

Bakalářská práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F2

Fakulta strojní
Ústav technické matematiky

Numerické řešení proudění kanálem s náhlým rozšířením

Radek David

Vedoucí: Ing. Jiří Holman, Ph.D.

Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství
Srpen 2017

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **David** Jméno: **Radek** Osobní číslo: **420482**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojího inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Numerické řešení proudění kanálem s náhlým rozšířením

Název bakalářské práce anglicky:

Numerical solution of flow through channel with sudden cross-section change

Pokyny pro vypracování:

Student se seznámí se základními rovnicemi popisujícími proudění tekutin a s principy jejich numerického řešení. Pomocí vlastního software naprogramovaného v C/C++ potom provede numerickou simulaci proudění neviské stlačitelné tekutiny dýzou a kanálem s náhlým rozšířením.

Seznam doporučené literatury:

Kozel, K., Fürst, J.: Numerické řešení problémů proudění I, skriptum ČVUT FS, 2001.
Batten, P., Clarke, N., Lambert, C., Causon, D. M.: On the choice of wave speeds for the HLLC Riemann solver, SIAM Journal on Scientific Computing Vol. 18, 1997.
Fuhrmann J., Ohlberger M., Rohde Ch.: Finite Volumes for Complex Application VII - Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems, Springer, 2014.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Jiří Holman Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **18.04.2017**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2017**

Platnost zadání bakalářské práce: _____



Podpis vedoucí(ho) práce



Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

28.4.2017

Datum převzetí zadání

R. David

Podpis studenta

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce Ing. Jiřímu Holmanovi, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce. Dále bych chtěl poděkovat rodině za jejich podporu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci "Numerické řešení proudění kanálem náhlým rozšířením" vypracoval samostatně pod vedením Ing. Jiřího Holmana, Ph.D. s použitím literatury uvedené na konci bakalářské práce v seznamu použité literatury.

V Humpolci 17. srpna 2017

Abstrakt

Práce se zabývá numerickou simulací proudění stlačitelné neviské tekutiny dýzou a kanálem s náhlým rozšířením. Jsou užity dvě metody - řešení kvazi-jednodimenzionálních rovnic a řešení tzv. 1D+ rovnic. V první části jsou popsány fyzikální základy proudění. Další dvě části jsou věnovány matematické teorii zákonů zachování a jejich numerickému řešení. V poslední části jsou ukázány výsledky numerických výpočtů na zadaných geometriích.

Klíčová slova: neviské stlačitelné proudění, kvazi-jednorozměrné Eulerovy rovnice, metoda konečných objemů, HLL schéma, HLLC schéma, dýza, kanál s náhlým rozšířením

Vedoucí: Ing. Jiří Holman, Ph.D.

Abstract

The work deals with numerical simulation of compressible inviscid flow through nozzle and duct with sudden expansion. Two mathematical models are used - solving quasi-onedimensional equations and so-called 1D+ equations. In the first part are laid the physical foundations of this type of flow. The two following parts are dedicated to mathematical theory of systems of conservation laws and their numerical treatment. Finally, in the last section the results of numerical simulations on given geometries are shown.

Keywords: inviscid compressible flow, quasi-onedimensional flow Euler equations, finite volume method, HLL scheme, HLLC scheme, nozzle, duct with sudden expansion

Obsah

1 Úvod	1	5 Numerické výsledky	36
2 Fyzika	2	5.1 1D+ schéma	36
2.1 Kinematika tekutin	2	5.2 Popis programu	38
2.1.1 Lagrangeův popis	2	5.3 Numerické řešení proudění dýzou	38
2.1.2 Eulerův popis	3	5.4 Testovací případ	40
2.2 Bilanční rovnice	3	5.5 Numerické řešení proudění kanálem s náhlým rozšířením	42
2.2.1 Bilance hmotnosti	4	5.6 Řešení proudění v kanálu se sklonem pomocí 1D+ schématu	43
2.2.2 Bilance hybnosti	4	5.7 Numerické řešení proudění kanálem s náhlým rozšířením a sklonem	45
2.2.3 Bilance energie	5	6 Závěr	48
2.3 Navierovy-Stokesovy rovnice	6	A Literatura	49
2.4 Eulerovy rovnice	6	B Použité značení	51
2.5 Stavová rovnice	7		
3 Matematická teorie zákonů zachování	8		
3.1 Základní pojmy	8		
3.2 Eulerovy rovnice v rovině	11		
3.3 Kvazi-1D Eulerovy rovnice	12		
4 Numerické řešení zákonů zachování	16		
4.1 Způsoby numerického řešení	16		
4.2 Základní pojmy	17		
4.3 Riemannův problém	18		
4.3.1 Obecný Riemannův problém	18		
4.3.2 Riemannův problém pro Eulerovy rovnice	18		
4.4 Přesné řešení Riemannova problému	19		
4.5 Godunovova metoda	19		
4.6 Přibližné řešení Riemannova problému	21		
4.7 HLL	22		
4.8 HLLC	24		
4.9 Výpočet signálních rychlostí	26		
4.10 Metoda konečných objemů	27		
4.11 Časová diskretizace	30		
4.12 Okrajové podmínky	30		
4.12.1 Okrajové podmínky v dynamice plynů	31		
4.12.2 Numerická implementace okrajových podmínek	32		
4.12.3 Konkrétní implementace okrajových podmínek v mých programech	32		
4.13 Časový krok	34		
4.14 Reziduum	35		

Obrázky

Tabulky

3.1 Schéma pro odvození rovnic pro kvazi-1D proudění	13
3.2 Tlakové síly působící na kontrolní objem	14
4.1 Struktura řešení Riemannova problému pro systém (4.3.1)	18
4.2 Struktura řešení Riemannova problému pro systém (4.3.3)	19
4.3 Schéma Godunovovy metody ...	21
4.4 Struktura Riemannova problému pro HLL schéma	22
4.5 Struktura Riemannova problému pro HLLC schéma	24
4.6 Síť pro metodu konečných objemů (nestrukturovaná)	28
5.1 Odvození 1D+ schématu	37
5.2 Vývojové diagramy	39
5.3 Geometrie dýzy	40
5.4 Dýza - průběh hustoty	40
5.5 Dýza - průběh Machova čísla ...	41
5.6 Testovací případ - Riemannův problém v kanále s nespojitým průřezem	41
5.7 Testovací případ - Riemannův problém v kanálu s nespojitým průřezem - průběh hustoty	42
5.8 Geometrie kanálu s náhlým rozšířením (SE1050)	43
5.9 SE1050 - průběh hustoty	43
5.10 SE1050 - průběh Machova čísla	44
5.11 Otáčení vektoru rychlosti	45
5.12 Geometrie kanálu s náhlým rozšířením a sklonem (SE1050) ...	45
5.13 SE1050 se sklonem - průběh hustoty	46
5.14 SE1050 se sklonem - průběh Machova čísla	47
5.15 SE1050 se sklonem - průběh úhlu α	47



Kapitola 1

Úvod

Tato bakalářská práce má za cíl provést simulaci proudění stlačitelné neviské tekutiny v dýzách a kanálech s náhlým rozšířením. Takové proudění lze chápat jako zjednodušení proudění mezilopatkovými kanály turbínových strojů. Metody, které budou uvedeny, jsou založeny na použití jednorozměrných modelů, které jsou oproti složitějším 2D/3D modelům daleko jednodušší a podstatně méně výpočetně náročnější. Výsledky sice nejsou tak přesné, nicméně se dají využít jako návrhové výpočty, kde záleží spíše na čase, ve kterém jsou výsledky k dispozici, přičemž složitější modely se používají na podrobnější propočty.

První část této práce se zabývá fyzikálními základy celého problému - tedy odvozením obecných rovnic popisujících proudění stlačitelných neviských tekutin - Eulerových rovnic.

Druhá část je věnována matematické teorii zákonů zachování, které tvoří základy pro numerické řešení zmíněných rovnic.

Ve třetí části jsou teoreticky popsány a odvozeny způsoby numerického řešení zákonů zachování a tedy i numerického řešení Eulerových rovnic.

V poslední části jsou představeny výsledky numerického řešení proudění dýzou a kanálem s náhlým rozšířením. Simulace byly provedeny v programech napsaných v programovacím jazyce C++, které byly vytvořeny autorem práce.

Kapitola 2

Fyzika

Nejprve je potřeba popsat fyzikální základ celé práce, tedy stanovit rovnice popisující proudění tekutin. V této kapitole budou tyto rovnice odvozeny, přičemž se uvažuje, že tekutina je kontinuum.

Poznámka 1. Bude užít tenzorový složkový tvar, přičemž je uvažována Einstei-
nova sumační konvence - pokud se nějaký index vyskytne ve výrazu dvakrát,
sčítá se přes něj.

