

Bakalářská práce

Numerická simulace transsonického proudění se zdrojem tepla

(Numerical simulation of transonic flow with a heat source)

ČVUT – FAKULTA STROJNÍ



ÚSTAV TECHNICKÉ MATEMATIKY – U12101

Teoretický základ strojního inženýrství

MARIE RATINGEROVÁ

Vedoucí práce: doc. Ing. Jan Halama, PH.D.

2017/2018

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením doc. Ing. Jana Halamy, Ph.D., s použitím zdrojů uvedených na konci mé práce.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že České vysoké učení technické v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne _____

Marie Ratingerová _____

Poděkování:

Děkuji doc. Ing Janu Halamovi, Ph.D. za vedení práce, veškeré rady, pochopení, trpělivost a přátelský přístup. Dále děkuji své rodině za veškerou podporu, kterou mi věnovali během studia a psaní této práce.

Anotace:

Tato bakalářská práce se zabývá simulací chování plynu v rázové trubici, Lavalově dýze a náporovém motoru pomocí numerických metod. Použitými numerickými metodami jsou metoda konečných diferencí a metoda konečných objemů, jejichž principy jsou v práci vysvětleny. Další část práce se zabývá analýzou výsledků dosažených simulací.

Klíčová slova:

Eulerovy rovnice, metoda konečných diferencí, metoda konečných objemů, rázová trubice, rázová vlna, Lavalova dýza, náporový motor

Abstract:

This bachelor thesis concentrates on the simulation of the behaviour of gas in a shock tube, a Laval nozzle and in a ramjet engine, by the use of numerical methods. These numerical methods are: the Finite Difference Method and the Finite Volume Methods. The principals of both are explained in this work. Another part of this work deals with the analysis of the acquired results.

Keywords:

Euler's Equations, Finite Difference Method, Finite Volume Method, Shock Tube, Shock Wave, Laval's Nozzle, Ramjet Engine



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Ratingerová** Jméno: **Marie** Osobní číslo: **419593**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Numerická simulace transsonického proudění se zdrojem tepla

Název bakalářské práce anglicky:

Numerical simulation of transonic flow with heat source

Pokyny pro vypracování:

1. Popis matematického modelu a formulace úlohy pro případ 1D proudění ideálního plynu v dýze s proměnným průřezem.
2. Vytvoření numerické metody založené na metodě konečných diferencí nebo konečných objemů.
3. Otestování numerické metody pro případ proudění v Lavalově dýze.
4. Úprava modelu proudění a numerické metody - přidání členu, který modeluje zdroj tepla.
5. Simulace proudění se zdrojem tepla pro vhodný testovací případ.
6. Zpracování a interpretace dosažených výsledků.

Seznam doporučené literatury:

- [1] K. Kozel, J. Fürst: Numerické řešení problémů proudění I, skripta ČVUT, FS.
- [2] J. Fořt a kol.: Numerická simulace proudění I, skripta ČVUT, FS
- [3] Ames Research Staff: Equations, Tables and Charts for Compressible Flow, Report 1135 of the National Advisory Committee for Aeronautics, 1953.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. Ing. Jan Halama, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **24.10.2017**

Termín odevzdání bakalářské práce: **19.01.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Podpis vedoucí(ho) práce

Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Studentka bere na vědomí, že je povinna vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studentky

Obsah

1. Úvod.....	8
2. Dynamika plynů	10
2.1. Možnosti urychlení (zpomalení) proudu.....	11
2.2. Eulerovy rovnice.....	12
3. Formulace problému	15
4. Numerické metody	16
4.1. Metoda konečných diferencí.....	16
4.2. Metoda konečných objemů	18
5. Rázová trubice - výsledky	21
6. Lavalova dýza - výsledky.....	25
7. Náporový motor - výsledky.....	29
8. Závěr.....	39
9. Zdroje	40

Seznam použitých veličin:

$p[\text{Pa}]$... tlak

$V[\text{m}^3]$... objem

$T[\text{K}]$... termodynamická teplota

$a[\text{m/s}]$... rychlost zvuku

$\rho[\text{kg/m}^3]$... hustota

$c[\text{m/s}]$... rychlost

$u[\text{m/s}]$... rychlost v x – ovém směru

$v[\text{m/s}]$... rychlost v y – ovém směru

$e[\text{J/m}^3]$... celková měrná energie

$q[\text{J/m}^3]$... zdrojový člen

\mathbf{W} ... vektor neznámých

$\mathbf{F}(\mathbf{W})$ a $\mathbf{G}(\mathbf{W})$... toky

\mathbf{Q} ... vektor zdrojového členu

$A(x)[\text{m}^2]$... průřez dýzy

$t[\text{s}]$... čas

$H[\text{J/kg}]$... výhřevnost

Seznam použitých konstant:

$R = 8,314 [\text{J/mol} \cdot \text{K}]$... univerzální plynová konstanta

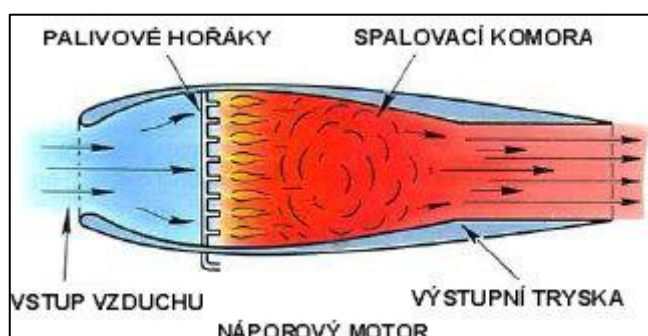
$\kappa = 1,4 [-]$... Poissonova konstanta

1. Úvod

V této kapitole budeme čerpat ze zdrojů [5], [6], [7] a [8].

Úkolem této práce bylo použít matematický model 1D proudění v dýze s proměnným průřezem, ve které dochází k přechodu mezi prouděním podzvukovým a nadzvukovým, a jejím ovlivnění při přidání tepla. Jednou z aplikací právě takového proudění je náporový motor.

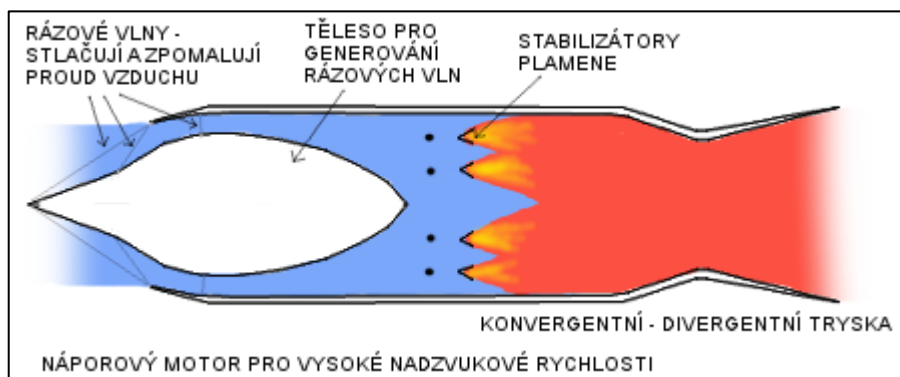
Náporový motor je proudový bezlopatkový motor. Skládá se ze vstupní dýzy, spalovací komory a výfukové dýzy. Do vstupní dýzy vstupuje proud rychlostí letu, který je potřeba zpomalit před vstupem do spalovací komory. Náporové motory můžeme rozdělit na dva typy: podzvukové a nadzvukové.



Zdroj: [5]

Obr. 1 - podzvukový náporový motor

Podzvukový náporový motor (Obr. 1) má rozšiřující se vstupní dýzu, která stačí k dostatečnému zpomalení proudu.



Zdroj: [5]

Obr. 2 - nadzvukový náporový motor

Pro nadzvukový náporový motor (obr.2) je vstupní dýza složitější. Proud vstupující do motoru je nadzvukový a pouhá změna průřezu (zúžení) dýzy nestačí k dostatečnému zpomalení proudu. Proto bývá vstupní dýza vybavena tělesem pro generování na sebe navazujících šikmých rázových vln, to má většinou kuželovitý tvar a zajistí rychlejší a efektivnější zpomalení proudu a nárůst tlaku. Šikmé rázové vlny mají stále větší sklon, ta poslední se vytváří v nejužším místě a měla by být kolmá ke stěně dýzy. Když je proud

dostatečně zpomalen ($M < 1$), tak se vstříkne palivo, které se poté zapálí. Hoření je regulováno stabilizátory hoření. Hořením směsi vzduchu a paliva narůstá teplota, což zvyšuje rychlost proudu v motoru. V případě nadzvukového motoru pak proud vstupuje do konvergentně-divergentní výstupní dýzy, kde se urychlí do nadzvukového proudění. V případě podzvukového motoru je výstupní dýza nejdříve konvergentní a poté konstantního průřezu.

Pokusy o využití náporových motorů byly zatím prováděny hlavně ve zbrojním průmyslu. Jednalo se většinou o vojenská letadla (např. raketový letoun X-15, obr. 3.) nebo o raketové střely. Základním problémem pro využití náporových motorů je, že nefungují z klidu (aby fungovaly je třeba mít poháněný produkt – např. letadlo již v pohybu). Tím se zvyšují požadavky na konstrukční řešení, jelikož alespoň na start je potřeba další nezávislé pohonné jednotky.



Zdroj: [8]

Obr. 3 - letoun X-15 s náporovým motorem

Chování proudu v podzvukovém náporovém motoru si přiblížíme v kapitole 7. Z nadzvukového náporového motoru se zaměříme na chování proudu na výstupu simulací proudění v Lavalově dýze (kapitola 6.). Simulace průběhu proudění v celém nadzvukovém náporovém motoru by vyžadovala 2D model proudění, což není předmětem této práce.

Jelikož je naším cílem v Lavalově dýze urychlit proud do nadzvukového režimu, musíme počítat s možností vzniku rázových vln. Abychom si přiblížili projev rázové vlny nasimulujeme si v kapitole 5. chování plynu v rázové trubici.

K popisu proudění použijeme Eulerovy rovnice a jejich řešení provedeme numericky metodou konečných diferencí nebo metodou konečných objemů.

2. Dynamika plynů

V této kapitole budeme vycházet z publikací [1], [3] a [4].

V této části si připomeneme některé poznatky z dynamiky plynů, které nám pomohou k popisu a následné interpretaci zkoumaných problémů.

Dynamikou plynů rozumíme obor, který se zabývá studiem stlačitelného kontinua v plynném skupenství, případně kontinuem s přechodným skupenstvím mezi kapalným a plynným. Pro náš zkoumaný případ se budeme pohybovat ve skupenství plynném, zatímco vlastnostem spojeným se změnou skupenství se v této práci nebudeme věnovat.

Ideální plyn

Dalším předpokladem, který si zavedeme, je, že plyn proudící v dýze považujeme za ideální plyn. Vlastnosti ideálního plynu jsou shrnuty v následujících 7 bodech:

- Ideální plyn je zjednodušený teoretický model plynu, kterému se v reálném světě lze nejlépe přiblížit při vysokých teplotách a nízkém tlaku, kdy jsou molekuly plynu daleko od sebe a pohybují se vysokými rychlostmi.
- Řídí se stavovou rovnicí ideálního plynu pro všechny tlaky a teploty
- Ideální plyn má konstantní měrnou tepelnou kapacitu při konstantním objemu.
- Pro ideální plyn musí platit Jouleův zákon $U = U(T)$, který nám říká, že vnitřní energie ideálního plynu je závislá pouze na jeho termodynamické teplotě.
- Ideální plyn se nedá zkapalnit a není vazký.
- Ideální plyn budeme považovat za dokonale stlačitelný.
- Stavová rovnice ideálního plynu

$$pV = nRT \quad (1)$$

Stavová rovnice vychází ze zobecnění tří empiricky zjištěných poznatků:

1. Objem je přímo úměrný molárnímu množství látky.
2. Tlak je nepřímo úměrný objemu.
3. Tlak je přímo úměrný teplotě.

Rychlost zvuku

Rychlost zvuku není konstantní pro všechna prostředí. V různých prostředích nabývá různých hodnot. Je definována Newtonovým vztahem:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \Rightarrow a_{id} = \sqrt{\frac{\kappa r}{\rho}} = \sqrt{\kappa r T} \quad (2)$$

Machovo číslo

Machovo číslo je podobnostní číslo, pomocí kterého lze hodnotit rychlost proudění. Je definováno jako poměr rychlosti plynu c ku rychlosti zvuku a .

$$M = \frac{c}{a} = [-] \quad (3)$$

Podle rychlosti zvuku můžeme proud rozdělit na podzvukový ($M < 1$), nadzvukový ($M > 1$), transsonický ($M \approx 1$) a hypersonický ($M \gg 1$).

