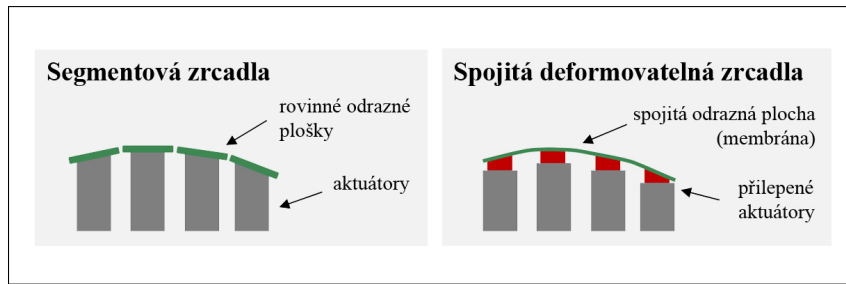
Případ spojitě změny indexu lomu v daném materiálu lze nejlépe charakterizovat pomocí optické dráhy mezi dvěma vlnoplochami. Jak bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, optická dráha OPD daná vztahem (3.1) (z diferenciálního pohledu suma součinů elementů dráhy paprsku a hodnot indexu lomu v daném místě) je pro daný svazek paprsků mezi dvěma vlnoplochami konstantní (v izotropním prostředí). Dojde-li ke změně rozložení indexu lomu v prostředí, musí dojít i ke změně fáze procházejícího vlnového pole. Situace je schematicky znázorněna na obr. 3.4 pro případ skokové změny. Za přítomnosti spojitě variace je situace obdobná. Vlnoplocha Σ_1 prochází homogenním izotropním prostředím indexu lomu n_1 , až dorazí k variaci materiálu charakterizované indexem lomu n_2 (prostorové rozložení variace je patrné z obr. 3.4, předpokládejme opět homogenní izotropní prostředí). Optická dráha odpovídající úsečce s_1 bude $OPD_1 = n_1 s_1$. Optická dráha v místech změny bude $OPD_2 = n_1(s_2 + s_3) + n_2 d$. Budeme-li znát vzdálenosti s_1 , s_2 a d , dostaneme z podmínky rovnosti optických drah mezi dvěma vlnoplochami příslušejícím jednomu svazku (viz definice vlnoplochy v úvodu kapitoly), tj. $OPD_1 = OPD_2$, pro hodnotu s_3 výraz $s_3 = s_1 - s_2 - d \frac{n_2}{n_1}$.

Výše popsaného principu deformace vlnoplochy změnou indexu lomu využívají například akustické aktivní čočky [103] nebo tzv. fázové modulátory světla pracující na bázi tekutých krystalů [81, 104, 107, 117, 118].

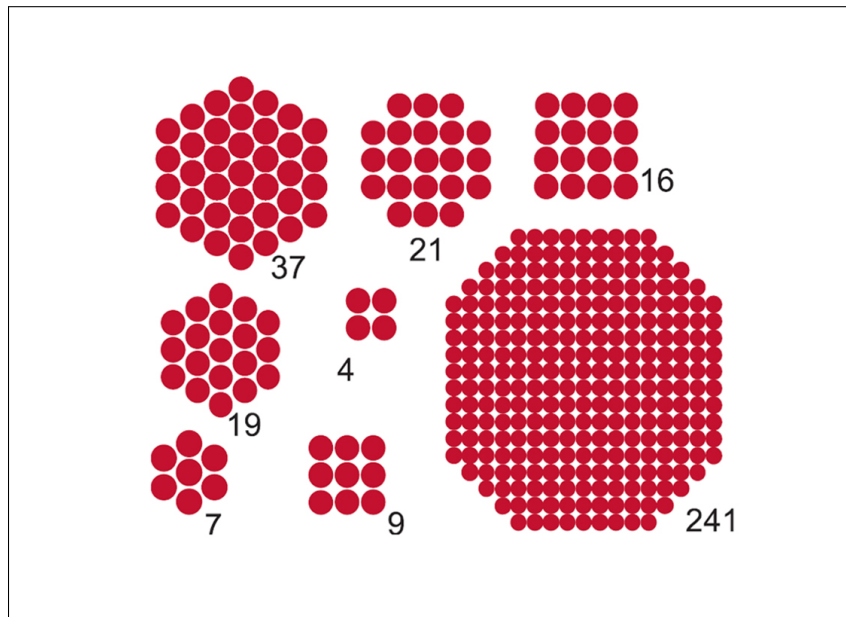
■ Deformovatelná zrcadla

Deformovatelná zrcadla [94–100, 105–109] jsou aktivní optické prvky, které modifikují příchozí záření pomocí změny tvaru reflexní vrstvy. Existuje celá řada principů, na kterých je tato změna tvaru založena. Jako příklad jmenujme:

- zrcadla mechanicky deformovatelná pomocí aktuátorů (např. piezoelektrických),



Obrázek 3.5: Princip fungování segmentových a mikromechanických membránových zrcadel



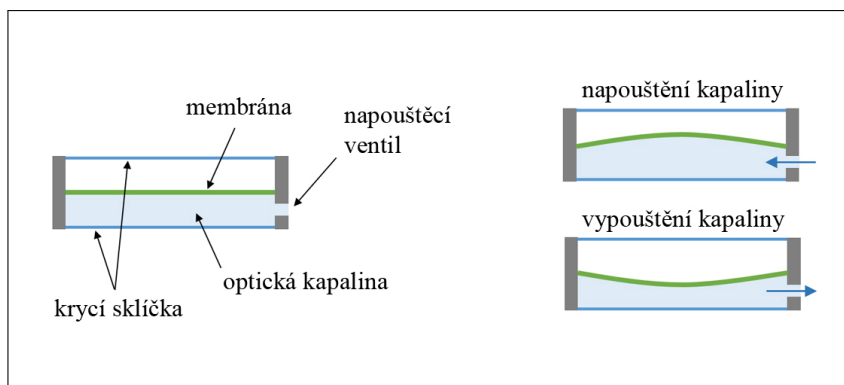
Obrázek 3.6: Čtvercová a hexagonální rozložení aktuátorů [106]

- mikromechanická membránová zrcadla,
- zrcadla jako mikro-elektro-mechanické systémy (tzv. MEMS).

Od způsobu provedení deformace se odvíjí typy a použití těchto zrcadel. Princip fungování mechanicky deformovatelných zrcadel je velmi jednoduchý, viz obr. 3.5. Aktuátory jsou připevněny k jednotlivým segmentům odrazné plochy nebo spojitě membrány a změnou prostorové polohy a orientace dochází k deformaci odrazné plochy jako celku. Na levé části obr. 3.5 je ukázáno schéma segmentových zrcadel, která byla často využívána např. v astronomii [105–108]. Membránová deformovatelná zrcadla, jejichž princip je schematicky ukázán na pravé části obr. 3.5, jsou využívána v aplikacích, kde není třeba tak velkého rozsahu deformace vzhledem k použití membrány. Existuje celá řada rozložení aktuátorů, např. ve čtvercových polích, hexagonálních polích apod. viz obr. 3.6. Jelikož je v praxi nejvíce používáno kruhových apertur, jeví se hexagonální rozložení jako nejefektivnější [106].

Velmi často jsou používány feroelektrické aktuátory vyráběné z keramických materiálů založené na inverzním piezoelektrickém nebo elektrostričném efektu [106]. Inverzní piezoelektrický jev popisuje deformaci elementu v lineární závislosti na působícím elektrickém poli, zatímco elektrostričný jev je poté charakterizován deformací nevodiče nebo dielektrika v závislosti kvadratické.

MEMS deformovatelná zrcadla využívají obecného Coulombova zákona elektrostatičky [2, 3, 6] ($F = Q_1 Q_2 / (4\pi\epsilon_0 d^2)$, kde F je síla, Q_1 a Q_2 jsou velikosti dvou bodových nábojů, ϵ_0 je permitivita vakua a d je vzdálenost mezi danými dvěma bodovými náboji), který popisuje velikost síly působící mezi dvěma bodovými náboji jako nepřímou kvadratickou závislost na vzdálenosti mezi



Obrázek 3.7: Kapalinová membránová čočka

danými náboji. Budou-li mít tedy dvě elektrody (elektrostatické aktuátory) náboje Q_1 a Q_2 , bude mezi nimi působit síla F dle výše zmíněného vztahu, a může tak dojít k deformaci, tj. ke změně jejich vzájemné vzdálenosti.

Komerčně je nabízena celá řada deformovatelných zrcadel založených na různých principech [95–100]. Například firma Imagine Optic [95] je distributor zrcadel o průměrech od 7 do 500 mm s deformací do 60 μm . Společnost Flexible Optical [96] nabízí piezoelektrická a mikromechanická membránová deformovatelná zrcadla o aperturách 15 mm, 30 mm a 50 mm s rozsahem deformace do 12 μm . Komerčně dostupná zrcadla firmy Thorlabs [97] jsou k dispozici s 10mm aperturami, v případě MEMS konstrukce nabízí tato společnost maximální deformace 3.5 μm se subnanometrovou opakovatelností. Firma Alpao [98] nabízí zrcadla do průměru 170 mm s maximálními deformacemi vlnoplochy až 80 μm . Společnost Cilas [100] nabízí řadu deformovatelných zrcadel s rychlou odezvou pro aplikace v astronomii. Zájemce může nalézt celou řadu dalších společností, které deformovatelná zrcadla nabízí.

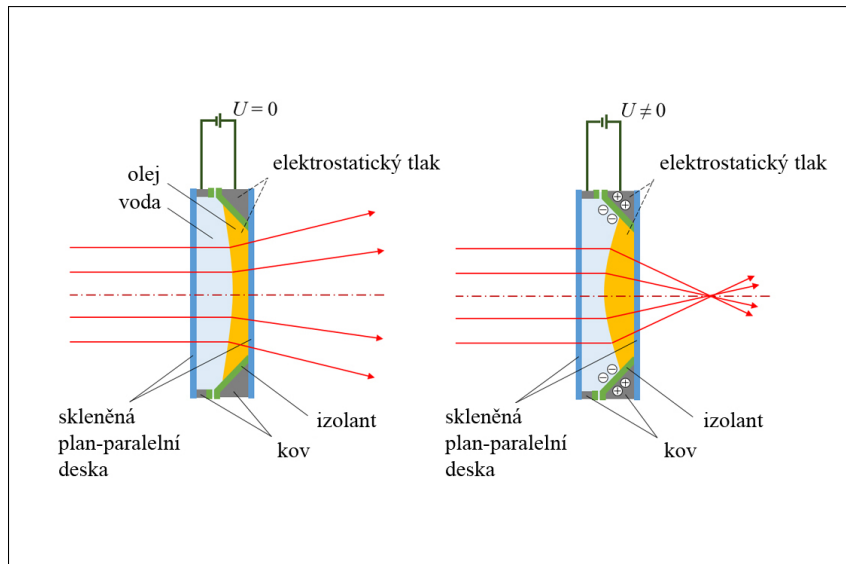
Využití deformovatelná zrcadla nacházejí např. v astronomii [98], kde jsou použita jako aktivní prvky adaptivní optiky dalekohledů. Jako další aplikaci deformovatelných zrcadel jmenujme např. mikroskopii v medicíně a oftalmologii [94]. Firma Imagine Eyes [94] využívá těchto aktivních prvků ke kompenzaci aberací optického zobrazení, které jsou způsobené prostorovými změnami a nehomogenitami indexu lomu očních prostředí. Dále mohou deformovatelná zrcadla nalézt uplatnění v optické metrologii rovinných, sférických nebo asférických povrchů [109, 119].

■ Aktivní čočky

Aktivní čočky [101, 102, 110–116] jsou optická zařízení, která kontrolovatelně transformují optické záření pomocí změny tvaru rozhraní mezi dvěma materiálovými prostředími, nebo změnou rozložení indexu lomu uvnitř refraktivního materiálu. Jako základní kategorie aktivních čoček můžeme jmenovat:

- membránové kapalinové čočky [101, 110],
- čočky na principu elektrosmáčivosti [102, 110],
- dielektroforetické čočky [110],
- akustooptické čočky [103, 110],
- čočky na bázi tekutých krystalů [96].

Membránovou kapalinovou čočku můžeme přestavit schématem na obr. 3.7. Membrána je natažena mezi dvěma krycími skly a v jedné polovině takto vzniklé komory je napuštěna kapalina. Poté připouštěním nebo odpouštěním kapaliny napouštěcím otvorem, změnou jejího objemu a



Obrázek 3.8: Aktivní čočka fungující na principu elektrosmáčivosti dvou kapalin mezi skleněnými planparalelními deskami [102]

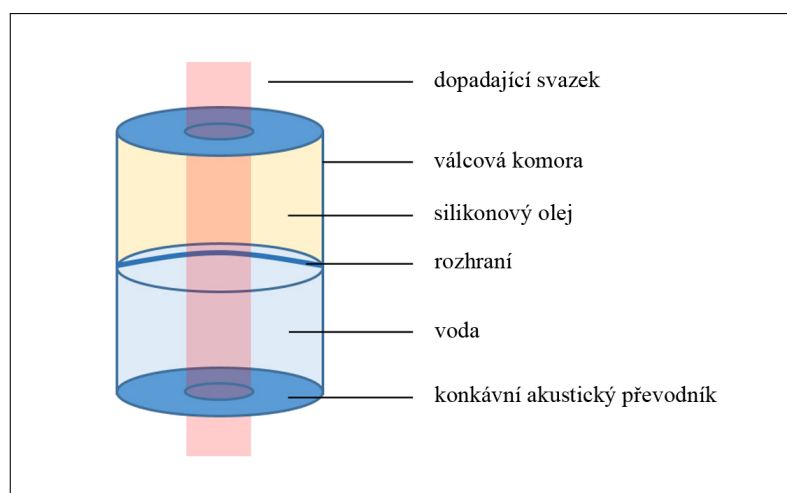
tedy tlaku působícího na membránu, dojde k deformaci membrány. V následující kapitole bude představeno podrobné řešení výpočtu tvaru deformované membrány při změně objemu kapaliny (tlaku). Membrány u zmíněných čoček musí splňovat následující parametry: vysoká světelná propustnost, malá disperze pro požadované světelné spektrum, dostatečně hladký povrch pro všechny použité stavy napnutí, vysoká návratná deformovatelnost, vhodné chemické vlastnosti (nereaktivita s kapalinou apod.), vhodné fyzikální vlastnosti (homogenita materiálu, teplotní stálost apod.). Na kapalinu lze poté klást následující požadavky: vysoká světelná propustnost, širokopásmovost (tj. propustnost pro použité vlnové délky, např. pro IR oblasti mají některé kapaliny jinou spektrální propustnost než pro viditelné světlo apod.), dostatečně vysoký index lomu (menší deformace způsobí větší modifikaci procházejícího záření), malá hustota (vzhledem ke gravitačním účinkům na kapalinu), bez chemické reakce s membránou, nevypařující se, malá viskozita (pro dosažení vysokých frekvencí změn). Na obr. 3.7 je ukázán pouze jeden jednoduchý ilustrační způsob napouštění kapaliny jedním otvorem. Existuje však celá řada dalších možností, jak je tento problém mechanicky řešen [101, 110].

Elektrosmáčivost [102, 110] je využívána u takových čoček, které jsou zpravidla menšího typu a jejich rozsah změny lámavosti je do 15 dpt. Elektrosmáčivost je jev velmi dobře známý a poprvé publikovaný r. 1875 [120] jako jev elektrokapilární, kdy malé množství vodivé kapaliny (elektrolytu) umístěné na nevodivé dielektrické vrstvě (izolantu) zformuje kapénku s kontaktním úhlem θ_0 na okrajích, a po přivedení elektrického napětí je tento úhel možno měnit. Závislost změny kontaktního úhlu θ na přivedeném napětí U popisuje tzv. Young-Lippmannova rovnice [110]

$$\cos \theta = \cos \theta_0 + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2d\gamma} U^2, \quad (3.23)$$

kde θ_0 je kontaktní úhel při $U = 0$ V, ε_0 je permitivita vakua, ε je dielektrická konstanta izolantu, d je tloušťka izolantu, γ je povrchové napětí mezi elektrolytem a okolní atmosférou (povrch kapaliny nepřípadající izolantu) a U je přivedené napětí. Jak je patrné, velikost změny kontaktního úhlu je nepřímo úměrná tloušťce izolantu a kvadraticky úměrná přivedenému napětí.

Velmi výhodné pro elektrosmáčivé čočky je využití dvou nemísitelných kapalin, které jsou umístěny mezi dvěma krycími sklíčky (planparalelními deskami), jak je ukázáno na obr. 3.8. Po přivedení napětí dojde ke změně tvaru rozhraní mezi těmito kapalinami, a je tak možné velmi rychle měnit zobrazovací vlastnosti daného optického elementu. Takovéto aktivní čočky mohou



Obrázek 3.9: Schéma konstrukce akustooptické čočky [110]

být rozměrově velmi malé, výrobně poměrně nenáročně a není třeba mechanických pohybů, jako je tomu u výše zmíněných membránových čoček.

Kapaliny v takovýchto čočkách musí být nemísitelné, měly by mít vhodně rozdílný index lomu, hustoty by měly co nejlépe souhlasit (vzhledem ke gravitačním silám), jedna z kapalin musí být vodivá, zatímco druhá musí být izolantem, obě dvě by měly být dostatečně transparentní pro použité záření a neměly by jakkoli chemicky reagovat se světlem.

Dielektroforetické čočky [110] jsou založené na použití tzv. dielektroforetické síly, která působí na dielektrické částice (neutrální, s rovnoměrně rozloženými kladnými a zápornými náboji) v nehomogenním elektrickém poli (tzv. dielektroforeze byla poprvé popsána v druhé polovině 20. století [121]). Jestliže tedy dielektroforetická síla působí na malé množství dielektrické kapaliny v nehomogenním poli, ta může změnit svůj tvar, dokud nedosáhne nového stavu rovnováhy. K získání nehomogenního elektrického pole je používáno několik postupů [110], např. aplikace zakřivených elektrod nebo tzv. proužkovaných nebo dírkovaných elektrod.

Aktivní čočky pracující na dielektroforetickém principu jsou velmi podobné elektrosmáčivým s tím rozdílem, že musí být splněny následující podmínky: kapaliny musí být nevodivé s různými dielektrickými konstantami a působící elektrické pole musí být nehomogenní. Další parametry jako propustnost, nemísitelnost nebo teplotní stabilita kapalin apod. jsou obdobné. V porovnání s elektrosmáčivými čočkami jsou mnohem méně energeticky náročné (zejména díky malé generaci tepla) a stabilnější. Na druhou stranu vývoj dielektrických kapalin a dielektroforetických čoček je zatím v počátcích v porovnání s čočkami elektrosmáčivými. Je však příslibem aplikací nejen v zobrazovacích systémech v mikro a makro rozměrech, ale například i v oblastech aktivních děličů svazků, aktivních clon, nebo difuzérech svazků.

Posledním typem zmíněným v této kapitole jsou tzv. akustooptické čočky [103, 110], které využívají akustických vln ke změně rozložení indexu lomu v materiálu díky působení vln na molekuly. Procházející vlna svým působením vyváří v materiálu nehomogenní prostředí a průchod paprsku lze studovat na základě eikonálové rovnice (3.2). Možné schéma konstrukce akustooptické čočky je ukázáno na obr. 3.9.

Na obr. 3.9 jsou dvě nemísitelné kapaliny (voda a silikonový olej) napuštěny do válcové komory. Spodní rozhraní komory je osazeno konkávním akustickým převodníkem, díky němuž jsme schopni cílit akustické vlny na rozhraní kapalin. Voda a silikonový olej mají rozdílné energetické hustoty (jiné rychlosti šíření zvuku) a indexy lomu. Díky povrchovým silám bude rozhraní mezi vodou a olejem mírně zakřivené. Akustické vlny jsou cíleny na rozhraní vody a oleje, a je tak generována stojatá akustická vlna. Změnou napětí na akustickém převodníku jsme schopni měnit amplitudu akustické vlny, a tak i optickou mohutnost dané aktivní čočky. Generovaná akustická

vlna je ve svém maximu (středu) aproximovatelná parabolou [103], a tedy zobrazovací vlastnosti jsou mírně odlišné od klasické sférické čočky.

Aktivní čočky nachází uplatnění v řadě praktických aplikací, jako např. mikroskopie, spotřební elektronika, laserové skenování, gravírování, optické manipulace, nebo optické komunikace. Vhodnou volbou aktivní čočky můžeme výrazně zvýšit možnosti a variabilitu optických soustav jak v mikro tak makro měřítku. Komerčně jsou kapalino-membránové čočky nabízeny např. firmou Optotune [101]. Změna tvaru membrány je prováděna změnou tlaku uvnitř kapaliny, a to použitím elektrických komponent nebo manuálními ovládacími prvky. Ohniskové vzdálenosti takovýchto čoček se pohybují od -600 mm až do $+\infty$. Firma Varioptic [102] je distributorem elektrosmáčivých čoček o rozsahu -5 dpt až $+15$ dpt. Akustooptické čočky jsou nabízeny např. firmou TAG Optics [103].

■ Aktivní optické prvky na bázi tekutých krystalů

Aktivní optické prvky na bázi tekutých krystalů [16, 81, 104, 107, 117, 118] jsou další z možností, jak předem definovaným způsobem modulovat přichodící optické záření. Jejich základním prvkem, jak název napovídá, jsou tzv. tekuté krystaly [16, 107, 117, 118] – elementy na pomezí krystalické a tekuté struktury charakteristické svou optickou a elektrickou anizotropií. Toto pomezí krystalické a tekuté formy je dáno molekulární kompaktností a orientací takovou, která se při větším množství materiálu vyznačuje krystalickými vlastnostmi (jako např. dvojlom), ale zároveň natolik slabou, že je možné ji snadno měnit vnějšími vlivy (např. elektrickým polem).

Obecně je známa celá řada typů tekutých krystalů [107, 117, 118], ovšem zmiňme pouze takový, který je nejvíce využíván v aktivních optických prvcích. Z pohledu komerčně běžně dostupných elektrooptických zařízení jmenujme dvě základní kategorie: tzv. nematické tekuté krystaly a feroelektrické tekuté krystaly [117, 118]. Potom právě krystaly nematické jsou nejvíce používané v oblasti aktivní optiky [81, 104, 107]. Jedná se o modulátory polarizace, jejichž natočená molekulární struktura rotuje rovinu polarizace světla, které skrze krystaly prochází. Uspořádáme-li pole buněk tekutých krystalů do pravidelné struktury pixelů (obdoba CCD senzoru), poté můžeme prostorově modulovat průchodící záření (na vstupu zpravidla lineárně polarizované) v místě každého pixelu, a docílit tak modulace vlnoplochy.

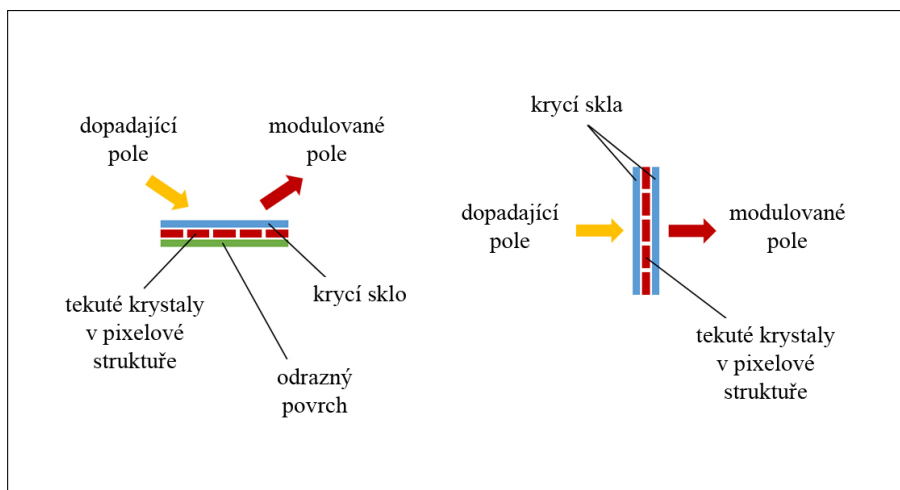
Uvažujme tedy různou orientaci molekul v rámci celé struktury pixelů, potom bude každý pixel charakterizován různou dielektrickou konstantou (permitivitou) ϵ . Tím pádem i rychlost šíření v v daném prostředí, která je dána vztahem $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, kde μ značí permeabilitu, definuje rozdílný index lomu $n = c/v$ pro každý pixel, kde c je rychlost světla ve vakuu. Poté už si snadno ze vztahu pro optický dráhový rozdíl ($OPD = \int n ds$) můžeme představit, jak bude vlnoplocha procházející daným pixelem modulována.

Zařízením pracujícím na tomto principu se říká prostorové modulátory světla (SLM z angl. Spatial Light Modulator) [81, 104].

Jak je z předchozího patrné, modulátory na bázi tekutých krystalů jsou zpravidla pixelové struktury. To má za následek několik jevů, se kterými je nutno při návrhu optické soustavy s danými prvky počítat. Mezi každým z pixelů se bude nacházet slepé místo, kde nebude docházet k modulaci (rámeček pixelu). Velikost aktivní plochy pixelu může být popsána tzv. faktorem zaplnění (z angl. fill factor), který vyjadřuje poměr součtu aktivních ploch všech pixelů vůči ploše celého senzoru [89, 90]. Modulátory se tedy kromě primární modulace projeví jako difrakční mřížky. Dále povrch prostorových modulátorů není zpravidla rovinný (jako následek výrobního procesu), a tak je třeba modulovanou vlnoplochu průběžně kontrolovat a případně zavádět vhodné korekce. Omezujícím faktorem je také fakt, že mezi sousedními pixely nemůže zpravidla dojít k příliš velké změně indexu lomu. Rozsah modulace je tak určitou měrou omezen. Podrobnější studie konkrétního typu fázového modulátoru bude představena v následující kapitole.

Prostorové modulátory světla svou konstrukcí můžeme dělit na tři základní kategorie:

- reflexní,



Obrázek 3.10: Schéma odrazných a transmisních prostorových modulátorů světla

- transmisní,
- difraktní.

Na obr. 3.10 je schéma reflexního a transmisního modulátoru naznačeno. Difraktní modulátory mohou být obojího typu. Jejich princip je založen na variabilním uzavření průchodu světla některými pixely. Odražené nebo prošlé záření poté podléhá předem definované difrakci na struktuře displeje modulátoru.

Komerčně jsou prostorové modulátory nabízeny např. firmou Hamamatsu [104], která nabízí fázové reflexní modulátory. Firma Holoeye [81] je výrobcem a prodejcem fázových nebo amplitudových modulátorů (případně kombinace) reflexního i transmisního typu.

Existuje celá řada aplikací, ve kterých prostorové modulátory nachází uplatnění. Jako příklad jmenujme digitální holografii, optické pasti a mikro-manipulace, tvarování laserových svazků, nebo optickou metrologii [81, 104].

4 Analýza a realizace kombinovaných optických systémů a vybraných experimentálních měření

Tato kapitola je souhrnem analýzy a vybraných aplikací tzv. kombinovaných (hybridních) optických systémů, tedy soustav kombinujících optické prvky s fixními i proměnnými charakteristikami, které autor práce prováděl společně se svými kolegy ze Skupiny aplikované optiky [122] na katedře fyziky Fakulty stavební ČVUT v Praze nebo v rámci své zahraniční stáže na pracovišti NTB Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs ve Švýcarsku [123].

Významným dokladem autorových výstupů práce jsou publikace na dané téma. Přehled a kopie nejvýznamnějších z nich jsou uvedeny v příloze této práce. Tato kapitola je formulována zejména jako ucelující a komentující text k vydaným publikacím. Teoretické základy potřebné k pochopení problematiky byly prezentovány v předchozích kapitolách. V rámci této kapitoly budou aplikovány na konkrétní řešené problémy.

První část kapitoly se podrobně zabývá teoretickou analýzou a experimentálním potvrzením deformace membrán kapalinových čoček společně s návrhem metodiky pro určení mechanických parametrů těchto membrán. Této problematice se autor věnoval jako hlavní řešitel grantu SGS17/004/OHK1/1T/11 – Adaptivní optické metrologické systémy, ČVUT v Praze, a jako člen řešitelského týmu grantu Grantové agentury ČR GA13-31765S – Aktivní membránové prvky na bázi kapalin.

Další z podkapitol shrnuje problematiku adaptivních optických skenovacích systémů, zejména poté jedno-zrcadlových a dvou-zrcadlových skenerů s osazenou aktivní čočkou, která umožňuje fokusaci procházejícího záření. Tímto tématem se autor zabýval jako hlavní řešitel grantu SGS15/125/OHK1/2T/11 – Adaptivní laserové skenery, ČVUT v Praze.

Následující dvě podkapitoly, které se věnují aplikaci fázového modulátoru světla v optické metrologii a při možnosti generace obrazu počítačem generovanými hologramy, shrnují problematiku, kterou autor studoval v rámci zahraniční stáže ve Švýcarsku jako hlavní řešitel projektu SCIEX-NMS^{ch}. nr. 14.077 – Simple and Flexible Interferometric Asphere Measurement Without Stitching.

Nedílnou součástí jakékoli konstrukce optických systémů je znalost hodnot základních parametrů optické soustavy nebo jejich jednotlivých optických komponent. Řešená problematika měření vybraných parametrů je shrnuta v poslední části této kapitoly. Praktická realizace této části autorovy výzkumné práce našla uplatnění v komerční sféře díky kooperaci s firmou Meopta – optika, s.r.o. [124], kde jsou výsledky používány. Výzkum této oblasti probíhal v rámci řešení grantů ČVUT v Praze SGS14/110/OHK1/2T/11 – Optické metody měření deformací a tvarů ploch a vlnoploch, Ministerstva průmyslu a obchodu ČR FR-TI2/074 – Technologie měření asférických ploch v optice, a FR-TI3/023 – Analyzátoři kvality zobrazení optických soustav, a jako součást řešení projektu Superachromáty s firmou Meopta – optika, s.r.o.

4.1 Analýza deformace a mechanických parametrů membrán kapalinových čoček

Kapalinové membránové čočky jsou jedním ze zástupců aktivních optických prvků, které získávají čím dál větší popularitu v praktických aplikacích [101–103, 110]. Základním prvkem takových čoček je membrána fixovaná po svém obvodu (konkrétní typ upevnění membrány závisí na výrobcu). Komora čočky je naplněna optickou kapalinou. Změní-li se objem kapaliny, začne kapalina působit rovnoměrným tlakem na membránu, a ta se deformuje.

4.1.1 Model tvaru deformované předpjaté membrány kapalinové čočky

V minulosti se mnoho autorů zabývalo teoretickou a experimentální analýzou deformace membrán zatížených rovnoměrným tlakem s použitím různých materiálových modelů [125–144] a různých výpočetních technik [145–158].

Autor této práce společně s dalšími spoluautory detailně analyzovali případ deformace kruhové osově symetrické membrány kapalinové čočky [111, 159]. V práci [112] poté odvozený model rozšířili o vliv počátečního předpětí, které vzniká při mechanické konstrukci uvažované čočky, a jeho vliv nelze zcela zanedbat.

Vzhledem k tomu, že deformace membrány několikanásobně převyšují její tloušťku, není možné s dostatečnou přesností použít klasické řešení založené na lineární teorii pružnosti [160, 161]. Vliv radiální deformace membrány, který je ve výše zmíněných pracích [145–158] zanedbáván, nemůže být obecně pominut. Autory práce uvažovaný model je založen na přesných geometrických rovnicích a Saint Venantově-Kirchhoffově materiálovém modelu, který předpokládá lineární vztah mezi Greenovým-Lagrangeovým přetvořením a druhým Piolovým-Kirchhoffovým napětím [162].

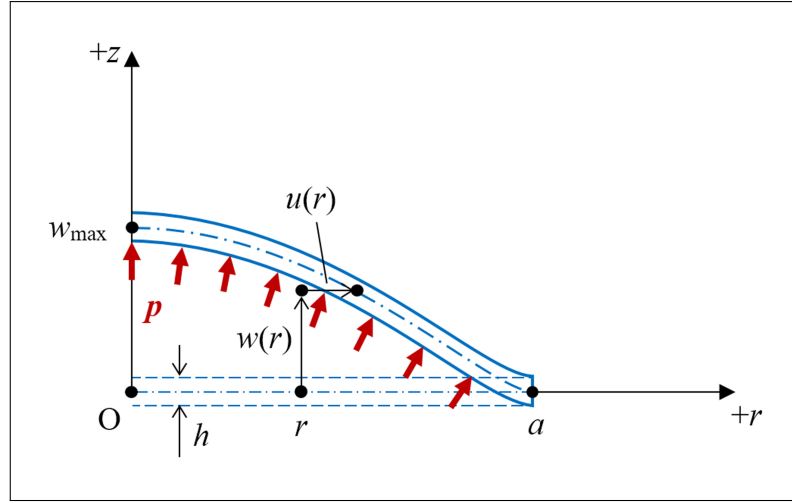
Zabývejme se nyní případem předpjaté membrány. Situace a vztahy pro membránu nepředepjatou jsou pouze speciálním případem. Předpokládejme tedy kruhovou osově symetrickou membránu kapalinové čočky, jejíž osa symetrie je totožná se z -ovou souřadnou osou a radiální osa r je dána dle obr. 4.1. Membrána je charakterizována poloměrem a a konstantní tloušťkou h takovou, že ohybová tuhost může být zanedbána. Membrána je fixována po svém obvodu. Působením tlaku optické kapaliny se membrána deformuje a obecný bod o počáteční poloze $[r, 0]$ je vychýlen do nové pozice $[r + u(r), w(r)]$, kde $w(r)$ značí vychýlení ve směru osy z a $u(r)$ je radiální vychýlení. Výsledný deformovaný tvar membrány poté může být popsán funkcí $g(r)$ implicitně dané vztahem $g(r + u(r)) = w(r)$.

Předpokládejme dále, že membrána je ve svém počátečním stavu (nepůsobí-li tlak p) předpjatá a počáteční protažení (angl. stretch) je ve všech směrech $\lambda_0 > 1$. Dále uvažujme, že změna tloušťky membrány je zanedbatelná, a tedy výsledný tvar může být charakterizován středovou křivkou, viz silná čerchovaná modrá křivka na obr. 4.1.

Radiální protažení λ_r a tečné protažení λ_t při deformaci je poté dáno vztahy [112]

$$\begin{aligned}\lambda_r &= \lambda_0 \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2}, \\ \lambda_t &= \lambda_0 \left(1 + \frac{u}{r}\right),\end{aligned}\tag{4.1}$$

kde u' a w' značí derivace výchylek u a w vzhledem k radiální souřadnici r . Předpokládejme Saint Venantův-Kirchhoffův materiálový model, který postuluje lineární závislost mezi Green-Lagrangeovým přetvořením a druhým Piolovým-Kirchhoffovým napětím [162]. Poté z definice Green-



Obrázek 4.1: Schéma radiálního řezu kruhovou osově symetrickou membránou kapalinové čočky při působení rovnoměrného tlaku p (čárkovaná modrá linie – počáteční tvar při nulovém tlaku a počátečním předpětí, $w(r)$ a $u(r)$ – vertikální a horizontální výchylka bodu o počátečních souřadnicích $[r, 0]$, a – poloměr membrány, h – tloušťka membrány, w_{\max} – maximální výchylka) [112]

Lagrangeova přetvoření dostáváme vztahy pro normální přetvoření [112], platí

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1) = \lambda_0^2 \left[u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2) \right] + \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) \\ &= \lambda_0^2 \tilde{\varepsilon}_r + \varepsilon_0, \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \lambda_0^2 \left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) \\ &= \lambda_0^2 \tilde{\varepsilon}_t + \varepsilon_0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

kde

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1)$$

je počáteční přetvoření a

$$\tilde{\varepsilon}_r = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2), \quad \tilde{\varepsilon}_t = \frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2}$$

jsou přetvoření, která bychom získali uvážením předpjatého stavu jako referenčního, zatímco výše zmíněný případ používá referenční případ nepředpjaté membrány.

Pro hustotu potenciální energie deformace \mathcal{E}_{int} (vztaženou na jednotku počátečního objemu) poté můžeme psát [111, 112, 160, 161]

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\varepsilon_r, \varepsilon_t) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2),\tag{4.3}$$

kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonův poměr charakterizující materiál membrány. Diferencováním vztahu (4.3) vzhledem k normálním přetvořením poté dostáváme vztahy pro napětí, platí

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t), \\ \sigma_t &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r),\end{aligned}\tag{4.4}$$

které můžeme následně po substituci upravit na

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E\lambda_0^2}{1-\nu^2}(\tilde{\epsilon}_r + \nu\tilde{\epsilon}_t) + \sigma_0, \\ \sigma_t &= \frac{E\lambda_0^2}{1-\nu^2}(\tilde{\epsilon}_t + \nu\tilde{\epsilon}_r) + \sigma_0,\end{aligned}\quad (4.5)$$

kde

$$\sigma_0 = \frac{E}{1-\nu}\epsilon_0 = \frac{E}{2(1-\nu)}(\lambda_0^2 - 1)$$

představuje počáteční předpětí.

Vzhledem k tomu, že hustota vnitřní energie byla diferencována vzhledem ke Green-Lagrange-ovému přetvoření, výsledné napětí jsou druhá Piola-Kirchoffova napětí s beznapěťovou konfigurací uvažovanou jako referenční. Zdůrazněme zde, že symboly a a h označují poloměr a tloušťku membrány ve stavu před zatížením tlakem p , ale už při působení předpětí. Odpovídající rozměry před předpětím označme \tilde{a} a \tilde{h} , kdy platí $\tilde{a} = a/\lambda_0$ a \tilde{h} je uvažováno jako primární geometrická charakteristika membrány.

Tvar membrány po aplikaci tlaku vyšetříme nyní pomocí stavu ekvilibría, tedy minima potenciální energie uvažovaného systému. Celková potenciální energie bude dána vztahem [112]

$$E_p = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}, \quad (4.6)$$

tedy jako součet vnitřní energie přetvoření E_{int} a energie vnějších sil E_{ext} . Minimum potenciální energie E_p získáme tehdy, jestliže variace funkcionálu E_p vymizí pro všechny přípustné hodnoty výchylek u a w .

Jestliže \mathcal{E}_{int} reprezentuje vnitřní hustotu potenciální energie deformace na jednotku objemu při referenční konfiguraci, poté pro celkovou energii přetvoření můžeme psát [112]

$$E_{\text{int}} = 2\pi\tilde{h} \int_0^{\tilde{a}} \mathcal{E}_{\text{int}} \tilde{r} d\tilde{r}, \quad (4.7)$$

kde integrace probíhá přes válcovou oblast o poloměru $\tilde{a} = a/\lambda_0$ a výšce \tilde{h} . Integrační proměnná \tilde{r} se mění od 0 do \tilde{a} a koresponduje radiální souřadnici r (při předpjetém stavu) dělené λ_0 . Tím pádem můžeme vztah (4.7) psát také ve tvaru

$$E_{\text{int}} = \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a \mathcal{E}_{\text{int}} r dr. \quad (4.8)$$

Energii vnějších sil můžeme vyjádřit jako záporně vzatý tlak násobený objemem mezi střednicovými plochami membrány v počátečním a deformovaném stavu. Tedy platí [112]

$$E_{\text{ext}} = -2\pi p \int_0^a w(r+u)(1+u') dr. \quad (4.9)$$

Zaměřme se nyní ještě jednou na obr. 4.1. Je patrné, že funkce u a w budou omezeny hraničními podmínkami

$$w(a) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(a) = 0 \quad (4.10)$$

a obdobné podmínky musí platit pro variace těchto funkcí. S uvážením zmíněných hraničních podmínek můžeme poté pro variaci celkové potenciální energie po úpravě psát [112]

$$\begin{aligned}\delta E_p &= -2\pi\tilde{h}r\sigma_r w' \delta w|_{r=0} \\ &+ 2\pi \int_0^a \left\{ \tilde{h}\sigma_t \left(1 + \frac{u}{r}\right) - \tilde{h} [r\sigma_r(1+u')] \right. \\ &\quad \left. + pw'(r+u) \right\} \delta u dr \\ &- 2\pi \int_0^a \left[\tilde{h}(r\sigma_r w')' + p(r+u)(1+u') \right] \delta w dr.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Ihned poté dostáváme odpovídající formu rovnic rovnováhy, platí [112]

$$\begin{aligned} \tilde{h}[r\sigma_r(1+u)'] - \tilde{h}\sigma_t\left(1+\frac{u}{r}\right) &= p(r+u)w', \\ -\tilde{h}(r\sigma_r w')' &= p(r+u)(1+u'). \end{aligned} \quad (4.12)$$

I když je variace funkce w v bodě $r=0$ libovolná, první člen variace potenciální energie (4.11) naznačuje, že pro $r=0$ musí platit

$$r\sigma_r w' = 0. \quad (4.13)$$

Na první pohled by se mohlo zdát, že je tato podmínka splněna automaticky, protože $\sigma_r w'$ je konečné hodnoty v bodě $r=0$, a tedy násobení nulou vede k $r\sigma_r w' = 0$. Obecně by ale mohla být aplikována v bodě $r=0$ síla F_0 , a dostali bychom výslednou hraniční podmínku $\lim_{r \rightarrow 0^+} (r\sigma_r w') = F_0/(2\pi\tilde{h})$. Pro představený problém membrány nebude však žádná síla F_0 přítomna. Zavedeme-li dále předpoklad, že výsledný tvar membrány má být spojitě diferencovatelný, poté docházíme k podmínce, že derivace w podle radiální souřadnice r v bodě $r=0$ vymizí (očekáváme spojitou návaznost membrány ve vrcholu). Dostáváme tak čtvrtou hraniční podmínku

$$w'(0) = 0, \quad (4.14)$$

kteřá doplňuje výše představené podmínky (4.10).

4.1.2 Numerické řešení tvaru deformované předpjaté membrány

Vzhledem k tomu, že výše představené diferenciální rovnice charakterizující vztah mezi funkcemi výchylek nemají analytické řešení, přistoupíme k popisu řešení numerického pomocí metody řad.

Očekáváme-li regulární řešení zmíněného problému, využijeme k numerickému řešení polynomickou aproximací funkcí výchylek. Dále je vhodné vyjádřit řešení v bezrozměrném tvaru tak, že oblast řešení je transformována na interval $[0, 1]$. Poté řešíme problém pro bezrozměrné výchylky $\tilde{u} = u/a$ a $\tilde{w} = w/a$ závislé na bezrozměrné souřadnici $\rho = r/a$. Výchylky poté můžou být aproximovány polynomy

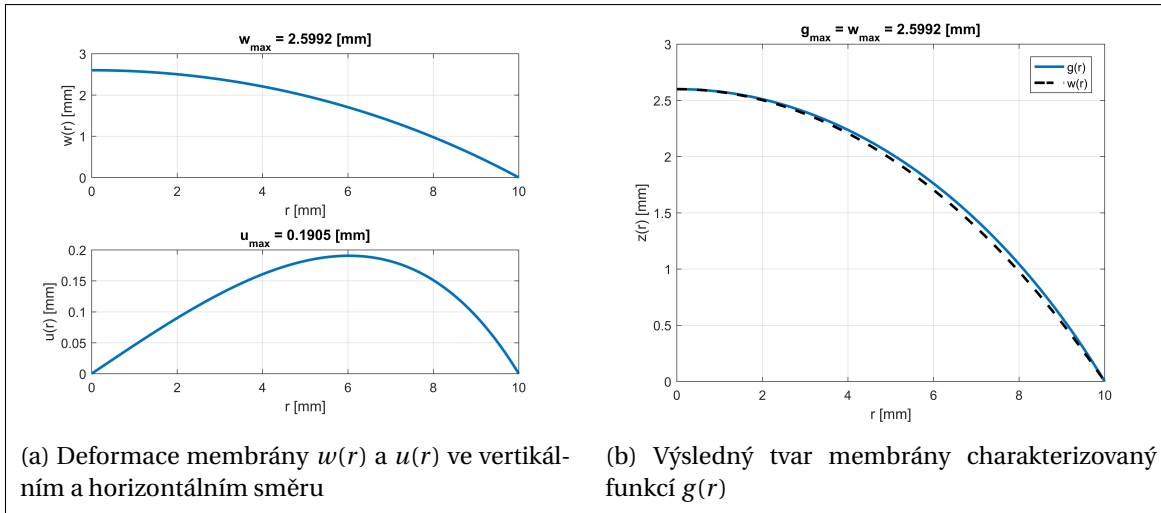
$$\tilde{w}(\rho) = \sum_{i=1}^N b_i(1-\rho^{2i}), \quad \tilde{u}(\rho) = \sum_{j=1}^M c_j(\rho - \rho^{2j+1}), \quad (4.15)$$

kde b_i ($i = 1, 2, \dots, N$) a c_j ($j = 1, 2, \dots, M$) jsou koeficienty řad. Všimněme si, že řady (4.15) automaticky splňují hraniční podmínky (4.10) a (4.14).

Vztahy pro vnitřní energii E_{int} a energii vnějších sil E_{ext} poté mohou být přepsány do tvaru

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) r dr \\ &= \frac{\pi\tilde{h}Ea^2}{1-\nu^2} \left[\lambda_0^2 \int_0^1 (\tilde{\varepsilon}_r^2 + 2\nu\tilde{\varepsilon}_r\tilde{\varepsilon}_t + \tilde{\varepsilon}_t^2) \rho d\rho \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\nu)\varepsilon_0 \int_0^1 (\tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\varepsilon}_t) \rho d\rho + \frac{(1+\nu)\varepsilon_0^2}{\lambda_0^2} \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$E_{\text{ext}} = -2\pi p a^3 \int_0^1 \tilde{w}(\rho + \tilde{u}) \left(1 + \frac{d\tilde{u}}{d\rho}\right) d\rho, \quad (4.17)$$



Obrázek 4.2: Deformace membrány s parametry: počáteční tloušťka v předpjatém stavu $\tilde{h} = 0.1$ mm, poloměr membrány $a = 10$ mm, Youngův modul pružnosti $E = 1.97$ MPa, Poissonův poměr $\nu = 0.4$, předpětí $\sigma_0 = 60$ kPa, rovnoměrný tlak $p = 0.001E = 1.97$ kPa [112]

kde pro bezrozměrné vztahy řad dále platí

$$\tilde{\epsilon}_r = \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\tilde{u}}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 \right] \quad (4.18)$$

$$= \sum_{j=1}^M c_j \left[1 - (2j+1)\rho^{2j} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^M c_j \left[1 - (2j+1)\rho^{2j} \right] \right\}^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^N i b_i \rho^{2i-1} \right)^2,$$

$$\tilde{\epsilon}_t = \frac{\tilde{u}}{\rho} + \frac{\tilde{u}^2}{2\rho^2} \quad (4.19)$$

$$= \sum_{j=1}^M c_j (1 - \rho^{2j}) + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^M c_j (1 - \rho^{2j}) \right]^2.$$

Pomocí výše představených vztahů už můžeme velmi snadno vyjádřit celkovou potenciální energii E_p pomocí koeficientů b_i a c_j . Následně s využitím vhodného optimalizačního algoritmu [75] můžeme nalézt takové hodnoty koeficientů řad, pro které bude potenciální energie minimální, a tedy získáme tak aproximativní řešení tvaru deformované membrány.

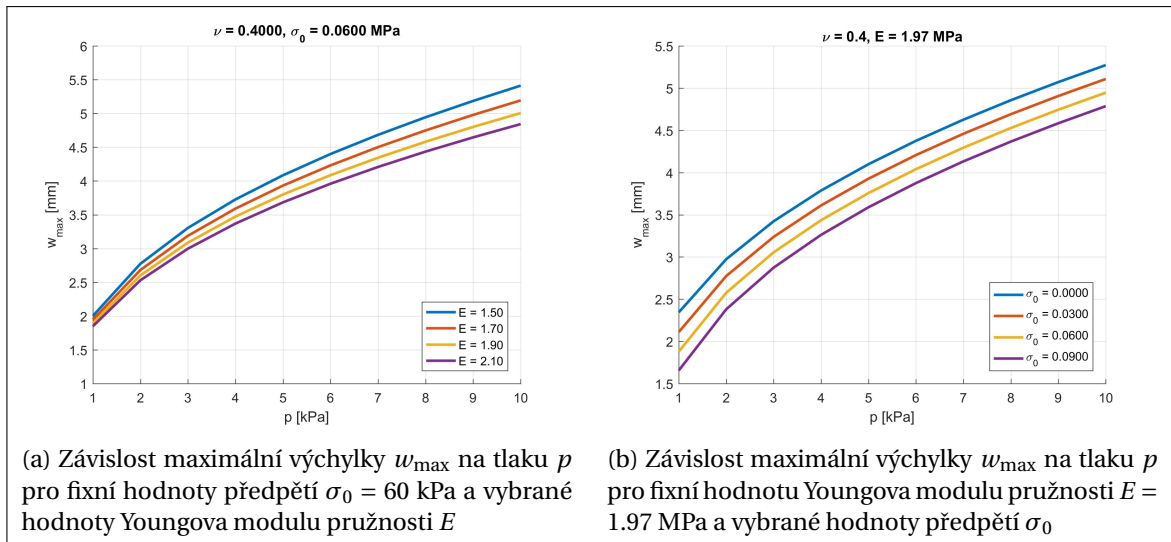
Závěrem poznamenejme, že případ nepředpnuté membrány je možné získat snadno, volíme-li $\lambda_0 = 1$, nebo-li $\sigma_0 = 0$.

4.1.3 Numerický příklad a experimentální potvrzení modelu deformované membrány

Výpočet tvaru deformované membrány

Výše popsaným postupem byl jako příklad vypočten tvar membrány následujících parametrů: počáteční tloušťka v předpjatém stavu $\tilde{h} = 0.1$ mm, poloměr membrány $a = 10$ mm, Youngův modul pružnosti $E = 1.97$ MPa a Poissonův poměr $\nu = 0.4$. Membrána byla předpnutá napětím $\sigma_0 = 60$ kPa a následně zatížena tlakem $p = 0.001E = 1.97$ kPa.

Výsledky numerického řešení jsou zobrazeny na obrázku obr. 4.2a a obr. 4.2b. Výchytky $w(r)$ a radiální posuny $u(r)$ byly aproximovány řadami (4.15) pro $N = M = 5$ a cílovou funkcí byla potenciální energie E_p . Výpočet byl proveden v prostředí MATLAB [79] použitím quasi-Newtonovým



Obrázek 4.3: Vliv materiálových parametrů na maximální výchylku membrány [112]

algoritmem a aktualizací Hessianu založeném na algoritmu Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (bfgs) [75]. Výsledný tvar byl následně aproximován asférickým rozvojem

$$z(r) = z_{\max} + \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - c^2r^2}} + \sum_{i=2}^5 A_{2i}r^{2i}, \quad (4.20)$$

kde z_{\max} je maximální výchylka, $c = 1/R_0 = z''/(1+z'^2)^{3/2}$ je vrcholová křivost (R_0 je vrcholový poloměr křivosti, z' a z'' jsou první a druhá derivace aproximované funkce $g(r)$ v bodě $r = 0$) a A_{2i} jsou asférické koeficienty. Pro náš případ jsou výsledné hodnoty aproximace: $z_{\max} = 2.5590$ mm, $R_0 = +22.5530$ mm, $A_4 = +1.8528 \cdot 10^{-5}$ mm⁻³, $A_6 = +2.1047 \cdot 10^{-8}$ mm⁻⁵, $A_8 = +4.0574 \cdot 10^{-10}$ mm⁻⁷, $A_{10} = +1.3916 \cdot 10^{-12}$ mm⁻⁹. Aproximace funkce $g(r)$ asférickým rozvojem byla provedena s přesností RMS = $3.7 \cdot 10^{-6}$ mm. Toto kvantitativní hodnocení jasně ukazuje, že tvar membrány není sférický, a tedy v optických aplikacích je třeba uvažovat asférický tvar deformované membrány.

Dále autoři v práci [112] studovali porovnání numerického řešení tvaru membrány metodou řad a pomocí metody konečných prvků. Také byly ukázány vybrané zobrazovací vlastnosti kapalinové čočky. Podrobnosti jsou uvedeny v pracích [111, 112], jejichž plný text lze nalézt v souboru příložených publikací autora.

Odhad mechanických parametrů deformované membrány

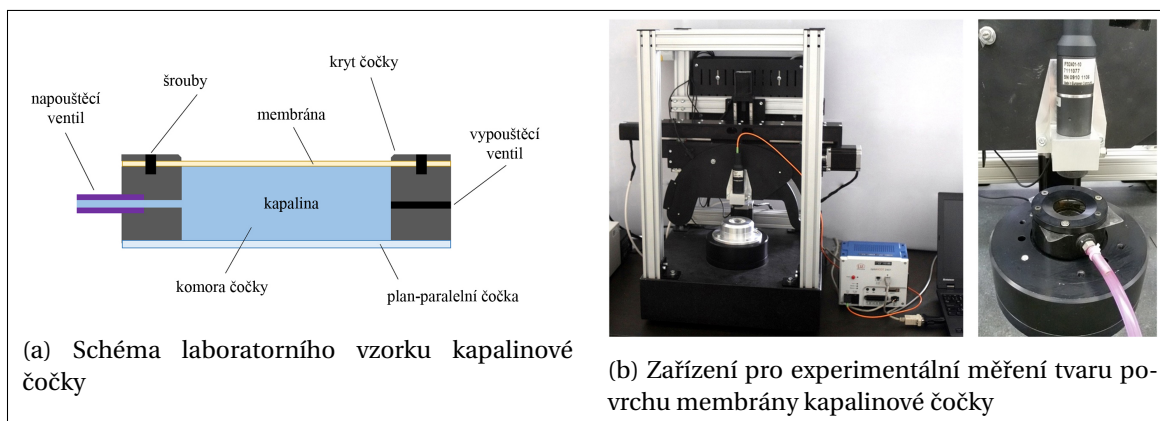
V rámci experimentální realizace membránových kapalinových čoček je někdy velmi komplikované zjistit jednoznačně materiálové parametry membrány. K tomuto účelu je možné využít výše představené vztahy a vhodnou analýzou materiálové parametry optimalizovat.

Na obr. 4.3 jsou ukázány závislosti maximálních výchylek w_{\max} na tlaku p pro fixní hodnoty předpětí σ_0 a pro vybrané hodnoty Youngova modulu E pro membránu s geometrickými parametry z předchozího příkladu. Také jsou ukázány závislosti výchylek na tlaku pro fixní hodnoty Youngova modulu a vybrané hodnoty předpětí.

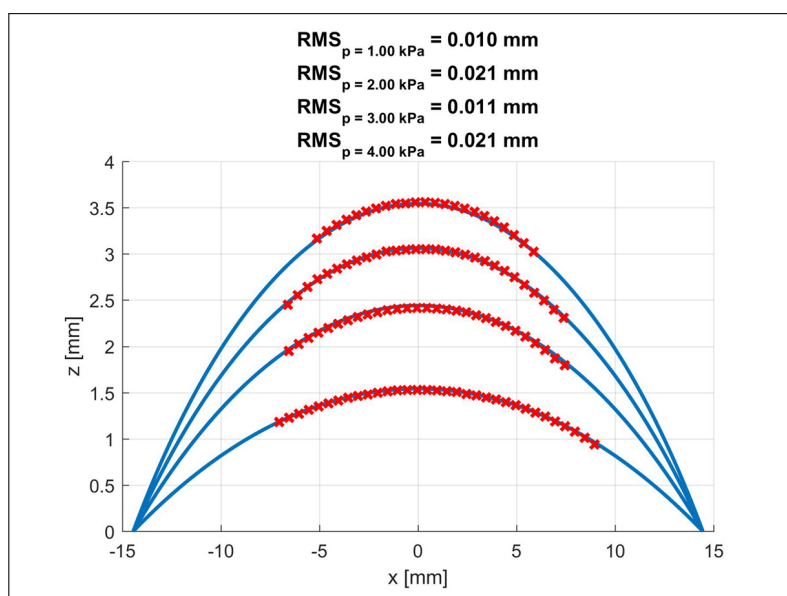
Budeme-li znát geometrické parametry membrány (tloušťku a poloměr) a změříme-li závislost výchylky na tlaku, poté lze obdobnou analýzou porovnáním s modelovanými hodnotami určit optimální mechanické parametry membrány.

Experimentální potvrzení teoretického modelu

Pro potvrzení teoretického modelu optimalizace tvaru membrány kapalinové čočky bylo provedeno laboratorní měření povrchu membrány laboratorního vzorku kapalinové čočky. Její schéma



Obrázek 4.4: Laboratorní vzorek kapalinové membránové čočky a měření povrchu její membrány [112]



Obrázek 4.5: Srovnání experimentálně měřených hodnot (červené křížky) a numericky simulovaného tvaru povrchu membrány kapalinové čočky v meridiálním řezu (modré křivky) pro tlaky $p = 1.00, 2.00, 3.00$ a 4.00 kPa [112]

je zobrazeno na obr. 4.4a. Základní část čočky tvoří komora. Přes vstupní ventil je do ní přiváděna kapalina (v našem případě destilovaná voda) pomocí přesné tlakové pumpy. Přítlačná část čočky upínacími šrouby upíná pružnou membránu. Změnou objemu kapaliny v komoře je membrána deformována. Její tvar je následně měřen pomocí skenovacího zařízení, viz obr. 4.4b, které určuje přesnost měřeného bodu s přesností 0.02 mm (dáno kombinací mechanické nejistoty s nejistotou zavedenou senzorem).

Membrána byla vyrobena z materiálu Sylgard [163]. Počáteční tloušťka membrány $\tilde{h} = 0.45$ mm a poloměr membrány od okraje v předpjatém stavu byl $a = 14.45$ mm. Poissonův poměr byl zvolen $\nu = 0.41$, Youngův modul pružnosti $E = 1.078$ MPa a předpětí $\sigma_0 = 0.0583$ MPa bylo určeno pomocí výše zmíněného postupu optimalizace materiálových parametrů.

Vzhledem k velkému sklonu povrchu membrány blízko okraje bylo možné díky omezenému rozsahu použitého chromatického senzoru, který umožňuje přesné měření pouze pro malé úhly odklonu od normály měřeného povrchu, měřit pouze oblasti poblíž vrcholu deformované membrány. Dále byl díky rotační symetrii membrány měřen pouze meridián čočky.

Na obr. 4.5 je ukázáno porovnání měřených a simulovaných tvarů pro různé tlaky. Střední kvadratická odchylka rozdílů mezi experimentálně měřenými hodnotami a numerickou simulací není větší než 0.021 mm (jak je patrné z legendy obrázku), což koresponduje s odhadovanou nejistotou měření. Díky tomu můžeme teoretický model považovat za prokázaný.

Výše představený teoretický model a postup simulace tvaru deformovaných předpjatých membrán kapalinových čoček je možné použít pro další optický návrh a analýzy zobrazovacích vlastností kapalinových čoček.

4.2 Teorie adaptivních optických skenovacích systémů

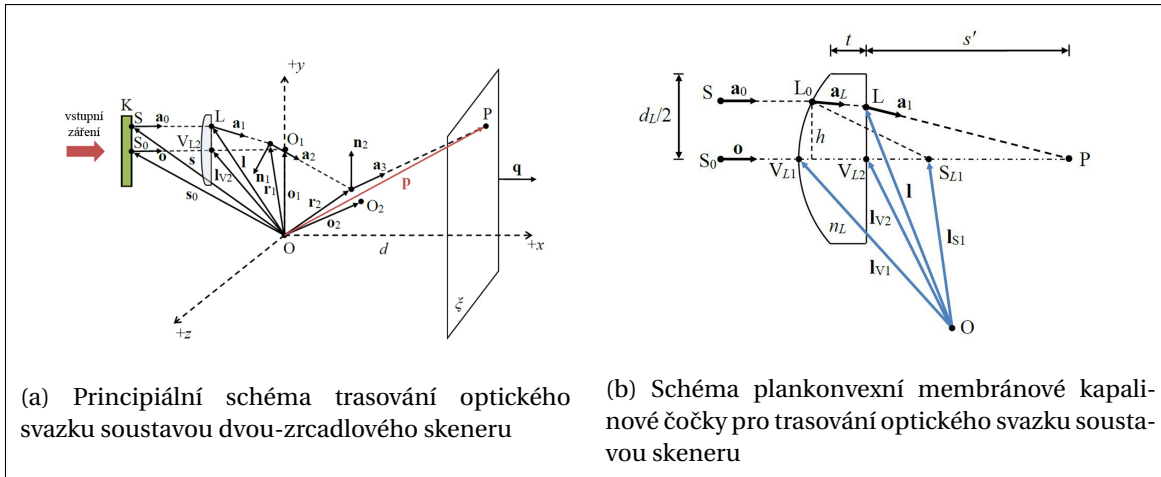
Optické skenery [113–115, 164, 165] jsou zařízení pro bezkontaktní, velmi rychlé a poměrně přesné měření prostorové polohy nebo modifikace vlastností vybraných prvků. Oblasti aplikací 3D skenerů můžeme v základu dělit dle tří charakteristik: zaměřování, prověřování nebo kontrola stávajících prvků (stavebnictví a architektura, strojírenství, reverzní inženýrství, výstupní kontrola kvality, měření tvarů karosérií automobilů, dokumentace dopravních sítí, digitální modelování terénu, dokumentace uměleckých a historických předmětů, detekce poškození, vodohospodářství, archeologie, bezpečnostní technika, medicína); projekční technologie (zábavní průmysl, vytváření laserových efektů, videomapping, využití v divadlech); laserové technologie při výrobě (vysokoenergetické řezání, svařování, gravírování, povrchové zušlechťování).

Autor této práce se podrobně zabýval analýzou trasování svazku záření optickou soustavou jedno-zrcadlového a dvou-zrcadlového optického skeneru, a dále poté i soustavami s osazenou čočkou proměnné ohniskové vzdálenosti [113–115, 164]. Tato informace o přesné trajektorii svazku je základem k podrobným analýzám zobrazovacích vlastností daných skenerů, a lze také využít k analýzám nejistot polohy stopy svazku v detekční rovině.

4.2.1 Trasování optického svazku adaptivní optickou soustavou skeneru

Ukažme nyní situaci dvou-zrcadlového skeneru s jednou čočkou proměnné ohniskové vzdálenosti. Tuto čočku lze uvažovat jako plankonvexní, jelikož v takové formě jsou membráno-kapalinové čočky velmi často vyráběny a komerčně dostupné [101]. Uvedená situace je zobrazena na obr. 4.6.

Soustavou K je vstupní záření transformováno na svazek rovnoběžných paprsků, viz obr. 4.6a. Poloha poslední plochy této soustavy je určena polohovým vektorem \mathbf{s}_0 . Poloha aktivní čočky proměnné ohniskové vzdálenosti je v daném případě jednoznačně dána polohou středu V_{L2} zadní plochy, který je určen polohovým vektorem \mathbf{l}_{V2} takovým způsobem, že body S, V_{L2} a O_1 leží v přímce dané jednotkovým směrovým vektorem \mathbf{o} . Necht' je dále tato přímka optickou osou aktivní čočky. Po průchodu soustavou K paprsek vychází ve směru jednotkového vektoru \mathbf{a}_0 z bodu S, který je dán polohovým vektorem \mathbf{s} . Po průchodu čočkou proměnné ohniskové vzdálenosti poté



Obrázek 4.6: Trasování svazku optickou soustavou dvou-zrcadlového optického skeneru s čočkou proměnné ohniskové vzdálenosti [113–115]

vychází z bodu L určeného polohovým vektorem \mathbf{l} ve směru jednotkového vektoru \mathbf{a}_1 . Dvě zrcadla dvou-zrcadlového skeneru jsou určena středy danými polohovými vektory \mathbf{o}_1 a \mathbf{o}_2 a jednotkovými normálovými vektory \mathbf{n}_1 a \mathbf{n}_2 . Paprsek dopadá na první zrcadlo v bodě, který je dán polohovým vektorem \mathbf{r}_1 , odráží se, a poté pokračuje ve směru jednotkového vektoru \mathbf{a}_2 až k zrcadlu druhému. Zde se v bodě určeném polohovým vektorem \mathbf{r}_2 odráží a pokračuje směrem daným jednotkovým směrovým vektorem \mathbf{a}_3 . Rovinné stínítko ξ je určeno jednotkovým normálovým vektorem \mathbf{q} a vzdáleností d od počátku soustavy souřadnic. Paprsek odražený od druhého zrcadla protíná stínítko (detekční rovinu) v bodě P určeném polohovým vektorem \mathbf{p} .

Na obr. 4.6b je podrobně ukázán průchod paprsku plankonvexní čočkou proměnné ohniskové vzdálenosti. Je patrné, že výška h průsečíku L_0 paprsku s první plochou čočky může být vypočtena jako $h = |\mathbf{s} - \mathbf{s}_0|$. Dále je zřejmé, že \mathbf{a}_0 je rovno \mathbf{o} . V bodě L_0 dochází k lomu paprsku podle zákona lomu, a paprsek poté pokračuje ve směru daným jednotkovým směrovým vektorem \mathbf{a}_L do bodu L na zadní ploše čočky. V tomto bodě je opět lámán a vystupuje z čočky ve směru vektoru \mathbf{a}_1 . Pro většinu prakticky používaných skenerů lze případ převést na situaci paraxiálního zobrazení [113–115], tudíž můžeme uvažovat následující zjednodušení: $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{o}$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}_{V2}$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{o}$.

Jak již bylo zmíněno, pozice čočky je dána polohou středu své zadní plochy V_{L2} polohovým vektorem \mathbf{l}_{V2} . Pozice vrcholu přední plochy čočky V_{L1} , viz obr. 4.6b, se mění vzhledem ke změně ohniskové vzdálenosti čočky. Poloha středu křivosti plochy se také bude obdobně měnit. Z obr. 4.6a a obr. 4.6b je zřejmé, že pro polohový vektor vrcholu čočky \mathbf{l}_{V1} platí

$$\mathbf{l}_{V1} = \mathbf{l}_{V2} - t_L \mathbf{o} = \mathbf{l}_{V2} - \left[t + R - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - d_L^2} \right] \mathbf{o}, \quad (4.21)$$

kde t_L je proměnná axiální tloušťka čočky, t je hranová tloušťka čočky, d_L je příčný průměr čočky, R je poloměr křivosti první plochy čočky, pro který v paraxiální aproximaci platí $R = f'(n_L - 1)$, kde n_L je index lomu čočky a f' je její ohnisková vzdálenost. Pro pozici středu křivosti poté dostáváme

$$\mathbf{l}_{S1} = \mathbf{l}_{V1} + R \mathbf{o} = \mathbf{l}_{V2} - \left[t - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - d_L^2} \right] \mathbf{o}. \quad (4.22)$$

Máme-li charakterizovány geometrické parametry skeneru, můžeme přistoupit k trasování optického svazku optickou soustavou. Jednotkový normálový vektor $\mathbf{n}_i(\varphi_i)$ i -tého zrcadla skeneru, otočeného o úhel φ_i kolem osy dané jednotkovým směrovým vektorem \mathbf{c}_i , můžeme charakterizovat vztahem [113–115]

$$\mathbf{n}_i(\varphi_i) = \mathbf{n}_i(0) \cos \varphi_i + \mathbf{c}_i [\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_i(0)] (1 - \cos \varphi_i) + [\mathbf{c}_i \times \mathbf{n}_i(0)] \sin \varphi_i, \quad (4.23)$$

kde $\mathbf{n}_i(0)$ značí počáteční polohu normálového vektoru, tj. $\varphi_i = 0$. Vzhledem k předpokládanému paraxiálnímu modelu můžeme uvažovat $\mathbf{r}_1 = \mathbf{o}_1$. Pro jednotkový směrový vektor paprsku po odrazu na prvním zrcadle můžeme pomocí zákona odrazu psát [113–115]

$$\mathbf{a}_2(\varphi_1) = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{n}_1(\varphi_1) [\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1(\varphi_1)]. \quad (4.24)$$

Z obr. 4.6 poté snadno odečteme a pomocí vztahů analytické geometrie formulujeme vztah pro polohu místa dopadu paprsku na druhé zrcadlo, platí

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{o}_1 + \frac{[\mathbf{o}_2 - \mathbf{o}_1] \cdot \mathbf{n}_2(\varphi_2)}{\mathbf{a}_2(\varphi_1) \cdot \mathbf{n}_2(\varphi_2)} \mathbf{a}_2(\varphi_1). \quad (4.25)$$

Jednotkový směrový vektor paprsku po odrazu na druhém zrcadle bude dán obdobně vztahem

$$\mathbf{a}_3(\varphi_2) = \mathbf{a}_2(\varphi_1) - 2\mathbf{n}_2(\varphi_2) [\mathbf{a}_2(\varphi_1) \cdot \mathbf{n}_2(\varphi_2)]. \quad (4.26)$$

Konečně pozice bodu P bodu na stínítku ξ může být popsána použitím vektorového počtu analytické geometrie vztahem

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_2 + \frac{d - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{a}_3(\varphi_2) \cdot \mathbf{q}} \mathbf{a}_3(\varphi_2). \quad (4.27)$$

Ohnisková vzdálenost plankonvexní aktivní čočky může být určena z podmínky fokusace svazku v bodě P na stínítku ξ . Pro optickou mohutnost φ čočky v takové situaci bude platit [113–115]

$$\varphi = \frac{1}{f'} = \frac{n_L - 1}{R}, \quad (4.28)$$

kde f' je ohnisková vzdálenost čočky, n_L je index lomu materiálu čočky a R je poloměr křivosti konvexní plochy čočky. Pokud se optická mohutnost změní, dojde ke změně polohy vrcholu čočky V_{L1} . Pro vzdálenost s' mezi body P a V_{L2} měřenou po optické ose soustavy poté platí [113–115]

$$s' = f' \left(1 - \varphi \frac{t_L}{n_L} \right). \quad (4.29)$$

Dosazením z výše uvedené rovnice (4.21) a (4.28) do (4.29) a po úpravě dostáváme

$$f' = s' + \frac{t_L}{n_L} = s' + \frac{1}{n_L} \left[t + R - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - d_L^2} \right]. \quad (4.30)$$

Přeformulováním poté získáme kvadratickou rovnici pro ohniskovou vzdálenost f' , platí

$$\frac{f'^2}{n_L^2} [(n_L - 1)^2 - 1] + 2 \left(s' + \frac{t}{n_L} \right) \frac{f'}{n_L} - \frac{d_L^2}{4n_L^2} - \left(s' + \frac{t}{n_L} \right)^2 = 0. \quad (4.31)$$

Pro výše zmíněnou situaci můžeme zapsat vyhovující řešení rovnice (4.31) vztahem

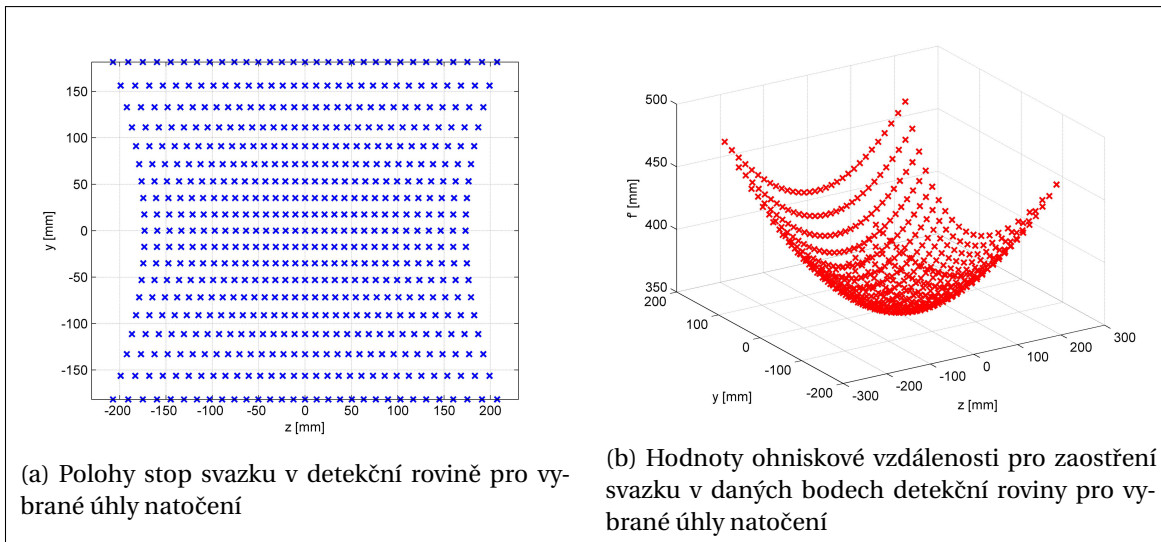
$$f' = -\frac{1}{n_L(n_L - 2)} \left(t + n_L s' - \frac{1}{2} \sqrt{D_f} \right), \quad (4.32)$$

kde

$$D_f = 4n_L^4 s'^2 - 8n_L^3 s' (s' - t) + n_L^2 [d_L^2 + 4(s'^2 + t^2) - 16s't] + n_L [8t(s' - t) - 2d_L^2] + 4t^2.$$

Známe-li tedy hodnotu vzdálenosti s' , můžeme určit optimální hodnotu paraxiální ohniskové vzdálenosti aktivní čočky tak, aby byl svazek fokusován do bodu P. Použitím výše představených vztahů můžeme pro vzdálenost s' psát

$$s' = |\mathbf{o}_1 - \mathbf{l}_{V2}| + |\mathbf{r}_2 - \mathbf{o}_1| + |\mathbf{p} - \mathbf{r}_2|. \quad (4.33)$$



Obrázek 4.7: Polohy stop svazku v detekční rovině a hodnot ohniskové vzdálenosti pro zaostření svazku v daných bodech detekční roviny pro vybrané úhly natočení

Pro ilustraci nyní předpokládejme, že dvou-zrcadlový skener je osazen plankonvexní čočkou proměnné ohniskové vzdálenosti Optotune EL-10-30 [101] o parametrech: $d_L = 11$ mm, $t = 2.45$ mm, $n_L = 1.559$. Dále předpokládejme parametry optické soustavy skeneru $\mathbf{s}_0 = (-100\mathbf{e}_1 + 50\mathbf{e}_2)$ mm, $\mathbf{l}_{V2} = (-50\mathbf{e}_1 + 50\mathbf{e}_2)$ mm, $\mathbf{o}_1 = 50\mathbf{e}_2$ mm, $\mathbf{o}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{n}_1(0) = -(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, $\mathbf{n}_2(0) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, $\mathbf{q} = \mathbf{e}_1$, $d = 250$ mm.