V této kapitole bude užita následující věta z vektorové analýzy:

Věta 1 (Gaussova-Ostrogradského věta). [10]

Nechť V je třírozměrná varieta (těleso) v \mathbb{R}^3 , jejíž povrch ∂V má vnější normálu n_i . Potom platí

$$\oint_{\partial V} \psi n_i dS = \int_V \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV, \quad (2.0.1a)$$

$$\oint_{\partial V} b_i n_i dS = \int_V \frac{\partial b_i}{\partial x_i} dV. \quad (2.0.1b)$$

2.1 Kinematika tekutin

2.1.1 Lagrangeův popis

Tento způsob se používá především v mechanice pevných těles. Popisujeme polohu každé částice proudového pole, která závisí na čase a na konstantách a , b , c - ty určují počáteční polohu částice

$$x_i = x_i(a, b, c, t) \quad (2.1.1)$$

Rychlost částice

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (2.1.2)$$

Zrychlení

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Eulerův popis

Spočívá v tom, že popisujeme rychlost v určitém místě proudového pole, kterým však procházejí různé částice tekutiny. Tento způsob je výhodnější a používanější než Lagrangeův.

$$v_i = v_i(x, y, z, t) = v_i(x_j, t) \quad (2.1.4)$$

Zrychlení (tedy derivaci rychlosti podle času) se určí např. tak, že napíšeme totální diferenciál dv_i

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (2.1.5)$$

Dělením diferenciálem času dt , získáme tzv. materiální derivaci (diferenciály pak někdy píšeme velkým písmenem D)

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j, \quad (2.1.6)$$

neboť $\frac{dx_j}{dt} = v_j$.

Lokální derivace $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ vyjadřuje časovou změnu rychlosti v určitém pevném bodě - pro stacionární proudění je nulová. Konvektivní derivace $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ vyjadřuje změnu rychlosti v závislosti na poloze, pokud bychom „zastavili“ čas.

2.2 Bilanční rovnice

Ze zkušenosti je známo, že časová změna veličiny Φ v tělese/objemu může být způsobena dvěma způsoby:

- tokem veličiny přes hranici tělesa
- zdrojem veličiny uvnitř tělesa

Z této úvahy lze odvodit bilanční rovnici (viz [10]), do které dosazujeme jednotlivé veličiny a získáváme tak jejich bilance. Pro popis proudění je potřeba znát rovnice bilance hmotnosti, hybnosti a celkové energie.

Bilanční rovnice v integrálním tvaru je ¹

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varphi dV = \oint_{\partial V} j_i(\Phi) n_i dS + \int_V \pi(\Phi) dV, \quad (2.2.1)$$

kde hustota veličiny Φ je definována vztahem $\varphi = \frac{d\Phi}{dV}$, $j_i(\Phi)$ je hustota toku veličiny (nekonvektivní) a $\pi(\Phi)$ je hustota produkce veličiny v uvažovaném tělese.

¹Bilanční rovnice se v literatuře nepoužívá konzistentně. Vycházím z knihy [10], kde je bilanční rovnice definována jako (2.2.1). Díky tomu, že u prvního integrálu je materiálová derivace, je v tomto členu „schován“ konvektivní přenos veličin. Naproti tomu např. v knize [7] má bilanční rovnice tvar: $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varphi dV + \oint_{\partial V} j_i(\Phi) n_i dS = \int_V \pi(\Phi)$. V tomto případě je u prvního integrálu pouze parciální derivace podle času, a veškeré konvektivní přenosy veličin musíme navíc zahrnout do druhého integrálu - jako hustotu toku veličiny přes plochu ∂V .

V následujících odvozeních bude užíván Reynoldsův transportní teorém, což je vlastně vztah pro výpočet materiální derivace objemového integrálu.

Věta 2 (Reynoldsův transportní teorém). ([10]) *Mějme pevný (časově nezávislý) objem V s povrchem ∂V . Pak platí*

$$\frac{D}{Dt} \int_V \psi dV = \int_V \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \psi v_i n_i dS. \quad (2.2.2)$$

2.2.1 Bilance hmotnosti

Rovnice kontinuity vychází ze zákona zachování hmoty. Bilancovanou veličinou je hmotnost $\Phi = m$, hustotou veličiny je hustota $\varphi = \rho$. Produkce hmotnosti $\pi(m)$ uvnitř objemu je nulová (hmota nemůže vzniknout ani zaniknout), a tok veličiny povrchem tělesa $j_i(m)$ také (to, že tekutina proudí přes stěny kontrolního objemu, je zachyceno v konvektivní části materiální derivace).

Dosazením do rovnice (2.2.1) se obdrží

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (2.2.3)$$

použitím Reynoldsova transportního teorému (2.2.2) se upraví na

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho v_i n_i dS = 0, \quad (2.2.4)$$

a pomocí Gaussovy věty (1) se plošný integrál převede na objemový

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho v_i n_i dS = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} \right) dV = 0. \quad (2.2.5)$$

Poslední integrál se může rovnat nule jen tehdy, pokud je integrand roven nule, protože objem V se může nacházet v libovolném místě tekutiny. Tak získáme diferenciální tvar bilance hmotnosti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.2.6)$$

2.2.2 Bilance hybnosti

Rovnici bilance hybnosti dostaneme opět dosazením do obecné bilanční rovnice, jiný způsob odvození najdeme např. v [15].

Bilancovaná veličina je hybnost $\Phi_i = m v_i$, její hustota je $\varphi_i = \rho v_i$. Hustota toku veličiny je tenzor napětí $j_{ij}(m v_i) = \sigma_{ij}$. Produkce hybnosti uvnitř objemu je způsobena vnějšími silami f_i , hustota produkce hybnosti je tedy $\pi_i(m v_i) = \rho f_i$.

Dosadíme do rovnice (2.2.1)

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV = \oint_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dS + \int_V \rho f_i dV, \quad (2.2.7)$$

opět lze pomocí Reynoldsova teorému (2.2.2) a Gaussovy věty (1) upravit na

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i \right) dV = 0. \quad (2.2.8)$$

Z podmínky nulového integrálu opět plyne, že integrand musí být nulový

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i. \quad (2.2.9)$$

Tenzor napětí je možno rozdělit na statický tlak a tenzor vazkých napětí

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (2.2.10)$$

U pevných látek víme, že napětí závisí na deformaci, Hookův zákon předpokládá lineární závislost. U tekutin je naopak známo, že vnitřní napětí je úměrné rychlosti deformace. Některé plyny (např. vzduch, který je uvažován v této práci) a kapaliny patří mezi tzv. newtonské tekutiny, jejichž vztah mezi tenzorem rychlostí deformace a tenzorem vazkých napětí vyjadřuje Newtonův zákon ([15])

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.2.11)$$

Tento vztah je vlastně obdobou zobecněného Hookova zákona.

Zkombinováním rovnic (2.2.9), (2.2.10) a (2.2.11) se obdrží

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i. \quad (2.2.12)$$

Za druhou viskozitu se dosadí výsledek z kinetické teorie plynů $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ (ten je odvozen pro jednoatomové plyny, ale užívá se i ve složitějších případech), a po jednoduchých úpravách lze dostat tzv. Navierovu-Stokesovu rovnici v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i. \quad (2.2.13)$$

Viskozita závisí na teplotě ($\mu = \mu(T)$), ale při malých rozsazích teplot je možno tuto závislost zanedbat. Zde je tedy předpokládána konstantní viskozita. Rovnici (2.2.13) lze přepsat do nekonzervativního tvaru, ve kterém se objeví materiální derivace

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\nu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i. \quad (2.2.14)$$

■ 2.2.3 Bilance energie

Analogicky k předchozím dvěma případům se odvodí rovnice bilance energie, zachovávanou veličinou je celková energie, která se skládá z vnitřní a kinetické energie $\Phi = mE = m \left(u + \frac{1}{2}v_i^2 \right)$. Její hustota je hustota energie vztažená

na jednotku objemu $\varphi = \rho E = e = \rho \left(u + \frac{1}{2} v_i^2 \right)$. Hustota toku veličiny je $j_i(mE) = \sigma_{ij} v_j - q_i$. Produkce energie v kontrolním objemu je důsledek vnějších sil f_i , hustota produkce je $\pi = \rho f_i v_i$.

Dosazení do vzorce (2.2.1) dává

$$\frac{D}{Dt} \int_V e \, dV = \oint_{\partial V} (\sigma_{ij} v_j - q_i) n_i \, dS + \int_V \rho f_i v_i \, dV, \quad (2.2.15)$$

opět se užije Reynoldsův teorém (2.2.2), Gaussova věta (1) a z podmínky nulového integrandu plyne

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial (\sigma_{ij} v_j - q_i)}{\partial x_i} + \rho f_i v_i, \quad (2.2.16)$$

užitím vztahu (2.2.10) se obdrží

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e v_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial p v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij} v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho f_i v_i. \quad (2.2.17)$$

Dosazením Newtonova (2.2.11) a Fourierova zákona

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.2.18)$$

se odvodí výsledná rovnice bilance energie, její vyjadřování je zde však zbytečné.

2.3 Navierovy-Stokesovy rovnice

Výše uvedené rovnice ((2.2.6), (2.2.14), (2.2.17)) tvoří systém Navierových-Stokesových rovnic, který popisuje proudění stlačitelných vazkých newtonských tekutin. Jejich řešení je nad rámec této práce.

2.4 Eulerovy rovnice

Navierovy-Stokesovy rovnice popisují proudění *vazké* tekutiny. Jako jejich speciální případ vystupují rovnice Eulerovy, které popisují pohyb *nevazké* tekutiny. Získají se tedy tak, že se zanedbají vazké členy, resp. viskozita se položí rovnou nule.

V mnoha případech technické praxe se viskozita zanedbává, aniž by se podstatně zhoršila přesnost výsledků. Eulerovy rovnice jsou jednodušší na řešení a to nám tuto nevýhodu kompenzuje. Pokud by bylo třeba řešit např. proudění v mezní vrstvě, apod., bylo by nutné zůstat u N-S rovnic. Kromě toho se neuvažuje vnější silové pole f_i , protože objemové síly v proudění plynů jsou zanedbatelné. Nakonec se zanedbá konduktivní vedení tepla, součinitel tepelné vodivosti k bude tedy roven nule.