2.1. Možnosti urychlení (zpomalení) proudu

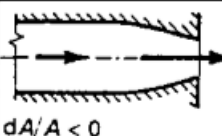
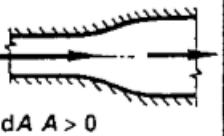
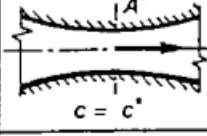
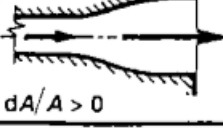
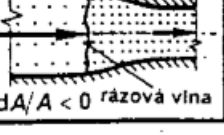
Jako možnosti urychlení proudu si uvedeme dvě možnosti:

Urychlení pomocí změny průřezu

Základem pro pochopení, jak reaguje proudění na změnu průřezu je Hugeniotova věta (4), která popisuje tuto závislost

$$\frac{dA}{A} = \frac{dc}{c}(M^2 - 1) \quad (4)$$

Obrázek 4. nám ukazuje základní situace, které mohou nastat.

	Tryska $dc/c > 0$	Hrdlo $dA/A = 0$	Difuzor $dc/c < 0$
$Ma < 1$	 $dA/A < 0$	$c = c_{max}$	 $dA/A > 0$
$Ma = 1$ $p_2/p_0 \leq p^*/p_0$		 $c = c^*$	
$Ma > 1$	 $dA/A > 0$		 $dA/A < 0$ rázová vlna

Zdroj: [1]

Obr. 4 - chování rychlosti v závislosti na tvaru a Machově čísle (Ma)

Obecně lze říci, že pokud chceme urychlit proud pomocí změny průřezu dýzy, použijeme trysku. Tryska má zužující se tvar pro proudění podzvukové a rozšiřující pro proudění nadzvukové. Opačným prvkem, tedy prvkem, který proud zpomalí, je difuzor. Difuzor má pro podzvukové proudění rozšiřující se tvar a pro nadzvukový proud naopak tvar zužující se. Těchto principů se využívá například u Lavalovy dýzy.

Urychlení přidáním tepla

Druhým způsobem, jak urychlit (zpomalit) proud je externím přidáním tepla. Pokud se pohybujeme v podzvukovém proudění, dodáním tepla navýšíme kinetickou energii proudu a tím pádem jej i zrychlíme. Získáme stejný efekt, jako kdybychom do proudu nainstalovali zužující se trysku. V případě nadzvukového proudění se proud chová opačně, přidáním tepla rychlost klesá. Pokud bychom chtěli nadzvukový proud urychlit, museli bychom teplo odebrat, tedy chladit.

Uvedené principy ověříme v bodě 5, kde budeme simulovat chování proudění v Lavalově dýze.

2.2. Eulerovy rovnice

K popisu proudění v dýze použijeme Eulerovy rovnice, které fungují dobře i pro nestacionární proudění. Důležitým předpokladem pro použití těchto rovnic je neviskozost proudění. V případě viskózního proudění bychom k popisu proudění museli použít např. Navier-Stokesovy rovnice.

Eulerovy rovnice [3] představují zákon zachování hmotnosti, hybnosti a energie pro nestacionární proudění. My budeme pro naše výpočty požadovat, aby výsledky konvergovaly ke konečným ustáleným hodnotám.

Počet rovnic se liší podle prostoru, ve kterém se pohybujeme. Pro 1D prostor máme 3 rovnice, pro 2D prostor bychom měli 4.

V našem případě vyjdeme z Eulerových rovnic pro 2D [3].

- Eulerovy 2D rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

- Rovnice (5) představuje Eulerovy rovnice bez přidání tepla. My, ale budeme s přidáním tepla pracovat, a tudíž je třeba zavést rovnici (6)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \mathbf{Q} \quad (6)$$

- V následujících krocích se budeme snažit rovnici (6) upravit tak, abychom mohli zanedbat závislost na y . Toho dosáhneme průměrováním vzhledem k y . Hledaným výsledkem úprav je závislost pro 1D, která bere v úvahu proměnný průřez.
- Zavedeme oblast řešení D

$$D = \left\{ [x, y, t] \in \mathbb{R}^3; x_{MIN} < x < x_{MAX}, -\frac{A(x)}{2} < y < \frac{A(x)}{2}, t_{MIN} < t < t_{MAX} \right\}$$

- Dále předpokládáme podmínky symetrie

$$\begin{aligned} \rho(x, y, t) &= \rho(x, -y, t) \\ u(x, y, t) &= u(x, -y, t) \\ v(x, y, t) &= -v(x, -y, t) \rightarrow \bar{v} = 0 \\ e(x, y, t) &= e(x, -y, t) \\ p(x, y, t) &= p(x, -y, t) \end{aligned} \quad (7)$$

- Rovnice (6) integrujeme vzhledem k proměnné y

$$\int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \right) dy = \int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \mathbf{Q} dy \quad (8)$$

- Rovnici (8) rozdělíme na jednotlivé části (9) a každou část integrujeme zvlášť

$$\underbrace{\int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} dy}_I + \underbrace{\int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dy}_II + \underbrace{\int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} dy}_III = \int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \mathbf{Q} dy \quad (9)$$

$$I: \int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} dy = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \mathbf{W} dy \right) \quad (10)$$

$$II: \int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \mathbf{F} dy \right) - \frac{A'(x)}{2} \left(\mathbf{F} \left(x, -\frac{A(x)}{2}, t \right) + \mathbf{F} \left(x, \frac{A(x)}{2}, t \right) \right) = 0 \quad (11)$$

$$III: \int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} dy = \mathbf{G} \left(x, \frac{A(x)}{2}, t \right) - \mathbf{G} \left(x, -\frac{A(x)}{2}, t \right) \quad (12)$$

- Zavedeme symboly pro tok \mathbf{F} a \mathbf{G}

$$\mathbf{F}_+ = \mathbf{F} \left(x, \frac{A(x)}{2}, t \right); \mathbf{F}_- = \mathbf{F} \left(x, -\frac{A(x)}{2}, t \right); \mathbf{G}_+ = \mathbf{G} \left(x, \frac{A(x)}{2}, t \right); \mathbf{G}_- = \mathbf{G} \left(x, -\frac{A(x)}{2}, t \right) \quad (13)$$

- Symboly (13) dosadíme do rovnice (10), (11) a (12) a tyto rovnice dosadíme zpět do rovnice (9) a získáme rovnici (14)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \mathbf{W} dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\frac{A(x)}{2}}^{\frac{A(x)}{2}} \mathbf{F} dy \right) - \frac{A'(x)}{2} (\mathbf{F}_- + \mathbf{F}_+) + \mathbf{G}_+ + \mathbf{G}_- = A(x) \bar{\mathbf{Q}} \quad (14)$$

- Integrovaním získáme střední hodnoty vektoru \mathbf{W} a toku \mathbf{F} a z rovnice (14) získáme rovnici (15)

$$\frac{\partial}{\partial t} (A(x) \bar{\mathbf{W}}) + \frac{\partial}{\partial x} (A(x) \bar{\mathbf{F}}) - \frac{A'(x)}{2} (\mathbf{F}_- + \mathbf{F}_+) + \mathbf{G}_+ + \mathbf{G}_- = A(x) \bar{\mathbf{Q}} \quad (15)$$

- Rovnici (15) rozepíšeme do složek a použijeme podmínky symetrie (7)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A(x)\bar{\rho} \\ A(x)\bar{\rho}\bar{u} \\ 0 \\ A(x)\bar{e} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} A(x)\bar{\rho}\bar{u} \\ A(x)\bar{\rho}\bar{u}^2 + A(x)\bar{p} \\ 0 \\ A(x)\bar{u}(\bar{e} + \bar{p}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{A'(x)}{2} [(\rho u)_- + (\rho u)_+] - (\rho v)_- + (\rho v)_+ \\ \frac{A'(x)}{2} [(\rho u^2 + p)_- + (\rho u^2 + p)_+] - (\rho v u)_- + (\rho v u)_+ \\ \frac{A'(x)}{2} [(\rho u v)_- + (\rho u v)_+] - (\rho v^2 + p)_- + (\rho v^2 + p)_+ \\ \frac{A'(x)}{2} [u_-(e + p)_- + u_+(e + p)_+] - v_-(e + p)_- + v_+(e + p)_+ + A(x)\bar{q} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A(x)\bar{\rho} \\ A(x)\bar{\rho}\bar{u} \\ 0 \\ A(x)\bar{e} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} A(x)\bar{\rho}\bar{u} \\ A(x)\bar{\rho}\bar{u}^2 + A(x)\bar{p} \\ 0 \\ A(x)\bar{u}(\bar{e} + \bar{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'(x)(\rho u)_+ - 2(\rho v)_+ \\ A'(x)(\rho u^2 + p)_+ - 2(\rho v u)_+ \\ 0 \\ A'(x)u_+(e + p)_+ - 2v_+(e + p)_+ + A(x)\bar{q} \end{bmatrix} \quad (17)$$

- Z rovnice (17) vidíme, že třetí rovnici můžeme vynechat a soustavu přepsat do tvaru rovnice (18)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(A(x) \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{e} \end{bmatrix} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x) \begin{bmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{u}(\bar{e} + \bar{p}) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho_+[A'(x)u_+ - 2v_+] \\ \rho_+u_+[A'(x)u_+ - 2v_+] + A'(x)p_+ \\ (e + p)_+[A'(x)u_+ - 2v_+] + A(x)\bar{q} \end{bmatrix} \quad (18)$$

- Předpokládáme podmínku nepropustné stěny

$$(u_+, v_+)\vec{n}_+ = 0; \quad \vec{n}_+ = \left(\frac{A'(x)}{2}, -1 \right) \rightarrow A'(x)u_+ - 2v_+ = 0 \quad (19)$$

- Budeme předpokládat, že $p_+ = \bar{p}$ (20)
- Podmínku (19) a (20) dosadíme rovnice (18) a získáme rovnice (21)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(A(x) \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{e} \end{bmatrix} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x) \begin{bmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{u}(\bar{e} + \bar{p}) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ A'(x)\bar{p} \\ A(x)\bar{q} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = \mathbf{Q} \quad (21)$$

- Rovnice (21) je základní rovnicí, ze které budeme ve výpočtech vycházet. Pro simulaci s přidáním zdrojového členu je $\bar{q} \neq 0$, pokud simulujeme případ bez přidání zdrojového členu je $\bar{q} = 0$.
- Je-li $\bar{q} = 0$ a $A(x) = konst$, můžeme rovnici (21) přepsat do tvaru rovnice (22), která odpovídá obecné Eulerově rovnici pro 1D proudění. V této úpravě vycházíme z toho, že derivace $A'(x) = 0$, a jelikož $A(x)$ je konstantní, můžu jej vytknout a celou rovnici s ním podělit.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (22)$$

- Všimněme si, že jak v rovnici (21), tak v rovnici (22) vystupují čtyři neznámé, pro které máme pouze tři rovnice. K řešení problému však potřebujeme čtyři rovnice. Proto využijeme rovnici (23), která popisuje vztah mezi tlakem a ostatními veličinami, které vystupují v Eulerových rovnicích.

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \quad (23)$$

3. Formulace problému

Zkoumané problémy rozdělíme na dva typy:

- 1) Rázovou trubici
- 2) Lavalovu dýzu a náporový motor

1) Rázová trubice

Proudění v rázové trubici popíšeme rovnicí (22).

Zavedeme si interval I pro x : $x \in (L_1, L_2)$.

Čas t omezíme touto podmínkou: $0 \leq t \leq t_z$, kde t_z je čas, kdy se změna rozšíří do krajů intervalu I.

Rázová trubice je počáteční úlohou, a tudíž potřebuje pouze počáteční podmínku. Tu definujeme takto:

$$W(x, t = 0) = W_0 \quad (24)$$

Hodnoty složek tohoto vektoru jsou z klidových hodnot zkoumaných veličin: u_0, p_0, ρ_0 .

2) Lavalova dýza a náporový motor

Proudění popíšeme pomocí rovnice (21).

Zavedeme interval I pro x : $x \in (L_1, L_2)$, kde hranice intervalu L_1 a L_2 budeme definovat pro každý případ zvlášť.

Dále si zavedeme interval pro čas t : $t \in (0, T)$, kde $T > 0$.

Lavalova dýza a náporový motor jsou smíšenou úlohou. K jejich řešení potřebujeme, jak počáteční podmínku, tak okrajovou podmínku.

V čase $t = 0$ definujeme počáteční podmínky:

$$W(x, t = 0) = W_0 \quad (24)$$

Hodnoty složek tohoto vektoru jsou z klidových hodnot zkoumaných veličin: u_0, p_0, ρ_0 .