Pro nulové natočení zrcadel poté dostáváme hodnoty $f' = 351.621$ mm a clonové číslo $F = f'/d_L = 32$. Předpoklad paraxiálního zobrazení je tak oprávněný. Na obr. 4.7a a obr. 4.7b jsou zobrazeny polohy stop svazku v detekční rovině a hodnot ohniskové vzdálenosti pro zaostření svazku v daných bodech detekční roviny pro úhly natočení $\varphi_1 = \{-30^\circ, -28^\circ, \dots, +28^\circ, +30^\circ\}$, $\varphi_2 = \{-18^\circ, -16^\circ, \dots, +16^\circ, +18^\circ\}$.

V autorových publikacích [113–115, 164] jsou ukázány další analýzy skenovacích systémů, zájemce odkážeme na zmíněné práce. Součástí disertační práce jsou vybrané publikace autora [113, 164] v impaktovaných časopisech, jejichž kopie lze nalézt v příloze.

4.3 Adaptivní interferometrie s využitím fázového modulátoru světla

V předchozích kapitolách byla představena jedna ze základních bezkontaktních metod používaná v optické metrologii pro kontrolu tvaru optických povrchů – interferometrie. Kromě optické metrologie nachází ale také uplatnění v mnoha jiných oblastech [27, 29–31, 166]. Jsou jimi například vysokorychlostní dynamická 3D profilometrie mikromechanických zařízení, analýza hoření plamenů, tomografie nestacionárního vysokorychlostního toku plynů, kvantitativní měření 3D deformačních polí, analýzy napětí, proměrování tenkých vrstev, určování charakteristik laserového plazmatu, analýzy mega-gaussovských magnetických polí v laserově produkovaných plazmatech, měření pro určování prostorové koherence a indexů lomů prostředí, určování prostorových polarizací nebo spektroskopická polarimetrie. Z biologických a medicínských aplikací jmenujme např. použití v tomografii, měření dynamiky topografie trhlin nebo měření deformací biologických tkání. Z oblasti měření extrémních fyzikálních jevů to pak jsou například měření extrémně malých magnetických polí s použitím elektronové holografie. Satelitní radarová interferometrie umožňuje určovat například pohyby tektonických desek a zemětřesení, oceánské slapy, mapování přehrad a nádrží a další.

Vyhodnocení tvaru povrchu testovaného optického prvku je založeno na rekonstrukci fáze interferenčního pole. Předpokládejme pro jednoduchost interferenci dvou absolutně koherentních vlnových polí daných skalárními funkcemi (funkcemi komplexní amplitudy, viz difrakční teorie dříve, kde pro přehlednost zavedeme označení U místo ϕ) $U_1 = A_1 \exp(i\varphi_1)$ a $U_2 = A_2 \exp(i\varphi_2)$, kde A_1 a A_2 jsou amplitudy a φ_1 a φ_2 jsou fáze vlnění v určitém bodě prostoru. Tato pole nechť vnikají tak, že generujeme danou vlnoplochu (zpravidla sférickou nebo rovinnou) a dělíme počáteční svazek na dvě větve – referenční větev a měřicí (testovací) větev. V testovací větvi interaguje vlnění s měřeným objektem a po průchodu (nebo odrazu) se vrací vlnění zpět. Zde ho necháme interferovat s referenčním svazkem (interakce s referenční plochou). Z principu superpozice platí pro výsledné pole U vztah $U = U_1 + U_2$ [27, 29–31]. Intenzita pole, kterou jsme schopni registrovat na detektoru (např. CCD displej) v daném místě je poté dána vztahem $I = UU^*$, kde U^* je komplexně sdružené číslo k číslu U . Dosazením a úpravou poté pro intenzitu I v daném bodě dostáváme interferenční rovnici

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.34)$$

Metodami vyhodnocení interferenčních polí, viz předchozí kapitoly práce, jsme schopni rekonstruovat fázový rozdíl $\varphi_1 - \varphi_2$. Tomuto fázovému rozdílu odpovídá optický dráhový rozdíl, který souvisí s odchylkou měřené a referenční plochy/vlnoplochy. Fázový rozdíl tak nese informaci o tvaru testovaného povrchu nebo měřeného jevu.

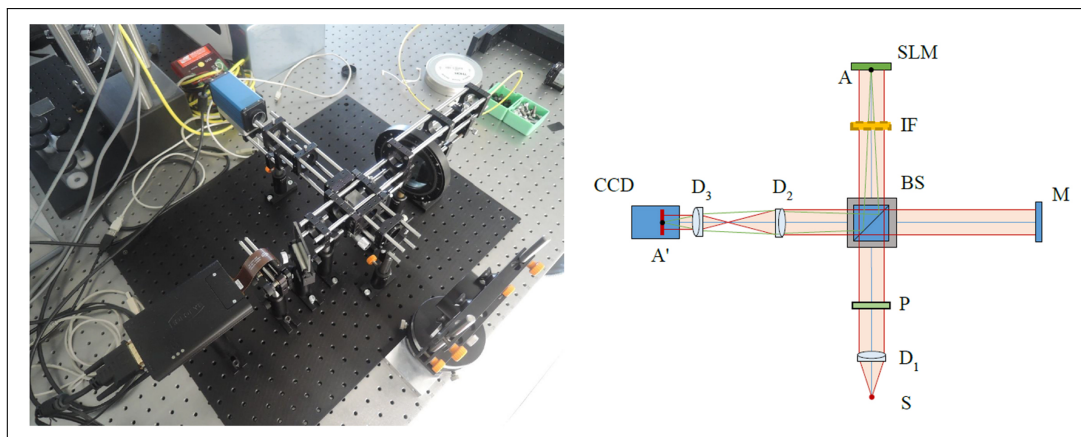
V rámci měření jsou ovšem kladeny další požadavky, jako například ne příliš velký rozdíl mezi testovanou a referenční fází. Při velkém fázovém rozdílu bude argument funkce cosinus velký a vyhodnocovací algoritmy nejsou schopny registrovaný obraz vyhodnotit (díky vysoké frekvenci interferenčních proužků — spojnic maxim registrované intenzity). Maximální registrovatelná hustota proužků (z pohledu použitého senzoru) je daná Nyquistovým-Shannonovým kritériem [70, 71] a je závislá na velikosti pixelu. Prakticky se doporučuje využít alespoň 4 pixely pro jeden interferenční proužek. Velikost pixelů se u současných senzorů pohybuje v řádu μm . Optická soustava interferometru (přenosová soustava systému) je také zatížena vlastními aberacemi, které je nutno velmi dobře předem určit (kalibrovat zpravidla referenčním měřením), jinak by výrazným způsobem ovlivnily výsledné hodnoty rekonstruované fáze. Této problematice se důkladně věnují například práce [167–169].

Pro možnost rekonstrukce měřeného povrchu (tj. určení příslušné testované fáze), je nutné znát s co největší přesností hodnotu fáze referenční. S tím souvisí požadavek na tvarovou přesnost referenční plochy, která je v interferometrech používána k modifikaci referenčního vlnového pole požadovaným způsobem. Poměrně snadno a velmi přesně lze testovat rovinné a sférické plochy, jelikož přesná výroba rovinných a sférických referenčních prvků je velmi dobře zvládnuta. Ovšem při měření asférických a free-form ploch je situace velmi komplikovaná, jelikož výroba takových referenčních prvků je nákladná a v mnoha případech nerealizovatelná.

Jedním z řešení při měření asférických a free-form ploch je použití aktivních optických prvků, které přizpůsobují referenční vlnu k tvaru testovaného předmětu, a snaží se tak minimalizovat rozdíl referenční a testované fáze. Dále je možné aktivní prvky využít k potlačení některých aberací přenosové soustavy interferometru. Vznikají tak adaptivní interferometrické jednotky např. s použitím deformovatelných zrcadel [94–99, 105–109] nebo fázových modulátorů světla [16, 81, 104, 107, 117, 118].

Na obr. 4.8 je ukázána laboratorní sestava Twyman-Greenova interferometru s prostorovým modulátorem světla v referenční větvi, která je výsledkem autorovy výzkumné činnosti během zahraniční stáže na pracovišti NTB Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs [123] ve Švýcarsku v rámci projektu SCIEX-NMS^{ch} nr. 14.077, Simple and Flexible Interferometric Asphere Measurement Without Stitching. Software a výpočetní řešení bylo představeno v kapitole probírající rekonstrukci fáze v optice.

Na obr. 4.8 z laserového zdroje S vychází obecně nepolarizovaný svazek kvazimonochromatického záření, který je přes soustavu D_1 kolimován (transformovaný na rovnoběžný svazek paprsků). Aby byla zajištěna správná funkce prostorového modulátoru SLM, resp. pole bylo korektně



Obrázek 4.8: Twyman-Greenův interferometr s prostorovým modulátorem světla v referenční větvi

modulováno, musí být na modulátor dopadající záření lineárně polarizované v určitém směru, který je definován výrobcem [81]. V soustavě je tedy umístěn polarizátor P, který danou polarizaci zajišťuje. Po průchodu záření polarizátorem P je svazek dělen na děliči svazku BS na referenční a testovací větev. V referenční prochází vlnění přes volitelný neutrální filtr intenzity IF (pro korekci rozdílu intenzit mezi referenční a testovací větví pro zajištění dobrého kontrastu interferenčních proužků) a dále postupuje k prostorovému modulátoru SLM. Po odrazu na SLM dojde k fázové modulaci a odražené vlnové pole se šíří zpět na dělič svazku BS. Druhá větev, testovací, jde k testovanému elementu M, od kterého se odráží. Po průchodu odražených polí děličem svazku dochází k interferenci. Oba svazky následně procházejí přes optickou soustavu D₂ a D₃ a dopadají na CCD senzor. Optická soustava D₂ a D₃ slouží jednak pro přizpůsobení průměru svazku rozměru senzoru CCD, ale také pro zobrazení roviny modulátoru do roviny CCD (soustava zobrazuje bod A v rovině modulátoru do bodu A' v rovině detektoru).

Během řešeného projektu byl úspěšně prokázán koncept modulace referenčního pole takovým způsobem, aby došlo k redukci interferenčních proužků. Při měření testovaných elementů, které se výrazným způsobem liší od tvaru referenční vlnoplochy, interferenční proužky v rovině CCD detektoru porušují vzorkovací podmínku danou velikostí pixelu CCD a není možné správně detekovat a rekonstruovat. Také dochází k dalším nepřesnostem měření, které jsou spojené s šířením pole po odrazu od testovaných komponent. Pokud je normála měřené plochy výrazně skloněná oproti směru dopadajícího pole, odražené pole nemusí vůbec projít zobrazovací soustavou interferometru, a není tak možné korektně fázový rozdíl vyhodnotit. V rámci určitých mezí je ale možné použít korekční prvky, v našem případě fázový modulátor světla, který tvar referenční vlny přizpůsobí takovým způsobem, aby referenční vlnoplocha byla velmi blízká vlnoploše vzniklé odrazem od testovaného prvku. Poté kombinací znalosti tvaru modulované vlnoplochy na fázový modulátor a měřeného fázového rozdílu po vyhodnocení interferenčních proužků můžeme získat tvar měřeného prvku.

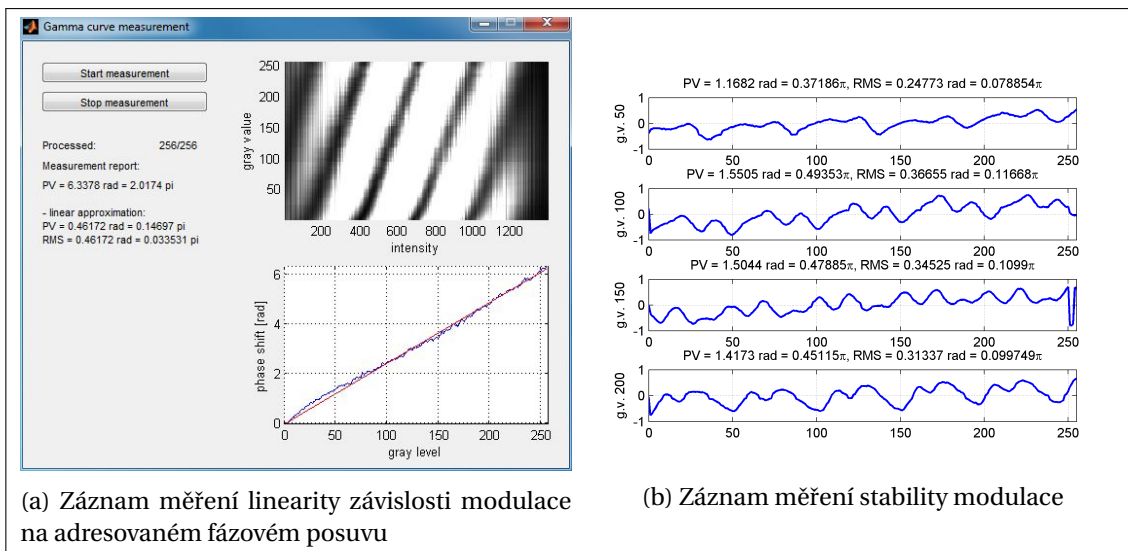
Praktické adresování použitého fázového modulátoru Holoeye PLUTO [81] je prováděno generováním matice stupňů šedi (v našem případě 8-bitové kódování), které odpovídají fázovým posuvům jednotlivých pixelů. Použitý modulátor umožňuje posuv v rozmezí 0 až 2π . Lze tak adresovat fázové korekce buď ve zmíněném rozsahu, nebo použitím wrap operátoru i rozsah fázové změny zvětšit. Principiálně tak lze fázový modulátor použít pro metrologické aplikace, ovšem v současnosti má své limity, které můžeme shrnout do následujících bodů:

- Nelineární fázová odezva – SLM nemá obecně lineární odezvu mezi adresovanou hodnotou napětí (hodnoty šedi) a generovaným fázovým posuvem. Toto chování musí být pro metrologické aplikace velmi pečlivě kalibrováno. Výrobce fázového modulátoru obvykle doporučuje kalibrační proceduru, kterou je nelinearitu možné potlačit.
- Modulace není v přesném 2π intervalu – Modulovaný rozsah fázového posuvu adresova-

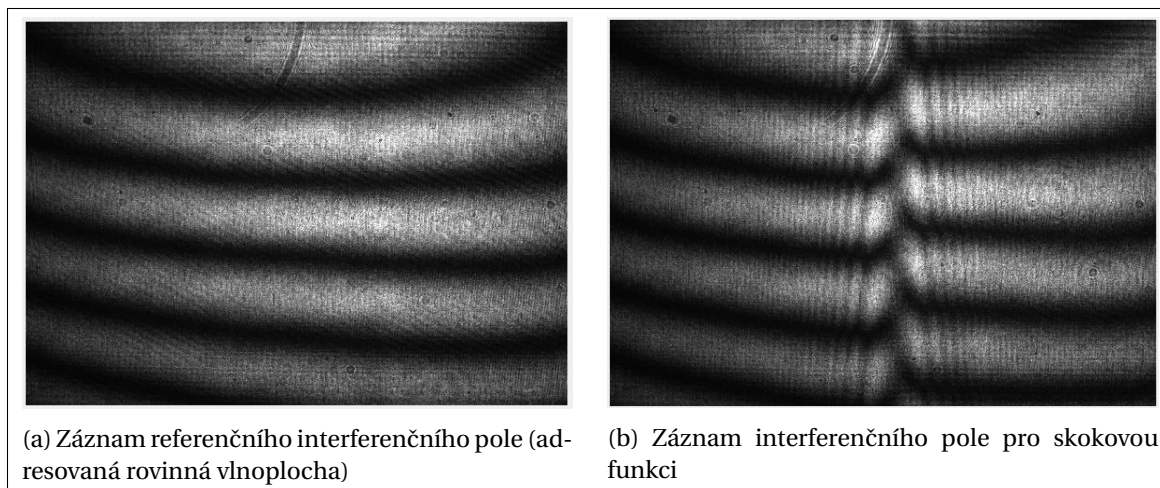
ného na displej fázového modulátoru světla je ovlivňován rozsahem použitého napětí. To má vliv na fázový posuv zejména v místech zlomů wrap fáze, kde velikost skokové změny nebude přesně 2π . Je proto nutné provádět pečlivé korekce a kalibrace použitého rozsahu napětí.

- Nestabilní modulace – Během časového záznamu interferenčního pole může být pozorována nestabilita modulace jedné hodnoty fázového posuvu (nízkofrekvenční změny v čase). Během časového průběhu se fázový posuv generovaný modulátorem může měnit v důsledku hardwarové konstrukce modulátoru.
- Nyquistův limit – V závislosti na velikosti displeje fázového modulátoru bude omezen rozsah možné modulace, který lze charakterizovat pomocí Nyquistova limitu. Zpravidla je doporučováno využít pro 2π fázovou změnu minimálně 4 pixely.
- Tzv. flyback regiony – Flyback oblasti jsou místa měřené fáze, která vznikají v případě výrazně rozdílných hodnot adresovaných dvěma sousedním pixelům modulátoru. Výsledná fáze je spojitá, zatímco adresované pixely mají diskretní charakter. Při adresování velkého rozdílu na sousední pixely nelze tento stav prakticky realizovat, nelze vygenerovat fázi s tak ostrým skokem, jaký je adresován modulátoru. Z fyzikální podstaty existuje limitní hodnota použitého maximálního fázového rozdílu adresovaného na dva sousední pixely taková, která ještě neovlivní výslednou modulovanou fázi v rámci požadovaných tolerancí.
- Difrakce na čtvercové struktuře displeje modulátoru – Displej modulátoru ze své konstrukční podstaty (pixelová struktura) realizuje difrakční mřížku, která dělí odraženou vlnoplochu ve směrech difrakčních maxim. Rozdělená pole interferují a tato parazitní interference ovlivňuje interferometrická měření. Částečně lze lomená pole odfiltrovat pomocí prostorového filtru ve tvaru malé dírky, který by, vzhledem ke schématu na obr. 4.8, byl umístěn do ohniskové roviny objektivu D_2 . Tím by došlo k průchodu pouze nultého difrakčního řádu fokusovaného pole, ostatní boční řády by byly odfiltrovány dopadem na nepropustnou část filtru.
- Geometrická nepřesnost odrazného povrchu modulátoru – Současné běžně dostupné modulátory nejsou vyráběny pro přesná metrologická měření. Jejich odrazný povrch tak není přesně rovinný, a pro velmi přesné aplikace je tedy třeba provádět kalibraci – adresováním korekční plochy nebo pomocí referenčního měření, které bude od měření testovaného vzorku odečítáno.

Na obr. 4.9a je ukázán záznam kalibračního měření fázového modulátoru, konkrétně měření linearitu závislosti modulace na adresovaném fázovém posuvu. Dané měření lze realizovat různými způsoby. Každý výrobce zpravidla doporučuje určitý vhodný postup. V případě realizovaného projektu byla zmíněná kalibrace a její ověření provedeno přímo v soustavě Twyman-Greenova interferometru. Na modulátor byla nejprve adresována nulová modulace (obraz s nulovou konstantní hodnotou stupňů šedi, tj. žádný fázový posuv) a v druhé větvi interferometru bylo umístěno rovinné zrcadlo nakloněné tak, aby se v registrovaném obraze vyskytovalo přibližně pět interferenčních proužků. Následně byly na modulátor přičítány a adresovány konstantní hodnoty fázového posuvu pro celou plochu displeje. Přírůstek adresovaného posuvu byl dán maximálním možným intervalem modulace 2π a rozsahem adresovatelných stupňů šedi, v daném případě 8-bitového kódování hodnotami 0 až 255. Pro každý přírůstek byl zaznamenán fázově posunutý interferogram. Mezi jednotlivými obrazy byl následně vypočten fázový posuv, který charakterizuje linearitu modulace. Pro daný případ je zřejmé, že linearita je potvrzena s RMS přesností 0.03 π a modulovaný rozsah je 2.02 π . Pokud by dané aplikaci kvalita linearitu a rozsahu modulace nedostačovala, je třeba kalibrovat modulátor vhodnými parametry, jejichž výpočet je založen na postupu daném výrobcem. Ten také zpravidla dodává kalibrační data pro vybrané aplikace a použité vlnové délky zdroje záření.



Obrázek 4.9: Záznamy kalibračních měření pro fázový modulátor Holoeye PLUTO

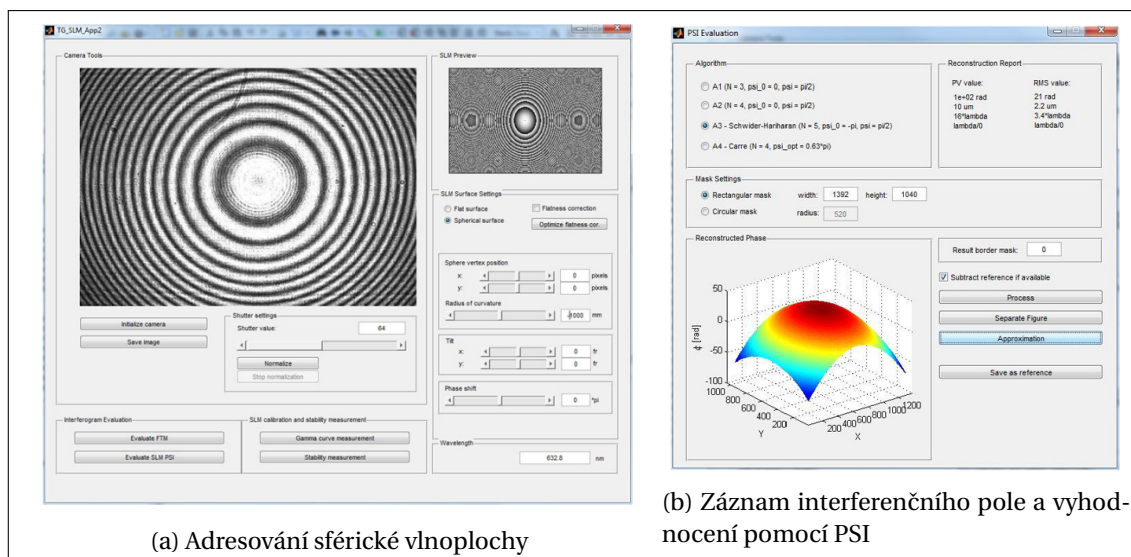


Obrázek 4.10: Flyback regiony při adresaci modulátoru skokovou funkcí

Na obr. 4.9b je ukázán záznam stability modulace v průběhu času. Jsou zde zobrazeny závislosti fázových posuvů (vzhledem k počáteční hodnotě) na čase pro různé hodnoty stupňů šedi. Pro daný modulátor je vidět zřejmá periodická výchylka s maximální RMS amplitudou 0.12π . Nestabilita modulace vzniká v důsledku hardwarové konstrukce modulátoru, kdy použitá elektronika není schopna „udržet“ konkrétní jednu hodnotu adresovaného fázového posuvu na přesné hodnotě. Velmi často jsou totiž komerčně dostupné modulátory konstruovány na aplikace, kdy není třeba zajistit stabilitu adresování po dlouhý časový úsek.

Na obr. 4.10 je ukázán příklad modulace skokové funkce. Jsou zde názorně vidět tzv. flyback regiony, o kterých byla řeč dříve. Z tohoto obrázku je také zřejmá geometrická nepřesnost modulátoru při adresování referenčního rovinného pole. Ta lze ale odstranit metodou měření (záznamem a odečtením referenčního pole).

Na posledním obr. 4.11 je poté ukázán záznam adresování sférické vlnoplochy pomocí fázového modulátoru a její následné vyhodnocení metodou fázového posuvu (PSI).



Obrázek 4.11: Záznam adresování a měření sférické vlnplochy

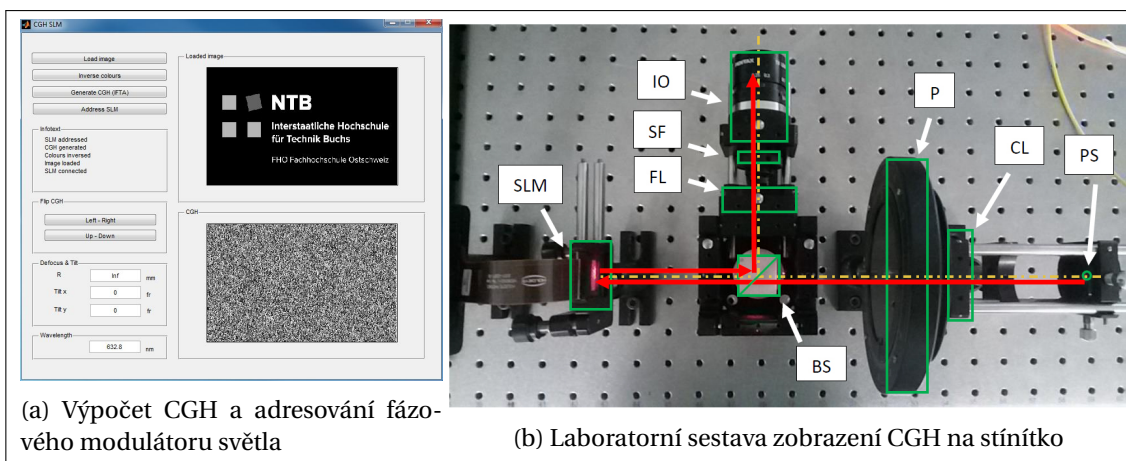
4.4 Zobrazování digitálně generovaných hologramů fázovým modulátorem světla

Digitálně generované hologramy (z angl. CGH – Computer Generated Hologram) jsou původně fixní difrakční optické prvky, jejichž difrakční struktura je vypočítána takovým způsobem, aby prvek plnil požadovanou funkci (generoval požadované vlnové pole) [89, 90]. Zpravidla jsou tyto prvky vyráběny z různých materiálů různými metodami (mikrolitografie pomocí elektronového svazku, leptání iontovým svazkem, plasmové leptání, holografický záznam, apod.). V předchozí kapitole byl zmíněn jeden z možných způsobů generace počítačem generovaných hologramů.

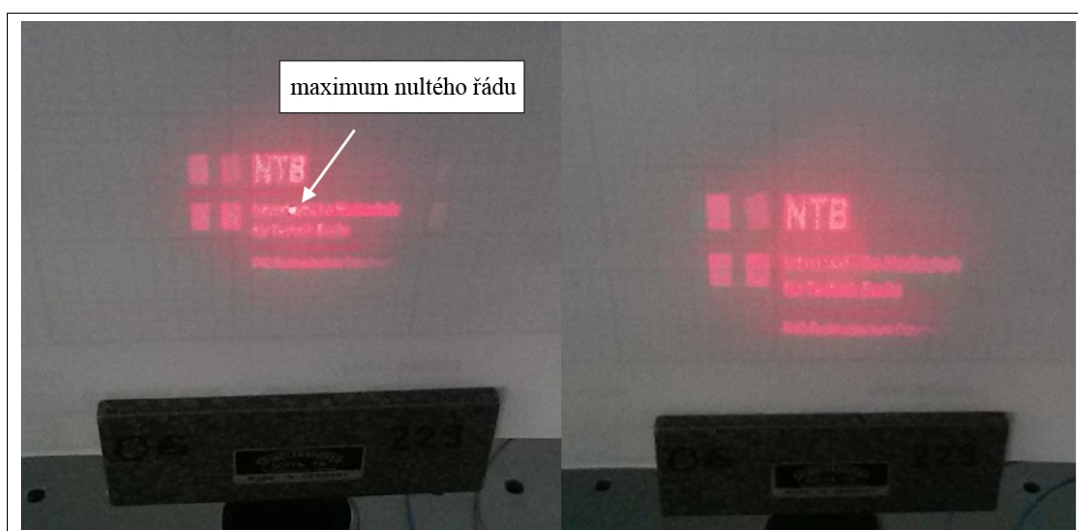
V této části si ukážeme praktickou realizaci výpočtu struktury CGH (v tomto případě fázové masky), která je využita pro adresování na fázový modulátor. Cílem je pomocí fázového modulátoru a vhodné optické soustavy zobrazit v prostoru volené rozložení intenzity. Díky tomu, že využíváme fázový modulátor, jehož adresování je velmi rychlé (v daném případě je modulátor schopen měnit fázovou masku s frekvencí 60 Hz [81]), můžeme použít zařízení k aktivnímu zobrazování časově vyvíjejících se sekvencí nebo videí.

Na obr. 4.12a je ukázán autorem vytvořený jednoduchý program pro výpočet počítačem generovaného hologramu (fázové masky) metodou iterativní Fourierovy transformace a adresování fázového modulátoru světla. Levá horní oblast programu zobrazuje cílové rozložení intenzity, které chceme pomocí modulátoru a optické soustavy zobrazit ve Fourierovské rovině, dolní část poté vypočtenou odpovídající fázovou masku. Na obr. 4.12b je ukázána laboratorní sestava pro zobrazování generovaného obrazu na stínítko. Z bodového zdroje PS vychází kvazimonochromatické záření, které je přes čočku CL kolimováno. Prochází dále přes polarizátor P, který zajišťuje lineární polarizaci ve vhodném směru pro správnou modulaci na fázovém modulátoru, až k fázovému modulátoru světla SLM, kde je vlnění modulováno dle generované fázové masky. Po odrazu od plochy SLM se odražený modulovaný svazek vrací přes dělič svazku BS. Prochází přes čočku FL a prostorový filtr SF, a poté je pomocí zobrazovací soustavy IO generovaný hologram zobrazen na stínítko.

Prostorový filtr je umístěn do ohniskové roviny fokusační čočky FL a jeho úkolem je odstranění nežádoucích difrakčních jevů, které vznikají na modulátoru v důsledku jeho pixelové struktury. Ta se chová jako difrakční mřížka a dělí odražený svazek do směrů odpovídajících difrakčním řádům. V ohniskové rovině čočky FL jsou fokusována všechna tato pole do energetických plošek, jejichž pozice odpovídá difrakčním maximům. Prostorový filtr je navržen tak (malá dírka), aby došlo k odfiltrování bočních řádů. Poté je zobrazován pouze nultý difrakční řád a vliv okolních je velmi dobře



Obrázek 4.12: Laboratorní realizace zobrazení CGH pomocí fázového modulátoru světla



Obrázek 4.13: Stínítko zachycující obraz generovaný pomocí CGH na fázový modulátor světla (před a po potlačení difrakčních artefaktů v důsledku difrakční struktury modulátoru)

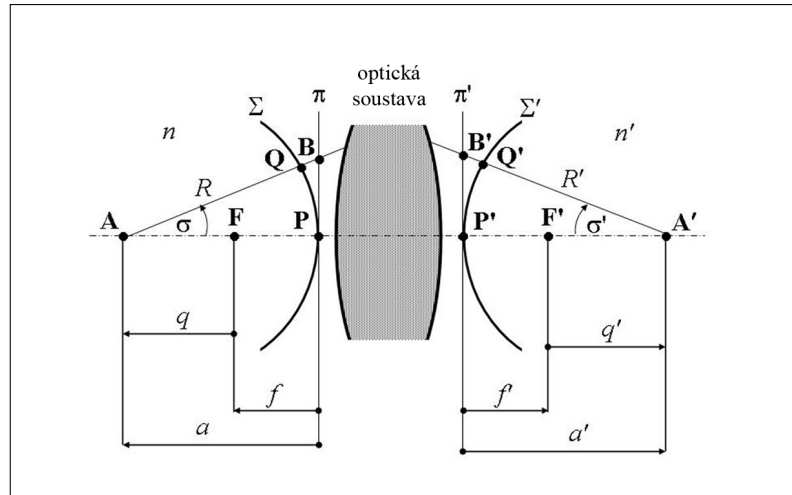
potlačen. V dané situaci je následně filtrovaný obraz vnikající v rovině za prostorovým filtrem SF zobrazován optickou soustavou IO na stínítko.

Snímky stínítka jsou ukázány na obr. 4.13. Na levé části je ukázáno zobrazené pole bez potlačení vlivu nultého difrakčního řádu. V pravé části jsou poté artefakty vzniklé v důsledku difrakční struktury modulátoru potlačeny metodou dodatečného adresování sférické vlnoplochy (generovaný obraz je zaostřen mimo ohniskovou rovinu zobrazovací soustavy, kam je fokusováno difrakční maximum nultého řádu).

4.5 Metody měření a analýza vybraných optických parametrů

4.5.1 Měření ohniskových vzdáleností optických soustav

Termín ohnisková vzdálenost byl poprvé použit v dobách, kdy se studovaly vlastnosti ideálních zobrazovacích optických systémů, tj. systémů, u kterých předpokládáme zobrazení bodu jako bod, zobrazení přímky jako přímku, roviny jako rovinu, atp. [170, 171]. Je to jedna ze základních hodnot charakterizující optickou soustavu. Jak bude ale vzápětí ukázáno, tato teoreticky jedna definovaná



Obrázek 4.14: Základní body optické soustavy [170]

hodnota není v praxi, z důvodu aberací a difrakce reálných optických soustav, jednoznačně realizovatelná.

Základními body optické soustavy jsou, viz obr. 4.14, předmětové ohnisko F , obrazové ohnisko F' , předmětový hlavní bod P a obrazový hlavní bod P' . Obrazové ohnisko F' je obrazem nekonečně vzdáleného osového bodu umístěného před optickou soustavou. Předmětové ohnisko F je obrazem nekonečně vzdáleného osového bodu za optickou soustavou. Obrazová a předmětová ohnisková vzdálenost jsou následně definovány jako vzdálenosti mezi obrazovým nebo předmětovým ohniskem a obrazovým nebo předmětovým hlavním bodem [1, 16, 170]. Hlavní body P a P' jsou opticky sdružené body zobrazené s příčným zvětšením $m = 1$. Ohniska nejsou opticky sdružené body.

Zabývejme se nyní termínem ohnisková vzdálenost z pohledu paraxiální optiky, kdy předpokládáme, že všechny paprsky procházející optickou soustavou nebo prvkem jsou nekonečně blízko optické ose [1, 16]. Základní vztahy popisující paraxiální zobrazovací vlastnosti optické soustavy jsou [1, 16, 170]

$$qq' = ff', \quad \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}, \quad \frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = \frac{n'}{f'}, \quad m = -\frac{q'}{f'} = -\frac{f}{q}. \quad (4.35)$$

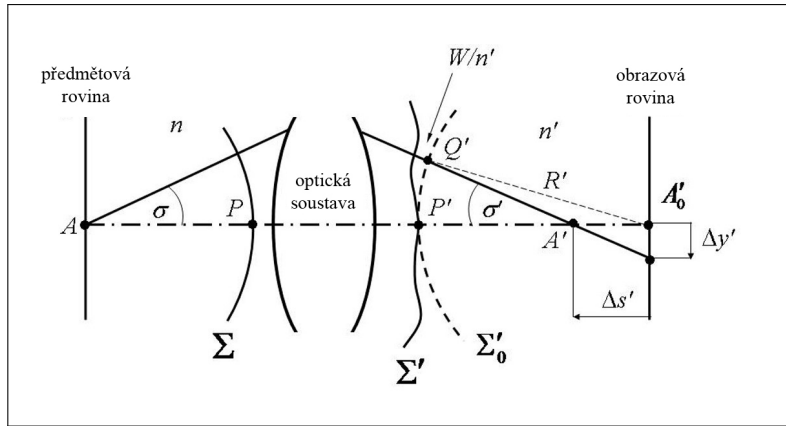
Význam jednotlivých symbolů je patrný z obr. 4.14.

Předpokládejme, že hlavní body P a P' leží na hlavních sférách Σ a Σ' poloměru $R = a$ a $R' = a'$. Je-li předmětový bod A umístěn v nekonečnu ($a \rightarrow -\infty$), předmětová sféra Σ se stane rovinou a obrazová sféra Σ' bude mít v případě ideální optické soustavy poloměr roven obrazové ohniskové vzdálenosti, $R' = f'$. Označíme-li h jako příčnou vzdálenost bodu Q (viz obr. 4.14) od optické osy, poté pro obrazovou ohniskovou vzdálenost platí

$$f' = \frac{h}{\sin \sigma'}. \quad (4.36)$$

V případě reálné optické soustavy situace ale nebude tak snadná. Zobrazení každou reálnou optickou soustavou je zatíženo aberacemi a difrakcí. Tudíž vyvstává otázka, jaká je poloha reálného hlavního bodu a reálná poloha ohniska. Obecně tak existuje nekonečně mnoho ohniskových vzdáleností vzhledem k definici polohy reálných základních bodů optické soustavy.

Schéma optické soustavy zatížené aberacemi je ukázáno na obr. 4.15. Předpokládejme rotačně symetrickou optickou soustavu. Sférická vlnoplocha Σ , která vychází z bodu A a prochází optickou soustavou, není obecně transformována na sférickou vlnoplochu Σ'_0 , ale na obecnou vlnoplochu Σ' . Ve vybraném bodě obrazového prostoru, který je dán úhlem σ' , odpovídá rozdíl mezi ideální



Obrázek 4.15: Optická soustava s aberacemi [170]

vlnoplochou Σ'_0 a vlnoplochou Σ' hodnotě vlnové aberace W . Následně vzhledem k zakřivení vlnoplochy Σ' neprotíná paprsek procházející daným bodem, jelikož paprsek je kolmý na vlnoplochu, optickou osu v bodu A'_0 , jako v případě ideálního zobrazení a totožnosti $\Sigma' \approx \Sigma'_0$, ale v bodě A' , který je od bodu A'_0 vzdálen o hodnotu tzv. podélné paprskové aberace $\Delta s'$. Ideální obrazovou rovinu poté reálný paprsek protíná v bodě vzdáleném od bodu A'_0 o tzv. příčnou paprskovou aberaci $\Delta y'$. Z teorie optických aberací je známo [1, 170], že pro přepočítání hodnot vlnové aberace W a příčné paprskové aberace $\Delta y'$ platí vztah

$$\Delta y' = \frac{R'}{n'} \frac{\partial W}{\partial y'_Q}, \quad (4.37)$$

kde y'_Q značí y -ovou souřadnici bodu Q' na ideální vlnoploše Σ'_0 . V případě polohy předmětového bodu v nekonečnu se bod A' bude blížit k ohnisku F' , ale v důsledku aberací nebude identický. Pro různé paprsky svazku charakterizované úhlem σ' bude pokaždé poloha bodu A' jiná. Obecně tak existuje nekonečně mnoho poloh ohniskových bodů F' , a tím pádem i ohniskových vzdáleností f' .

Situace je o to komplikovanější, že hodnoty aberací optické soustavy závisí na poloze předmětu. Pro různé polohy předmětové roviny se mění hodnoty aberací. Pozice hlavních bodů soustavy je tak také neurčitá. Pro podrobnější popis tohoto vlivu odkážeme čtenáře na publikaci autora této práce a spolupracovníků [170].

Vzhledem k výše zmíněným komplikacím definice ohniska se zavádí pojem tzv. efektivního ohniska. To je bod, který je od paraxiálního ohniska F' vzdálen o hodnotu δ , která je určena na základě vhodného kritéria. Mezi základní dvě v praxi používaná kritéria patří [170]:

- minimalizace vztahu $\sum (\Delta y')^2$ v obrazové rovině,
- minimalizace $\sum W^2$.

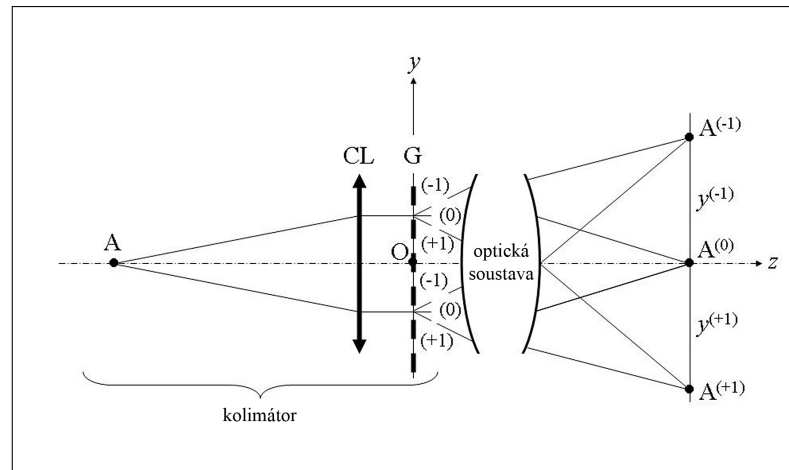
Obecně můžeme také ohniskovou vzdálenost definovat vztahem [170]

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h}{\sin \sigma'} \right), \quad (4.38)$$

který je jednoznačný, ovšem v praxi špatně realizovatelný z pohledu měření hodnoty ohniskové vzdálenosti.

V praxi se realizuje velká řada měřických metod pro určení ohniskové vzdálenosti optické soustavy, a to jak vzdálenosti efektivní tak paraxiální. Jmenujme například následující:

- Abbeova fotometrická metoda – Tato metoda realizuje přesné měření parametrů v rovnici (4.36). V praxi je považována spíše za historizující a využívá se zřídka [170].



Obrázek 4.16: Principiální schéma měření paraxiální ohniskové vzdálenosti a zkreslení optické soustavy pomocí difrakční mřížky [171]

- Porrova metoda – Tato metoda využívá toho, že hlavní a uzlové body (body na ose, pro které je úhlové zvětšení rovno 1) jsou vzájemně konjugované (může být snadno ukázáno pomocí vztahů geometrické optiky [1]). Podrobnosti ohledně praktické realizace může čtenář nalézt např. v práci [170].
- Cornuho metoda – Tato metoda má základy v zobrazovací rovnici $qq' = ff'$ (viz obr. 4.14). Pro soustavu ve vzduchu poté platí $f' = \pm\sqrt{-qq'}$, kde znaménko je určeno z experimentu. Podrobnosti ohledně praktické realizace může čtenář nalézt např. v práci [170].
- Metoda měření příčného zvětšení – Pro ideální optickou soustavu lze úpravou vztahů (4.35) psát:

$$f' = qm, \quad f' = -\frac{q}{m}, \quad f' = \frac{ma}{1-m}, \quad f' = \frac{a'}{1-m},$$

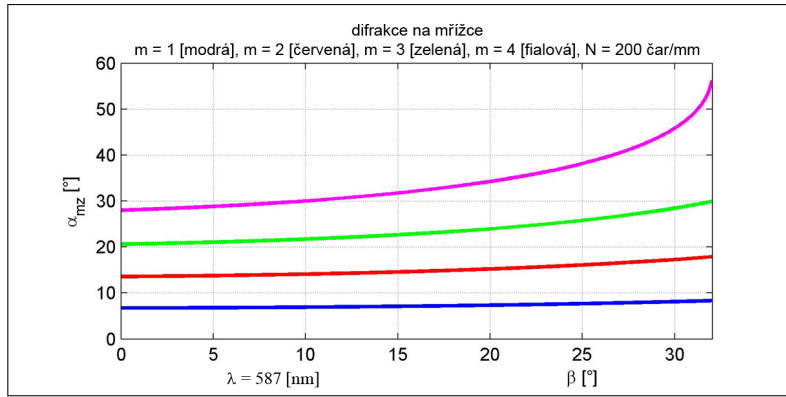
kde m značí příčné zvětšení optické soustavy a další veličiny jsou zřejmé z obr. 4.14. Vhodnou metodou [170] lze poté realizovat přímé nebo nepřímé měření příčného zvětšení m a následně vypočítat hodnotu ohniskové vzdálenosti.

- Interferometrické metody – Ohnisková vzdálenost lze měřit vhodnou modifikací interferometrických metod. V práci [170] je popsána metoda s využitím Fizeauova interferometru.
- Metody přímého měření vlnoplochy – V současnosti existují zařízení, které s poměrně dobrou přesností mohou měřit přímo tvar vlnoplochy, např. Shack-Hartmannův senzor [170]. Z tvaru fokusované vlnoplochy lze poté vypočítat poměrně velmi snadno osový poloměr křivosti vlnoplochy, který je spjat s ohniskovou vzdáleností. Podrobnosti ohledně praktické realizace může čtenář nalézt např. v práci [170].

Autor této práce se podílel na návrhu a realizaci nové a prakticky velmi snadno aplikovatelné metody měření paraxiální ohniskové vzdálenosti a současného určení zkreslení optické soustavy pomocí amplitudové difrakční mřížky [171].

Principiální schéma měřické metody je ukázáno na obr. 4.16. Ze zdroje A vychází záření, které je kolimováno čočkou CL na rovnoběžný svazek paprsků. Tento svazek následně prochází přes difrakční mřížku G, kde se dělí do difrakčních řádů. Optický systém, jehož parametry určujeme, je umístěn za difrakční mřížkou a zobrazuje difrakční řády do jednotlivých maxim $A^{(m)}$, které jsou zaznamenány v detekční rovině.

Ze zobrazovacích rovnic (4.35) lze ukázat, že dopadá-li rovnoběžný svazek do optické soustavy bez aberací pod úhlem α , poté je fokusován do bodu obrazové roviny, který je vzdálen o hodnotu



Obrázek 4.17: Závislost úhlu α_{mz} směru difrakčního řádu vzhledem k optické ose na úhlu β natočení difrakční mřížky (směru dopadajícího svazku na mřížku) [171]

y od optické osy. Pro soustavu ve vzduchu poté platí [171]

$$y = -f' \tan \alpha, \quad (4.39)$$

kde f' je paraxiální obrazová ohnisková vzdálenost. Úhel α je v našem případě realizován difrakční mřížkou.

V obecné situaci dopadá svazek na difrakční mřížku pod nějakým úhlem. Označíme-li tento úhel dopadu rovnoběžného svazku záření na difrakční mřížku (měřeno od normály mřížky) jako β , poté pro difrakční úhly α_m platí [171]

$$a(\sin \alpha_m - \sin \beta) = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.40)$$

kde a je mřížková konstanta, m značí difrakční řád a λ je použitá vlnová délka. Pro náš případ na obr. 4.16 můžeme tedy úhel α_{mz} mezi osou z a lomeným svazkem řádu m určit ze vztahu

$$\alpha_{mz} = \arcsin \left(\sin \beta + \frac{m\lambda}{a} \right) - \beta. \quad (4.41)$$

Na obr. 4.17 je zobrazena závislost úhlu α_{mz} na úhlu natočení mřížky β pro mřížku o prostorové frekvenci $N = 200$ čar/mm a vlnovou délkou $\lambda = 587$ nm. Je patrné, že změnou natočení mřížky můžeme velmi snadno určit úhel α_{mz} , a tak tedy měnit úhel dopadu svazku do optické soustavy, resp. úhel zorného pole optické soustavy. Maximální úhel natočení mřížky β_{\max}^m můžeme analyticky vyjádřit pomocí předchozích vztahů jako

$$\beta_{\max}^m = \arcsin \left(1 - \frac{m\lambda}{a} \right). \quad (4.42)$$

Z výše představeného můžeme formulovat následující princip metody určení paraxiální ohniskové vzdálenosti optické soustavy. Změříme-li hodnotu $y = y^{(+1)} = \overline{A^{(0)}A^{(+1)}}$ (nebo $y = y^{(-1)} = \overline{A^{(0)}A^{(-1)}}$) pro úhel natočení mřížky $\beta = 0$ a $m = 1$, poté můžeme určit ohniskovou vzdálenost optické soustavy jako

$$f' = -\frac{y^{(+1)}}{\tan \alpha_{1z}} = -\frac{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{\lambda} y^{(+1)}. \quad (4.43)$$

Obdobný vztah by platil pro měřenou hodnotu $y = y^{(-1)}$.

Bude-li mít optická soustava zkreslení, poté se poloha $y_{\beta}^{(m)}$ měřených bodů $A^{(m)}$ vyšších řádů bude lišit od poloh $y_{0,\beta}^{(m)}$ svých apriorních paraxiálních obrazů, které můžeme vypočítat pomocí vztahu $y_{0,\beta}^{(m)} = f' \tan \alpha_{mz}$, kde f' je ohnisková vzdálenost určená dle (4.43) a úhel α_{mz} je dán vztahem (4.41). Pro zkreslení δy následně bude platit

$$\delta y = y_{\beta}^{(m)} - y_{0,\beta}^{(m)}. \quad (4.44)$$

Všechny hodnoty jsme schopni určit z měření, a tím pádem můžeme v rámci jednoho záznamu difrakčních maxim vypočítat paraxiální ohniskovou vzdálenost a zkreslení optické soustavy.

Postup experimentální realizace poté můžeme shrnout do následujících kroků:

1. Kolimátor a difrakční mřížku s nulovým natočením vzhledem k optické ose ($\beta = 0$) umístíme před testovanou optickou soustavu tak, aby optická osa kolimátoru byla totožná s optickou osou soustavy.
2. Zaměříme polohy prvních difrakčních řádů ($m = +1$), $y^{(+1)} = \overline{A^{(0)}A^{(+1)}}$ ($y^{(+1)} < 0$ pro $f' > 0$) a vypočteme ohniskovou vzdálenost $f'^{(+1)}$ dle vztahu (4.43). Stejně je vypočtena hodnota ohniskové vzdálenosti $f'^{(-1)}$ pro $y^{(-1)} = \overline{A^{(0)}A^{(-1)}}$. Výsledná ohnisková vzdálenost optické soustavy je dána průměrem, platí $f' = [f'^{(+1)} + f'^{(-1)}]/2$. Obecně jsme se zde vědomě dopustili chyby ze zanedbání zkreslení optické soustavy pro první difrakční řády. Budou-li ale hodnoty $y^{(+1)}$ a $y^{(-1)}$ menší než čtvrtina poloměru zorného pole optické soustavy, můžeme vliv zkreslení zanedbat [171]. Hodnota vypočtené ohniskové vzdálenosti bude následně použita pro výpočet zkreslení optické soustavy.
3. Změříme hodnoty příčných vzdáleností pro vyšší difrakční řády, tedy $y^{(m)} = \overline{A^{(0)}A^{(m)}}$.
4. Vypočteme hodnotu apriorní paraxiální hodnoty $y_0^{(m)} = f' \tan \alpha_{mz}$, kde pro difrakční úhel platí vztah $\tan \alpha_{mz} = m\lambda / [a^2 - (m\lambda)^2]^{1/2}$.
5. Hodnota zkreslení pro odpovídající paraxiální obrazovou výšku $y_0^{(m)}$ bude dána jako $\delta y = y^{(m)} - y_0^{(m)}$.

Natočením difrakční mřížky poté můžeme určit zkreslení obdobným způsobem i pro ostatní polohy v obraze [171], a pokrýt tak většinu oblastí zobrazených testovanou optickou soustavou.

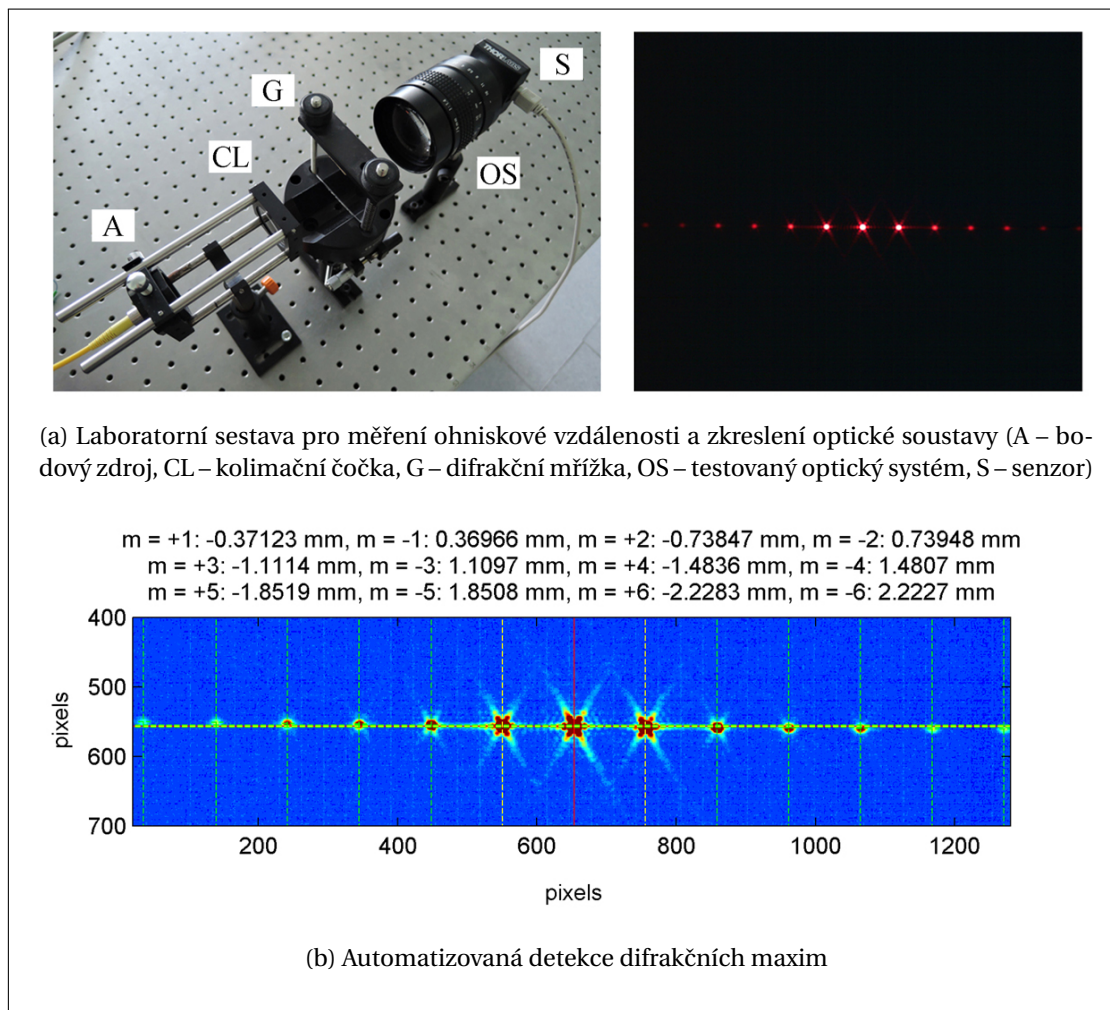
Autoři v práci [171] studují dále vliv nejistot měření a vliv aberací optické soustavy na vypočtenou hodnotu ohniskové vzdálenosti. Zájemce o detailnější popis odkážeme na zmíněnou literaturu.

Na obr. 4.18a je zobrazena ukázka laboratorní sestavy pro měření ohniskové vzdálenosti a zkreslení optické soustavy společně se zaznamenaným intenzitním obrazem difrakčních maxim. V experimentu byla použita difrakční mřížka o konstantě $a = 0.127$ mm, zdroj o vlnové délce $\lambda = 631.6$ nm a testován byl objektiv COMISAR 1:1.4, $f' = 75$ mm. Clonové číslo $F = 16$ bylo nastaveno irisovou clonou. Na obr. 4.18b je zobrazen záznam automatizované detekce difrakčních maxim. Použitý senzor byla CMOS kamera Thorlabs DCC1645C o rozměru pixelu $3.6 \mu\text{m}$. Výsledná hodnota ohniskové vzdálenosti určená z prvního difrakčního maxima je $f' = (74.487 \pm 0.066)$ mm. Tato hodnota byla ověřena nezávislým měřením pomocí komerčně dostupného zařízení Opti-Centric MOP2R firmy Trioptics [37], $f' = (74.52 \pm 0.08)$ mm. Hodnoty jsou v rámci výsledných nejistot shodné. Podrobnější informace k výpočtu nejistot navržené metody najde čtenář v práci [171], která je součástí této práce a jejíž kopii lze nalézt v příloze.

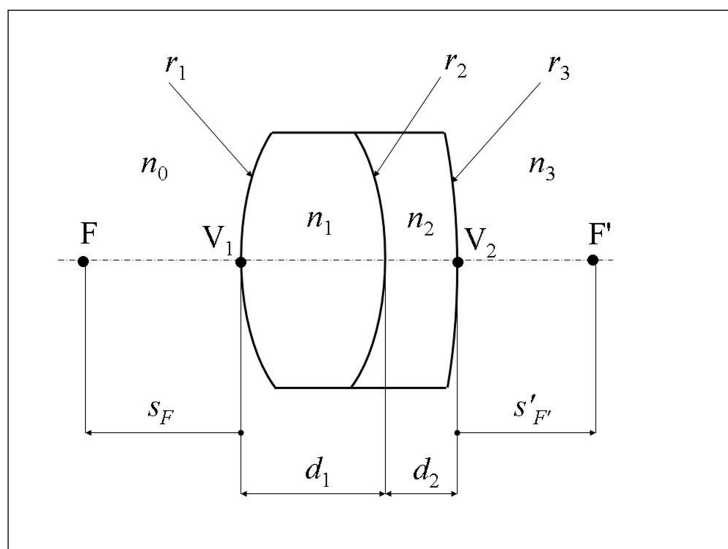
4.5.2 Experimentální analýza tmeleného dubletu

Tmelený dublet je jeden ze základních optických prvků používaných v optické praxi [172, 173]. Na obr. 4.19 je ukázáno jeho schéma. Skládá se ze dvou sférických čoček takových, že poloměr křivosti druhé plochy první čočky je totožný s poloměrem křivosti první plochy druhé čočky. Obě čočky jsou k sobě stmeleny. V praxi je poměrně snadné měřit vnější parametry dubletu, ovšem určení vnitřních parametrů není triviální. V pracích [172, 173] se autor podílel na návrhu metody pro určení vnitřních parametrů na základě měření, která nevyžadují destrukci dubletu.

Tmelený dublet má několik základních konstrukčních parametrů. Jmenovitě to jsou poloměry křivosti sférických ploch (r_1 , r_2 a r_3), hodnoty osové tloušťky čoček (d_1 a d_2) a indexy lomu materiálů čoček (n_1 a n_2). Na obr. 4.19 dále F a F' značí předmětové a obrazové ohnisko dubletu, n_0 a



Obrázek 4.18: Experimentální realizace měření ohniskové vzdálenosti a zkreslení optické soustavy pomocí difrakční mřížky [171]



Obrázek 4.19: Schéma tmeleného dubletu [172, 173]

n_3 indexy lomu předmětového a obrazového prostředí, V_1 a V_2 osové vrcholy dubletu, s_F a $s'_{F'}$ jsou osové vzdálenosti ohnisek od vrcholů.

Použitím vztahů geometrické optiky lze ukázat, že pro optickou mohutnost dubletu φ , vzdálenosti s_F a $s'_{F'}$ a vzdálenost s' mezi vrcholem V_2 a obrazem osového bodu platí vztahy [172, 173]

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - D_1(\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3) - D_2(\varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3) + D_1D_2\varphi_1\varphi_2\varphi_3, \quad (4.45)$$

$$s_F = n_0(D_1\varphi_2 + D_1\varphi_3 + D_2\varphi_3 - D_1D_2\varphi_2\varphi_3 - 1)/\varphi, \quad (4.46)$$

$$s'_{F'} = -n_3(D_1\varphi_1 + D_2\varphi_1 + D_2\varphi_2 - D_1D_2\varphi_1\varphi_2 - 1)/\varphi, \quad (4.47)$$

$$s' = \frac{n_0n_3(D_1 + D_2 - D_1D_2\varphi_2) - s'_{F'}\varphi}{\varphi(s_F - s)}, \quad (4.48)$$

kde s je vzdálenost předmětu na optické ose od předního vrcholu dubletu V_1 . Pro optické mohutnosti φ_1 , φ_2 a φ_3 jednotlivých sférických ploch platí

$$\varphi_1 = \frac{n_1 - n_0}{r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{n_2 - n_1}{r_2}, \quad \varphi_3 = \frac{n_3 - n_2}{r_3}$$

a pro redukované tloušťky D_1 a D_2 platí $D_1 = d_1/n_1$ a $D_2 = d_2/n_2$.

Z obr. 4.19 je patrné, že velmi snadno půjde změřit hodnoty předního a zadního poloměru křivosti r_1 a r_2 . Dále je možné měřit celkovou osovou tloušťku dubletu $d = d_1 + d_2$, pozice předmětového a obrazového ohniska s_F a $s'_{F'}$, a ohniskovou vzdálenost $f' = n_3/\varphi$ mezi druhým hlavním bodem dubletu a obrazovým ohniskem jednou z metod uvedených například v [170, 171]. Dále je možné měřit jednotlivé tloušťky čoček d_1 a d_2 například pomocí zařízení OptiCentric firmy Trioptics [37].

Předpokládejme nyní dublet ve vzduchu, $n_0 = n_3 = 1$, což je v praxi nejběžnější případ. Cílem bude nyní určit hodnoty vnitřních parametrů dubletu, tedy indexů lomu n_1 a n_2 a poloměru křivosti r_2 , jsou-li změřeny hodnoty poloměrů r_1 a r_3 , tloušťek d_1 a d_2 obou čoček, ohniskové vzdálenosti dubletu $f' = 1/\varphi$ a pozic ohnisek s_F a $s'_{F'}$. Z výše uvedených vztahů (4.45)–(4.48) pro dublet ve vzduchu poté dostáváme [172, 173]

$$n_2 = \frac{d_2 + \varphi^2 d_2 (s_F s'_{F'} + r_1 r_3 - r_3 s_F - r_1 s'_{F'})}{d_2 + r_3 - \varphi r_3 (d_1 - r_1) + \varphi^2 s'_{F'} (d_2 s_F + r_3 s_F - d_2 r_1 - r_1 r_3)}. \quad (4.49)$$

Pro index lomu n_1 první čočky poté dostáváme

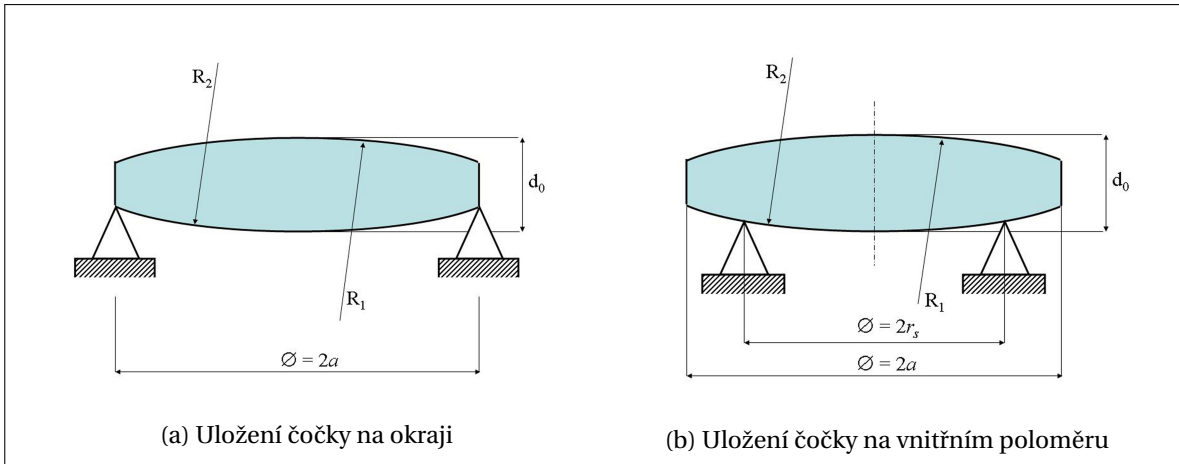
$$n_1 = \frac{\varphi d_1 n_2 r_3 (r_1 - s_F)}{r_1 (d_2 n_2 - d_2 + n_2 r_3) - \varphi n_2 r_3 s_F (d_1 - r_1)}. \quad (4.50)$$

Následně pro poloměr křivosti r_2 platí

$$\begin{aligned} r_2 &= -\frac{d_1 \left[\frac{d_2(n_2-1)}{n_2 r_3} + 1 \right] (n_1 - n_2)}{n_1 \left[\varphi s_F + \frac{d_1(n_2-1)}{n_1 r_3} + \frac{d_2(n_2-1)}{n_2 r_3} + 1 \right]} \\ &= -\frac{d_2 \left[\frac{d_1(n_1-1)}{n_1 r_1} - 1 \right] (n_1 - n_2)}{n_2 \left[\varphi s'_{F'} + \frac{d_2(n_1-1)}{n_2 r_1} + \frac{d_1(n_1-1)}{n_1 r_1} - 1 \right]}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Praktickou ukázkou měření a vyhodnocení vnitřních parametrů dubletu může čtenář nalézt prezentovanou v práci [173].

V některých případech není možné měřit tloušťku jednotlivých čoček d_1 a d_2 , ale pouze celkovou tloušťku d . V případě, že není možné měřit ani jednotlivé indexy lomu n_1 a n_2 , přechází problém na úlohu nalezení hodnot pěti neznámých parametrů $\{n_1, n_2, d_1, d_2, r_2\}$. Je tedy třeba sestavit alespoň pět rovnic, nebo využít optimalizačních metod [75].



Obrázek 4.20: Deformace horizontálně uložené sférické čočky vlivem vlastní hmotnosti [174]

Vstupem pro sestavení rovnic nebo pro optimalizační úlohu mohou být přímo měřené hodnoty vnějších parametrů dubletu, tj. poloměry křivosti r_1 a r_3 a celková tloušťka dubletu d . Dále je možné měřit vhodnou metodou ohniskovou vzdálenost f' , vzdálenosti s_F , $s_{F'}$, nebo s' (například pro $s = 0$). Je také možné do výpočtu zahrnout měření příčných a podélných paprskových aberací nebo vlnové aberace, a to pro předmět buď v nekonečnu ($s = \infty$) nebo v konečné vzdálenosti ($s \neq \infty$). Také je možné dublet otočit o 180 stupňů a provést odpovídající měření v reverzní pozici. Hodnoty koeficientů vyjadřující aberace mohou být určeny například interferometricky. Je potřebné je doplnit do výpočetního modelu, aby byly vnitřní parametry dubletu určeny co možná nejjednodušeji. Podrobnější popis daného problému může čtenář nalézt například v práci [173], která je součástí disertační práce (viz příložené vybrané publikace).

4.5.3 Vliv vlastní hmotnosti sférické čočky na přesnost interferometrických měření jejího tvaru

Během velmi přesných optických interferometrických měření jsou vyhodnocovány odchylky tvaru měřeného komponentu od jeho nominálních parametrů. Tyto odchylky jsou způsobeny jednak výrobním procesem, ale také dalšími vlivy, které je třeba zohlednit ve vyhodnocení. Jedním z nich je deformace prvku v důsledku působení tíhového pole na tento prvek, jinými slovy vliv vlastní hmotnosti prvku je jeho vlastní deformaci.

V práci [174] se autor se spolupracovníky zabývali problémem deformace sférické čočky při jejím horizontálním uložení během interferometrického měření. Toto je nejčastější případ uložení čočky v reálné praxi.

Schéma čočky je ukázáno na obr. 4.20a a 4.20b. Na obr. 4.20a je prezentován případ uložení čočky o poloměrech křivosti R_1 a R_2 a osové tloušťku d_0 při podpoře na okraji, na obr. 4.20b poté v případě podpory uvnitř v bodech o poloměru r_s .