Systém Eulerových rovnic pro stlačitelné proudění vypadá následovně:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.4.1a)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (2.4.1b)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e v_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial p v_i}{\partial x_i}. \quad (2.4.1c)$$

2.5 Stavová rovnice

Systém Eulerových rovnic je neúplný (má 6 neznámých a pouze 5 rovnic). Abychom ho tedy mohli řešit, musíme ho doplnit stavovou rovnicí. Většinou se používá stavová rovnice ideálního plynu

$$p = \rho r T, \quad (2.5.1)$$

která může být odvozena buď empiricky, nebo pomocí statistické termodynamiky. Z ní se dá pomocí Meyerova vztahu $c_p - c_v = r$ a vztahu pro vnitřní energii $u = c_v T$ získat rovnice pro tlak

$$p = (\kappa - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho (v_i v_i) \right). \quad (2.5.2)$$

Je možno použít některou ze složitějších stavových rovnic, které lépe vystihují chování reálných plynů, ale pro úlohy řešené v této práci bude použita pouze výše zmíněná stavová rovnice ideálního plynu, která platí pro vzduch velmi dobře v poměrně širokém rozsahu teplot a tlaků.

Kapitola 3

Matematická teorie zákonů zachování

Zde se budu zabývat základem teorie hyperbolických systémů zákonů zachování. V následujících definicích a větách se budou užívat mimo jiné symboly a pojmy, které zde budou vysvětleny. Nejprve označme \mathbf{x} jako bod prostoru \mathbb{R}^n a písmenem M oblast v \mathbb{R}^n , tedy otevřenou a souvislou množinu v \mathbb{R}^n .

- s. v. (skoro všude) - pro všechna $\mathbf{x} \in M - N$, kde N je podmnožina M a míra N je rovna nule
- $C^k(M)$ - prostor funkcí definovaných v M , které jsou v M spojitě diferencovatelné až do řádu k
- $L^p(M)$ - lineární prostor funkcí f definovaných s. v. v M takových, že

$$\|f\|_p = \left(\int_M |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} < +\infty, \quad p \in \mathbb{R}, \quad p \geq 1. \quad (3.0.1)$$

- L^p_{loc} - lineární prostor funkcí f definovaných s. v. v M , které mají tu vlastnost, že $f|_M \in L^p(M)$ pro každou kompaktní množinu $N \subset M$ ($f|_M$ je zúžení funkce f na množinu M a kompaktní množina je množina, která je uzavřená a omezená)
- $C^k_0(M)$ - prostor C^k funkcí s kompaktním nosičem v M (nosič funkce f je uzávěr množiny těch \mathbf{x} , pro které je $f(\mathbf{x}) \neq 0$)

Míra i integrál jsou brány v Lebesgueově smyslu. Pro více informací ke zmíněným pojmům odkazují na [11].

V této kapitole bude Ω značit otevřenou podmnožinu \mathbb{R}^p .

3.1 Základní pojmy

Definice 1. Necht \mathbf{f}_j ($j = 1, \dots, d$) jsou dostatečně hladké funkce (tzn. mají spojitě všechny první derivace), které zobrazují z Ω do \mathbb{R}^d , pak nazveme následující vztah *systémem zákonů zachování v konzervativním tvaru*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0 \quad (3.1.1)$$

kde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

je vektorová funkce zobrazující z $\mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle$ do Ω a funkce

$$\mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} f_{1j} \\ \vdots \\ f_{pj} \end{pmatrix}$$

se nazývají *toky*.

Pokud uvažujeme $d = 2$ (3), většinou místo toků $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, (\mathbf{f}_3)$ píšeme $\mathbf{f}, \mathbf{g}, (\mathbf{h})$.

Definice 2. Necht pro všechna $j = 1, \dots, d$ je

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{u}) = \frac{\partial f_{ij}}{\partial u_k} \quad (3.1.2)$$

Jacobiho matice (Jakobián) funkce $\mathbf{f}_j(\mathbf{u})$. Systém (3.1.1) nazveme *hyperbolickým*, pokud pro jakékoliv $\mathbf{u} \in \Omega$ a $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ má matice

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^d \omega_j \mathbf{A}_j(\mathbf{u}) \quad (3.1.3)$$

p reálných vlastních čísel $\lambda_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \leq \lambda_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \leq \dots \leq \lambda_p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ a p lineárně nezávislých vlastních vektorů $\mathbf{r}_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}), \dots, \mathbf{r}_p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$.

Definice 3. Úlohu, při které hledáme funkci $\mathbf{u} : (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \Omega$, která je řešením rovnic (3.1.1) a splňuje počáteční podmínku

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (3.1.4)$$

nazveme *Cauchyovou úlohou*.

Definice 4. Mějme 1D soustavu rovnic (3.1.1) ($d = 1$). Cauchyovu úlohu ve tvaru

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x < 0 \\ \mathbf{u}_r, & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

nazveme (jednodimenzionálním) *Riemannovým problémem*.

Definice 5. Mějme Cauchyho úlohu (3.1.4) pro obecný systém zákonů zachování (3.1.1). Řekneme, že funkce $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \times \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \Omega, \mathbf{u} \in \mathbf{C}^1$ je *klasické řešení* rovnic (3.1.1) a (3.1.4), pokud je splňuje ve všech bodech.

U klasického řešení nastává problém, že i u hladké počáteční podmínky řešení existuje pouze pro určitý časový interval, jak je možné ukázat pro neviskózní Brugersovu rovnici² (viz [12]). To vede k definici tzv. *slabého řešení*, které nemusí být spojitě.

²Nelineární skalární rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$, existuje ještě *viskózní Burgersova rovnice* $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Definice 6. Předpokládejme, že $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Funkce $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle)$ se nazývá *slabé řešení* Cauchyho problému (3.1.1), (3.1.4), pokud $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ s.v. pro libovolnou testovací funkci $\varphi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty))$ splňuje vztah

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \mathbf{f}_i(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.1.6)$$

Nyní už hledané řešení nemusí být spojité, takže může obsahovat nespojitosti, jako např. rázové vlny. V 1D vypadá rovnice (3.1.6) následovně:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}_0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (3.1.7)$$

Ekvivalentní podmínka k rovnici (3.1.7) je požadavek, aby křivkový integrál $\oint[\mathbf{u} dx - \mathbf{f}(\mathbf{u}) dt]$ byl roven nule po okraji libovolné oblasti $(a, b) \times (t_1, t_2)$, tedy

$$\int_a^b \mathbf{u}(x, t_2) dx - \int_a^b \mathbf{u}(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(\mathbf{u}(b, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(\mathbf{u}(a, t)) dt = 0. \quad (3.1.8)$$

Věta 3. Necht $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \Omega$ je "po částech" \mathbf{C}^1 . Pak \mathbf{u} je řešení (3.1.1) ve smyslu distribucí (viz [11]) na $\mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle$ právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:

1. \mathbf{u} je klasické řešení (3.1.1) na oblastech kde \mathbf{u} je \mathbf{C}^1
2. \mathbf{u} splňuje podmínku

$$(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)n_t + \sum_{j=1}^d (\mathbf{f}_j(\mathbf{u}_+) - \mathbf{f}_j(\mathbf{u}_-))n_{x_j} = \mathbf{0} \quad (3.1.9)$$

na plochách nespojitosti. \mathbf{u}_+ a \mathbf{u}_- značí hodnoty funkce \mathbf{u} na jedné a druhé straně nespojitosti, dané normálovým vektorem \mathbf{n} , přesněji

$$\mathbf{u}_\pm(\mathbf{x}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t \pm \epsilon \mathbf{n}). \quad (3.1.10)$$

Vztah (3.1.9) se nazývá Rankine-Hugoniotova podmínka.

Důkaz. Viz [12]. □

Je možno ukázat ([12]), že slabé řešení nemusí být jednoznačné. Proto je nutné najít nějaký způsob, který z možných slabých řešení vybere to správné, fyzikálně přípustné.

Definice 7. Předpokládejme, že Ω je konvexní. Konvexní funkce $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}^2} > 0$) je nazývána entropie pro systém zákonů zachování (3.1.1), pokud existuje d funkcí $F_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq d$, nazývaných toky entropie takových, že platí vztah

$$U'(\mathbf{u})\mathbf{f}'_j(\mathbf{u}) = F'_j(\mathbf{u}). \quad (3.1.11)$$

Pokud platí vztah (3.1.11), jakékoliv klasické řešení splňuje další zákon zachování

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\mathbf{u}) = 0. \quad (3.1.12)$$

V případě slabého řešení se rovnost změní na nerovnost (viz dále). Metoda, pomocí které lze určit entropické řešení, se nazývá *vanishing viscosity method*. Použije se upravená rovnice, na jejíž pravé straně je viskózní člen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{u}) = \epsilon \Delta \mathbf{u}, \quad (3.1.13)$$

kde Δ je Laplaceův operátor $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$.