Pro čas $t \geq 0$ je zavádíme okrajové podmínky pro $x = L_1$ a $x = L_2$.

Vstupní proud je vždy podzvukový ($M < 1$), z čehož plyne, že musíme zadat 2 parametry (p_0, ρ_0). Na výstupu mohou nastat dvě situace: 1) proud je podzvukový ($M < 1$), musíme zadat jeden parametr. 2) proud je nadzvukový ($M > 1$), nezadáme žádný parametr.

4. Numerické metody

V této kapitole budeme čerpat ze zdroje [2], [3] a [4].

K řešení našich problémů jsme si zvolili 2 numerické metody: metodu konečných diferencí (MKD) a metodu konečných objemů (MKO). Pomocí MKD budeme řešit rázovou trubici a metodu konečných objemů budeme řešit Lavalovu dýzu a náporový motor. Obě dvě užití numerické metody jsou vhodné pro případy proudění s přidáním tepla.

4.1. Metoda konečných diferencí

Jednou z metod konečných diferencí je schéma Laxe-Friedrichse. Používáme ji k řešení, jak lineárních, tak nelineárních parciálních diferenciálních rovnic.

Předpoklady metody:

- $D = \{[x, t] \in R^2; x_{MIN} < x < x_{MAX}; t_{MIN} < t < t_{MAX}\}$
- $x_i = i * \Delta x$
- $t^n = n * \Delta t$
- $W_i^n = W(x_i, t^n)$
- $F_i^n = F(W_i^n)$

Odvození [3]:

- Vyjdeme z rovnice (22) a numericky aproximujeme derivaci W_t a F_x a získáme centrální schéma

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (25)$$

- Centrální schéma (25) lze přepsat na

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) \quad (26)$$

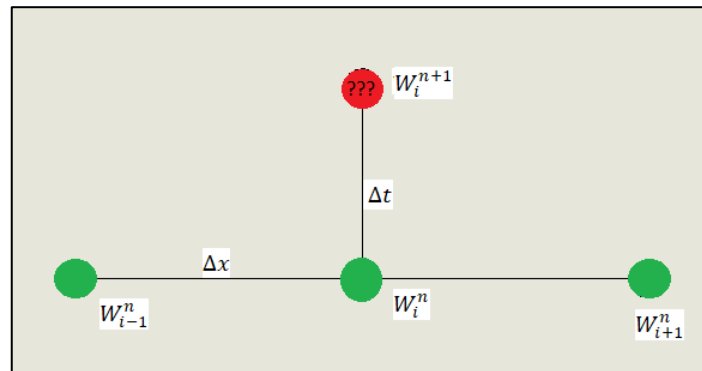
- Centrální schéma je však vždy nestabilní, a proto je nelze přímo použít. To znamená, že jej musíme ještě dále upravit.
- Vyjádříme W_i^n jako aritmetický průměr předchozího a následujícího prvku W v bodě i .

$$W_i^n = \frac{1}{2}(W_{i-1}^n + W_{i+1}^n) \quad (27)$$

- Do rovnice (26) dosadíme rovnici (27) a získáme schéma metody Laxe-Friedrichse:

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{2}(W_{i-1}^n + W_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) \quad (28)$$

V této metodě vycházíme z toho, že známe hodnoty hledaných veličin v n-té vrstvě naší sítě. K získání jednoho bodu následující časové vrstvy ($n + 1$) potřebujeme tři body předchozí časové vrstvy (n).



Zdroj: Vlastní schéma

Obr. 5 - schéma pro odvození Lax-Friedrichsovy metody

- Lax-Friedrichsovo schéma (28) lze přepsat to formy:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} (W_{i-1}^n - 2W_i^n + W_{i+1}^n) \quad (29)$$

Kde poslední člen rovnice (29) označujeme jako difuzní člen. Tento člen vnáší do řešení chybu, ale zároveň celý systém stabilizuje.

- Všimněme si, že pokud přepíšeme rovnici (29) zpět do diferenciálního tvaru získáme, a tedy řešíme rovnici (30) a nikoliv rovnici (22), ze které jsme vycházeli.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (30)$$

$O(\Delta x)$

- Do rovnice (30) přidáme parametr ε , jehož vhodnou volbou lze snížit chybu generovanou difuzním členem, a získáme rovnici (31). Parametr ε volíme z rozmezí $\varepsilon = (0, 1)$

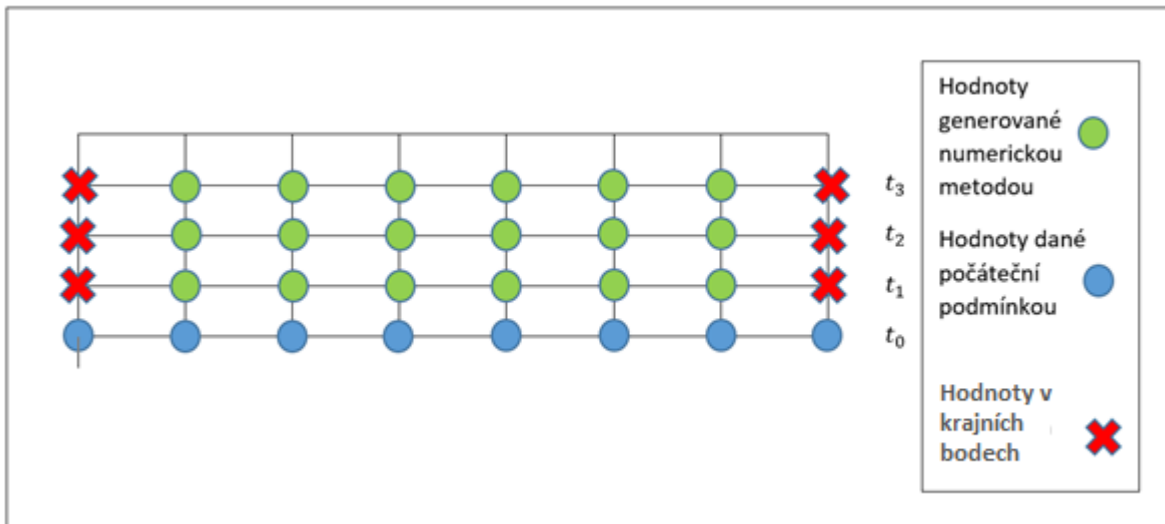
$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \varepsilon \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (31)$$

- Rovnici (31) lze přepsat do modifikovaného Lax-Friedrichsova schématu (32).

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) - \frac{\varepsilon}{2} (W_{i-1}^n - W_i^n + W_{i+1}^n) \quad (32)$$

Stabilitu Lax-Friedrichsova schématu pro Eulerovy rovnice určujeme rovnicí (33)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u|+a} \quad (33)$$



Zdroj: Vlastní schéma

Obr. 6 - výpočtová síť pro metodu L-F

Z obrázku 3 je vidět, že metodou Laxe-Friedrichse nejsme schopni generovat hodnoty v krajních bodech intervalu I a tudíž musíme zavést podmínky, které je dodefinují. L-F schéma použijeme pouze při výpočtu rázové trubice. Hodnoty v krajních bodech v tomto případě zavedeme takto:

$$W(L_1, t > 0) = W(L_1, t = 0) \quad (34)$$

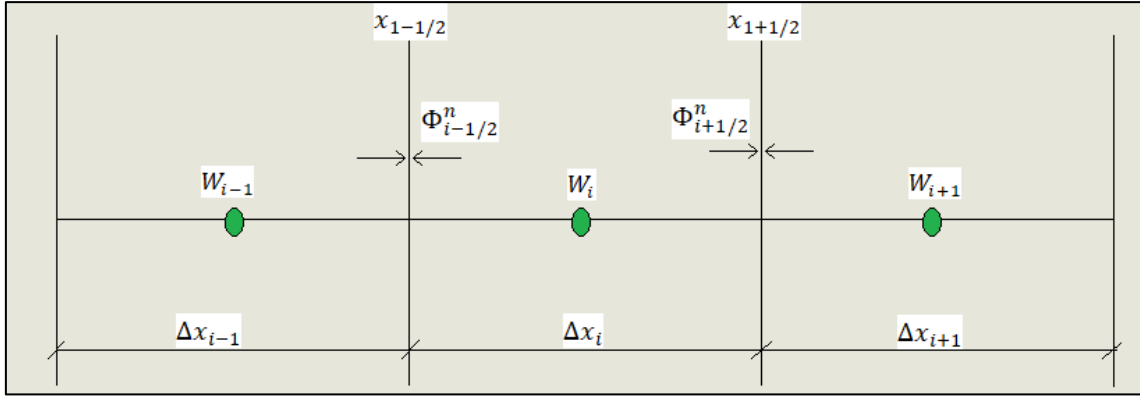
$$W(L_2, t > 0) = W(L_2, t = 0) \quad (35)$$

Budeme předpokládat, že se změny šíří od středu, a že čas $T < t_z$, kde t_z je čas, za který změna dostane do krajních bodů sítě.

4.2. Metoda konečných objemů

Metoda konečných objemů vychází z předpokladu, že si rozdělíme zkoumanou oblast na kontrolní objemy, vytvoříme síť. Velkou výhodou této metody je, že je ji možno použít pro obecné sítě, a tudíž je možné, aby x-ový krok nebyl konstantní. Hledaná hodnota výpočtu se nachází ve středu kontrolního objemu. K jejímu získání je nejdříve potřeba spočítat toky na hranicích kontrolních objemů. Tyto toky aproximujeme v našem výpočtu pomocí metody Laxe-Friedrichse (4.1.)

Pro naši simulaci se budeme pohybovat v 1D, a tudíž si příslušně rozdělíme zkoumaný interval (obr.5)



Zdroj: Vlastní schéma

Obr. 7 - schéma pro metodu konečných objemů

Předpoklady:

- Omezená oblast s konečným počtem neprázdných buněk
- $D = \{[x, t] \in \mathbb{R}^2; x_{MIN} < x < x_{MAX}, t_{MIN} < t < t_{MAX}\}$
- Síť: $x_{MIN} = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_{i+\frac{1}{2}} < \dots < x_{i_{MAX}+\frac{1}{2}} = x_{MAX}$
- Hodnoty veličin ve středu objemů:
 - $W_i^n = W(x, t^n)$
 - $F_i^n = F(W_i^n)$

Odvození metody: [3]

- Vyjdeme z rovnice (21), kterou přepíšeme, tak abychom měli na jedné straně hledaný vektor \mathbf{W} a na druhé straně vektor \mathbf{F} a \mathbf{Q} .

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + Q \quad (36)$$

- Následně integrujeme rovnici (36) podle x a t

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial W}{\partial t} dx dt = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} Q dx dt \quad (37)$$

- V rovnici (37) integrujeme první člen podle x, druhý člen podle t a třetí člen podle x a t a získáme rovnici (38)

$$(x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{dW_i}{dt} dt = -(t^{n+1} - t^n) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{dF^n}{dx} dx + (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(t^{n+1} - t^n) Q_i^n \quad (38)$$

- Definujeme Δx_i a Δt^n

$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} \quad (39)$$

$$\Delta t^n = (t^{n+1} - t^n) \quad (40)$$

- Do rovnice (38) dosadíme Δx_i a Δt^n

$$\Delta x_i \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{dW_i}{dt} dt = -\Delta t^n \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{dF^n}{dx} dx + \Delta x_i \Delta t^n Q_i^n \quad (41)$$

- Spočteme zbylé integrály z rovnice (41) a dostaneme rovnici (42)

$$\Delta x_i (W_i^{n+1} - W_i^n) = -\Delta t^n \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \Delta x_i \Delta t^n Q_i^n \quad (42)$$

- Rovnici (42) podělíme Δx_i a vyjádříme W_i^{n+1}

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) + \Delta t^n Q_i^n \quad (43)$$

- Fyzikální toky \mathbf{F} v rovnici (43) aproximujeme numerickými toky Φ

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i} (\Phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^n) + \Delta t^n Q_i^n \quad (44)$$

- Numerické toky Φ počítáme pomocí metody Laxe-Friedrichse [3]

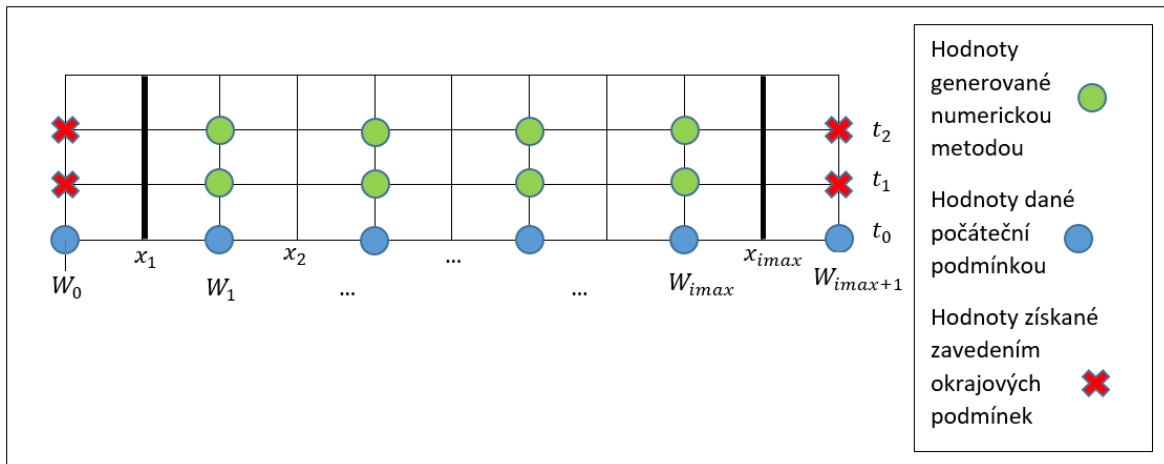
$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (F_i^n - F_{i+1}^n) - \frac{\varepsilon \Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2 \Delta t^n} (W_{i+1}^n - W_i^n) \quad (45)$$

$$\Phi_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (F_{i-1}^n - F_i^n) - \frac{\varepsilon \Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2 \Delta t^n} (W_i^n - W_{i-1}^n) \quad (46)$$

Pokud bychom měli $\Delta x = konst$, pak by rovnice (44) přešla v rovnici (32).