Zmiňovanou čočku můžeme předpokládat jako kruhovou desku proměnné tloušťky. Jak je známo z teorie pružnosti, pro vertikální deformaci w desky proměnné tloušťky při působení symetrického zatížení platí [160, 161, 174]

$$\varphi = -\frac{dw}{dr}, \quad M = D(r) \left[\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right], \quad (4.52)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right] \frac{d\varphi}{dr} + \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right] \frac{\varphi}{r} = \frac{Q(r)}{D(r)},$$

kde

$$D(r) = \frac{Ed^3(r)}{12(1-\nu^2)}, \quad q(r) = d(r)\rho g,$$

$w = w(r)$ je vertikální výchylka desky (čočky), r je radiální vzdálenost od centra čočky, ν je Poissonův poměr, E je Youngův modul pružnosti, ρ je objemová hustota, g je gravitační zrychlení, $d(r)$ je tloušťka desky v pozici r měřené od jejího středu, $\varphi = \varphi(r)$ je sklon tangenty střednicové plochy čočky, $M = M(r)$ je radiální vnitřní moment na jednotkovou délku, $D(r)$ je ohybová tuhost, $q(r)$ je zatížení, $Q(r)$ je síla na jednotku vzdálenosti. Je-li čočka sférická, poté pro její tloušťku platí dle obr. 4.20a vztah

$$d(r) = d_0 - R_1 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2} \right] + R_2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^2} \right] \quad (4.53)$$

$$\approx d_0 - a_2 r^2 - a_4 r^4 - a_6 r^6,$$

kde

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad a_4 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right), \quad a_6 = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{R_1^5} - \frac{1}{R_2^5} \right),$$

kde R_1 a R_2 jsou poloměry křivosti čočky a d_0 její osová tloušťka. Použitím vztahů (4.52) a (4.53) dostáváme

$$\frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} = \frac{3r}{d(r)} \left[\frac{1}{R_2 \sqrt{1 - (r/R_2)^2}} - \frac{1}{R_1 \sqrt{1 - (r/R_1)^2}} \right] \quad (4.54)$$

$$\approx - \frac{6(a_2 r + 2a_4 r^3 + 3a_6 r^5)}{d(r)}.$$

Vhodnou volbou okrajových podmínek můžeme pomocí výše uvedených vztahů nalézt řešení pro průhyb čočky.

V případě podepření čočky na okraji (obr. 4.20a) můžeme předpokládat okrajové podmínky ve tvaru

$$w(r)|_{r=a} = 0, \quad M(r)|_{r=a} = 0, \quad (4.55)$$

kde a značí poloměr čočky a pro sílu $Q(r)$ platí

$$Q(r) = \frac{1}{r} \int_0^r q(r) r dr = \rho g [I(r) - I(0)] \quad (4.56)$$

$$\approx \rho g (d_0 r / 2 - a_2 r^3 / 4 - a_4 r^5 / 6 - a_6 r^7 / 8),$$

kde

$$I(r) = \int d(r) r dr$$

$$= \frac{r^2}{2} (d_0 - R_1 + R_2) - \frac{R_1 \sqrt{1 - (r/R_1)^2}}{3} (R_1^2 - r^2) + \frac{R_2 \sqrt{1 - (r/R_2)^2}}{3} (R_2^2 - r^2),$$

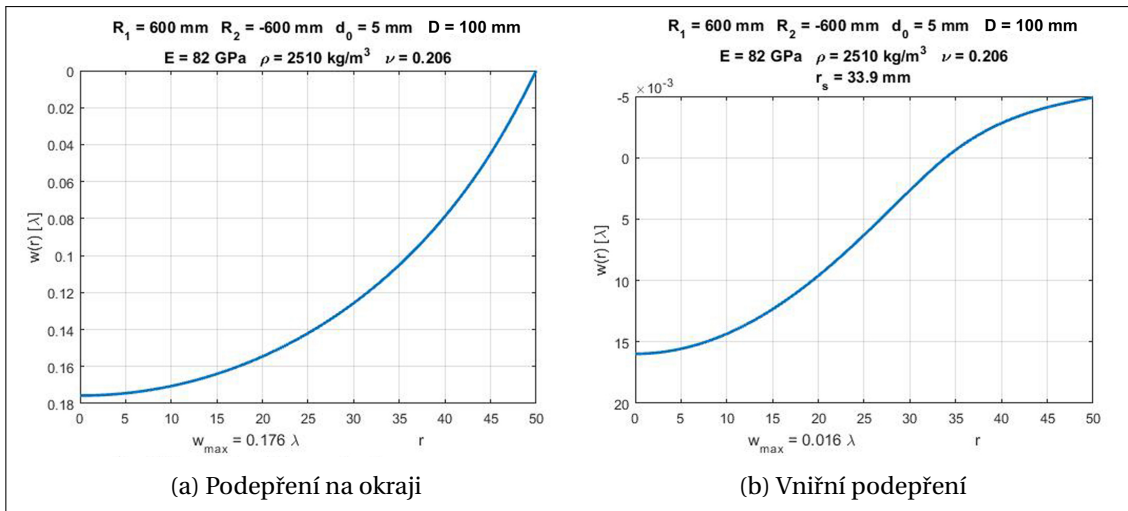
$$I(0) = \frac{R_2^3 - R_1^3}{3}.$$

V případě čočky podepřené na vnitřním poloměru r_s (obr. 4.20b) je vzhledem k diskontinuitě řešení nutné rozdělit výpočet na dvě části. Hledejme tak průhyb $w_1(r)$ na intervalu $r \in [0, r_s]$ a průhyb $w_2(r)$ na intervalu $r \in [r_s, a]$. Okrajové podmínky poté můžeme zapsat ve tvaru [174]

$$w_1(r)|_{r=r_s} = w_2(r)|_{r=r_s} = 0, \quad M_2(r)|_{r=a} = 0. \quad (4.57)$$

Následně musí také platit podmínky spojitosti povrchu čočky v bodě $r = r_s$, platí [174]

$$\varphi_1(r)|_{r=r_s} = \varphi_2(r)|_{r=r_s}, \quad M_1(r)|_{r=r_s} = M_2(r)|_{r=r_s}. \quad (4.58)$$



Obrázek 4.21: Deformace sférické čočky vlivem vlastní váhy

Síla $Q(r)$ na intervalu $r \in [0, r_s]$ bude stejná jako v případě okrajové podpory čočky, označme ji nyní $Q_1(r)$. V bodě $r = r_s$ dojde však ke změně jako důsledek reakce podpěry, poté můžeme pro síly $Q_1(r)$ na intervalu $r \in [0, r_s]$ a $Q_2(r)$ na intervalu $r \in [r_s, a]$ psát

$$Q_1(r) = \frac{1}{r} \int_0^r q(r)r dr = \frac{\rho g}{r} [I(r) - I(0)], \quad (4.59)$$

$$Q_2(r) = -\frac{1}{r} \int_r^a q(r)r dr = -\frac{\rho g}{r} [I(a) - I(r)].$$

Rozdíl v hodnotách sil $Q_1(r_s)$ a $Q_2(r_s)$ odpovídá reakci podpory.

Numerické řešení výše představených vztahů charakterizující průhyb sférické čočky lze provést různými způsoby, viz přehled metod v práci autora a spolupracovníků [174].

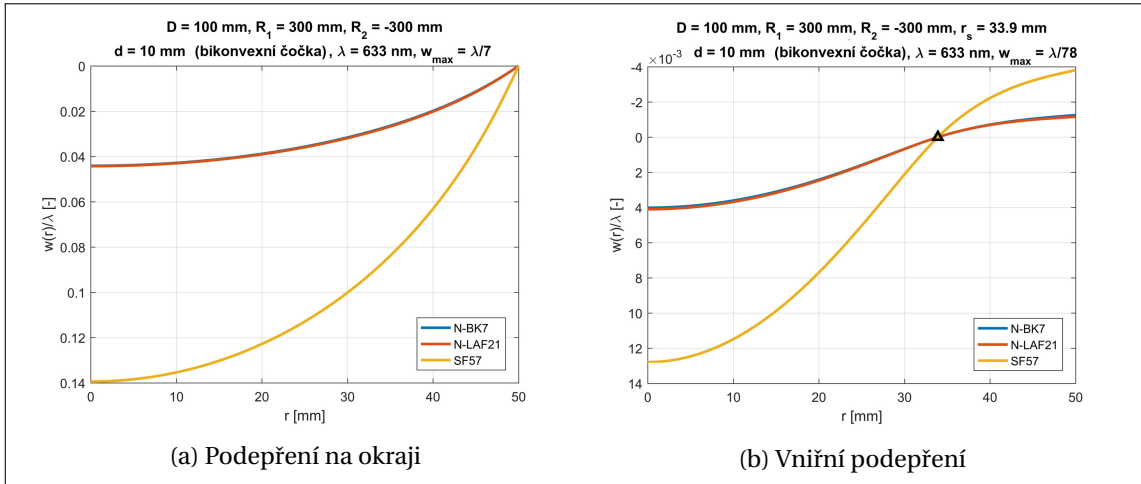
Na obr. 4.21 je ukázán příklad numerického řešení průhybu pro sférickou čočku s parametry $R_1 = 600$ mm, $R_2 = -600$ mm, $d_0 = 5$ mm, $a = 50$ mm, $E = 82$ GPa, $\rho = 2510$ kg/m³, $\nu = 0.206$, a to jak pro případ podepření na okraji, tak na vnitřním poloměru $r_s = 33.9$ mm. Poznamenejme, že měřítko obr. 4.21b je 10^{-3} , a tedy rozdíl mezi zvolenými druhy podepření je enormní.

Na obr. 4.22 a obr. 4.23 jsou ukázány příklady deformace bikonvexní a bikonkávní čočky pro různé druhy materiálů. Geometrické parametry čočky v prvním případě byly zvoleny $R_1 = 300$ mm, $R_2 = -300$ mm, $d_0 = 10$ mm, $a = 50$ mm. Pro případ druhý poté $R_1 = -300$ mm, $R_2 = 300$ mm, $d_0 = 10$ mm, $a = 50$ mm. Jako materiály byly zvoleny optická skla SF57 s $E = 54$ GPa, $\rho = 5.51$ g/cm³ a $\nu = 0.248$, N-BK7 s $E = 82$ GPa, $\rho = 2.51$ g/cm³ a $\nu = 0.206$ a N-LAF21 s $E = 124$ GPa, $\rho = 4.28$ g/cm³ a $\nu = 0.295$. Je zřejmé, že vlastní váha čočky může způsobit deformaci, kterou není možné v některých aplikacích zanedbat. Například v případě podepření na okraji pro materiál SF57 je maximální výchylka rovna $w_{\max} = \lambda/7$ pro $\lambda = 633$ nm, což může v případě velmi přesných měření hrát významnou roli (vybrané interferometrické metody mohou určit deformaci až s přesností setin vlnové délky).

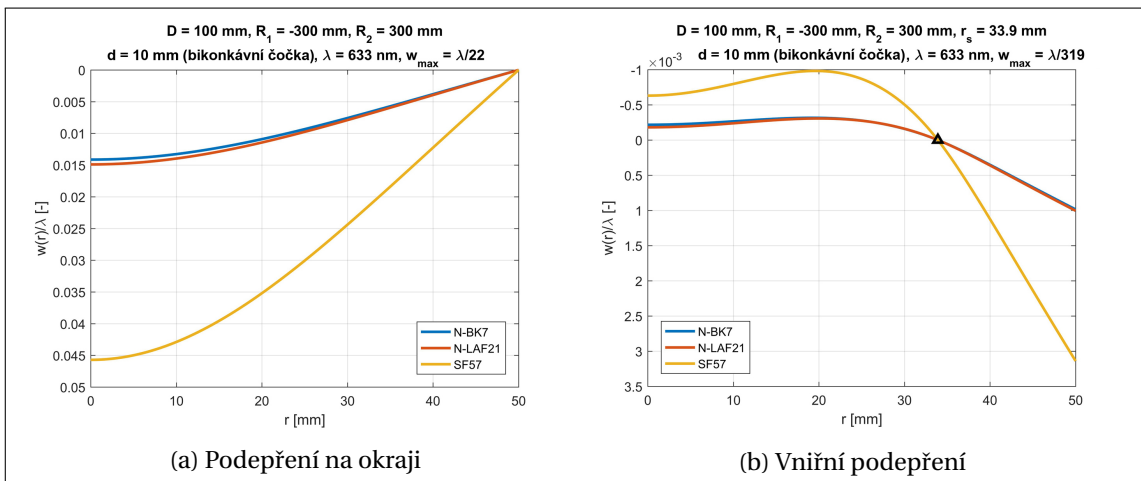
4.5.4 Vliv sférické aberace optické soustavy na její hloubku ostrosti

V pracích [175, 176] se autor a spolupracovníci zabývali vlivem sférické aberace optické soustavy na její hloubku ostrosti.

Hloubka ostrosti optické soustavy je jednou z důležitých zobrazovacích vlastností optické soustavy charakterizující oblast obrazového prostoru, ve které je průměr rozptylového kroužku přibližně stejný nebo menší než zadaná hodnota. Průměr rozptylového kroužku charakterizuje průměr plošky, do které se „zobrazí“ bod předmětu a kterou ještě akceptujeme jako „obrazový bod“.



Obrázek 4.22: Deformace bikonvexní čočky vlivem vlastní váhy



Obrázek 4.23: Deformace bikonkávní čočky vlivem vlastní váhy

V důsledku difrakce světla a aberací optické soustavy není totiž obrazem bodu bod, ale určité rozdělení energie, tzv. rozptylová funkce bodu [1, 16]. Zobrazujeme-li osově body rotačně symetrickou soustavou s kruhovou pupilou bez aberací, poté je průměr centrální části rozptylové funkce bodu v paraxiální obrazové rovině, tzv. Airyho disk, dán vztahem $d_A = 2.4\lambda F$, kde λ je vlnová délka a F značí clonové číslo soustavy. Jestliže je ale optická soustava zatížena aberacemi, bude průměr rozptylového kroužku záviset na velikosti těchto aberací. V případě zobrazení bodů ležících na optické ose rotačně symetrické optické soustavy, pak průměr rozptylového kroužku závisí na sférické aberaci soustavy.

Vhodnou volbou průběhu sférické aberace můžeme tedy ovlivňovat průměr rozptylového kroužku v závislosti na vzdálenosti od paraxiální obrazové roviny soustavy. Pripustíme-li určitou velikost rozptylového kroužku jako přijatelnou pro naše účely, potom bude, jak již bylo dříve řečeno, existovat určitá část prostoru, kde bude průměr rozptylového kroužku menší nebo roven námi přijaté hodnotě. Této části prostoru pak říkáme hloubka ostrosti optické soustavy. Vhodnou volbou průběhu sférické aberace tedy můžeme ovlivňovat hloubku ostrosti optické soustavy při zobrazení bodů ležících na optické ose.

Sférickou aberaci můžeme hodnotit vzhledem k její velikosti dvěma způsoby, a to z pohledu vlnové nebo geometrické optiky, resp. vlnových nebo paprskových aberací. Vlnové aberace je vhodné použít pouze pro malé hodnoty aberací optické soustavy. Pro jejich větší hodnoty je výhodnější přistoupit ke geometricko-optickému popisu. V případě aberace $W > 2\lambda$ můžeme také zanedbat vliv difrakce a zabývat se pouze paprskovými aberacemi [175, 176].

Předpokládáme-li nyní, že rotačně symetrická optická soustava je zatížena pouze aberacemi třetího a pátého řádu, poté můžeme vlnovou aberaci W zapsat pomocí řady Seidelových polynomů, platí [175, 176]

$$W = W_{20}r^2 + W_{40}r^4 + W_{60}r^6, \quad (4.60)$$

kde r je normalizovaná polární souřadnice bodu v rovině výstupní pupily nebo referenční sféry optického systému, W_{20} představuje podélnou defokusaci, W_{40} sférickou aberaci třetího řádu a W_{60} sférickou aberaci pátého řádu.

Zobrazení optickou soustavou s malými aberacemi ($W < 0.5\lambda$) můžeme charakterizovat tzv. Strehlovou definicí SD (poměr mezi maximální hodnotou rozptylové funkce bodu soustavy s aberacemi a maximální hodnotou rozptylové funkce bodu ideální optické soustavy bez aberací [1, 16, 175, 176]), pro kterou v daném případě platí [1, 16, 175, 176]

$$SD \approx 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 E_0, \quad (4.61)$$

kde

$$E_0 = \frac{W_{20}^2}{12} + W_{20} \left(\frac{W_{40}}{6} + \frac{3W_{60}}{20} \right) + \left(\frac{4W_{40}^2}{45} + \frac{W_{40}W_{60}}{6} + \frac{9W_{60}^2}{112} \right) = e_2 W_{20}^2 + e_1 W_{20} + e_0$$

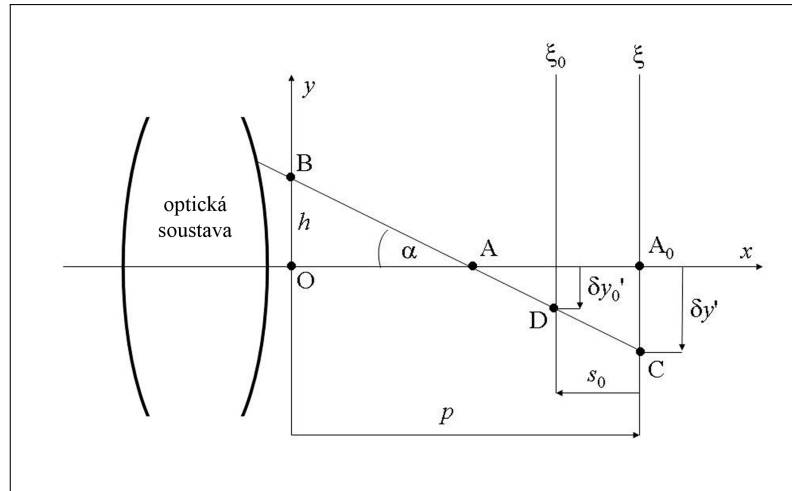
a aberační koeficienty můžou být vypočteny jako [175, 176]

$$W_{20} = -\frac{s_0}{8F^2}, \quad W_{60} = \frac{\Delta s'_k}{24F^2(1-q_0)} = -\frac{\Delta s'_{\text{ext}}}{6F^2 q_0^2}, \quad W_{40} = -\frac{3}{2} q_0 W_{60},$$

kde F je clonové číslo optické soustavy, s_0 je defokusace, $\Delta s'_k$ je podélná sférická aberace pro okraj výstupní pupily ($r = 1$), $q_0 = r_0^2$ je korekční zóna, pro kterou je podélná sférická aberace korigována (tj. je rovna nule pro $r = r_0$), a $\Delta s'_{\text{ext}}$ je extrémní hodnota podélné sférické aberace.

Budeme-li požadovat, aby Strehlova definice byla shodná pro dvě obrazové roviny soustavy s aberacemi symetricky položené ve vzdálenostech $\pm s_0$ vzhledem k paraxiální obrazové rovině soustavy bez aberací (oblast hloubky ostrosti), poté musí platit $e_0 = 0$. Dosazením a řešením poté dostáváme podmínku pro korekční zónu sférické aberace q_0 [175, 176]

$$W_{40} = -\frac{3}{2} q_0 W_{60} = -\frac{9}{10} W_{60}, \quad q_0 = r_0^2 = 3/5. \quad (4.62)$$



Obrázek 4.24: Příčná sférická aberace optické soustavy [175, 176]

Požadujeme-li tedy, aby Strehlova definice optické soustavy s malými aberacemi byla stejná pro dvě symetricky položené roviny vzhledem k paraxiální obrazové rovině, poté musí být sférická aberace korigována pro zónu $r_0 = \sqrt{3/5} = 0.7746$.

Hloubku ostrosti také můžeme charakterizovat požadavkem na požadovanou varianci $(E_0)_p$ vlnové aberace v rovinách $\pm(s_0)_p$ vzhledem k paraxiální obrazové rovině. Poté dostáváme [175, 176]

$$W_{40} = \pm 5.351 \sqrt{12(E_0)_p - (W_{20})_p^2}, \quad (W_{20})_p = -\frac{(s_0)_p}{8F^2}. \quad (4.63)$$

Dále bude platit

$$W_{60} = -\frac{10}{9} W_{40} = \mp 5.946 \sqrt{12(E_0)_p - (W_{20})_p^2}. \quad (4.64)$$

Můžeme tak vypočítat hodnoty koeficientů W_{40} a W_{60} pro případ optické soustavy zatížené sférickou aberací třetího a pátého řádu. Aby bylo řešení reálné, musí platit

$$|(s_0)_p| \leq 16F^2 \sqrt{3(E_0)_p}. \quad (4.65)$$

Tento vztah lze použít k prvnímu odhadu maximální hloubky ostrosti optické soustavy pro danou hodnotu variance $(E_0)_p$.

Pro případ velkých aberací přistupme k charakterizaci hloubky ostrosti rotačně symetrické optické soustavy pomocí paprskových aberací. Pro příčnou paprskovou aberaci $\delta y'$ třetího a pátého řádu v paraxiální obrazové rovině platí [175, 176]

$$\delta y' = a_3 h^3 + a_5 h^5, \quad (4.66)$$

kde a_3 a a_5 jsou aberační koeficienty, h je výška, ve které protíná paprsek rovinu výstupní pupily optické soustavy, viz obr. 4.24. Na obrázku dále O značí počátek souřadné soustavy (střed výstupní pupily), \overline{BC} je paprsek vystupující z optické soustavy, ξ je paraxiální obrazová rovina, A_0 je paraxiální obrazový bod osového předmětu optické soustavy bez aberací, A je reálný obrazový bod osového bodu a význam dalších parametrů je patrný z geometrie obrázku.

Zobrazení bodového předmětu soustavou zatíženou aberacemi charakterizuje tzv. rozptylový kroužek r_g (gyrační rádius) [175–177]. Pro daný případ kruhové pupily platí

$$r_g^2 = \frac{1}{\pi H^2} \int_0^{2\pi} \int_0^H (\delta y_0')^2 h dh d\varphi = \frac{2}{H^2} \int_0^H (\delta y_0')^2 h dh = \frac{2}{H^2} \int_0^H (\delta y' - s_0 \tan \alpha)^2 h dh, \quad (4.67)$$

kde je integrace prováděna přes rovinu výstupní pupily, (h, φ) jsou polární souřadnice v rovině výstupní pupily, H je maximální hodnota h , s_0 je vzdálenost mezi paraxiální obrazovou rovinou a rovinou, kde vyhodnocujeme rozptylový kroužek (viz obr. 4.24), α je aperturní úhel mezi paprskem a optickou osou, $\delta y'_0$ je příčná sférická aberace v rovině ξ_0 , která je umístěna ve vzdálenosti s_0 od paraxiální obrazové roviny. Po dosazení (4.66) do (4.67) a provedení integrace dostáváme [175, 176]

$$r_g^2 = g_2 s_0^2 + g_1 s_0 + g_0, \quad (4.68)$$

kde

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{H^2}{2p^2}, \\ g_1 &= -\frac{H^4}{6p} (3H^2 a_5 + 4a_3), \\ g_0 &= \frac{H^6}{60} (10H^4 a_5^2 + 24H^2 a_3 a_5 + 15a_3^2). \end{aligned}$$

Požadujeme-li gyrační rádius r_g roven ve dvou rovinách $\pm s_0$ symetricky položených vzhledem k paraxiální obrazové rovině, musí obdobně jako v případě vlnových aberací platit $g_1 = 0$. Dosazením a řešením poté pro vzájemný vztah mezi aberačními koeficienty dostáváme [175, 176]

$$a_3 = -\frac{3}{4} H^2 a_5. \quad (4.69)$$

Je-li dále $(r_g)_p$ požadovaná hodnota gyračního poloměru ve vzdálenosti $\pm (s_0)_p$ od paraxiální obrazové roviny, poté dostáváme

$$a_5 = \pm \frac{4\sqrt{210} \sqrt{2p^2 (r_g)_p^2 - H^2 (s_0)_p^2}}{7H^5 p}. \quad (4.70)$$

Pro zajištění reálného řešení poté dostáváme podmínku pro maximální možnou hloubku ostrosti optické soustavy $2(s_0)_{\text{lim}}$, platí [175, 176]

$$|(s_0)_{\text{lim}}| \leq \sqrt{2} \frac{p}{H} (r_g)_p. \quad (4.71)$$

Pomocí tohoto vztahu je možné určit apriorní hodnotu maximální možné hloubky ostrosti optické soustavy. Další související analýzy může čtenář nalézt například v práci [175].

S velikostí aberace optické soustavy také úzce souvisí kaustika fokusovaného optického svazku. S ohledem na obr. 4.24 můžeme rovnici paprsku vyjádřit jako

$$y = kx + h, \quad (4.72)$$

kde $k = k(h)$ je tangenta úhlu mezi paprskem a pozitivním směrem osy x , platí $k = \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$, a $h = \overline{OB}$. Vzhledem k obr. 4.24 dále platí

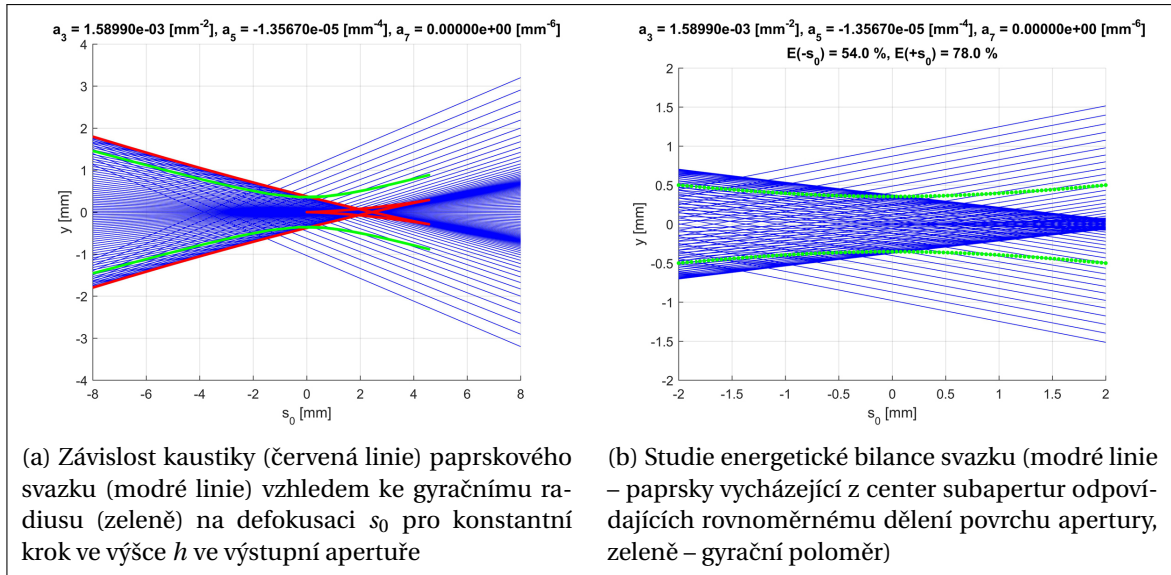
$$k = -\frac{h - \delta y'}{p}, \quad (4.73)$$

kde $\delta y' = \delta y'(h)$ je příčná sférická aberace. Obecně jí můžeme vyjádřit (rozšířením vztahu (4.66)) jako

$$\delta y' = \sum_{m=2}^M a_{2m-1} h^{2m-1}, \quad (4.74)$$

kde a_{2m-1} jsou aberační koeficienty. Pro směrnici paprsku poté dostáváme

$$k = \frac{-h + \sum_{m=2}^M a_{2m-1} h^{2m-1}}{p}, \quad (4.75)$$



Obrázek 4.25: Zobrazení kaustiky a energetické bilance svazku pro optickou soustavu zatíženou aberacemi [175]

a pro rovnici paprsku poté

$$y = \frac{-h + \sum_{m=2}^M a_{2m-1} h^{2m-1}}{p} x + h. \quad (4.76)$$

Je tak patrné, že rovnice paprsku je pro fixní hodnoty p závislá na jednom parametru h pro daný optický systém (pro jedny konkrétní hodnoty aberačních koeficientů a_{2m-1}). Tím pádem můžeme vypočítat obálku paprskového svazku řešením soustavy rovnic [175, 176]

$$\phi(x, y, h) = 0, \quad \frac{\partial \phi(x, y, h)}{\partial h} = 0, \quad (4.77)$$

kde

$$\phi(x, y, h) = y - kx - h = 0. \quad (4.78)$$

Obálka paprskového svazku je v optice nazývána kaustika [175, 176]. Jelikož není možné obecně nalézt analytické řešení pro tvar kaustiky (vyloučením parametru h z výše zmíněné soustavy), můžeme využít k popisu kaustiky parametrického zápisu. Pro souřadnice bodů $[x_c, y_c]$ na kaustice poté platí [175, 176]

$$x_c = \frac{p}{g(h)}, \quad y_c = h - \frac{f(h)}{g(h)}, \quad (4.79)$$

kde

$$f(h) = h - \sum_{m=2}^M a_{2m-1} h^{2m-1},$$

$$g(h) = 1 - \sum_{m=2}^M (2m-1) a_{2m-1} h^{2(m-1)}.$$

V případě optické soustavy s nulovou sférickou aberací kaustika degeneruje v bod.

Na obr. 4.25a je ukázána závislost kaustiky paprskového svazku vzhledem ke gyračnímu radiusu na defokusaci s_0 pro konstantní krok ve výšce h ve výstupní apertuře optické soustavy. Na obr. 4.25b poté studie energetické bilance svazku. Jednotlivé paprsky na tomto obrázku prochází středy subapertur výstupní apertury optické soustavy takových, že jsou si povrchy jednotlivých subapertur rovny [175].

5 Závěr

Předložená disertační práce byla pojata jako doprovodný text k autorem publikovaným článkům na témata týkající analýzy a aplikace optických prvků s fixními a proměnnými optickými parametry a kombinovaných soustav v zobrazovacích a měřicích systémech.

Nejprve bylo představeno shrnutí základních znalostí a fyzikálně-matematického aparátu, který byl postupně využíván a rozvíjen při řešení výzkumných problémů. Byly ukázány fundamentální vztahy vlnové a geometrické optiky, zejména oblastí elektromagnetického pole a jeho šíření a difrakce, interference vln a rekonstrukce fáze vlnového pole. V rámci vybraných částí byly prezentovány autorovy praktické realizace, zejména v části difrakce a rekonstrukce fáze vlnového pole. Na poli difrakce autor studoval a představil obecné řešení pro nekonečnou a konečnou amplitudovou difrakční mřížku, která se často používá v řadě praktických aplikací, kde se posléze podrobně zabýval Talbotovým jevem (samo-zobrazením periodické struktury v definovaných vzdálenostech) a efektem konečných rozměrů mřížky na hranové funkce Talbotových obrazů [23, 24]. Rekonstrukci fáze vlnového pole autor řešil v několika případech, v této práci bylo prezentováno vyhodnocení interferogramů se zavedenou prostorovou nosnou frekvencí metodou Fourierovy transformace s automatizovaným vyhledáním optimální polohy maxima bočního spektra a komplexní řešení modulace a záznamu interferenčního pole a vyhodnocení fáze metodami fázového posuvu a Fourierovy transformace pro interferometrii s osazeným fázovým modulátorem světla.

Následující kapitola, dotýkající se problematiky transformace vlnového pole v optice, byla zaměřena zejména na shrnutí současného stavu klasických a aktivních komerčně dostupných optických prvků, které jsou základem pro metrologické a zobrazovací optické systémy.

Stěžejní částí této práce byl souhrn analýzy a vybraných aplikací tzv. kombinovaných (hybridních) optických systémů, tedy soustav kombinujících optické prvky s fixními i proměnnými charakteristikami, které autor práce prováděl společně se svými kolegy ze Skupiny aplikované optiky na katedře fyziky Fakultě stavební ČVUT v Praze nebo v rámci své zahraniční stáže na pracovišti NTB Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs ve Švýcarsku. Nejprve autor představil teoretickou analýzu a experimentální potvrzení deformace membrán kapalinových čoček společně s návrhem metodiky pro určení mechanických parametrů těchto membrán. Této problematice se autor věnoval jako hlavní řešitel grantu SGS17/004/OHK1/1T/11 – Adaptivní optické metrologické systémy, ČVUT v Praze, a jako člen řešitelského týmu grantu Grantové agentury ČR GA13-31765S – Aktivní membránové prvky na bázi kapalin. Z mezinárodních publikačních výstupů na toto téma jmenujme práce [111, 112, 116, 159]. Dále byla shrnuta problematika adaptivních optických skenovacích systémů, zejména poté jedno-zrcadlových a dvou-zrcadlových skenerů s osazenou aktivní čočkou, která umožňuje fokusaci procházejícího záření. Tímto tématem se autor zabýval jako hlavní řešitel grantu SGS15/125/OHK1/2T/11 – Adaptivní laserové skenery, ČVUT v Praze, a podílel se na publikaci mezinárodních prací [113–115, 164]. Poté byly představeny dvě podkapitoly, které se věnovaly aplikaci fázového modulátoru světla v optické metrologii a při možnosti generace obrazu počítačem generovanými hologramy. Shrnují problematiku, kterou autor studoval v rámci zahraniční stáže ve Švýcarsku jako hlavní řešitel projektu SCIEX-NMS^{ch} nr. 14.077 – Simple and Flexible Interferometric Asphere Measurement Without Stitching. Nedílnou součástí jakékoli konstrukce optických systémů je znalost hodnot základních parametrů optické soustavy

nebo jejich jednotlivých optických komponent. Řešená problematika měření vybraných parametrů byla shrnuta v poslední části. Praktická realizace této části autorovy výzkumné činnosti našla uplatnění v komerční sféře díky kooperaci s firmou Meopta – optika, s.r.o., kde jsou výsledky používány. Výzkum této oblasti probíhal v rámci řešení grantů ČVUT v Praze SGS14/110/OHK1/2T/11 – Optické metody měření deformací a tvarů ploch a vlnoploch, Ministerstva průmyslu a obchodu ČR FR-TI2/074 – Technologie měření asférických ploch v optice, a FR-TI3/023 – Analyzátory kvality zobrazení optických soustav, a jako součást řešení projektu Superachromáty s firmou Meopta – optika, s.r.o. Z autorových publikačních výstupů týkajících se zmíněných témat jmenujme práce [170–176], na kterých se významným způsobem podílel zpravidla jako hlavní autor.

Aktivní optické prvky mají neustále veliký potenciál. Zejména studium jejich praktického uplatnění v průmyslových aplikacích a realizace kombinovaných optických systémů mohou výrazným způsobem přispět k automatizaci procesů měření, snížení nákladů na výrobu měřicích zařízení, nebo posloužit k miniaturizaci zařízení. Je tak jisté, že díky neustálému rozvoji výrobní kvality budou aktivní optické prvky nacházet čím dál více uplatnění v různých odvětvích průmyslu a uživatelských aplikacích.

Součástí disertační práce je soubor vybraných článků autora publikovaných v mezinárodních časopisech s impaktním faktorem (viz příloha A), které dokládají hodnotu výstupů autorovy výzkumné činnosti. Ta je podtržena také mezinárodními ohlasy (viz příloha B), v době tvorby této práce například pěti citacemi indexovanými v databázi Web of Science a dvěma dalšími ohlasy – výběr editora časopisu Applied Optics pro srpen 2016 a jedna z deseti nejstahovanějších publikací v časopisu Applied Optics v červnu 2017.

Reference

- [1] A. Mikš. *Aplikovaná optika*. ČVUT v Praze, 2009.
- [2] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill book company, inc., 1941.
- [3] E. J. Rothwell and M. J. Cloud. *Electromagnetics*. Electrical Engineering Textbook Series. Taylor & Francis, 2009.
- [4] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 2007.
- [5] L. D. Landau. *The Classical Theory of Fields*. COURSE OF THEORETICAL PHYSICS. Elsevier Science, 2013.
- [6] M. Horrer and G. Lehner. *Electromagnetic Field Theory for Engineers and Physicists*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [7] C. H. Papas. *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*. Dover Publications, 2014.
- [8] E. Purcell. *Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, 2011.
- [9] K. Rektorys. *Survey of Applicable Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [10] G. A. Korn and T. M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2013.
- [11] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. YBP Print DDA. Elsevier, 2012.
- [12] Bureau International des Poids et Mesures. *The International System of Units (SI)*. STEDI Media, Paris, 2006.
- [13] M. Born, E. Wolf, and A. B. Bhatia. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, 2000.
- [14] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 2007.
- [15] F. Träger. *Springer Handbook of Lasers and Optics*. Springer Handbooks. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [16] M. Bass, C. DeCusatis, J. M. Enoch, V. Lakshminarayanan, G. Li, C. MacDonald, V. N. Mahajan, and E. Van Stryland. *Handbook of Optics, Third Edition Volume I*. Handbook of Optics. McGraw-Hill Education, 2009.
- [17] E. Collett. *Field Guide to Polarization*. Field Guide Series. Society of Photo Optical, 2005.
- [18] F. Kottler. Diffraction at a Black Screen: Part II: Electromagnetic theory. volume 6 of *Progress in Optics*, pages 331 – 377. Elsevier, 1967.
- [19] C. J. Bouwkamp. Diffraction theory. *Reports on Progress in Physics*, 17(1):35, 1954.
- [20] F. Kottler. Diffraction at a Black Screen: Part I: Kirchhoff's theory. volume 4 of *Progress in Optics*, pages 281 – 314. Elsevier, 1965.
- [21] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill physical and quantum electronics series. W. H. Freeman, 2005.
- [22] G. Kirchhoff. Zur Theorie der Lichtstrahlen. *Annalen der Physik*, 254(4):663–695, 1883.
- [23] A. Mikš and P. Pokorný. Edge spread function of Talbot phenomenon. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 127(19):8065 – 8069, 2016.

-
- [24] P. Pokorný, A. Mikš, J. Novák, P. Novák, and S. Rinner. Effect of finite dimensions of diffraction grating to Talbot imaging. *Proc. SPIE*, 10151:10151 – 10151 – 9, 2016.
- [25] H. F. Talbot. LXXVI. Facts relating to optical science. No. IV. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 9(56):401–407, 1836.
- [26] K. Patorski. The Self-Imaging Phenomenon and its Applications. volume 27 of *Progress in Optics*, pages 1 – 108. Elsevier, 1989.
- [27] P. Hariharan. *Optical Interferometry*. Elsevier Science, 2003.
- [28] Ginzburg V. M. and Stepanov B. M. *Holography. Methods and apparatus*. Sovetskoy Radio, 1974.
- [29] D. Malacara. *Optical Shop Testing*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 2007.
- [30] Z. Malacara and M. Servín. *Interferogram Analysis For Optical Testing, Second Edition*. Optical engineering. CRC Press, 2016.
- [31] P. Rastogi and E. Hack. *Phase Estimation in Optical Interferometry*. Taylor & Francis, 2014.
- [32] Zygo Corporation. <http://www.zygo.com>. online: 2017-12-14.
- [33] 4D Technology. <http://www.4dtechnology.com>. online: 2017-12-14.
- [34] Mahr. www.mahr.com. online: 2017-12-14.
- [35] Schneider. <http://www.schneider-om.com>. online: 2017-12-14.
- [36] OptoTech. <http://www.optotech.de>. online: 2017-12-14.
- [37] Trioptics. <http://www.trioptics.com>. online: 2017-12-14.
- [38] Diffraction International. <http://www.diffraction.com>. online: 2017-12-14.
- [39] SILIOS Technologies. <http://www.silios.com>. online: 2017-12-14.
- [40] QED Technologies. <http://qedmrf.com>. online: 2017-12-14.
- [41] M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1):156–160, 1982.
- [42] C. Roddier and F. Roddier. Interferogram analysis using Fourier transform techniques. *Appl. Opt.*, 26(9):1668–1673, 1987.
- [43] J. H. Massig and J. Heppner. Fringe-pattern analysis with high accuracy by use of the Fourier-transform method: theory and experimental tests. *Appl. Opt.*, 40(13):2081–2088, 2001.
- [44] J. W. Gibbs. Fourier's series. *Nature*, 59(1522), 1898.
- [45] J. W. Gibbs. Fourier's series. *Nature*, 59(1539), 1899.
- [46] R. W. Gerchberg. Super-resolution through error energy reduction. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 21(9):709–720, 1974.
- [47] M. Dai and Y. Wang. Fringe extrapolation technique based on fourier transform for interferogram analysis. *Opt. Lett.*, 34(7):956–958, 2009.
- [48] J. Novák, P. Novák, and A. Mikš. Multi-step phase-shifting algorithms insensitive to linear phase shift errors. *Optics Communications*, 281(21):5302 – 5309, 2008.
- [49] J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Brangaccio. Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses. *Appl. Opt.*, 13(11):2693–2703, 1974.
- [50] J. C. Wyant. Use of an ac heterodyne lateral shear interferometer with real-time wavefront correction systems. *Appl. Opt.*, 14(11):2622–2626, 1975.
- [51] J. Schwider, R. Burow, K.-E. Elssner, J. Grzanna, R. Spolaczyk, and K. Merkel. Digital wavefront measuring interferometry: some systematic error sources. *Appl. Opt.*, 22(21):3421–3432, 1983.
- [52] P. Hariharan, B. F. Oreb, and T. Eiju. Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm. *Appl. Opt.*, 26(13):2504–2506, 1987.
- [53] P. Carré. Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures. *Metrologia*, 2:13–23, 1966.
- [54] J. Novak. Five-step phase-shifting algorithms with unknown values of phase shift. *Optik -*

-
- International Journal for Light and Electron Optics*, 114(2):63 – 68, 2003.
- [55] J. L. Marroquin. Deterministic interactive particle models for image processing and computer graphics. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 55(5):408 – 417, 1993.
- [56] M. Servin, J. L. Marroquin, and F. J. Cuevas. Demodulation of a single interferogram by use of a two-dimensional regularized phase-tracking technique. *Appl. Opt.*, 36(19):4540–4548, 1997.
- [57] P. Pokorny, J. Novak, P. Novak, and A. Miks. Method for interferometric testing of optical surfaces based on evaluation of similarity of nominal and measured interferograms. *Proc. SPIE*, 9442:9442 – 9442 – 6, 2015.
- [58] M. R. Teague. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(11):1434–1441, 1983.
- [59] J. C. Petrucci, L. Tian, and G. Barbastathis. The transport of intensity equation for optical path length recovery using partially coherent illumination. *Opt. Express*, 21(12):14430–14441, 2013.
- [60] Chao Zuo, Qian Chen, and Anand Asundi. Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation: fast solution with use of discrete cosine transform. *Opt. Express*, 22(8):9220–9244, 2014.
- [61] Chao Zuo, Qian Chen, Hongru Li, Weijuan Qu, and Anand Asundi. Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation ii: applications to microlens characterization. *Opt. Express*, 22(15):18310–18324, 2014.
- [62] Chao Zuo, Qian Chen, Lei Huang, and Anand Asundi. Phase discrepancy analysis and compensation for fast fourier transform based solution of the transport of intensity equation. *Opt. Express*, 22(14):17172–17186, 2014.
- [63] Chao Zuo, Qian Chen, and Anand Asundi. Transport of intensity equation: a new approach to phase and light field. *Proc. SPIE*, 9271:9271 – 9271 – 16, 2014.
- [64] E. Bostan, E. Froustey, B. Rappaz, E. Shaffer, D. Sage, and M. Unser. Phase retrieval by using transport-of-intensity equation and differential interference contrast microscopy. pages 3939–3943, 2014.
- [65] Hongbo Zhang, Wen-Jing Zhou, Ying Liu, Donald Leber, Partha Banerjee, Mahmudunnabi Basunia, and Ting-Chung Poon. Evaluation of finite difference and fft-based solutions of the transport of intensity equation. *Appl. Opt.*, 57(1):A222–A228, 2018.
- [66] Wen-Jing Zhou, Xiaofei Guan, Fanfan Liu, Yingjie Yu, Hongbo Zhang, Ting-Chung Poon, and Partha P. Banerjee. Phase retrieval based on transport of intensity and digital holography. *Appl. Opt.*, 57(1):A229–A234, 2018.
- [67] Neeraj Pandey, Amitava Ghosh, and Kedar Khare. Two-dimensional phase unwrapping using the transport of intensity equation. *Appl. Opt.*, 55(9):2418–2425, 2016.
- [68] Juan Martinez-Carranza, Konstantinos Falaggis, and Tomasz Kozacki. Fast and accurate phase-unwrapping algorithm based on the transport of intensity equation. *Appl. Opt.*, 56(25):7079–7088, 2017.
- [69] D. C. Ghiglia and M. D. Pritt. *Two-dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software*. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1998.
- [70] H. Nyquist. Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 47(2):617–644, 1928.
- [71] C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1):10–21, 1949.
- [72] Kazuyoshi Itoh. Analysis of the phase unwrapping algorithm. *Appl. Opt.*, 21(14):2470–2470, 1982.
- [73] R. M. Goldstein, H. A. Zebker, and C. L. Werner. Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping. *Radio Science*, 23(4):713–720, 1988.
- [74] T. J. Flynn. Two-dimensional phase unwrapping with minimum weighted discontinuity. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(10):2692–2701, 1997.

-
- [75] L. E. Scales. *Introduction to Non-Linear Optimization*. Macmillan computer science series. Springer, 1985.
- [76] J. M. Bioucas-Dias and G. Valadao. Phase unwrapping via graph cuts. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(3):698–709, 2007.
- [77] M. A. Herráez, D. R. Burton, M. J. Lalor, and M. A. Gdeisat. Fast two-dimensional phase-unwrapping algorithm based on sorting by reliability following a noncontinuous path. *Appl. Opt.*, 41(35):7437–7444, 2002.
- [78] M. A. Herráez, M. A. Gdeisat, D. R. Burton, and M. J. Lalor. Robust, fast, and effective two-dimensional automatic phase unwrapping algorithm based on image decomposition. *Appl. Opt.*, 41(35):7445–7455, 2002.
- [79] MATLAB. https://www.mathworks.com/products/matlab.html?s_tid=hp_products_matlab.
- [80] Jenoptik. <https://www.jenoptik.com>.
- [81] Holoeye. <http://holoeye.com>.
- [82] B. Durband, H. Muller, and H. Gross. *Handbook of Optical Systems, Volume 5: Metrology of Optical Components and Systems*. Wiley, 2012.
- [83] Organización Internacional de Normalización. *ISO 10110-12: Optics and Optical Instruments : Preparation of Drawings for Optical Elements and Systems. Aspheric surface*. Number 12. ISO, 2007.
- [84] G. W. Forbes. Shape specification for axially symmetric optical surfaces. *Opt. Express*, 15(8):5218–5226, 2007.
- [85] G. W. Forbes. Robust and fast computation for the polynomials of optics. *Opt. Express*, 18(13):13851–13862, 2010.
- [86] G. W. Forbes. Robust, efficient computational methods for axially symmetric optical aspheres. *Opt. Express*, 18(19):19700–19712, 2010.
- [87] G. W. Forbes. Characterizing the shape of freeform optics. *Opt. Express*, 20(3):2483–2499, 2012.
- [88] G. W. Forbes. Fitting freeform shapes with orthogonal bases. *Opt. Express*, 21(16):19061–19081, 2013.
- [89] T. C. Poon and J. P. Liu. *Introduction to Modern Digital Holography: With Matlab*. Introduction to Modern Digital Holography: With MATLAB. Cambridge University Press, 2014.
- [90] U. Schnars and W. Jüptner. *Digital Holography: Digital Hologram Recording, Numerical Reconstruction, and Related Techniques*. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [91] P.M. Hirsch, J.A. Jordan, and L.B. Lesem. Method of making an object dependent diffuser, 1971. US Patent 3,619,022.
- [92] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 35(2):237–246, 1972.
- [93] H. W. Babcock. The possibility of compensating astronomical seeing. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 65(386):229, 1953.
- [94] Imagine eyes. <http://www.imagine-eyes.com>.
- [95] Imagine optic. <http://www.imagine-optic.com/en>.
- [96] Flexible optical. <http://www.okotech.com>.
- [97] Thorlabs. https://www.thorlabs.de/navigation.cfm?guide_id=2218.
- [98] ALPAO. <http://www.alpao.com/index.htm>.
- [99] Edmund optics. <http://www.edmundoptics.com/testing-detection/active-optical-components>.
- [100] Cilas. <https://www.cilas.com>.
- [101] Optotune. <http://www.optotune.com>.
- [102] Varioptic. <http://www.varioptic.com>.
- [103] TAG optics. <http://www.tag-optics.com>.

-
- [104] Hamamatsu. <http://www.hamamatsu.com/us/en/index.html>.
- [105] R. K. Tyson. *Introduction to Adaptive Optics*. SPIE tutorial texts. SPIE Press, 2000.
- [106] R. K. Tyson and B. W. Frazier. *Field Guide to Adaptive Optics*. SPIE field guides. Society of Photo Optical, 2012.
- [107] R. Tyson. *Adaptive Optics Engineering Handbook*. Optical Science and Engineering Series. CRC Press, 1999.
- [108] R. K. Tyson. *Principles of Adaptive Optics, Fourth Edition*. CRC Press, 2015.
- [109] A. Miks, J. Novak, and P. Novak. Theoretical analysis of imaging properties of a pressure-actuated deformable mirror for adaptive compensation of rotationally symmetrical wavefronts. *Optics and Lasers in Engineering*, 49(11):1268 – 1273, 2011.
- [110] H. Ren and S. T. Wu. *Introduction to Adaptive Lenses*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 2012.
- [111] P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek. Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure. *Appl. Opt.*, 56(26):5939–5947, 2017.
- [112] P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek. Deformation of a prestressed liquid lens membrane. *Appl. Opt.*, 56(34):9368–9376, 2017.
- [113] P. Pokorny and A. Miks. 3D optical two-mirror scanner with focus-tunable lens. *Appl. Opt.*, 54(22):6955–6960, 2015.
- [114] P. Pokorný, A. Mikš, J. Novák, and P. Novák. One-mirror and two-mirror laser scanners with variable focus lens. *Proc. SPIE*, 9579:9579 – 9579 – 12, 2015.
- [115] P. Pokorný, A. Mikš, J. Novák, and P. Novák. Analysis of adaptive laser scanning optical system with focus-tunable components. *Proc. SPIE*, 9525:9525 – 9525 – 9, 2015.
- [116] P. Pokorný, J. Novák, P. Novák, and A. Mikš. Analysis of imaging properties of active lenses with spherical surfaces of independently variable curvature. *Proc. SPIE*, 9441:9441 – 9441 – 9, 2014.
- [117] P. Yeh and C. Gu. *Optics of Liquid Crystal Displays*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 2010.
- [118] R. H. Chen. *Liquid Crystal Displays: Fundamental Physics and Technology*. Wiley Series in Display Technology. Wiley, 2011.
- [119] A. Miks, J. Novak, and P. Novak. Adaptive two-beam interferometer for testing optical surfaces. *Proc. SPIE*, 8169:8169 – 8169 – 7, 2011.
- [120] M. G. Lippmann. Relations entre les phenomenes electriques et capillaries. *Ann. Chim. Phys.*, 5(494), 1875.
- [121] H. A. Pohl. *Dielectrophoresis: the behavior of neutral matter in nonuniform electric fields*. Cambridge University Press, 1978.
- [122] Applied Optics Group. <http://aog.fsv.cvut.cz>.
- [123] NTB Interstaatliche Hochschule für Technik Buchs. <http://www.ntb.ch>.
- [124] Meopta - optika, s.r.o. <http://www.meopta.cz>.
- [125] A. H. Rawicz and I. Mikhailenko. Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens. *Appl. Opt.*, 35(10):1587–1589, 1996.
- [126] De-Ying Zhang, Nicole Justis, Victor Lien, Yevgeny Berdichevsky, and Yu-Hwa Lo. High-performance fluidic adaptive lenses. *Appl. Opt.*, 43(4):783–787, 2004.
- [127] Norio Sugiura and Shinzo Morita. Variable-focus liquid-filled optical lens. *Appl. Opt.*, 32(22):4181–4186, 1993.
- [128] H. Ren, D. Fox, P. A. Anderson, B. Wu, and S.-T. Wu. Tunable-focus liquid lens controlled using a servo motor. *Opt. Express*, 14(18):8031–8036, 2006.
- [129] Q. Yang, P. Kobrin, Ch. Seabury, S. Narayanaswamy, and W. Christian. Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses. *Appl. Opt.*, 47(20):3658–3668, 2008.
- [130] Guo-Hua Feng and Yu-Chin Chou. Flexible meniscus/biconvex lens system with fluidic-

-
- controlled tunable-focus applications. *Appl. Opt.*, 48(18):3284–3290, 2009.
- [131] Hongwen Ren and Shin-Tson Wu. Variable-focus liquid lens. *Opt. Express*, 15(10):5931–5936, 2007.
- [132] Dein Shaw and T. E. Sun. Optical properties of variable-focus liquid-filled optical lenses with different membrane shapes. *Optical Engineering*, 46(2):024002–024002–6, 2007.
- [133] Dein Shaw and Chih-Wei Lin. Design and analysis of an asymmetrical liquid-filled lens. *Optical Engineering*, 46(12):123002–123002–8, 2007.
- [134] Hyunhwan Choi, Dong Seok Han, and Yong Hyub Won. Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness. *Opt. Lett.*, 36(23):4701–4703, 2011.
- [135] Lei Li, Qiong-Hua Wang, and Wei Jiang. Liquid lens with double tunable surfaces for large power tunability and improved optical performance. *Journal of Optics*, 13(11):115503, 2011.
- [136] F. Schneider, J. Draheim, R. Kamberger, P. Waibel, and U. Wallrabe. Optical characterization of adaptive fluidic silicone-membrane lenses. *Opt. Express*, 17(14):11813–11821, 2009.
- [137] Yiin-Kuen Fuh, Ming-Xin Lin, and Shyong Lee. Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically-corrected design. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(12):1677 – 1682, 2012.
- [138] A. Miks, J. Novak, and P. Novak. Algebraic and numerical analysis of imaging properties of thin tunable-focus fluidic membrane lenses with parabolic surfaces. *Appl. Opt.*, 52(10):2136–2144, 2013.
- [139] Lihui Wang, Hiromasa Oku, and Masatoshi Ishikawa. Development of variable-focus lens with liquid-membrane-liquid structure and 30 mm optical aperture. *Proc. SPIE*, 8617:861706–861706–7, 2013.
- [140] Lihui Wang, Hiromasa Oku, and Masatoshi Ishikawa. An improved low-optical-power variable focus lens with a large aperture. *Opt. Express*, 22(16):19448–19456, 2014.
- [141] Seung Tae Choi, Byeong Soo Son, Gye Won Seo, Si-Young Park, and Kyung-Sick Lee. Optomechanical analysis of nonlinear elastomer membrane deformation under hydraulic pressure for variable-focus liquid-filled microlenses. *Opt. Express*, 22(5):6133–6146, 2014.
- [142] Dan Liang and Xuan-Yin Wang. A bio-inspired optical system with a polymer membrane and integrated structure. *Bioinspiration and Biomimetics*, 11(6):066008, 2016.
- [143] Jia-Wei Du, Xuan-Yin Wang, and Dan Liang. Bionic optical imaging system with aspheric solid-liquid mixed variable-focus lens. *Optical Engineering*, 55(2):023105, 2016.
- [144] N. Hasan, A. Banerjee, H. Kim, and C. H. Mastrangelo. Tunable-focus lens for adaptive eyeglasses. *Opt. Express*, 25(2):1221–1233, 2017.
- [145] H. Hencky. On the stress state in circular plates with vanishing bending stiffness. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 63:311–317, 1915.
- [146] W. Z. Chein. Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection. *Sci. Rep. natn. Tsing Hua Univ.*, A5:71–94, 1948.
- [147] J. D. Campbel. On the theory of initially tensioned circular membranes subjected to uniform pressure. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 9(1), 1956.
- [148] M. A. Goldberg and A. B. Pifko. Large deflection analysis of uniformly loaded annular membranes. *AIAA Jnl*, 1:2111–2115, 1963.
- [149] A. B. Pifko and M. A. Goldberg. Iterative and power series solutions for the large deflection of an annular membrane. *AIAA Jnl*, 2:1340–1342, 1964.
- [150] N. Perrone and R. Kao. A general nonlinear relaxation technique for solving nonlinear problems in mechanics. *J. appl. Mech.*, 38:371–376, 1971.
- [151] R. Kao and N. Perrone. Large deflections of axisymmetric circular membranes. *International Journal of Solids and Structures*, 7(12):1601–1612, 1971.
- [152] A. Kelkar, W. Elber, and I. S. Raju. Large deflections of circular isotropic membranes subjected to arbitrary axisymmetric loading. *Computers and Structures*, 21(3):413–421, 1985.

-
- [153] W. B. Fichter. *Some Solutions for the Large Deflections of Uniformly Loaded Circular Membranes*. NASA technical paper. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1997.
- [154] D. J. Allman. Variational solutions for the nonlinear deflexion of an annular membrane under axial load. *International Journal of Mechanical Sciences*, 24(12):749–753, 1982.
- [155] M. Sheplock and J. Dugundji. Large deflections of clamped circular plates under initial tension and transitions to membrane behavior. *J. appl. Mech.*, 65(1), 1998.
- [156] Fuzhang Zhao. Nonlinear solutions for circular membranes and thin plates. *Proc. SPIE*, 6926:69260W–69260W–12, 2008.
- [157] B. Stanford and P. Ifju. The validity range of low fidelity structural membrane models. *Experimental Mechanics*, 48(6):697, 2008.
- [158] A. Mikš and P. Novák. Calculation of a surface shape of a pressure actuated membrane liquid lens. *Optics and Lasers in Engineering*, 58:60–66, 2014.
- [159] P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, A. Mikš, J. Novák, P. Novák, M. Jirásek, and M. Horák. Numerical solution of deformation of circular membrane of liquid lens under uniform hydrostatic pressure. *Proc. SPIE*, 10330:10330 – 10330 – 8, 2017.
- [160] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, 1959.
- [161] A. S. Volmir. *Flexible Plates and Shells*. Technical report. Air Force Flight Dynamics Laboratory, Research and Technology Division, Air Force Systems Command, 1967.
- [162] B. Audoly and Y. Pomeau. *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Non-linear Response of Shells*. OUP Oxford, 2010.
- [163] Sylgard 184 silicone elastomer kit. <http://www.dowcorning.com/applications/search/products/Details.aspx?prod=01064291>.
- [164] P. Pokorný. One-mirror and two-mirror three-dimensional optical scanners - position and accuracy of laser beam spot. *Appl. Opt.*, 53(12):2730–2740, 2014.
- [165] G. F. Marshall and G. E. Stutz. *Handbook of Optical and Laser Scanning, Second Edition*. Optical Science and Engineering. Taylor & Francis, 2011.
- [166] P. Pokorný. Phase evaluation in FTM interferometry using piecewise quadratic function. *Proc. SPIE*, 9441:9441 – 9441 – 9, 2014.
- [167] Paul E. Murphy, Thomas G. Brown, and Duncan T. Moore. Interference imaging for aspheric surface testing. *Appl. Opt.*, 39(13):2122–2129, 2000.
- [168] Paul E. Murphy, Thomas G. Brown, and Duncan T. Moore. Measurement and calibration of interferometric imaging aberrations. *Appl. Opt.*, 39(34):6421–6429, 2000.
- [169] R. JóŹwicki. Influence of aberrations of Fizeau interferometer elements on measurement errors. *Appl. Opt.*, 30(22):3126–3132, 1991.
- [170] P. Pokorný, J. Opat, A. Mikš, J. Novák, and P. Novák. Analysis of factors important for measurements of focal length of optical systems. *Proc. SPIE*, 9628:9628 – 9628 – 15, 2015.
- [171] A. Mikš and P. Pokorný. Use of diffraction grating for measuring the focal length and distortion of optical systems. *Appl. Opt.*, 54(34):10200–10206, 2015.
- [172] A. Mikš and P. Pokorný. Simple method for determination of parameters of cemented doublet. *Appl. Opt.*, 55(20):5456–5458, 2016.
- [173] P. Pokorný, A. Mikš, J. Novák, and P. Novák. Noninvasive method for determination of parameters of cemented doublet. *Proc. SPIE*, 9575:9575 – 9575 – 7, 2015.
- [174] P. Pokorný, F. Šmejkal, and A. Mikš. Deformation of a spherical lens caused by its own weight. *Appl. Opt.*, 56(36):9984–9991, 2017.
- [175] A. Mikš and P. Pokorný. Spherical aberration of an optical system and its influence on depth of focus. *Appl. Opt.*, 56(17):5099–5105, 2017.
- [176] P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, A. Mikš, J. Novák, and P. Novák. Modelling of influence of spherical aberration coefficients on depth of focus of optical systems. *Proc. SPIE*,

10330:10330 – 10330 – 8, 2017.

- [177] A. Miks and P. Pokorný. Analytical expressions for the circle of confusion induced by plane-parallel plate. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(11):1517 – 1521, 2012.

Seznam obrázků

2.1	Hraniční podmínky [2, 4]	5
2.2	Zákon odrazu a lomu	12
2.3	Difrakční úloha na tělese a stínítku [1]; ($\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$) – dopadající pole, ($\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$) – vnitřní difrakční pole, ($\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-$) – vnější difrakční pole, šipky značí Poyntingův vektor	17
2.4	Difrakční úloha na rovinném stínítku [1]	21
2.5	Difrakce na otvoru v rovinném stínítku	23
2.6	Normované intenzity Fraunhoferovy difrakce na obdélníkovém a kruhovém otvoru	24
2.7	Amplitudová difrakční mřížka (Ronchiho mřížka)	25
2.8	Talbotův jev pro dopad monochromatické vlny na amplitudovou (Ronchiho) difrakční mřížku	29
2.9	Srovnání intenzitních profilů Talbotových obrazů mřížky pro dopadající sférickou a rovinnou vlnu	30
2.10	Vliv spektrální šířky záření na Talbotovo zobrazení	30
2.11	Koherece elektromagnetických vln [1]	33
2.12	Schéma interferometrů dvousvazkové interferometrie pro testování rovinných ploch	39
2.13	Prostorová nosná frekvence pro rovinné vlnoplochy	42
2.14	Interferogram a jeho frekvenční spektrum	44
2.15	Měření a korigovaný interferogram po optimalizaci korelačního koeficientu	49
2.16	Srovnání vyhodnocení fáze pomocí optimalizace korelačního koeficientu a pomocí komerčního software Zygo MetroPro	50
2.17	Schematické znázornění experimentální realizace pro vyhodnocení fáze pomocí rovnice pro transport intenzity	51
2.18	Odstranění 2π nejednoznačnosti řešením rovnice pro transport intenzity	57
2.19	Grafické znázornění automatizovaného vyhodnocovacího algoritmu FTM	58
2.20	Grafické prostředí programu pro komplexní ovládání prostorového modulátoru světla a záznam a vyhodnocení interferogramu pomocí FTM a PSI	59
2.21	Části programu pro záznam a vyhodnocení interferogramů pomocí FTM a PSI	60
3.1	Schéma generace CGH a potlačení nultého difrakčního řádu vznikajícího na difrakční struktuře SLM	68
3.2	Generace počítačem generovaného hologramu	69
3.3	Principiální schéma adaptivního optického systému	70
3.4	Šíření vlnoplochy prostředím s variací materiálu	71
3.5	Princip fungování segmentových a mikromechanických membránových zrcadel	72
3.6	Čtvercová a hexagonální rozložení aktuátorů [106]	72
3.7	Kapalinová membránová čočka	73
3.8	Aktivní čočka fungující na principu elektrosmáčivosti dvou kapalin mezi skleněnými planparalelními deskami [102]	74
3.9	Schéma konstrukce akustooptické čočky [110]	75
3.10	Schéma odrazných a transmisních prostorových modulátorů světla	77

4.1	Schéma radiálního řezu kruhovou osově symetrickou membránou kapalinové čočky při působení rovnoměrného tlaku p (čárkovaná modrá linie – počáteční tvar při nulovém tlaku a počátečním předpětí, $w(r)$ a $u(r)$ – vertikální a horizontální výchylka bodu o počátečních souřadnicích $[r, 0]$, a – poloměr membrány, h – tloušťka membrány, w_{\max} – maximální výchylka) [112]	81
4.2	Deformace membrány s parametry: počáteční tloušťka v předpjatém stavu $\tilde{h} = 0.1$ mm, poloměr membrány $a = 10$ mm, Youngův modul pružnosti $E = 1.97$ MPa, Poissonův poměr $\nu = 0.4$, předpětí $\sigma_0 = 60$ kPa, rovnoměrný tlak $p = 0.001E = 1.97$ kPa [112]	84
4.3	Vliv materiálových parametrů na maximální výchylku membrány [112]	85
4.4	Laboratorní vzorek kapalinové membránové čočky a měření povrchu její membrány [112]	86
4.5	Srovnání experimentálně měřených hodnot (červené křížky) a numericky simulovaného tvaru povrchu membrány kapalinové čočky v meridiálním řezu (modré křivky) pro tlaky $p = 1.00, 2.00, 3.00$ a 4.00 kPa [112]	86
4.6	Trasování svazku optickou soustavou dvou-zrcadlového optického skeneru s čočkou proměnné ohniskové vzdálenosti [113–115]	88
4.7	Polohy stop svazku v detekční rovině a hodnot ohniskové vzdálenosti pro zaostření svazku v daných bodech detekční roviny pro vybrané úhly natočení	90
4.8	Twyman-Greenův interferometr s prostorovým modulátorem světla v referenční větvi	92
4.9	Záznamy kalibračních měření pro fázový modulátor Holoeye PLUTO	94
4.10	Flyback regiony při adresaci modulátoru skokovou funkcí	94
4.11	Záznam adresování a měření sférické vlnoplochy	95
4.12	Laboratorní realizace zobrazení CGH pomocí fázového modulátoru světla	96
4.13	Stínítko zachycující obraz generovaný pomocí CGH na fázový modulátor světla (před a po potlačení difrakčních artefaktů v důsledku difrakční struktury modulátoru) . .	96
4.14	Základní body optické soustavy [170]	97
4.15	Optická soustava s aberacemi [170]	98
4.16	Principiální schéma měření paraxiální ohniskové vzdálenosti a zkreslení optické soustavy pomocí difrakční mřížky [171]	99
4.17	Závislost úhlu α_{mz} směru difrakčního řádu vzhledem k optické ose na úhlu β natočení difrakční mřížky (směru dopadajícího svazku na mřížku) [171]	100
4.18	Experimentální realizace měření ohniskové vzdálenosti a zkreslení optické soustavy pomocí difrakční mřížky [171]	102
4.19	Schéma tmeleného dubletu [172, 173]	102
4.20	Deformace horizontálně uložené sférické čočky vlivem vlastní hmotnosti [174] . . .	104
4.21	Deformace sférické čočky vlivem vlastní váhy	106
4.22	Deformace bikonvexní čočky vlivem vlastní váhy	107
4.23	Deformace bikonkávní čočky vlivem vlastní váhy	107
4.24	Příčná sférická aberace optické soustavy [175, 176]	109
4.25	Zobrazení kaustiky a energetické bilance svazku pro optickou soustavu zatíženou aberacemi [175]	111

A Kopie vybraných publikací autora

- A1. P. Pokorný, F. Šmejkal, and A. Mikš. Deformation of a spherical lens caused by its own weight. *Appl. Opt.*, 56(36):9984–9991, 2017.
- A2. P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek. Deformation of a prestressed liquid lens membrane. *Appl. Opt.*, 56(34):9368–9376, 2017.
- A3. P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek. Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure. *Appl. Opt.*, 56(26):5939–5947, 2017.
- A4. A. Mikš and P. Pokorný. Spherical aberration of an optical system and its influence on depth of focus. *Appl. Opt.*, 56(17):5099–5105, 2017.
- A5. A. Mikš and P. Pokorný. Simple method for determination of parameters of cemented doublet. *Appl. Opt.*, 55(20):5456–5458, 2016.
- A6. A. Mikš and P. Pokorný. Edge spread function of Talbot phenomenon. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 127(19):8065 – 8069, 2016.
- A7. A. Mikš and P. Pokorný. Use of diffraction grating for measuring the focal length and distortion of optical systems. *Appl. Opt.*, 54(34):10200–10206, 2015.
- A8. P. Pokorný and A. Mikš. 3D optical two-mirror scanner with focus-tunable lens. *Appl. Opt.*, 54(22):6955–6960, 2015.
- A9. P. Pokorný. One-mirror and two-mirror three-dimensional optical scanners - position and accuracy of laser beam spot. *Appl. Opt.*, 53(12):2730–2740, 2014.
- A10. A. Mikš and P. Pokorný. Analytical expressions for the circle of confusion induced by plane-parallel plate. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(11):1517 – 1521, 2012.

Deformation of a spherical lens caused by its own weight

PETR POKORNÝ,*  FILIP ŠMEJKAL, AND ANTONÍN MIKŠ

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic
*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 29 August 2017; revised 2 November 2017; accepted 19 November 2017; posted 21 November 2017 (Doc. ID 305910); published 14 December 2017

This paper presents a method for calculation of a surface deformation of a spherical lens or a plane-parallel plate caused by its own weight. Formulas for the case of support at the edge or for the inner radius support are presented. Since it is not possible to find an analytical solution with appropriate boundary conditions, this paper presents numerical methods enabling us to calculate an approximate solution. The mentioned deflection has enormous impact in the field of optical metrology of large lenses where it has to be taken into account during precise measurements. © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: (080.3630) Lenses; (120.3940) Metrology; (120.4630) Optical inspection; (220.4840) Testing.

<https://doi.org/10.1364/AO.56.009984>

1. INTRODUCTION

It is very important to measure geometrical and optical parameters very accurately during manufacturing of optical components. Surface topography is the one of the parameters that has a significant impact on imaging quality. Many approaches exist of precise measuring of the surface in the case of spherical or aspherical lenses [1–11], and interferometrical measurements are the most precise of them [12]. Many companies offer interferometers for very accurate measuring of optical surface topographies [7–11]. Deflection from a nominal shape of a surface under test is caused by manufacturing errors and by deformation caused by its own weight that can be present during the measuring process. Moreover, there are some limits for the accuracy that can be achieved during the surface shape measurement.

Many researchers presented works dealing with theory of deformation of plates over the past years. The deflection in individual points of supported planes was studied by Nadai [13,14]. Similarly, determination of plainness and bending of optical flats were presented by Emerson [15]. Elastic deflections of a thick circular mirror horizontally placed on a ring support was studied by Selke [16]. A paper on point supports of a telescope mirror and its deflections was shown by Nelson *et al.* [17]. A study of the symmetrical bending of an elastic circular plate supported at numerous internal points was published by Nong and Bao-lian [18]. Deflections of a thin or thick annular mirror and application to active mirror support optimization were studied by Arnold [19]. Mikš and Novák [20] presented in detail the effect of self-deflection of a plane-parallel plate caused by its own weight on interferometrical measurements.

The main goal of this paper is to present an analysis of a deformation of a spherical lens positioned horizontally together with several approaches of a numerical approximate solution of derived governing equations. Vertically positioned lenses are not investigated in this paper as the influence of self-deflection is not practically measurable in this case for typical lenses. Moreover, in practical industrial applications there are almost no situations of vertical positioning because of complications with fastening of lenses that could lead to unwanted tensions and deformations.

First, fundamental equations for the calculation of the deformation are presented. Afterward, different numerical approximate solutions are compared. The importance of the presented topic for very accurate measurements is shown in an example. To the best of the authors' knowledge, such a study for a spherical lens has not been published yet. Therefore, the reader can find the solution and a useful tool for practical modeling of the aforementioned issue in this paper.

2. GOVERNING EQUATIONS FOR A CALCULATION OF DEFORMATION OF A SPHERICAL LENS CAUSED BY ITS OWN WEIGHT

A lens can be considered as a circular plate of variable thickness from the point of view of a theory of elasticity. And a deflection caused by a lens's own weight will be much smaller than its own thickness.