Věta 4. Předpokládejme, že systém (3.1.1) má entropii U s toky entropie $F_j, 1 \leq j \leq d$. Necht \mathbf{u}_ϵ je řada dostatečně hladkých řešení rovnice (3.1.13) takových, že

$$\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle)} \leq C, \quad (3.1.14)$$

$$\mathbf{u}_\epsilon \rightarrow \mathbf{u} \text{ pro } \epsilon \rightarrow 0 \text{ s.v. v } \mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle, \quad (3.1.15)$$

kde C je konstanta. Poté \mathbf{u} je slabé řešení systému (3.1.1) a splňuje entropickou podmínku

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\mathbf{u}) \leq 0 \quad (3.1.16)$$

ve smyslu distribucí v $\mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle$.

Definice 8. Slabé řešení \mathbf{u} rovnic (3.1.1) a (3.1.4) nazveme *entropickým řešením*, jestliže pro všechny funkce entropie U a všechny testovací funkce $\varphi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty \rangle, \varphi \geq 0)$ platí

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(U(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d F_j(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} U(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) \varphi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \geq 0, \quad (3.1.17)$$

a v případě 1D problému

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(U(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} U(\mathbf{u}_0(x)) \varphi(x, 0) dx \geq 0. \quad (3.1.18)$$

3.2 Eulerovy rovnice v rovině

Eulerovy rovnice (2.4.1) ve 2D v konzervativním tvaru a Eulerově popisu (2.1.2) jsou systémem rovnic (3.1.1), tedy hyperbolickým systémem zákonů zachování. V rovině vypadají takto:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((e+p)u) + \frac{\partial}{\partial y}((e+p)v) = 0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Zavádí se vektory

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Rovnice (3.2.1) se s jejich využitím dají zapsat ve formě (3.1.1)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (3.2.3)$$

kde \mathbf{U} je tzv. vektor konzervativních proměnných a $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ a $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ jsou nevazké fyzikální toky³.

3.3 Kvazi-1D Eulerovy rovnice

Pokud se řeší proudění v osově symetrických kanálech, dýzách, tryskách apod., můžeme použít tzv. kvazi-1D rovnice. Ty vzniknou zjednodušením 3D rovnic, pokud uvažujeme proudění pouze ve směru x a spojité změny průřezu. Výhodou je, že místo třech prostorových rovnic stačí jen jedna a z toho plyne daleko menší výpočetní náročnost.

Základní předpoklad je tedy ten, že hodnoty fyzikálních veličin jsou v každém průřezu konstantní, a závisí pouze na souřadnici x ve směru osy dýzy. Tento předpoklad není zcela v souladu s realitou, což je cena za zjednodušení rovnic. Při odvozování rovnic (viz [2]) se vychází z integrálních tvarů zákonů zachování.

1. Zákon zachování hmotnosti

Použije se rovnice (2.2.4)

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho v_i n_i dS = 0. \quad (3.3.1)$$

Protože je proudění jednorozměrné, zůstane pouze x -ová složka rychlosti

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho u n_x dS = 0. \quad (3.3.2)$$

Tato rovnice se aplikuje na kontrolní objem zobrazený na obr. 3.1. Tento objem je vlastně infinitezimální ($V = dV = A dx$), proto lze první integrál přepsat na

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} A dx. \quad (3.3.3)$$

³Velká písmena \mathbf{U} , $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ používám proto, aby bylo poznat, že mluvím o soustavě Eulerových rovnic, nikoliv o obecné soustavě zákonů zachování (3.1.1), u které používám malá písmena \mathbf{u} , $\mathbf{f}(\mathbf{u})$.

Plošný integrál ze vztahu (3.3.2) po aplikaci na stěny kontrolního objemu dá

$$\oint_{\partial V} \rho u n_x dS = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) (A + dA) - \rho u A, \quad (3.3.4)$$

a po zanedbání nekonečně malých členů vyššího řádu

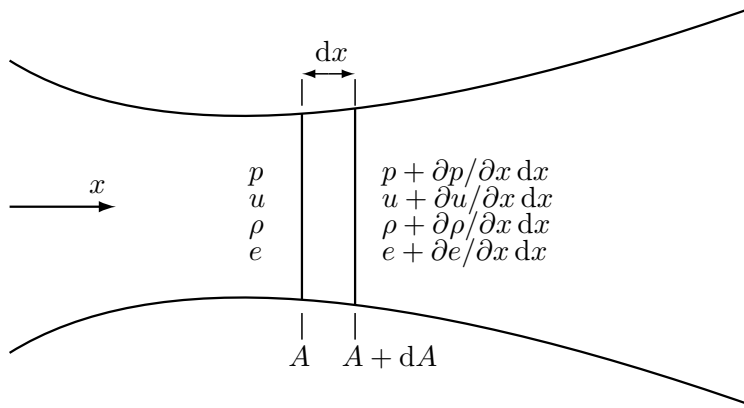
$$\oint_{\partial V} \rho u n_x dS = \rho u dA + \rho \frac{\partial u}{\partial x} dx A + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx u A. \quad (3.3.5)$$

Vztahy (3.3.3) a (3.3.5) se dosadí zpět do rovnice (3.3.2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} A dx + \rho u dA + \rho \frac{\partial u}{\partial x} dx A + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx u A = 0. \quad (3.3.6)$$

Vydělením dx a úpravách se dostane výsledná rovnice zachování hmotnosti pro kvazi-1D proudění (funkce průřezu nezávisí na čase, proto ji lze přemístit do derivace)

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} = 0. \quad (3.3.7)$$



Obrázek 3.1: Schéma pro odvození rovnic pro kvazi-1D proudění

2. Zákon zachování hybnosti

Užije se rovnice (2.2.7), ve které se zanedbají objemové síly, aplikuje se Reynoldsův teorém, tenzor napětí se nahradí tenzorem statického tlaku ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, vazká napětí se neuvažují)

$$\int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho v_i v_j n_j dS = - \oint_{\partial V} p n_i dS. \quad (3.3.8)$$

Předpokládá se proudění pouze ve směru osy x , tak ze tří rovnic zachování hybnosti zůstane jediná

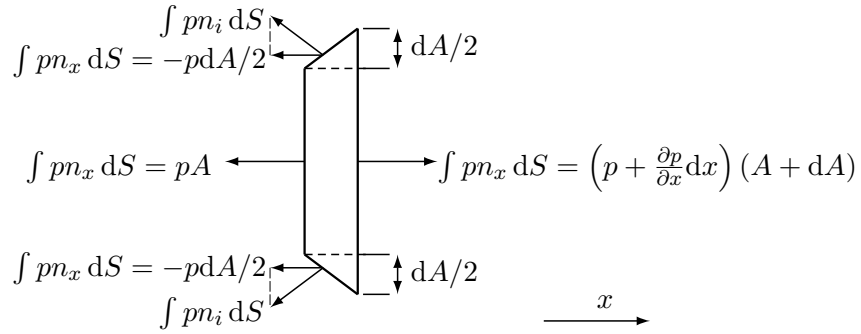
$$\int_V \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho u^2 n_x dS = - \oint_{\partial V} p n_x dS. \quad (3.3.9)$$

Objem, přes který se integruje je opět infinitezimální ($V = dV = Adx$)(obr. 3.1). První dva integrály ze vztahu (3.3.9) se řeší stejným způsobem jako u předchozího případu

$$\int_V \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} Adx \quad (3.3.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \rho u^2 n_x dS &= (\rho + d\rho)(u + du)^2(A + dA) - \rho u^2 A = \\ &= \rho u^2 A + \rho u^2 dA + 2\rho u \frac{\partial u}{\partial x} dx A + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx u^2 A. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Integrál na pravé straně vzorce (3.3.9) se pomocí obr. 3.2 upraví na



Obrázek 3.2: Tlakové síly působící na kontrolní objem

$$\oint_{\partial V} p n_x dS = (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)(A + dA) - 2p \left(\frac{dA}{2} \right) - pA = A \frac{\partial p}{\partial x} dx. \quad (3.3.12)$$

Dosazením vztahů (3.3.10), (3.3.11) a (3.3.12) do rovnice (3.3.9) máme

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} Adx + \rho u^2 A + 2\rho u \frac{\partial u}{\partial x} dx A + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx u^2 A = -A \frac{\partial p}{\partial x} dx. \quad (3.3.13)$$

Funkce průřezu se opět přesune do časové derivace, rovnice se vydělí dx a po úpravách se obdrží rovnice zachování hybnosti pro kvazi-1D proudění

$$\frac{\partial(\rho u A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)A}{\partial x} = p \frac{dA}{dx}. \quad (3.3.14)$$

3. Zákon zachování energie

Postup je obdobný jako u předchozích případů. V rovnici (2.2.15) se užije Reynoldsův teorém, zanedbají se objemové síly a tepelná vodivost, a položí se $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

$$\int_V \frac{\partial e}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} e v_i n_i dS + \oint_{\partial V} p v_i n_i dS = 0. \quad (3.3.15)$$

Protože rychlost je nenulová pouze ve směru x , rovnice se zjednoduší na

$$\int_V \frac{\partial e}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} e u n_x dS + \oint_{\partial V} p u n_x dS = 0. \quad (3.3.16)$$

Integrací na kontrolním objemu na obr. 3.1 a řešením integrálů stejně jako výše je

$$\frac{\partial e}{\partial t} A dx + e \frac{\partial u}{\partial x} dx A + \frac{\partial e}{\partial x} dx A u + e u dA + p \frac{\partial u}{\partial x} dx A + \frac{\partial p}{\partial x} dx A u + p u dA = 0. \quad (3.3.17)$$

Nakonec po vydělení dx a úpravách máme rovnici zachování energie pro kvazi-1D proudění

$$\frac{\partial(eA)}{\partial t} + \frac{\partial((e+p)uA)}{\partial x} = 0. \quad (3.3.18)$$

Výsledné rovnice (3.3.7), (3.3.14) a (3.3.18) se mohou zapsat vektorově se zdrojovým členem

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{Q}, \quad (3.3.19a)$$

kde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ e A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u A \\ \rho(u^2 + p)A \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{dA}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.19b)$$

Kapitola 4

Numerické řešení zákonů zachování

V této kapitole budou základy teorie numerického řešení hyperbolických systémů zákonů zachování, což je soustava *nelineárních* parciálních diferenciálních rovnic 1. řádu a pomocí kterých se modelují výše odvozené zákony zachování. Numerické řešení se provádí, protože nalézt přesné řešení Eulerových rovnic je ve většině případů nemožné se současným matematickým aparátem. V literatuře (např. [9]) se velká pozornost věnuje i jednodušším případům, které vzniknou jejím zjednodušením: skalární rovnici (lineární a nelineární) a soustavě *lineárních* rovnic. Zde budou ukázány pouze některé výsledky z oblasti nelineárních hyperbolických soustav zákonů zachování, tedy toho nejobecnějšího a nejobtížnějšího případu.