Rovnice (44), (45) a (46) použijeme v simulaci Lavalovy dýzy a náporového motoru k numerickému výpočtu.

Také při použití MKO bude potřeba zavést okrajové podmínky, jak ukazuje obrázek 6.



Zdroj: vlastní schéma

Obr. 8 – výpočtová síť pro MKO

Na vstupu, v bodě L_1 , máme podzvukové proudění a máme v tomto místě kus dýzy s konstantním průřezem. Vstupní hodnoty W_0 (viz. Obr. 8) budeme přepočítávat z klidových hodnot pomocí následujících vzorců pro izoentropické proudění:

$$\rho = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \rho_0 \quad (47)$$

$$\rho u = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-\gamma} \frac{1}{2}} M \rho_0 c_0 c \quad (48)$$

$$e = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{M^2}{2}\right) \rho_0 c_0^2 \quad (49)$$

Vidíme, že v rovnicích (47-49) vystupuje kromě klidových hodnot hledaných veličin také Machovo číslo. Tím, že máme průřez v okolí vstupu konstantní, použijeme Machovo číslo M získané z hodnot W_1 (viz. Obr. 8).

Pro bod L_2 , tedy výstup, budeme v jeho okolí také požadovat dýzu konstantního průřezu. Volba okrajových podmínek však bude záviset na tom, zda budeme mít na výstupu proud nadzvukový nebo podzvukový. Pro nadzvukový výstupní proud zavedeme podmínku (50) (viz. Obr. 8)

$$W_{imax+1} = W_{imax} \quad (50)$$

Pro podzvukový proud bude podmínka (50) platit pouze v prvních dvou složkách vektoru W . Pro třetí složku vektoru W definujeme rovnici (51) (viz. Obr. 8)

$$e_{imax+1} = A_{imax} * \left(\vartheta * \frac{p_0}{(\gamma-1)} + \rho_{imax} * \frac{u_{imax}^2}{2} \right) \quad (51)$$

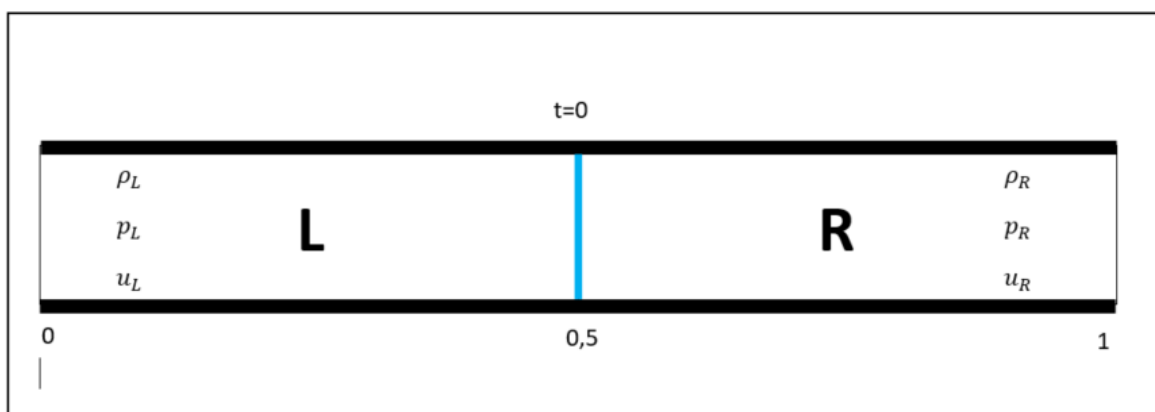
$$\text{kde } \vartheta = \frac{p}{p_0}$$

5. Rázová trubice – výsledky

V této části budeme čerpat ze zdroje [9]

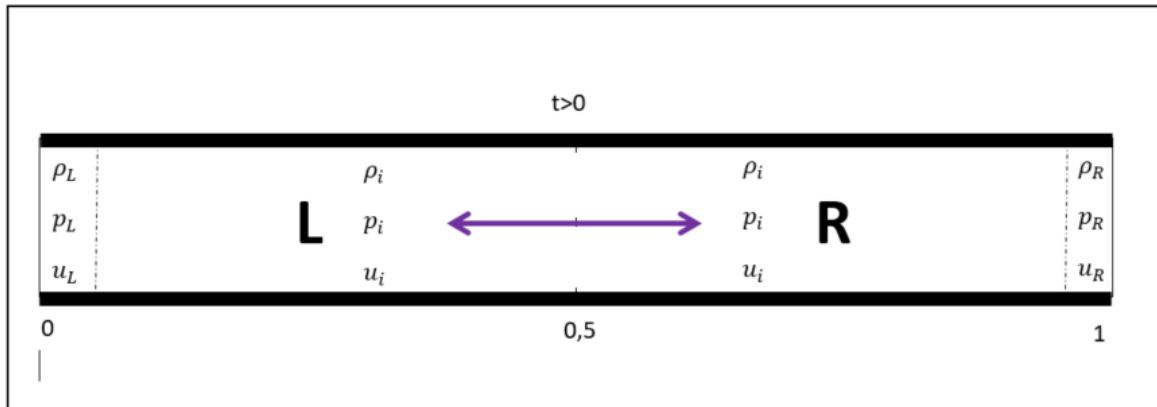
Při proudění plynu dýzami s proměnným průřezem může docházet ke vzniku rázových vln. Tyto rázové vlny mohou být žádoucím nebo nežádoucím faktorem, a proto je důležité s nimi ve výpočtech počítat a včas je odhalit. Simulací dějů v rázové trubici si můžeme ukázat jakým způsobem se rázová vlna projeví ve výsledcích simulace.

Rázová trubice je trubice konstantního průřezu, která je v čase $t=0$ předělena přepážkou, která odděluje pravou (R) a levou (L) stranu (obr. 9). Každá strana má zadané rozdílné hodnoty tlaku a hustoty. Obě strany mají počáteční rychlost nulovou (proud v trubici je v klidu). Pokus (výpočet) začíná odstraněním přepážky (obr. 10). Rozdílné tlaky a hustoty způsobí pohyb plynu. Změny ve sledovaných veličinách se šíří od středu, předpokládáme však, že do určitého času nedojdou až do krajů trubice.



Zdroj: vlastní schéma

Obr. 9 - rázová trubice v čase $t=0$



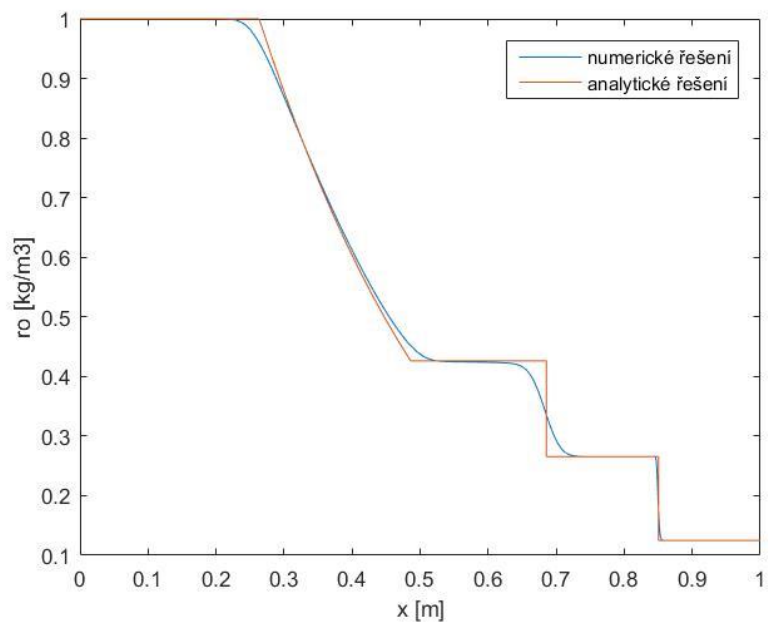
Zdroj: vlastní schéma

Obr. 10 - rázová trubice v čase $t > 0$

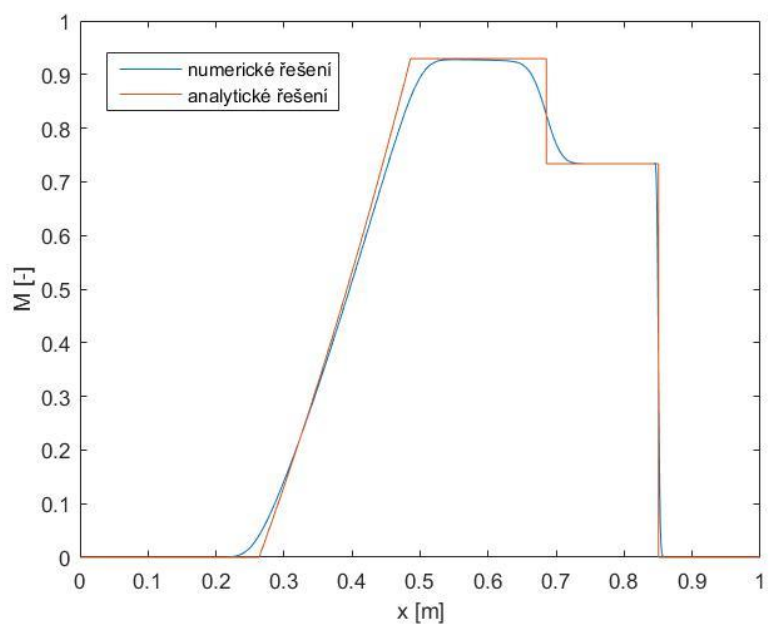
K simulaci dějů v rázové trubici využijeme Lax-Friedrichsovo schéma (4.1.). K němu byly zvoleny následující podmínky a parametry:

- $W = W(x, t); [x, t] \in R$
- $W(x, 0) = \begin{cases} W_R, & x < 0,5 \\ W_L, & x > 0,5 \end{cases}$
- $\rho_L = 1 \text{ kg/m}^3; p_L = 10 \text{ Pa}; u_L = 0 \text{ m/s}$
- $\rho_R = 0,125 \text{ kg/m}^3; p_R = 1 \text{ Pa}; u_R = 0 \text{ m/s}$
- $x \in \langle 0,1 \rangle$
- $t \leq 0,2s$

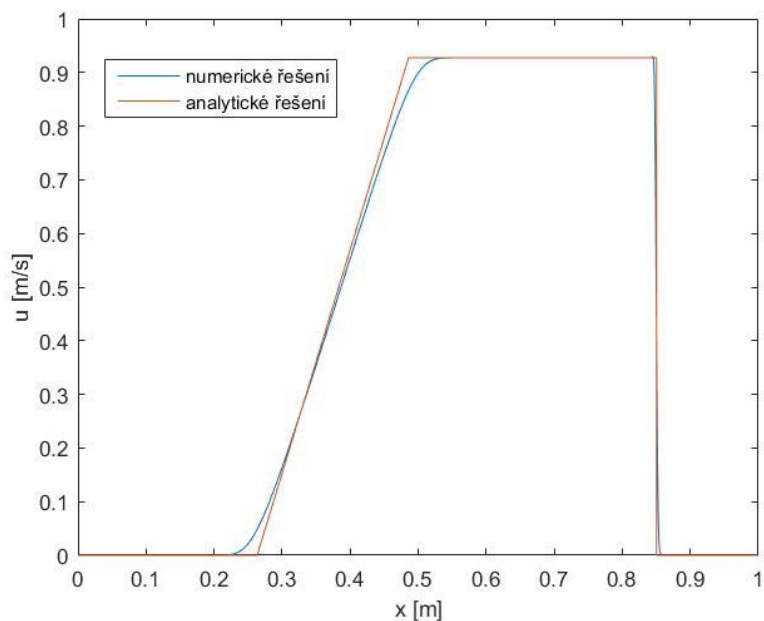
V následujících grafech (grafy 1-4) se podíváme, jak se chová plyn v rázové trubici v čase $t = 0,2s$. Výsledky získané simulací (modrá čára) porovnáme s analytickým řešením získaným ze zdroje [9]