First, consider a lens to be supported at the edge. As is known from the theory of elasticity, a deflection w in a vertical

direction, if one supposes a symmetrical loading, can be described by the equations [21–24]

$$\varphi = -\frac{dw}{dr}, \quad M = D(r) \left[\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right], \quad (1)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right] \frac{d\varphi}{dr} + \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right] \frac{\varphi}{r} = \frac{Q(r)}{D(r)}, \quad (2)$$

$$D(r) = \frac{Ed^3(r)}{12(1-\nu^2)}, \quad q(r) = d(r)\rho g, \quad (3)$$

where $w = w(r)$ is a vertical deflection of the plate (lens), r is a radial distance from the center, ν is the Poisson number, E is the Young modulus of elasticity, ρ is a volume density, g is the gravitational acceleration, $d(r)$ is a plate's thickness in the position r from its center, $\varphi = \varphi(r)$ is a slope of a tangent to the centerline, $M = M(r)$ is a radial inner moment on a length unit, $D(r)$ is a bending stiffness, $q(r)$ is a flat load, and $Q(r)$ is a pushing force per a unit distance. Note that the aforementioned formulas are valid only for thin circular plates where a ratio of its thickness and diameter is less than or equal to 1/8. This condition covers usual optical components that come for testing in output control processes during construction of optical systems.

Suppose now that the lens is spherical (it has both surfaces spherical), and therefore its thickness can be described as

$$d(r) = d_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - (r/R_1)^2} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - (r/R_2)^2} \right), \quad (4)$$

$$\approx d_0 - a_2 r^2 - a_4 r^4 - a_6 r^6,$$

where

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad a_4 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right), \quad a_6 = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{R_1^5} - \frac{1}{R_2^5} \right),$$

where R_1 and R_2 are radii of the curvature of the lens and d_0 is its axial thickness. Using Eqs. (3) and (4) one gets

$$\frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} = \frac{3r}{d(r)} \left[\frac{1}{R_2 \sqrt{1 - (r/R_2)^2}} - \frac{1}{R_1 \sqrt{1 - (r/R_1)^2}} \right] \approx -\frac{6(a_2 r + 2a_4 r^3 + 3a_6 r^5)}{d(r)}. \quad (5)$$

With the use of Eq. (5) and appropriate boundary conditions one can numerically solve Eq. (2). Boundary conditions characterize a way of supporting a lens. For example, in the case of support at the edge (as is shown in Fig. 1) boundary conditions have the form

$$w(r)|_{r=a} = 0, \quad M(r)|_{r=a} = 0, \quad (6)$$

where a denotes the radius of the lens, and the pushing force $Q(r)$ can be calculated as

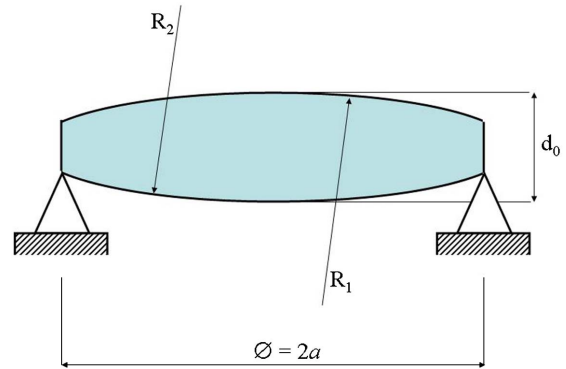


Fig. 1. Scheme of an edge support of a spherical lens.

$$Q(r) = \frac{1}{r} \int_0^r q(r)rdr = \rho g [I(r) - I(0)] \approx \rho g (d_0 r/2 - a_2 r^3/4 - a_4 r^5/6 - a_6 r^7/8), \quad (7)$$

where

$$I(r) = \int d(r)rdr = \frac{r^2}{2} (d_0 - R_1 + R_2) - \frac{R_1 \sqrt{1 - (r/R_1)^2}}{3} (R_1^2 - r^2) + \frac{R_2 \sqrt{1 - (r/R_2)^2}}{3} (R_2^2 - r^2), \quad (8)$$

$$I(0) = \frac{R_2^3 - R_1^3}{3}.$$

In the case of an inner support of the lens on a chosen radius R_2 (see Fig. 2), there will be a discontinuity at the point $r = r_s$, and one has to find a solution in two cases as a function $w_1(r)$ in interval $r \in [0, r_s]$ and as a function $w_2(r)$ in interval $r \in [r_s, a]$. The boundary conditions then become

$$w_1(r)|_{r=r_s} = w_2(r)|_{r=r_s} = 0, \quad M_2(r)|_{r=a} = 0. \quad (9)$$

Further, conditions of continuity have to be prescribed at the point $r = r_s$; they hold

$$\varphi_1(r)|_{r=r_s} = \varphi_2(r)|_{r=r_s}, \quad M|_{r=r_s} = M|_{r=r_s}. \quad (10)$$

The pushing force $Q(r)$ will be the same for the interval $r \in [0, r_s]$ as in the case of the edge-supported lens. At the point $r = r_s$, there will be a change as a result of reaction of the support, and therefore the following formulas become valid:

$$Q_1(r) = \frac{1}{r} \int_0^r q(r)rdr = \frac{\rho g}{r} [I(r) - I(0)],$$

$$Q_2(r) = -\frac{1}{r} \int_r^a q(r)rdr = -\frac{\rho g}{r} [I(a) - I(r)]. \quad (11)$$

A difference in forces $Q_1(r_s)$ and $Q_2(r_s)$ is equal to the support reaction.

In the following part of this paper, a numerical solution of the problem described by Eq. (2) will be presented.

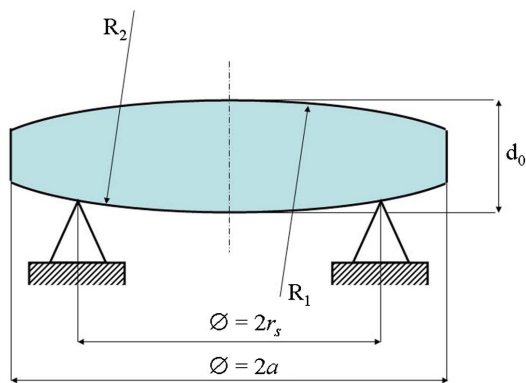


Fig. 2. Scheme of an inner support of a spherical lens.

3. NUMERICAL SOLUTION

This part is going to study several solutions of a calculation of the lens deformation. First, a power series solution is shown, presenting a universal method with transforming the problem to a nonlinear optimization issue. It is followed by the Runge-Kutta method and the finite differences method.

A. Power Series Solution Using Optimization Algorithms

Suppose that a lens is supported at its edge. If a deflection is prescribed as a power series of order $2N$,

$$w = \sum_{i=0}^N b_{2i}r^{2i}, \tag{12}$$

where b_{2i} are coefficients of the supposed power series and r is the radius. Then it holds

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} = -\sum_{i=0}^N (2i)b_{2i}r^{2i-1}, \tag{13}$$

and therefore

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= -\sum_{i=0}^N (2i)(2i-1)b_{2i}r^{2(i-1)}, \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2} &= -\sum_{i=0}^N (4i)(i-1)(2i-1)b_{2i}r^{2(i-3)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Boundary conditions of Eq. (9) then have the following form:

$$w(r)|_{r=a} = 0 = \sum_{i=0}^N b_{2i}a^{2i}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} M(r)|_{r=a} &= 0 \\ &= D(a) \left[-\sum_{i=0}^N (2i)(2i-1)b_{2i}a^{2(i-1)} - \nu \sum_{i=0}^N (2i)b_{2i}a^{2(i-1)} \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

It is obvious that the following condition has to be valid to fulfill Eq. (16):

$$\sum_{i=0}^N (2i)(2i-1+\nu)b_{2i}a^{2(i-1)} = 0. \tag{17}$$

An approximate numerical solution of a problem defined by Eq. (2) can be found with Eqs. (5)–(8), e.g., within an optimization algorithm [25,26].

Suppose now an inner support of the lens. Let a deflection $w_1(r)$ be an even series of order $2N_1$ (considering function $w_1(r)$ symmetrical about axis $x = 0$), and let a deflection $w_2(r)$ be a general power series of order N_2 (e.g., function $w_2(r)$ cannot be approximated with even powers of r only). Then,

$$w_1 = \sum_{i=0}^{N_1} b_{2i}r^{2i}, \quad w_2 = \sum_{i=0}^{N_2} c_i r^i, \tag{18}$$

where b_{2i} and c_i are coefficients of the supposed power series and r is the radius. Therefore,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{dw_1}{dr} = -\sum_{i=0}^{N_1} (2i)b_{2i}r^{2i-1}, \\ \varphi_2 &= -\frac{dw_2}{dr} = -\sum_{i=0}^{N_2} ic_i r^{i-1}, \end{aligned} \tag{19}$$

and similarly

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dr} &= -\sum_{i=0}^{N_1} (2i)(2i-1)b_{2i}r^{2(i-1)}, \\ \frac{d\varphi_2}{dr} &= -\sum_{i=0}^{N_2} i(i-1)c_i r^{i-2}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dr^2} &= -\sum_{i=0}^{N_1} (4i)(i-1)(2i-1)b_{2i}r^{2i-3}, \\ \frac{d^2\varphi_2}{dr^2} &= -\sum_{i=0}^{N_2} i(i-1)(i-2)c_i r^{i-3}. \end{aligned} \tag{21}$$

Boundary conditions for the aforementioned situation will have the form

$$w_1(r)|_{r=r_s} = 0 = \sum_{i=0}^{N_1} b_{2i}r_s^{2i} = w_2(r)|_{r=r_s} = \sum_{i=0}^{N_2} c_i r_s^i, \tag{22}$$

$$M(r)|_{r=a} = 0 = -D(a) \sum_{i=0}^{N_2} i(i-1+\nu)c_i a^{i-2}, \tag{23}$$

and conditions of continuity

$$\varphi_1(r)|_{r=r_s} = \varphi_2(r)|_{r=r_s} = -\sum_{i=0}^{N_1} (2i)b_{2i}r_s^{2i-1} = -\sum_{i=0}^{N_2} ic_i r_s^{i-1}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} M_1(r)|_{r=r_s} &= M_2(r)|_{r=r_s} \\ &= -D(r_s) \sum_{i=0}^{N_1} (2i)(2i-1+\nu)b_{2i}r_s^{2(i-1)} \\ &= -D(r_s) \sum_{i=0}^{N_2} i(i-1+\nu)c_i r_s^{i-2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Optimization algorithms [25,26] are a very powerful tool for solving many problems. The main goal of those methods is to minimize a user-defined function of variable unknowns (find function minimum). In the presented case of the solution of differential Eq. (2) the coefficients of the power series of Eq. (12) or Eq. (18) become the unknowns. A goal function to be minimized will be shown below.

Substituting Eqs. (12)–(14) into Eq. (2), one gets

$$\sum_{i=0}^N E_i(r)b_{2i} = C(r), \tag{26}$$

where

$$\begin{aligned} E_i(r) &= e_i(r) + A(r)c_i(r) + B(r)a_i(r), \\ e_i(r) &= -(4i)(i-1)(2i-1)r^{2i-3}, \\ c_i(r) &= -(2i)(2i-1)r^{2(i-1)}, \\ a_i(r) &= -(2i)r^{2i-1}, \\ A(r) &= \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right], \\ B(r) &= \frac{1}{r} \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right], \quad C(r) = \frac{Q(r)}{D(r)}. \end{aligned}$$

If coefficients b_{2i} in Eq. (26) are converging to a correct solution, then the formula

$$\phi_1(r_m) = \left[\sum_{i=0}^N E_i(r_m)b_{2i} \right] - C(r_m) \tag{27}$$

is converging to zero for given point r_m . Similarly, for boundary conditions Eqs. (15) and (16) one can write

$$\phi_2 = \sum_{i=0}^N b_{2i}a^{2i}, \quad \phi_3 = \sum_{i=0}^N (2i)(2i-1+\nu)b_{2i}a^{2(i-1)}. \tag{28}$$

The goal function ϕ for $M+1$ points $r_m (m=0, \dots, M)$ in the interval $[0, a] (r_0=0, r_M=a)$ defined in a least-squares sense can be formulated as

$$\phi = \left[\sum_{m=0}^M W_1 \phi_1^2(r_m) \right] + W_2 \phi_2^2 + W_3 \phi_3^2, \tag{29}$$

where $W_1, W_2,$ and W_3 are weight coefficients. One can choose the goal function in a sense of a sum of absolute values, and it holds as follows:

$$\phi = \left[\sum_{m=0}^M W_1 |\phi_1(r_m)| \right] + W_2 |\phi_2| + W_3 |\phi_3|. \tag{30}$$

If the algorithm finds such coefficients b_{2i} , which will minimize the goal function of Eq. (29) or Eq. (30), then such coefficients define the approximate solution of Eq. (2) with the boundary conditions Eq. (9).

For the lens with the inner support, the goal function can be defined in a similar approach,

$$\phi = \sum_{m=0}^{M_s} W_1 \phi_1^2(r_m) + \sum_{m=M_s+1}^M W_2 \phi_2^2(r_m) + \sum_{j=3}^8 W_j \phi_j^2, \tag{31}$$

where $m=M_s$ denotes the position of the support in the interval $[0, a]$, W_1, \dots, W_8 are weights, and

$$\begin{aligned} \phi_1(r_m) &= \left[\sum_{i=0}^{N_1} E_i(r_m)b_{2i} \right] - \frac{Q_1(r_m)}{D(r_m)}, \\ \phi_2(r_m) &= \left[\sum_{i=0}^{N_2} F_i(r_m)c_i \right] - \frac{Q_2(r_m)}{D(r_m)}, \\ F_i(r_m) &= p_i(r_m) + A(r_m)h_i + B(r_m)q_i, \\ p_i(r_m) &= -i(i-1)(i-2)r^{i-3}, \\ h_i(r_m) &= -i(i-1)r^{i-2}, \quad q_i(r_m) = -ir^{i-1}, \\ \phi_3 &= \sum_{i=0}^{N_1} b_{2i}r_s^{2i}, \quad \phi_4 = \sum_{i=0}^{N_2} c_i r_s^i, \\ \phi_5 &= \sum_{i=0}^{N_2} i(i-1+\nu)c_i a^{i-2}, \\ \phi_6 &= \sum_{i=0}^{N_1} (2i)b_{2i}r_s^{2i-1} - \sum_{i=0}^{N_2} ic_i r_s^{i-1}, \\ \phi_7 &= \sum_{i=0}^{N_1} (2i)(2i-1+\nu)b_{2i}r_s^{2(i-1)}, \\ \phi_8 &= \sum_{i=0}^{N_1} i(i-1+\nu)c_i r_s^{i-2}. \end{aligned} \tag{32}$$

The goal function as a sum of absolute values can be constructed similarly, as in Eq. (30).

The aforementioned formulas present an approximate solution for function φ . Deflection w then can be easily calculated with, for example, numerical integration [27,28], with respect to Eq. (1),

$$w(r) = - \int_0^r \phi(\xi) d\xi + c, \tag{33}$$

where c denotes an integration constant, which can be calculated from boundary conditions.

B. Calculation of Deflection with Runge–Kutta Method

One can modify Eq. (2) as follows:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dr^2} &= \frac{Q(r)}{D(r)} - \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right] \frac{d\varphi}{dr} \\ &\quad - \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right] \frac{\varphi}{r}. \end{aligned} \tag{34}$$

Denoting Eq. (34) as $\varphi'' = f(r, \varphi, \varphi')$, one can find an approximate solution for the function φ with the Runge–Kutta Method of the fourth order [28]. Recursion formulas then hold

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + h\varphi'_n + \frac{h}{6}(k_1 + k_2 + k_3), \\ \varphi'_{n+1} &= \varphi'_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= hf(r_n, \varphi_n, \varphi'_n), \quad k_2 = hf\left(r_n + \frac{h}{2}, \varphi_n + \frac{h}{2}\varphi'_n, \varphi'_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(r_n + \frac{h}{2}, \varphi_n + \frac{h}{2}\varphi'_n + \frac{h}{4}k_1, \varphi'_n + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf\left(r_n + h, \varphi_n + h\varphi'_n + \frac{h}{2}k_2, \varphi'_n + k_3\right), \end{aligned} \tag{35}$$

where h is a calculation step. The resulting solution has to satisfy the boundary conditions of Eq. (9). It is obvious that one should make an initial guess of starting values in a way to represent the form of expected shape as close a possible.

To find a solution for the internally supported lens at the radius r_s , the aforementioned Eq. (35) can be used without any changes assuming Eqs. (1)–(5) and (7)–(8) for interval $[0, r_s]$, and Eqs. (1)–(5) and the second formula of Eq. (11) for interval $[r_s, a]$ with the appropriate solution of continuity in the point r_s .

C. Calculation of Deflection with Finite Differences Method

The finite differences method [27] is based on expressing derivations of a given function in a given point as a linear combination of function values in surrounding points. In our case, derivations of the function φ can be expressed as

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &\approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h}, \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2} &\approx \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2}, \end{aligned} \tag{36}$$

where φ_i is the value of the function to be found in given point r_i ($i = 0, \dots, N$, therefore interval $[0, a]$ is divided into $N + 1$ points), $\varphi_{i\pm 1}$ is the function value in the point $r_{i\pm 1}$ (see Fig. 3), and $h = r_i - r_{i-1} = r_{i+1} - r_i$ is the distance between calculation points.

Substituting Eq. (36) in Eq. (2) one gets the governing equation for a solution of the aforementioned problem with the use of the finite differences method; it holds

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} + A(r_i) \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} \\ + B(r_i)\varphi_i = C(r_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \tag{37}$$

where

$$\begin{aligned} A(r) &= \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right], \\ B(r) &= \frac{1}{r} \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right], \\ C(r) &= \left[\frac{Q(r)}{D(r)} \right] \end{aligned} \tag{38}$$

could be calculated with Eqs. (5)–(7).

Considering an assumption of a symmetric problem the boundary conditions of Eq. (9) can be extended with

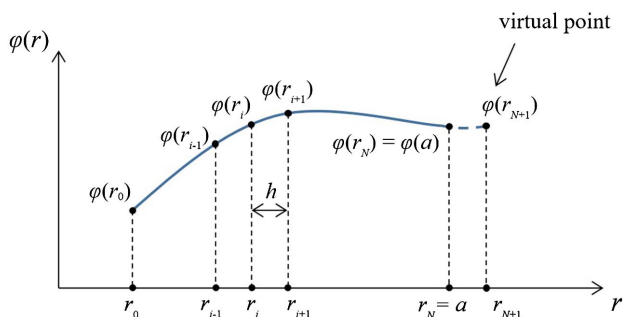


Fig. 3. Method of finite differences.

$$\varphi(r)|_{r=0} = \varphi_0 = 0. \tag{39}$$

Therefore, the value of function $\varphi(r)$ in point $r = 0$ is known and does not have to be assumed as an unknown to be calculated [note $i \neq 0$ in Eq. (37)]. Using Eq. (1) the moment the boundary condition of Eq. (9) has the following form:

$$M(r)|_{r=a} = D(r_N) \left[\frac{\varphi_{N+1} - \varphi_{N-1}}{2h} + \frac{\nu}{r} \varphi_N \right] = 0. \tag{40}$$

Besides the value of φ_{N+1} is not an unknown value in the considered interval, this value states in the last formula, where $i = N$, and therefore it is necessary to calculate it from the boundary condition (40) as

$$\varphi_{N+1} = -\frac{2h\nu}{r_N} \varphi_N + \varphi_{N-1}, \tag{41}$$

and, consequently, it has to be substituted into the last formula.

For an illustration let one formulate the system of Eq. (37) using matrix notation. The values of function φ in discrete points of the interval $(0, a]$ are calculated from the system of equations

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{C}, \tag{42}$$

where $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is a tridiagonal matrix of the system whose elements δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) on the main diagonal can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \delta_i|_{i < N} &= -\frac{2}{h^2} + B(r_i), \\ \delta_i|_{i=N} &= -\frac{2}{h^2} - \frac{2\nu}{r_N h} - A(r_N) \frac{\nu}{r_N} + B(r_N). \end{aligned} \tag{43}$$

The upper collateral diagonal elements α_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) are then given with formula

$$\alpha_i = \frac{1}{h^2} + \frac{A(r_i)}{2h}, \tag{44}$$

and the lower collateral diagonal elements β_i ($i = 2, \dots, N$) as

$$\beta_i|_{i < N} = \frac{1}{h^2} - \frac{A(r_i)}{2h}, \quad \beta_i|_{i=N} = \frac{2}{h^2}. \tag{45}$$

Next, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ in Eq. (42) denotes a column matrix of values φ_i ($i = 1, \dots, N$) to be found, and $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ is a matrix with elements $C(r_i)$ ($i = 1, \dots, N$).

Similarly to the previous approaches, the aforementioned formulas present an approximate solution for function φ . Deflection w then can be easily calculated with, for example, numerical integration [27,28], with respect to Eq. (1).

4. EXAMPLE

In this section, first, all the aforementioned methods are compared within each other and to the finite elements method used in a commercially available software ANSYS [29], too. Afterward, a dependency of the deflection on material parameters of the lens is presented in the second subsection.

A. Comparison of Presented Numerical Solutions

To compare the presented numerical approaches, suppose a lens with the following parameters: $R_1 = 600$ mm, $R_2 = -600$ mm, $d_0 = 5$ mm, $a = 50$ mm, $E = 82$ GPa, $\rho = 2510$ kg/m³, $\nu = 0.206$. Results of the approximate solution

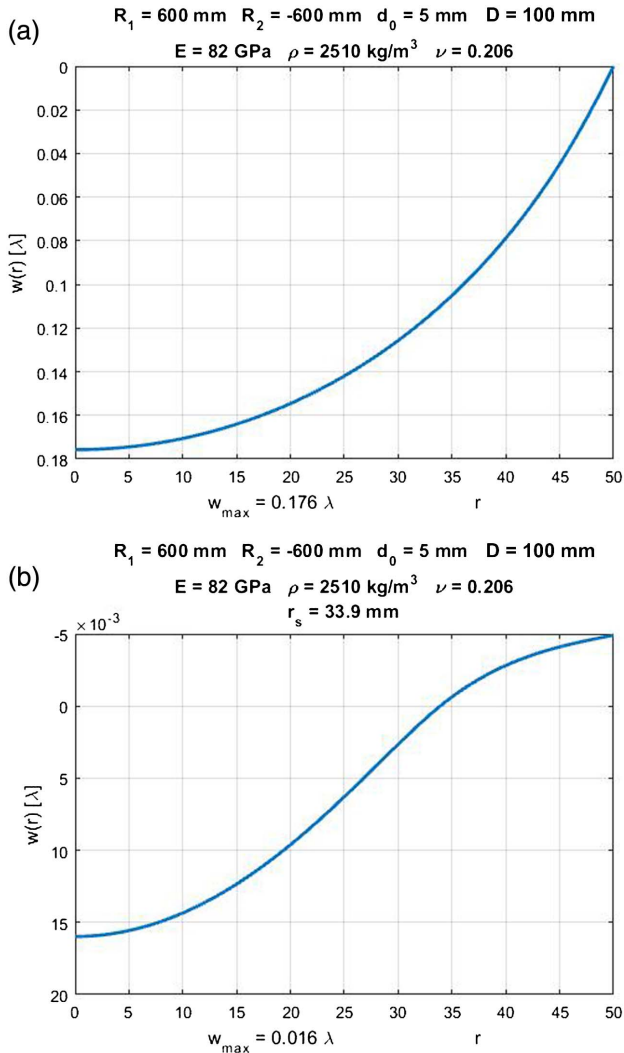


Fig. 4. Example of calculation of lens deflection.

presented in the previous part of the paper are shown in Fig. 4. Figure 4(a) shows the result for a lens supported at the edge, and Fig. 4(b) shows the result for a support in radial distance $r_s = 33.9$ mm. Please note that the scale of the second figure is in 10^{-3} . It demonstrates a large difference between the deflection for edge and inner support. The figure shows only one result for all presented methods, because differences between chosen numerical approaches are negligible. Besides the presented method the finite elements method was used with the software ANSYS giving the same results. Note that the interval b of the division in the radial direction was chosen, $b = 0.05$ mm.

B. Dependency of Deflections on a Material of a Lens

Let one study the effect of a material of a lens on deflections. First, suppose a positive (biconvex) lens with the following geometrical parameters: $R_1 = 300$ mm, $R_2 = -300$ mm, $d_0 = 10$ mm, $a = 50$ mm. Material parameters chosen for a calculation are shown in Table 1. In the table, E denotes the Young modulus, ρ is the volume density, and ν is the

Table 1. Material Parameters of a Lens

Glass Type	E [GPa]	ρ [g/cm ³]	ν
SF57	54	5.51	0.248
N-BK7	82	2.51	0.206
N-LAF21	124	4.28	0.295

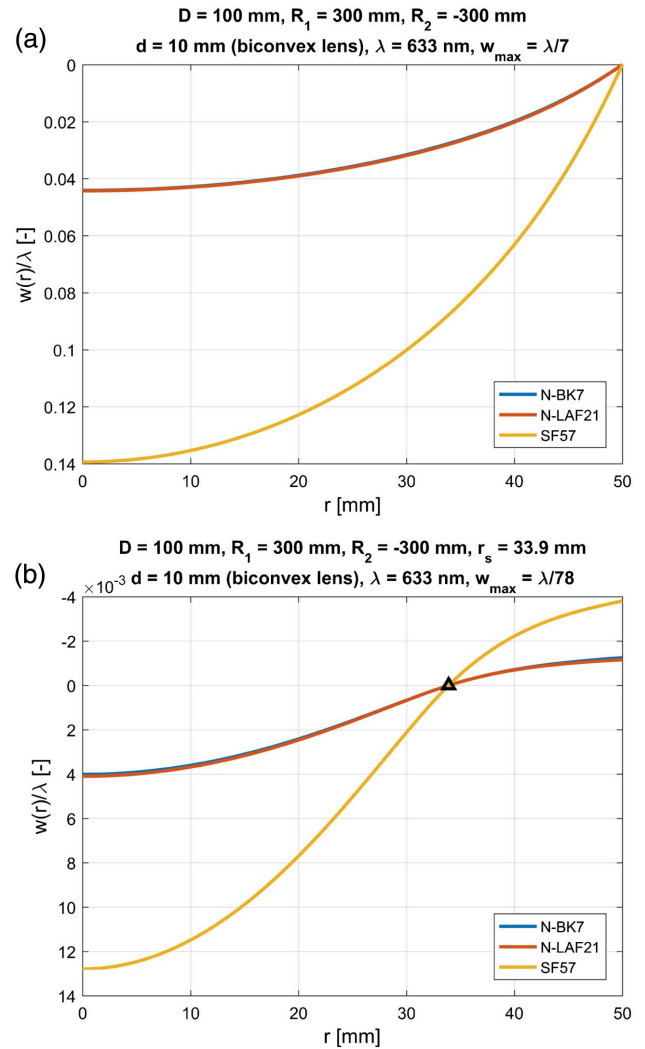


Fig. 5. (a) Comparison of deflections of a positive (biconvex) lens for different materials and support at the edge (related to the wavelength $\lambda = 633$ nm), and (b) comparison of deflections of a positive (biconvex) inner-supported lens for different materials (related to the wavelength $\lambda = 633$ nm). Note that the curves for materials N-BK7 and N-LAF21 coincide in this example despite the fact that materials are different.

Poisson ratio. The deflections of the lens for support at the edge are shown in Fig. 5(a), and results for the inner support at the radius $r_s = 33.9$ mm = $0.678a$ are shown in Fig. 5(b). Note that the curves for materials N-BK7 and N-LAF21 coincide in this example despite the fact that materials are different. As is obvious, the maximal deflection for the edge support is $w_{max} = \lambda/7$ (where $\lambda = 633$ nm) for the material SF57, and the maximal deflection for the inner support is $w_{max} = \lambda/78$.

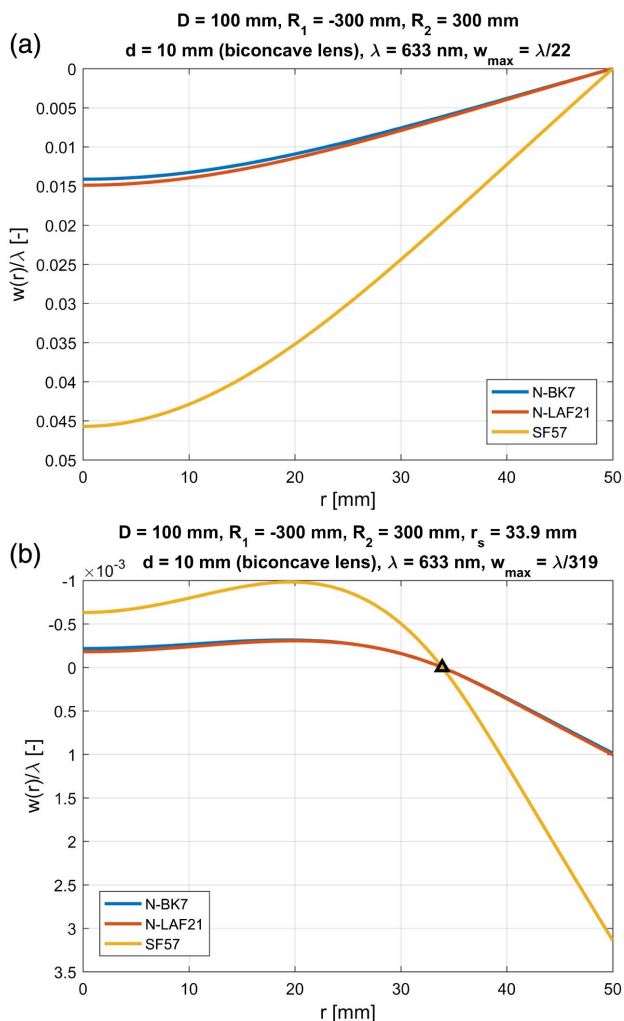


Fig. 6. (a) Comparison of deflections of a negative (biconcave) lens for different materials and support at the edge (related to the wavelength $\lambda = 633$ nm), and (b) comparison of deflections of a negative (biconcave) inner-supported lens for different materials (related to the wavelength $\lambda = 633$ nm).

One can see that the self-deflection could result in non-negligible errors in combination with inappropriate support of the lens under test.

Second, a similar analysis is done for a negative (biconcave) lens with the following geometrical parameters: $R_1 = -300$ mm, $R_2 = 300$ mm, $d_0 = 10$ mm, $a = 50$ mm. The lens is again made by three different materials, which are the same as in the previous example (see Table 1). Results for the edge support of the lens are shown in Fig. 6(a) and for the inner support in Fig. 6(b).

As is obvious from the presented results of numerical examples, the self-deflection caused by the lens's weight cannot be neglected for the case of measurements with high accuracy, e.g., interferometry. Especially, with the use of inappropriate material the deflection can enormously affect measured results.

5. CONCLUSION

This paper presented an analysis of a numerical solution of a differential equation characterizing a deflection of a spherical

lens caused by its own weight, based on a chosen support and lens material. Several calculation methods were shown and formulas for an easy implementation were presented.

Deflection of lenses depends on geometrical and material parameters of the tested component. One of the examples presented in this paper shows a case study for the positive lens with diameter of 100 mm, edge thickness of 10 mm, and radii of curvatures equal to 300 mm. The deflection for this case, considering a material SF57, was approximately $\lambda/7$ for the edge support. Such a value is easily measurable during interferometrical testing. Therefore, if one does not include such a phenomenon into the correction of measurement results, it can lead to a wrong evaluation of optical quality of the final product. In the presented case, if a production tolerance would be $\lambda/10$, for example, the self-deflection effect could lead to an elimination of a component that should remain in the production process.

The reader can use the derived formulas and calculation procedures presented in this paper for solving specific problems in practice that can vary for different geometries of tested components. Especially during measurements with high accuracy, e.g., interferometrical testing of large lenses, it is very important to consider self-deflection of tested parts.

Generally, there are other effects that affect the testing procedure, e.g., variation in temperature, which can affect atmospheric condition as well as elongation of component itself. Usually, conditions for testing of a high accuracy are of such quality that these phenomena are eliminated (temperature stabilization, etc.). Nevertheless, the self-deflection cannot be practically removed; therefore, one has to use inner support for the tested component or numerically correct final results.

Funding. Czech Technical University in Prague (CTU). (SGS17/004/OHK1/1T/11).

REFERENCES

1. D. Malacara, *Optical Shop Testing*, Wiley Series in Pure and Applied Optics (Wiley, 2007).
2. B. Dörband and H. Gross, *Handbook of Optical Systems, Metrology of Optical Components and Systems*, Gross/Optical Systems V1-V6 special prices until 6 V ST published (Wiley, 2012).
3. R. Leach, *Optical Measurement of Surface Topography* (Springer Berlin Heidelberg, 2011).
4. T. Yoshizawa, *Handbook of Optical Metrology: Principles and Applications*, 2nd ed. (CRC Press, 2015).
5. A. Mikš, *Applied Optics* (CTU Publishing, 2009).
6. P. Hariharan, *Optical Interferometry*, Electronics & Electrical (Academic, 2003).
7. <http://www.zygo.com>.
8. <http://www.trioptic.com>.
9. <http://www.4dtechnology.com>.
10. <http://www.optotech.de>.
11. <http://www.schneider-om.com>.
12. A. Mikš, "Interferometrical methods for evaluation spherical surfaces in optics," *Fine Mech. Opt.* **46**, 29–35 (2001).
13. A. Nadai, "Die verbiegungen in einzelnen punkten unterstützter kreisfiirmiger platten," *Physik* **23**, 366–376 (1922).
14. A. Nadai, "Theorie der plattenbiegung und ihre experimentelle best tigung," *Z. Angew. Math. Mech.* **2**, 381–398 (1922).
15. W. B. Emerson, "Determination of planeness and bending of optical flats," *J. Res. Natl. Bur. Stand.* **49**, 241–247 (1952).
16. L. A. Selke, "Theoretical elastic deflections of a thick horizontal circular mirror on a ring support," *Appl. Opt.* **9**, 149–153 (1970).

17. J. E. Nelson, J. Lubliner, and T. S. Mast, "Telescope mirror supports: plate deflections on point supports," *Proc. SPIE* **322**, 212–228 (1982).
18. L. Nong and F. Bao-lian, "The symmetrical bending of an elastic circular plate supported at K internal points," *Appl. Math. Mech.* **12**, 1091–1096 (1991).
19. L. Arnold, "Uniform-load and actuator influence functions of a thin or thick annular mirror: application to active mirror support optimization," *Appl. Opt.* **35**, 1095–1106 (1996).
20. A. Mikš and J. Novák, "Influence of the gravity induced deflection of a reference flat of the Fizeau interferometer on the measurement accuracy of testing flat surfaces in optics," *Fine Mech. Opt.* **59**, 228–232 (2014).
21. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Engineering Societies Monographs (McGraw-Hill, 1959).
22. A. Volmir, *Flexible Plates and Shells* (Defense Technical Information Center, 1967).
23. E. Ventsel and T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications* (CRC Press, 2001).
24. R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods* (Wiley, 2004).
25. L. E. Scales, *Introduction to Non-Linear Optimization*, Macmillan Computer Science Series (Springer, 1985).
26. M. Aoki, *Introduction to Optimization Techniques: Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming*, Macmillan Series in Applied Computer Science (Macmillan, 1971).
27. J. van Kan, A. Segal, and F. Vermolen, *Numerical Methods in Scientific Computing* (Delft Academic, 2014).
28. G. Korn and T. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*, Dover Civil and Mechanical Engineering (Dover, 2013).
29. <http://www.ansys.com>.



Deformation of a prestressed liquid lens membrane

PETR POKORNÝ,^{1,*}  FILIP ŠMEJKAL,¹ PAVEL KULMON,¹ PAVEL NOVÁK,¹ JIŘÍ NOVÁK,¹ ANTONÍN MIKŠ,¹ MARTIN HORÁK,² AND MILAN JIRÁSEK²

¹Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thákurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic

²Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Thákurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic

*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 29 August 2017; accepted 23 October 2017; posted 25 October 2017 (Doc. ID 305850); published 22 November 2017

This paper presents a complete model for analysis of the deformed shape of a prestressed circular axisymmetric membrane of a liquid lens. The governing equations are derived using the exact relation between displacements and the Green–Lagrange strains combined with the Saint Venant–Kirchhoff material law, which postulates a linear relation between the Green–Lagrange strains and the second Piola–Kirchhoff stresses. A numerical solution based on minimization of potential energy is illustrated by an example, and the dependence of the maximum membrane deflection on material properties and initial prestress is analyzed. The theoretical model is then experimentally validated. It is shown that the model is suitable for large-strain analysis of liquid lens membranes and provides sufficiently accurate results that can be used in further analyses and simulations of imaging properties of active optical elements based on liquid lenses. © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: (120.4640) Optical instruments; (220.1080) Active or adaptive optics; (350.4600) Optical engineering.

<https://doi.org/10.1364/AO.56.009368>

1. INTRODUCTION

Active optical elements represent a modern direction in optics, which in recent years has been under rapid development. They include well-known membrane liquid lenses [1–23], which are commercially available for imaging purposes [2,3]. The basic element of such lenses is a membrane fixed along its circumference (the specific type of fixation varies depending on the manufacturer). The lens chamber is filled by an optical liquid. When the volume of the liquid is changed, the liquid inserts uniform pressure on the membrane and the membrane deflects.

In the past, many authors performed theoretical and experimental analyses of deformed membranes loaded by a uniform pressure using various mechanical models [4–23] and various numerical techniques [24–37].

In a previous paper [38], the authors analyzed in detail the deformation of a circular axisymmetric liquid lens membrane. This work extends the previous analysis by including the effect of initial prestress, which is inevitably induced during installation of the liquid lens. The membrane is again considered to be fixed along its circumference and subjected to uniform pressure of the liquid.

Since the deflections of the membrane substantially exceed its thickness, solutions based on standard linear elasticity [39,40] are not sufficiently accurate. The influence of radial deflections is also nonnegligible. The model presented in the next section is based on exact strain-displacement relations defining the Green–Lagrange strain and on the Saint Venant–Kirchhoff material law that assumes a linear relation

between the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress [41]. This model properly takes into account geometrically nonlinear effects and includes the membrane’s radial displacements, which are in Refs. [4–23] and considered as small or totally neglected.

In the next section, the governing equations are derived and a numerical solution based on polynomial series and optimization algorithms [42,43] is presented. An example dealing with specific parameters of a membrane lens illustrates the numerical solution and compares it to results obtained by finite elements. The dependence of the maximum membrane deflection on the material properties and initial prestress is studied. In the last section, the proposed model is validated by comparison to deflections measured in experiments. It is confirmed that the model is suitable for an accurate description of the given problem and can be used in further simulations and analyses related to optical design requiring a highly accurate description of optical interfaces.

2. THEORETICAL PREDICTION OF PRESTRESSED MEMBRANE SHAPE

A. Derivation of Governing Equations

Let us consider a circular axisymmetric membrane of a liquid lens, with the axis of symmetry denoted as z and the radial axis as r ; see Fig. 1. The membrane is characterized by constant thickness h and radius a , with h so small that the bending stiffness can be neglected. Along its circumference, the membrane is fixed. Under the pressure of the optical liquid in the

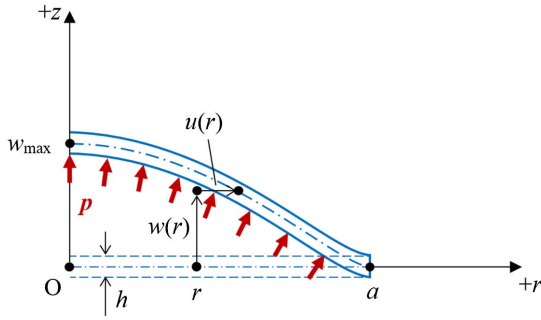


Fig. 1. Sketch of a circular axisymmetric membrane deformed by constant liquid pressure p (dashed blue lines—initial straight shape of the prestressed membrane at zero applied pressure, $w(r)$ and $u(r)$ —vertical and horizontal displacements of a point with initial coordinates $[r, 0]$, a —membrane radius, h —membrane thickness, w_{\max} —maximum deflection).

lens, the membrane deforms and a general point on its mid-plane with initial coordinates $[r, 0]$ is displaced to a new position $[r + u(r), w(r)]$, where $w(r)$ denotes the deflection (displacement in the z direction) and $u(r)$ is the radial displacement. The deformed shape of the membrane can be described by a certain function $g(r)$, implicitly defined by the relation $g(r + u(r)) = w(r)$.

Let us further assume that the membrane in its initial state (i.e., at vanishing applied pressure p) is prestressed, and its initial stretch in all in-plane directions is $\lambda_0 > 1$ (the stretch is defined with respect to the stress-free reference configuration). Further, the effect of the change of thickness h on the membrane shape is negligible, and so the deformed shape is described by the midsurface.

The radial stretch λ_r and the tangential (circumferential) stretch λ_t in the deformed state are easily expressed as

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \lambda_0 \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2}, \\ \lambda_t &= \lambda_0 \left(1 + \frac{u}{r}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

where u' and w' are the derivatives of displacements u and w with respect to the radial coordinate, r . Let us assume that the material can be described by the Saint Venant–Kirchhoff model, which postulates a linear relation between the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress [41]. Based on the definition of Green–Lagrange strain, the inplane normal strains are evaluated from the stretches as

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1) = \lambda_0^2 \left[u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2) \right] + \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) \\ &= \lambda_0^2 \tilde{\varepsilon}_r + \varepsilon_0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \lambda_0^2 \left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) \\ &= \lambda_0^2 \tilde{\varepsilon}_t + \varepsilon_0, \end{aligned} \tag{3}$$

where

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) \tag{4}$$

is the initial strain and

$$\tilde{\varepsilon}_r = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2), \tag{5}$$

$$\tilde{\varepsilon}_t = \frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \tag{6}$$

are strains that would be obtained by taking the initial prestressed state as the reference configuration [while Eqs. (2) and (3) use the stress-free state as the reference configuration].

Since the state of the material corresponds to plane stress, the strain energy density \mathcal{E}_{int} (per unit volume in the stress-free state) is given by [39,40]

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\varepsilon_r, \varepsilon_t) = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2), \tag{7}$$

where E is the Young modulus and ν is the Poisson ratio characterizing the membrane material. Differentiating the strain energy density with respect to strains, we get the corresponding work-conjugate stresses

$$\sigma_r = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t), \tag{8}$$

$$\sigma_t = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r), \tag{9}$$

and substituting from Eqs. (2) and (3), we can express them as

$$\sigma_r = \frac{E\lambda_0^2}{1 - \nu^2} (\tilde{\varepsilon}_r + \nu\tilde{\varepsilon}_t) + \sigma_0, \tag{10}$$

$$\sigma_t = \frac{E\lambda_0^2}{1 - \nu^2} (\tilde{\varepsilon}_t + \nu\tilde{\varepsilon}_r) + \sigma_0, \tag{11}$$

where

$$\sigma_0 = \frac{E}{1 - \nu} \varepsilon_0 = \frac{E}{2(1 - \nu)} (\lambda_0^2 - 1) \tag{12}$$

is the initial prestress.

Since the strain energy density has been differentiated with respect to Green–Lagrange strains, the resulting stresses are the second Piola–Kirchhoff stresses, with the stress-free configuration taken as the referential one. It is important to realize that symbols a and h denote the membrane radius and thickness in the state before application of the liquid pressure but after application of the prestress. The corresponding dimensions in the stress-free state will be denoted as \tilde{a} and \tilde{h} , with $\tilde{a} = a/\lambda_0$ and with \tilde{h} considered as a primary geometric characteristic of the membrane.

The equilibrium state after application of pressure p can be found by exploiting the principle of minimum potential energy. The total potential energy,

$$E_p = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}} \tag{13}$$

is the sum of the strain energy, E_{int} , and the energy of external forces, E_{ext} . The state of minimum potential energy can be attained only if the variation of functional E_p vanishes for all admissible variations of displacements u and w . Since \mathcal{E}_{int} represents the strain energy density per unit volume in the stress-free reference configuration, the strain energy

$$E_{\text{int}} = 2\pi\tilde{h} \int_0^{\tilde{a}} \mathcal{E}_{\text{int}} \tilde{r} d\tilde{r} \tag{14}$$

must be evaluated by integrating over a cylinder of radius $\tilde{a} = a/\lambda_0$ and height \tilde{h} . The integration variable \tilde{r} that varies from 0 to \tilde{a} corresponds to the radial coordinate r (in the prestressed state) divided by λ_0 . Therefore, we can transform Eq. (14) into

$$E_{\text{int}} = \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a \mathcal{E}_{\text{int}} r dr. \tag{15}$$

The energy of external forces can be expressed as minus the applied pressure multiplied by the volume between the initial midplane and the deformed midsurface, leading to

$$E_{\text{ext}} = -2\pi p \int_0^a w(r+u)(1+u') dr. \tag{16}$$

The first variations of the strain energy and of the energy of external forces can now be evaluated as

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{int}} &= \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r} \delta \varepsilon_r + \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t} \delta \varepsilon_t \right) r dr \\ &= \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_t \delta \varepsilon_t) r dr \\ &= 2\pi\tilde{h} \int_0^a (\sigma_r \delta \tilde{\varepsilon}_r + \sigma_t \delta \tilde{\varepsilon}_t) r dr \\ &= 2\pi\tilde{h} \int_0^a (r\sigma_r (\delta u' + u' \delta u' + w' \delta w') \\ &\quad + \sigma_t (\delta u + u \delta u/r)) dr \\ &= 2\pi\tilde{h} [r\sigma_r (\delta u + u' \delta u + w' \delta w)]_{r=0}^a \\ &\quad - 2\pi\tilde{h} \int_0^a ((r\sigma_r (1+u')) \delta u + (r\sigma_r w')' \delta w) dr \\ &\quad + 2\pi\tilde{h} \int_0^a \sigma_t \left(\delta u + \frac{u \delta u}{r} \right) dr, \end{aligned} \tag{17}$$

and

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{ext}} &= -2\pi p \int_0^a \delta w (r+u)(1+u') dr \\ &\quad - 2\pi p [w(r+u) \delta u]_{r=0}^a \\ &\quad + 2\pi p \int_0^a w' (r+u) \delta u dr. \end{aligned} \tag{18}$$

As shown in Fig. 1, admissible functions u and w are constrained by boundary conditions

$$w(a) = 0, u(0) = 0, u(a) = 0, \tag{19}$$

and analogous conditions must be satisfied by their variations δu and δw . Summing Eqs. (17) and (18) and making use of the boundary conditions, we obtain the variation of total potential energy in the form

$$\begin{aligned} \delta E_p &= -2\pi\tilde{h} r \sigma_r w' \delta w|_{r=0} \\ &\quad + 2\pi \int_0^a \left(\tilde{h} \sigma_r \left(1 + \frac{u}{r} \right) - \tilde{h} (r\sigma_r (1+u'))' \right. \\ &\quad \left. + p w' (r+u) \right) \delta u dr \\ &\quad - 2\pi \int_0^a (\tilde{h} (r\sigma_r w')' + p (r+u)(1+u')) \delta w dr. \end{aligned} \tag{20}$$

The corresponding strong form of equilibrium equations reads

$$\tilde{h} (r\sigma_r (1+u'))' - \tilde{h} \sigma_t \left(1 + \frac{u}{r} \right) = p (r+u) w', \tag{21}$$

$$-\tilde{h} (r\sigma_r w')' = p (r+u)(1+u'). \tag{22}$$

In many publications mentioned in the introduction [24–37], the radial displacements u and their derivatives u' are considered as negligible. Based on such an assumption, Eq. (21) would reduce to

$$\tilde{h} (r\sigma_r)' - \tilde{h} \sigma_t = p r w', \tag{23}$$

$$-\tilde{h} (r\sigma_r w')' = p r. \tag{24}$$

Since the variation δw at $r = 0$ is completely arbitrary, the first term in Eq. (20) leads to the boundary condition

$$r\sigma_r w' = 0 \quad \text{at } r = 0. \tag{25}$$

At a first glance, the condition seems to be satisfied automatically. Indeed, if $\sigma_r w'$ has a finite value at $r = 0$, then multiplication by zero leads to $r\sigma_r w' = 0$. In a general setting, a concentrated vertical force F_0 could be applied at $r = 0$, and then the resulting boundary condition would read $\lim_{r \rightarrow 0^+} (r\sigma_r w') = F_0 / (2\pi\tilde{h})$. For the problem studied here, no such concentrated force is present, and a refined analysis leads to the conclusion that the deflection w considered as a function of inplane coordinates x and y should be continuously differentiable. Consequently, the derivative of w with respect to r at $r = 0$ should vanish, and this can be imposed as the fourth boundary condition,

$$w'(0) = 0, \tag{26}$$

which supplements Eq. (19) conditions.

B. Numerical Approximation by Power Series

The governing differential equations written in terms of displacements u and w could be constructed by substituting the strain-displacement Eqs. (5) and (6) and the stress-strain Eqs. (10) and (11) into the equilibrium Eqs. (21) and (22). However, the resulting set of two partial differential equations with the boundary conditions of Eqs. (19) and (26) cannot be solved analytically. An approximate numerical solution can be constructed by minimizing the energy functional E_p over a finite-dimensional space of suitable approximation functions.

Since the solution is expected to be highly regular, polynomial approximations seem to be a good choice. It is also convenient to reformulate the problem in terms of dimensionless displacements $\tilde{u} = u/a$ and $\tilde{w} = w/a$, and dimensionless spatial coordinate $\rho = r/a$, so that the domain of analysis is transformed to the interval $[0, 1]$. The displacements can then be approximated by the polynomial series

$$\tilde{w}(\rho) = \sum_{i=1}^N b_i (1 - \rho^{2i}), \quad \tilde{u}(\rho) = \sum_{j=1}^M c_j (\rho - \rho^{2j+1}), \tag{27}$$

where b_i ($i = 1, 2, \dots, N$) and c_j ($j = 1, 2, \dots, M$) are arbitrary coefficients. Note that these approximations automatically satisfy the boundary conditions of Eq. (19) as well as of Eq. (26).

In terms of the dimensionless quantities, Eqs. (5) and (6) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_r &= \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\tilde{u}}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^M c_j [1 - (2j + 1)\rho^{2j}] + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^M c_j [1 - (2j + 1)\rho^{2j}] \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\sum_{i=1}^N i b_i \rho^{2i-1} \right)^2, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_t &= \frac{\tilde{u}}{\rho} + \frac{\tilde{w}^2}{2\rho^2} \\ &= \sum_{j=1}^M c_j (1 - \rho^{2j}) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^M c_j (1 - \rho^{2j}) \right)^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Substituting from Eqs. (7), (2), and (3) into Eq. (15) and transforming the integration variable from r to ρ , we obtain the strain energy

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_r^2 + 2\nu\epsilon_r\epsilon_t + \epsilon_t^2) r dr \\ &= \frac{\pi\tilde{h}Ea^2}{1-\nu^2} \left(\lambda_0^2 \int_0^1 (\tilde{\epsilon}_r^2 + 2\nu\tilde{\epsilon}_r\tilde{\epsilon}_t + \tilde{\epsilon}_t^2) \rho d\rho \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\nu)\epsilon_0 \int_0^1 (\tilde{\epsilon}_r + \tilde{\epsilon}_t) \rho d\rho + \frac{(1+\nu)\epsilon_0^2}{\lambda_0^2} \right). \end{aligned} \tag{30}$$

In a similar spirit, the load energy of Eq. (16) can be expressed as

$$E_{\text{ext}} = -2\pi p a^3 \int_0^1 \tilde{w}(\rho + \tilde{u}) \left(1 + \frac{d\tilde{u}}{d\rho} \right) d\rho. \tag{31}$$

Substituting Eqs. (28), (29) into Eq. (30) and Eq. (27) into Eq. (31), it is possible to express the potential energy $E_p = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}$ as a function of coefficients b_i and c_j . This objective function is then minimized by invoking a selected optimization algorithm [42,43]. Note that the last term in Eq. (30), $(1 + \nu)\epsilon_0^2/\lambda_0^2$, is constant and therefore does not need to be included in the objective function.

3. NUMERICAL EXAMPLE

A. Comparison of Power Series Solution with Finite Element Method

In this section, the numerical solution is constructed for a specific example of a prestressed liquid lens membrane. Consider a circular membrane characterized by initial thickness $\tilde{h} = 0.1$ mm, radius (in prestressed state) $a = 10$ mm, Young's modulus $E = 1.97$ MPa, and Poisson's ratio $\nu = 0.4$. The membrane is prestressed by biaxial inplane stress $\sigma_0 = 60$ kPa and then loaded by constant pressure $p = 0.001E = 1.97$ kPa.

Figure 2 shows the membrane displacements and the deformed shape computed using the optimization algorithm described in the previous section. Deflections $w(r)$ and radial displacements $u(r)$ were approximated by the series in Eq. (27) with $N = M = 5$, and the objective function to be minimized

was the potential energy E_p . Optimization was performed in MATLAB [44] using the quasi-Newton algorithm with Hessian updates based on the Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno method [42,43].

As seen in Fig. 2(c), the resulting shape of the deformed membrane is not spherical. To quantify the deviation from a perfect sphere, let us approximate function $g(r)$ that describes the deformed shape by

$$z(r) = z_{\text{max}} + \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - c^2r^2}} + \sum_{i=2}^5 A_{2i}r^{2i}, \tag{32}$$

where z_{max} is the maximum deflection, $c = 1/R_0 = z''/(1 + z'^2)^{3/2}$ is the apex curvature (R_0 is the apex radius of curvature, z' and z'' are the first and second derivatives of the approximated function $g(r)$ at $r = 0$), and A_{2i} are aspherical coefficients that characterize the deviation from an apex sphere in the vertical direction. For our example, the resulting parameters have the following values: $z_{\text{max}} = 2.5590$ mm, $R_0 = +22.5530$ mm, $A_4 = +1.8528 \cdot 10^{-5}$ mm⁻³, $A_6 = +2.1047 \cdot 10^{-8}$ mm⁻⁵, $A_8 = +4.0574 \cdot 10^{-10}$ mm⁻⁷, and $A_{10} = +1.3916 \cdot 10^{-12}$ mm⁻⁹. The corresponding mean

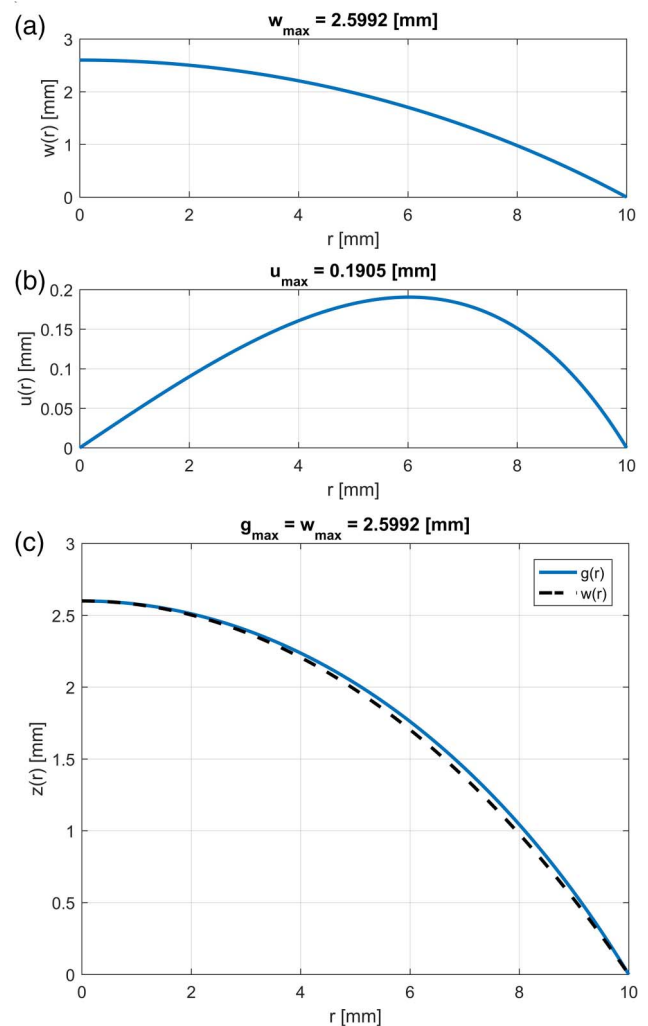


Fig. 2. Deformed membrane approximated by power series: (a) deflections $w(r)$, (b) radial displacements $u(r)$, (c) membrane shape $g(r)$.

quadratic approximation error is $\text{RMS} = 3.7 \cdot 10^{-6}$ mm. These results clearly show that the deformed shape indeed deviates from a sphere.

In a foregoing paper [38] the authors studied in detail the difference between the solutions of the general equations of Eq. (21) and their simplified form in Eq. (23). For the specific example considered here, a similar difference would arise. As clearly seen in Fig. 2(b), the radial displacement $u(r)$ is definitely not negligible while the simplified equations in Eq. (23) were derived using the assumptions that $u(r) \ll r$ and $u'(r) \ll 1$ for all $r \in [0, a]$.

Similar results were obtained in Ref. [38] for a membrane with no prestress. In that work, the authors studied the influence of membrane thickness on the deformed shape. The effect was found to be strong, and thus the imaging properties can be determined in a reliable way only if the thickness is known with high accuracy.

For comparison, the deformed shape of the membrane was also computed using the finite element method. Axisymmetric membrane elements with linear interpolation of both displacement components were implemented by the authors into the open-source simulation platform OOFEM [45]. The geometrical and material properties were the same as in the polynomial series approximation. Figure 3(a) shows the difference between the values of function $g(r)$ obtained using the approximation by polynomial series with $M = N = 4$ and by the finite element method (FEM) using a mesh consisting of 3200 linear finite elements. The root mean square of the difference, $\text{RMS} = 3.5$ nm, confirms that the results are comparable and both methods can be used. Approximation by polynomial series provides a good accuracy even with a relatively low number of polynomial terms, but the solution obtained by FEM converges in a more regular manner as the mesh is refined.

The diagrams in Fig. 3(b) indicate that FEM leads to a quadratic rate of convergence in terms of the maximum deflection (blue crosses) as well as the volume under the deformed membrane (orange crosses). The error was evaluated by comparing the results obtained with various meshes to those obtained with an extremely fine mesh consisting of 50,000 elements ($w_{\text{max}} = 2.5992560$ mm, $V = 431.5885857$ mm³). For 100 elements, the maximum deflection is determined with an error of about 270 nm, and then the error decreases 4 times whenever the number of elements is doubled. On the other hand, approximation by polynomials gives the maximum deflection with an error of about 13 nm already for $N = M = 3$, but as the order of the approximating polynomial increases, the error is not reduced in a regular manner and for higher orders it can even grow.

Let us now study the influence of the prestress on imaging properties of a plano-convex liquid membrane lens, in which

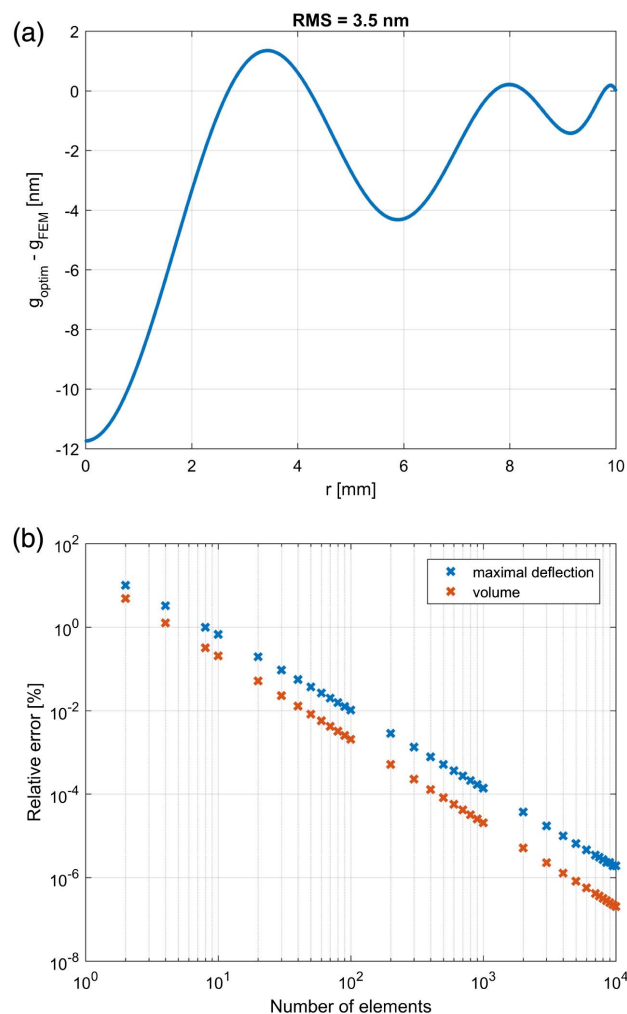


Fig. 3. (a) Difference between the deformed membrane shapes obtained by a power series approximation (g_{optim}) and by finite elements (g_{FEM}), and (b) dependence of the relative error on the number of finite elements.

one side of the lens chamber is formed by a plane-parallel plate and the other by a membrane. The membrane is supposed to have the same properties as in the previous example. The objective is to achieve an apex radius of curvature $R_0 = +22$ mm. Table 1 shows how the pressure p needed to deform the membrane to this desired shape depends on the prestress σ_0 . For different values of the initial prestress, the pressure can be adjusted such that the paraxial imaging properties remain the same, but the general imaging properties will be different; this is documented by the variation of

Table 1. Dependence of Pressure and Membrane Shape on Initial Prestress, Provided that the Same Apex Radius $R_0 = +22$ mm is Maintained

σ_0 [kPa]	p [kPa]	z_{max} [mm]	A_4 [10^{-5} mm ⁻³]	A_6 [10^{-8} mm ⁻⁵]	A_8 [10^{-10} mm ⁻⁷]	A_{10} [10^{-12} mm ⁻⁹]
0	1.611	2.7600	+2.0279	+0.1181	-3.8856	+7.3839
30	1.851	2.7117	+1.8545	+8.8108	-1.2752	+4.6678
60	2.106	2.6745	+1.6965	+7.0029	-0.0666	+3.1490
90	2.372	2.6460	+1.5587	+5.8806	+0.4570	+2.2675

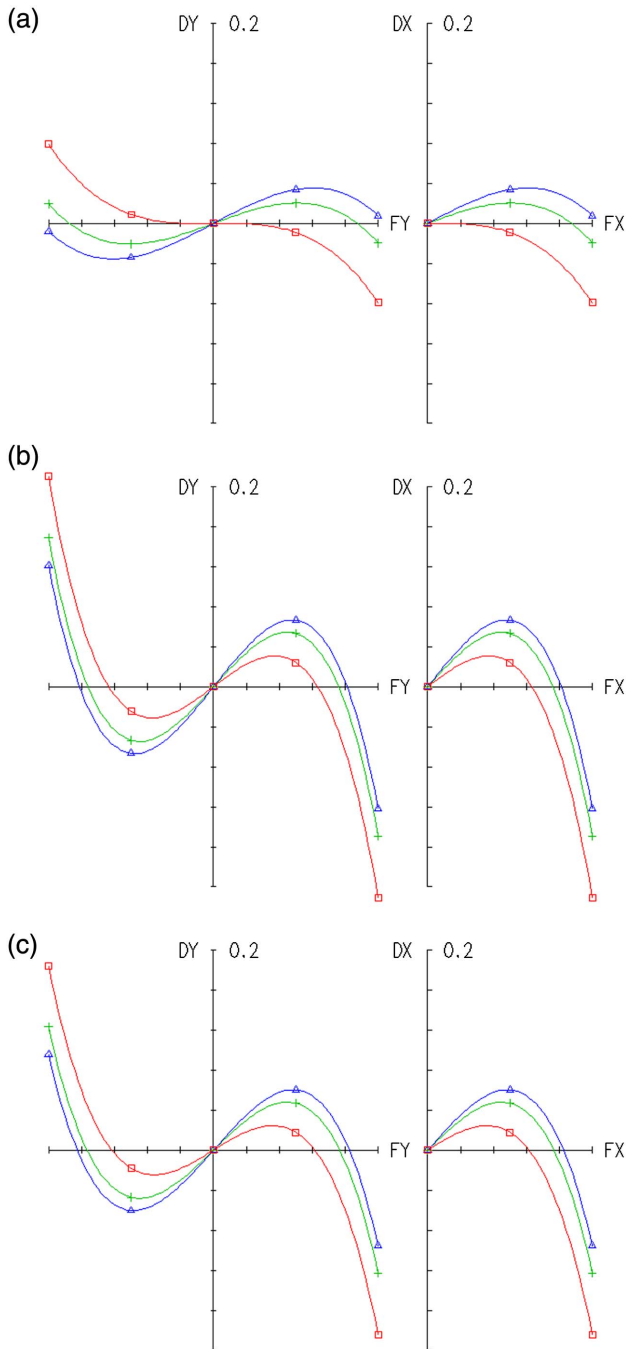


Fig. 4. Ray aberrations for (a) a spherical membrane of radius $R_0 = 22$ mm, (b) an aspherical membrane obtained when no initial prestress is applied, (c) an aspherical membrane obtained when the initial prestress is set to $\sigma_0 = 60$ kPa; DX a DY denote transversal ray aberrations, and FX a FY denote the height of an incident ray in the interval between -5 mm and 5 mm. Individual curves correspond to values obtained for wavelengths 486 nm (red), 587 nm (green), and 656 nm (blue).

aspherical coefficients. Figure 4 shows the ray aberrations and Fig. 5 shows the polychromatic modulation transfer function (MTF) for (a) a spherical membrane of radius $R_0 = 22$ mm, (b) an aspherical membrane shape obtained if

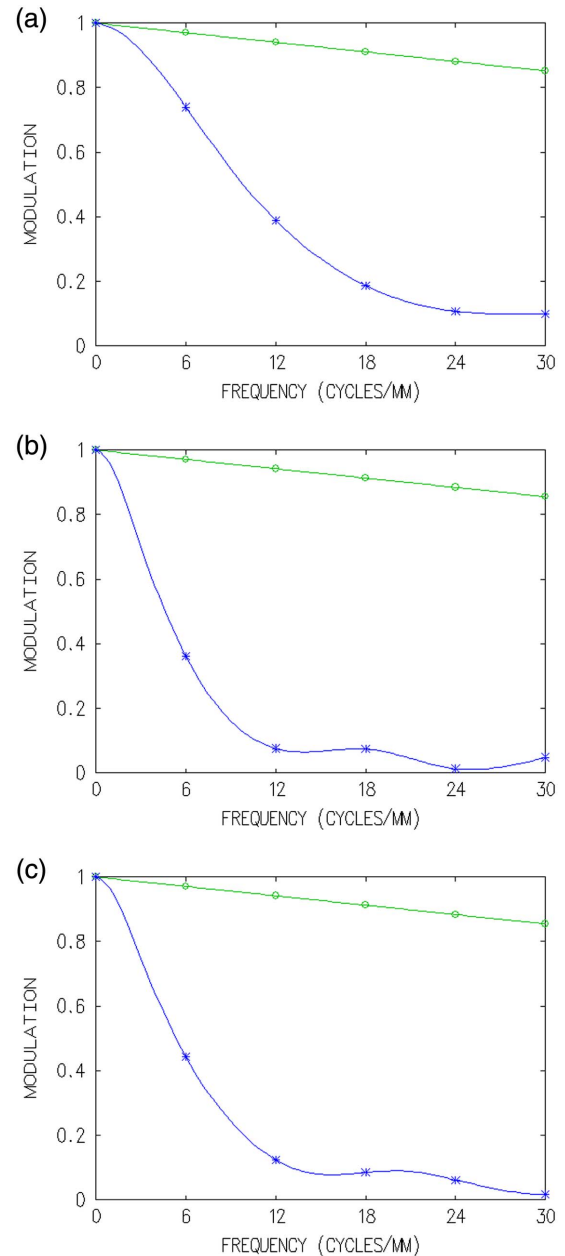


Fig. 5. Polychromatic MTF for (a) a spherical membrane of radius $R_0 = 22$ mm, (b) an aspherical membrane obtained when no initial prestress is applied, (c) an aspherical membrane obtained when the initial prestress is set to $\sigma_0 = 60$ kPa.

no prestress is applied, and (c) spherical membrane shape obtained if the prestress is set to $\sigma_0 = 60$ kPa. In Fig. 4, DX a DY denote transversal ray aberrations, and FX a FY denote the height of an incident ray in the interval between -5 mm and 5 mm.

The results indicate that the imaging properties of aspherical shapes obtained with different prestress values are almost the same; in other words, the prestress has a negligible influence on the imaging properties provided that the applied pressure is properly adjusted. On the other hand, deviations from the imaging properties of a spherical lens are non-negligible.

B. Dependence of Maximum Membrane Deflection on Material Parameters and Initial Prestress

In experiments, a unique evaluation of membrane material properties and of the initial prestress is often difficult. Therefore, it is useful to exploit the measured deflection for parameter identification.

Figure 6 shows the dependence of the maximum deflection w_{\max} on pressure p for a fixed prestress value σ_0 and for selected values of Young's modulus E for a membrane with other parameters taken by the same values as in the previous examples. Also shown is the dependence of the maximum deflection w_{\max} on pressure p for a fixed value of Young's modulus E and selected values of prestress σ_0 . By measuring the actual dependence of the maximum deflection on applied pressure and comparing it to the plotted curves, membrane parameters E and σ_0 can be determined. This approach was exploited for parameter identification, as will be described in the following section.

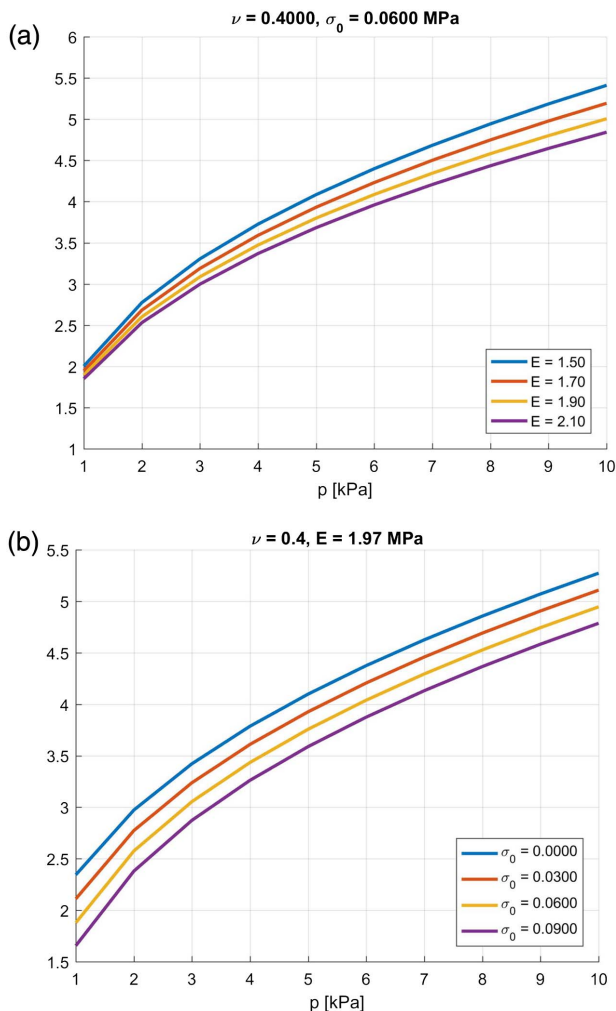


Fig. 6. (a) Dependence of the maximum deflection w_{\max} on pressure p for a fixed value of prestress $\sigma_0 = 60 \text{ kPa}$ and selected values of Young's modulus E , (b) dependence of the maximum deflection w_{\max} on pressure p for a fixed value of Young's modulus $E = 1.97 \text{ MPa}$ and selected values of prestress σ_0 .