V této kapitole bude použita věta z vektorové analýzy.

Věta 5 (Greenova věta). [11] Předpokládejme, že $\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorová funkce v oblasti $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^2$ a souřadnicové funkce U, V mají v \mathcal{O} spojitě parciální derivace. Dále předpokládejme, že \mathcal{C} je kladně orientovaná uzavřená křivka v \mathcal{O} taková, že $\text{Int } \mathcal{C} \in \mathcal{O}$. Pak platí

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_{\text{Int } \mathcal{C}} \text{div } \mathbf{f} \, dS. \quad (4.0.1)$$

4.1 Způsoby numerického řešení

Existuje mnoho způsobů, jak numericky řešit parciální diferenciální rovnice, v CFD (Computational Fluid Dynamics - *Počítačová mechanika tekutin*) se užívá především třech následujících metod:

- Metoda konečných diferencí (*Finite difference method - FDM*)
Známa též jako metoda sítí, historicky nejvíc využívaná. Spočívá v tom, že nahrazujeme derivace v rovnicích různými diferenčními schémata, a to v jednotlivých bodech sítě, která tvoří výpočetní oblast.
- Metoda konečných objemů (*Finite volume method - FVM*)
Pravděpodobně nejpoužívanější v CFD, bude popsána dále v kapitole.
- Metoda konečných prvků (*Finite element method - FEM*)
Používaná především ve výpočtech v oblasti pružnosti, ale též při modelování vazkého proudění (řešení Navier-Stokesových rovnic). Kontinuum

se diskretizuje do určitého počtu prvků (elementů) a metoda vede na velké systémy algebraických rovnic.

4.2 Základní pojmy

Uvažujme nyní Cauchyho úlohu pro obecný systém zákonů zachování, tentokrát v 1D

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Definice 9. Definujeme aproximaci $\mathbf{v}_i^n \in \mathbb{R}^p$ funkce \mathbf{u} v bodě $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$ rovnicí

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \lambda(\mathbf{g}_{j+1/2}^n - \mathbf{g}_{j-1/2}^n), \quad j \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \quad (4.2.2)$$

kde $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ a hodnoty \mathbf{v}_j^0 jsou zadané, a dále platí

$$\mathbf{g}_{j+1/2}^n = \mathbf{g}(\mathbf{v}_{j-k+1}^n, \dots, \mathbf{v}_{j+k}^n), \quad (4.2.3)$$

kde funkce $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{p \times 2k} \rightarrow \mathbb{R}^p$ je spojitá a nazývá se *numerický tok*. Diferenční schéma ve tvaru (4.2.2) se nazývá *konzervativní*.

Definice 10. Schéma v konzervativním tvaru nazveme *konzistentním* se systémem (4.2.1), pokud platí

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p. \quad (4.2.4)$$

Definice 11. Schéma v konzervativním tvaru nazveme *konzistentním s entropickou podmínkou* (3.1.18), pokud je splněna následující nerovnost

$$U_i^{n+1} \leq U_i^n - \lambda(G_{j+1/2}^n - G_{j-1/2}^n), \quad (4.2.5)$$

kde

$$U_i^{n+1} = U(\mathbf{v}_i^{n+1}), \quad U_i^n = U(\mathbf{v}_i^n), \quad F_{i+1/2}^n = F(\mathbf{v}_{j-k+1}^n, \dots, \mathbf{v}_{j+k}^n), \quad (4.2.6)$$

a G je *numerický tok entropie*, konzistentní s tokem entropie

$$G(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = F(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p. \quad (4.2.7)$$

Věta 6 (Lax-Wendroff). Necht je diferenční schéma (4.2.2) konzistentní s zákonem zachování (4.2.1) a s entropickou podmínkou (3.1.18). Necht

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_i^n, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2} \quad (4.2.8)$$

je řešení (4.2.2). Předpokládejme, že pro jistou posloupnost Δ_k limita

$$\lim_{\Delta_k \rightarrow 0} \mathbf{v}(x, t) = \mathbf{u}(x, t) \quad (4.2.9)$$

existuje ve smyslu L_{loc}^1 konvergence. Poté limita \mathbf{u} splňuje slabou integrální formu (3.1.7) zákonů zachování a slabou integrální formu (3.1.18) entropické podmínky.

Důkaz. Viz [18]. □

Lax-Wendroffova věta tedy říká, že pokud konzervativní schéma konverguje, pak konverguje ke slabému řešení.

4.3 Riemannův problém

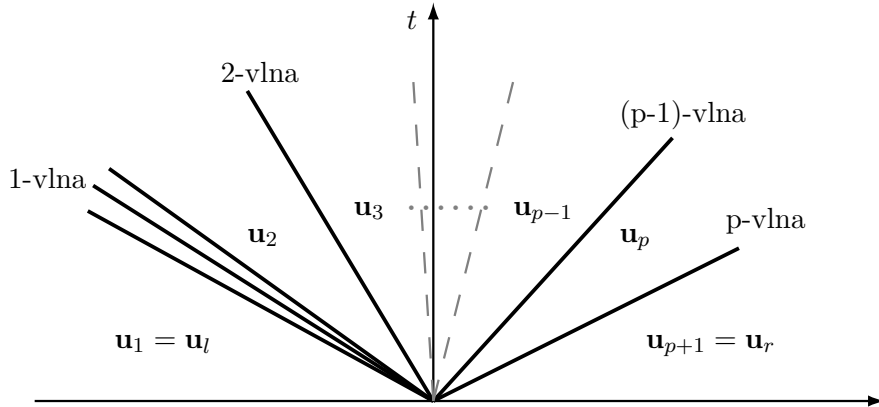
V následujících kapitolách se budeme zabývat podrobněji Riemannovým problémem (3.1.5), na jehož řešení je založeno mnoho numerických metod užívaných v CFD.

4.3.1 Obecný Riemannův problém

Mějme Riemannův problém pro systém zákonů zachování (3.1.1) ($d = 1$)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x < 0, \\ \mathbf{u}_r, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

kde vektory \mathbf{u} a \mathbf{f} mají p složek. Řešení Riemannova problému je složeno z maximálně $p + 1$ konstantních stavů, které jsou odděleny nejvíce p rázovými vlnami (*shock wave*), expanzními vlnami (*rarefaction wave*), nebo kontaktními vlnami/nespojnostmi (*contact discontinuity*). Rázové vlny vytvářejí nespojitosti v průběhu fyzikálních veličin, zatímco u expanzních vln se veličiny mění spojitě.



Obrázek 4.1: Struktura řešení Riemannova problému pro systém (4.3.1)

4.3.2 Riemannův problém pro Eulerovy rovnice

Mějme soustavu Eulerových rovnic (3.2.1), zde zjednodušenou na 1D problém.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (4.3.2)$$

kde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p)u \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Řešení 1D Riemannova problému (3.1.5) pro soustavu Eulerových rovnic sestává z dvou akustických vln a jedné kontaktní. Kontaktní vlna, charakterizovaná rychlostí S_M je vždy uprostřed, akustické jsou krajní a mohou to být buď rázové vlny, nebo expanzní. Jejich rychlosti jsou S_R (pravá) a S_L (levá).