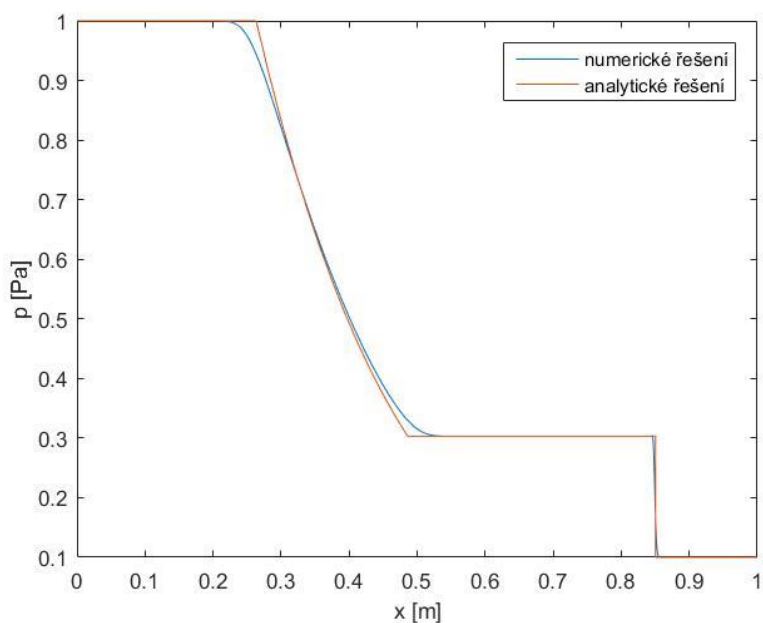
Graf 1- hustota



Graf 2 - Machovo číslo



Graf 3 - rychlost

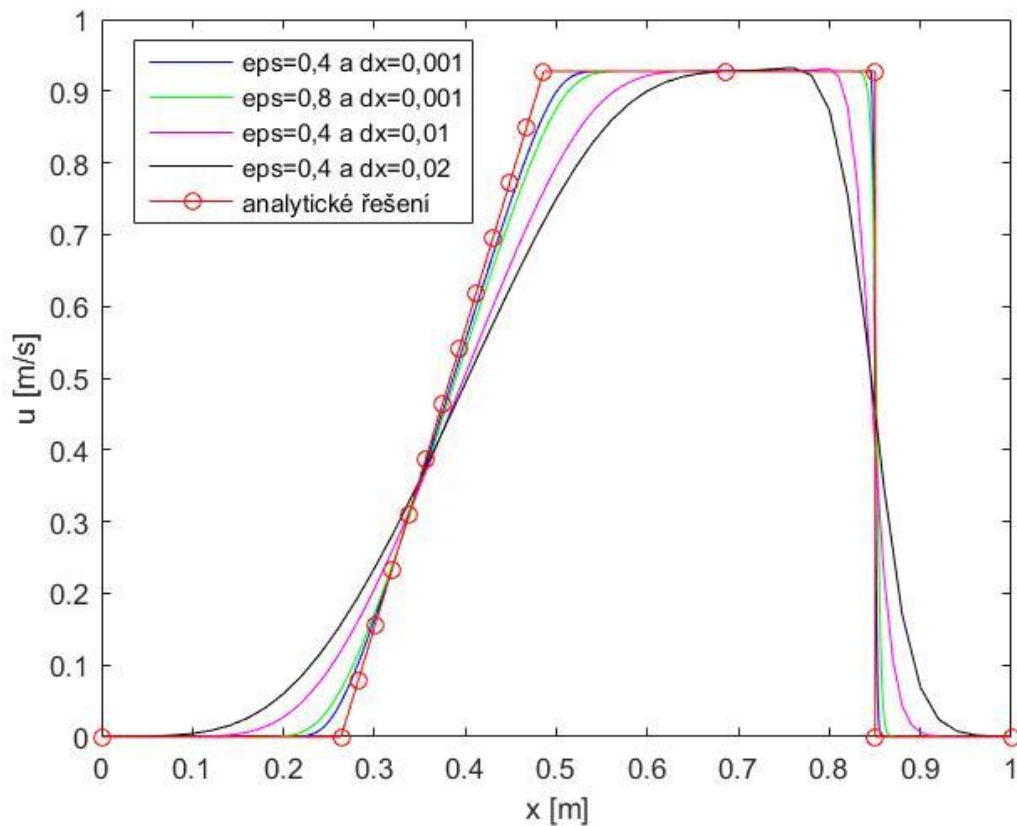


Graf 4 - tlak

V grafech 1. až 4. si povšimněme prudkých změn ve sledovaných veličinách. Ta nejvýraznější nastala v $x \approx 0,85 \text{ m}$ a můžeme jí pozorovat na všech čtyřech grafech. Pokud bychom se pohybovali v nadzvukovém režimu, takovouto prudkou změnu, která způsobí přechod do podzvukového režimu, bychom považovali za projev rázové vlny.

Výsledky ukazují, že výsledky simulace jsou poměrně přesné, jelikož se velmi blíží analytickému řešení. K tomu, abychom dosáhli přesných výsledků, bylo za potřebí, zvolit správnou velikost x -ového kroku Δx (v našem případě - $\Delta x = 0,001 \text{ m}$) a hodnotu korekčního koeficientu ε (zde $\varepsilon = 0,4$).

V grafu 5. vidíme, jak se přibližují, nebo naopak oddalují výsledky simulace od analytického řešení v závislosti na délce kroku a parametru ε .



Graf 5 – průběh rychlosti v závislosti na zvolených hodnotách Δx a ε

6. Lavalova dýza – výsledky

V této části budeme čerpat ze zdroje [6]

Lavalova dýza je konvergentně divergentní dýza, která se používá k urychlení proudu do nadzvukového režimu. Proto, abychom toho mohli dosáhnout, je nutné proud urychlit tak, aby v hrdle dýzy byla hodnota Machova čísla $M = 1$.

Lavalova dýza se v praxi využívá např. v nadzvukových aerodynamických tunelech, nebo na výstupu z proudových motorů.

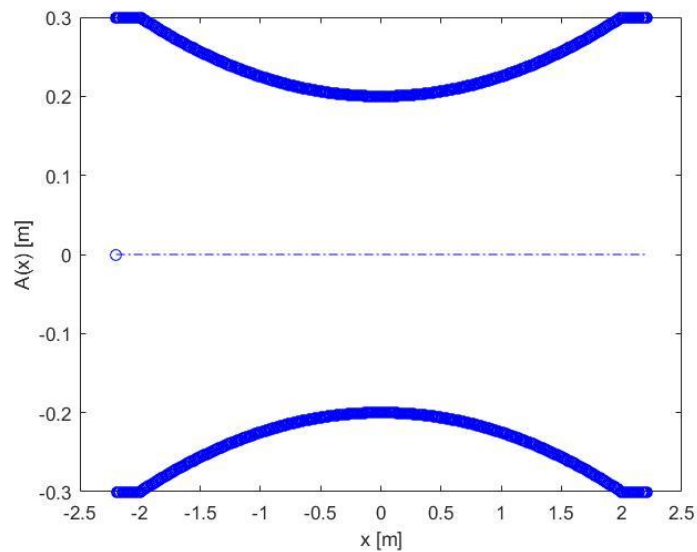
Pro naši simulaci si zavedeme následující předpoklady:

- $x \in (-2,2 ; 2,2)$
- Proud na počátku simulace je v klidu ($u_0 = 0 \text{ m/s}$)
- Klidový tlak považujeme za přibližně atmosférický tlak ($p_0 = 10^5 \text{ Pa}$)
- Klidovou hustotu definujeme ze stavové rovnice: $\rho_0 = \frac{p_0}{RT}$; kde $R = 287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ a $T = 293 \text{ K}$
- Naším cílem je simulací najít stacionární řešení. V krajích intervalu I použijeme časově nezávislé okrajové podmínky a výpočet necháme běžet tak dlouho, aby $\|W_t\| \rightarrow 0$. To sledujeme pomocí residua hustoty

$$res(\rho) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t \cdot i_{max}} \quad (52)$$

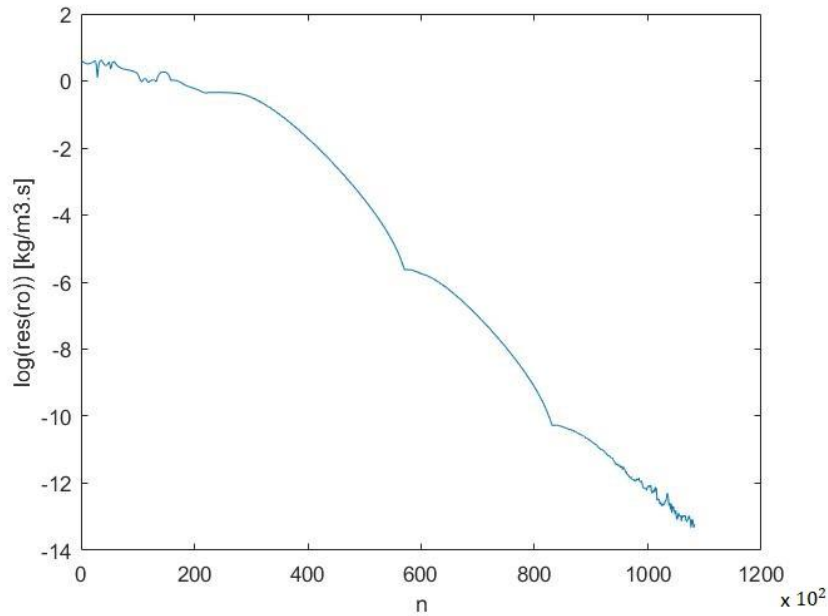
Tvar Lavalovy dýzy $A(x)$ (graf 6.) definujeme takto:

- $A(x) = 0,3 ; x \in (-2,2 ; -2)$
- $A(x) = 0,025 * x^2 + 0,2 ; x \in (-2 ; 2)$
- $A(x) = 0,3 ; x \in (2 ; 2,2)$



Graf 6. - tvar Lavalovy dýzy

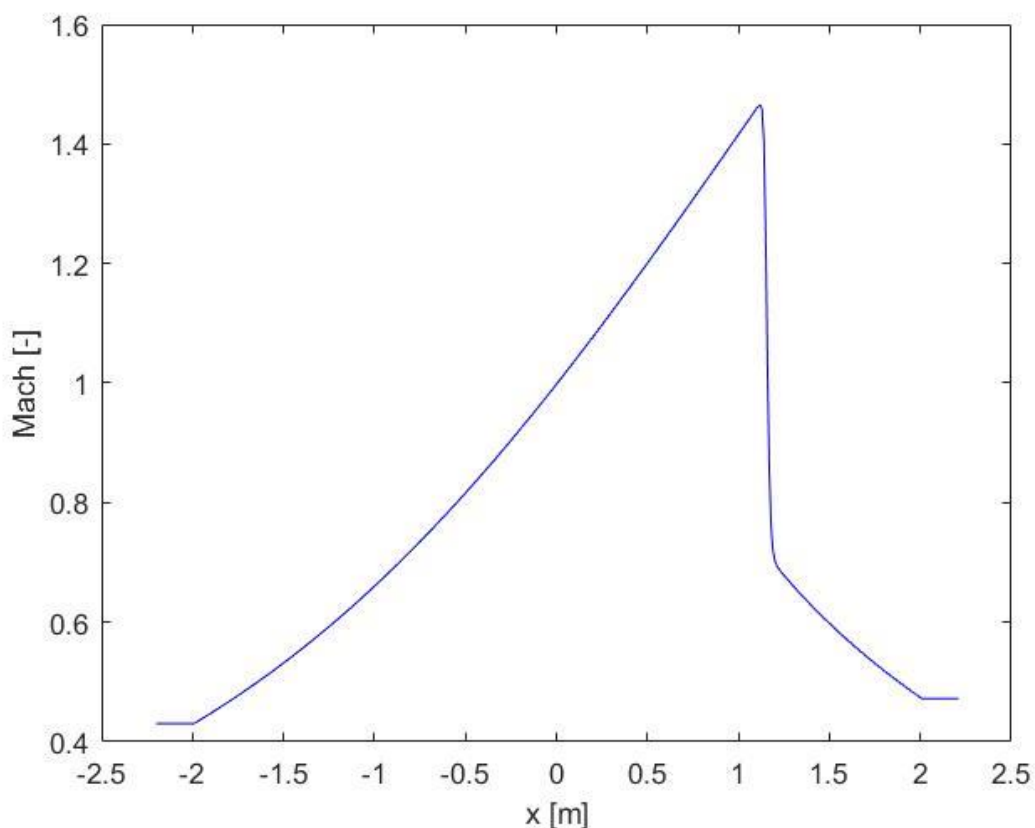
Simulaci v Lavalově dýze jsme prováděli za účelem ověření fungování matematického modelu (programu) a k ověření základních principů chování proudu v dýze v podzvukovém a nadzvukovém režimu (2.3.).