4. EXPERIMENTAL CONFIRMATION OF GOVERNING EQUATIONS

For validation of the theoretical results by real data, the deformed shape of a membrane of a liquid lens was measured experimentally, using a coordinate scanning device with a chromatic confocal sensor [46]. Figure 7 depicts the experimental setup for topography measurements of optical surfaces and the sample of a liquid lens. The liquid lens is formed by a chamber filled by an optical liquid (in our case distilled water), which is covered by an elastic membrane. The membrane is fixed by screws. By injecting (or removing) the liquid, the volume of the chamber is changed and the membrane is deformed. The membrane shape is then measured using the scanning device, which can determine the position of a measured point with an error of 0.02 mm (combining the mechanical uncertainty with the uncertainty induced by the sensor).

The membrane was made of Sylgard 184 [47]. The measured initial membrane thickness was $\tilde{h} = 0.45 \text{ mm}$, and the radius measured from the support in the prestressed state was $a = 14.45 \text{ mm}$. The Poisson ratio was taken as $\nu = 0.41$, and the Young modulus $E = 1.078 \text{ MPa}$ and prestress $\sigma_0 = 0.0583 \text{ MPa}$ were determined using the identification procedure described in the previous section (by optimizing the agreement between the measured and computed dependence of maximum deflection on applied pressure). Owing to the high slope of the membrane surface near the support and in view of the limitations of the measurements by a chromatic confocal sensor, permitting only small deviations of the measured direction from the normal to the deformed surface, the measurements focused on the region near the apex. Since the membrane remains axially symmetric, only the meridian was measured.

Figure 8 compares the measured and simulated shapes for pressures $p = 1.00, 2.00, 3.00,$ and 4.00 kPa . The root mean square of the difference between the experiments and numerical simulations is not greater than 0.021 mm (as indicated in the figure legend), which corresponds to the estimated uncertainty of measurements, and thus the theoretical model can be considered as validated. Consequently, the results of simulations can be used in the design of optical systems and analysis of their imaging properties, e.g., of the spherical aberration, the point spread function, and the modulation transfer function.

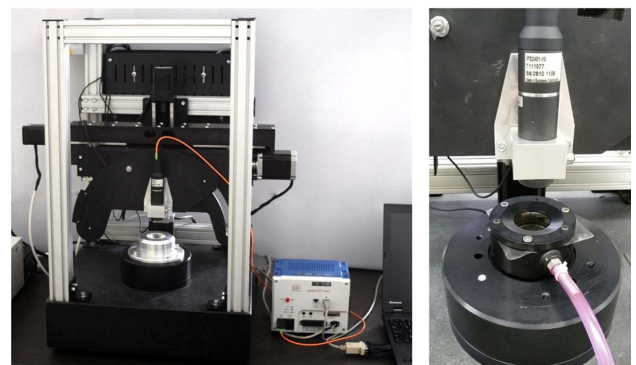


Fig. 7. Device for measurement of the shape of optical surfaces and an experimental specimen of a membrane liquid lens.

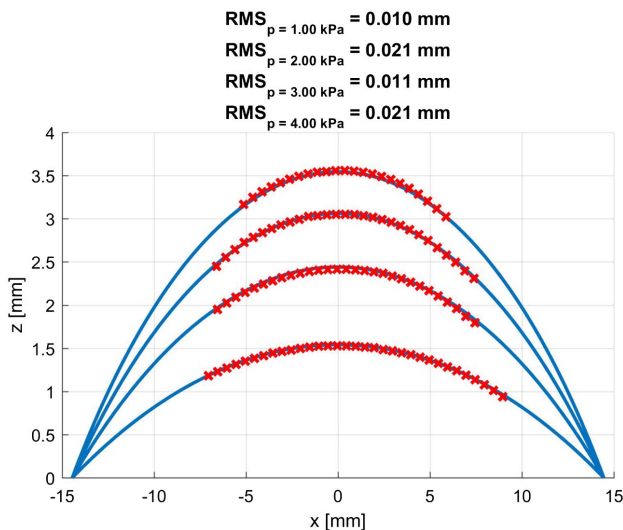


Fig. 8. Comparison of the experimentally measured and numerically simulated shapes of a membrane liquid lens for applied pressures $p = 1.00, 2.00, 3.00,$ and 4.00 kPa.

5. CONCLUSION

In this paper, we have presented the theoretical description and numerical solution of an axisymmetric circular membrane of a liquid lens with an initial prestress. The model is based on the exact relation between displacements and the Green–Lagrange strain, on the Saint Venant–Kirchhoff material law, and on the principle of minimum potential energy. The corresponding governing equations have been derived, and a numerical method based on polynomial approximations of displacement functions and minimization of potential energy has been developed. The solution using polynomial approximations has been verified by comparing the results to those obtained by the finite element method, and the model has been validated by comparison of simulations to experimental data. A simple parametric study has shown how the maximum deflection depends on the elastic modulus, initial prestress, and applied pressure.

The presented numerical results and experimental measurements confirm that the selected model of a prestressed membrane is suitable for an accurate description of deformed liquid lens membranes up to the large-strain regime. Therefore, the model can be used for further analyses and simulations of imaging properties of these optical elements. A method of parameter identification has been presented that can be useful for characterization of mechanical properties of membrane samples in practical applications. It has also been documented by an example that the initial prestress has almost no influence on the imaging properties of a plane-convex membrane lens.

Funding. České Vysoké Učení Technické v Praze (CVUT) (SGS17/004/OHK1/1T/11).

REFERENCES

- H. Ren and S. Wu, *Introduction to Adaptive Lenses*, Wiley Series in Pure and Applied Optics (Wiley, 2012).
- Optotune, <http://www.optotune.com>.
- Holochip, <http://www.holochip.com>.
- A. H. Rawicz and I. Mikhailenko, "Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **35**, 1587–1589 (1996).
- D.-Y. Zhang, N. Justis, V. Lien, Y. Berdichevsky, and Y.-H. Lo, "High-performance fluidic adaptive lenses," *Appl. Opt.* **43**, 783–787 (2004).
- N. Sugiura and S. Morita, "Variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **32**, 4181–4186 (1993).
- H. Ren, D. Fox, P. A. Anderson, B. Wu, and S.-T. Wu, "Tunable-focus liquid lens controlled using a servo motor," *Opt. Express* **14**, 8031–8036 (2006).
- Q. Yang, P. Kobrin, C. Seabury, S. Narayanaswamy, and W. Christian, "Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses," *Appl. Opt.* **47**, 3658–3668 (2008).
- G.-H. Feng and Y.-C. Chou, "Flexible meniscus/biconvex lens system with fluidic-controlled tunable-focus applications," *Appl. Opt.* **48**, 3284–3290 (2009).
- H. Ren and S.-T. Wu, "Variable-focus liquid lens," *Opt. Express* **15**, 5931–5936 (2007).
- D. Shaw and T. E. Sun, "Optical properties of variable-focus liquid-filled optical lenses with different membrane shapes," *Opt. Eng.* **46**, 024002 (2007).
- D. Shaw and C.-W. Lin, "Design and analysis of an asymmetrical liquid-filled lens," *Opt. Eng.* **46**, 123002 (2007).
- H. Choi, D. S. Han, and Y. H. Won, "Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness," *Opt. Lett.* **36**, 4701–4703 (2011).
- L. Li, Q.-H. Wang, and W. Jiang, "Liquid lens with double tunable surfaces for large power tunability and improved optical performance," *J. Opt.* **13**, 115503 (2011).
- F. Schneider, J. Draheim, R. Kamberger, P. Waibel, and U. Wallrabe, "Optical characterization of adaptive fluidic silicone-membrane lenses," *Opt. Express* **17**, 11813–11821 (2009).
- Y.-K. Fuh, M.-X. Lin, and S. Lee, "Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically-corrected design," *Opt. Lasers Eng.* **50**, 1677–1682 (2012).
- A. Miks, J. Novak, and P. Novak, "Algebraic and numerical analysis of imaging properties of thin tunable-focus fluidic membrane lenses with parabolic surfaces," *Appl. Opt.* **52**, 2136–2144 (2013).
- L. Wang, H. Oku, and M. Ishikawa, "Development of variable-focus lens with liquid-membrane-liquid structure and 30 mm optical aperture," *Proc. SPIE* **8617**, 861706 (2013).
- L. Wang, H. Oku, and M. Ishikawa, "An improved low-optical-power variable focus lens with a large aperture," *Opt. Express* **22**, 19448–19456 (2014).
- S. T. Choi, B. S. Son, G. W. Seo, S.-Y. Park, and K.-S. Lee, "Optomechanical analysis of nonlinear elastomer membrane deformation under hydraulic pressure for variable-focus liquid-filled microlenses," *Opt. Express* **22**, 6133–6146 (2014).
- D. Liang and X.-Y. Wang, "A bio-inspired optical system with a polymer membrane and integrated structure," *Bioinspiration Biomimetics* **11**, 066008 (2016).
- J.-W. Du, X.-Y. Wang, and D. Liang, "Bionic optical imaging system with aspheric solid-liquid mixed variable-focus lens," *Opt. Eng.* **55**, 023105 (2016).
- N. Hasan, A. Banerjee, H. Kim, and C. H. Mastrangelo, "Tunable-focus lens for adaptive eyeglasses," *Opt. Express* **25**, 1221–1233 (2017).
- H. Hencky, "On the stress state in circular plates with vanishing bending stiffness," *Z. Math. Phys.* **63**, 311–317 (1915).
- W. Z. Chein, "Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection," *Sci. Rep.* **A5**, 71–94 (1948).
- J. D. Campbell, "On the theory of initially tensioned circular membranes subjected to uniform pressure," *Q. J. Mech. Appl. Math.* **9**, 84–93 (1956).
- M. A. Goldberg and A. B. Pifko, "Large deflection analysis of uniformly loaded annular membranes," *AIAA J.* **1**, 2111–2115 (1963).
- A. B. Pifko and M. A. Goldberg, "Iterative and power series solutions for the large deflection of an annular membrane," *AIAA J.* **2**, 2234 (1964).
- N. Perrone and R. Kao, "A general nonlinear relaxation technique for solving nonlinear problems in mechanics," *J. Appl. Mech.* **38**, 371–376 (1971).

30. R. Kao and N. Perrone, "Large deflections of axisymmetric circular membranes," *Int. J. Solids Struct.* **7**, 1601–1612 (1971).
31. A. Kelkar, W. Elber, and I. Raju, "Large deflections of circular isotropic membranes subjected to arbitrary axisymmetric loading," *Comput. Struct.* **21**, 413–421 (1985).
32. W. Fichter, "Some solutions for the large deflections of uniformly loaded circular membranes," Technical paper 3658 (National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1997).
33. D. Allman, "Variational solutions for the nonlinear deflexion of an annular membrane under axial load," *Int. J. Mech. Sci.* **24**, 749–753 (1982).
34. M. Sheplock and J. Dugundji, "Large deflections of clamped circular plates under initial tension and transitions to membrane behavior," *J. Appl. Mech.* **65**, 107–115 (1998).
35. F. Zhao, "Nonlinear solutions for circular membranes and thin plates," *Proc. SPIE* **6926**, 69260W (2008).
36. B. Stanford and P. Ifju, "The validity range of low fidelity structural membrane models," *Exp. Mech.* **48**, 697–711 (2008).
37. A. Mikš and P. Novák, "Calculation of a surface shape of a pressure actuated membrane liquid lens," *Opt. Lasers Eng.* **58**, 60–66 (2014).
38. P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek, "Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure," *Appl. Opt.* **56**, 5939–5947 (2017).
39. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Engineering Societies Monographs (McGraw-Hill, 1959).
40. A. Volmir, "Flexible plates and shells," Technical Report (Air Force Flight Dynamics Laboratory, Research and Technology Division, Air Force Systems Command, 1967).
41. B. Audoly and Y. Pomeau, *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Non-linear Response of Shells* (Oxford University, 2010).
42. M. Aoki, *Introduction to Optimization Techniques: Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming*, Macmillan Series in Applied Computer Science (Macmillan, 1971).
43. L. E. Scales, *Introduction to Non-Linear Optimization*, Macmillan Computer Science Series (Springer-Verlag, 1985).
44. MathWorks, <http://www.mathworks.com>.
45. B. Patzák, "OOFEM—an object-oriented simulation tool for advanced modeling of materials and structures," *Acta Polytech.* **52**, 59–66 (2012).
46. Micro Epsilon, <http://www.micro-epsilon.co.uk/displacement-position-sensors/confocal-sensor/>.
47. "Sylgard 184 silicone elastomer kit," <http://www.dowcorning.com/applications/search/products/Details.aspx?prod=01064291>.

Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure

PETR POKORNÝ,^{1,*}  FILIP ŠMEJKAL,¹ PAVEL KULMON,¹ PAVEL NOVÁK,¹ JIŘÍ NOVÁK,¹ ANTONÍN MIKŠ,¹ MARTIN HORÁK,² AND MILAN JIRÁSEK²

¹Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic

²Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic

*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 25 April 2017; revised 28 June 2017; accepted 28 June 2017; posted 29 June 2017 (Doc. ID 294575); published 18 July 2017

The paper discusses a numerical calculation of deformation of a circular axisymmetric membrane of a liquid lens caused by the pressure of an optical liquid. Since such deflections of the membrane are many times larger than the membrane thickness, a nonlinear model is applied and generalized relationships are derived that characterize the resulting shape with a high precision and permit an accurate analysis of imaging properties of the lens and of optical aberrations. By comparison with experimental data, it is shown that the presented model is suitable to describe the deformation of the membrane of the lens. © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: (120.4640) Optical instruments; (220.1080) Active or adaptive optics; (350.4600) Optical engineering.

<https://doi.org/10.1364/AO.56.005939>

1. INTRODUCTION

In recent years, a rapid development and application of so-called active lenses with tunable parameters have been noticed [1]. Such lenses can change their internal or external parameters in a predefined way and correspondingly modify the generated optical image. There are many ways that the lens parameters can be varied. One of the most widespread types are membrane liquid lenses [1–23]. At present, some of these optical elements are produced commercially [2,3] and applied in various imaging applications. The fundamental component of the lens is a membrane clamped at its edges, covering a chamber with an optical liquid, as is schematically shown in Fig. 1(a). By changing the volume of the liquid, the shape of the membrane can be changed and the optical properties of the lens can be controlled [Fig. 1(b)]. Various authors analyzed both theoretically (numerically) and experimentally the deflection of membrane elements under uniform fluid pressure incorporated in different types of membrane fluidic lenses using different mechanical models of elastic membranes [4–23]. The accurate modeling of the shape of the deflected membrane of a fluidic lens is crucial for optical properties of such lenses.

To precisely predict imaging properties of membrane liquid lenses, one has to know the shape of the membrane surface after deformation very accurately. Considering large deformations, compared to the membrane thickness, a classical linear theory [24,25] typically used in mechanics or civil engineering does not provide sufficient accuracy. Large deformations and stresses

in plates were studied by Hencky [26] and Chein [27]. Campbell [28] generalized Hencky's solution to the case with initial stress. Numerical procedures based on iterative calculations of derived differential equations and series solutions were presented by Goldberg and Pifko [29,30]. A modified method of finite differences for a system of nonlinear differential equations describing strains and stresses was presented by Kao and Perrone [31,32]. Pettit solved a system of three differential equations using the Runge–Kutta method of the fourth order [33]. A solution based on stress determination by the Newton–Raphson method was carried out by Kelkar *et al.* [34]. A solution based on series and analytical expressions for the series coefficients was published by Fichter [35]. Allman presented examples of variational solutions for the nonlinear deflection of an annular membrane [36]. Shepload and Dugundji presented solutions for clamped circular plates under initial tension with transition to membrane behavior [37]. Zhao [38] showed nonlinear models for prestretched and postheated membrane solved by both the Ritz method and the Galerkin method. Stanford and Ifju studied the validity range of low-fidelity structural membrane models [39]. A generalized solution for large deflections was derived by Mikš and Novák [40] with the use of optimization algorithms.

In the aforementioned works, the authors built their solutions on various assumptions and boundary conditions, and therefore the nonlinear differential equations and their solutions are different. This paper presents an approach based on precise

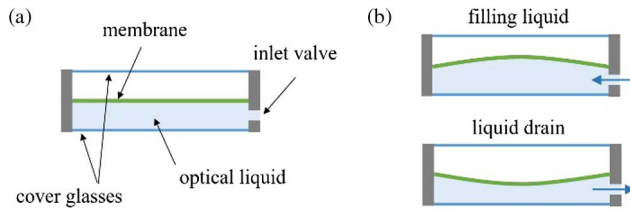


Fig. 1. (a) Scheme of liquid membrane lens and (b) result of a change of liquid volume.

geometrical equations and the Saint Venant–Kirchhoff material model, which postulates a linear relationship between the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress [41]. Since the problem does not have an exact analytical solution, optimization algorithms [42,43] are applied to series expansions. The presented derived model is illustrated by an example and verified by a laboratory experiment. It is shown that such an approach gives very accurate results, and it can be used for an accurate optical design of optical systems with incorporated membrane liquid lenses because it permits the analysis of their imaging properties.

2. VARIATIONALLY CONSISTENT DERIVATION OF GOVERNING EQUATIONS FOR LARGE DEFORMATIONS OF MEMBRANE OF LIQUID LENSES

Consider a membrane of a liquid lens to be circular and axis-symmetrical around axis z , which intersects the center of the lens as is shown in Fig. 2. The radius of the membrane is denoted as a , the vertical deflection of the membrane is described by function $w(r)$, and the horizontal (radial) displacement is described by $u(r)$. The membrane is assumed to have a constant thickness h . Any chosen point on the middle surface of the membrane will move to the position $[r + u(r), w(r)]$. The deformed shape of the membrane is described by a function $g(r)$ implicitly defined by the relation $g(r + u(r)) = w(r)$. Let us also suppose that the membrane is clamped at its edge, and its bending stiffness is negligible.

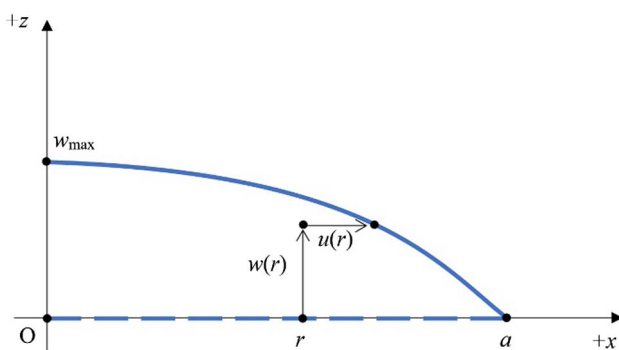


Fig. 2. Scheme of deformation of circular axis-symmetrical membrane under constant pressure (dashed line—membrane under zero pressure, $w(r)$ and $u(r)$ —displacements of a point with initial position $[r, 0]$, a —membrane radius, w_{\max} —maximal deflection).

As was already mentioned in the introduction, the constitutive behavior is described by the Saint Venant–Kirchhoff material model, which deals with the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress [41]. Normal strains in the radial direction, ε_r , and in the tangential direction, ε_t , are then expressed as

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1) = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2), \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \frac{u}{r} + \frac{u'^2}{2r^2},\end{aligned}\quad (1)$$

where u' and w' are derivatives of displacements with respect to the radial coordinate r , and

$$\begin{aligned}\lambda_r &= \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2}, \\ \lambda_t &= 1 + \frac{u}{r}\end{aligned}\quad (2)$$

are stretches in the radial and tangential directions. Since the material is in a plane-stress state and the shear strain γ_{rt} vanishes, the strain density energy Λ_{int} (per unit initial volume) is expressed as [24,25]

$$\Lambda_{\text{int}}(\varepsilon_r, \varepsilon_t) = \frac{E}{2(1 - \nu^2)}(\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2), \quad (3)$$

where E is the Young modulus and ν is the Poisson ratio. These elastic constants are characteristics of the chosen material of the membrane.

Differentiation of the elastic potential, Eq. (3), leads to the stress-strain equations [24,25]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\partial \Lambda_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t), \\ \sigma_t &= \frac{\partial \Lambda_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_t).\end{aligned}\quad (4)$$

For a constant pressure p , one can express the total potential energy E_p of the pressurized membrane as

$$E_p = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}} \quad (5)$$

where

$$E_{\text{int}} = 2\pi h \int_0^a \Lambda_{\text{int}} r dr \quad (6)$$

is the stored elastic energy (work done by internal forces), and

$$E_{\text{ext}} = -2\pi p \int_0^a w(r + u)(1 + u') dr \quad (7)$$

is the potential energy of external forces.

The stable equilibrium state of the membrane corresponds to the minimum of potential energy E_p , and so the first variation of potential energy at this state must vanish. The first variation of the stored elastic energy can be expressed as

$$\begin{aligned}\delta E_{\text{int}} &= 2\pi h \int_0^a \left(\frac{\partial \Lambda_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r} \delta \varepsilon_r + \frac{\partial \Lambda_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t} \delta \varepsilon_t \right) r dr \\ &= 2\pi h \int_0^a (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_t \delta \varepsilon_t) r dr.\end{aligned}\quad (8)$$

As follows from Eq. (1), the strain variations are linked to the displacement variations by

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_r &= \delta u' + u'\delta u' + w'\delta w', \\ \delta\varepsilon_t &= \frac{\delta u}{r} + \frac{u\delta u}{r^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Substituting these expressions into Eq. (8), making use of Eq. (4) and integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{int}} &= 2\pi h \int_0^a \left(r\sigma_r(\delta u' + u'\delta u' + w'\delta w') \right. \\ &\quad \left. + \sigma_t \left(\delta u + \frac{u\delta u}{r} \right) \right) dr \\ &= 2\pi h [r\sigma_r(\delta u + u'\delta u + w'\delta w)]_{r=0}^a \\ &\quad - 2\pi h \int_0^a ((r\sigma_r(1+u'))'\delta u + (r\sigma_r w')'\delta w) dr \\ &\quad + 2\pi h \int_0^a \sigma_t \left(\delta u + \frac{u\delta u}{r} \right) dr. \end{aligned} \tag{10}$$

In a similar fashion, the variation of the potential energy of external forces is expressed as

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{ext}} &= -2\pi p \int_0^a \delta w(r+u)(1+u')dr - 2\pi p \int_0^a w\delta u(1+u')dr \\ &\quad - 2\pi p \int_0^a w(r+u)\delta u' dr \\ &= -2\pi p \int_0^a \delta w(r+u)(1+u')dr - 2\pi p [w(r+u)\delta u]_{r=0}^a \\ &\quad + 2\pi p \int_0^a w'(r+u)\delta u dr. \end{aligned} \tag{11}$$

Admissible displacement functions must satisfy boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u(a) = 0, \quad w(a) = 0, \tag{12}$$

and analogous conditions must be satisfied by the variations δu and δw . Consequently, most of the boundary terms in Eqs. (10), (11) vanish and the variation of total potential energy can be written as

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \delta E_{\text{int}} + \delta E_{\text{ext}} \\ &= -2\pi h r \sigma_r w' \delta w|_{r=0} \\ &\quad + 2\pi \int_0^a \left(h\sigma_t \left(1 + \frac{u}{r} \right) - h(r\sigma_r(1+u'))' \right. \\ &\quad \left. + p w'(r+u) \right) \delta u dr \\ &\quad - 2\pi \int_0^a (h(r\sigma_r w')' + p(r+u)(1+u')) \delta w dr. \end{aligned} \tag{13}$$

Since the values of variations δu and δw in the open interval $(0, a)$ are arbitrary, the terms that multiply these variations in the integrals must vanish (almost everywhere). The corresponding optimality conditions

$$\begin{aligned} h[r\sigma_r(1+u)]' - h\sigma_t \left(1 + \frac{u}{r} \right) &= p(r+u)w', \\ -h(r\sigma_r w')' &= p(r+u)(1+u') \end{aligned} \tag{14}$$

represent the strong form of equilibrium equations. In the case of small radial displacements, we have $u' \ll 1$ and $u \ll r$, and Eq. (14) reduce to

$$\begin{aligned} h(r\sigma_r)' - h\sigma_t &= prw', \\ -h(r\sigma_r w')' &= pr. \end{aligned} \tag{15}$$

Such simplified equilibrium equations are considered in papers [24–40]. The present paper deals with the more accurate equilibrium Eq. (14).

It is also interesting to look at the structure of the boundary conditions. At $r = a$, conditions $u(a) = 0$ and $w(a) = 0$ describe the constraints imposed by fixing the physical boundary of the membrane. On the other hand, point $r = 0$ physically corresponds to the center of the membrane and becomes a part of the (mathematical) boundary only when the domain of analysis is reduced to the interval $[0, a]$ based on axial symmetry. Continuity of the radial displacement implies that $u(0) = 0$, but continuity of the deflection does not lead to any constraint on $w(0)$. Consequently, the variation δw at $r = 0$ is arbitrary, and the missing boundary condition would normally be obtained by setting the term that multiplies $\delta w(0)$ in Eq. (13) to zero. In the present case, this term, given by $-2\pi h r \sigma_r w'$, seems to vanish automatically at $r = 0$. However, one should realize that this reasoning is based on the implicit assumption that $\sigma_r w'$ remains bounded as $r \rightarrow 0$. In principle, a concentrated force F_0 could be applied at the center of the membrane, and then the stress would be unbounded. The potential energy would have to be enriched by the term $-F_0 w(0)$, and the resulting boundary condition would read

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (r\sigma_r w') = -\frac{F_0}{2\pi h}. \tag{16}$$

Note that $Q(r) = 2\pi h r \sigma_r(r) w'(r)$ corresponds to the transversal component of the specific internal force integrated along a circle of radius r , and Eq. (16) can be interpreted as $Q(0) = -F_0$. The second equilibrium equation from Eq. (14) can be rewritten as

$$-Q' = 2\pi p(r+u)(1+u'). \tag{17}$$

Integrating and taking into account condition $Q(0) = -F_0$, we obtain

$$Q(r) = -F_0 - \pi p(r+u(r))^2. \tag{18}$$

This relation represents the equilibrium condition written for the part of the membrane which, in the undeformed configuration, has the shape of a disk of radius r .

While the boundary conditions of Eq. (12) are kinematic and, from the mathematical point of view, are essential, the fourth boundary condition of Eq. (16) is static, and it does not need to be imposed *a priori* on trial functions that approximate the exact solution. In the absence of a concentrated force, it can be expected that the deflection is continuously differentiable over the entire membrane. Combined with axial symmetry, continuous differentiability implies that

$$w'(0) = 0. \tag{19}$$

This condition is not essential, but if it is satisfied by the numerical approximation of the exact solution, faster convergence

can be expected. Therefore, in the following section, we will consider Eqs. (12) and (19) as the appropriate boundary conditions.

3. NUMERICAL SOLUTION OF CALCULATION OF MEMBRANE'S DEFORMATION

Since Eq. (14) cannot be solved analytically, a numerical procedure based on series expansion will be presented in this paper. Instead of solving the differential equations directly, we can exploit the fact that the solution minimizes potential energy among all kinematically admissible states. The displacement functions will be approximated by suitable polynomial series, the potential energy will be expressed as a function of the series coefficients, and an appropriate optimization algorithm will be invoked [42,43]. Direct minimization of the potential energy given by Eq. (5) turns out to be more robust than, e.g., minimization of the residual in Eq. (14). It is convenient to introduce a dimensionless spatial coordinate $\rho = r/a$ and solve the problem on the interval $[0, 1]$. In terms of the dimensionless coordinate, the potential energy and strains can be expressed as

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{a^2 E \pi h}{(1-\nu^2)} \int_0^1 (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) \rho d\rho \\ &\quad - 2\pi p a^2 \int_0^1 w \left(\rho + \frac{u}{a} \right) \left(1 + \frac{u'}{a} \right) d\rho, \\ \varepsilon_r &= \frac{u'}{a} + \frac{1}{2a^2} (u^2 + w'^2), \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{a\rho} + \frac{u^2}{2a^2\rho^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

To keep the notation simple, functions u and w are denoted by the same symbols even when they are considered as functions of the dimensionless variable ρ , and their derivatives with respect to ρ are in Eq. (20) denoted by primes.

As explained in detail in the previous section, the displacements should satisfy boundary conditions of Eqs. (12) and (19). From the symmetry of the problem it is clear that the deflection w should be an even function, and the radial displacement u should be an odd function. Therefore, let us use polynomial approximations in the form

$$w(\rho) = \sum_{i=1}^N b_i (1 - \rho^{2i}), \quad u(\rho) = \sum_{j=1}^M c_j (\rho - \rho^{2j+1}), \quad (21)$$

where $b_i (i = 1, 2, \dots, N)$ and $c_j (j = 1, 2, \dots, M)$ are coefficients to be found. Such approximations automatically satisfy the boundary conditions. The maximal deflection

$$w_{\max} = w(0) = \sum_{i=1}^N b_i \quad (22)$$

corresponds to the sum of all coefficients b_i . To express the resulting displacements as functions of the variable r , the following formulas can be applied [as can be obtained from the substitution $\rho = r/a$ and Eq. (21)], as follows:

$$w(r) = \sum_{i=1}^N b_i \left(1 - \frac{r^{2i}}{a^{2i}} \right), \quad u(r) = \frac{r}{a} \sum_{j=1}^M c_j \left(1 - \frac{r^{2j}}{a^{2j}} \right). \quad (23)$$

The procedure can be summarized as follows:

1. Choose an appropriate series expansion that approximates displacement functions $w(\rho)$ and $u(\rho)$, and satisfies boundary conditions given by Eqs. (12) and (19). In the present study, Eq. (21) was used.
2. Substitute the approximation series [Eq. (21) in the present case] into Eq. (20) and find the unknown coefficients based on the condition of minimum of potential energy E_p , using an appropriate optimization algorithm.
3. Calculate the resulting displacements according to Eq. (21) or Eq. (23), and the final shape of the membrane given by the function $g(r + u(r)) = w(r)$.

4. EXAMPLE

To illustrate the aforementioned procedure, let us analyze a membrane using the same parameters as Mikš and Novák in their paper [40]: radius $a = 10$ mm, thickness $h = 0.1$ mm, Young modulus $E = 1.97$ MPa, Poisson ratio $\nu = 0.4$, and pressure $p = 0.001 \cdot E = 1.97$ kPa.

The calculation was done in the MATLAB software, exploiting the large-scale interior-point algorithm with Hessian update by the Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno method [42,43]. As a check, the residuals in equilibrium Eq. (14) were calculated. The maximal absolute value of residuals (i.e., differences between the left- and the right-hand side) was $2.8 \cdot 10^{-3}$ Pa for the first equation and $1.3 \cdot 10^{-3}$ Pa for the second equation (for equations rewritten in terms of the dimensionless coordinate $\rho = r/a$).

The calculated displacements $w(r)$ and $u(r)$ are shown in Fig. 3. The red-dashed line indicates the approximate solution obtained with a simplified model based on assumptions $u' \ll 1$ and $u \ll r$ [Eq. (15)]. Figure 4 shows the resulting shape of

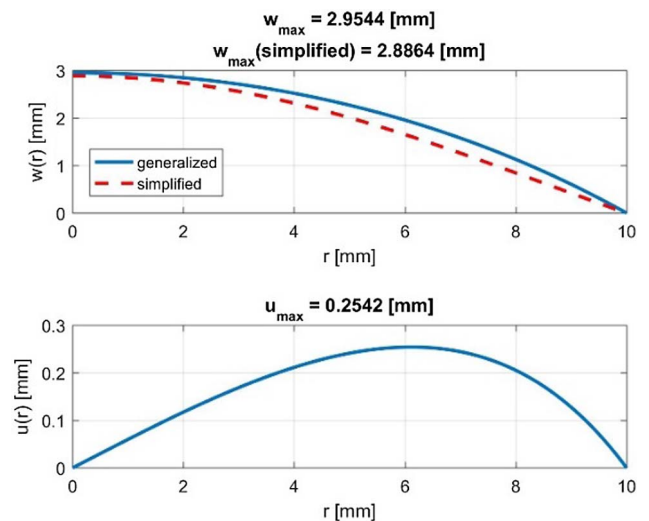


Fig. 3. Calculated displacements $w(r)$ and $u(r)$ and comparison with simplified model [Eq. (15), red-dashed line].

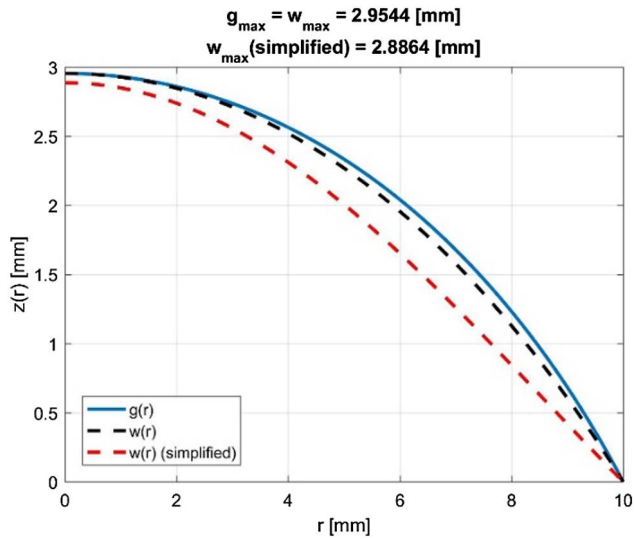


Fig. 4. Final membrane shape (blue line), vertical deflection (black dashed line) and comparison with simplified model [Eq. (15), red-dashed line].

the membrane $g(r)$, which was afterward approximated by an aspherical expression given by the formula

$$z(r) = z_{\max} + \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - c^2r^2}} + \sum_{i=2}^5 A_{2i}r^{2i}, \quad (24)$$

where z_{\max} is the maximal deflection of the surface, $c = 1/R_0$ is the axial curvature, and $A_{2i} (i = 2, \dots, 5)$ are aspherical coefficients that characterize deviations from the sphere of radius R_0 . The results of the approximation are summarized in Table 1 for both the generalized and the simplified solution.

The final shape of the deformed membrane was compared to spherical approximations. The differences between the exact shape and its approximations by spheres are shown in Figs. 5 and 6. Three approximations are considered: 1) the spherical part of aspherical expression in Eq. (24) (i.e., aspherical coefficients $A_{2i} = 0$ for every i); 2) a sphere with the same maximal deflection at $r = 0$, passing through the edge of the membrane ($r = a$); and 3) a sphere with the same maximal deflection at $r = 0$ minimizing in the least-squares sense the differences between the calculated approximation and the exact membrane shape. RMS error values are specified in the figure. As is shown, the difference between the resulting membrane shape and a sphere is not negligible. Focusing on the differences between approximations shown in Fig. 6, one can say that the least average deflection is obtained in the case of approximation in the least-squares sense (case 3). However, considering the spherical shape as close as possible to the real one measured from the central part to the maximal distance, the best results are obtained with the spherical part of the aspherical expression

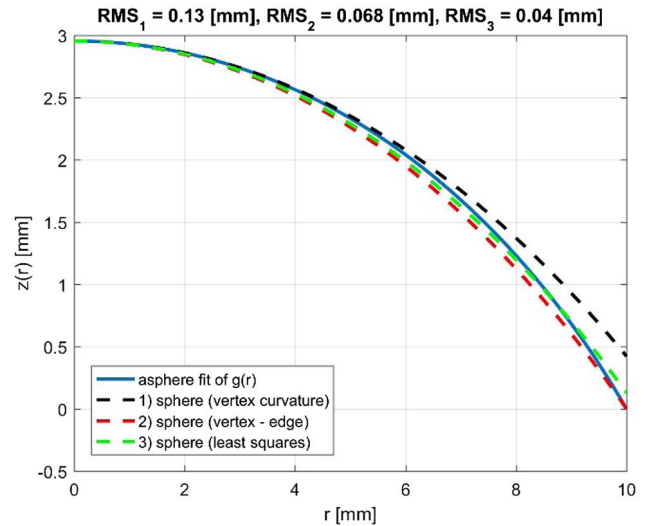


Fig. 5. Approximation of resulting membrane shape by different spheres: (1) spherical part of aspherical expression, (2) sphere matching the deflection at $r = 0$ and the edge of the membrane ($r = a$), (3) sphere matching the deflection at $r = 0$ and minimizing in the least-squares sense the deviation from the calculated membrane shape.

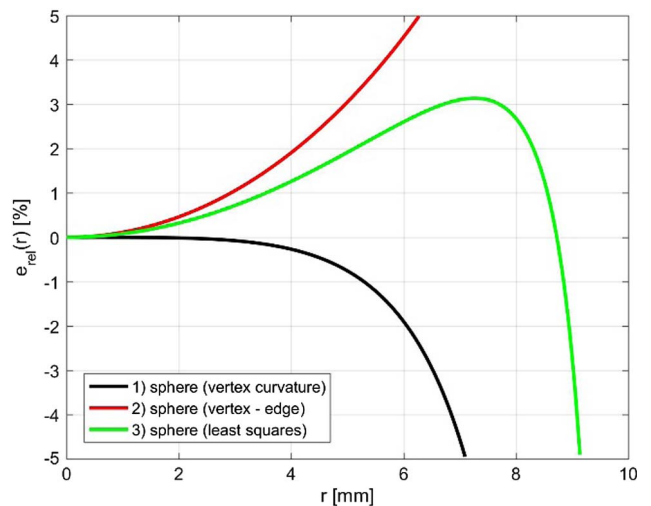


Fig. 6. Relative error of spherical approximations of the membrane shape: (1) spherical part of aspherical expression, (2) sphere matching the deflection at $r = 0$ and the edge of the membrane ($r = a$), (3) sphere matching the deflection at $r = 0$ and minimizing in the least-squares sense the deviation from the calculated membrane shape.

[spherical part of Eq. (24)]. Therefore, if one wants to use the region close to the optical axis for imaging purposes ($r \rightarrow 0$), the best approximation of the membrane shape will be given by the spherical part of Eq. (24). In the presented

Table 1. Approximation of Deformed Membrane Shape by Aspherical Expression

	z_{\max} [mm]	R_0 [mm]	A_4 [mm ⁻³]	A_6 [mm ⁻⁵]	A_8 [mm ⁻⁷]	A_{10} [mm ⁻⁹]	RMS [mm]
Complete model	2.9544	-21.0163	-2.4120e-05	-1.8963e-07	1.2167e-09	-1.1365e-11	4.9e-05
Simplified model	2.8864	-13.3843	1.3661e-04	1.7797e-07	-2.3620e-10	8.1189e-12	2.6e-05

example, the relative error will be less than 1% in one half of the studied region.

To illustrate imaging properties of the membrane lens, the results from the previous part were used for a simulation of aberrations. Calculated aspherical surfaces were used for optical ray-tracing in OSLO software. Figs. 7 a) and b) show the influence of the membrane's shape on the transversal spherical aberration of the membrane lens with thickness $h = 0.1$ mm. DX and DY denote the transversal ray aberrations, and FX and FY denote the height of an incident ray in the interval -5 mm to 5 mm. The diameter of the lens was chosen as 10 mm, and the calculation was made for the wavelength of light $\lambda = 587$ nm. The first figure [Fig. 7(a)] shows the transversal spherical aberration of the membrane lens with radius of curvature $R = 21.016$ mm and axial thickness $d = 5$ mm if the aspherical coefficients of approximation (24) are neglected. The liquid of the lens was distilled water. In the second figure [Fig. 7(b)], the transversal spherical aberration is shown for an aspherical membrane lens with the same vertex radius $R = 21.016$ mm and the same axial thickness, with the following values of aspherical coefficients: $A_4 = 2.41198e-05$ mm $^{-3}$, $A_6 = 1.89627e-07$ mm $^{-5}$, $A_8 = -1.21673e-09$ mm $^{-7}$, and $A_{10} = 1.13654e-11$ mm $^{-9}$. Both lenses have the same focal length $f' = 63.105$ mm. As is obvious from the figures, the membrane lens cannot be replaced by a spherical lens, because the difference in the aberrations is too large.

Let us now analyze the influence of the approximate solution of membrane deformation, which can be calculated from Eqs. (15), on the transversal spherical aberration of the lens with thickness $h = 0.1$ mm, radius of curvature $R = 21.016$ mm, and axial thickness $d = 5$ mm. The optical liquid is distilled water. The aspherical coefficients of this lens are $A_4 = -6.75618e-05$ mm $^{-3}$, $A_6 = -1.49495e-08$ mm $^{-5}$, $A_8 = -2.37860e-11$ mm $^{-7}$, and $A_{10} = -3.77091e-14$ mm $^{-9}$. Note that the shape of the membrane was calculated from Eq. (15) by varying the applied pressure to get the required radius of curvature. Figure 7(c) shows the transversal spherical aberrations. Comparing the results to Fig. 7(b) (solution based on the complete model), one can see that the spherical aberration is "undercorrected" by the solution based on Eq. (14), while the approximate solution of Eq. (15) gives an "overcorrected" spherical aberration. From the presented results, it is obvious that an accurate analysis of membrane lenses with variable focus must be based on the complete model, because the error in imaging properties caused by using the approximate approach is too large.

A very important parameter, which has a crucial effect on the calculated membrane deflection of the membrane lens and thus also on the imaging characteristics, is the membrane thickness. Therefore, the influence of thickness on imaging properties was studied in more detail. First, an initial calculation was done with a membrane of the same parameters as in the previous part, i.e., radius $a = 10$ mm, thickness $h = 0.1$ mm, Young modulus $E = 1.97$ MPa, Poisson ratio $\nu = 0.4$, and pressure $p = 0.001 \cdot E = 1.97$ kPa. The results of the approximation with Eq. (24) are presented in Table 1. Afterward, the thickness was varied and the pressure was optimized to get the same spherical part of the approximation of Eq. (24) as for the initial

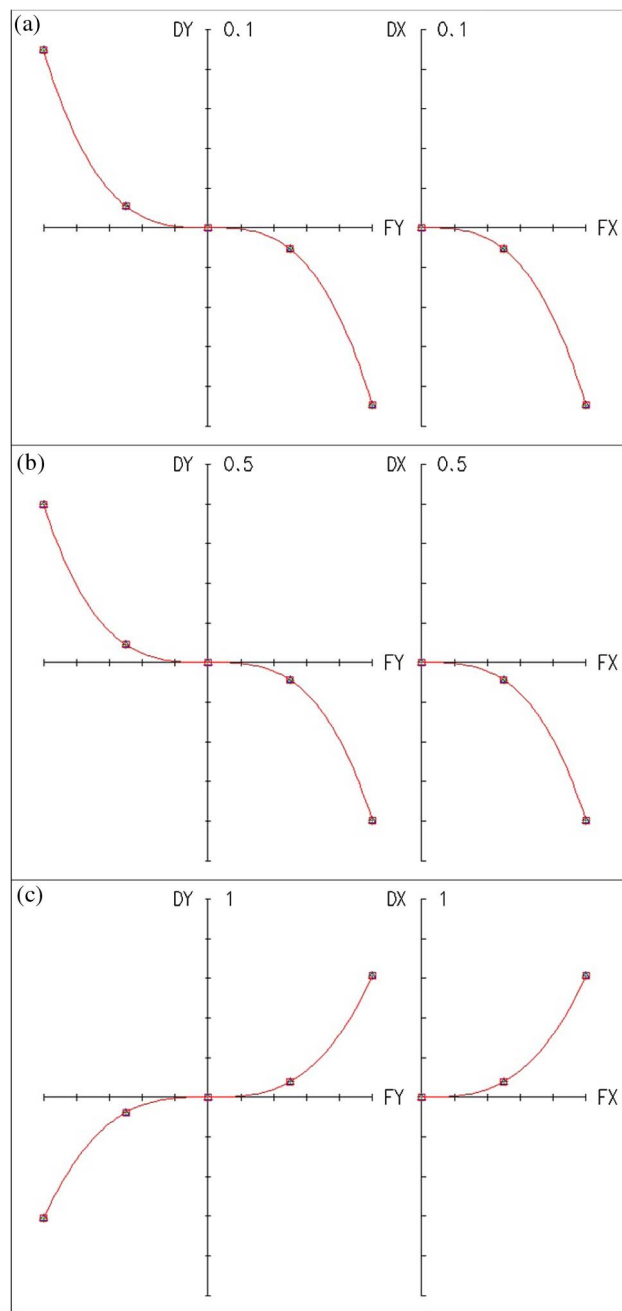


Fig. 7. Comparison of transversal spherical aberration of the membrane lens (a) with neglected aspherical coefficients of approximation (24), (b) with aspherical coefficients taken into account, (c) with aspherical coefficients taken into account but deformation calculated from simplified Eq. (15) and with the applied pressure adjusted to obtain the same paraxial properties (the same focal length) as with the general Eq. (14); DX and DY denote the transversal ray aberrations, and FX and FY denote the height of the incident ray in the interval from -5 mm to 5 mm.

parameters. Therefore, paraxial properties of the lens remain the same. However, aspherical coefficients and therefore aberrations of optical imaging change. Table 2 presents the results of the analysis. It is obvious that the thickness of the membrane affects the aspherical coefficients. A different pressure has to be

Table 2. Comparison of Applied Pressure and Aspherical Coefficients of Lenses with the Same Optical Paraxial Properties and Different Thicknesses

h [mm]	p [kPa]	z_{\max} [mm]	R_0 [mm]	A_4 [mm ⁻³]	A_6 [mm ⁻⁵]	A_8 [mm ⁻⁷]	A_{10} [mm ⁻⁹]
0.3	5.91	2.9544	-21.0163	-2.4123e-05	-1.8954e-07	1.2157e-09	-1.1361e-11
0.5	9.85			-2.4132e-05	-1.8927e-07	1.2125e-09	-1.1348e-11
0.7	13.79			-2.4149e-05	-1.8879e-07	1.2069e-09	-1.1326e-11

applied to obtain the same paraxial optical properties, and therefore various lenses can image differently.

5. EXPERIMENTAL VERIFICATION OF THEORETICAL RESULTS

The experimental measurement of a liquid membrane lens was done to check whether the theoretical prediction of membrane deflections corresponds to the real behavior. The scheme of the lens is shown in Fig. 8. The basic part is a chamber. The liquid (distilled water in our case) is injected by a precise pressure pump through an inlet valve. The cover of the lens is attached by screws and fixes the membrane (made of Sylgard 184 [44]), which is deformed depending on the amount of liquid carried into the chamber. The second part of the lens is a flat plane-parallel plate. The amount of liquid in the chamber can be reduced by a bleed valve. For the experiment, the chamber diameter was $D = 30$ mm and the membrane thickness $h = 0.5$ mm. Because mechanical parameters of the membrane change for different recipes of mixtures and are affected by thermal conditions during measurement, optimal values of mechanical parameters of the membrane used for the calculation (Young’s modulus $E = 1.1$ MPa and Poisson’s ratio $\nu = 0.45$) were obtained by minimizing the difference between the theoretically calculated and experimentally measured maximal membrane deflection.

The shape of the membrane was determined by a device for measurement of surface topography (see Fig. 9) with 4 degrees of freedom. The basic component of the device is a chromatic confocal sensor [45], which can be positioned using step motors in two mutually orthogonal directions (axis x and axis z) and rotated (around axis y). The sample can then be rotated using the measurement table, and data characterizing the complete topography can be obtained.

In view of the rotational symmetry of the lens, only the meridian $z = f(x)$ was measured. The range of measurement was from -5 mm to 5 mm because of mechanical construction of the device. The estimated uncertainty of the deflection

measurement using the aforementioned laboratory device is 0.02 mm (combination of uncertainties in the measurement with the confocal sensor and mechanical errors in the device).

The results of the measurement are shown in Fig. 10 and Table 3 for three pressures— $p = 3.0, 3.5,$ and 4.0 kPa—and the experimental values are compared to theoretical predictions calculated using the procedure presented in Section 3. RMS errors (differences between theoretically predicted and measured values) are $RMS_{3.0} = 0.033$ mm, $RMS_{3.5} = 0.024$ mm, and $RMS_{4.0} = 0.014$ mm. It is confirmed that the presented theoretical model corresponds very well to the real behavior.

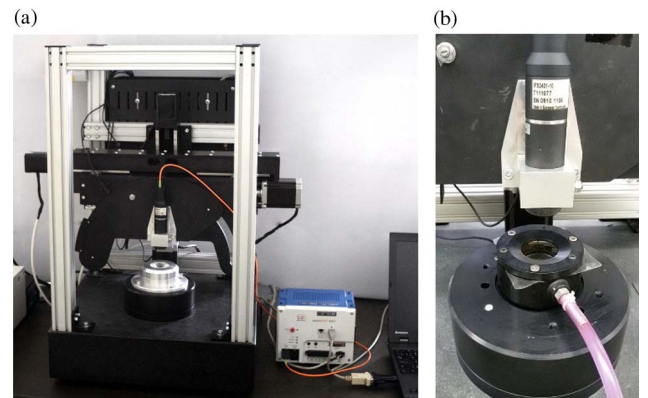


Fig. 9. (a) Laboratory device for surface topography measurement and (b) measured sample of liquid membrane lens of the measurement table.

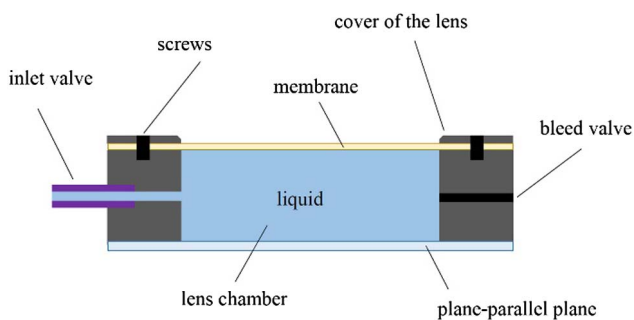


Fig. 8. Scheme of laboratory sample of liquid membrane lens.

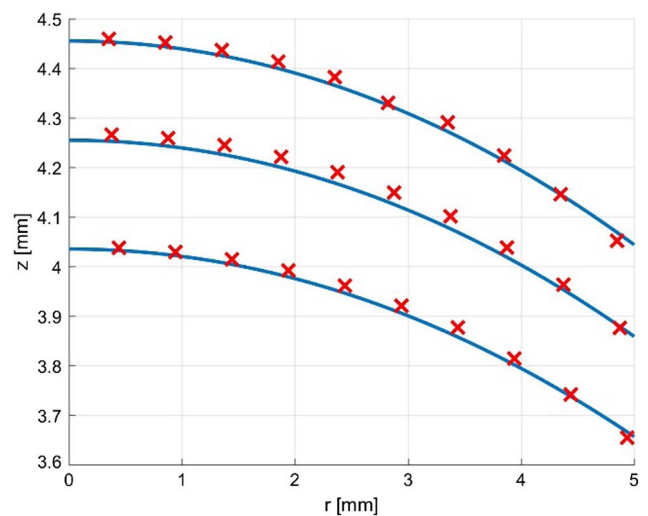


Fig. 10. Measured lens deformation (red crosses) and comparison to theoretical prediction (blue lines) for pressures $p = 3.0, 3.5,$ and 4.0 kPa.

Table 3. Approximation of Measured Membrane Shape by Aspherical Expression [Eq. (24)]

p [kPa]	z_{\max} [mm]	R_0 [mm]	A_4 [mm ⁻³]	A_6 [mm ⁻⁵]	A_8 [mm ⁻⁷]	A_{10} [mm ⁻⁹]	RMS [mm]
3.0	4.05	-32.24	4.483e-05	-3.879e-06	1.453e-08	-7.486e-12	1.5e-02
3.5	4.28	-28.60	1.657e-04	-5.835e-06	1.438e-08	3.673e-11	1.2e-02
4.0	4.47	-29.22	3.730e-05	-1.438e-06	-2.639e-09	3.630e-11	9.7e-03

Therefore, the method can be used for modeling the shape of membrane liquid lenses.

6. CONCLUSION

The paper presented a mathematical model and numerical solution for the calculation of the deformation of an axisymmetrical membrane liquid lens. The general formulas for deflections were derived based on precise geometrical equations and the Saint Venant–Kirchhoff material model, which assumes a linear relationship between the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress. The numerical solution was obtained by minimizing the potential energy. As one possible approach, an approximation using power series that satisfy the boundary conditions of the problem was presented. As is shown in an example and verified by an experiment, the derived general formulas and the numerical procedure can be used for accurate modeling of membrane liquid lenses. The results can be exploited in optical system design with incorporated liquid lenses, and the developed method will be used in the future for precise analysis of the imaging properties of such systems.

Funding. České Vysoké Učení Technické v Praze (CVUT) (SGS17/004/OHK1/1T/11).

REFERENCES

- H. Ren and S. T. Wu, *Introduction to Adaptive Lenses* (Wiley, 2012).
- Optotune, <http://www.optotune.com>.
- Holochip, <http://www.holochip.com>.
- A. H. Rawicz and I. Mikhailenko, "Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **35**, 1587–1589 (1996).
- D. Y. Zhang, N. Justis, V. Lien, Y. Berdichevsky, and Y.-H. Lo, "High-performance fluidic adaptive lenses," *Appl. Opt.* **43**, 783–787 (2004).
- N. Sugiura and S. Morita, "Variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **32**, 4181–4186 (1993).
- H. Ren, D. Fox, P. A. Anderson, B. Wu, and S.-T. Wu, "Tunable-focus liquid lens controlled using a servo motor," *Opt. Express* **14**, 8031–8036 (2006).
- Q. Yang, P. Kobrin, C. Seabury, S. Narayanaswamy, and W. Christian, "Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses," *Appl. Opt.* **47**, 3658–3668 (2008).
- G.-H. Feng and Y.-C. Chou, "Flexible meniscus/biconvex lens system with fluidic-controlled tunable-focus applications," *Appl. Opt.* **48**, 3284–3290 (2009).
- H. W. Ren and S. T. Wu, "Variable-focus liquid lens," *Opt. Express* **15**, 5931–5936 (2007).
- D. Shaw and T. E. Sun, "Optical properties of variable-focus liquid-filled optical lenses with different membrane shapes," *Opt. Eng.* **46**, 024002 (2007).
- D. Shaw and C.-W. Lin, "Design and analysis of an asymmetrical liquid-filled lens," *Opt. Eng.* **46**, 123002 (2007).
- H. Choi, D. S. Han, and Y. H. Won, "Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness," *Opt. Lett.* **36**, 4701–4703 (2011).
- L. Li, Q. H. Wang, and W. Jiang, "Liquid lens with double tunable surfaces for large power tunability and improved optical performance," *J. Opt.* **13**, 115503 (2011).
- F. Schneider, J. Draheim, R. Kamberger, P. Waibel, and U. Wallrabe, "Optical characterization of adaptive fluidic silicone-membrane lenses," *Opt. Express* **17**, 11813–11821 (2009).
- Y.-K. Fuh, M.-X. Lin, and S. Lee, "Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically-corrected design," *Opt. Lasers Eng.* **50**, 1677–1682 (2012).
- A. Miks, J. Novak, and P. Novak, "Algebraic and numerical analysis of imaging properties of thin tunable-focus fluidic membrane lenses with parabolic surfaces," *Appl. Opt.* **52**, 2136–2144 (2013).
- L. H. Wang, H. Oku, and M. Ishikawa, "Development of variable focus lens with liquid-membrane-liquid structure and 30 mm optical aperture," *Proc. SPIE* **8617**, 861706 (2013).
- L. H. Wang, H. Oku, and M. Ishikawa, "An improved low-optical-power variable focus lens with a large aperture," *Opt. Express* **22**, 19448–19456 (2014).
- S. T. Choi, B. S. Son, G. W. Seo, S. Y. Park, and K. S. Lee, "Optomechanical analysis of nonlinear elastomer membrane deformation under hydraulic pressure for variable-focus liquid-filled microlenses," *Opt. Express* **22**, 6133–6146 (2014).
- D. Liang and X.-Y. Wang, "A bio-inspired optical system with a polymer membrane and integrated structure," *Bioinsp. Biomim* **11**, 066008 (2016).
- J.-W. Du, X.-Y. Wang, and D. Liang, "Bionic optical imaging system with aspheric solid-liquid mixed variable-focus lens," *Opt. Eng.* **55**, 023105 (2016).
- N. Hasan, A. Banerjee, H. Kim, and C. H. Mastrangelo, "Tunable-focus lens for adaptive eyeglasses," *Opt. Express* **25**, 1221–1233 (2017).
- S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (McGraw Hill, 1964).
- A. S. Volmir, *Flexible Plates and Shells* (State Publishing House of Technical-Theoretical Literature, 1956), in Russian.
- H. Hencky, "On the stress state in circular plates with vanishing bending stiffness," *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **63**, 311–317 (1915).
- W. Z. Chein, "Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection," *Sci. Rep. Natn. Tsinghua Univ.* **A5**, 71–94 (1948).
- J. D. Campbell, "On the theory of initially tensioned circular membranes subjected to uniform pressure," *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **9**, 84–93 (1956).
- M. A. Goldberg and A. B. Pifko, "Large deflection analysis of uniformly loaded annular membranes," *AIAA J.* **1**, 2111–2115 (1963).
- M. A. Goldberg and A. B. Pifko, "Iterative and power series solutions for the large deflection of an annular membrane," *AIAA J.* **2**, 2234 (1964).
- N. Perrone and R. Kao, "A general nonlinear relaxation technique for solving nonlinear problems in mechanics," *J. Appl. Mech.* **38**, 371–376 (1971).
- R. Kao and N. Perrone, "Large deflections of axisymmetric circular membranes," *Int. J. Solids Structures* **7**, 1601–1612 (1971).
- R. G. Pettit, "Geometric and optical properties of inflatable point-focusing reflections," Master thesis (Brigham Young University, 1985).
- A. Kelkar, W. Elber, and I. S. Rajut, "Large deflections of circular isotropic membranes subjected to arbitrary axisymmetric loading," *Comput. Struct.* **21**, 413–421 (1985).
- W. B. Fichter, "Some Solutions for the Large Deflections of Uniformly Loaded Circular Membranes," NASA Technical Paper 3658 (1997).

36. D. J. Allman, "Variational solutions for the nonlinear deflexion of an annular membrane under axial load," *Int. J. Mech. Sci.* **24**, 749–753 (1982).
37. M. Sheplock and J. Dugundji, "Large deflections of clamped circular plates under initial tension and transitions to membrane behavior," *J. Appl. Mech.* **65**, 107 (1998).
38. F. Zhao, "Nonlinear solutions for circular membranes and thin plates," *Proc. SPIE* **6926**, 69260W (2008).
39. B. Stanford and P. Ifju, "The validity range of low fidelity structural membrane models," *Exp. Mech.* **48**, 697–711 (2008).
40. A. Mikš and P. Novák, "Calculation of a surface shape of a pressure actuated membrane liquid lens," *Opt. Lasers Eng.* **58**, 60–66 (2014).
41. B. Audoly and Y. Pomeau, *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Nonlinear Response of Shells* (Oxford University, 2010).
42. M. Aoki, *Introduction to Optimization Techniques: Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming* (Macmillan, 1971).
43. L. E. Scales, *Introduction to Non-Linear Optimization* (Macmillan, 1985).
44. Sylgard 184 Silicone Elastomer Kit <http://www.dowcorning.com/applications/search/products/Details.aspx?prod=01064291>.
45. Micro Epsilon, <http://www.micro-epsilon.co.uk/displacement-position-sensors/confocal-sensor/>.

Spherical aberration of an optical system and its influence on depth of focus

ANTONÍN MIKŠ AND PETR POKORNÝ*

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Applied Optics Group, Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic

*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 29 March 2017; revised 22 May 2017; accepted 22 May 2017; posted 23 May 2017 (Doc. ID 291653); published 9 June 2017

This paper analyzes the influence of spherical aberration on the depth of focus of symmetrical optical systems for imaging of axial points. A calculation of a beam's caustics is discussed using ray equations in the image plane and considering longitudinal spherical aberration as well. Concurrently, the influence of aberration coefficients on extremes of such a curve is presented. Afterwards, conditions for aberration coefficients are derived if the Strehl definition should be the same in two symmetrically placed planes with respect to the paraxial image plane. Such conditions for optical systems with large aberrations are derived with the use of geometric-optical approximation where the gyration diameter of the beam in given planes of the optical system is evaluated. Therefore, one can calculate aberration coefficients in such a way that the optical system generates a beam of rays that has the gyration radius in a given interval smaller than the defined limit value. Moreover, one can calculate the maximal depth of focus of the optical system respecting the aforementioned conditions. © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: (080.1010) Aberrations (global); (080.2720) Mathematical methods (general); (080.2740) Geometric optical design; (350.4600) Optical engineering.

<https://doi.org/10.1364/AO.56.005099>

1. INTRODUCTION

The depth of focus of an optical system is a very important imaging characteristic, and it describes an area in image space where a diameter of a circle of confusion is approximately the same or less than a given threshold value. The diameter of the circle of confusion characterizes an area where a point is imaged into and which we accept as an image point. As it is known from optical theory, the image of a point is not a point due to aberrations of the optical system and diffraction effects. Rather, it is an energy distribution, so-called a point spread function [1–5]. In the case of an optical system with a circular aperture and without any aberrations, the diameter of the central part of the point spread function is called the Airy disk, and it is given by formula $d_A = 2.4\lambda F$, where λ is the wavelength and F is the f -number of the optical system; one considers imaging the axial points of a rotationally symmetric optical system, and the image is analyzed in the paraxial image plane [1–10]. If the optical system is affected by aberrations [1–10], then the diameter of the circle of confusion depends on the amount of aberrations. In the case of axial points of the rotationally symmetric optical system, the diameter of the circle of confusion depends on spherical aberration. Therefore, one can modify the diameter of the circle of confusion with an appropriate spherical aberration, which depends on the distance from

the paraxial image plane. If one accepts some threshold value of the circle of confusion for practical applications, then there exists an area where the diameter of the circle of confusion is less than or equal to the considered value. Such an area is called the depth of focus of the optical system. Therefore, one can influence the depth of focus of the optical system with an appropriate modification of spherical aberration, in the case of axial points.

The goal of this paper is to present the influence of spherical aberration on the depth of focus of an optical system for the case of imaging of axial points of a rotationally symmetric optical system. The other way to achieve such an effect is with the usage of appropriate optical elements, which will change the amplitude, phase, and polarization of a passing wave field [11–20]. Interesting reviews of modifying the depth of focus are presented in [11,12]. This paper continues the topic that was presented in the previous work [21], where only the geometric-optical approach was applied. Readers can find other references discussing the topic in [21] as well. This presented paper shows a more general analysis considering the diffraction point of view together with the geometric-optical description. The practical usability is presented as well.

In the first part of this paper, analytical formulas for the calculation of caustics of a ray beam are presented with the use of ray equations in the image plane and with longitudinal

spherical aberration. Afterwards, the influence of aberration coefficients on extremes of such a curve is discussed. This part fills the theory of caustics, e.g., studies on evaluating and using caustics in symmetric optical systems as was published by Shealy and Burkhard [22–26], which were also used by Andersen for automatically calculating caustics from high-order aberration coefficients [27]. The next part focuses on the derivation of the requirements for aberration coefficients of an optical system if the Strehl definition should remain the same for two symmetrically placed planes with respect to the paraxial image plane. For optical systems with large aberrations, such conditions are derived with the use of the geometric-optical approach where the gyration diameter of the system is evaluated in given planes. Therefore, aberration coefficients of spherical aberration can be calculated in such a way that the optical system generates a beam of rays that has less or equal gyration diameter than the given threshold value. Moreover, one can calculate the maximum possible depth of focus of the optical system that fulfills the aforementioned conditions. In the end of the paper, the derived formulas are presented with practical examples. To the best of the authors' knowledge, such a general analysis of a similar topic has not been published yet. Thus, this paper gives important answers for many practical applications of the discussed topic. Results of the presented analysis have a significant impact, especially for optical scanning systems, which work generally with axial beams. Therefore, spherical aberration is fundamental.

2. RAY EQUATIONS AND CAUSTICS IN AN IMAGE PLANE

Consider the situation depicted in Fig. 1, where the axial ray tracing (aperture ray) in the image space of the rotationally symmetric optical system is presented. The image space is homogenous, and isotropic rays become straight lines. Let O be the origin of the defined coordinate system (e.g., the center of the exit pupil of the optical system), line \overline{BC} denote an outgoing ray from the optical system, ξ be the paraxial image plane, and A_0 be the paraxial image of the optical system. Due to rotational symmetry, one can analyze only a meridional section. From mathematics, a line can be described by the following formula [28]:

$$y = kx + h, \tag{1}$$

where $k = k(h)$ is the tangent of the angle between the ray and the positive direction of the x axis. It holds for

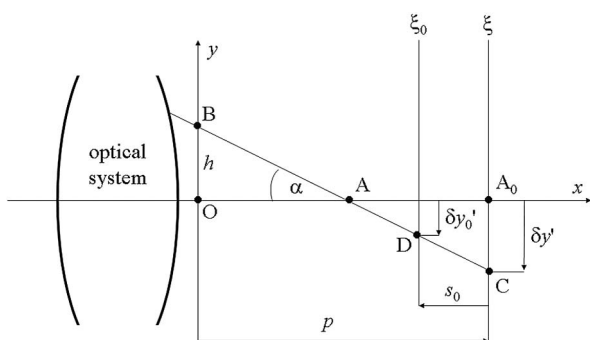


Fig. 1. Transverse spherical aberration.

$k = \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha)$, and $h = \overline{OB}$. According to Fig. 1, it holds for

$$k = -(h - \delta y')/p, \tag{2}$$

where $\delta y' = \delta y'(h)$ is the transverse ray aberration of the optical system (transverse spherical aberration) [1–10]. The meaning of the other values is obvious from Fig. 1. The transverse ray aberration of the aperture ray in the paraxial image plane ξ can be, in the case of a rotationally symmetric optical system, written in the form ($\delta y'$ is an odd function of h)

$$\delta y' = \sum_{m=2}^M a_{2m-1} h^{2m-1}, \tag{3}$$

where a_{2m-1} denotes aberration coefficients. Substituting Eq. (3) into Eq. (2), one gets

$$k = \frac{-h + \sum_{m=2}^M a_{2m-1} h^{2m-1}}{p}. \tag{4}$$

As it is obvious from Eqs. (1) and (2) that the equation of a ray (line) depends only on one parameter h for a constant value of p (see Fig. 1). Therefore, those rays define a family of lines, and one can calculate an envelope of this family (i.e., a curve that is tangent to each member of the family of lines [28,29]). From mathematics (from the definition of an envelope), one can calculate the envelope of lines [given by Eq. (1)] from the following system of equations [6,7,28,29]:

$$\phi(x, y, h) = 0, \partial\phi(x, y, h)/\partial h = 0, \tag{5}$$

where

$$\phi(x, y, h) = y - kx - h = 0. \tag{6}$$

The lines' envelope is called a caustic in optic [4,6,7,29]. It can be shown that caustics are curves where the wavefronts' centers of curvature are positioned [4,6,7,29]. The caustics formula can be derived excluding the parameter h from Eq. (5). As it is obvious from Eqs. (4)–(6), such a problem is generally unsolvable. For this reason, the coordinates of caustics are expressed in the parametrical form. Using Eqs. (2)–(6), one gets formulas for caustics' coordinates $x_c = x_c(h)$ and $y_c = y_c(h)$ in the following form:

$$x_c = \frac{p}{g(h)}, \quad y_c = h - \frac{f(h)}{g(h)}, \tag{7}$$

where

$$f(h) = h - \sum_{m=2}^M a_{2m-1} h^{2m-1},$$

$$g(h) = 1 - \sum_{m=2}^M (2m - 1) a_{2m-1} h^{2(m-1)}. \tag{8}$$

In the case of an optical system without any aberrations, i.e., $a_{2m-1} = 0$ for $m = 2, 3, \dots, M$, one gets $x_c = p$, $y_c = 0$, and therefore caustics become a point.

Now we will show another way to calculate caustics of a beam of rays. This approach is based on the usage of longitudinal spherical aberration $\delta s'$. Consider the situation in

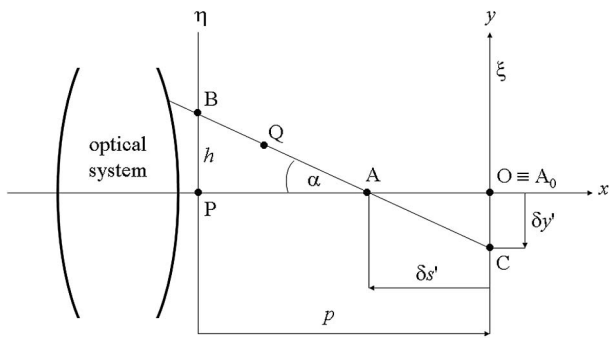


Fig. 2. Calculation of caustics of a beam of rays.

Fig. 2. Let the origin of the coordinate system O be in the paraxial image plane ξ , which is positioned at a distance p from the plane of the exit pupil η . As is obvious from Fig. 2, point O is identical with paraxial image point A_0 . The ray equation of \overline{BC} can be expressed in parametrical form. It holds for coordinates $x = x(\alpha, t)$, $y = y(\alpha, t)$ of an arbitrary point Q on the ray:

$$x = \delta s' + t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha, \quad (9)$$

where t denotes the distance between points Q and A . Longitudinal spherical aberration $\delta s'$ can be written in the form as follows:

$$\delta s' = \sum_{n=1}^N a_{2n} (\tan \alpha)^{2n}, \quad (10)$$

where s_{2n} denotes aberration coefficients.

As it is known [14,15], one can calculate an envelope of lines given by Eq. (9) (generally curves) if Jacobian J of the transformation from ray coordinates (α, t) to Cartesian (x, y) is equal to zero:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Using Eqs. (9)–(11) then gives the following formula for parameter t :

$$t = \frac{2}{\cos \alpha} \sum_{n=1}^N n s_{2n} (\tan \alpha)^{2n}. \quad (12)$$

Substituting Eq. (12) into Eq. (9) gives the analytical formulas for the coordinates of caustics (x_c, y_c) :

$$\begin{aligned} x_c &= \sum_{n=1}^N (2n + 1) s_{2n} (\tan \alpha)^{2n}, \\ y_c &= 2 \sum_{n=1}^N n s_{2n} (\tan \alpha)^{(2n+1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Now we will study the extreme values of the caustic's coordinate y_c depending on parameter h . The necessary condition for the extreme, $\partial y_c / \partial h = 0$, and the combination with Eqs. (7) and (8) gives the following formula:

$$f(h)e(h) = 0, \quad (14)$$

where

$$e(h) = \sum_{m=2}^{m=M} 2(2m - 1)(m - 1) a_{2m-1} h^{2m-3}. \quad (15)$$

Solving Eq. (14) results in value h where the coordinate y_c will be external.