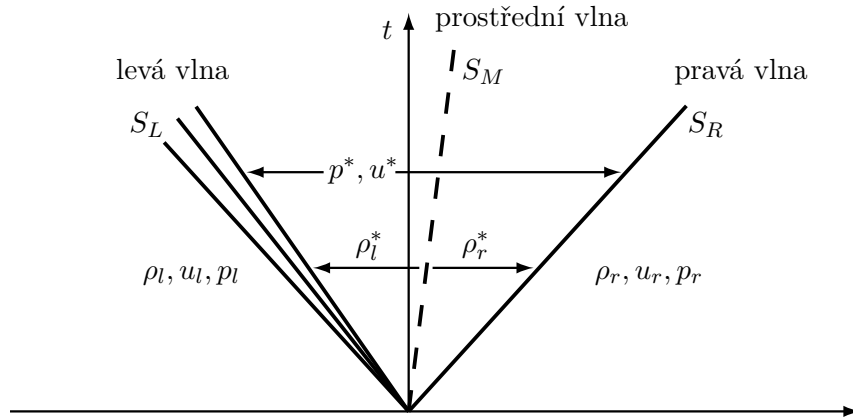
Tyto vlny rozdělují oblast na 4 části, ve kterých je řešení (tedy vektor proměnných \mathbf{U}) konstantní. Máme tedy 4 stavy

$$\mathbf{U}_l = \begin{bmatrix} \rho_l \\ \rho_l u_l \\ e_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_l^* = \begin{bmatrix} \rho_l^* \\ \rho_l^* u_l^* \\ e_l^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_r^* = \begin{bmatrix} \rho_r^* \\ \rho_r^* u_r^* \\ e_r^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} \rho_r \\ \rho_r u_r \\ e_r \end{bmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Tlak a rychlost se nemění při přechodu přes kontaktní nespojitost, platí tedy:

$$p_l^* = p_r^* = p^* \quad \text{a} \quad u_l^* = u_r^* = u^*. \quad (4.3.5)$$

Pokud je levá nebo pravá vlna expanzní (viz. 4.2, levá vlna), veličiny se při přechodu přes tuto vlnu spojitě mění, čímž vzniká pátý, popř. šestý "stav".



Obrázek 4.2: Struktura řešení Riemannova problému pro systém (4.3.3)

Existují dvě možnosti jak řešit Riemannův problém - přesně nebo přibližně.

4.4 Přesné řešení Riemannova problému

Přesné řešení je popsáno v [12]. Nevýhoda je, že řešení nelze nalézt v uzavřeném tvaru, je nutno použít iterační metody, přičemž řešení můžeme nalézt s libovolnou přesností. Výpočet je však náročný na výpočetní čas.

4.5 Godunovova metoda

Godunovova metoda využívá exaktního řešení Riemannova problému a je jedním ze základních „stavebních kamenů“ MKD/MKO. Godunov navrhl tuto metodu ve svém článku [6] v roce 1959, přičemž ji odvodil pro Eulerovy rovnice v Lagrangeových souřadnicích. My se budeme držet výkladu podaného v [12], [18].

Uvažujeme Riemannův problém pro hyperbolický systém zákonů zachování v 1D

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x < 0, \\ \mathbf{u}_r, & x > 0, \end{cases} \quad (4.5.1)$$

jehož entropické řešení je $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_e(x/t; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$ a závisí na stavech $\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r$ a poměru x/t .

Metoda spočívá v následujících krocích:

1. Nejprve definujeme aproximaci $\mathbf{v}(x, t_n)$ na diskrétních časových vrstvách $t_n, n = 0, 1, \dots$ tak, aby byla po částech konstantní funkcí v proměnné x :

$$\mathbf{v}(x, t_n) = \mathbf{v}_j^n, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2} \quad (4.5.2)$$

2. Řešíme Cauchyho úlohu (tzn. řešíme exaktně všechny Riemannovy problémy).

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, t_n) = \mathbf{v}(x, t_n) \quad (4.5.3)$$

Řešení je určeno

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_e\left(\frac{x - x_{j+1/2}}{t - t_n}; \mathbf{v}_j^n; \mathbf{v}_{j+1}^n\right), \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}. \quad (4.5.4)$$

3. Řešení zprůměrujeme na jednotlivých "buňkách", tak abychom opět dostali po částech konstantní funkci.

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, t_n + \Delta t) dx \quad (4.5.5)$$

Tímto jsme získali řešení v nové časové vrstvě, a algoritmus můžeme opakovat.

Abychom dostali více explicitní tvar schématu, integrujeme rovnici (4.5.3) na oblasti $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (t_n, t_n + \Delta t)$. Získáme

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (\mathbf{u}(x, t + \Delta t) - \mathbf{u}(x, t)) dx + \\ & + \int_t^{t+\Delta t} (\mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j+1/2} - 0, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j-1/2} + 0, t))) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Pomocí vzorce (4.5.5) dostaneme

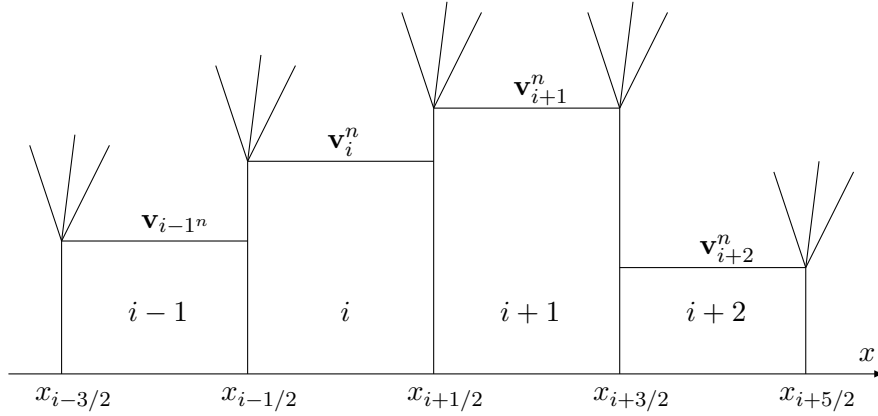
$$\Delta x (\mathbf{v}_j^{n+1} - \mathbf{v}_j^n) + \int_t^{t+\Delta t} (\mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j+1/2} - 0, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j-1/2} + 0, t))) dt = 0 \quad (4.5.7)$$

a použitím vztahu (4.5.4) máme Godunovo schéma v konzervativním tvaru

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \lambda [\mathbf{f}(\mathbf{u}(0; \mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_{j+1}^n)) - \mathbf{f}(0; \mathbf{v}_{j-1}^n, \mathbf{v}_j^n)]. \quad (4.5.8)$$

Příslušný numerický tok je

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(0; \mathbf{v}, \mathbf{w})). \quad (4.5.9)$$



Obrázek 4.3: Schéma Godunovovy metody

4.6 Přibližné řešení Riemannova problému

Přesné řešení Riemannova problému je nevýhodné svou výpočetní náročností. Nicméně u Godunovovy metody dochází k průměrování řešení, takže můžeme přesné řešení nahradit přibližným. Bylo vyvinuto mnoho přibližných Riemannových řešičů - např. Osher, Roe, Harten-Lax-van Leer.

Definice 12. Necht $\mathbf{w}(x/t; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$ je přibližné řešení Riemannova problému, pak nazveme následující vztah schématem Godunovova typu

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^i \mathbf{w}(x/t; \mathbf{v}_{i-1}^n; \mathbf{v}_i^n) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_i^{x_{i+1/2}} \mathbf{w}(x/t; \mathbf{v}_i^n; \mathbf{v}_{i+1}^n) dx. \quad (4.6.1)$$

Věta 7 (Harten-Lax). Necht S jsou označeny signální rychlosti jednotlivých vln a $\mathbf{w}(x/t; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$ je přibližné řešení Riemannova problému, které splňuje následující podmínky:

1. konzistence s integrální formou zákona zachování

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathbf{w}(x/T; \mathbf{u}_l; \mathbf{u}_r) dx = \frac{\Delta x}{2} (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r) - T\mathbf{f}_r + T\mathbf{f}_l, \quad (4.6.2)$$

kde $\Delta x/2 > T \max|S|$ a $\mathbf{f}_l = \mathbf{f}(\mathbf{u}_l)$ a $\mathbf{f}_r = \mathbf{f}(\mathbf{u}_r)$.

2. konzistence s integrálním tvarem entropické podmínky

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} U(\mathbf{w}(x/T; \mathbf{u}_l; \mathbf{u}_r)) dx = \frac{\Delta x}{2} (U_l + U_r) - TF_r + TF_l, \quad (4.6.3)$$

kde $\Delta x/2 > T \max|S|$ a $F_r = F(\mathbf{u}_r)$ a $F_l = F(\mathbf{u}_l)$.

Potom schéma Godunovova typu (12) je v konzervativní podobě konzistentní s (3.1.5) a splňuje entropickou nerovnost (4.2.5).

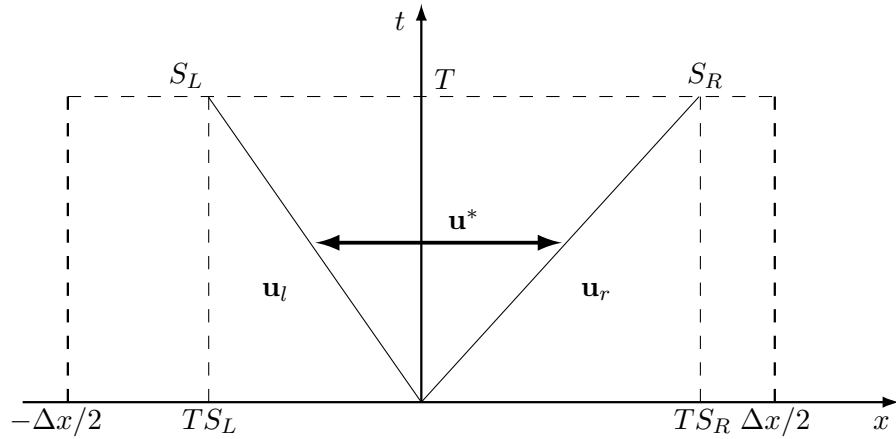
Důkaz. Viz [8]. \square

Schéma Godunovova typu můžeme přepsat do konzervativního tvaru (4.2.2)

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \lambda [\mathbf{f}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i)]. \quad (4.6.4)$$

4.7 HLL

HLL je jeden z mnoha přibližných řešičů Riemannova problému, navrhl ho Harten, Lax a van Leer [18] v roce 1983. Spočívá v tom, že u řešení Riemannova problému uvažujeme pouze dvě vlny určené rychlostmi S_L a S_R (obr. 4.4).