Graf 7 - reziduum hustoty

První, co musíme zkontrolovat, je, zda výsledky můžeme považovat za konečné. To můžeme určit z grafu rezidua hustoty (graf 7.). Pokud je graf residua klesající, můžeme říci, že výpočet konverguje ke konečným výsledkům. Residuum jsme počítali pro každý stý časový krok.

Dále se podíváme na graf 8. průběhu Machova čísla Lavalovou dýzou bez přidání tepla. Vidíme, že Machovo číslo narůstá ve zúžení. V hrdle Lavalovy dýzy dosáhneme Machova čísla $M = 1$ a proud přejde do nadzvukového proudění, v rozšíření se tedy dále urychluje. Po dosažení Machova čísla $M = 1,463$, dochází k rázové vlně. Ta má za následek prudký pokles rychlosti a tím pádem návrat do podzvukového proudění. Jelikož se stále pohybujeme v rozšiřující se části, rychlost proudu dále klesá. Výstupní rychlost je o něco vyšší než vstupní rychlost.



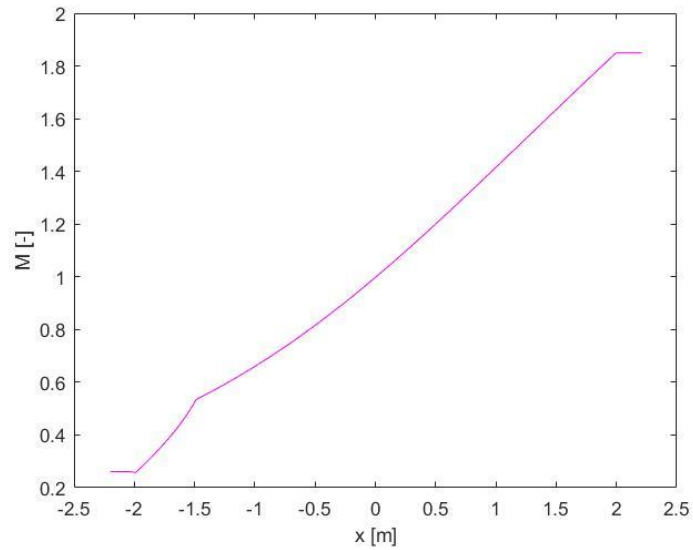
Graf 8 - průběh Machova čísla

V předchozím odstavci jsme si ukázali, jaký má vliv změna průřezu na proud. Teď se podíváme na to, zda výsledky získané simulací odpovídají použitému modelu. K tomu použijeme tabulky pro izoentropické proudění NACA report 1135 [2].

První zkontrolujeme hodnotu Machova čísla za rázovou vlnou. Víme, že před rázovou vlnou je Machovo číslo $M_1 = 1,463$. V tabulkách najdeme hodnotu co nejbližší této hodnotě $M_{1tab} = 1,46$ a podle ní hodnotu za rázovou vlnou, která by měla být $M_{2tab} = 0,7157$. Tuto hodnotu porovnáme s vypočtenou hodnotou $M_2 = 0,7135$. Vidíme, že obě hodnoty za rázovou vlnou jsou si velmi blízké (liší se v tisícinách), tudíž lze říci, že náš výsledek výpočtu odpovídá tabelovaným hodnotám.

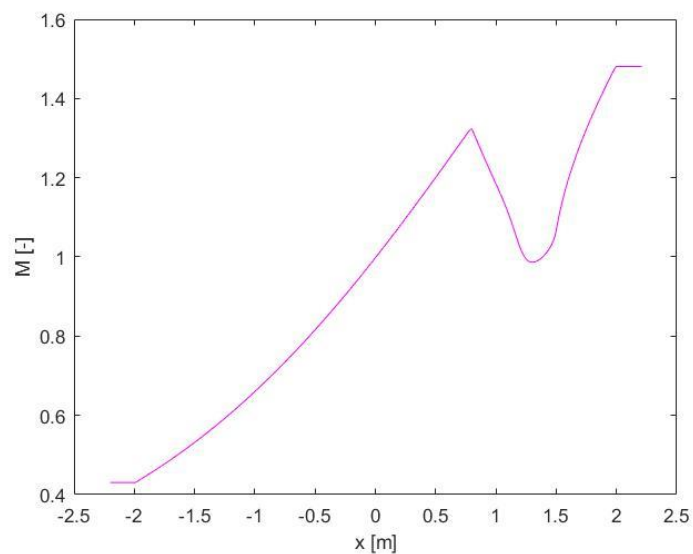
Teď si všimněme rázové vlny. V našem grafu se projevuje jako svislá čára, bez oscilací. To nám značí, že jsme správně volili parametry výpočtu – vyváženou hodnotu ε a délku kroku.

V bodě 2.1. jsme si vysvětlili, jak by se měl chovat nadzvukový a podzvukový proud, pokud přidáme teplo. V grafu 8. máme průběh Machova čísla, pokud teplo nepřidáme. V následujících grafech se podíváme na to, jak se Machovo číslo bude vyvíjet, pokud teplo přidáme před kritickým místem dýzy, do podzvukového proudu (graf 9.), a jak se bude Machovo číslo chovat, když teplo přidáme za kritickým místem v nadzvukových podmínkách (graf 10.).



Graf 9- průběh Machova čísla v Lavalově dýze s přidáním tepla $x \in (-2; -1,5)$

Z grafu 9. je patrné, že přidáním tepla do podzvukového proudění, se proud urychlí, což potvrzuje náš předpoklad z bodu 2.1.



Graf 10- průběh Machova čísla v Lavalově dýze s přidáním tepla $x \in (0,8; 1,5)$

Graf 10. nám ukazuje, že nadzvukový proud reaguje na přidání tepla přesně naopak než proud podzvukový. Můžeme si také všimnout, že pokud přidáme dostatečně velké množství tepla jsme schopni nadzvukový proud zpomalit zpět do podzvuku. V momentě kdy se proudění vrátí do podzvuku, ohřev opět zajistí urychlování proudu a zvítězí nad rozšiřujícím se průřezem a vrátí proud do nadzvukového režimu. Po skončení ohřevu proud vlivem rozšiřování dále zrychluje.

7. Náporový motor - výsledky

V této části budeme čerpat ze zdroje [5], [7] a [8]

V úvodu jsme hovořili o typech a fungování náporových motorů. Pro tuto simulaci jsme si vybrali podzvukový náporový motor, který jsme si značně zjednodušili a zavedli následující předpoklady:

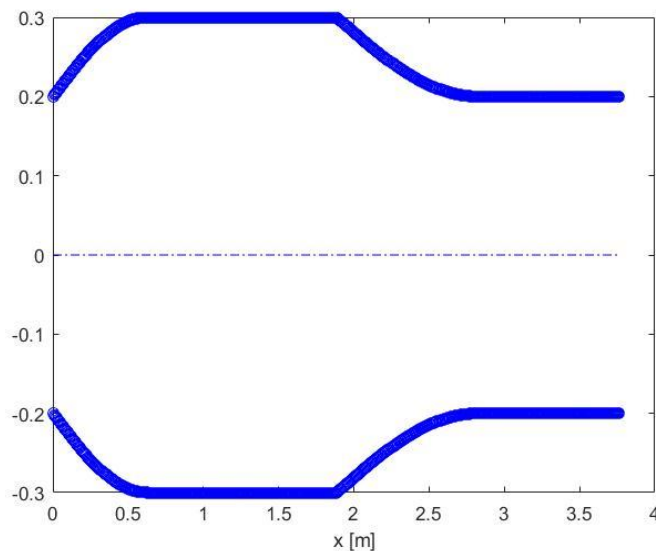
- vstupující proud je podzvukový ($M_0 = 0,4$)
- vstupní tlak je přibližně tlak atmosférický ($p_0 = 10^5 Pa$)
- zpomalení proudu probíhá pouze v důsledku rozšíření dýzy, bez rázových vln
- $\rho_0 = \frac{p_0}{RT}$; kde $R = 287 J/kg * K$ a $T = 293 K$
- Stejně jako při výpočtu Lavalovy dýzy je naším cílem najít stacionární řešení. V krajích intervalu I opět použijeme časově nezávislé okrajové podmínky a výpočet necháme běžet tak dlouho, aby $\|W_t\| \rightarrow 0$. Ustálení systému sledujeme podle residua hustoty (52)

Dále jsme zavedli zjednodušený tvar náporového motoru (graf 11.):

$A(x); x \in \langle 0; 12\pi \rangle$; po vygenerování tvaru $A(x)$ jsou x -ové hodnoty poděleny hodnotou 10

tj. $x_s = \frac{x}{10}$

- $A(x) = 0,1 * \sin\left(\frac{x}{4}\right) + 0,2; x \in \langle 0; 2\pi \rangle$
- $A(x) = 0,3; x \in \langle 2\pi; 6\pi \rangle$
- $A(x) = 0,3 + 0,1 * \cos\left(\frac{x-\pi}{6-\frac{\pi}{2}}\right); x \in \langle 6\pi; 9\pi \rangle$
- $A(x) = 0,3; x \in \langle 9\pi; 12\pi \rangle$



Graf 11- tvar náporového motoru

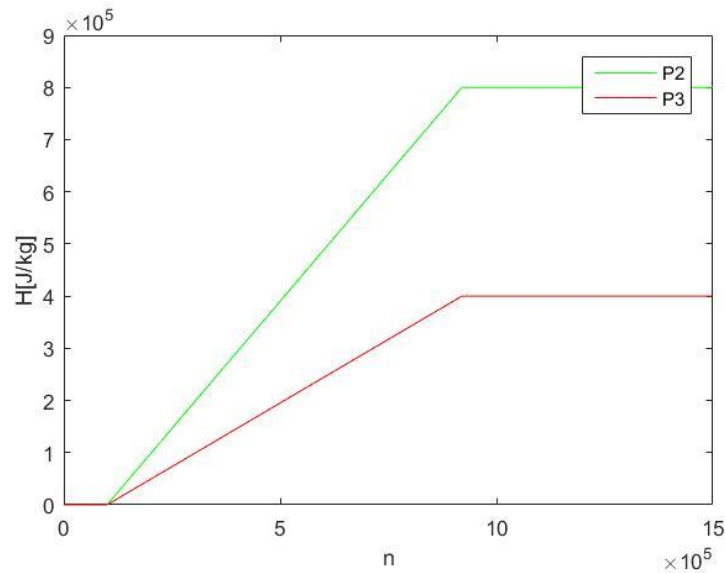
Derivaci průřezu počítáme numericky - $A'(i) = \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2\Delta x}$

Pro definici proudění vycházíme z Eulerových rovnic a za numerickou metodu simulace volíme metodu konečných objemů.