Let one solve Eq. (14) for the case of an optical system with aberrations of third and fifth orders, i.e., for $M = 3$. After rearrangement, Eq. (14) has the form

$$10a_2^2 b^8 + 13a_3 a_5 b^6 + (3a_3^2 - 10a_5) b^4 - 3a_3 b^2 = 0. \quad (16)$$

The solution of Eq. (16) then gives the following values of h for extremes:

$$\begin{aligned} h_1 &= 0, & h_2 &= 0, \\ h_3 &= \frac{\sqrt{30} \sqrt{-a_3 a_5}}{10 a_5}, & h_4 &= -h_3, \\ h_5 &= \sqrt{-\frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 + 4a_5}}{2a_5}}, & h_6 &= -h_5, \\ h_7 &= \sqrt{-\frac{a_3 - \sqrt{a_3^2 + 4a_5}}{2a_5}}, & h_8 &= -h_7. \end{aligned} \quad (17)$$

In the case of an optical system with aberrations of third, fifth, and seventh orders, the transverse ray aberration (in the paraxial image plane) can be written with Eq. (3) for $M = 4$ as follows:

$$\delta y' = a_3 b^3 + a_5 b^5 + a_7 b^7. \quad (18)$$

With Eq. (18), one can easily find the solution for a value of h_0 where $\delta y' = 0$:

$$\begin{aligned} h_{01} &= \sqrt{-\frac{a_5 + \sqrt{a_5^2 - 4a_3 a_7}}{2a_7}}, \\ h_{02} &= \sqrt{-\frac{a_5 - \sqrt{a_5^2 - 4a_3 a_7}}{2a_7}}. \end{aligned} \quad (19)$$

For the case of an optical system with only third- and fifth-order aberrations ($M = 3$), a similar analysis gives

$$h_0 = \pm \sqrt{-\frac{a_3}{a_5}}. \quad (20)$$

3. DEPTH OF FOCUS FROM THE POINT OF WAVE OPTICS

We will now look at the aforementioned problem from the point of wave optics. Let the optical system have only third- and fifth-order aberrations (the most important in practice). The wave aberration W of the optical system can be expressed as series of Seidel polynomials [1,3–5,9] as follows:

$$W = W_{20} r^2 + W_{40} r^4 + W_{60} r^6, \quad (21)$$

where r is the normalized ($r_{\max} = 1$) radial polar coordinate of the point in the plane of the exit pupil or the reference sphere of the optical system, W_{20} characterizes longitudinal defocus, W_{40} spherical aberration of the third order, and W_{60} is spherical aberration of the fifth order.

The Strehl ratio (Strehl definition) is defined as a ratio between the maximum value of the point spread function of a real

optical system with aberrations and the maximum value of the point spread function of an ideal optical system (only diffraction limited) without aberrations ($W = 0$). The Strehl definition *S.D.* of the optical system with small aberrations ($W < 0.5\lambda$) can be expressed with the following formula [1,3–5,9]:

$$S.D. \approx 1 - (2\pi/\lambda)^2 E_0, \quad (22)$$

where

$$E_0 = \overline{W^2} - \overline{W}^2, \quad \overline{W} = 2 \int_0^1 W(r) r dr, \quad \overline{W^2} = 2 \int_0^1 W^2(r) r dr. \quad (23)$$

In the aforementioned situation, one gets for the variance of wave aberration E_0 as follows [1,3,9]:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{W_{20}^2}{12} + W_{20} \left(\frac{W_{40}}{6} + \frac{3W_{60}}{20} \right) \\ &+ \left(\frac{4W_{40}^2}{45} + \frac{W_{40}W_{60}}{6} + \frac{9W_{60}^2}{112} \right) \\ &= e_2 W_{20}^2 + e_1 W_{20} + e_0, \end{aligned} \quad (24)$$

where one can calculate aberration coefficients with the following formulas [1,3,9]:

$$\begin{aligned} W_{20} &= -\frac{s_0}{8F^2}, \quad W_{40} = -\frac{3}{2} q_0 W_{60}, \\ W_{60} &= \frac{\Delta s'_k}{24F^2(1 - q_0)} = -\frac{\Delta s'_{\text{ext}}}{6F^2 q_0^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

where F is the f -number of the optical system [1–4,9], s_0 is the defocus, $\Delta s'_k$ is the longitudinal spherical aberration at the edge of the exit pupil ($r = 1$), $q_0 = r_0^2$ is the correction zone where the longitudinal spherical aberration is corrected (i.e., it equals zero for $r = r_0$), and $\Delta s'_{\text{ext}}$ is the extreme value of longitudinal spherical aberration [1,3,4].

Suppose now that the Strehl definition has to be the same in two planes symmetrically placed with respect to the paraxial image plane by the value of $\pm s_0$. If such a condition shall be fulfilled, it has to be $e_1 = 0$ according Eq. (24). The solution of this equation thus gives

$$W_{40} = -\frac{9}{10} W_{60}. \quad (26)$$

Comparing Eqs. (25) and (26) results in

$$W_{40} = -\frac{3}{2} q_0 W_{60} = -\frac{9}{10} W_{60}. \quad (27)$$

Therefore,

$$q_0 = r_0^2 = 3/5. \quad (28)$$

One can summarize the aforementioned analysis as follows. If the Strehl definition of an optical system with small aberrations for axial points should have the same value in two planes symmetrically placed with respect to the paraxial image plane, then the spherical aberration of the optical system should be corrected for zone $r_0 = \sqrt{3/5} = 0.7746$.

If $(E_0)_p$ is the demanded value of the variance of wave aberration in planes placed at distances $\pm(s_0)_p$ from the paraxial

image plane, then one gets, using Eqs. (24) and (26), the following:

$$W_{40} = \pm 5.351 \sqrt{12(E_0)_p - (W_{20})_p^2}, \quad (29)$$

where

$$(W_{20})_p = -\frac{(s_0)_p}{8F^2}. \quad (30)$$

According to Eq. (26),

$$W_{60} = -\frac{10}{9} W_{40} = \mp 5.946 \sqrt{12(E_0)_p - (W_{20})_p^2}. \quad (31)$$

With Eqs. (29) and (31), one can calculate coefficients W_{40} and W_{60} of wave aberration of the optical system in the case of spherical aberration of the third and fifth order, which ensures that the maximum value of the Strehl definition will be the same in planes at distances $\pm(s_0)_p$ from the paraxial image plane of the optical system. For a real solution, it has to be fulfilled, according to Eqs. (29) and (30), as follows:

$$|(s_0)_p| \leq 16F^2 \sqrt{3(E_0)_p}. \quad (32)$$

Equation (32) can be used for the initial calculation of the maximum depth of focus with given variance $(E_0)_p$.

Note that between coefficients of wave aberration W_{40} and W_{60} and coefficients a_3 and a_5 of transverse ray aberration the following equations hold:

$$W_{40} = \frac{H^4}{4R} a_3, \quad W_{60} = \frac{H^6}{6R} a_5, \quad (33)$$

where H is maximum (edge) height b (see Fig. 1) and R is the radius of the reference sphere. If point O (Fig. 1) is identical with the center of the exit pupil of the optical system, then $R = p$. The value r in Eq. (21) is then given as $r = b/H$.

4. CALCULATION OF ABERRATION COEFFICIENTS WITHIN THE GEOMETRIC-OPTICAL APPROXIMATION

In the case of large aberrations ($W > \lambda$, with respect to the optimal image point), it is not possible to use the Strehl definition for a relevant description of the problem of optical image quality. As presented by Miyamoto [8,30–32], the effect of diffraction of light can be neglected if the wave aberration fulfills the condition $W > 2\lambda$, and optical imaging can be described using geometric-optical approximation, based on ray aberrations of the optical system. Such results are practically identical with the ones obtained with the diffraction theory of optical imaging. Consider now a situation and the way of calculation of the depth of focus in the case of spherical aberration of the third and fifth order, where transverse spherical aberration in the paraxial image plane is given with the formula

$$\delta y' = a_3 b^3 + a_5 b^5. \quad (34)$$

The mean value of the radius r_g of geometric-optical circle of confusion (gyration radius [10,32]) can be calculated with the following formula (valid for the circular exit pupil of optical system):

$$\begin{aligned}
 r_g^2 &= \frac{1}{\pi H^2} \int_0^{2\pi} \int_0^H (\delta y'_0)^2 b db d\varphi = \frac{2}{H^2} \int_0^H (\delta y'_0)^2 b db \\
 &= \frac{2}{H^2} \int_0^H (\delta y' - s_0 \tan \alpha)^2 b db,
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

where integration is performed over the plane of the exit pupil of the optical system, (b, φ) are polar coordinates in the plane of the exit pupil, H is the maximum value of b , s_0 is the distance between the paraxial image plane and the plane where the size of the geometric-optical circle of confusion is calculated, α is the aperture angle (always positive) between the ray and the optical axis (see Fig. 1), and $\delta y'_0$ is the transverse spherical aberration in the plane ξ_0 , which is located at distance s_0 from the paraxial image plane. As shown by Miyamoto [32], the geometric-optical intensity I_g of the imaged point, in the first approximation, is in straight relation with the gyration radius [32]:

$$I_g = \beta_1 + \beta_2(r_g^2), \tag{36}$$

where β_1 and β_2 are constants.

After integration of Eq. (35) with substituted Eq. (34), one obtains the following equation for gyration radius:

$$r_g^2 = g_2 s_0^2 + g_1 s_0 + g_0, \tag{37}$$

where

$$\begin{aligned}
 g_2 &= H^2 / (2p^2), \\
 g_1 &= -H^4(3H^2 a_5 + 4a_3) / (6p), \\
 g_0 &= H^6(10H^4 a_5^2 + 24H^2 a_3 a_5 + 15a_3^2) / 60.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Equation (38) can be written with Eq. (33) in the following form, too, ($R = p$):

$$\begin{aligned}
 g_2 &= H^2 / (2p^2), \\
 g_1 &= -8W_{40} / 3 - 3W_{60}, \\
 g_0 &= 2p^2(10W_{40}^2 + 24W_{40}W_{60} + 15W_{60}^2) / (5H^2).
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Let one demand an equal gyration radius r_g in two planes, which are symmetrically placed with respect to the paraxial image plane by value $\pm s_0$. To fulfill such a condition, it holds according to Eq. (37) that $g_1 = 0$. Finding the solution of this equation, one obtains

$$a_3 = -\frac{3}{4} H^2 a_5. \tag{40}$$

Let $(r_g)_p$ be the gyration radius in planes distanced from the paraxial image plane by the value $\pm(s_0)_p$. Then the aberration coefficient a_5 can be calculated from Eqs. (37) and (40) as follows:

$$a_5 = \pm \frac{4\sqrt{210} \sqrt{2p^2(r_g)_p^2 - H^2(s_0)_p^2}}{7H^5 p}. \tag{41}$$

Equations (40) and (41) can be used for the calculation of aberration coefficients a_3 and a_5 of the transverse ray aberration of the optical system, which requires the gyration radius $(r_g)_p$

in planes that are shifted by the value $\pm(s_0)_p$ from the paraxial image plane.

To obtain the real solution of our problem, one can derive the maximum possible depth of focus $2(s_0)_{\text{lim}}$ from Eq. (41) as

$$|(s_0)_{\text{lim}}| \leq \sqrt{2} \frac{p}{H} (r_g)_p. \tag{42}$$

One can calculate the maximum possible depth of focus of the optical system in advance with Eq. (42), and the optical system will have the aforementioned properties. If the desired value of the depth of focus $2(s_0)_p$ is larger than $2(s_0)_{\text{lim}}$, one has to change some of parameters H or p in such a way that Eq. (42) will be fulfilled.

The next value of interest is the minimum gyration radius $(r_g)_{\text{min}}$. From the necessary condition for the extreme and with Eq. (29) one gets

$$(r_g)_{\text{min}} = \sqrt{g_0}. \tag{43}$$

Afterwards, the minimum value of the gyration diameter $(D_g)_{\text{min}}$ is

$$(D_g)_{\text{min}} = 2(r_g)_{\text{min}} = 2\sqrt{g_0}. \tag{44}$$

The correction zone can be calculated from Eqs. (25), (33), and (40) as follows:

$$q_0 = r_0^2 = 3/4. \tag{45}$$

One can summarize the aforementioned analysis as follows. If the value of gyration diameter of the optical system for axial points should have the same values in two planes symmetrically placed with respect to the paraxial image plane, then the spherical aberration of the optical system should be corrected for zone $r_0 = \sqrt{3/4} = 0.866$.

Demanding the same value of gyration radius r_g for $s_0 = s_{01}$ and $s_0 = s_{02}$, one gets the following from Eq. (37):

$$\begin{aligned}
 a_5 &= -\frac{9H(s_{01} + s_{02}) \pm \sqrt{96D}}{7H^2 p}, \\
 a_3 &= -\frac{3}{4} H^2 a_5 + \frac{3(s_{01} + s_{02})}{4H^2 p},
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

where

$$D = -9H^2(s_{01}^2 + s_{02}^2) + 17H^2 s_{01} s_{02} + 70r_g^2 p^2. \tag{47}$$

For a solution in a real domain, $D \geq 0$. Therefore, it is not possible to set the values of s_{01} and s_{02} independently.

5. EXAMPLE

Let one calculate aberration coefficients using the aforementioned procedure. Suppose the following initial parameters: $(s_0)_p = \pm 2$ mm (depth of focus = 4 mm), $(D_g)_p = 1$ mm, $p = 50$ mm, and $H = 12.5$ mm.

One obtains the following with the use of Eqs. (39) and (40): $a_3 = 1.5899e - 3$ mm⁻² and $a_5 = -1.3567e - 5$ mm⁻⁴. Next, for the minimum gyration diameter it holds that $(D_g)_{\text{min}} = 0.707$ mm. Equation (20) can be used for the calculation of height h_0 where the spherical aberration is corrected, $h_0 = 10.825$ mm.

Figure 3 shows a plot of transverse spherical aberration $\delta y'$ of the optical system, which will fulfill the aforementioned

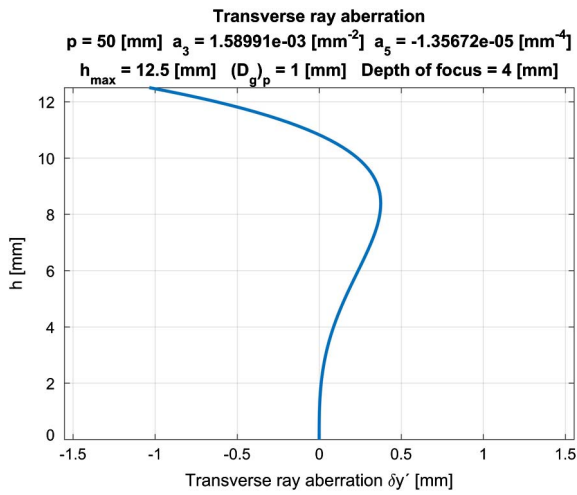


Fig. 3. Transverse spherical aberration.

conditions. In Fig. 4, a dependency of the gyration diameter D_g on defocus s_0 is shown. Figure 5 then shows the beam of rays and its caustics.

Now let us study the energy properties of light that are transformed by the given optical system into an area given by the gyration diameter. By splitting the aperture into subapertures of equal areas, one can easily model such a phenomenon with rays coming through the centroid of such subapertures.

Let a circular sector be defined by angle $\Delta\varphi$. Let such a sector be divided into N parts of the same area in a radial direction. Afterwards, the centroid of i th part of the annulus will be given by radius r_{Ti} , and it holds that

$$r_{Ti} = \frac{4}{3\Delta\varphi} \frac{(r_i^3 - r_{i-1}^3)}{(r_i^2 - r_{i-1}^2)} \sin \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad (48)$$

where r_i and r_{i-1} denote the edge radii of the section of the i th annulus, which can be calculated by the following recurrent formula:

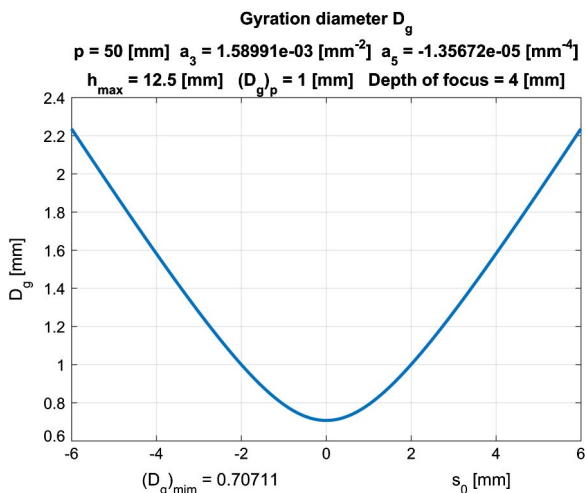


Fig. 4. Dependency of gyration diameter D_g on defocus s_0 .

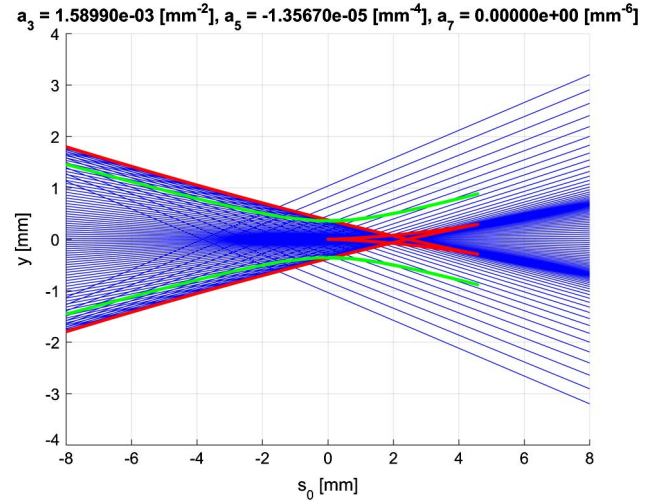


Fig. 5. Dependency of caustics (red line) of a beam of rays (blue lines) with respect to the gyration radius (green line) on defocus s_0 for a constant step in ray height h in the aperture plane.

$$r_{i+1} = \sqrt{\frac{R^2}{N} + \Delta\varphi \cdot r_i^2}, \quad i = 0, \dots, N, r_0 = 0. \quad (49)$$

For a limit case where $\Delta\varphi \rightarrow 0$, one gets the following from Eq. (48):

$$r_{Ti0} = \frac{2}{3} \frac{(r_i^3 - r_{i-1}^3)}{(r_i^2 - r_{i-1}^2)}. \quad (50)$$

Figure 6 shows an energetic study for aperture division into equal areas. In the plane given by defocus $-s_0$ with respect to the paraxial image plane in an area surrounded by the gyration radius, there is focused 54% of energy in the plane $+s_0$ 78% of energy.

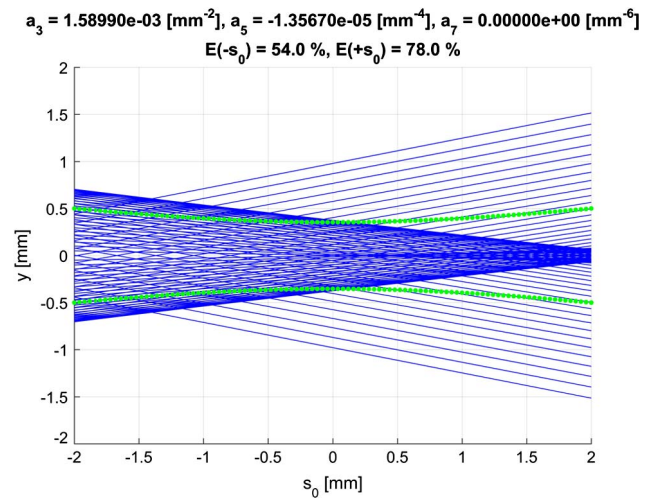


Fig. 6. Energetic study of a beam with division of aperture into equal areas (blue, rays coming from centroids of the subapertures; green, gyration radius).

6. CONCLUSION

This paper presented the problem of depth of focus of an optical system both from the point of view of geometrical optics and from the point of wave optics. The formulas for the calculation of aberration coefficients of longitudinal spherical aberration were derived as well as formulas for wave aberration. Both were studied under the condition that the optical system with such aberration coefficients will generate a beam of rays with a gyration diameter or a Strehl definition equal to or less than a chosen threshold value in a given interval of image space. Moreover, formulas for the calculation of initial maximum depth of focus were derived for an optical system fulfilling the aforementioned conditions.

Funding. Czech Technical University in Prague (CVUT) (SGS17/004/OHK1/1T/11).

REFERENCES

1. A. Mikš, *Applied Optics* (CTU, 2009).
2. S. F. Ray, *Applied Photographic Optics* (Focal, 2002).
3. E. L. O'Neill, *Introduction to Statistical Optics* (Addison-Wesley, 1963).
4. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Oxford University, 1964).
5. W. T. Welford, *Aberrations of Optical Systems* (Adam Hilger, 1986).
6. M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics* (Interscience, 1958).
7. O. N. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics* (Academic, 1972).
8. K. Miyamoto, "Wave optics and geometrical optics in optical design," *Prog. Opt.* **1**, 31–66 (1961).
9. A. Miks, J. Novak, and P. Novak, "Dependence of Strehl ratio on f-number of optical system," *Appl. Opt.* **51**, 3804–3810 (2012).
10. A. Miks and J. Novak, "Dependence of camera lens induced radial distortion and circle of confusion on object position," *Opt. Laser Technol.* **44**, 1043–1049 (2012).
11. Z. Zalevsky, "Extended depth of focus imaging: a review," *SPIE Rev.* **1**, 018001 (2010).
12. J. Ojeda-Castañeda and C. M. Gómez-Sarabia, "Tuning field depth at high resolution by pupil engineering," *Adv. Opt. Photon.* **7**, 814–880 (2015).
13. A. Vázquez-Villa, J. A. Delgado-Atencio, S. Vázquez-Montiel, J. Castro-Ramos, and M. Cunill-Rodríguez, "Aspheric lens to increase the depth of focus," *Opt. Lett.* **40**, 2842–2845 (2015).
14. S. Liu and H. Hua, "Extended depth-of-field microscopic imaging with a variable focus microscope objective," *Opt. Express* **19**, 353–362 (2011).
15. T. Colomb, N. Pavillon, J. Kühn, E. Cuche, C. Depeursinge, and Y. Emery, "Extended depth-of-focus by digital holographic microscopy," *Opt. Lett.* **35**, 1840–1842 (2010).
16. D. Elkind, Z. Zalevsky, U. Levy, and D. Mendlovic, "Optical transfer function shaping and depth of focus by using a phase only filter," *Appl. Opt.* **42**, 1925–1931 (2003).
17. H. Wang and F. Gan, "High focal depth with a pure-phase apodizer," *Appl. Opt.* **40**, 5658–5662 (2001).
18. F. Diaz, F. Goudail, B. Loiseaux, and J. P. Huignard, "Design of a complex filter for depth of focus extension," *Opt. Lett.* **34**, 1171–1173 (2009).
19. J. Ojeda-Castañeda and L. R. B. Valdós, "Arbitrarily high focal depth with finite apertures," *Opt. Lett.* **13**, 183–185 (1988).
20. C. Rivolta, "Depth of focus of optical systems with a small amount of spherical aberration," *Appl. Opt.* **29**, 3249–3254 (1990).
21. A. Mikš and J. Novák, "Dependence of depth of focus on spherical aberration of optical systems," *Appl. Opt.* **55**, 5931–5935 (2016).
22. D. L. Shealy and D. G. Burkhard, "Flux density for ray propagation in discrete index media expressed in terms of the intrinsic geometry of the deflecting surface," *Opt. Acta* **20**, 287–301 (1973).
23. D. G. Burkhard and D. L. Shealy, "Flux density for ray propagation in geometrical optics," *J. Opt. Soc. Am.* **63**, 299–304 (1973).
24. D. L. Shealy and D. G. Burkhard, "Caustic surfaces and irradiance for reflection and refraction from an ellipsoid, elliptic paraboloid, and elliptic cone," *Appl. Opt.* **12**, 2955–2959 (1973).
25. D. L. Shealy and D. G. Burkhard, "Analytical illuminance calculation in a multi-interface optical system," *Opt. Acta* **22**, 485–501 (1975).
26. D. G. Burkhard and D. L. Shealy, "Simplified formula for the illuminance in an optical system," *Appl. Opt.* **20**, 897–909 (1981).
27. T. B. Andersen, "Optical aberration functions: computation of caustic surfaces and illuminance in symmetrical systems," *Appl. Opt.* **20**, 3723–3728 (1981).
28. K. Rektorys, *Survey of Applicable Mathematics* (MIT, 1969).
29. Y. A. Kravtsov and Y. I. Orlov, *Caustics, Catastrophes and Wave Fields* (Springer, 1999).
30. K. Miyamoto, "On a comparison between wave optics and geometrical optics by using Fourier analysis. I. General theory," *J. Opt. Soc. Am.* **48**, 57–63 (1958).
31. K. Miyamoto, "On a comparison between wave optics and geometrical optics by using Fourier analysis. II. Astigmatism, coma, spherical aberration," *J. Opt. Soc. Am.* **48**, 567–575 (1958).
32. K. Miyamoto, "On a comparison between wave optics and geometrical optics by using Fourier analysis. III. Image evaluation by spot diagram," *J. Opt. Soc. Am.* **49**, 35–40 (1959).

Simple method for determination of parameters of cemented doublet

ANTONÍN MIKŠ AND PETR POKORNÝ*

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thákurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic
*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 20 May 2016; revised 12 June 2016; accepted 13 June 2016; posted 14 June 2016 (Doc. ID 266558); published 8 July 2016

This paper proposes a simple noninvasive method that makes it possible to calculate the inner design parameters of the cemented doublet using measurements of its chosen paraxial optical and geometrical parameters without any damage to the system under testing (e.g., dismantling). Derived formulas are based on the knowledge of measured values of the lenses thicknesses, the radii of curvatures of the first and the last doublet's surfaces, the paraxial focal length, and positions of the object and the image focal point. Practical usefulness of the proposed method is demonstrated on the real measurement of a known doublet. © 2016 Optical Society of America

OCIS codes: (080.3630) Lenses; (120.3940) Metrology; (120.4630) Optical inspection; (220.4840) Testing.

<http://dx.doi.org/10.1364/AO.55.005456>

1. INTRODUCTION

In practical industrial applications the issue of determining the internal parameters of the optical system (e.g., photographic objective, etc.) without any damage to its components is in focus very often. The optical systems are usually composed by individual simple lenses or cemented doublets. A determination of parameters of simple lenses is very well known and it is an easily solvable problem, because one is able to measure the radii of curvatures of the lens' surfaces and the central thickness. Afterwards, the index of refraction can be calculated from the known formula for the optical power of the lens. A much more complicated issue comes to role with testing the cemented doublet if one wants to determine its internal parameters without any damage to the component, which is advantageous for practical purposes.

A cemented doublet belongs to frequently used optical systems in practice [1–6]. The doublet is composed of two spherical lenses, where the second radius of the first lens is identical to the first radius of the second lens, and both lenses are cemented together. In practice, it is possible to measure external parameters and aberrations relatively easily by various measurement techniques [7–14]. However, the internal parameters cannot be measured directly.

The authors' previous work [15] describes the possibility of determination of internal parameters of a cemented doublet, which is based on the measurement of paraxial parameters and wave aberration for a point on the optical axis of the doublet (spherical aberration). With regard to the fact that it is not possible to obtain a simple analytical solution for a determination of an unknown doublet's internal parameters, the optimization technique has to be used [16,17].

The aim of this work is to propose a novel and simple non-invasive method that makes it possible to obtain the internal design parameters of the cemented doublet using measurements of some paraxial optical and geometrical parameters of the doublet. The simplification of the previous procedure [15] is based on the measurement of internal thicknesses of the individual lenses, which can be by available commercial measurement devices, e.g., OptiCentric by the company Trioptics [13]. Such an approach provides a possibility to derive simple and explicit analytical formulas for the calculation of the remaining internal parameters only with the knowledge of the focal length, position of the object focal point, and position of the image focal point. Therefore, it is not needed to measure the wave aberration and calculate the internal parameters with complex optimization techniques, as it was necessary in the authors' previous paper [15].

2. DETERMINATION OF PARAMETERS OF CEMENTED DOUBLET

A scheme of the cemented doublet is shown in Fig. 1. Such an optical system has seven design parameters, namely three radii of curvature (r_1, r_2, r_3), two values of central thickness (d_1, d_2), and two values of refractive index (n_1, n_2) of individual lenses, from which the doublet is composed by. In Fig. 1, F and F' denote object and image focal point of the doublet, n_0 and n_3 are refractive indices of the object and image media, V_1 and V_2 are vertices of the doublet laying on the optical axis, s_F and $s'_{F'}$ are distances of the object and the image focal points from the vertices.

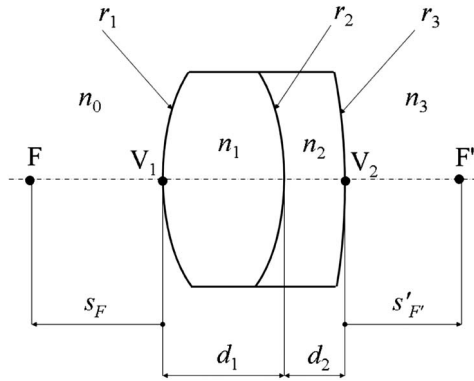


Fig. 1. Optical scheme of cemented doublet.

Using equations for paraxial ray tracing [1–6] one can derive the following formulas for optical power φ , position of the object focal point s_F , and position of the image focal point $s'_{F'}$ of the doublet. It holds:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - D_1(\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3) - D_2(\varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3) + D_1D_2\varphi_1\varphi_2\varphi_3, \quad (1)$$

$$s_F = n_0(D_1\varphi_2 + D_1\varphi_3 + D_2\varphi_3 - D_1D_2\varphi_2\varphi_3 - 1)/\varphi, \quad (2)$$

$$s'_{F'} = -n_3(D_1\varphi_1 + D_2\varphi_1 + D_2\varphi_2 - D_1D_2\varphi_1\varphi_2 - 1)/\varphi, \quad (3)$$

$$s' = \frac{n_0n_3(D_1 + D_2 - D_1D_2\varphi_2) - ss'_{F'}\varphi}{\varphi(s_F - s)},$$

where s is the distance of the object from the first surface of the doublet, s' is the distance of the image from the last surface of the doublet. Optical powers $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ of individual refractive surfaces are given by the following formulas:

$$\varphi_1 = (n_1 - n_0)/r_1, \quad \varphi_2 = (n_2 - n_1)/r_2,$$

$$\varphi_3 = (n_3 - n_2)/r_3,$$

and it holds for the reduced values of thickness D_1 and D_2 :

$$D_1 = d_1/n_1, \quad D_2 = d_2/n_2.$$

As one can see from Fig. 1, it is possible to measure relatively easily the radii of curvature r_1 and r_3 , overall central thickness of the doublet $d = d_1 + d_2$, positions of the object and image focal points s_F and $s'_{F'}$, and focal length $f' = n_3/\varphi$ between the second principal plane and the image focal point F' of the doublet using the methods given, for example, in [7–15]. Next, it is possible to measure thicknesses d_1 and d_2 of the individual lenses using available commercial devices, e.g., Trioptics' OptiCentric [13].

Suppose now that the doublet is in the air, i.e., it holds for the object and image refractive indices $n_0 = 1, n_3 = 1$. Such a situation is the most common in practical situations. As was already stated in the introduction, the aim of this work is to determine the internal parameters n_1, n_2 , and r_2 of the cemented doublet if one is able to measure radius r_1 of its first surface, radius r_3 of its last surface, thickness d_1 of the first lens and d_2 of the second lens, the focal length $f' = 1/\varphi$ (where φ

is the optical power of the doublet when the surrounding media is air), position s_F of the object focal point, and position $s'_{F'}$ of the image focal point. The remaining parameters (n_1, n_2 , and r_2) then can be calculated as follows.

Solution of the system of Eqs. (1)–(3) gives the following formula for the index of refraction n_2 of the second lens:

$$n_2 = \frac{d_2 + \varphi^2 d_2 (s_F s'_{F'} + r_1 r_3 - r_3 s_F - r_1 s'_{F'})}{d_2 + r_3 - \varphi r_3 (d_1 - r_1) + \varphi^2 s'_{F'} (d_2 s_F + r_3 s_F - d_2 r_1 - r_1 r_3)}. \quad (4)$$

Afterwards, the index of refraction n_1 of the first lens can be calculated as follows:

$$n_1 = \frac{\varphi d_1 n_2 r_3 (r_1 - s_F)}{r_1 (d_2 n_2 - d_2 + n_2 r_3) - \varphi n_2 r_3 s_F (d_1 - r_1)}. \quad (5)$$

Finally, one can find the value of the second radius r_2 of the doublet with one of the following formulas:

$$r_2 = -\frac{d_1 \left[\frac{d_2 (n_2 - 1)}{n_2 r_3} + 1 \right] (n_1 - n_2)}{n_1 \left[\varphi s_F + \frac{d_1 (n_2 - 1)}{n_1 r_3} + \frac{d_2 (n_2 - 1)}{n_2 r_3} + 1 \right]}, \quad (6)$$

$$r_2 = -\frac{d_2 \left[\frac{d_1 (n_1 - 1)}{n_1 r_1} - 1 \right] (n_1 - n_2)}{n_2 \left[\varphi s'_{F'} + \frac{d_1 (n_1 - 1)}{n_1 r_1} + \frac{d_2 (n_1 - 1)}{n_2 r_1} - 1 \right]}. \quad (7)$$

In summary, one should follow the steps below for the calculation of inner parameters of the doublet:

1. The index of refraction n_2 of the second lens is calculated with Eq. (4).
2. Such a value is used in Eq. (5) and the index of refraction n_1 of the first lens can be calculated.
3. Using the values of indices of refraction in Eq. (6) or Eq. (7) gives the value of radius r_2 of the doublet.

The issue of inner parameters determination is therefore solved.

3. EXAMPLE

In this example the authors will present the proposed novel method of the calculation of parameters of the doublet in the case when the refractive indices n_1, n_2 and radius r_2 of the doublet are not known. As a comparison with the authors' previous method [15], the same cemented doublet will be used.

Consider a cemented doublet having the following nominal parameters: $r_1 = 57.008$ mm, $r_2 = -40.738$ mm, $r_3 = -173.786$ mm, $d_1 = 8$ mm, $d_2 = 4$ mm, $n_1 = 1.51874$ (Schott N-BK7), $n_2 = 1.62409$ (Schott F2) for the wavelength $\lambda = 546$ nm. Further, one obtains $f' = 100.029$ mm, $s_F = -98.603$ mm, $s'_{F'} = 93.599$ mm.

Measurements of individual parameters of the doublets were carried out in laboratories of Meopta-optika company [18]. Measurements were performed using several measuring instruments in order to obtain a higher reliability. Measurements of parameters f', s_F , and $s'_{F'}$ were carried out using OTS 200 from OEG-Messtechnik, OptiCentric MOT 2R from Trioptics, and the interferometer OWI 150 XT from Optotech. Measurements of the radii of curvatures were performed using the interferometer OWI 150 XT from

Table 1. Comparison of Nominal and Calculated Values of Inner Parameters of Cemented Doublet

	n_1	n_2	r_2 [mm]
Nominal Values	1.51874	1.62409	-40.738
Calculated Values	1.51856	1.62373	-40.743

Optotech and the interferometer Zygo Verifire ATZ from ZYGO. The following values for individual parameters were obtained: $r_{1m} = 57.036$ mm, $r_{3m} = -174.068$ mm, $s'_{F'm} = 93.696$ mm, $s_{Fm} = -98.704$ mm, $f'_m = 100.128$ mm, $d_{1m} = 8.001$ mm, and $d_{2m} = 3.998$ mm. The accuracy of the measured parameters was as follows. The accuracy of the measurements of parameters f' , s_F , and $s'_{F'}$ was $\pm 0.03\%$, the accuracy of the measurement of the thickness (d_1, d_2) was ± 0.001 mm with the use of the device Trioptics OptiCentric, and the accuracy of the radii of curvature measurement was ± 0.003 mm. Using the measured values and Eqs. (4)–(7) one can obtain the unknown parameters (n_1, n_2, r_2).

The nominal and resulting calculated values of the internal doublet parameters are given in Table 1. As one can see, the differences of the calculated parameters from the nominal parameters are very small, and the proposed method is efficient for the described problem of the determination of the inner parameters of the doublet in practice.

4. CONCLUSION

The paper presented novel and simple explicit formulas for the calculation of the inner parameters of a cemented doublet (n_1, n_2, r_2) based only on the knowledge of the first and back radii of curvature (r_1, r_3), central thickness (d_1, d_2), and the doublet's paraxial parameters, i.e., focal lengths f' , position of the object focal point s_F , and position of the image focal point $s'_{F'}$. It was shown with the example of a real doublet that the proposed method is very efficient for the described issue of

the determination of the inner doublet's parameters and that the method can find practical usage.

Funding. Grant Agency of the Czech Technical University in Prague (SGS15/125/OHK1/2T/11).

Acknowledgment. The authors would like to thank Dr. Ševčík from Meopta-optika company for the performed measurements of doublets.

REFERENCES

1. M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics* (Interscience, 1958).
2. A. Mikš, *Applied Optics* (Czech Technical University, 2009).
3. M. Berek, *Grundlagen der Praktischen Optik* (Walter de Gruyter & Co., 1970).
4. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Oxford University, 1964).
5. W. T. Welford, *Aberrations of the Symmetrical Optical Systems* (Academic, 1974).
6. A. Mikš, J. Novak, and P. Novak, "Generalized refractive tunable-focus lens and its imaging characteristics," *Opt. Express* **18**, 9034–9047 (2010).
7. D. Malacara, *Optical Shop Testing* (Wiley, 2007).
8. G. V. Kreopalova, N. L. Lazareva, and D. T. Puriajev, *Optical Measurements* (Maschinostroenie, 1987).
9. J. Picht, *Meß- und Prüfmethode der optischen Fertigung* (Akademie-Verlag, 1953).
10. J. Flügge, *Einführung in die Messung der optischen Grundgrößen* (Verlag Braun, 1954).
11. B. Dorband, H. Miller, and H. Gross, *Handbook of Optical Systems*, Vol. 5 of Metrology of Optical Components and Systems (Wiley, 2012).
12. <http://www.zygo.com/>.
13. <http://www.trioptics.com/>.
14. <http://www.oeg-messtechnik.de/>.
15. A. Mikš and J. Novak, "Experimental method of determination of parameters of cemented doublet," *Appl. Opt.* **54**, 7940–7943 (2015).
16. L. E. Scales, *Introduction to Non-linear Optimization* (Springer, 1985).
17. E. M. T. Hendrix and B. G. Toth, *Introduction to Nonlinear and Global Optimization* (Springer, 2010).
18. <http://www.meopta.com/en/>.



Edge spread function of Talbot phenomenon



Antonín Mikš, Petr Pokorný*

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thakurova 6, 166 29 Prague, Czech Republic

ARTICLE INFO

Article history:

Received 7 April 2016

Accepted 1 June 2016

Keywords:

Diffraction theory
Talbot phenomenon
Self-imaging
Edge spread function

ABSTRACT

The paper presents and analyses the edge spread function of Talbot phenomenon—self-imaging of a periodical structure in given distances behind a template, if the template is illuminated by a plane wave. This phenomenon has many applications in optical metrology and in industry. Detailed mathematical analysis with an amplitude grating illuminated by a monochromatic plane wave is performed, and a simple relation for the calculation of the edge spread function width of Talbot imaging of Ronchi grating is shown which allows a simple analysis of the edge spread function for different grating sizes without any difficult calculations. The results bring a complete insight to the problematics and it can serve as a great theoretical background in many applications which utilize Talbot phenomenon.

© 2016 Elsevier GmbH. All rights reserved.

1. Introduction

English scientist William Henry Fox Talbot (1800–1877) discovered a phenomenon in 1836 [1,2] and he described the following properties of a propagating light field. When the wave field (e.g., a plane wave) impinges any periodical structure (for example an amplitude grating or a field of holes in an opaque iris) the unique distances from such the structure exist where the structure is self-imaged. Such a phenomenon – Talbot phenomenon – has many applications in optical metrology, interferometry, or microelectronics [2–11].

This paper presents a detailed mathematical description of such a phenomenon for an amplitude grating illuminated by a plane wave. A simple formula for a calculation of the edge spread function width, which affects the quality of Talbot image, is shown. Such a study of the edge spread function of Talbot phenomenon on the amplitude grating has not been published yet. The results of the analysis bring a complete insight to the problematics and it can serve as a great theoretical background in many applications where Talbot phenomenon is used.

2. Mathematical description of Talbot phenomenon

Let one describes a mathematical theory of the phenomenon on the example of an amplitude grating. Suppose the amplitude diffraction grating (Ronchi grating) shown in Fig. 1 where p denotes period and b is width of a transparent part of the grating.

* Corresponding author.

E-mail address: petr.pokorny@fsv.cvut.cz (P. Pokorný).

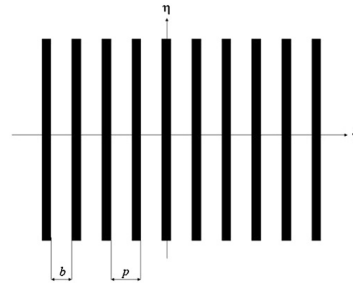


Fig. 1. Amplitude grating.

The grating shown in Fig. 1 can be described with the following formula:

$$f(\xi) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left(\frac{\xi - np}{b} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left(i \frac{2\pi}{p} n \xi \right). \quad (1)$$

In Eq. (1) i denotes imaginary part ($i = \sqrt{-1}$), A is amplitude transparency of the grating and Fourier coefficients c_n are given as follows [12,13]:

$$c_n = A \frac{b}{p} \text{sinc} \left(\frac{nb}{p} \right). \quad (2)$$

Without any loss of generality, one can suppose $A = 1$. Using Fresnel approximation in Sommerfeld diffraction formula [12–17], the complex amplitude $U(x, y, z)$ of a wave field in a point given by rectangular coordinates $[x, y, z]$ behind the grating can be described as follows:

$$U(x, y, z) = C \int_{-d}^d \int_{-c}^c U(\xi, \eta, 0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left(i \frac{2\pi}{p} n \xi \right) \times \exp \left[ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right] d\xi d\eta, \quad (3)$$

$$C = -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikz)}{z},$$

where $U(\xi, \eta, 0)$ denotes the wave field impinging the grating, $k = 2\pi/\lambda$ is wave number, λ is used wavelength, $2d$ is height and $2c$ is width of the grating, and (ξ, η) are coordinates in the grating's plane. Let one suppose a plane wave impinging the grating; afterwards, the generality of the study will not be lost with denoting $U(\xi, \eta, 0) = 1$. With the use of substitution:

$$\begin{aligned} t &= x - \xi, u = y - \eta, \alpha = \pi/\lambda z, \\ \beta &= -2\pi n/p, \gamma = -\beta x, \end{aligned} \quad (4)$$

the following formula can be used of the calculation of integrals in Eq. (3), it holds:

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \exp[i(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)] dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp \left[i \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right) \right] \int_{\varepsilon_1 \sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}^{\varepsilon_2 \sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} \exp(iv^2) dv. \quad (5)$$

Afterwards, Eq. (3) can be rewritten using Eq. (5) as follows:

$$U(x, y, z) = -\frac{i}{\pi} \exp(ikz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \exp(-i\beta x) \exp \left(-i \frac{\beta^2}{4\alpha} \right), \quad (6)$$

where

$$U_n = c_n [F(\theta_1) - F(\theta_2)] [F(\tau_1) - F(\tau_2)], \quad (7)$$

whereby

$$\begin{aligned}\tau_1 &= (x - c)\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}, \\ \tau_2 &= (x + c)\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}, \\ \theta_1 &= (y - d)\sqrt{\alpha}, \\ \theta_2 &= (y + d)\sqrt{\alpha}.\end{aligned}\quad (8)$$

$F(\tau)$ in Eq. (7) is given with the following formula:

$$\begin{aligned}F(\tau) &= \int_0^\tau \exp(i\zeta^2) d\zeta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[C(\tau\sqrt{2/\pi}) + iS(\tau\sqrt{2/\pi}) \right].\end{aligned}\quad (9)$$

In Eq. (9), C and S denote Fresnel integrals [15,16,18]. Intensity of the field in given point $[x, y, z]$ is then calculated with the formula:

$$\begin{aligned}I(x, y, z) &= |U(x, y, z)|^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \exp(-i\beta x) \exp\left(-i\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \right|^2.\end{aligned}\quad (10)$$

Suppose now that $z = Nz_T$, where $z_T = 2p^2/\lambda$ and $N = 1, 2, 3, \dots$. Afterwards, the third component in Eq. (10) is equal to one. The distance z_T is so called Talbot distance [2,3]. The intensity of the field in Talbot distance is then given as follows:

$$I(x, y, Nz_T) = \frac{1}{\pi^2} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(i\frac{2\pi n}{p}x\right) \right|^2, \quad (11)$$

where

$$A_n = c_n [F(\theta_{1n}) - F(\theta_{2n})] [F(\tau_{1n}) - F(\tau_{2n})], \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\theta_{1n} &= \frac{y-d}{p} \sqrt{\frac{\pi}{2N}}, \quad \theta_{2n} = \frac{y+d}{p} \sqrt{\frac{\pi}{2N}}, \\ \tau_{1n} &= \sqrt{\frac{\pi}{2N}} \left(\frac{x-c}{p} - 2Nn \right), \quad \tau_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2N}} \left(\frac{x+c}{p} - 2Nn \right).\end{aligned}\quad (13)$$

In the case of the grating with infinite size, i.e. $c \rightarrow \infty$, $d \rightarrow \infty$, it holds: $A_n \rightarrow c_n$. Therefore, Talbot image of the grating is its own copy. For a finite sized grating, it is obvious from Eq. (11) that Talbot image has the same period as the grating. However, while the grating is defined with Fourier coefficients c_n , its Talbot image has different Fourier coefficients A_n . Moreover, one can see from Eqs. (11) and (13) that Talbot image of Ronchi grating does not depend on the used wavelength.

3. Edge spread function of Talbot phenomenon

Let one study the effect of finite size of the grating on its Talbot image now. Because the size of the grating is limited the edge of the image will not be steep as in the case of infinite grating. It will be gradual and the transition will have given width. Function describing such a transition is called the edge spread function. The main focus of the following study will be given on the effect of finite size of the grating on the edge spread function.

Let one define the width Δ of the edge spread function (similarly as in the theory of optical imaging) as a distance between x -coordinates of the points where the tangent to the edge spread function intersects the top and the bottom of the pulse; therefore, it holds: $\Delta = -A/I'(x_i)$, where A is amplitude of the pulse and $I'(x_i)$ is derivative of Eq. (11) in the inflection point on the side of the transition with x -coordinate x_i . In Fig. 2 the situation for the grating with once amplitude ($A = 1$) and size $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ is shown. For the edge spread function width Δ it holds: $\Delta = 1.54 \text{ }\mu\text{m}$. Summation in Eq. (11) is approximated for n from $-N_{\max}$ to $+N_{\max}$. One can see Gibbs phenomenon as well, as a result of approximation of discontinuous functions (grating) with Fourier series [12,19].

One of the criteria for an image quality in the theory of optical imaging is an area under the edge spread function. The smaller the area the better image quality of the optical system from the point of edge sharpness view. Such a situation for the aforementioned Talbot imaging is shown in Fig. 2 with yellow colour.

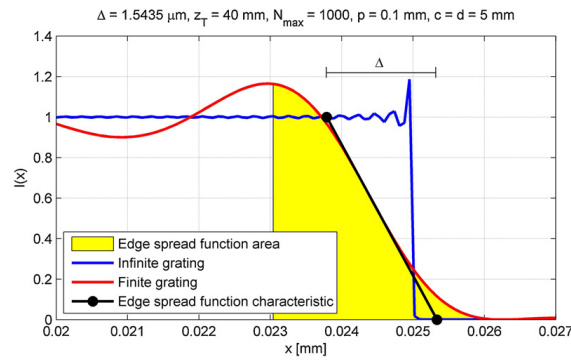


Fig. 2. Edge spread function for grating with size 10 mm × 10 mm. (For interpretation of the references to colour in the text, the reader is referred to the web version of this article.)

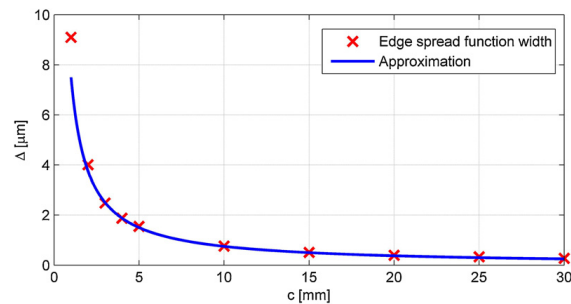


Fig. 3. Dependency of edge spread function width Δ on grating size for grating period $p = 0.1$ mm.

Fig. 3 shows a dependency of the edge spread function on the grating size. Let one suppose the grating with size $2c \times 2c$ (i.e., $c = d$) and period p . Analysis of the aforementioned formulas gives the following approximate expression for the edge spread function width Δ , it holds:

$$\Delta \approx 0.75 p^2 / c. \quad (14)$$

One can use Eq. (14) for an easy calculation of the edge spread function width of Talbot imaging; the formula gives results with an error less than 10% for gratings where $p/c > 0.1$.

4. Effect of used wavelength on quality of Talbot image

Let one study the effect of a spectral width $d\lambda$ of a used light on the quality of Talbot imaging with a grating. As is obvious from the aforementioned formulas, Talbot distance $z_T = 2p^2/\lambda$ is wavelength dependent. For the case of small changes of the wavelength, i.e. $d\lambda \ll \lambda$, the change of Talbot distance can be calculated as follows:

$$dz_T = -2 \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2 d\lambda = -z_T \left(\frac{d\lambda}{\lambda} \right). \quad (15)$$

As is obvious from Eq. (15), the change in Talbot distance is dependent on the ratio p/λ squared for a given spectral width $d\lambda$. For usual cases in practice, where period p is much larger than used average wavelength λ , the change in Talbot distance will be very significant. For an example, the grating with period $p = 0.1$ mm, used average wavelength $\lambda = 500$ nm, and spectral width $d\lambda = 20$ nm cause change in Talbot distance $dz_T = -1.6$ mm which is a significant value compared to Talbot distance $z_T = 40$ mm. Usage of Talbot phenomenon in practical technical applications requires sources of light with very tight spectral width (lasers, laser diodes, etc.). **Fig. 4** shows the edge spread functions dependent on used wavelengths for a grating illumination. The calculation was done for a plane distanced from the grating by Talbot distance for wavelength $\lambda = 500$ nm ($z_T = 40$ mm). As is obvious, the small change in wavelength ($d\lambda = 1$ nm) cause significant changes in intensity profiles. Therefore, the grating image will be blurred in such an image plane.

5. Conclusion

Talbot phenomenon—a self-imaging of a periodical structure in given distances behind its template, when the structure is illuminated by a plane or a spherical wave, has many practical applications in optical metrology and in industry. The paper presented an analysis of the effect of a finite size of the grating on the edge spread function of Talbot image. The effect of a spectral width on Talbot distance was studied as well. It was shown that Talbot image of Ronchi finite grating has the same period as in the case of infinite grating; however, the amplitudes are different and they are not dependent on the used

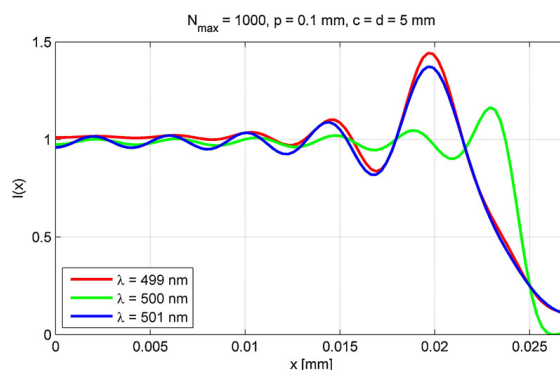


Fig. 4. The effect of wavelength changes on edge spread function for grating with size 10 mm × 10 mm and period $p=0.1$ mm.

wavelength which is used for an illumination. Afterwards, it was shown that a small change of wavelength affects the edge spread function significantly. The simple relation for the calculation of the edge spread function width of Talbot imaging of Ronchi grating is shown. It allows the simple analysis of the edge spread function for different grating sizes without any difficult calculations.

Acknowledgement

This work was supported by the Grant Agency of the Czech Technical University in Prague, grant No. SGS15/125/OHK1/2T/11

References

- [1] W.H.F. Talbot, Facts relating to optical science No. IV, *Philos. Mag.* 9 (1836) 401–407.
- [2] K. Patorski, The self-imaging phenomenon and its applications, *Prog. Opt.* 27 (1989) 3–108.
- [3] J. Wen, Y. Zhang, M. Xiao, The Talbot effect: recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics, *Adv. Opt. Photon.* 5 (2013) 83–130.
- [4] D. Malacara, *Optical Shop Testing*, John Wiley & Sons, 2007.
- [5] J.C. Bhattacharya, Measurement of the refractive index using the Talbot effect and a moiré technique, *Appl. Opt.* 28 (1989) 2600–2604.
- [6] Y. Nakano, K. Murata, Measurements of phase objects using the Talbot effect and moiré techniques, *Appl. Opt.* 23 (1984) 2296–2299.
- [7] G.S. Spagnolo, D. Ambrosini, D. Paoletti, Displacement measurement using the Talbot effect with a Ronchi grating, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 4 (2002) S376–80.
- [8] L. Wang, D. Yun, Talbot effect and its application in measurement of in-plane strain, *Opt. Laser Eng.* 18 (1993) 109–114.
- [9] X. Jin, J. Zhang, J. Bai, C. Hou, X. Hou, Calibration method for high-accuracy measurement of long focal length with Talbot interferometry, *Appl. Opt.* 51 (2012) 2407–2413.
- [10] S. Lee, Talbot interferometry for measuring the focal length of a lens without moiré fringes, *J. Opt. Soc. Korea* 19 (2015) 165–168.
- [11] A. Isoyan, F. Jiang, Y.C. Cheng, F. Cerrina, P. Wachulak, L. Urbanski, et al., Talbot lithography: self-imaging of complex structures, *J. Vac. Sci. Technol. B* 27 (6) (2009) 2931–2937.
- [12] R.N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, 2000.
- [13] J.D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*, John Wiley & Sons, 1978.
- [14] A. Mikš, *Applied Optics*, CTU in Prague, Prague, 2009.
- [15] J. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [16] A. Papoulis, *Systems and Transforms with Applications in Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [17] O.K. Ersoy, *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*, John Wiley & Sons, 2007.
- [18] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 2007.
- [19] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physics*, Academic Press, New York, 2005.

Use of diffraction grating for measuring the focal length and distortion of optical systems

ANTONIN MIKS AND PETR POKORNY*

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thakurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic
*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 27 August 2015; revised 4 November 2015; accepted 4 November 2015; posted 4 November 2015 (Doc. ID 248855);
published 30 November 2015

The paper presents an experimentally simple, accurate, and inexpensive method for measuring the focal length and distortion of optical systems using a diffraction grating, where both of the properties are determined from the transversal distances of diffraction maximums in one measurement. The proposed approach does not require any special components or any expensive equipment. A detailed theoretical analysis is performed, and the estimation of uncertainties is studied as well. Afterward, the method is demonstrated with a computer simulation and experimental measurement, and compared with commercially available measurement devices. It is shown that the method provides sufficiently accurate results for many practical applications; therefore, it is appropriate for laboratory testing and for industrial applications. © 2015 Optical Society of America

OCIS codes: (050.1950) Diffraction gratings; (120.3940) Metrology; (120.4630) Optical inspection; (120.4820) Optical systems; (220.4840) Testing.

<http://dx.doi.org/10.1364/AO.54.010200>

1. INTRODUCTION

Focal length [1–3] is a fundamental characteristic of optical systems, and it is very important to be able to measure its value for a given optical system. The current state of the art is described in many papers [4–31]. The methods differ in the complexity of their experimental equipment and the achievable precision of the measured focal length. The error in these measurements ranges from a fraction of a percent to a few percent [4–31].

Classical methods of measuring the focal length using conjugate distance equations are given in [5–14]. Usage of two diffraction gratings for the measurement of the focal length was presented in [15–22]. Such double gratings behind the lens under test generate a moiré effect, and the focal length is calculated from the evaluation of the moiré pattern. The methods' accuracy is in the range from 0.15% to 0.05% for long focal lengths [22]. The method proposed in this paper requires only one grating, and the process of evaluation is much simpler, as will be presented in the following parts.

The imaging quality of the optical system depends on the residual aberrations of the system [1–3]. The fidelity of the geometrical parameters of the image created by the optical system is characterized by an optical distortion [32]. For a chosen object point the image is not a point; it is formed by an energy distribution—a point spread function [1,3]. Afterward, the distortion is defined as a distance from the maximum of the point spread function to a paraxial image of the point [32]. The distortion of the optical system can be measured by many methods

[6–11], which are characterized by varying degrees of accuracy and experimental demands.

In the usual practice (e.g., in photography or cinematography), the focal length does not have to be known with a high accuracy. Therefore, it is useful to use some simple measurement method for its determination.

The aim of this work is to present a method for a measurement of the focal length and the distortion of the optical system with the use of a diffraction grating. To the authors' best knowledge, this simple and accurate method has not been published yet; therefore, it can expand the range of existing methods, and it can find utilization in many laboratory and industrial applications.

2. METHOD DESCRIPTION

In Fig. 1 the principal scheme of the measurement method is shown. A point source (A) is placed at the focal plane of a collimating lens (CL). The collimated beam is then directed toward a linear transmissive amplitude grating (G) where diffraction occurs. Such a phenomenon is very well known, and it can be described with the following formula [1]:

$$\sin \alpha_m = m\lambda/a = m\lambda N, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

In Eq. (1) a denotes the grating's period, m is the diffraction order, α_m is the diffraction angle of the m th diffraction order (the angle between the diffracted beam and the normal of the grating), λ is the wavelength of the used monochromatic light,

and N denotes the spatial frequency of the grating—that is, the number of grooves per unit of length. For simplicity and readability, only the zero (0), the plus first (+1), and the minus first (-1) diffraction orders are shown in Fig. 1.

The measured optical system is placed behind the diffraction grating, and the outgoing diffracted beams are focused in points $A^{(0)}$, $A^{(+1)}$, and $A^{(-1)}$. As was already mentioned in Section 1, the image of the point A will not be a point, but the energy distribution—the point spread function [1,3]—will be formed. In the sense of geometrical optics one can characterize the energy distribution with a circle of confusion—a spot diagram [2,32].

Let one suppose that the parallel beam of rays impinges the optical system under an angle of incidence α . It is known from the theory of geometrical optics [1–3] that for the optical system without any aberration such a beam will be focused on a point which is at a distance y from the optical axis, and the following formula holds for such a distance and the optical system in air [1–3]:

$$y = -f' \tan \alpha. \tag{2}$$

In Eq. (2) f' is the focal length of the optical system. If one measures the distance y and the angle α is known, the focal length f' of the optical system can be easily calculated with the use of Eq. (2).

In a general situation, the beam does not have to impinge on the diffraction grating perpendicularly. Suppose that the parallel beam is impinging on the diffraction grating G under an angle β measured from the grating's normal. Consequently, one gets [1]

$$a(\sin \alpha_m - \sin \beta) = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3}$$

Afterward, a diffraction angle α_m of the m th diffraction order can be calculated from Eq. (3) as follows:

$$\sin \alpha_m = \sin \beta + m\lambda/a. \tag{4}$$

Let one denotes an angle between the diffracted beam and the z axis as α_{mz} . With the use of Eq. (4) one gets the following formula for such an angle; it holds

$$\alpha_{mz} = \arcsin(\sin \beta + m\lambda/a) - \beta. \tag{5}$$

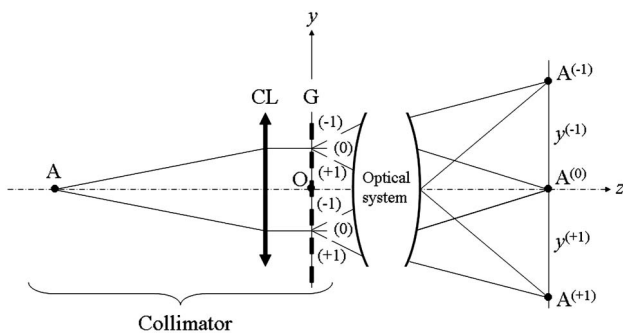


Fig. 1. Principal scheme of measurement device (A, point source; CL, collimating lens; G, diffraction grating; $A^{(m)}$, image of m th diffraction order). The focal length and distortion of an optical system can be calculated from transversal distances between diffraction maximums and the zero-order maximum.

The maximal angle of the grating's rotation β_{\max}^m is given according to Eq. (5) as follows:

$$\beta_{\max}^m = \arcsin(1 - m\lambda/a). \tag{6}$$

Figure 2 shows the dependency between the angles α_{mz} and β for the diffraction grating with the spatial frequency $N = 200$ lines/mm; the diffraction orders $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, and $m = 4$; and the wavelength $\lambda = 587$ nm. It is obvious that with the rotation of the diffraction grating by the angle β around the x axis one can continuously change the angle α_{mz} of the field of view of the optical system.

It is gradually arising from the aforementioned statements that if one measures the distance $y = y^{(+1)} = \overline{A^{(0)}A^{(+1)}}$ (or $y = y^{(-1)} = \overline{A^{(0)}A^{(-1)}}$) (see Fig. 1) for $\beta = 0$ and $m = 1$, the focal length f' of the optical system can be calculated from the following formula:

$$f' = -y^{(+1)} / \tan \alpha_{1z} = -y^{(+1)} \sqrt{a^2 - \lambda^2} / \lambda. \tag{7}$$

It is obvious from Eqs. (5) and (6) and Fig. 2 that the change in the angle β changes the distance $y_{\beta}^{(m)}$ of the energy centrum of the point spread function of the optical system. Therefore, if one measures the distances $y_{\beta}^{(m)}$ for different angles β of the grating's rotation, for example, for $m = 1$ and $m = 2$, both the distortion and the focal length of the optical system can be simply calculated. Let one denote $y_{0\beta}^{(m)} = -f' \tan \alpha_{mz}$ as a “paraxial image distance” of the point A from the point $A^{(0)}$. Afterward, the distortion δy of the optical system for the given paraxial image distance can be calculated as follows:

$$\delta y = y_{\beta}^{(m)} - y_{0\beta}^{(m)}. \tag{8}$$

The given issue of the measurement of the focal length and the distortion of the optical system is therefore simply solved.

Note that the same effect can be reached without the rotation of the diffraction grating by using several diffraction gratings with different periods a (with different spatial frequency N). The mechanical construction of such a measurement device with several gratings will be simpler; the angle of rotation does not have to be measured at all. During the last decades gratings with a variable frequency [33–38] and liquid-crystals-on-silicon based spatial light modulators [39,40] have been

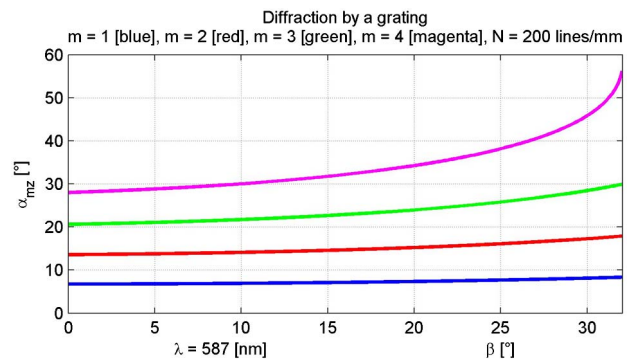


Fig. 2. Dependency between the angle α_{mz} of a field of view of the optical system and the rotation angle β of the diffraction grating for $N = 200$ lines/mm, $m = 1$ (blue line), $m = 2$ (red line), $m = 3$ (green line), and $m = 4$ (magenta line).

developed. However, the quality and temporary stability of such commercially available devices or generated structures do not fulfil the demands for the presented application. Another disadvantage of the usage of such devices is the additional electronics for generation of variable structures. From this point of view the classical diffraction gratings are still the best option and the most suitable solution for practical applications.

For the elimination of the aberrations of the optical system on the measured values, the F -number of the tested system should be set to a high value, for example, $F = 10$.

The measurement of the focal length of the optical system will proceed as follows:

1. The collimator with the diffraction grating without rotation ($\beta = 0$) is placed in front of the tested optical system, and the collimator's optical axis is aligned to be parallel with the optical axis of the tested system.

2. The position of the first diffraction order ($m = +1$) $y^{(+1)} = \overline{A^{(0)}A^{(+1)}}$ ($y^{(+1)} < 0$ for $f' > 0$) is measured, and the focal length of the tested optical system is calculated with Eq. (7); it holds $f'^{(+1)} = -y^{(+1)}(a^2 - \lambda^2)^{1/2}/\lambda$. Afterward, the distance $y^{(-1)} = \overline{A^{(0)}A^{(-1)}}$ is measured, and the focal length for the minus first diffraction order ($m = -1$) is calculated; it holds $f'^{(-1)} = y^{(-1)}(a^2 - \lambda^2)^{1/2}/\lambda$. The resulting focal length of the optical system is then calculated as follows: $f' = (f'^{(+1)} + f'^{(-1)})/2$.

The focal length f' is therefore calculated. This result is used for the calculation of the distortion of the optical system. However, this value is not explicitly equal to the paraxial focal length because the measured values $y^{(+1)}$ and $y^{(-1)}$ differ from the paraxial ones by the distortion of the optical system. Nevertheless, if the values $y^{(+1)}$ and $y^{(-1)}$ are smaller than the quarter of the semidiameter of the field of view of the tested optical system (it can be adjusted by the diffraction grating with appropriate spatial frequency N), the effect of the distortion can be practically neglected. Afterward, the measured focal length can be considered as the paraxial focal length of the tested optical system.

The measurement of the distortion of the optical system proceeds as follows:

3. The positions of maximums of the higher diffraction orders than $m = 1$ are measured with $\beta = 0$, that is, values $y^{(+m)} = \overline{A^{(0)}A^{(+m)}}$ and $y^{(-m)} = \overline{A^{(0)}A^{(-m)}}$. Afterward, the value $\bar{y}^{(+m)} = (y^{(+m)} - y^{(-m)})/2$ is calculated.

4. The value of $\tan \alpha_{mz} = m\lambda/[a^2 - (m\lambda)^2]^{1/2}$ is calculated with the "paraxial image height" $y_{0\beta}^{(m)} = -f' \tan \alpha_{mz}$, where the focal length f' is known from paragraph 2.

5. The distortion belonging to such paraxial image height $y_{0\beta}^{(+m)}$ is given with Eq. (8); it holds $\delta y = \bar{y}^{(+m)} - y_{0\beta}^{(+m)}$.

The distortion for the paraxial image height $y_{0\beta}^{(+m)}$ is therefore calculated for the diffraction grating perpendicular to the optical axis ($\beta = 0$). The distortion of different paraxial image heights can be calculated with the following procedure (similarly as in the previous paragraphs).

6. The diffraction grating is rotated by the angle β (or it is changed with a different one with higher spatial frequency and

$\beta = 0$); the angle α_{mz} is calculated from the formula $\alpha_{mz} = \arcsin(\sin \beta + m\lambda/a) - \beta$, and the paraxial image height from the formula $y_{0\beta}^{(m)} = -f' \tan \alpha_{mz}$.

7. The positions of the first and the second diffraction orders are measured, namely, $y_{\beta}^{(\pm m)} = \overline{A^{(0)}A^{(\pm m)}}$. Afterward, the value $\bar{y}_{\beta}^{(m)} = (y_{\beta}^{(+m)} - y_{\beta}^{(-m)})/2$ is calculated.

8. The distortion belonging to the paraxial image height $y_{0\beta}^{(m)}$ is afterward calculated as follows: $\delta y_{\beta}^{(m)} = \bar{y}_{\beta}^{(m)} - y_{0\beta}^{(m)}$.

The issue of the determination of the distortion of the optical system is therefore solved.

3. MEASUREMENT ERRORS AND UNCERTAINTY ANALYSIS

It was already stated above that one of the sources of error is the uncertainty of determination of the paraxial focal length caused by the optical system's distortion. As is known, the distortion of the optical system for small angles of the field of view is described enough accurately (in the sense of geometrical optics) by the theory of aberrations of the third order, and one can express the distortion $\delta y'_D$ by the following approximate formula [32]:

$$\delta y'_D = -\frac{1}{2}(S_{II}A_M'^2 tg w' + S_V tg^3 w'). \quad (9)$$

In Eq. (9) S_{II} is the coefficient of coma, S_V is the coefficient of distortion, $2w'$ is the angle of the field of view in the image space, and A_M' is the maximal numerical aperture of the optical system in the image space. It can be shown that the distortion of almost every optical system is practically zero for small angles of the field of view (until approx. 5°) [41–44]. Therefore, the value of the paraxial focal length of the tested optical system can be considered unaffected by the distortion.

In Fig. 3 an example of aberrations of the objective Tessar (AKLIN USP 2,165,328 [42]) with the focal length 99.767 mm is shown for the half-angle of the field of view

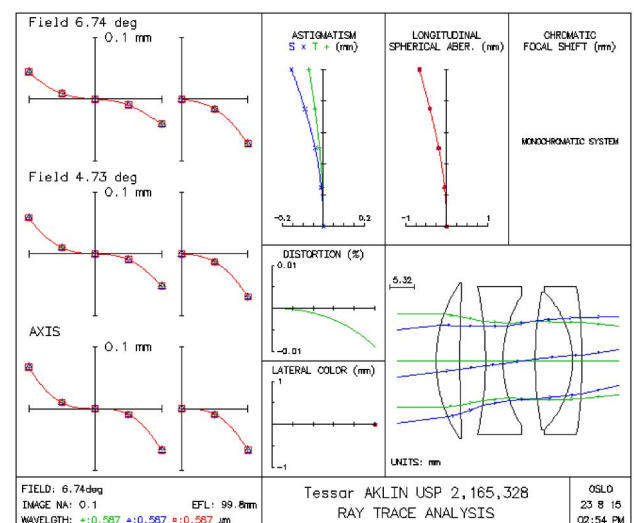


Fig. 3. Aberrations of objective Tessar $f' = 100$ mm for the half-angle of the field of view $w = 6.74^\circ$ and for the wavelength $\lambda = 578$ nm.

$w = 6.742^\circ$ (in object space) and for the wavelength 578 nm. Such an angle of the field of view corresponds to a diffraction angle of the first diffraction order ($m = 1$) of a grating with spatial frequency $N = 200$ lines/mm. The coefficients of coma and distortion of the objective are $S_{II} = 1.63$, $S_V = -0.705$. As is obvious from Fig. 3, the distortion is less than 0.01% for the image height $y = 11.794$ mm ($w' = 7.385^\circ$, $A'_M = 0.1$). Therefore, the effect of the distortion on the paraxial focal length is negligible. The calculation was performed in the OSLO software [45].