Obrázek 4.4: Struktura Riemannova problému pro HLL schéma

Přibližné řešení Riemannova problému je tedy rozděleno na tři oblasti a je definováno jako:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{u}_l & \text{pokud } S_L > x/t, \\ \mathbf{u}^* & \text{pokud } S_L \leq x/t \leq S_R, \\ \mathbf{u}_r & \text{pokud } S_R < x/t. \end{cases} \quad (4.7.1)$$

Nyní použitím integrální tvar 1D zákonů zachování (3.1.8) na oblast $(-\Delta x/2, 0) \times (0, T)$ získáme

$$\int_{-\Delta x/2}^0 \mathbf{w}(x/T; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) dx - \frac{\Delta x}{2} \mathbf{u}_l + T(\mathbf{f}^* - \mathbf{f}_l) = 0. \quad (4.7.2)$$

Z toho plyne vztah pro \mathbf{f}^*

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_l - \frac{1}{T} \int_{-\Delta x/2}^0 \mathbf{w}(x/T, \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) dx + \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_l. \quad (4.7.3)$$

Integrace na oblasti $(0, \Delta x/2) \times (0, T)$ dává

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_r + \frac{1}{T} \int_0^{\Delta x/2} \mathbf{w}(x/T, \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) dx - \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_r. \quad (4.7.4)$$

Použije se levá strana podmínky konzistence (4.6.2), za \mathbf{w} se dosadí aproximace \mathbf{u}_l , \mathbf{u}_r a \mathbf{u}^* a integrál rozdělíme

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathbf{w}(x/T; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) dx = \int_{-\Delta x/2}^{TS_L} \mathbf{u}_l dx + \int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{u}^* dx + \int_{TS_R}^{\Delta x/2} \mathbf{u}_r dx. \quad (4.7.5)$$

Integrace je jednoduchá, protože integrandy jsou konstanty. Výsledek se dosadí do rovnice (4.6.2)

$$\begin{aligned} (TS_L + \Delta x/2)\mathbf{u}_l + T(S_R - S_L)\mathbf{u}^* + (\Delta x/2 - TS_R)\mathbf{u}_r = \\ = \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r) - T(\mathbf{f}_r - \mathbf{f}_l), \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

a získáme

$$\mathbf{u}^* = \frac{S_R\mathbf{u}_r - S_L\mathbf{u}_l + (\mathbf{f}_r - \mathbf{f}_l)}{S_R - S_L}. \quad (4.7.7)$$

Numerický tok se určí následujícím způsobem. Mohou nastat tři možnosti:

1. $S_L > 0$
2. $S_L < 0 \wedge S_R > 0$
3. $S_R < 0$

Možnost 2. - vztah (4.7.7) se dosadí rovnice (4.7.1) a poté do (4.7.3) (je možno i do (4.7.4))

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_l - \frac{1}{T} \int_{-\Delta x/2}^{TS_L} \mathbf{u}_l dx - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 \frac{S_R\mathbf{u}_r - S_L\mathbf{u}_l - \mathbf{f}_r + \mathbf{f}_l}{S_R - S_L} dx + \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_l. \quad (4.7.8)$$

Po úpravách se získá vztah pro \mathbf{f}^*

$$\mathbf{f}^* = \frac{S_R\mathbf{f}_l - S_L\mathbf{f}_r + S_LS_R(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l)}{S_R - S_L}. \quad (4.7.9)$$

Možnost 1. - opět dosazením do rovnic (4.7.1) a (4.7.3) (lze dosadit i do vztahu (4.7.4), ale bylo by to zbytečně složité) je

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_l - \frac{1}{T} \int_{-\Delta x/2}^0 \mathbf{u}_l dx + \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \quad (4.7.10)$$

Možnost 3. - obdobným postupem

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_r + \frac{1}{T} \int_0^{\Delta x/2} \mathbf{u}_r dx - \frac{\Delta x}{2T} \mathbf{u}_r = \mathbf{f}_r. \quad (4.7.11)$$

Tok \mathbf{f}^{HLL} se tedy pomocí výše zmíněných vztahů určí takto:

$$\mathbf{f}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{f}_l & \text{pokud } S_L > 0, \\ \mathbf{f}^* & \text{pokud } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{f}_r & \text{pokud } S_R < 0. \end{cases} \quad (4.7.12)$$

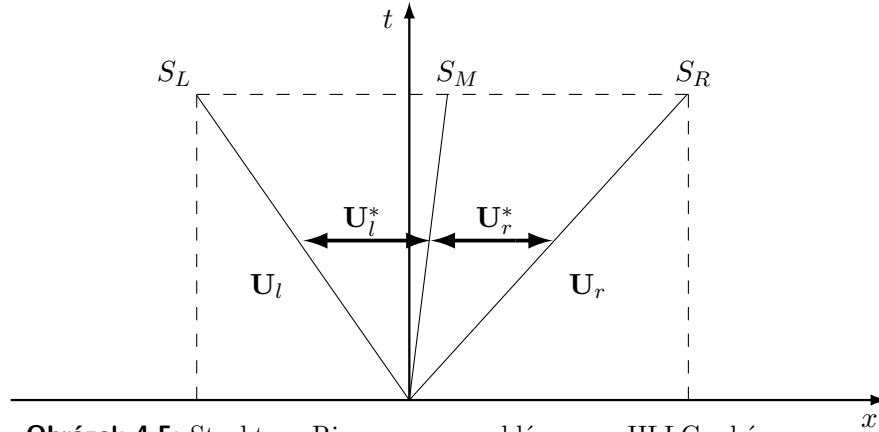
Jak je patrné, HLL schéma lze odvodit obecně pro jakýkoliv systém hyperbolických zákonů zachování. Pro Eulerovy rovnice stačí (v souladu se značením dle pozn. 3) ve výše zmíněných vztazích nahradit malá písmena \mathbf{f} , \mathbf{u} velkými \mathbf{F} , \mathbf{U} .

HLL řešič správně řeší izolované rázové vlny ([18]), splňuje nerovnost entropie ([4]), a zachovává pozitivitu ⁴ ([14]). Nevýhoda je, že není schopen přesně vyřešit izolované kontaktní vlny.

4.8 HLLC

Jak bylo napsáno, HLL schéma má nevýhodu, která plyne z toho, že zanedbává prostřední vlnu při řešení Riemannova problému. Způsob, jakým lze tuto nevýhodu odstranit, je vyvinout schéma, které tuto vlnu neignoruje. Jeden ze způsobů navrhl Toro ([16]) v HLLC řešiči (C jako Contact).

Odvození nelze provést úplně stejným způsobem, kterým bylo odvozeno HLL schéma. Měli bychom 4 neznámé, ale dokázali bychom pro ně sestavit pouze 3 rovnice. Proto v tomto případě nelze uvažovat obecný systém zákonů zachování, ale HLLC musíme sestavit přímo pro soustavu Eulerových rovnic v 1D. Proto v této části budeme užívat značení \mathbf{F} , \mathbf{U} .



Obrázek 4.5: Struktura Riemannova problému pro HLLC schéma

Dle obrázku 4.5 je zřejmé, že řešení Riemannova problému je zde rozděleno na čtyři oblasti, platí tedy:

$$\mathbf{U}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{U}_l & \text{pokud } S_L > x/t, \\ \mathbf{U}_l^* & \text{pokud } S_L \leq x/t < S_M, \\ \mathbf{U}_r^* & \text{pokud } S_M \leq x/t \leq S_R, \\ \mathbf{U}_r & \text{pokud } S_R < x/t. \end{cases} \quad (4.8.1)$$

⁴To znamená, že řešič může generovat stavy které jsou fyzikálně přípustné. Veškeré stavy tedy patří do množiny $G = \{[\rho \ \rho u \ e]^T, \ \rho > 0, \ e - 1/2\rho u^2 > 0\}$.

Numerický tok bude podobně jako u HLL

$$\mathbf{F}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{F}_l & \text{pokud } S_L > 0, \\ \mathbf{F}_l^* & \text{pokud } S_L \leq 0 < S_M, \\ \mathbf{F}_r^* & \text{pokud } S_M \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{F}_r & \text{pokud } S_R < 0. \end{cases} \quad (4.8.2)$$

kde \mathbf{F}^{HLLC} je tok pro $x = 0$, tedy na ose t .