Na následujících stránkách se budeme věnovat prezentací dosažených výsledků simulace. Simulaci rozdělíme na 3 případy. V první případě do systému nebudeme teplo přidávat

v dalších dvou budeme sledovat, jak se mění vlastnosti proudu v závislosti na tom, kolik tepla přidáme. Hodnoty přidaného tepla definujeme pomocí výhřevnosti H

- Případ 1 (P1) - $H_1 = 0 \text{ J/kg}$ - bez přidání tepla (modrá)
- Případ 2 (P2) - $H_2 = 2 * h_1 = 0,8 * 10^7 \text{ J/kg}$ - s přidáním tepla (zelená)
- Případ 3 (P3) - $H_3 = h_1 = 0,4 * 10^7 \text{ J/kg}$ - s přidáním tepla (červená)

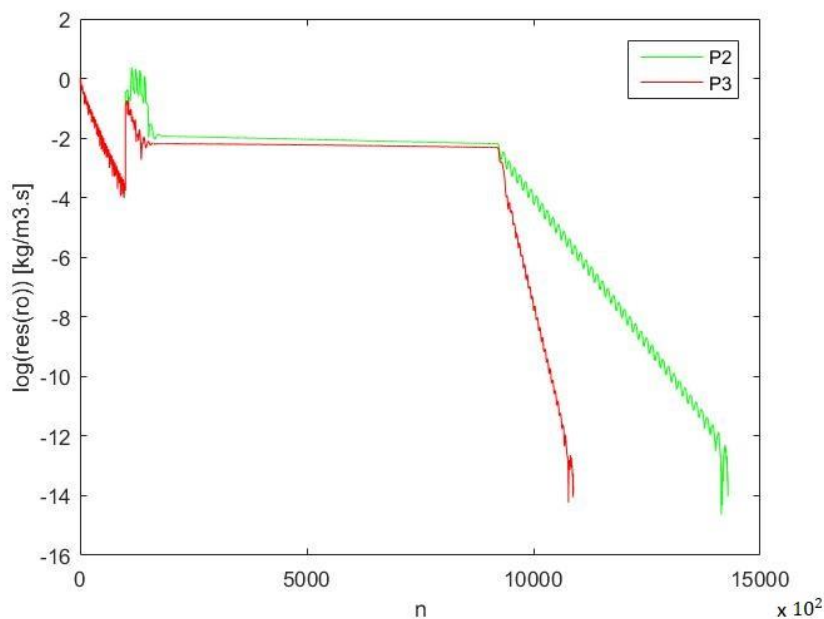


Graf 12 – Výhřevnost

Graf 12. nám zobrazuje, jakým způsobem se do systému teplo přidávalo v závislosti na čase. Všimněme si, že teplo nepřidáváme hned na začátku simulace, a také že nepřidáváme všechno teplo najednou, ale postupně ohříváme systém. Důvodem je, že potřebujeme, aby se systém adaptoval na změny, které v něm vyvoláváme.

Na počátku našich snah o simulaci náporového motoru jsme zkoušeli rozběhnout systém rovnou s přidáním tepla nebo přidat všechno teplo najednou (skokově) do již rozběhnutého výpočtu. Výsledkem bylo, že i přes velký počet časových kroků se výpočet neustálil a dosažené výsledky, pak nemohly odpovídat předpokladům.

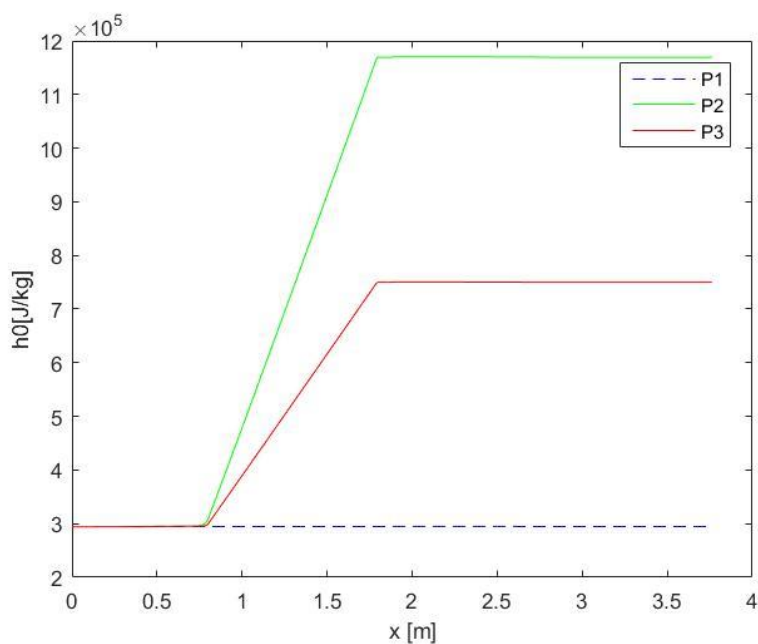
Jak se systém ustaloval s postupně přidávaným teplem, můžeme zhodnotit v grafu 13., který nám ukazuje průběh residua hustoty v závislosti na časovém kroku. Residuum jsme, stejně jako u Lavalovy dýzy, počítali při každém stém kroku.



Graf 13 - Residuum hustoty

Z grafu 13. je patrné, že výpočet konverguje ke konečným výsledkům. Pro první případ, kdy do systému nepřidáváme teplo nám stačí pro ustálení $n = 10^5$ časových kroků. Pro případ 2. a 3. přidáváme v rozmezí $n = (10^5; 9,2 \cdot 10^5)$ časových kroků do systému teplo. Vidíme, že residuum přestává klesat a kolísá. Po dosažení $9,2 \cdot 10^5$ časových kroků, přidáváme konstantní hodnotu tepla a residuum opět rychle klesá a systém se ustaluje. Všimněme si, že pro případ 2 klesá residuum pomaleji, než pro případ 3. Vidíme tedy, že vyšší hodnota přidávaného tepla má vliv na rychlost ustálení výpočtu.

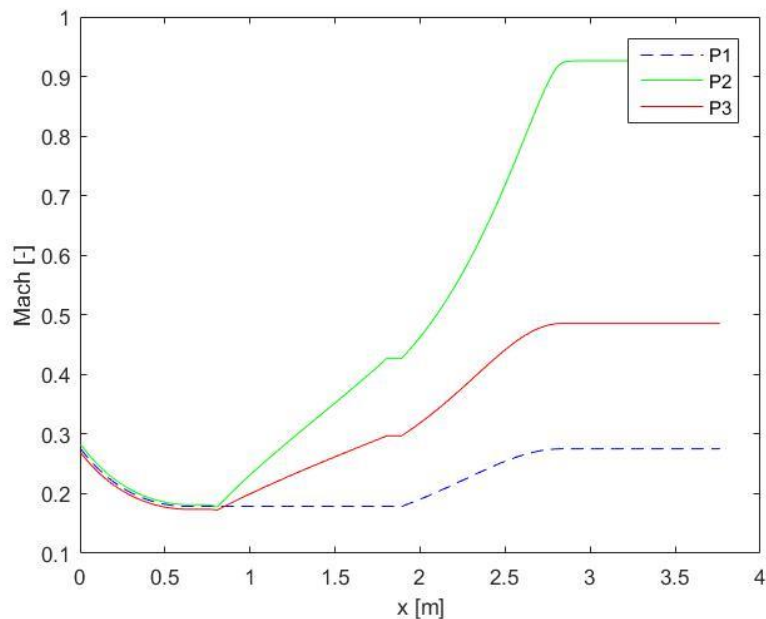
Dalším grafem, na který se zaměříme bude graf 14., který zobrazuje průběh klidové entalpie.



Graf 14 - Klidová entalpie

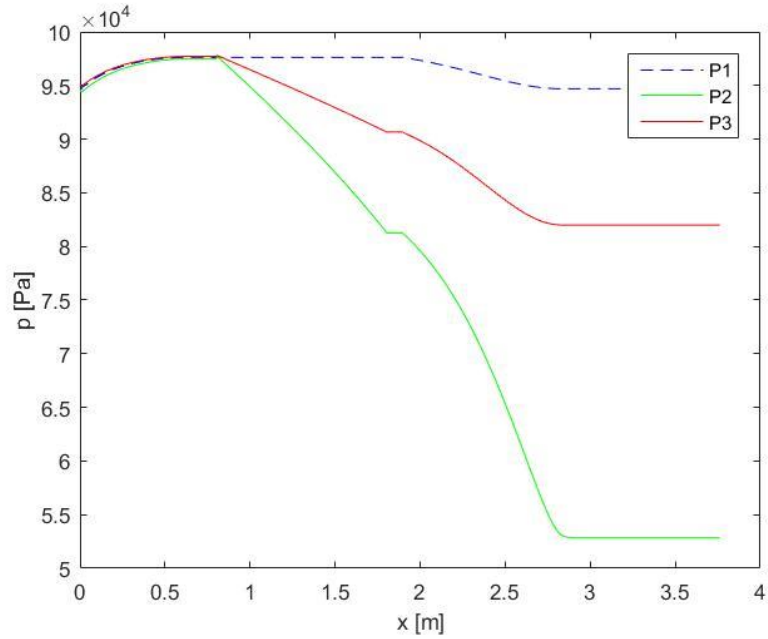
Na průběhu klidové entalpie (graf 14) si můžeme ukázat, jak jsme do systému vkládali energii. V případě 1 vidíme, že klidová entalpie je konstantní – do systému není externě přidávaná energie. V případě 2 a 3 můžeme pozorovat, že na vstupu do motoru je energie v systému stejná jako v prvním případě. V oblasti $x = \langle 0,8 ; 1,8 \rangle$ přidáváme do systému lineárně teplo a energie systému lineárně roste do své maximální hodnoty. Poté v této energetické hladině setrvává až do konce motoru. Pokud porovnáme případ 2 s případem 3, zjistíme, že zdvojnásobením výhřevnosti přidávané do systému, zdvojnásobíme také přidanou energii systému.

Jedním z projevů nárůstu energie v systému s podzvukovou rychlostí, by měl být nárůst rychlosti. Zda tomu tak je, zhodnotíme pomocí grafu průběhu Machova čísla (graf 15.).



Graf 15 - Machovo číslo

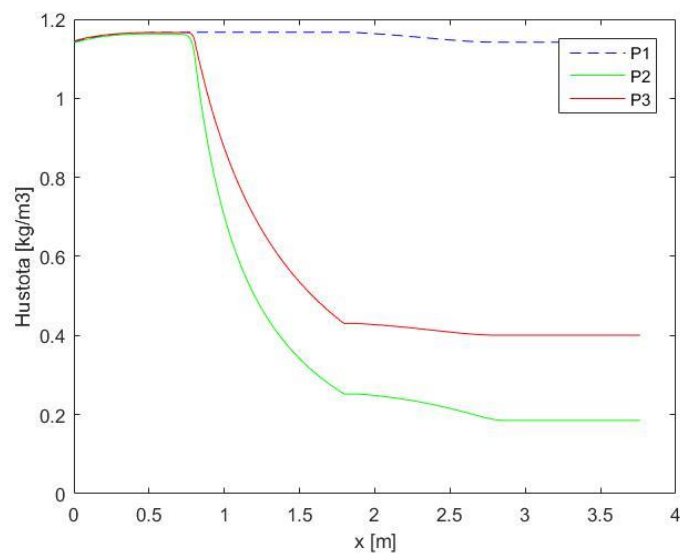
Průběh Machova čísla nám říká, jak se vyvíjela rychlost v našem náporovém motoru. Pro případ 1 pozorujeme, že změnu rychlosti vyvolává pouze změna tvaru. Jelikož nepřekročíme hodnotu Machova čísla $M = 1$, tak se pohybujeme stále v podzvukovém proudění. V rozšíření Machovo číslo klesá, při konstantním průřezu zůstává konstantní a při zúžení roste. To můžeme pozorovat v grafu 15. Ve případě 2 a 3 se proudění chová obdobně, až do přidání tepla $x \in \langle 0,8 ; 1,8 \rangle$, kde rychlost proudu začne narůstat, přestože průřez dýzy je konstantní. V momentě kdy přestaneme přidávat teplo, ale ještě nezužujeme dýzu máme oblast proudu o stálém Machovu čísle, to opět vzroste po vstupu do zužující se části motoru. Ani v jednom případě nepřekročíme rychlost zvuku, pro každý případ máme ale jinou výstupní rychlost. Nejvyššího Machova čísla dosahujeme v případě 2, kdy přidáváme nejvíce tepla. Nejnižšího pak v případě 1, kdy je výstupní rychlost přibližně rovna vstupní rychlosti.



Graf 16 - Tlak

Další sledovanou veličinou našeho výpočtu byl tlak. Můžeme si všimnout, že tlak se chová přesně naopak než rychlost. Se zvětšením průřezu narůstá, se zmenšením, nebo přidáním tepla klesá.