Let us study the uncertainty of evaluated values of the measurement now. Imperfections of the used diffraction grating, an unstable source of light, misalignment of components of the measurement setup, and the quality of the used sensor can affect the results of the measurement procedure.

First, one can analyze the uncertainty in the image height, $u(y_\beta^{(m)})$, for a given image height, $y_\beta^{(m)}$. For the rotated diffraction grating about the angle β one can use Eqs. (2) and (5), that is, $y_\beta^{(m)} = -f' \tan \alpha_{mz}$, where $\alpha_{mz} = \arcsin(\sin \beta + m\lambda/a) - \beta$. Suppose now that systematic errors of the measurement are suppressed and random errors are very small in comparison to absolute values of the mutually independent parent variables, that is, the effect of absolute errors can be compared with the value of a total differential [46] of the functional value of the image height $y_\beta^{(m)}$. Moreover, suppose that the errors have an even probability distribution (one can use such an assumption because the errors of the aforementioned values can be positive or negative as well, and small errors are more probable than the large ones). Without the loss of generality such conditions can be accepted for the studied situation. Therefore, the effect of uncertainties can be described with the law of variance propagation [46–48], and the estimation of the uncertainty $u(y_\beta^{(m)})$ of the image height $y_\beta^{(m)}$ is given with the following formula:

$$u(y_\beta^{(m)}) = \pm \sqrt{\tan^2 \alpha_{mz} u^2(f') + (U_G^{(m)})^2 + u^2(r)}, \quad (10)$$

where

$$U_G^{(m)} = \frac{f'}{\cos^2 \alpha_{mz}} [(U_\beta^{(m)})^2 u^2(\beta) + (U_a^{(m)})^2 u^2(a) + (U_\lambda^{(m)})^2 u^2(\lambda)]^{1/2},$$

$$U_\beta^{(m)} = 1 - \frac{\cos \beta}{\cos \alpha_m}, \quad U_a^{(m)} = \frac{m\lambda}{a^2 \cos \alpha_m},$$

$$U_\lambda^{(m)} = \frac{-m}{a \cos \alpha_m}, \quad \alpha_m = \arcsin(\sin \beta + m\lambda/a),$$

$u(f')$ is the uncertainty in the focal length, $u(\beta)$ is the uncertainty in the angle of the diffraction grating's rotation, $u(a)$ is the uncertainty in the grating's period, $u(\lambda)$ is the uncertainty in the wavelength, and $u(r)$ denotes the uncertainty of the measured image height, which has to be considered according to the accuracy of the used reading device (e.g., an objective microscope, the resolution of digital sensor).

The estimation of the uncertainty of the focal length calculated with the use of paragraph 2 of the aforementioned measurement procedure can be expressed with a similar approach.

With the use of the law of variance propagation [46–48] and after an elementary rearrangement, one gets

$$u(f') = \pm \sqrt{\frac{1}{2} [(yK)^2 u^2(a) + (ayK/\lambda)^2 u^2(\lambda) + (f'/y)^2 u^2(y)]}, \quad (11)$$

where $K = a/[\lambda(a^2 - \lambda^2)^{1/2}]$ and $u(y)$ is calculated with Eq. (10) for $\beta = 0$ and $m = 1$ (for the angle $\beta = 0$ the following equality holds: $u(y_{\beta=0}^{(+1)}) = u(y_{\beta=0}^{(-1)})$).

The estimation of uncertainty of the distortion of the optical system can be derived with the use of Eq. (10), because the

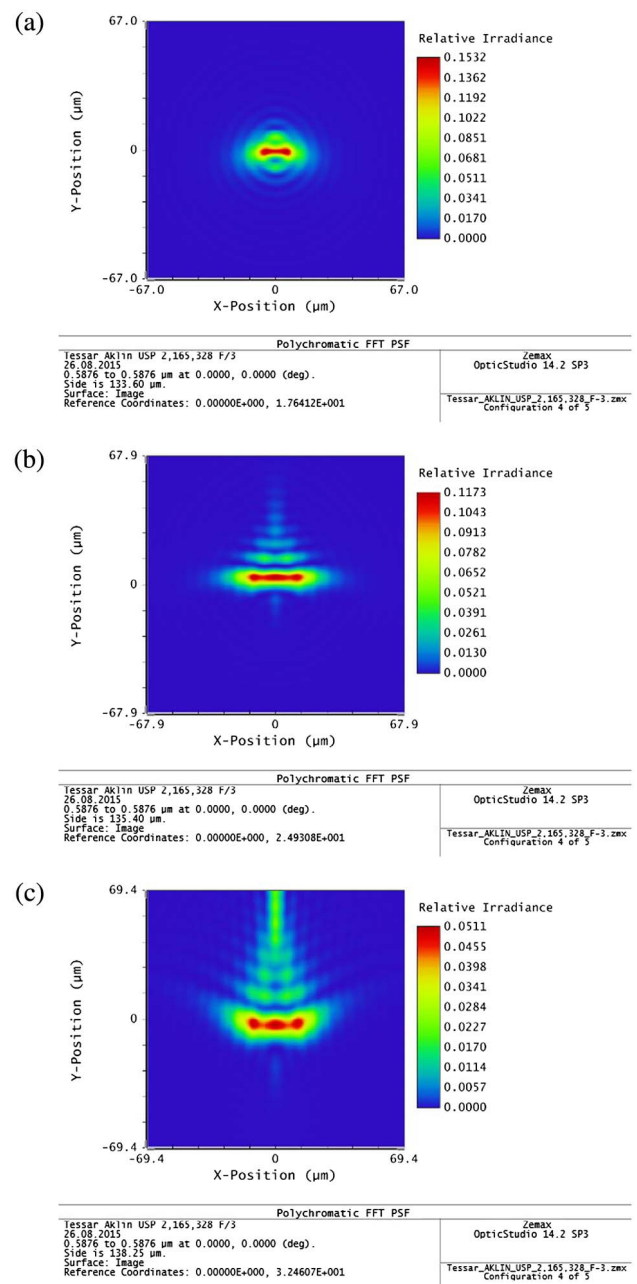


Fig. 4. Point spread functions in the paraxial image focal plane for the objective Tessar $f' = 100$ mm for the angle of the field of view α_{mz} equal (a) 10° , (b) 14° , and (c) 18° and for the diameter of the input beam $D = 10$ mm.

value of the paraxial image height is present in Eq. (8) for the calculation of the distortion. Next, the uncertainty in determination of the position of the diffraction orders' maximums will affect the result. Applying the law of variance propagation [46–48] gives the following formula for the uncertainty $u(\delta y_\beta^{(m)})$ of the distortion of the optical system; it holds

$$u(\delta y_\beta^{(m)}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{u^2(r) + 2u^2(y_{0\beta}^{(m)})}, \quad (12)$$

where $u(r)$ denotes the uncertainty in determination of the position of diffraction orders' maximums, and $u(y_{0\beta}^{(m)})$ is calculated with Eq. (10) for $u(r) = 0$.

The last unknown information for the uncertainty analysis is the expression of uncertainties $u(x)$ of input variables x . The manufacturers usually provide estimations of absolute errors ($\Delta(x)$), peak-to-valley values (PV(x)), or root-mean-square values (RMS(x)). If one assumes a normal probability distribution of errors with 95% confidence interval, the estimation of the uncertainties of variable x can be calculated as follows: $u(x) \approx \Delta(x)/1.96 \approx \text{PV}(x)/3 \approx \text{RMS}(x)$.

The given issue of estimation of the uncertainty of the focal length and the uncertainty of the distortion of the tested optical system for paraxial image heights is therefore solved.

4. SIMULATION OF MEASUREMENT METHOD

The measurement of the focal length and the distortion of an objective Tessar (AKLIN USP 2,165,328 [42]) was simulated in the software Zemax OpticStudio [49]. A fictive diffraction grating was placed in front of the objective perpendicularly ($\beta = 0$) to an optical axis. The spatial frequency of the grating was changed according the chosen angle of the field of view α_{mz} for the second diffraction order; the frequency is given with the following formula: $N = \sin \alpha_{mz} / (m\lambda)$. The wavelength used was 587 nm. In Fig. 4 the point spread functions in the paraxial image focal plane are shown for the angles of the field of view 10°, 14°, and 18° and for a diameter of an input beam $D = 10$ mm.

Similarly, the point spread functions were simulated for different angles of the field of view, and the positions of the diffraction maximums (energy centres) were registered. The evaluation of the distortion from the second diffraction orders with the procedure described in Section 2 (paragraphs 3–8) are shown in Table 1. The calculated distortion corresponds with a direct calculation with Zemax OpticStudio [49]. The following values were chosen for the estimation of uncertainty: $u(\lambda) = \pm 2.3e-2$ nm (corresponds to a temperature stability

$d\lambda/dT = 0.045$ nm/K), $u(a) = \pm 1.3e-7$ mm (corresponds to an error 0.01 lines/mm), $u(r) = \pm 2.6e-3$ mm, $u(\beta) = \pm 0.001^\circ$. The focal length was calculated according the procedure described in paragraphs 1 and 2 in Section 2 from the position of the first diffraction maximums; it holds: $f' = 99.975$ mm, $u(f') = \pm 0.016$ mm.

5. EXPERIMENTAL VERIFICATION OF THE METHOD ON THE MEASUREMENT OF FOCAL LENGTH

In Fig. 5(a) the laboratory setup for the experimental verification of the method for the measurement of the focal length of the optical system with the use of a diffraction grating is shown. Figure 5(b) shows the registered image of the diffraction pattern. A point source is realized with a distributed Bragg reflector laser diode ($\lambda = 631.6$ nm) coupled to a fiber. The uncertainty $u(\lambda) = \pm 2.3e-2$ nm corresponds to such a source. A diverging beam of rays is collimated with a doublet (Linios, $D = 25.4$ mm, $f' = 100$ mm), and a diffraction pattern formed by a grating [$a = 0.127$ mm, $\beta = 0$, $u(a) = \pm 0.01\%$, $u(\beta) = \pm 1'$] is registered on the CMOS camera (Thorlabs DCC1645C, pixel size 3.6 μm) after passage through a tested objective (COSMICAR 1:1.4, $f' = 75$ mm), where the F -number $F = 16$ was set by an iris aperture.

In Fig. 6 the evaluation of the registered image is shown. The evaluation algorithm determined the positions of the diffraction maximums according the zero diffraction order with the uncertainty $u(r) = \pm (\text{pixel size})/8$.

As is obvious from the positions of the diffraction maximums that the evaluated area lies approximately in a paraxial image space. Therefore, the distortion of the tested objective can be considered zero for such a measured range. The results

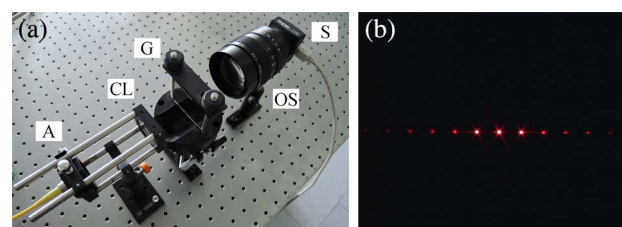


Fig. 5. Experimental verification of the method of measurement of the focal length with the use of diffraction grating: (a) laboratory setup (A, point source; CL, collimating lens; G, diffraction grating; OS, optical system under test; S, sensor), (b) registered diffraction pattern.

Table 1. Measurement of Distortion of the Objective Tessar $f' = 100$ mm for Different Angles of the Field of View

Angle of Field of View α_{mz} [°]	Frequency of Diffraction Grating N [lines/mm]	Measured Position of Second Diffraction Maximum $y^{(+2)}$ [mm]	Calculated Paraxial Image Height of Second Diffraction Maximum $y_{0\beta}^{(+2)}$ [mm]	Distortion δy [mm]	Uncertainty $u(\delta y)$ [mm]
10	147.91	-17.6412	-17.6468	0.0056 (-0.03%)	± 0.0034
12	177.10	-21.2605	-21.2730	0.0125 (-0.06%)	± 0.0040
14	206.07	-24.9308	-24.9535	0.0227 (-0.09%)	± 0.0045
16	234.78	-28.6613	-28.6990	0.0377 (-0.13%)	± 0.0052
18	263.22	-32.4607	-32.5204	0.0597 (-0.18%)	± 0.0058
20	291.33	-36.3358	-36.4299	0.0941 (-0.26%)	± 0.0065

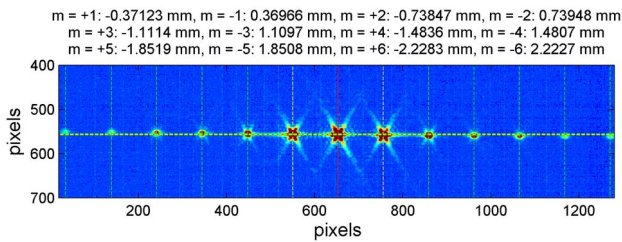


Fig. 6. Evaluation of registered diffraction pattern and calculated distances of diffraction maximums from the maximum of the zero order.

Table 2. Evaluated Focal Length of the Objective COSMICAR $f' = 75$ mm Calculated from Six Diffraction Maximums

Diffraction Order m	Focal Length f' [mm]
1	74.487
2	74.492
3	74.427
4	74.490
5	74.430
6	74.549

of the evaluated focal length are shown in Table 2. The values for diffraction orders higher than one were calculated with the formula stated in paragraph 4 of Section 2, namely, $f' = -y_{0\beta}^{(m)} / \tan \alpha_{mz}$, where $\tan \alpha_{mz} = m\lambda / [a^2 - (m\lambda)^2]^{1/2}$. The uncertainty of the focal length calculated from the first diffraction maximum is ± 0.066 mm ($\pm 0.09\%$).

The accuracy of the proposed method was verified by comparing the results with those of a commercially measurement device. The measurements of the focal length of the aforementioned objective were carried out using the OptiCentric MOT 2R from the company Trioptic [12] and with the OTS 200 from the company OEG-Messtechnik [50]. The computed focal length was $f' = 74.52 \pm 0.08$ mm. As is obvious, the results of the tested focal length are statistically the same because of the intersection of the confidence intervals.

6. CONCLUSION

The paper presented an experimentally simple, rather accurate and inexpensive method for a measurement of the focal length and the distortion of optical systems with the use of a diffraction grating. In a comparison with different methods [4–31], the proposed approach does not require any special components or any complicated, and therefore expensive, equipment. The detailed theoretical analysis was performed, and the estimation of uncertainties was studied as well. Afterward, the method was demonstrated via both computer simulations and experimental measurements. As is obvious from the results of the simulation and the experimental measurement, the method provides sufficiently accurate results for many practical applications. Moreover, there is no commercially available device measuring the focal length and the distortion of the optical system in one step. Therefore, the proposed method is

appropriate for laboratory testing and for industrial applications as well.

Funding. Czech Technical University in Prague (SGS15/125/OHK1/2T/11).

REFERENCES

1. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Oxford University, 1964).
2. M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics* (Interscience, 1958).
3. A. Miks, *Applied Optics* (Czech Technical University, 2009).
4. A. Miks and J. Novak, "Estimation of accuracy of optical measuring systems with respect to object distance," *Opt. Express* **19**, 14300–14314 (2011).
5. J. Nemeč, "Measurement of focal length," *Fine Mech. Opt.* **16**, 12–25 (1971).
6. D. Malacara, *Optical Shop Testing* (Wiley, 2007).
7. V. A. Afanasjev, *Optical Measurements* (High School, 1981).
8. G. V. Kreopalova, N. L. Lazareva, and D. T. Puriajev, *Optical Measurements* (Maschinostroenie, 1987).
9. J. Picht, *Mess- und Prüfmethoden der optischen Fertigung* (Akademie Verlag, 1953).
10. J. Flüggé, *Einführung in die Messung der optischen Grundgrößen* (Verlag Braun, 1954).
11. B. Dornand, H. Miller, and H. Gross, *Handbook of Optical Systems: Metrology of Optical Components and Systems* (Wiley, 2012), Vol. 5.
12. Trioptics, 2015, <http://www.trioptics.com/>.
13. Möeller-Wedel Optical, 2015, <http://www.moeller-wedel-optical.com/>.
14. L. Liao, F. C. Bráulio de Albuquerque, R. E. Parks, and J. M. Sasian, "Precision focal-length measurement using imaging conjugates," *Opt. Eng.* **51**, 113604 (2012).
15. I. Glatt and O. Kafri, "Determination of the focal length of nonparaxial lenses by moiré deflectometry," *Appl. Opt.* **26**, 2507–2508 (1987).
16. E. Keren, K. M. Kreske, and O. Kafri, "Universal method for determining the focal length of optical systems by moiré deflectometry," *Appl. Opt.* **27**, 1383–1385 (1988).
17. S. Trivedi, J. Dhanotia, and S. Prakash, "Measurement of focal length using phase shifted moiré interferometry," *Opt. Lasers Eng.* **51**, 776–782 (2013).
18. Y. Nakano and K. Murata, "Measurements of phase objects using the Talbot effect and moiré techniques," *Appl. Opt.* **23**, 2296–2299 (1984).
19. Y. Nakano and K. Murata, "Talbot interferometry for measuring the focal length of a lens," *Appl. Opt.* **24**, 3162–3166 (1985).
20. K. V. Sriram, M. P. Kothiyal, and R. S. Sirohi, "Direct determination of focal length by using Talbot interferometry," *Appl. Opt.* **31**, 5984–5987 (1992).
21. X. Jin, J. Zhang, J. Bai, Ch. Hou, and X. Hou, "Calibration method for high-accuracy measurement of long focal length with Talbot interferometry," *Appl. Opt.* **51**, 2407–2413 (2012).
22. J. Luo, J. Bai, J. Zhang, Ch. Hou, K. Wang, and X. Hou, "Long focal-length measurement using divergent beam and two gratings of different periods," *Opt. Express* **22**, 27921–27931 (2014).
23. Y. P. Kumar and S. Chatterjee, "Technique for the focal-length measurement of positive lenses using Fizeau interferometry," *Appl. Opt.* **48**, 730–736 (2009).
24. Z. Yang, Z. Gao, J. Dou, and X. Wang, "Focal length measurement based on the wavefront difference method by a Fizeau interferometer," *Appl. Opt.* **53**, 5598–5605 (2014).
25. M. de Angelis, S. De Nicola, P. Ferraro, A. Finizio, and G. Pierattini, "A new approach to high accuracy measurement of the focal lengths of lenses using a digital Fourier transform," *Opt. Commun.* **136**, 370–374 (1997).
26. J. Dhanotia and S. Prakash, "Focal length and radius of curvature measurement using coherent gradient sensing and Fourier fringe analysis," *Optik* **124**, 2115–2120 (2013).
27. D. R. Neal, J. Copland, D. A. Neal, D. M. Topa, and P. Riera, "Measurement of lens focal length using multi-curvature analysis of

- Shack-Hartmann wavefront data," Proc. SPIE **5523**, 243–255 (2004).
28. J. Wu, J. Chen, A. Xu, X. Gao, and S. Zhuang, "Focal length measurement based on Hartmann-Shack principle," *Optik* **123**, 485–488 (2012).
 29. L. Motka, "Measurement of focal length with SHS," *Fine Mech. Opt.* **59**, 43–45 (2014).
 30. C. Mafusire and A. Forbes, "Mean focal length of an aberrated lens," *J. Opt. Soc. Am. A* **28**, 1403–1409 (2011).
 31. V. I. Meshcheryakov, M. I. Sinelnikov, and O. K. Filippov, "Measuring the focal lengths of long-focus optical systems," *J. Opt. Technol.* **66**, 458–459 (1999).
 32. A. Miks and J. Novak, "Dependence of camera lens induced radial distortion and circle of confusion on object position," *Opt. Laser Technol.* **44**, 1043–1049 (2012).
 33. A. R. Tanguay, Jr., C. S. Wu, P. Chavel, T. C. Strand, and A. A. Sawchuk, "Physical characterization of the variable grating mode liquid crystal device," *Opt. Eng.* **22**, 687–694 (1983).
 34. B. H. Soffer, J. D. Margerum, A. M. Lackner, D. Boswell, and A. R. Tanguay, Jr., T. C. Strand, A. A. Sawchuk, and P. Chavel, "Variable grating mode liquid crystal device for optical processing computing," *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **70**, 145–161 (1981).
 35. M. Aschwanden and A. Stemmer, "Polymeric, electrically tunable diffraction grating based on artificial muscles," *Opt. Lett.* **31**, 2610–2612 (2006).
 36. J. Kim, J. H. Suh, B. Y. Lee, S. U. Kim, and S.-D. Lee, "Optically switchable grating based on dye-doped ferroelectric liquid crystal with high efficiency," *Opt. Express* **23**, 12619–12627 (2015).
 37. J. Sun, A. K. Srivastava, L. Wang, V. G. Chigrinov, and H. S. Kwok, "Optically tunable and rewritable diffraction grating with photoaligned liquid crystals," *Opt. Lett.* **38**, 2342–2344 (2013).
 38. J. Kim, J. H. Na, and S. D. Lee, "Fully continuous liquid crystal diffraction grating with alternating semi-circular alignment by imprinting," *Opt. Express* **20**, 3034–3042 (2012).
 39. R. H. Chen, *Liquid Crystal Display: Fundamental Physics and Technology* (Wiley, 2011).
 40. Holoeye, 2015, <http://www.holoeye.com>.
 41. S. F. Ray, *Applied Photographic Optics* (Focal, 2002).
 42. W. Smith, *Modern Optical Engineering*, 3rd ed. (McGraw-Hill, 2000).
 43. A. Cox, *A System of Optical Design* (Focal, 1964).
 44. W. Merte, R. Richter, and M. V. Rohr, *Das Photographische Objektiv* (Springer, 1932).
 45. OSLO, 2015, <http://www.lamdares.com/oslo>.
 46. K. Rektorys, *Survey of Applicable Mathematics* (MIT, 1969).
 47. M. Grabe, *Measurement Uncertainties in Science and Technology* (Springer, 2014).
 48. S. Gupta, *Measurement Uncertainties: Physical Parameters and Calibration of Instruments* (Springer, 2012).
 49. Zemax, 2015, <http://www.zemax.com>.
 50. OEG-Messtechnik, 2015, <http://www.oeg-messtechnik.de>.

3D optical two-mirror scanner with focus-tunable lens

PETR POKORNY* AND ANTONIN MIKS

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic
*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 19 May 2015; revised 2 July 2015; accepted 11 July 2015; posted 13 July 2015 (Doc. ID 241320); published 31 July 2015

The paper presents formulas for a ray tracing in the optical system of two-mirror optical scanner with a focus-tunable lens. Furthermore, equations for the calculation of focal length which ensure focusing of a beam in the desired point in a detection plane are derived. The uncertainty description of such focal length follows as well. The chosen vector approach is general; therefore, the application of formulas in various configurations of the optical systems is possible. In the example situation, the authors derived formulas for mirrors' rotations and the focal length depending on the position of the point in the detection plane. © 2015 Optical Society of America

OCIS codes: (080.2740) Geometric optical design; (080.4035) Mirror system design; (110.1085) Adaptive imaging; (220.1080) Active or adaptive optics.

<http://dx.doi.org/10.1364/AO.54.006955>

1. INTRODUCTION

In the industrial application it is very often important to determine the spatial parameters of different kinds of objects (e.g., a surface topography of the object under study), or to perform specific modification in three-dimensional space (e.g., cutting or welding). Several principles exist for such purposes. One of the possibilities is the usage of 3D optical scanners for their speed and accuracy [1–4]. The beam-steering device can be constructed in many ways. From the chosen type of construction the principles of usage are derived. As an example, let one name one-mirror scanners, two-mirror scanners, polygonal, acousto-optical or electro-optical systems, etc. [1]. In the last decades the adaptive optical elements development has been a focus of interest and especially the focus-tunable lenses have been studied [5–11].

From the general point of view one can divide the optical scanners into three categories: (a) measurement devices for revision and testing of current objects, (b) projection technology, and (c) high-power technology in industry.

The first of the above-mentioned categories covers the application in civil engineering and architecture, such as documentation of interiors, mining, building foundation, volume measurement, underground network measurement, or similar. Also mechanical engineering is part of this category, as well as reverse engineering, quality control, automobile industry, documentation of traffic networks, digital terrain modelling, historical and art documentation, security purposes, crack detection, water engineering, archaeology, or medicine. The second characteristic covers the entertainment industry, light effects, video

mapping or theatre lighting. And the last category, the application of high-power sources in industry, describes manufacturing technologies for cutting, welding, engraving, or coating.

In the last couple of years many papers have been written that were especially focused on the one-dimensional or two-dimensional description of mirror scanners. Flat mirrors were analyzed by Pegis and Rao [12]. Two-dimensional free-of-distortion scanners were presented by Sabban *et al.* [13]. Image shape analysis as an intersection with the detection plane was presented as well [14–17]. Stability of optical systems was analyzed by Friedman and Schweitzer [18]. Profiling based on beam reflection is shown by Shinozaki *et al.* [19]. Three-dimensional analysis of the position and accuracy of the beam's spot in the detection plane was presented by Pokorny [3]. The adaptive optical components were studied in detail by Miks *et al.* [5–11].

In this paper, the authors present a general vector approach for a ray tracing in the optical beam-steering device of a two-mirror scanner with a plano-convex focus-tunable lens. The position of the beam's spot is calculated in the detection plane as a function of the mirrors' angles of rotation. Moreover, the calculation of the focal length of the focus-tunable lens is presented based on the condition of beam focussation in the detection plane. This condition finds utilization in many practical applications. At the end of the paper the results are presented in examples. The calculation of the mirrors' rotations for one type of scanner is carried out as well. To the authors' best knowledge, derived formulas of such type have never been published yet.

2. GENERAL VECTOR MODEL FOR RAY-TRACING ANALYSIS

Based on the calculation of the beam spot position in the detection plane presented in the previous authors' articles [3,4], the modification for the system with a plano-convex focus-tunable lens is going to be presented.

Suppose the situation in Fig. 1. System K transforms the incoming light to a beam of parallel rays. The position of such system's last surface is given by vector \mathbf{s}_0 . The vertex V_{L2} of a rear surface of a focus-tunable lens defines its position by a vector \mathbf{l}_{V2} in such a way that points S_0 , V_{L2} , and O_1 define a line with a unit directional vector \mathbf{o} . Let this line be an optical axis of the lens. Unit vector \mathbf{a}_0 with point S, which is given by position vector \mathbf{s} , determines a parallel ray emerging from the system K. Unit vector \mathbf{a}_1 with point L, given by position vector \mathbf{l} , then defines a ray behind the lens.

The position of the mirrors in the system is defined by vectors \mathbf{o}_1 and \mathbf{o}_2 , and by their unit normal vectors \mathbf{n}_1 and \mathbf{n}_2 . Position vectors \mathbf{r}_1 and \mathbf{r}_2 denote places where the ray impinges and reflects from the mirrors. Unit vectors \mathbf{a}_2 and \mathbf{a}_3 then denote directions of the ray after the reflection on the first and the second mirror. Planar detector, detection plane ξ , is supposed to be given by a normal vector \mathbf{q} and it is distanced by a value of d from the origin of the coordinate system. The intersection of the ray with such plane ξ is determined by position vector \mathbf{p} of the point P.

For the next analysis let one suppose the rotationally symmetric plano-convex focus-tunable lens, which is very often used in practice. The considered situation is depicted in Fig. 2.

In Fig. 2, point S and unit directional vector \mathbf{a}_0 describe an off-axis ray. The point of intersection L_0 lays in height h , which can be calculated as a distance between the incoming ray and the optical axis of the lens. From the depicted situation it is obvious that \mathbf{a}_0 equals \mathbf{o} . According to the law of refraction the ray is refracted in the point L_0 and the unit directional vector \mathbf{a}_L defines its direction in the lens with index of refraction n_L . In the point L, the ray is refracted again and emerges the lens in the direction of unit vector \mathbf{a}_1 . Without the loss of generality for practical purposes, where the geometrical aberrations caused by the optical components are usually smaller than diffraction effects, this model of off-axis ray can be converted to the paraxial one with the use of formulas of geometrical optics [20,21]. Therefore, the following simplifications hold: $h \rightarrow 0$, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{o}$, $(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) \rightarrow \mathbf{0}$, $(\mathbf{l} - \mathbf{l}_{V2}) \rightarrow \mathbf{0}$, $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{o}) \rightarrow \mathbf{0}$, where $\mathbf{0}$

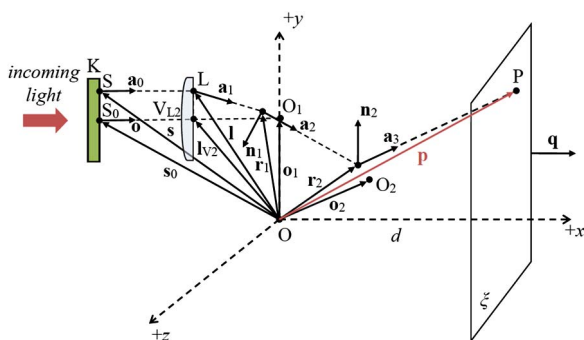


Fig. 1. Two-mirror scanner.

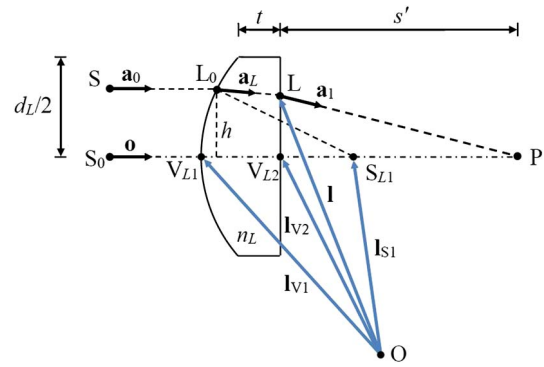


Fig. 2. Ray-tracing of a beam in a plano-convex lens.

denotes null vector. The authors show a practical example and a proof of such simplification at the end of this paper.

For the geometrical characteristics, let the position of the lens be given by stable center V_{L2} of its planar surface by its positional vector \mathbf{l}_{V2} . As the focal length of the lens changes, the position of front vertex V_{L1} changes. The center of curvature moves its position as well. As is obvious in Figs. 1 and 2, one can characterize the position of point V_{L1} as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{V1} &= \mathbf{l}_{V2} - t_L \mathbf{o} \\ &= \mathbf{l}_{V2} - \left[t + R - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - d_L^2} \right] \mathbf{o}. \end{aligned} \quad (1)$$

In Eq. (1) t_L denotes variable axial thickness of the lens; t is the fixed thickness of the lens measured at the edge; d_L is the diameter of the lens; R denotes the lens first surface's radius of curvature, which can be enumerated from the formula $R = f'(n_L - 1)$, whereas f' is the back focal length of the lens and n_L is the index of refraction of its material. One can derive the following formula for variable position of the center of curvature, it holds:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{S1} &= \mathbf{l}_{V1} + R \mathbf{o} \\ &= \mathbf{l}_{V2} - \left[t - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - d_L^2} \right] \mathbf{o}. \end{aligned} \quad (2)$$

Let one start with ray tracing through the mirror system with the description of unit normal vector \mathbf{n}_i (φ_i) of the i -th mirror, rotated by angle φ_i around the axis with unit directional vector \mathbf{c}_i . From the analytical geometry it can be shown that the following formula represents the aforementioned situation [3,4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i(\varphi_i) &= \mathbf{n}_i(0) \cos \varphi_i + \mathbf{c}_i [\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_i(0)] (1 - \cos \varphi_i) \\ &\quad + [\mathbf{c}_i \times \mathbf{n}_i(0)] \sin \varphi_i. \end{aligned} \quad (3)$$

As the paraxial model is supposed, the position vector \mathbf{r}_1 equals \mathbf{o}_1 . Afterwards, one can write for the unit directional vector of the ray reflected on the first mirror as follows [3,4]:

$$\mathbf{a}_2(\varphi_1) = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{n}_1(\varphi_1)[\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1(\varphi_1)]. \quad (4)$$

With the use of analytical geometry [22,23] the formula for the point \mathbf{r}_2 of the ray's intersection with the second mirror can be derived, it holds:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{o}_1 + \frac{[\mathbf{o}_2 - \mathbf{o}_1] \cdot \mathbf{n}_2(\varphi_2)}{\mathbf{a}_2(\varphi_1) \cdot \mathbf{n}_2(\varphi_2)} \mathbf{a}_2(\varphi_1). \tag{5}$$

Similar to Eq. (4), the unit directional vector of the ray after the reflection on the second mirror can be written as follows [3,4]:

$$\mathbf{a}_3(\varphi_2) = \mathbf{a}_2(\varphi_1) - 2\mathbf{n}_2(\varphi_2)[\mathbf{a}_2(\varphi_1) \cdot \mathbf{n}_2(\varphi_2)]. \tag{6}$$

The ray's intersection with the detection plane, i.e., the point P, is afterwards given by positional vector \mathbf{p} . It can be shown that the following formula holds [3,4]:

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_2 + \frac{d - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{a}_3(\varphi_2) \cdot \mathbf{q}} \mathbf{a}_3(\varphi_2). \tag{7}$$

The beam spot's position calculation is therefore completely described.

The focus-tunable lens can be manipulated in such a way that the beam will be focused in the point P in the detection plane. Let one derive the formula for the calculation of the focal length.

The optical power of the aforementioned plano-convex lens will be given as follows [20,21]:

$$\varphi = \frac{1}{f'} = \frac{n_L - 1}{R}. \tag{8}$$

In Eq. (8), f' denotes the variable focal length, n_L is the index of refraction, R is the radius of curvature of the first lens' spherical surface. As the optical power changes, the vertex V_{L1} of the spherical surface shifts on the optical axis.

With the use of formulas of geometrical optics the distance s' between the back lens' surface and the image plane (distance between points V_{L2} and P) of such a lens can be written, it holds [20,21]:

$$s' = f' \left(1 - \varphi \frac{t_L}{n_L} \right). \tag{9}$$

The meaning of the symbols in Eq. (9) is obvious from previous statements.

If one substitutes Eqs. (1) and (8) in Eq. (9), then the following formula comes:

$$f' = s' + \frac{t_L}{n_L} = s' + \frac{1}{n_L} \left[t + R - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - d_L^2} \right]. \tag{10}$$

After some elementary rearrangements the quadratic formula for the focal length can be written as follows:

$$\frac{f'^2}{n_L^2} [(n_L - 1)^2 - 1] + 2 \left(s' + \frac{t}{n_L} \right) \frac{f'}{n_L} - \frac{d_L^2}{4n_L^2} - \left(s' + \frac{t}{n_L} \right)^2 = 0. \tag{11}$$

The suitable solution for our purposes follows:

$$f' = -\frac{1}{n_L(n_L - 2)} \left(t + n_L s' - \frac{1}{2} \sqrt{D_f} \right). \tag{12}$$

The value of D_f can be calculated from the following formula:

$$D_f = 4n_L^4 s'^2 - 8n_L^3 s'(s' - t) + n_L^2 [d_L^2 + 4(s'^2 + t^2) - 16s't] + n_L [8t(s' - t) - 2d_L^2] + 4t^2. \tag{13}$$

As obvious from Eqs. (12) and (13), the value of ideal focal length for focusing the beam in the point P in the detection plane can be calculated if the value of s' is known. From the aforementioned formulas, the value of s' can be calculated from the relation as follows:

$$s' = |\mathbf{o}_1 - \mathbf{l}_{V2}| + |\mathbf{r}_2 - \mathbf{o}_1| + |\mathbf{p} - \mathbf{r}_2|. \tag{14}$$

Let one determine the uncertainty $u(f')$ of the calculated focal length given by Eq. (12). Suppose the dependency of such uncertainty on uncertainties of side thickness of the lens $u(t)$, the index of refraction $u(n_L)$, the value of distance between points V_{L2} and P $u(s')$, and the lens diameter $u(d_L)$. Without any loss of generality one can consider the aforementioned uncertainties very small compared to the absolute values of their mutually independent parent variables, i.e., the values of uncertainties are expected to be comparable to the total differentials of the given model. Suppose next the even probability distribution for such uncertainties. The conditions describe the situation of random errors only; therefore, one considers systematic errors to be suppressed. With these assumptions the law of variance propagation can be used [24,25] and the uncertainty of the focal length can be expressed as follows:

$$u(f') = \sqrt{U_1^2 u^2(t) + U_2^2 u^2(n_L) + U_3^2 u^2(s') + U_4^2 u^2(d_L)}, \tag{15}$$

where coefficients U_i ($i = 1, \dots, 4$) are given with following formulas, it holds:

$$U_1 = N(DV_1 - 1),$$

$$U_2 = N^2 \left[(n_L - 2)n_L DV_2 + (n_L - 1) \left(2t - \sqrt{D_f} \right) + n_L^2 s' \right],$$

$$U_3 = N(DV_3 - n_L),$$

$$U_4 = NDV_4,$$

$$V_1 = 8[s'n_L^3 + (t - 2s')n_L^2 + (s' - 2t)n_L + t],$$

$$V_2 = 16s'^2 n_L^3 - 24s'(s' - t)n_L^2 + 2[d_L^2 + 4(s'^2 + t^2) - 16s't]n_L + 8t(s' - t) - 2d_L^2,$$

$$V_3 = 8[s'n_L^4 - n_L^3(2s' - t) + s'n_L^2 - 2tn_L^2 + tn_L],$$

$$V_4 = 2d_L(n_L^2 - 2n_L),$$

$$D = \frac{\sqrt{D_f}}{4D_f}, \quad N = \frac{1}{n_L(n_L - 2)}.$$

Suppose now the situation when one calculates the smallest possible beam's spot in the detection plane and the position of such an ideal image plane as well. As known from the theory of optical imaging, the unique plane where the beam spot has the smallest diameter exists for each optical system and for a given field of view.

The transverse ray aberration $\delta y'$ of the plano-convex lens (see Fig. 2), and for an object at the infinity can be calculated with formulas from [9,20,21] as follows:

$$\delta y' = -\frac{f'}{2} \left(\frac{h}{f'}\right)^3 \left[\frac{n_L^3 - 2n_L^2 + 2}{n_L(n_L - 1)^2} \right], \quad (16)$$

where h is the incidence height of the aperture ray and n_L is the index of refraction. This formula is valid for thin plano-convex lenses, having the first radius spherical and the second radius infinite. Formula (16) gives sufficiently accurate results also for thick lenses with moderate f -number. For the f -number F [20,21] of the lens it holds: $F = f'/d_L$. Substituting the formula for the f -number of the optical system in Eq. (16) results in the following equation for maximal value of transverse ray aberration $\delta y'_{\max}$ in the paraxial image plane, it holds ($h = d_L/2$):

$$\delta y'_{\max} = -\frac{f'}{16F^3} \left[\frac{n_L^3 - 2n_L^2 + 2}{n_L(n_L - 1)^2} \right]. \quad (17)$$

The position D_{opt} of an optimal image plane, where the diameter of the circle of confusion d_{\min} is minimal, according to the paraxial image plane can be calculated both with the value of minimal circle of confusion's diameter d_{\min} with formulas stated in Miks and Novak's paper [26] as follows:

$$D_{\text{opt}} = 4F\delta y'_{\max}/3, \quad d_{\min} = |\delta y'_{\max}|/3. \quad (18)$$

Let one set the minimal diameter of the circle of confusion from Eq. (18) equal to the diameter of the Airy disc ($d_A = 2.44\lambda F$). Afterwards, the minimal f -number for the lens can be calculated using Eqs. (17) and (18), one gets

$$F_{\min} = \frac{1}{3.29} \sqrt[4]{\frac{f'}{\lambda} \left[\frac{n_L^3 - 2n_L^2 + 2}{n_L(n_L - 1)^2} \right]}. \quad (19)$$

Using Eq. (19) one can calculate such f -number of the plano-convex lens that the lens can be considered as a physically ideal optical system.

Commercially available focus-tunable lenses [27] are usually placed between two plano-parallel plates. Therefore, an aberration induced by such plates has to be considered for precise analysis as well. Aberrations of a plano-parallel plate are described in detail in [28]. Transversal spherical aberration $\delta y'_p$ induced by thickness d_p of a plate from material with index of refraction n_p is given with formula as follows [28]:

$$\delta y'_p = \frac{d_p(n_p^2 - 1)}{2n_p^3} \left(\frac{h}{f'}\right)^3. \quad (20)$$

As obvious from Eqs. (16) and (20), the aberration induced by the plate's thickness is much smaller than the lens' aberration ($|\delta y'_p| \ll |\delta y'_L|$). Therefore, such aberration given by Eq. (20) can be neglected. The plano-parallel plate behind the lens does not affect the lens' focal length. However, the paraxial image plane will be shifted about the value $\Delta = d_p(n_p - 1)/n_p$ [28].

3. EXAMPLES

A. Example 1

Suppose that the plano-convex focus-tunable lens Optotune EL-10-30 [27] with parameters $d_L = 11$ mm, $t = 2.45$ mm,

$\lambda = 587$ nm, and $n_L = 1.559$ is used in the optical system of a two-mirror scanner with the following parameters:

$$\mathbf{s}_0 = -50\mathbf{e}_1 + 30\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{l}_{V2} = -30\mathbf{e}_1 + 30\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{o}_1 = 30\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{o}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{n}_1(0) = -(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{(2)},$$

$$\mathbf{n}_2(0) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{(2)}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{e}_1, \quad d = 50 \text{ mm},$$

where \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , and \mathbf{e}_3 denote the basis of the coordinate system.

For the zero rotation of the mirrors the focal length equals to 111.727 mm and the axial thickness of the lens is $t_L = 2.693$ mm. The maximal transverse ray aberration $\delta y'_{\max}$ of the plano-convex lens (see Fig. 2), and for object at the infinity, can be calculated from Eq. (16), and one gets ($h = d_L/2$)

$$\delta y'_{L \max} = -\frac{f'}{16} \left(\frac{d_L}{f'}\right)^3 \left[\frac{n_L^3 - 2n_L^2 + 2}{n_L(n_L - 1)^2} \right] = -0.01270 \text{ mm}. \quad (21)$$

If one considers the axial thickness equal to 2.693 mm, OSLO accurate calculation for a thick lens gives the value $\delta y'_{L(\text{OSLO})} = -0.01271$ mm. Such a result can be obtained with the aforementioned Eq. (7) for general ray tracing in a given optical system as well. Therefore, the approximation used in Eq. (16) gives enough accurate results with an error less than 0.08% for a given situation.

For the aberration induced by a plano-parallel plate with thickness $d_p = 0.5$ mm, which is made by glass BK7 ($n_p = 1.516$), one gets with the use of Eq. (20) ($h = d_L/2$) the following value:

$$\delta y'_{p \max} = \frac{d_p(n_p^2 - 1)}{16n_p^3} \left(\frac{d_L}{f'}\right)^3 = 0.000011 \text{ mm}. \quad (22)$$

As obvious, the value of $\delta y'_{p \max}$ is much smaller than $\delta y'_{L \max}$; therefore, it can be neglected.

If one considers the wavelength equal for example to 587 nm, then the diffraction effect of the system expressed by the radius of the Airy disc [20,21] can be calculated from the following formula: $r_A = 1.22\lambda F = 0.0073$ mm, where λ is the wavelength. As is obvious, the assumption of the paraxial model was justified because the transverse ray aberration is comparable with the radius of the Airy disc and the diameter of the circle of confusion $d_{\min} = 0.0042$ mm, which is smaller than the diameter of the Airy disc ($d_A = 2r_A = 0.0146$ mm).

The beam spots in the detection plane for different angles of rotation φ_1 and φ_2 are shown in Fig. 3. The calculated focal lengths for the beams' focusation in the detection plane respecting the aforementioned situation are shown in Fig. 4.

B. Example 2

Consider now the situation of known position of the point P in the detection plane. The question is, how shall one rotate the mirrors and how the focal length of the focus-tunable lens in the system has to be to fulfil the condition of the focused beam in the point P? Suppose the same parameter of the scanner as in Example 1.

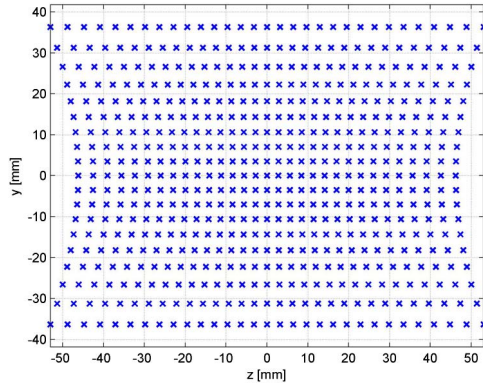


Fig. 3. Beam spots in the detection plane for different angles of rotation $\varphi_1 = \{-30^\circ, -28^\circ, \dots, +28^\circ, +30^\circ\}$, $\varphi_2 = \{-18^\circ, -16^\circ, \dots, +16^\circ, +18^\circ\}$.

Substituting the given scanner's parameters into the aforementioned formulas, one gets the following expression of the coordinates of the point P, i.e., the position vector $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$

$$\begin{aligned} p_x &= d, \\ p_y &= d \tan 2\varphi_2, \\ p_z &= -\tan \varphi_1 \left(o_{1y} + \frac{d}{\cos 2\varphi_2} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

where o_{1y} is the y -direction component of the vector $\mathbf{o}_1 = (o_{1x}, o_{1y}, o_{1z})$. Afterwards, the angles of rotation can be expressed from the Eqs. (23) as follows:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -a \tan \left(\frac{p_z}{o_{1y} + \sqrt{p_y^2 + d^2}} \right), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} a \tan \left(\frac{p_y}{d} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

The distance between points V_{L2} and P can be then calculated from the formula

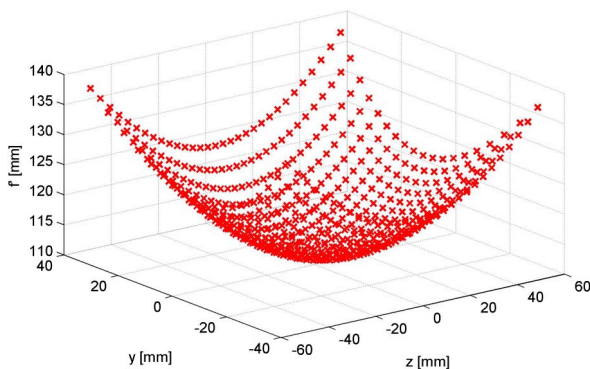


Fig. 4. Focal lengths for the beams' focusing in the detection plane for different angles of rotation $\varphi_1 = \{-30^\circ, -28^\circ, \dots, +28^\circ, +30^\circ\}$, $\varphi_2 = \{-18^\circ, -16^\circ, \dots, +16^\circ, +18^\circ\}$.

Table 1. Coordinates of Points in the Detection Plane, Corresponding Angles of Mirrors' Rotations, and Focal Lengths for the Scanner from Example 1

point	p_z [mm]	p_y [mm]	φ_1 [°]	φ_2 [°]	f' [mm]
1	0	0	0.0000	0.0000	+111.727
2	-20	+30	+12.7609	+15.4819	+122.260
3	-20	0	+14.0362	0.0000	+114.186
4	-20	-30	+12.7609	-15.4819	+122.260
5	+20	+30	-12.7609	+15.4819	+122.260
6	+20	0	-14.0362	0.0000	+114.186
7	+20	-30	-12.7609	-15.4819	+122.260

$$\begin{aligned} s' &= -l_{V2x} + \sqrt{d^2 + p_y^2 + \frac{(d^2 + p_y^2)p_z^2}{\left(o_{1y} + \sqrt{p_y^2 + d^2}\right)^2}} \\ &+ \sqrt{o_{1y}^2 + \frac{l_{V2y}^2 p_z^2}{\left(o_{1y} + \sqrt{p_y^2 + d^2}\right)^2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

where l_{V2x} and l_{V2y} are components of the vector $\mathbf{l}_{V2} = (l_{V2x}, l_{V2y}, l_{V2z})$.

Equation (12) can be then used for the calculation of the focus-tunable lens' focal length.

In Table 1, there are shown given coordinates of points in the detection plane and corresponding angles on the mirrors' rotations and focal lengths for focusing of the lens in the system. The points in the detection plane are shown in Fig. 5.

C. Example 3

Suppose the uncertainties of the focus-tunable lens' parameters in three possibilities as follows:

- (a) $u(t) = u(dL) = 0.1 \text{ mm}$, $u(nL) = 1e - 6$,
- (b) $u(t) = u(dL) = 0.3 \text{ mm}$, $u(nL) = 1e - 5$,
- (c) $u(t) = u(dL) = 0.5 \text{ mm}$, $u(nL) = 1e - 4$.

For each of the aforementioned cases let the uncertainty $u(s') = 0.01 \cdot s'$, i.e., one percent from the value s' . In Fig. 6, the dependency of uncertainties of focal length on the distance between points V_{L2} and P is shown for the scanner from Example 1 and its focal length focused in the detection plane.

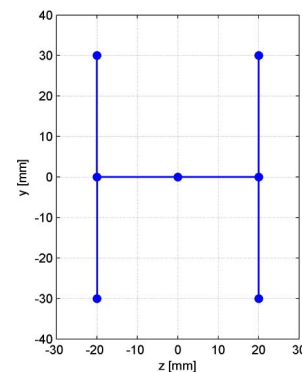


Fig. 5. Given points in the detection plane from Example 1 with parameters of the scanner from Example 1.

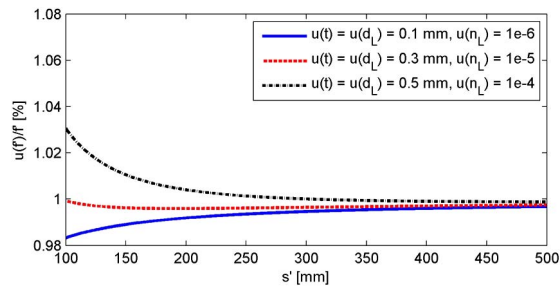


Fig. 6. Dependency of uncertainties of focal length $u(f')$ on the distance between points V_{L2} and P for different cases of uncertainties of the focus-tunable lens' parameters.

4. CONCLUSION

The ray-tracing analysis of the optical system of a two-mirror scanner with a focus-tunable plano-convex lens was presented. The general vector approach was used, which ensures the applicability for different optical systems. The exact formulas for the calculation of the beam spot in the detection plane was presented as a dependency on the angles of the mirrors' rotation. Afterwards, the calculation of focal length of the lens was derived according the condition of focusation in the detection plane. The uncertainty analysis of such focal length is presented as well. In the end of the paper, the authors show the practical examples and usage of derived formulas. For the most used type of two-mirror scanner the formulas for exact calculation of the angles of the mirrors' rotation was presented for given positions of points in the detection plane. The presented formulas can find utilization in many practical applications of optical scanners.

Funding. Czech Technical University in Prague (SGS15/125/OHK1/2T/11).

REFERENCES

- G. F. Marshall and G. E. Stutz, *Handbook of Optical and Laser Scanning* (CRC/Taylor & Francis, 2011), Vol. 147.
- G. Vosselman and H.-G. Maas, *Airborne and Terrestrial Laser Scanning* (Whittles Publishing, 2010).
- P. Pokorný, "One-mirror and two-mirror three-dimensional optical scanners—position and accuracy of laser beam spot," *Appl. Opt.* **53**, 2730–2740 (2014).
- A. Mikš and P. Pokorný, "3D optical scanners," *Fine Mech. Opt.* **56**, 137–141 (2012).
- A. Mikš and J. Novák, "Paraxial imaging properties of double conjugate zoom lens system composed of three tunable-focus lenses," *Opt. Lasers Eng.* **53**, 86–89 (2014).
- A. Mikš, J. Novák, and P. Novák, "Algebraic and numerical analysis of imaging properties of thin tunable-focus fluidic membrane lenses with parabolic surfaces," *Appl. Opt.* **52**, 2136–2144 (2013).
- A. Mikš and J. Novák, "Three-component double conjugate zoom lens system from tunable focus lenses," *Appl. Opt.* **52**, 862–865 (2013).
- A. Mikš and J. Novák, "Analysis of three-element zoom lens based on refractive variable-focus lenses," *Opt. Express* **19**, 23989–23996 (2011).
- A. Mikš, J. Novak, and P. Novak, "Generalized refractive tunable-focus lens and its imaging characteristics," *Opt. Express* **18**, 9034–9047 (2010).
- A. Mikš and J. Novak, "Analysis of two-element zoom systems based on variable power lenses," *Opt. Express* **18**, 6797–6810 (2010).
- A. Mikš and J. Novák, "Third-order aberrations of the thin refractive tunable-focus lens," *Opt. Lett.* **35**, 1031–1033 (2010).
- R. J. Pegis and M. Rao, "Analysis and design of plane-mirror systems," *Appl. Opt.* **2**, 1271–1274 (1963).
- J. Cohen-Sabban, Y. Cohen-Sabban, and A. Roussel, "Distortion-free 2-D space and surface scanners using light deflectors," *Appl. Opt.* **22**, 3935–3942 (1983).
- Y. J. Li and J. Katz, "Laser beam scanning by rotary mirrors. I. Modeling mirror-scanning devices," *Appl. Opt.* **34**, 6403–6416 (1995).
- Y. J. Li, "Laser beam scanning by rotary mirrors. II. Conic-section scan patterns," *Appl. Opt.* **34**, 6417–6430 (1995).
- Y. J. Li, "Single-mirror beam steering system: analysis and synthesis of high-order conic-section scan patterns," *Appl. Opt.* **47**, 386–398 (2008).
- Y. J. Li, "Beam deflection and scanning by two-mirror and two-axis systems of different architectures: a unified approach," *Appl. Opt.* **47**, 5976–5985 (2008).
- Y. Friedman and N. Schweitzer, "Classification of stable configurations of plane mirrors," *Appl. Opt.* **37**, 7229–7234 (1998).
- R. Shinozaki, O. Sasaki, and T. Suzuki, "Fast scanning method for one-dimensional surface profile measurement by detecting angular deflection of a laser beam," *Appl. Opt.* **43**, 4157–4163 (2004).
- A. Mikš, *Applied Optics* (Czech Technical University, 2009).
- M. Born, E. Wolf, and A. B. Bhatia, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* (Cambridge University, 1999).
- G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review* (Dover, 2000).
- K. Rektorys, *Survey of Applicable Mathematics* (MIT, 1969).
- K.-R. Koch, *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models* (Springer, 1999).
- L. Mervart and Z. Lukes, *Adjustment Calculus* (Czech Technical University, 2007).
- A. Mikš and J. Novak, "Dependence of camera lens induced radial distortion and circle of confusion on object position," *Opt. Lasers Technol.* **44**, 1043–1049 (2012).
- "Optotune," 2014, www.optotune.com.
- A. Mikš and P. Pokorný, "Analytical expressions for the circle of confusion induced by plane-parallel plate," *Opt. Lasers Eng.* **50**, 1517–1521 (2012).

One-mirror and two-mirror three-dimensional optical scanners—position and accuracy of laser beam spot

Petr Pokorný

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics,
Thakurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic (petr.pokorny@fsv.cvut.cz)

Received 6 February 2014; revised 21 March 2014; accepted 21 March 2014;
posted 24 March 2014 (Doc. ID 206101); published 18 April 2014

This article presents several fundamental formulas for ray tracing in optical systems used in 3D optical scanners. A procedure for numerical modeling of one-mirror and two-mirror optical systems is presented, and the calculation of positioning and accuracy of the laser beam spot in a detection plane is carried out. Finally, a point position and accuracy depending on a transit time is evaluated. © 2014 Optical Society of America

OCIS codes: (080.0080) Geometric optics; (110.0110) Imaging systems; (120.0120) Instrumentation, measurement, and metrology; (220.0220) Optical design and fabrication; (280.0280) Remote sensing and sensors.

<http://dx.doi.org/10.1364/AO.53.002730>

1. Introduction

Three-dimensional (3D) optical scanners [1–11] are devices that are able to perform noncontact, very fast, and accurate measurements of 3D physical objects. Areas of application of 3D optical scanners are in civil engineering, architecture, interior modeling, earthwork (building foundations, mining, etc.), components and modules in engineering, automobile body shaping, measuring the condition of road surfaces, railway lines, detecting and documenting cracks, security and traffic control (laser gates), archaeology, and so forth [3]. Furthermore, these systems are widely used in safety technology such as the protection of objects and detection of human presence in safety zones of production systems (e.g., machining centers and foundries). Another area of 3D scanner application is in laser technology (cutting, welding, engraving, surface finishing of materials, etc.), medicine, or the entertainment industry (laser effects, theaters). There are many companies [4–9] that deal

with this issue and commercially offer 3D scanners for the above-mentioned applications.

There are several studies of 1D and 2D optical scanners that have been developed and presented in many papers. Fundamental analysis of systems of plane mirrors by matrix multiplication is carried out in [12]. Other works are focused on design of distortion-free two-mirror scanners [13], analysis of various types of scanning patterns in the observation plane [14–17], stability of plane-mirror systems for as many as three mirrors [18], or 1D surface profile measurement by detection of the angles of deflection [19].

In the above-mentioned papers the attention is focused on 1D or 2D problems. In this paper, besides 2D analysis, 3D positioning and accuracy determination is carried out as well. This approach is required in practical situations. First, a procedure for ray tracing through a scanner optical system will be presented, and the formulas for positioning and accuracy of a laser beam spot in a detection plane will be derived. Subsequently, a method for a 3D position and accuracy estimation based on a time-of-flight method is carried out. A vector approach is used

for its simplicity and versatility and can be applied in many practical cases.

A 3D optical scanner comprises a radiation source, an optical or opto-mechanical directional device for laser beams, a radiation detector, and an evaluation system. Light (beam) coming from the source of radiation is transformed by means of an optical system, deflected by a directional device to an accurately determined direction, and impacts to the measured object. After the reflection from the object, a part of the diffused light returns through the optical system and impacts on the radiation detector. The evaluation system then determines the spatial coordinates of the object point. The distance between the object point and scanner is mostly determined by modulating the light or by measuring the elapsed time between the transmitted and received signal (time of flight method). There are other ways to determine the distance of the object from the scanner, for example, the triangulation method [11], but these are rarely used and therefore they are not discussed.

There are usually one or two rotating mirrors used in the design process. One-mirror scanners are used where a larger angular range (field of view) of the swept beams is needed. This type of scanner is usually formed by a laser module with a single rotating mirror, which rotates around a horizontal axis (H), while the laser beam sweeps in a plane perpendicular to the axis of mirror rotation (vertical plane). The laser module is then rotated around a vertical axis (V) perpendicular to the axis of the mirror rotation, and thereby it sweeps the laser beam in the horizontal position (horizontal) plane. An achievable field of view can be, for example, $360^\circ \times 320^\circ$ (H \times V). Two-mirror scanners are used primarily in the field of laser technology in engineering and elsewhere where a large angular field of view is not required. The optical system of this scanner consists of two mirrors that revolve around two different axes and thus lead to sweep the laser beam. There are several companies that provide ready-made modules for two-mirror scanners [11]. An achievable field of view may be, for example, $80^\circ \times 80^\circ$ (H \times V).

2. Fundamental Formulas for Laser Beam Tracing through the Scanner Optical System

A. Law of Refraction and Reflection in the Vector Form

To derive formulas for laser beam tracing one can employ the basic equations of classical electrodynamics—Maxwell's equations [20–26]. However, the complete procedure is beyond the scope of this work and can be found in [20,22–26]. Assume that a unit normal vector \mathbf{N} of the interface is directed to the incident ray of light and the angle of incidence and refraction is measured out from the normal, as is shown in Fig. 1, where \mathbf{A}_I and \mathbf{A}_T are unit vectors along the incident and refracted rays. All above-stated vectors lie in a plane, which is

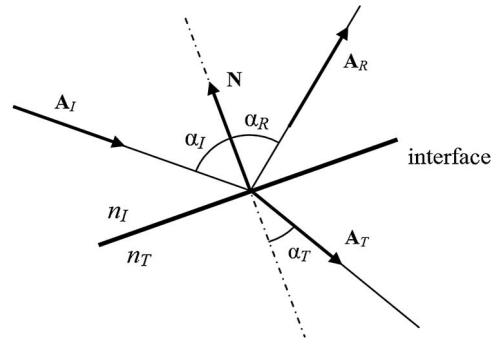


Fig. 1. Refraction and reflection on the plane.

called the plane of incidence, as known from fundamentals of geometrical optics.

Angles of incidence α_I and refraction α_T are connected with the well-known Snell's law of refraction at an interface between media of refractive indices n_I and n_T [20–22,25–28]:

$$n_I \sin \alpha_I = n_T \sin \alpha_T, \quad (1)$$

where subscript I and T denote rays of incidence and refraction.

Consider the interface shape of any surface described by function $F(\mathbf{r}) = 0$, where \mathbf{r} is a position vector of any point of the interface. As known from differential geometry of surfaces, a normal unit vector of the interface is obtained from the formula [20,21,29]

$$\mathbf{N} = \frac{\text{grad}F(\mathbf{r})}{|\text{grad}F(\mathbf{r})|}. \quad (2)$$

With the use of vector calculus, one can obtain the law of refraction in the form [20]

$$\mathbf{A}_T = \frac{n_I}{n_T} \mathbf{A}_I - \frac{1}{n_T} \mathbf{N} \left(\sqrt{n_T^2 - n_I^2 \sin^2 \alpha_I} - n_I \cos \alpha_I \right). \quad (3)$$

A similar situation is in the case of the law of reflection. As can be proved, for example, in [20–22,25–28], the angle of incidence is equal to the angle of reflection. Therefore, the law of reflection can be retained in the vector form as follows [20,26]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_R &= \mathbf{A}_I + 2\mathbf{N} \cos \alpha_I, \\ \mathbf{A}_R &= \mathbf{A}_I - 2\mathbf{N}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_I). \end{aligned} \quad (4)$$

B. Rotation of Vectors around an Axis

Consider unit vector \mathbf{N} , which rotates around an axis defined by unit directional vector \mathbf{C} . As is well known in mathematics [30], one gets the formula

$$\mathbf{N}(\varphi) = \mathbf{N} \cos \varphi + \mathbf{C}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{N})(1 - \cos \varphi) + (\mathbf{C} \times \mathbf{N}) \sin \varphi, \quad (5)$$

where φ denotes rotation angle. For differentially small rotations $d\varphi$ ($\cos d\varphi \approx 1, \sin d\varphi \approx d\varphi$) one gets

$$\mathbf{N}(d\varphi) = \mathbf{N} + (\mathbf{C} \times \mathbf{N})d\varphi. \quad (6)$$

During the rotation of the scanner's mirror the unit directional normal vector \mathbf{N} of the mirror is transformed with respect to Eq. (5). The effect of rotation axis errors can be determined with Eq. (6).

C. Reflection from the Mirror and the System of Mirrors

Let a beam, which is defined by unit directional vector \mathbf{A}_1 , intersect planar mirror Z with unit normal vector \mathbf{N} directed to the incident beam, as is shown in Fig. 2.

Unit directional vector \mathbf{A}_2 of the reflected beam is then determined with the use of Eq. (4) as

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - 2\mathbf{N}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{M}\mathbf{A}_1. \quad (7)$$

Matrix \mathbf{M} and vectors \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , and \mathbf{N} are given as

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - 2N_x^2 & -2N_xN_y & -2N_xN_z \\ -2N_xN_y & 1 - 2N_y^2 & -2N_yN_z \\ -2N_xN_z & -2N_yN_z & 1 - 2N_z^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \\ A_{1z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} A_{2x} \\ A_{2y} \\ A_{2z} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}. \quad (8)$$

For the reflection on k mirrors with repeated use of Eq. (7) one gets the determinant

$$\mathbf{A}_{k+1} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & 2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_1) & 2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_2) & 2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_3) & \dots & 2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_k) \\ \mathbf{N}_1 & 1 & 2(\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2) & 2(\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_3) & \dots & 2(\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_k) \\ \mathbf{N}_2 & 0 & 1 & 2(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_3) & \dots & 2(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_k) \\ \mathbf{N}_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{N}_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

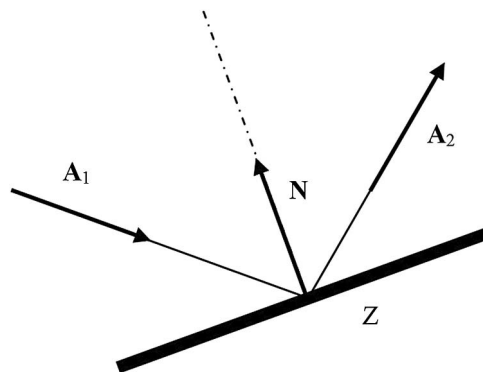


Fig. 2. Reflection on the planar mirror.

where \mathbf{A}_{k+1} is the unit directional vector of the reflected beam from the system of k mirrors. For the system of two mirrors, the most practically used case, \mathbf{A}_3 , is derived according to Eq. (9) as follows:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & 2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_1) & 2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_2) \\ \mathbf{N}_1 & 1 & 2(\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2) \\ \mathbf{N}_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{A}_1 - 2\mathbf{N}_1(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_1) - 2\mathbf{N}_2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_2) + 4\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2)(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}_1). \quad (10)$$

D. Beam Reflection from a Rotating Mirror and a System of Rotating Mirrors

If one rotates a mirror around any axis, the direction of the reflected beam will be changed depending on the angle of the mirror rotation and the direction of the axis around which the mirror rotates. Thus the direction of the mirror's unit normal directional vector will be changed with respect to Eq. (5). Consider the mirror's rotation around vector \mathbf{C}_1 by angle φ_1 . Then with Eq. (5) one gets for the rotation of the mirror's normal vector

$$\mathbf{N}(\varphi_1) = \mathbf{N}(0) \cos \varphi_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{N}(0))(1 - \cos \varphi_1) + (\mathbf{C}_1 \times \mathbf{N}(0)) \sin \varphi_1, \quad (11)$$

where $\mathbf{N}(0)$ denotes the initial position of the unit directional vector. For unit vector \mathbf{A}_2 of the reflected beam from the rotated mirror according to Eq. (7) one gets

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - 2\mathbf{N}(\varphi_1)(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{N}(\varphi_1)), \quad (12)$$

where \mathbf{A}_1 is the unit directional vector of the incident beam. For the reflection from the k rotating mirrors one gets, with Eqs. (5) and (7), formulas

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i(\varphi_i) &= \mathbf{N}_i(0) \cos \varphi_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{N}_i(0))(1 - \cos \varphi_i) \\ &\quad + [\mathbf{C}_i \times \mathbf{N}_i(0)] \sin \varphi_i, \\ \mathbf{A}_{i+1}(\varphi_i) &= \mathbf{A}_i(\varphi_i) - 2\mathbf{N}_i(\varphi_i)(\mathbf{A}_i(\varphi_i) \cdot \mathbf{N}_i(\varphi_i)), \end{aligned} \quad (13)$$

where $i = 1, 2, \dots, k$ and $\mathbf{A}_1(\varphi_1) = \mathbf{A}_1(0)$ is the directional vector of the beam, which is the incident to mirror Z_1 .

3. Calculation of Optical Beam Spot in Detection Plane and Its Accuracy

To calculate beam pattern position in the detection plane, it is necessary to model the trajectory of the beam through an optical system. First, the procedure for one-mirror scanners will be shown, then for two-mirror scanners.

A. One-Mirror Scanners

Consider the situation shown in Fig. 3. The ray of light, which comes from the source S and is given by unit directional vector \mathbf{A}_1 , goes through the timer T_S and impacts the mirror, which is rotated around axis \mathbf{C}_1 by angle φ_1 . Furthermore, the entire scanner rotates around the axis of the unit directional vector \mathbf{C}_2 by angle φ_2 . Let the mirror axis intersect the mirror at its center and consider the mirror center in the beginning of the coordinate system. Denote d_S as a distance from the timer T_S to the center of the mirror. The reflected beam continues and intersects detection plane ξ at point P . Subsequently, light of a beam is reflected from the point P and goes back in the reverse direction, impacts the mirror, and after reflection continues to the timer T_D . Consider the

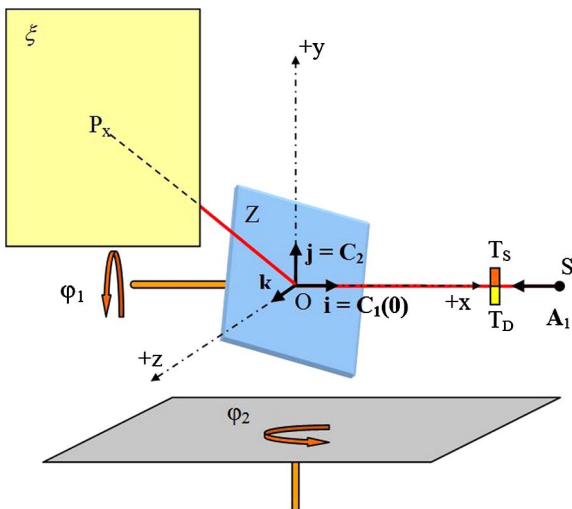


Fig. 3. One-mirror scanner.

distance from the center of the mirror to the timer T_D to be d_D .

The reflection from mirror Z is given by Eqs. (11) and (12). Due to complete scanner rotation by angle φ_2 , the final unit vector \mathbf{A}_3 of the beam can be estimated as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}_2 \cos \varphi_2 + \mathbf{C}_2(\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{A}_2)(1 - \cos \varphi_2) \\ &\quad + (\mathbf{C}_2 \times \mathbf{A}_2) \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (14)$$

or

$$\mathbf{A}_3^T = \mathbf{R}_y(\varphi_2)\mathbf{A}_2^T, \quad (15)$$

where

$$\mathbf{R}_y(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

is the rotation matrix around y axis by angle φ_2 [29–31].

To calculate vector \mathbf{r}_P —the intersection of the beam with detection plane ξ , which is given by formula [29–31]

$$\xi \equiv ((\mathbf{r} - b\mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}) = 0, \quad (17)$$

where \mathbf{q} is the unit directional normal vector of the plane ξ , \mathbf{r} is the position vector of an arbitrary point in the plane ξ , and b is the distance of the plane from the origin—then one gets, due to the condition of the reflection in the origin of coordinate system (x, y, z) ,

$$\mathbf{r}_P = p\mathbf{A}_3. \quad (18)$$

Subsequently, substitution to Eq. (17) leads to determination of parameter p , and the resulting formula follows:

$$\mathbf{r}_P = \frac{b}{\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{q}} \mathbf{A}_3. \quad (19)$$

For practical purposes, the requirement for vector \mathbf{r}_P as a function of angles of rotation φ_1 and φ_2 and a transit time t is made. One can write the following formula:

$$\mathbf{r}_P = d\mathbf{A}_3, \quad (20)$$

where d denotes a distance from the center of the mirror to point P . If one considers c to be a velocity of used light in a medium, the formula for a measured distance d_m is obtained as

$$d_m = ct = 2d + d_S + d_D, \quad (21)$$

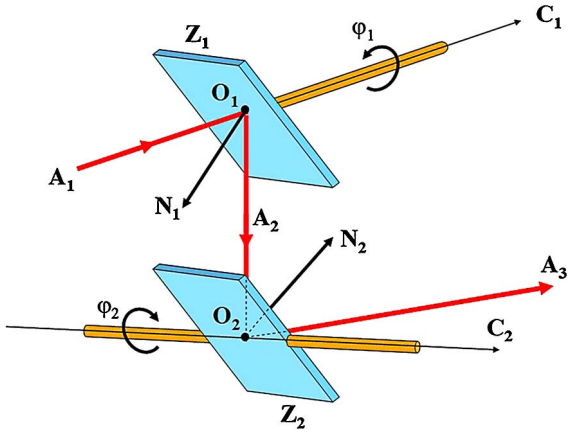


Fig. 4. System of two mirrors.

where transit time t is given as a difference between detected time in the timer T_D and T_S ($t = T_D - T_S$).