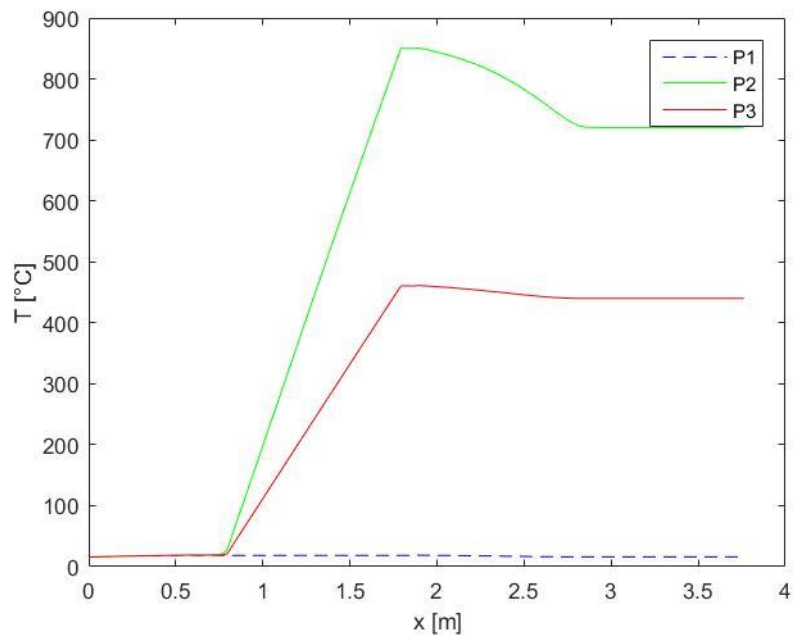
Tlak na začátku a konci našeho motoru je jeden z faktorů, který značně ovlivňuje náš výpočet. Právě pomocí nastavení tlaků ve výpočtu jsme schopni zajistit stejnou vstupní rychlost (stejnou rychlost letu) pro všechny tři případy. To je pro nás důležité proto, abychom mohli porovnat vzniklý tah v motoru. Pro případ 2 a 3 hraje v nastavení výpočtu také roli hodnota výhřevnosti. Pro dosažení výsledků, které lze porovnat, musíme i pro tyto dva výpočty změnit nastavení tlaků.



Graf 17 - Hustota

Z grafu 17. vidíme, že hustota se chová obdobně jako tlak, s poklesem rychlosti narůstá a se zvýšením rychlosti naopak klesá.

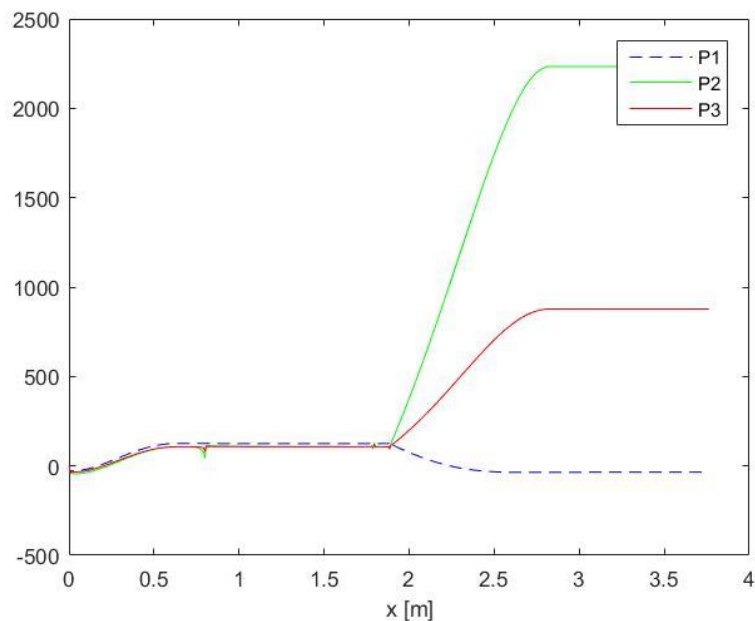
Další veličinou, kterou je vhodné sledovat je teplota, a to zejména z hlediska následné volby materiálu a zhodnocení nutnosti chlazení systému.



Graf 18 – průběh teploty

Z grafu 18. je patrné, že pokud do systému nepřidáváme teplo, tak se teplota nemění. S přidáním tepla teplota lineárně narůstá do svého maxima. Následně klesá do nové ustálené hodnoty.

Proto, aby jakýkoliv proudový motor plnil svůj účel a poháněl nějaký stroj, je nutné vygenerovat tah.



Graf 19 - Tah

V předchozích odstavcích jsme si vysvětlili, jak se chová rychlost a tlak v našem náporovém motoru. Tyto dvě veličiny jsou základními faktory, které ovlivňují tah motoru (53)

$$Tah = \underbrace{\dot{m}_i * u_i - \dot{m}_1 * u_1}_{\text{změna hybnosti}} + \underbrace{(p_i - p_1) * A_i}_{\text{změna tlaků}} \quad (53)$$

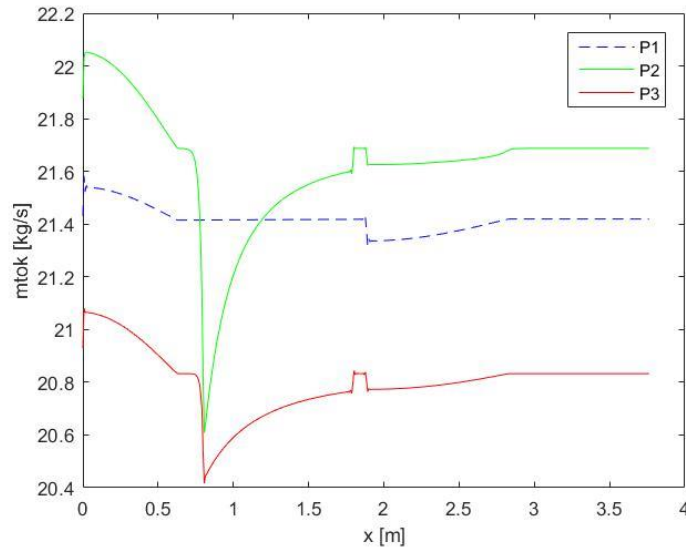
Z rovnice (53) tedy vyplývá, že pro vznik tahu v motoru je třeba, aby složka změny hybnosti překonala složku změny tlaků.

Z grafu 19. vidíme, že pokud do systémů nepřidáváme teplo (případ 1), v systému nevznikne tah. V případě 2 a 3 naopak vidíme, že přidání tepla zajistí potřebný nárůst rychlosti, nezbytný k získání vysoké složky změny hybnosti, a tudíž i ke vzniku tahu. V grafu 19. dále vidíme, že čím více tepla přidáme, tím větší tah vytvoříme.

Poslední veličinou, kterou se budeme zabývat je hmotnostní tok. Z rovnice kontinuity (54) je patrné, že hmotnostní tok by měl být konstantní po celé délce motoru. Podíváme-li se na graf 20. vidíme, že se v našich výsledcích dostáváme do rozporu s tímto tvrzením.

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow A_1 * \rho_1 * c_1 = A_2 * \rho_2 * c_2 \quad (54)$$

Vidíme, že chyba narůstá s přidáním tepla. Pro případ bez přidání tepla (P1) se chyba pohybuje okolo 1%. Pro případ 3 nám chyba naroste na přibližně 2,5% a pro případ 2, kdy přidáváme nejvíce tepla se chyba vyšplhá až na 7%.



Graf 20 - Hmotnostní tok

Pojďme se tedy podívat, co by tuto chybu mohlo způsobovat. První se podíváme na, to, jak se hmotnostní tok v naší simulaci počítal:

$$\dot{m}_i = A_i * \rho_i * u_i = \underbrace{W(2, i)}_{\substack{\text{druhá složka} \\ \text{vektoru } \mathbf{W} \text{ v} \\ \text{i-tém bodě}}} \quad (55)$$

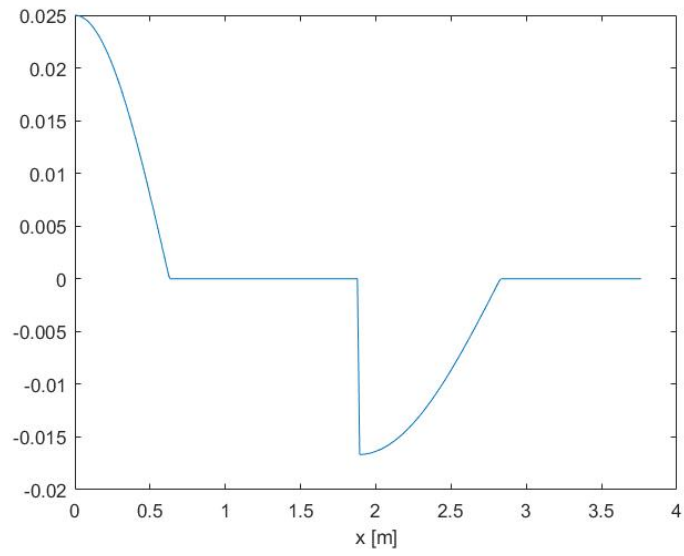
Rovnice (55) nám sama o sobě neříká kde je chyba, ukazuje nám ale, že je třeba se podívat na druhou Eulerovu rovnici, tedy druhou složku rovnice (21)

$$\frac{\partial}{\partial t}(A(x)\bar{\rho}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(A(x)\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}) = A'(x)\bar{p} \quad (56)$$

Hustota, rychlost a tlak jsou veličiny počítané v simulaci. Během simulace se mění a chyba v těchto hodnotách je spíše chybou způsobenou nepřesností numerické metody. Pojďme se tedy zaměřit na tvar dýzy (graf 10.) a jeho derivaci (graf 19.). Z grafu 19. je vidět, že derivace průřezu není spojitá.

Další, čeho si v grafu 20. můžeme všimnout, je, že k největší chybě dochází na intervalu $x = (0,8; 1,8)$, což je interval, na kterém se měnil průběh q .

Tuto nespojitost, nepřesnost numerické metody a změny v průběhu zdrojového členu můžeme považovat za největší zdroje chyby výpočtu hmotnostního toku.



Graf 21 - derivace průřezu $A(x)$

8. Závěr

Na začátku jsme si stanovili cíl nasimulovat chování proudění v náporovém motoru. Abychom simulaci mohli zrealizovat, použili jsme k popisu proudění Eulerovy 2D rovnice, které jsme si upravili pro 1D případ s proměnným průřezem. Dále jsme použili metodu konečných diferencí a metodu konečných objemů k řešení naší simulace.

Jako první jsme nasimulovali dění v rázové trubici, to nám pomohlo si uvědomit, co ovlivňuje přesnost výpočtu, a jak se projevují rázové vlny.

Naším dalším úkolem byl náporový motor. Z počátku jsme mysleli, že nasimulujeme nadzvukový náporový motor. Brzy jsme ale zjistili, že k simulaci tohoto motoru bychom potřebovali složitější geometrii motoru, Eulerovy rovnice v 2D tvaru a numerické metody pro 2D. Proto jsme se rozhodli z tohoto motoru nasimulovat pouze výstupní Lavalovu dýzu. Pouze v této simulaci jsme dovolili, aby se proud urychlil do nadzvukového režimu.

Jako poslední jsme simulovali chování plynu v podzvukovém náporovém motoru, čímž jsme naplnili náš počáteční cíl.

Na výpočtu hmotnostního toku v náporovém motoru jsme zjistili, že použitá metoda je pravděpodobně citlivá na nespojitý průběh $A'(x)$. K základní představě o problému, ale stačí a její výhodou je poměrně snadná programovatelnost a rychlost výpočtu.

Všechny tři simulace jsme počítali v programu Matlab. Programy, kterými jsme simulace realizovali, jsme si vytvořili sami.

Zjistili jsme, že správná volba parametrů simulace, vyžaduje um a zkušenost modeláře.

9. Zdroje

- [1] NOŽIČKA, Jiří. *Základy termomechaniky*. Vyd. 2. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2008. ISBN 978-80-01-04022-5
- [2] Ames Research Staff: *Equations, Tables and Charts for Compressible Flow*, Report 1135 for the National Advisory Committee for Aeronautics, 1953.
- [3] KOZEL, Karel a FÜRST, Jiří. *Numerické metody řešení problémů proudění I*. Praha: ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02384-2.
- [4] FOŘT, Jaroslav a kol. *Numerická simulace proudění I*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005. ISBN 80-01-03162-4.
- [5] KUSSIOR, Zdeněk. *Letecké Motory* [online]. 2002 [cit. 2018-01-08]. Dostupné z: <http://www.leteckemotory.cz/teorie/typy-leteckych-motoru/>
- [6] ŠKORPÍK, Jiří. Proudění plynů a par tryskami, *Transformační technologie*, 2006-02, [last updated 2017-10-10]. Brno: Jiří Škorpík, [on-line] pokračující zdroj, ISSN 1804-8293. Dostupné z <http://www.transformacni-technologie.cz/40.html>. English version: Flow of gases and steam through nozzles. Web: http://www.transformacni-technologie.cz/en_40.html.
- [7] ŠKORPÍK, Jiří. Proudění plynů a par difuzory, *Transformační technologie*, 2016-03, [last updated 2016-07-13]. Brno: Jiří Škorpík, [on-line] pokračující zdroj, ISSN 1804-8293. Dostupné z <http://www.transformacni-technologie.cz/41.html>.
- [8] NASA [online]. [cit. 2018-01-14]. Dostupné z: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/ramth.html>
- [9] ANDERSON J.D, *Modern Compressible Flow*. McGraw Hill Inc. New York, 1984. [online] [Cit. 1. 1. 2017]. Dostupné z: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/stube/stube.html>