Rearranging Eq. (21) and substituting to Eq. (20) leads to the following formula:

$$\mathbf{r}_P = \frac{1}{2}(ct - d_S - d_D)\mathbf{A}_3. \quad (22)$$

From equations stated above one can see that components of the unit directional vector \mathbf{A}_3 are functions of angles of rotation φ_1 and φ_2 . This vector is multiplied by a function of measured transit time t and parameters of used optical system.

B. Two-Mirror Scanners

Consider a system of two planar mirrors Z_1 and Z_2 as shown in Fig. 4. Suppose that mirror Z_1 passes through point O_1 and rotates around an axis having unit directional vector \mathbf{C}_1 , and mirror Z_2 passes through point O_2 and rotates around an axis having unit directional vector \mathbf{C}_2 . Further, let \mathbf{N}_1 and \mathbf{N}_2 be unit vectors of normals to mirrors Z_1 and Z_2 , and \mathbf{A}_1 is the unit directional vector of the beam incident on mirror Z_1 , \mathbf{A}_2 is the unit directional vector of the reflected beam from mirror Z_1 and the incident on mirror Z_2 , and \mathbf{A}_3 is the unit directional vector of the reflected beam from mirror Z_2 .

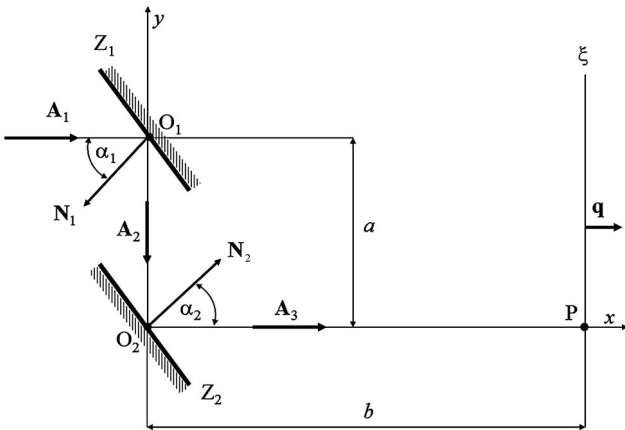


Fig. 5. System of two mirrors in the plane (x, y) .

Rotation of mirror Z_1 by angle φ_1 around an axis that is defined by unit directional vector \mathbf{C}_1 and mirror Z_2 by angle φ_2 around the axis that is defined by unit directional vector \mathbf{C}_2 with respect to initial positions can be easily described with Eq. (13).

Now calculate the coordinates of the intersection of the beam reflected from the system of mirrors Z_1 and Z_2 in detection plane ξ (Fig. 5). Denote unit vectors in the directions of the coordinate axes (x, y, z) as (i, j, k) . Axes x and y lie in the plane of Fig. 5 and the z axis is perpendicular to this plane. We say that the mirror system is in initial position, if vectors \mathbf{A}_1 and \mathbf{A}_3 are lying in mutually parallel planes. Vectors belonging to the initial position are denoted $\mathbf{A}_1(0)$, $\mathbf{A}_2(0)$, $\mathbf{A}_3(0)$, $\mathbf{N}_1(0)$, and $\mathbf{N}_2(0)$. The beam coming from the mirror system in the initial position then intersects plane ξ , which is located at distance b from point O_2 , at point P . Points O_1 and O_2 are separated by the value of a and point O_2 is placed in the origin of the coordinate system.

Vector \mathbf{r}_P of the beam intersection with detection plane ξ is obtained by a similar procedure as in the case of a one-mirror scanner, but considering the reflections on two mirrors the resulting formula is

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + p_3\mathbf{A}_3(\varphi_2), \quad (23)$$

where

$$\mathbf{r}_2 = a\mathbf{j} - a \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{N}_2(\varphi_2)}{\mathbf{A}_2(\varphi_1) \cdot \mathbf{N}_2(\varphi_2)} \mathbf{A}_2(\varphi_1), \quad (24)$$

$$p_3 = \frac{b + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{A}_3(\varphi_2) \cdot \mathbf{q}}, \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_3(\varphi_2) = \mathbf{A}_2(\varphi_1) - 2\mathbf{N}_2(\varphi_2)(\mathbf{A}_2(\varphi_1) \cdot \mathbf{N}_2(\varphi_2)), \quad (26)$$

$$\mathbf{A}_2(\varphi_1) = \mathbf{A}_1(0) - 2\mathbf{N}_1(\varphi_1)(\mathbf{A}_1(0) \cdot \mathbf{N}_1(\varphi_1)), \quad (27)$$

where \mathbf{r}_2 is the position vector of the point where the beam intersects mirror Z_2 . $\mathbf{N}_1(\varphi_1)$ and $\mathbf{N}_2(\varphi_2)$ are given by Eq. (13).

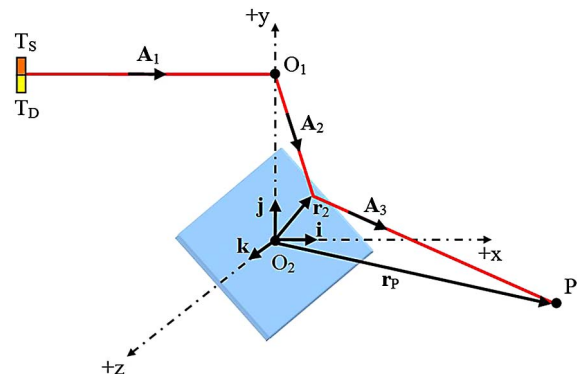


Fig. 6. Reflection on second mirror.

To calculate vector \mathbf{r}_P as a function of angles of rotation φ_1 and φ_2 and a transit time t , consider the situation depicted in Fig. 6. Measured transit time t can be expressed as a sum of several parts. First, the beam goes from the timer T_S to point O_1 and passes a distance d_S . Then it is reflected from the first mirror and passes a distance a' to a point given by vector \mathbf{r}_2 . Subsequently, the beam is reflected from the second mirror and through a distance d to point P . Next, light is reflected and a part of it goes reversely by the distance d and a' . At last, from point O_1 to the timer T_D it goes through a distance d_D . If c is considered to be a speed of used light, then the formula for measured distance d_m follows:

$$d_m = ct = 2(d + a') + d_S + d_D. \quad (28)$$

Suppose next the above-mentioned situation where centers of mirrors are separated by the value of a , point O_2 is placed in the origin of the coordinate system, and point O_1 lies on axis y . One can see that position vector \mathbf{r}_P given by the formula

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + d\mathbf{A}_3(\varphi_2), \quad (29)$$

where d is given with Eq. (28) as follows:

$$d = \frac{1}{2}(ct - d_S - d_D) - a'. \quad (30)$$

The last determined value is a' . With respect to Fig. 6 and to Eq. (24) one obtains

$$a' = |\mathbf{r}_2 - a\mathbf{j}| = -a \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{N}_2(\varphi_2)}{\mathbf{A}_2(\varphi_1) \cdot \mathbf{N}_2(\varphi_2)}. \quad (31)$$

With respect to the above-stated results, the final formula for position vector \mathbf{r}_P , which is given as a function of angles of rotation φ_1 and φ_2 and transit time t , can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_P = a\mathbf{j} + a \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{N}_2(\varphi_2)}{\mathbf{A}_2(\varphi_1) \cdot \mathbf{N}_2(\varphi_2)} [\mathbf{A}_3(\varphi_2) - \mathbf{A}_2(\varphi_1)] \\ + \frac{1}{2}(ct - d_S - d_D)\mathbf{A}_3(\varphi_2). \end{aligned} \quad (32)$$

Vectors $\mathbf{A}_2(\varphi_1)$ and $\mathbf{A}_3(\varphi_2)$ are given by Eqs. (26) and (27).

C. Estimation of Accuracy

Positional accuracy of the laser scanner's beam spot in the detection plane is evaluated by the coordinate standard deviation and by the sample coordinate standard deviation, which are defined as

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2}}, \quad s_{xy} = \sqrt{\frac{s_x^2 + s_y^2}{2}}, \quad (33)$$

where σ_i and s_i denote the standard deviation and the sample standard deviation of the i th coordinate. The sample standard deviation of one coordinate is given as

$$s_i = \sqrt{\frac{\sum_j \delta_{ij}^2}{n'}}, \quad (34)$$

where $\delta_{ij} = i'_j - i_j$ is the difference between the average value of the j th point of the i th coordinate i'_j and the measured values of the j th point i_j and n' is the number of redundant measurements.

To calculate the values of the standard deviations σ_x and σ_y , one can use the well-known law of variance propagation [32,33]. Consider a model given by a vector function $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ of n variables x_i ($i = 1, \dots, n$). If function \mathbf{f} has continuous partial derivatives, actual errors of variables x_i are small compared to the functional values and have an even distribution with zero expected value. The relationship for the variance-covariance matrix of functional values can be derived [32,33] as

$$\Sigma_f = \mathbf{J}\Sigma_x\mathbf{J}^T. \quad (35)$$

Variances of functional values then will be situated on the diagonal of the matrix Σ_f . In Eq. (35) \mathbf{J} denotes the Jacobi matrix of partial derivatives of the model with respect to all variables [32,33] and Σ_x is the variance-covariance matrix of the variables [32,33]. If variables are mutually independent, thus $\text{Cov}(x_i, x_j) = 0$, $i \neq j$, the variance-covariance matrix is then diagonal and one can rewrite Eq. (35) to the form

$$\sigma_{fi}^2 = \sum_{j=1}^n (\partial f_i / \partial x_j)^2 \sigma_{xj}^2. \quad (36)$$

For our purposes, one can consider that one-mirror and two-mirror optical scanners fulfill the above-stated conditions; therefore, the law of variance propagation can be used. Relations between standard deviations and uncertainties are clearly described in [34].

In 3D problems, accuracy of a measured point is completely characterized by the error ellipsoid. As known, its semiaxes are determined as a square root of eigenvalues [29–31] of the variance-covariance matrix [Eq. (35)] and directions of semiaxes are represented by eigenvectors [29–31].

Another easy method to identify the characteristics of accuracy is numerical modeling. If we know the standard deviations of all variables and functional relationships, we can, for example, simulate actual measurements, using the MATLAB pseudo-random number generator. With a sufficient number of repetitions, we can *a posteriori* calculate the characteristics of precision—the sample standard deviations [Eq. (34)].

4. Examples

A. Example 1—One-Mirror Scanner

Consider a situation of a one-mirror scanner with parameters (Fig. 3) $A_1 = -\mathbf{i}$, $C_1 = \mathbf{i}$, $C_2 = \mathbf{j}$, $N(0) = (\mathbf{i} + \mathbf{k})/\sqrt{2}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}$, $b = 100$ m, $d_S = 0.05$ m, and $d_D = 0.05$ m.

With the use of Eqs. (11), (12), and (14)–(18) one gets

$$\begin{aligned} A_2 &= -\mathbf{j} \sin \varphi_1 + \mathbf{k} \cos \varphi_1, \\ A_3 &= \mathbf{i} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \mathbf{j} \sin \varphi_1 + \mathbf{k} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ \mathbf{r}_P &= \mathbf{i} b \tan \varphi_2 - \mathbf{j} b \frac{\tan \varphi_1}{\cos \varphi_2} + \mathbf{k} b. \end{aligned} \quad (37)$$

Coordinates of point P on the detection plane are then given by

$$x_P = b \tan \varphi_2, \quad y_P = -b \frac{\tan \varphi_1}{\cos \varphi_2}, \quad z_P = b. \quad (38)$$

The above-stated situation is shown in Fig. 7.

The first and second formulas in Eq. (38) are parametrical equations of a curve in the detection plane. After a simple treatment one gets the equation of the curve in explicit form,

$$y_P = -\frac{\tan \varphi_1}{\sin \varphi_2} x_P. \quad (39)$$

Using the Taylor series [29–31] for coordinates x_P and y_P for small angles, considering just the power of 3 for angles of rotation, one gets

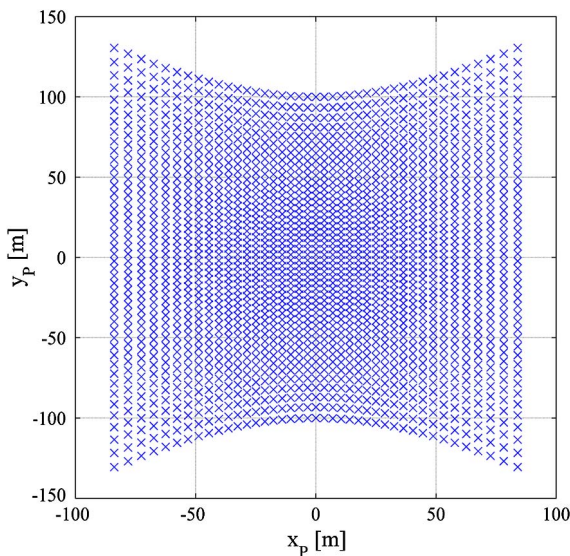


Fig. 7. Point P in the detection plane for $\varphi_1 = \{-45^\circ, -43^\circ, \dots, 43^\circ, 45^\circ\}$ and $\varphi_2 = \{-40^\circ, -38^\circ, \dots, 38^\circ, 40^\circ\}$ with parameters from example 1.

$$x_P \approx b \varphi_2 + \frac{b}{3} \varphi_2^3, \quad y_P \approx -b \varphi_1 - \frac{b}{2} \varphi_1 \varphi_2^2 - \frac{b}{3} \varphi_1^3, \quad (40)$$

where angles are substituted in radians. If we limit the series [Eq. (40)] only to the first components, we see that the coordinates of point P in the detection plane are approximately proportional to the angles of rotation. For relative error of the linear approximation of relations [Eq. (40)] one gets

$$\frac{\delta x_P}{x_P} = \frac{1}{3} \varphi_2^2, \quad \frac{\delta y_P}{y_P} = \frac{1}{2} \varphi_2^2. \quad (41)$$

For example, for angle $\varphi_2 = 10^\circ = 0.17$ rad is the relative error of linear approximation $\delta x_P/x_P \approx 1.0\%$ and $\delta y_P/y_P \approx 1.4\%$.

Consider mutually independent angles of the mirror rotation and the angle of the entire scanner rotation with standard deviations σ_{φ_1} and σ_{φ_2} , then for exact analysis of the positional accuracy of the laser beam spot in the detection plane one uses Eq. (36). The coordinate standard deviation is then given by

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2}}, \quad (42)$$

where

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial x_P}{\partial \varphi_1}\right)^2 \sigma_{\varphi_1}^2 + \left(\frac{\partial x_P}{\partial \varphi_2}\right)^2 \sigma_{\varphi_2}^2 = \left(\frac{b}{\cos^2 \varphi_2}\right)^2 \sigma_{\varphi_2}^2, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \left(\frac{\partial y_P}{\partial \varphi_1}\right)^2 \sigma_{\varphi_1}^2 + \left(\frac{\partial y_P}{\partial \varphi_2}\right)^2 \sigma_{\varphi_2}^2 \\ &= \left(\frac{-b}{\cos^2 \varphi_1 \cos \varphi_2}\right)^2 \sigma_{\varphi_1}^2 + \left(\frac{-b \tan \varphi_1 \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2}\right)^2 \sigma_{\varphi_2}^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Figure 8 presents the coordinate standard deviation in the detection plane.

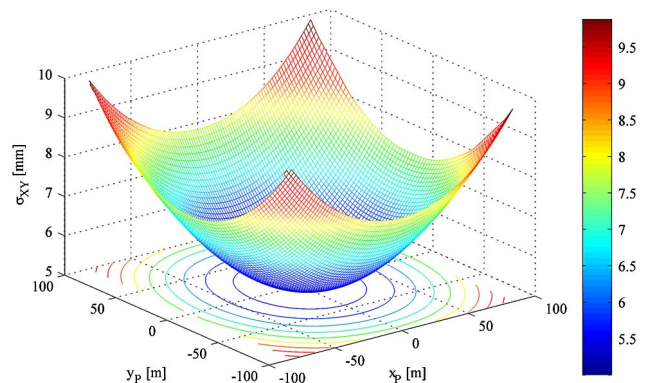


Fig. 8. Coordinate standard deviation in the detection plane—example 1.

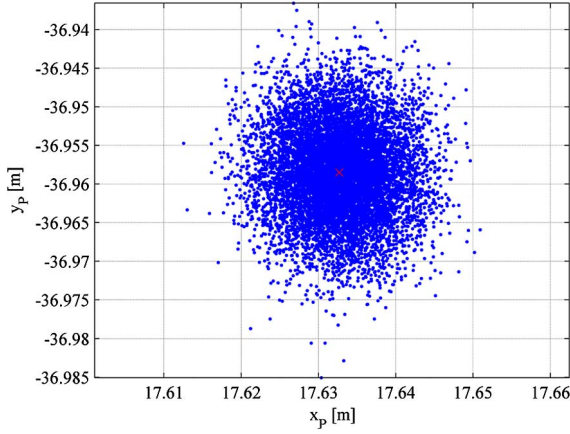


Fig. 9. Simulation of the laser beam spot in the detection plane for the expected values of the angles $\varphi_1 = 20^\circ$ and $\varphi_2 = 10^\circ$ and 10,000 repetitions.

For the simulation and *a posteriori* determination of the characteristics of accuracy assume a normal distribution with zero expected value of mirror rotation errors and standard deviations $\sigma_{\varphi_1} = \sigma_{\varphi_2} = 50 \mu\text{rad}$. Figure 9 shows the simulation of the laser beam spot for the expected values of the angles $\varphi_1 = 20^\circ$ and $\varphi_2 = 10^\circ$ for 10,000 repetitions. Figure 10 presents the progression of the sample coordinate standard deviation with an increase in the number of repetitions.

Position vector \mathbf{r}_P , as a function of angles of rotation φ_1 and φ_2 and transit time t , is determined with respect to Eq. (22). For its components, with consideration of the above-stated formulas, it holds that

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{1}{2}(ct - d_S - d_D) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ y_P &= -\frac{1}{2}(ct - d_S - d_D) \sin \varphi_1, \\ z_P &= \frac{1}{2}(ct - d_S - d_D) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (45)$$

Diagonal elements of the variance–covariance matrix, calculated using law of variance propagation, represent coordinate accuracy of the measured point. Variables φ_1 , φ_2 , and t are mutually independent; the variance–covariance matrix will be diagonal. Product $ct = d_m$ is more suitable for a numerical

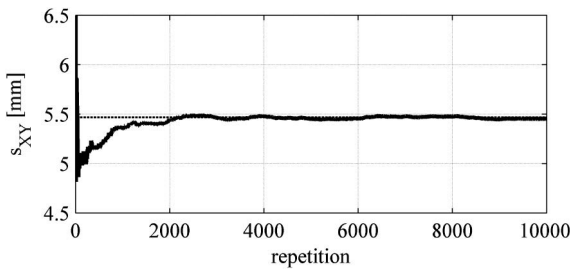


Fig. 10. Progression of sample coordinate standard deviation with an increase in the number of repetitions for angles $\varphi_1 = 20^\circ$ and $\varphi_2 = 10^\circ$.

estimation of accuracy instead of t , which is disproportionately small in comparison with other variables. One can simply derive the following formula for standard deviation σ_{ct} using law of variance propagation:

$$\sigma_{ct} = c\sigma_t, \quad (46)$$

where σ_t represents accuracy of measured transit time. Equation (46) is suitable for expression of requirements for technical parts of the scanner optical system. For accuracy in measured pseudodistance d_m equal to 0.001 m, with speed of used light approximately equal to $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, it holds that $\sigma_t \approx 3.3 \cdot 10^{-12} \text{ s} = 3.3 \text{ ps}$; the timer has to accomplish this condition.

Applying law of variance propagation [Eq. (36)] on the situation described with Eq. (45), one obtains

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \left[\frac{1}{2}(d_S + d_D - ct) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \right]^2 \sigma_{\varphi_1}^2 \\ &+ \left[\frac{1}{2}(ct - d_S - d_D) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right]^2 \sigma_{\varphi_2}^2 \\ &+ \left[\frac{1}{2} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \right]^2 \sigma_{ct}^2, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\sigma_y^2 = \left[\frac{1}{2}(d_S + d_D - ct) \cos \varphi_1 \right]^2 \sigma_{\varphi_1}^2 + \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi_1 \right]^2 \sigma_{ct}^2, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \left[\frac{1}{2}(d_S + d_D - ct) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \right]^2 \sigma_{\varphi_1}^2 \\ &+ \left[\frac{1}{2}(d_S + d_D - ct) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \right]^2 \sigma_{\varphi_2}^2 \\ &+ \left[\frac{1}{2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right]^2 \sigma_{ct}^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Eigenvalues and eigenvectors of the diagonal variance–covariance matrix with elements given by Eqs. (47)–(49) can be used for determination of error ellipsoids in 3D situations. In Fig. 11, ellipsoids in plane (xz) are shown for different values of transit time t . As is obvious, influence of timer accuracy is more significant in closer parts of the scanned field. Remote parts are more affected with errors of angles of rotation.

B. Example 2—Two-Mirror Scanner

Consider a two-mirror scanner with parameters (Fig. 12)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(0) &= \mathbf{i}, & \mathbf{C}_1 &= \mathbf{i}, & \mathbf{C}_2 &= \mathbf{k}, & \mathbf{q} &= \mathbf{i}, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = 45^\circ, \\ \mathbf{N}_1(0) &= -(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}, & \mathbf{N}_2(0) &= (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (50)$$

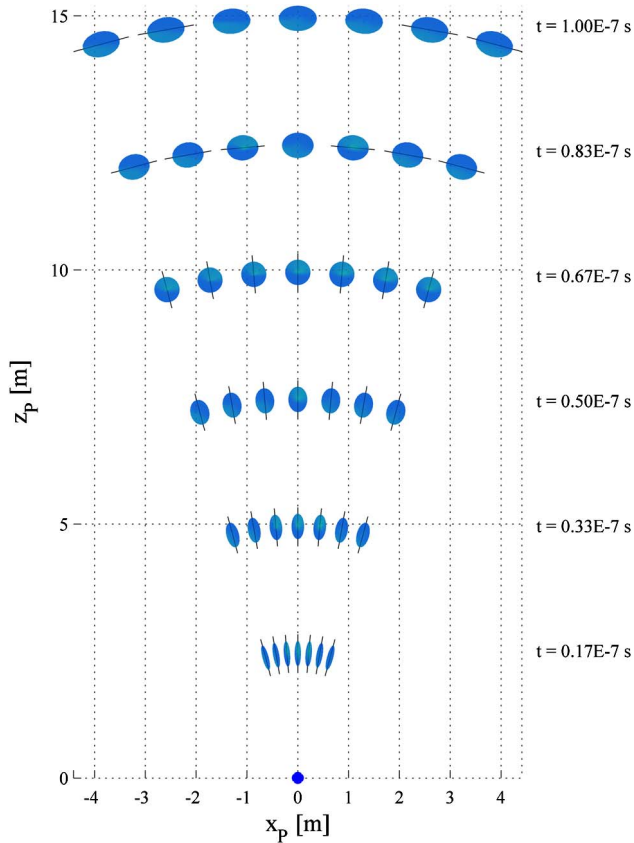


Fig. 11. Error ellipsoids (scaled 500:1) for different transit time t , $\varphi_1 = 0^\circ$ and $\varphi_2 = \{-15^\circ, -10^\circ, \dots, 10^\circ, 15^\circ\}$ with parameters from example 1.

$a = 0.05$ m, $b = 100$ m, $d_S = 0.05$ m, and $d_D = 0.05$ m.

With the use of Eqs. (13), (26), and (27) one gets

$$\mathbf{N}_1(\varphi_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} \cos \varphi_1 + \mathbf{k} \sin \varphi_1), \quad (51)$$

$$\mathbf{A}_2(\varphi_1) = -(\mathbf{j} \cos \varphi_1 + \mathbf{k} \sin \varphi_1), \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2(\varphi_2) &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}(\cos \varphi_2 - \sin \varphi_2) \\ &+ \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}}(\cos \varphi_2 + \sin \varphi_2), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3(\varphi_2) &= \mathbf{i} \cos \varphi_1 (1 - 2 \sin^2 \varphi_2) \\ &+ \mathbf{j} \cos \varphi_1 \sin 2\varphi_2 - \mathbf{k} \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (54)$$

Substitution of the estimated vectors in (24) and (26) leads to

$$\mathbf{r}_2 = -a\mathbf{k} \tan \varphi_1, \quad (55)$$

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{i}b + \mathbf{j}b \tan 2\varphi_2 - \mathbf{k} \tan \varphi_1 \left(a + \frac{b}{\cos 2\varphi_2} \right). \quad (56)$$

Coordinates of point P in the detection plane are then given by the following formulas:

$$\begin{aligned} x_P &= b, & y_P &= b \tan 2\varphi_2, \\ z_P &= -\tan \varphi_1 \left(a + \frac{b}{\cos 2\varphi_2} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

The second and third formulas in (57) are parametrical equations of the curve in the detection plane. After a simple treatment, one gets the equation of the curve in explicit form:

$$z_P = -\left(\frac{\tan \varphi_1}{\sin 2\varphi_2} \right) y_P - a \tan \varphi_1. \quad (58)$$

For small mirror rotations, with the use of the Taylor series, one gets from Eq. (57):

$$y_P \approx 2b\varphi_2 + \frac{8}{3}b\varphi_2^3, \quad z_P \approx -\varphi_1(a + b) - 2b\varphi_1\varphi_2^2, \quad (59)$$

where just the powers of 3 are considered for the rotation angles. Angles φ_1 and φ_2 are substituted in radians. If we limit the series [Eq. (57)] only to the first members, we see that the coordinates of point P in the detection plane are approximately proportional to the angles of rotation. For relative error of the linear approximation of relations [Eq. (57)] one gets

$$\frac{\delta y_P}{y_P} = \frac{4}{3}\varphi_2^2, \quad \frac{\delta z_P}{z_P} \approx \frac{2}{1 + a/b}\varphi_2^2 \approx 2\varphi_2^2, \quad (60)$$

where we supposed $a/b \ll 1$. For example, for angle $\varphi_2 = 10^\circ = 0.17$ rad is the relative error of linear approximation $\delta y_P/y_P \approx 4\%$ and $\delta z_P/z_P \approx 6\%$. With the use of the same procedure as in example 1, one gets for the coordinate standard deviation formula

$$\sigma_{yz} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2}}, \quad (61)$$

where

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y_P}{\partial \varphi_1} \right)^2 \sigma_{\varphi_1}^2 + \left(\frac{\partial y_P}{\partial \varphi_2} \right)^2 \sigma_{\varphi_2}^2 = \left(\frac{2b}{\cos^2 2\varphi_2} \right)^2 \sigma_{\varphi_2}^2, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \left(\frac{\partial z_P}{\partial \varphi_1} \right)^2 \sigma_{\varphi_1}^2 + \left(\frac{\partial z_P}{\partial \varphi_2} \right)^2 \sigma_{\varphi_2}^2 \\ &= \left(\frac{b + a \cos 2\varphi_2}{\cos^2 \varphi_1 \cos 2\varphi_2} \right)^2 \sigma_{\varphi_1}^2 \\ &+ \left(\frac{2b \tan \varphi_1 \tan 2\varphi_2}{\cos 2\varphi_2} \right)^2 \sigma_{\varphi_2}^2. \end{aligned} \quad (63)$$

Figure 13 presents the coordinate standard deviation in the detection plane.

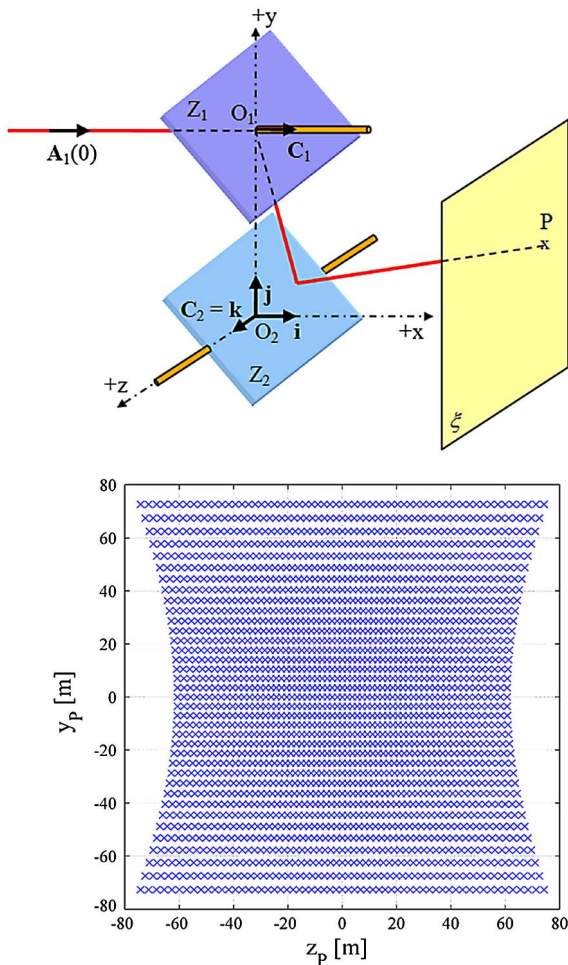


Fig. 12. Scheme of two-mirror scanner and point P in the detection plane for $\varphi_1 = \{-30^\circ, -29^\circ, \dots, 29^\circ, 30^\circ\}$, $\varphi_2 = \{-18^\circ, -17^\circ, \dots, 17^\circ, 18^\circ\}$ with parameters from example 2.

For the simulation and *a posteriori* determination of the accuracy characteristics one can assume a normal distribution with zero expected value of mirror rotation errors and with supposed standard deviations and obtain similar results as in example 1.

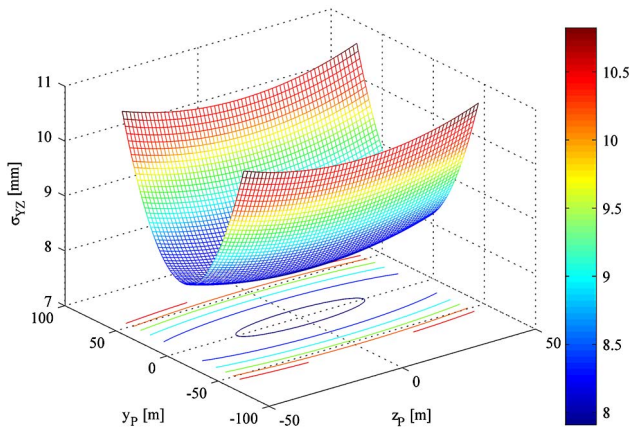


Fig. 13. Coordinate standard deviation in the detection plane—example 2.

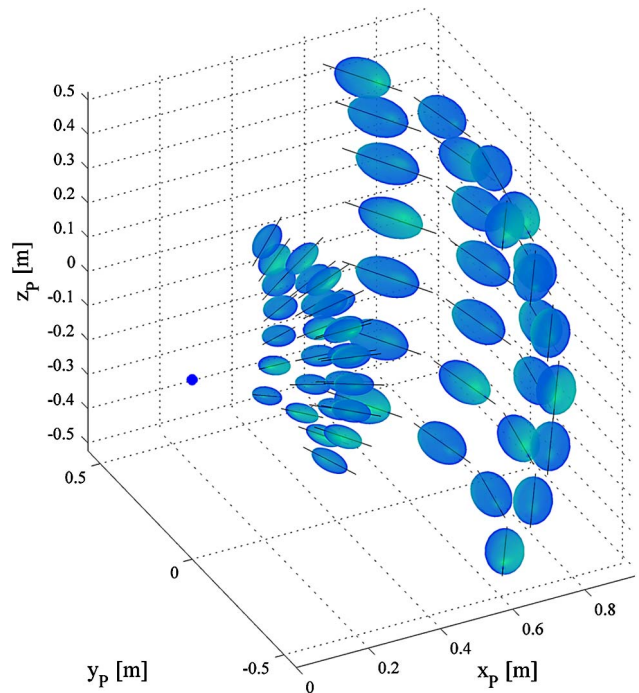


Fig. 14. Error ellipsoids (scaled 1000:1) for transit time $t = \{0.33 \cdot 10^{-8} \text{ s}, 0.67 \cdot 10^{-8} \text{ s}\}$, $\varphi_1 = \{-30^\circ, -20^\circ, \dots, 20^\circ, 30^\circ\}$ and $\varphi_2 = \{-15^\circ, -5^\circ, 5^\circ, 15^\circ\}$ with parameters from example 2.

Position vector \mathbf{r}_P , as a function of angles of rotation φ_1 and φ_2 and transit time t , is determined with respect to Eq. (32). For its components, with a consideration of the above-stated formulas, it holds that

$$\begin{aligned} x_P &= \left[\frac{1}{2}(ct - d_S - d_D) - \frac{a}{\cos \varphi_1} \right] \cos \varphi_1 \cos 2\varphi_2, \\ y_P &= \left[\frac{1}{2}(ct - d_S - d_D) - \frac{a}{\cos \varphi_1} \right] \cos \varphi_1 \sin 2\varphi_2, \\ z_P &= \frac{1}{2}[(d_S + d_D - ct) \sin \varphi_1]. \end{aligned} \quad (64)$$

With the use of same procedure as in example 1 one can calculate diagonal elements of the variance-covariance matrix. Subsequently, error ellipsoids are determined with eigenvalues and eigenvectors. In Fig. 14, one can see scaled ellipsoids in the model situation from example 2. Standard deviation for a timer was chosen as $\sigma_t = 3.3 \cdot 10^{-13} \text{ s}$. It is equivalent with accuracy 0.0001 m in the measured pseudodistance d_m . Standard deviations of mirror rotations were chosen as $\sigma_{\varphi_1} = \sigma_{\varphi_2} = 50 \mu\text{rad}$.

As is obvious, timer accuracy more affects the closer parts. Influence of angles of rotation is more significant in the remote parts.

5. Conclusions

The objective of this article was to present tracing of laser beams through the system of mirrors that is used for the construction of 3D laser scanners. The procedures for modeling of one-mirror and

two-mirror systems, which are used most often in practice, were derived. Furthermore, an analysis of the position of the laser beam spot in the detection plane was done. Subsequently, formulas for point position as a function of angles of rotation and a measured transit time were derived; application in practical 3D situations then can be done.

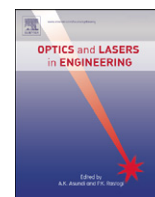
Position accuracy in a detection plane was determined with the use of coordinate standard deviation, calculated with the law of variance propagation, and with the use of the sample coordinate standard deviation, calculated *a posteriori* from the numerical modeling. In practical applications it is important to estimate accuracy in three dimensions. The most suitable approach is to calculate error ellipsoids from the variance-covariance matrix. One can make this procedure with the use of eigenvalues and eigenvectors; computations and results have been analyzed.

Formulas and procedures shown in the paper are a simple solution for modeling of the optical systems for laser scanners and for practical use in production. Exact analysis has shown that the accuracy of the presented optical systems is less than 10 mm for 100 m distance, if we consider the expected value of mirror rotation errors 50 μ rad. Numerical modeling endorsed the results of the exact solution; moreover, the size and the direction of the laser beam spot scattering in the detection plane shown is actually appropriate for construction processes. As analysis in three dimensions shows, influence of timer accuracy is more significant in closer parts of the scanned field. Remote parts are more affected with errors of angles of rotation.

This work was supported by the grant 13-31765S from the Czech Science Foundation and SGS14/110/OHK1/2T/11 from Czech Technical University in Prague.

References

1. G. F. Marshall and G. E. Stutz, *Handbook of Optical and Laser Scanning*, Vol. 147 (CRC, 2011).
2. G. Vosselman and H.-G. Maas, *Airborne and Terrestrial Laser Scanning* (Whittles, 2010).
3. "Control System—Laser Scanning—Surveying Works," 2013, <http://www.controlsystem.cz/en>.
4. "Surphaser 3D Scanners," 2013, <http://www.surphaser.com>.
5. "Leica Geosystems—HDS," 2013, <http://hds.leica-geosystems.com/en/index.htm>.
6. "TOPCON Global Gateway," 2013, <http://global.topcon.com>.
7. "RIEGL Laser Measurement Systems," 2013, <http://www.riegl.com>.
8. "FARO Laser Scanner Focus3D," 2013, <http://www.faro.com/focus/uk>.
9. "MDL," 2013, <http://www.mdl.co.uk/en/14735.aspx>.
10. "Galvos—Scanning Mirrors—Optical Scanners," 2013, <http://www.cambridgetechnology.com>.
11. "Laser Sensors—IR Temperature Sensors—High Precision Displacement, and Position Measurement—Micro-Epsilon Measurement," 2013, <http://www.micro-epsilon.com/index.html>.
12. R. J. Pegis and M. Rao, "Analysis and design of plane-mirror systems," *Appl. Opt.* **2**, 1271–1274 (1963).
13. J. Cohen-Sabban, Y. Cohen-Sabban, and A. Roussel, "Distortion-free 2-D space and surface scanners using light deflectors," *Appl. Opt.* **22**, 3935–3942 (1983).
14. Y. J. Li and J. Katz, "Laser beam scanning by rotary mirrors. I. Modeling mirror-scanning devices," *Appl. Opt.* **34**, 6403–6416 (1995).
15. Y. J. Li, "Laser beam scanning by rotary mirrors. II. Conic-section scan patterns," *Appl. Opt.* **34**, 6417–6430 (1995).
16. Y. J. Li, "Single-mirror beam steering system: analysis and synthesis of high-order conic-section scan patterns," *Appl. Opt.* **47**, 386–398 (2008).
17. Y. J. Li, "Beam deflection and scanning by two-mirror and two-axis systems of different architectures: a unified approach," *Appl. Opt.* **47**, 5976–5985 (2008).
18. Y. Friedman and N. Schweitzer, "Classification of stable configurations of plane mirrors," *Appl. Opt.* **37**, 7229–7234 (1998).
19. R. Shinozaki, O. Sasaki, and T. Suzuki, "Fast scanning method for one-dimensional surface profile measurement by detecting angular deflection of a laser beam," *Appl. Opt.* **43**, 4157–4163 (2004).
20. P. Pokorný, "Theoretical foundations of one-mirror and two-mirror optical scanners," bachelor's thesis (Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Prague, 2012).
21. A. Miks, *Applied Optics* (Czech Technical University, 2009), p. 230.
22. M. Born, E. Wolf, and A. B. Bhatia, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* (Cambridge University, 1999).
23. A. Miks, *Physics 2: Electromagnetic Field* (Czech Technical University, 2005), p. 162.
24. A. Yariv, *Quantum Electronics* (Wiley, 1967).
25. B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (Wiley, 2007).
26. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (Adams, 2008).
27. A. Lipson, S. G. Lipson, and H. Lipson, *Optical Physics*, 4th ed. (Cambridge University, 2010), p. 572.
28. F. Trager, *Springer Handbook of Lasers and Optics* (Springer, 2007).
29. G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review* (Dover, 2000).
30. E. Madelung, *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers* (Springer-Verlag, 1964).
31. K. Rektorys, *Survey of Applicable Mathematics* (SNTL, 1969).
32. K.-R. Koch, *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models* (Springer, 1999).
33. L. Mervart and Z. Lukes, *Adjustment Calculus* (Czech Technical University, 2007).
34. S. V. Gupta, *Measurement Uncertainties: Physical Parameters and Calibration of Instruments* (Springer-Verlag, 2012).



Analytical expressions for the circle of confusion induced by plane-parallel plate

Antonin Miks*, Petr Pokorny

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thakurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic

ARTICLE INFO

Article history:

Received 21 April 2012

Received in revised form

15 June 2012

Accepted 19 June 2012

Available online 6 July 2012

Keywords:

Geometrical optics

Aberrations

Optical imaging

ABSTRACT

This article provides a detailed theoretical analysis of the imaging properties of a plane-parallel plate, including exact formulas derived for the calculation of the ray aberrations and the wave aberrations induced by the plane-parallel plate and formulas for the 3rd and 5th order aberration. Formulas for a diameter of the circle of confusion are derived for both the 3rd and the 5th order aberration, as well as relations for optimal location of the image point and shape of the optimal image surface.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The plane-parallel plate [1–9] is widely used in numerous optical systems. Many optical prisms [4] are generally equivalent to the plane-parallel plate. It is therefore important to know their influence on imaging properties for the optical system, which they are part of. Detailed calculation of the wave aberration induced by the plane-parallel plate is explained in the paper [2] by Braat. The objective of this paper is to perform a general analysis of the geometric-optical properties of the plane-parallel plate and its influence on image quality. The ray aberration and the circle of confusion (RMS spot size) were selected as criteria for image quality. The advantage of the circle of confusion over the wave aberration is that it indicates the size of the area, where almost all energy of the beam of rays is concentrated in. Thus, point is not imaged as a point, but as certain area with a specific intensity profile and size. The circle of confusion affects the image sharpness. Using the diameter of the circle of confusion one can very roughly determine (estimate) the *MTF* (Modulation Transfer Function) of the optical system for low spatial frequencies and vice versa. Robb's paper [10] provides very complex formulas to calculate the RMS image size for an annular entrance pupil. Robb's work does not apply the explicit equations for the plane-parallel plate. Using formulas from Robb's work to apply them to the plane-parallel plate would result in very complex and lengthy calculations including the equations from Buchdahl's paper [11]. This is very impractical and difficult to use in practice.

This paper provides exact formulas for calculating the transverse ray aberrations induced by the plane-parallel plate. Furthermore, the paper presents a detailed analysis of ray aberrations, the wave aberration, the circle of confusion, the optimal position of the image point and the shape of the optimal image surface for the 3rd and the 5th order aberration. The formulas used are very clear and simple, hence very useful and easy to use in practice (for example, for the lens design and initial lens design etc.). To our best knowledge, there is neither the paper nor the book with publication of the same relations.

2. Ray aberrations induced by plane-parallel plate

The beam of rays is considered to pass through the plane-parallel plate with a thickness d made of a material (for example, optical glass) with a refractive index n . The above explained situation is shown in Fig. 1.

The surrounding medium in front of and behind the plate is assumed to be air. Further on the plane-parallel plate a homocentric beam of rays strikes having a peak at a point B, lying in the plane ξ_0 . Next two rays of this homocentric beam of rays are considered. The first ray intersect the plate at a point O (0,0,0), which has been chosen as the origin of the coordinate system. Let \mathbf{s}_0 be a unit direction vector of this ray. For the ray refraction by the law of refraction [1,3] the following equation holds:

$$\mathbf{s}'_0 = \mathbf{s}_0/n + (\cos \varepsilon'_0 - \cos \varepsilon_0/n)\mathbf{k} \quad (1)$$

where \mathbf{s}'_0 is a unit direction vector of the refracted ray, $\mathbf{k}=(0,0,1)$ is a normal vector to ξ_1 , which is the first surface of the plate, ε_0 and ε'_0 denote the angle of incidence and the refraction angle of

* Corresponding author. Tel.: +420 2 24354948.
E-mail address: miks@fsv.cvut.cz (A. Miks).

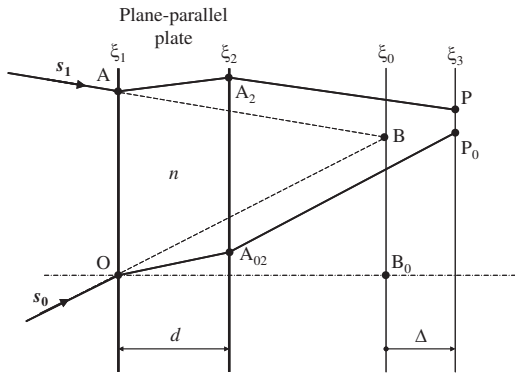


Fig. 1. Refraction of beams by the plane-parallel plate.

the beam on the first surface of the plate. After the refraction at the surface ξ_2 the ray will continue in direction of the unit vector $\mathbf{s}_0'' = \mathbf{s}_0$ and intersect the plane ξ_3 at a point P_0 , which is given by the vector

$$\mathbf{r}_{03} = \left(\frac{d}{n \cos \varepsilon'_0} + \frac{\mathbf{b}\mathbf{k} + \Delta - d}{\cos \varepsilon_0} \right) \mathbf{s}_0 + d \left(1 - \frac{\cos \varepsilon_0}{n \cos \varepsilon'_0} \right) \mathbf{k} \quad (2)$$

where \mathbf{b} is a position vector of the point B and $\Delta = d(n-1)/n$ is the paraxial displacement caused by the plate [4]. The ray defined by the unit direction vector \mathbf{s}_1 strikes the plane ξ_1 at a point A, which is given by the vector \mathbf{a} . After the refraction on the plane ξ_2 the ray will continue in the direction of the unit vector $\mathbf{s}_1'' = \mathbf{s}_1$ and intersect the plane at a point P, which is given by the vector

$$\mathbf{r}_{13} = \mathbf{a} + \left(\frac{d}{n \cos \varepsilon'_1} + \frac{\mathbf{b}\mathbf{k} + \Delta - d}{\cos \varepsilon_1} \right) \mathbf{s}_1 + d \left(1 - \frac{\cos \varepsilon_1}{n \cos \varepsilon'_1} \right) \mathbf{k} \quad (3)$$

For the transverse ray aberration $\delta \mathbf{r}' = (\delta x', \delta y', \delta z')$ in the plane ξ_3 , with respect to the ideal image of point B (i.e., the point which is determined by the vector $\mathbf{b} + \Delta \mathbf{k}$), the following exact relation is derived.

$$\delta \mathbf{r}' = \mathbf{r}_{13} - (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{k}) = \mathbf{a} + \left(\frac{d}{n \cos \varepsilon'_1} + \frac{\mathbf{b}\mathbf{k} - d/n}{\cos \varepsilon_1} \right) \mathbf{s}_1 + d \left(1 - \frac{\cos \varepsilon_1}{n \cos \varepsilon'_1} \right) \mathbf{k} - (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{k}). \quad (4)$$

Eq. (4) allows to perform an exact (accurate) calculation of the ray aberrations of the plane-parallel plate in general.

Assuming that the angle of incidence ε of the rays on the plate is not too large, $\varepsilon \leq 30^\circ$ (area of the 3rd and 5th order), $\cos \varepsilon$ and $\cos \varepsilon'$ can be simplified

$$\cos \varepsilon \approx 1 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{2} - \frac{\sin^4 \varepsilon}{8}, \quad \cos \varepsilon' \approx 1 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{2n^2} - \frac{\sin^4 \varepsilon}{8n^4}$$

$$\frac{1}{\cos \varepsilon'} \approx 1 + \frac{\sin^2 \varepsilon}{2n^2} + \frac{3\sin^4 \varepsilon}{8n^4}, \quad \frac{1}{\cos \varepsilon} \approx 1 + \frac{\sin^2 \varepsilon}{2} + \frac{3\sin^4 \varepsilon}{8} \quad (5)$$

Let vector $\mathbf{b} = (0, b_y, b_z)$. If w is denoted as the half-angle of the field of view, $\tan w = b_y/b_z$ is valid. According to Fig. 1 the following relations can be easily derived ($\mathbf{s}_1 = (s_{1x}, s_{1y}, s_{1z})$):

$$\cos \varepsilon_1 = \mathbf{s}_1 \mathbf{k} = s_{1z} = \frac{1}{\sqrt{1 + A_x^2 + (\tan w - A_y)^2}}$$

$$s_{1x} = -A_x \cos \varepsilon_1, \quad s_{1y} = (\tan w - A_y) \cos \varepsilon_1 \quad (6)$$

where $A_x = a_x/b_z$ and $A_y = a_y/b_z$ are the numerical apertures for the axial point B_0 .

Substituting the terms in Eq. (4) with the relations described in (5) and (6), one gets the following formulas (after a long

calculation) for the transverse ray aberration of the 5th order:

$$\delta x' = -LA_x(X_0 - X_1 \tan w + X_2 \tan^2 w - X_3 \tan^3 w + X_4 \tan^4 w)$$

$$\delta y' = -L(Y_0 - Y_1 \tan w + Y_2 \tan^2 w - Y_3 \tan^3 w + Y_4 \tan^4 w - Y_5 \tan^5 w) \quad (7)$$

where

$$L = \frac{3d(n^2-1)^2}{8n^5}, \quad N = \frac{4n^2}{3(n^2-1)},$$

$$X_0 = (A_x^2 + A_y^2)^2 - N(A_x^2 + A_y^2),$$

$$X_1 = 4A_x^2 A_y + 4A_y^3 - 2A_y N,$$

$$X_2 = 2A_x^2 + 6A_y^2 - N,$$

$$X_3 = 4A_y, \quad X_4 = 1,$$

$$Y_0 = A_y(A_x^2 + A_y^2)(A_x^2 + A_y^2 - N),$$

$$Y_1 = A_x^4 + 5A_y^4 + 6A_x^2 A_y^2 - A_x^2 N - 3A_y^2 N,$$

$$Y_2 = 6A_x^2 A_y + 10A_y^3 - 3A_y N,$$

$$Y_3 = 2A_x^2 + 10A_y^2 - N,$$

$$Y_4 = 5A_y, \quad Y_5 = 1$$

Knowing the transverse ray aberrations $\delta x'$ $\delta y'$, the wave aberration W can be calculated from relation [6,9]

$$W = W_Q - W_P = \int_P^Q (\delta x' dA_x + \delta y' dA_y) \quad (8)$$

where the integration is performed on a reference sphere from the point P to the point Q, as is shown in Fig. 2 for the case of an elliptical pupil. At first one integrates from the point P to B and then from B to the point Q.

Using the Eq. (7) in (8), one obtains after integration the following relation for the 5th order wave aberration

$$W = \left[\frac{K}{4} - \frac{L}{6} (A_x^2 + A_y^2) \right] (A_x^2 + A_y^2)^2 - \left[K - L(A_x^2 + A_y^2) \right] A_y (A_x^2 + A_y^2) \tan w$$

$$+ \frac{1}{2} \left[K(A_x^2 + 3A_y^2) - L(A_x^2 + A_y^2)(A_x^2 + 5A_y^2) \right] \tan^2 w$$

$$- A_y \left[K - \frac{2}{3} L(3A_x^2 + 5A_y^2) \right] \tan^3 w$$

$$- \frac{1}{2} L(A_x^2 + 5A_y^2) \tan^4 w + LA_y \tan^5 w$$

$$= W_3 + W_5 \quad (9)$$

where

$$K = d(n^2 - 1)/2n^3, \quad L = 3d(n^2 - 1)^2/8n^5$$

$$W_3 = K \left[\frac{1}{4} (A_x^2 + A_y^2)^2 - (A_x^2 + A_y^2) A_y \tan w + \frac{1}{2} (A_x^2 + 3A_y^2) \tan^2 w - A_y \tan^3 w \right]$$

$$W_5 = L \left[\frac{1}{6} (A_x^2 + A_y^2)^3 + (A_x^2 + A_y^2)^2 A_y \tan w - \frac{1}{2} (A_x^2 + A_y^2)(A_x^2 + 5A_y^2) \tan^2 w + \frac{2}{3} (3A_x^2 + 5A_y^2) A_y \tan^3 w - \frac{1}{2} (A_x^2 + 5A_y^2) \tan^4 w + A_y \tan^5 w \right]$$

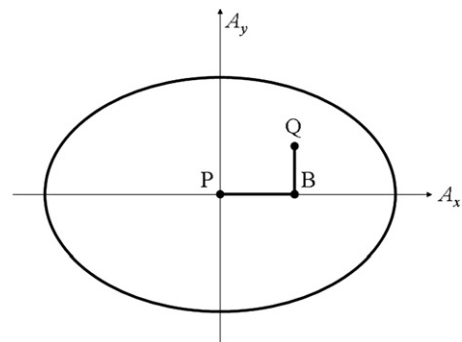


Fig. 2. Integration path for the calculation of wave aberration W.

Neglecting in relation (9) the term W_5 which stands for small quantities, one obtains the relation valid for the 3rd order wave aberration.

3. Calculation of the circle of confusion

To calculate the center of the spot diagram the substitution $A_x=A \cos \varphi$, $A_y=A \sin \varphi$ can be used, where A is a numerical aperture of the incident beam on the plane-parallel plate, φ is the polar angle in the plane ξ_1 .

For the coordinates of the center of the spot diagram (energetic center of the beam of rays spot) one obtains for the 5th order aberration

$$\langle \delta x' \rangle = 0, \langle \delta y' \rangle = \frac{1}{\pi A_M^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{A_M} \delta y' A dA d\varphi$$

$$= L[(A_M^4 - A_M^2 N) \tan w + (3A_M^2 - N) \tan^3 w + \tan^5 w] \quad (10)$$

where A_M is the maximal numerical aperture. Diameter d_c of the circle of confusion (RMS spot size) is determined by the following formula:

$$d_c = 2\rho_c = 2\sqrt{\langle \rho_c^2 \rangle} \quad (11)$$

where

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{1}{\pi A_M^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{A_M} [(\delta x' - \langle \delta x' \rangle)^2 + (\delta y' - \langle \delta y' \rangle)^2] A dA d\varphi \quad (12)$$

Using the relations (7), (10), (11) and (12) to calculate the circle of confusion's diameter d_c in the 5th aberration order one gets

$$d_c = \frac{2}{3} L A_M \sqrt{\sum_{i=0,2,4,6,8} D_i \tan^i w}, \quad (13)$$

where

$$D_0 = \frac{3}{2} A_M^8 - \frac{18}{5} A_M^6 N + \frac{9}{4} A_M^4 N^2$$

$$D_2 = 36 A_M^6 - 54 A_M^4 N + 18 A_M^2 N^2$$

$$D_4 = 171 A_M^4 - 144 A_M^2 N + \frac{45}{2} N^2$$

$$D_6 = 201 A_M^2 - 72 N$$

$$D_8 = 117/2$$

The diameter of the circle of confusion indicates the size of the "spot" in which most of the energy of the beam of rays spread caused by the aberrations is concentrated. The point therefore does not appear as a point, but as a spot. As a result of this phenomenon the resolution of the optical system will be reduced and the number of lines R per unit of length is bound to the circle of confusion's diameter by the approximate relation $R \approx 1/d_c$. In the case of a physically perfect optical system the central part of the diffraction pattern is called Airy disk, whose diameter is in the case of a circular and uniformly illuminated pupil given by $d_A = 1.22\lambda/A_M$, where λ is the wavelength of the light. If the diameter of the circle of confusion is less than the diameter of the Airy disk, i.e. $d_c < d_A$, then the aberrations of the optical system do not affect the image quality and the optical system can be practically considered as an optical system with a good image quality.

For a plane-parallel plate thickness d , which does not cause visible degradation of the image quality, one gets the expression

$$d < \frac{4.9\lambda n^5}{A_M^2(n^2-1)^2 \sqrt{\sum_{i=0,2,4,6,8} D_i \tan^i w}} \quad (14)$$

In the next step the position of the "image point", where the circle of confusion has the smallest diameter will be determined. Through shifting the image plane by a value of D with respect to the paraxial image plane of the optical system the ray aberrations changes in the following way:

$$\delta x'_D = \delta x' - DA \cos \varphi, \delta y'_D = \delta y' - DA \sin \varphi \quad (15)$$

Using relations (7), (10), (11), (12) and (15) one obtains for the diameter of the circle of confusion, in a plane shifted by the value of D with respect to the paraxial image plane, the following relation:

$$(d_c)_D = 2A_M \sqrt{\sum_{i=0,2,4,6,8} d_i \tan^i w} \quad (16)$$

where

$$d_0 = \frac{1}{6} A_M^8 L^2 - \frac{2}{5} A_M^6 L^2 N + \frac{1}{2} A_M^4 L D + \frac{1}{4} A_M^4 L^2 N^2 - \frac{2}{3} A_M^2 L N D + \frac{1}{2} D^2$$

$$d_2 = 4A_M^6 L^2 - 6A_M^4 L^2 N + 2A_M^2 L^2 N^2 + 4A_M^2 L D - 2DLN$$

$$d_4 = 19A_M^4 L^2 - 16A_M^2 L^2 N + \frac{5}{2} L^2 N^2 + 3LD$$

$$d_6 = \frac{67}{3} A_M^2 L^2 - 8L^2 N$$

$$d_8 = \frac{13}{2} L^2$$

From the necessary condition for the extreme ($\partial(d_c)_D/\partial D=0$) one obtains for the optimal position of the image point the following relation:

$$D_{opt} = L \left[A_M^2 \left(\frac{2}{3} N - \frac{1}{2} A_M^2 \right) + 2(N - 2A_M^2) \tan^2 w - 3 \tan^4 w \right] \quad (17)$$

From relation (17) it is obvious that the optimal image point lies on the rotational surface (with respect to the optical axis of the system—the axis z) whose z coordinate, with respect to the paraxial image plane, is equal to D_{opt} (optimal image surface). Substituting relation (17) into relation (16) one obtains for the diameter of the circle of confusion in the optimal image point the following relation:

$$(d_c)_{min} = 2A_M L \sqrt{\sum_{i=0,2,4,6,8} d_{im} \tan^i w} \quad (18)$$

where

$$d_{0m} = \frac{1}{24} A_M^8 - \frac{1}{15} A_M^6 N + \frac{1}{36} A_M^4 N^2$$

$$d_{2m} = 2A_M^6 - \frac{7}{3} A_M^4 N + \frac{2}{3} A_M^2 N^2$$

$$d_{4m} = \frac{19}{2} A_M^4 - 6A_M^2 N + \frac{1}{2} N^2$$

$$d_{6m} = \frac{31}{3} A_M^2 - 2N$$

$$d_{8m} = 2 \quad (19)$$

For the ratio of the circles of confusion in the optimal image point $(d_c)_{min}$ and the paraxial image plane d_c in the 5th order aberration one obtains from the relations (13) and (18) the following relation assuming a point lying on the optical axis of the system ($\tan w=0$)

$$\frac{(d_c)_{min}}{d_c} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3A_M^4/2 - 12A_M^2 N/5 + N^2}{2A_M^4/3 - 8A_M^2 N/5 + N^2}} \approx \frac{1}{3} \quad (20)$$

This relation shows that the diameter of the circle of confusion in the optimal image plane is approximately three times smaller than in the paraxial plane. Assuming, for example, an aperture as large as $A_M=0.8$ and a refractive index of the plate $n=1.5$ ($N=2.4$ and $N^2=5.8$), then from the Eq. (20) one obtains: $(d_c)_{min}/d_c=0.35$ showing that $1/3=0.33$ is quite good estimation.

In the case of 3rd order aberration (Seidel aberrations), one obtains from the previous relations, that

$$K = d(n^2 - 1)/2n^3$$

$$\delta x'_{III} = K[A^3 \cos \phi - A^2 \sin 2\phi \tan w + A \cos \phi \tan^2 w]$$

$$\delta y'_{III} = K[A^3 \sin \phi - A^2(1 + 2 \sin^2 \phi) \tan w + 3A \sin \phi \tan^2 w - \tan^3 w] \quad (21)$$

$$W = K \left[\frac{1}{4} A^4 - A^3 \sin \phi \tan w + \frac{1}{2} A^2 (1 + 2 \sin^2 \phi) \tan^2 w - A \sin \phi \tan^3 w \right] \quad (22)$$

$$d_c = K A_M \sqrt{A_M^4 + 8A_M^2 \tan^2 w + 10 \tan^4 w} \quad (23)$$

$$(d_c)_D = A_M \sqrt{K^2 (A_M^4 + 8A_M^2 \tan^2 w + 10 \tan^4 w) + 2D^2 - 8DK(A_M^2/3 + \tan^2 w)} \quad (24)$$

$$(d_c)_{\min} = \frac{K A_M}{3} \sqrt{A_M^4 + 24A_M^2 \tan^2 w + 18 \tan^4 w} \quad (25)$$

For the ratio of the circles of confusion in the optimal image point $(d_c)_{\min}$ and the paraxial image plane d_c in the 3rd order aberration one obtains from the relations (23) and (25) the following relation assuming a point lying on the optical axis of the system ($\tan w = 0$):

$$\frac{(d_c)_{\min}}{d_c} = \frac{1}{3}$$

This relation shows that the diameter of the circle of confusion in the optimal image plane is three times smaller than in the paraxial plane.

If the diameter of the circle of confusion is less than the diameter of the Airy disk, i.e. $(d_c)_{\min} < d_A$, then the aberrations of the optical system do not affect the image quality so much and the optical system can be practically considered as an optical system with a good image quality. From relations (22) and (25) assuming for example for $\tan w = 0$ (axial point) one obtains for the spherical aberration coefficient of the 3rd order relation: $W_{40} = (3/8F)(d_c)_{\min}$. As is explained in [6], it holds that if the Strehl ratio is greater than 0.8, than $W_{40} < 0.95\lambda$ must hold. Substituting into the previous relation one gets: $(d_c)_{\min} = (8F/3) 0.95\lambda = 2.53\lambda F \approx d_A$. This simple calculation provides evidence that the claim $(d_c)_{\min} < d_A$ provides a relatively good estimation for practice.

Using relation (18) one gets the following expression for the thickness d of the plane-parallel plate:

$$d < \frac{1.63\lambda n^5}{A_M^2 (n^2 - 1)^2 \sqrt{\sum_{i=0,2,4,6,8} d_{im} \tan^i w}} \quad (26)$$

For a point lying on the optical axis ($\tan w = 0$) one obtains from (26) the following relation for the thickness d :

$$d < \frac{7.34\lambda n^3}{A_M^4 (n^2 - 1)} \quad (27)$$

In the case of optical systems (for example, photographic lenses) with large values for the wave aberration (a few wavelengths), the wave aberration does not provide any useful information while the circle of confusion provides precise information on the quality of imaging. Using the diameter d_c of the circle of confusion (RMS spot size), one can very roughly determine (estimate) the *MTF* (Modulation Transfer Function) of the optical system for low spatial frequencies and vice versa, as is indicated

by the simple relation from [9].

$$MTF(R) \approx 1 - (4F\lambda/\pi)R - (\pi^2/2)R^2 d_c^2 \approx 1 - 1.273F\lambda R - 4.935R^2 d_c^2, \quad (28)$$

where F denotes the f-number of the optical system, λ denotes the wavelength, R denotes the spatial frequency i.e. number of lines/mm for the diameter d_c of the circle of confusion measured in mm. Although being a rough estimate, this information is very useful in practice.

4. Example

In Fig. 3 the behavior of the transverse ray aberration in the case of 3rd and 5th order aberration for $d = 10$ mm, $n = 1.5$, $a_x = 0$, $a_y = 20$, $a_z = 0$, $b_x = 0$, $b_y \in \langle 0, 46.6 \rangle$, $b_z = 100$ and $A_M = 0.2$ is shown. As one can see from Fig. 3, the deviations in the case of the 3rd order aberration (Eq. (21)) are lower than 3% and in the case of the 5th order aberration the deviations of our Eq. (7) from the exact results (exact ray tracing—Eq. (4)) are negligible. In this case (Fig. 3), the error is smaller than 0.2%. For the most optical systems (occurring in practice) our Eqs. (7) and (9) are sufficiently accurate for calculation of the transverse ray aberrations and the wave aberration. Eq. (4) allows to perform accurate (exact) calculation of the ray aberrations of the plane-parallel plate in general.

5. Conclusion

The objective of the article was to provide a detailed geometric-optical analysis of a plane-parallel plates's imaging characteristics. A number of novel analytical relations were derived helping to extend the theoretical knowledge in the field of geometrical optics on the new relations in the area of aberration induced by the plane-parallel plate or its optical prism equivalent. In particular, relation (4) allows the exact calculation of the transverse ray aberration induced by the plane-parallel plate. Furthermore, relations (7) allow to calculate the 5th order transverse ray aberration and relations (13), (14), (16), (18), (20) and (26) allow to calculate the diameter of the circle of confusion in both paraxial and optimal image plane and determine the optimal point position and shape of the optimal image surface.

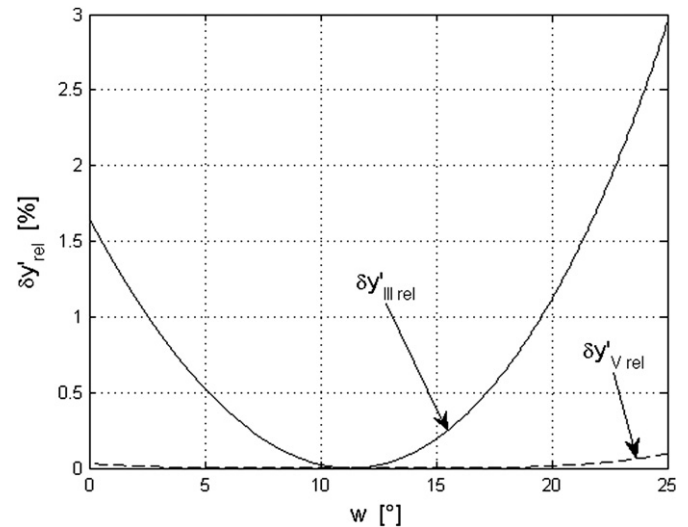


Fig. 3. Dependence of relative deviations of transverse ray aberration $\delta y'_{rel} = 100 |(\delta y'_{exact} - \delta y') / \delta y'_{exact}|$ of the 3rd and 5th order aberration on the half-angle of the field of view w for maximal numerical aperture $A_M = 0.2$.

Relation (9) presents the wave aberration in form of the apparent influence of the 3rd and 5th order aberrations on the final value of the wave aberration. In addition, the above stated relations allow to calculate the thickness of the plane-parallel plate without visible deterioration of the image quality, the influence of a prism inserted into the optical system on its aberration, the effect of a cover glass and water layers on the quality of imaging when observing biological structures in confocal microscopy, etc. The relations derived can also be applied to the area of primary optical systems design and to the tolerance analysis of optical systems containing optical plane-parallel plates and prisms. These relations have a simple form and can be easily programmed for example in the MATLAB computing environment, etc.

Acknowledgments

This work has been supported by the Grant P102/10/2377 from the Czech Science Foundation.

References

- [1] Herzberger M. Modern geometrical optics. New York: Interscience; 1958.
- [2] Braat J. Analytical expressions for the wave-front aberration coefficients of a tilted plane-parallel plate. Appl Opt 1997;36:8459–67.
- [3] Miks A. Applied optics. Prague: Czech Technical University Press; 2009.
- [4] Smith W. Modern optical engineering. 3rd ed. New York: McGraw-Hill; 2000.
- [5] Eerenbeemd J, Stallinga S. Compact system description for systems comprising a tilted plane parallel plate. Appl Opt 2007;46:319–26.
- [6] Welford WT. Aberrations of the symmetrical optical systems. London: Academic Press; 1974.
- [7] Murty MVRK. The use of a single plane parallel plate as a lateral shearing interferometer with a visible gas laser source. Appl Opt 1964;3:531–4.
- [8] Malacara D. Optical shop testing. New York: John Wiley and Sons; 2007.
- [9] Sliusarev GG. Aberration and optical design theory. Bristol: Adam Hilger; 1984.
- [10] Robb PN. Analytic merit function based on Buchdahl's aberration coefficients. J Opt Soc Am 1976;66:1037–41.
- [11] Buchdahl HA. Optical aberration coefficients. III. The computation of the tertiary coefficients. J Opt Soc Am 1958;48:747–56.

B Ohlasy a recenze

B.1 Citace

A. Mikš and P. Pokorný. Edge spread function of Talbot phenomenon. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 127(19): 8065 – 8069, 2016.

Citace v: F. Jose Torcal-Milla and L. Miguel Sanchez-Brea. Near-field diffraction-based focal length determination technique. *Optics and Lasers in Engineering*, 92:105 - 109, 2017.

A. Miks and P. Pokorny. Use of diffraction grating for measuring the focal length and distortion of optical systems. *Appl. Opt.*, 54(34): 10200 – 10206, 2015.

Citace v: F. Jose Torcal-Milla and L. Miguel Sanchez-Brea. Near-field diffraction-based focal length determination technique. *Optics and Lasers in Engineering*, 92:105 - 109, 2017.

P. Pokorny and A. Miks. 3D optical two-mirror scanner with focustunable lens. *Appl. Opt.*, 54(22): 6955 – 6960, 2015.

Citace v: J. Ahn, A. Park, J. Kim, B. Lee, and J. Eom. Development of Three-Dimensional Dental Scanning Apparatus Using Structured Illumination. *Sensors*, 17(7), 2017.

P. Pokorny. One-mirror and two-mirror three-dimensional optical scanners - position and accuracy of laser beam spot. *Appl. Opt.*, 53(12): 2730 – 2740, 2014.

Citace v: Alexey A. Gorbachev, X. Anh Phuong Hoang. Invariant electro-optical system for deflection measurement of floating docks. *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection*, 10329, 2017.

A. Miks and P. Pokorny. Analytical expressions for the circle of confusion induced by plane-parallel plate. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(11): 1517 – 1521, 2012.

Citace v: C. J. R. Sheppard. Balanced diffraction aberrations, independent of the observation point: application to a tilted dielectric plate. *JOSA A - Optics Image Science and Vision*, 30(10): 2150 - 2161, 2013.

B.2 Další ohlasy a recenze

A. Mikš and P. Pokorný. Simple method for determination of parameters of cemented doublet. *Appl. Opt.*, 55(20): 5456 – 5458, 2016.

Spotlight on Optics
srpen 2016

www.osapublishing.org/spotlight/summary.cfm?id=345377

„Reverse engineering the inner parameters of a cemented doublet has always presented a significant challenge to optical engineers. However, new advances in technology have enabled a greatly simplified method to determining these inner parameters. Of the seven design parameters of a cemented doublet, two are conventionally accessible for measurement (the two outer radii of curvature). Newly available commercial measurement devices allow for center thickness measurements of the two individual components. The three remaining design parameters (the inner radius of curvature and the two indices of refraction) are unknown and are the focus of the method in this paper. Adding measurements of the doublet's focal length and of the front and rear focal point locations, Mikš and Pokorný derive from the paraxial ray trace equations a set of equations containing only measured quantities. The authors provide an example using a real doublet and are able to show very close agreement between calculated and nominal parameters.“

Spotlight Summary by Kathleen Adelsberger

■ **A. Mikš and P. Pokorný. Spherical aberration of an optical system and its influence on depth of focus. *Appl. Opt.*, 56(17): 5099 – 5105, 2017.**

Top Downloads from June 2017, Applied Optics

červen 2017

www.osapublishing.org/ao/home.cfm

■ **B.3 Významná ocenění autora**

■ **Cena Stanislava Hanzla**

listopad 2017

■ **Cena Josefa Hlávky pro nejlepší studenty a absolventy pražských vysokých škol, brněnské techniky a mladé vědecké pracovníky Akademie věd České republiky**

listopad 2015

■ **Cena ministra školství, mládeže a tělovýchovy pro vynikající studenty a absolventy studia ve studijním programu a za mimořádné činy studentů**

listopad 2014