Použitím integrálního tvaru zákonů zachování na oblast $(S_L T, 0) \times (0, T)$ se získá (to samé lze dostat aplikací Rankine-Hugoniotovy podmínky na rázovou vlnu o rychlosti S_R)

$$\mathbf{F}_l^* = \mathbf{F}_l + S_L(\mathbf{U}_l^* - \mathbf{U}_l). \quad (4.8.3)$$

Pro $S_M < 0$, stejným postupem dostaneme

$$\mathbf{F}_r^* = \mathbf{F}_r + S_R(\mathbf{U}_r^* - \mathbf{U}_r). \quad (4.8.4)$$

Rovnici (4.8.3) přepíšeme do tvaru

$$S_L \mathbf{U}_l^* - \mathbf{F}_l^* = S_L \mathbf{U}_l - \mathbf{F}_l. \quad (4.8.5)$$

Tato rovnice ve složkovém tvaru vypadá následovně:

$$S_L \begin{pmatrix} \rho_l^* \\ \rho_l^* u_l^* \\ e_l^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_l^* u_l^* \\ \rho_l^* u_l^{*2} + p_l^* \\ (e_l^* + p_l^*) u_l^* \end{pmatrix} = S_L \begin{pmatrix} \rho_l \\ \rho_l u_l \\ e_l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_l u_l \\ \rho_l u_l^2 + p_l \\ (e_l + p_l) u_l \end{pmatrix}. \quad (4.8.6)$$

Nyní je nutné přidat jistou podmínku, která umožní získat vztah pro \mathbf{U}_l^* . Toro et al. navrhli předpoklad [16]

$$S_M = u^*, \quad (4.8.7)$$

kde u^* je jistý odhad kontaktní rychlosti, v [16] jsou dále ukázány dva způsoby, kterými lze u^* vypočítat. Batten et al. předpokládali [3] (a já se toho budu držet), že u^* je rychlost mezi krajními akustickými vlnami (viz. obr. 4.4). Proto ji lze vypočítat ze vztahu (4.7.7), aplikovaném na Eulerovy rovnice.

$$u^* = S_M = \frac{\rho_r u_r (S_R - u_r) - \rho_l u_l (S_L - u_l) + p_l - p_r}{\rho_r (S_R - u_r) - \rho_l (S_L - u_l)}. \quad (4.8.8)$$

Z první rovnice soustavy (4.8.6) plyne

$$\rho_l^* = \rho_l \frac{S_L - u_l}{S_L - S_M}. \quad (4.8.9)$$

Z druhé rovnice soustavy (4.8.6) s využitím vztahu (4.8.9) máme

$$p_l^* = (S_L - u_l)(S_M - u_l)\rho_l. \quad (4.8.10)$$

Tímto postupem ještě určíme vztah pro p_r^* (tedy pokud bychom na začátku vyšli z rovnice (4.8.4))

$$p_r^* = p_r + (S_R - u_r)(S_M - u_l)\rho_r. \quad (4.8.11)$$

Vztahy (4.8.10) a (4.8.11) se dosadí do (4.8.8), a po jednoduchých úpravách lze dospět k závěru

$$p_l^* = p_r^* = p^*. \quad (4.8.12)$$

To je v souladu s přesným řešením Riemannova problému (viz sekce 4.3.2). S pomocí ρ_l^* a p^* je možno z druhé a třetí rovnice soustavy (4.8.6) vyjádřit

$$(\rho u_l)^* = \frac{(S_L - u_l)\rho_l u_l + p^* - p_l}{S_L - S_M}, \quad (4.8.13)$$

$$e_l^* = \frac{(S_L - u_l)e_l - p_l u_l + p^* S_M}{S_L - S_M}. \quad (4.8.14)$$

Nyní lze psát finální vzorec pro výpočet vektoru \mathbf{U}_l^* (a analogicky pro \mathbf{U}_r^*)

$$\mathbf{U}_l^* = \begin{bmatrix} \rho_l \frac{S_L - u_l}{S_L - S_M} \\ \frac{(S_L - u_l)\rho_l u_l + p^* - p_l}{S_L - S_M} \\ \frac{(S_L - u_l)e_l - p_l u_l + p^* S_M}{S_L - S_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_r^* = \begin{bmatrix} \rho_r \frac{S_R - u_r}{S_R - S_M} \\ \frac{(S_R - u_r)\rho_r u_r + p^* - p_r}{S_R - S_M} \\ \frac{(S_R - u_r)e_r - p_r u_r + p^* S_M}{S_R - S_M} \end{bmatrix}. \quad (4.8.15)$$

Toky \mathbf{F}_l^* a \mathbf{F}_r^* se určí ze vztahů (4.8.3) a (4.8.4).

HLLC schéma má několik důležitých vlastností:

- přesně řeší izolované kontaktní vlny
- přesně řeší izolované rázové vlny
- zachovává pozitivitu

Podrobněji k tomuto viz [16].

4.9 Výpočet signálních rychlostí

Pro použití HLL nebo HLLC řešiče je nutno znát signální rychlosti S_L a S_R . Harten, Lax, van Leer nechali tuto otázku otevřenou. Řešení Riemannova problému sestává ze stavů U_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$, kde m je počet rovnic systému (3.1.1), a $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_l$, $\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_r$. Tyto stavy jsou odděleny vlnami, jejichž charakteristické rychlosti jsou $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Pro HLL/HLLC řešiči jsou potřeba znát rychlosti $S_L = \lambda_1$ a $S_R = \lambda_m$.

Některými možnostmi pro výpočet rychlostí se zabýval Davis ([4]). Já budu používat metodu, která spočívá v určení rychlostí pomocí vlastních čísel Roeho matice⁵. Tato metoda byla navržena Davisem ([4]) a Einfeldtem ([5]), přičemž druhý jmenovaný předložil způsob jak rychlosti najít:

$$\begin{aligned} S_L &= \min[\lambda_1(\mathbf{U}_l), \lambda_1(\mathbf{U}^{Roe})], \\ S_R &= \max[\lambda_m(\mathbf{U}^{Roe}), \lambda_m(\mathbf{U}_r)]. \end{aligned} \quad (4.9.1)$$

⁵Matice \mathbf{A} , která je součástí lineární soustavy $\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{A} \partial \mathbf{u} / \partial x = \mathbf{0}$. Ta vznikne lineární zací nelineární soustavy (4.2.1). Na tom je založena Roeho metoda výpočtu Riemannova problému ([12], [13]).

Tento vztah se dá zapsat jako

$$\begin{aligned} S_L &= \min(u_l - c_l, \tilde{u} - \tilde{c}), \\ S_R &= \max(\tilde{u} + \tilde{c}, u_r + c_r), \end{aligned} \quad (4.9.2)$$

kde c_l , c_r jsou rychlosti zvuku. Veličiny \tilde{u} a \tilde{c} se vypočítají z následujících vztahů ([3])

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u_l + u_r R_\rho}{1 + R_\rho}, \\ \tilde{c}^2 &= (\kappa - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right), \\ \tilde{H} &= \frac{H_l + H_r R_\rho}{1 + R_\rho}, \\ R_\rho &= \sqrt{\rho_l / \rho_r}, \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

kde $H = \frac{e+p}{\rho}$ je entalpie.

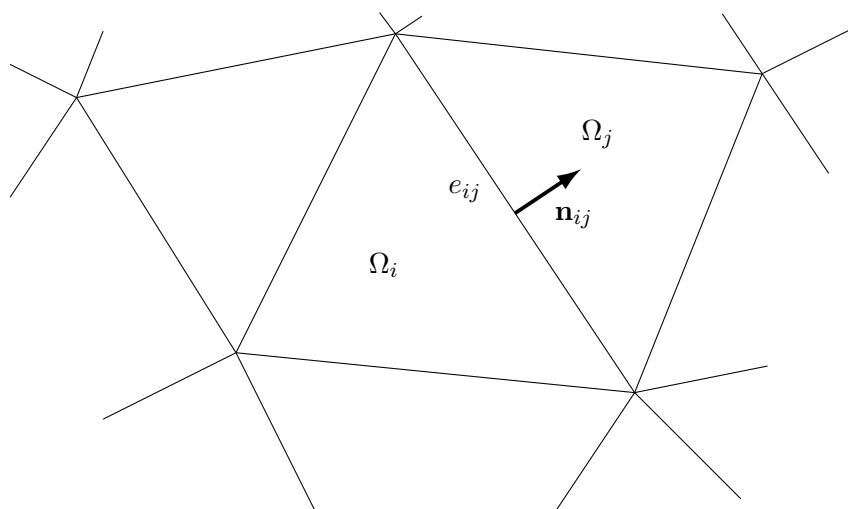
4.10 Metoda konečných objemů

Prozatím v Kapitole 4 byly uvažován 1D problém. Nyní se budu zabývat rovinným problémem. Mějme tedy hyperbolický systém zákonů zachování (3.1.1) ve 2D.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = \mathbf{0}. \quad (4.10.1)$$

Princip MKO spočívá v rozdělení výpočetní oblasti na jednotlivé buňky (objemy), ve kterých se počítají zákony zachování. V každé buňce se aproximuje řešení $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ jeho střední hodnotou, konstantní po celé buňce

$$\mathbf{u}_i \approx \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, dS. \quad (4.10.2)$$



Obrázek 4.6: Síť pro metodu konečných objemů (nestrukturovaná)

Síť (tedy soustava jednotlivých buněk, které tvoří výpočetní oblast) pro MKO může být:

- strukturovaná - pravidelná síť tvořená čtyřúhelníky
- nestrukturovaná - tvořena libovolnými elementy (trojúhelníky atd.)

Existují dvě základní metody implementace MKO

- Cell center - hodnoty jsou uloženy v těžištích buněk
- Cell vertex - hodnoty jsou uloženy ve vrcholech buněk

MKO (cell center) ve 2D se odvodí následujícím postupem. Mějme výpočetní oblast $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^2$, kterou rozdělíme na buňky Ω_i , přičemž hranice každé z nich je $\partial\Omega_i$. Hranice mezi buňkami Ω_i a Ω_j je e_{ij} , platí tedy $e_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$. Zároveň je zřejmé, že $\cup_j e_{ij} = \partial\Omega_i$. Vnější normála rozhraní e_{ij} mezi buňkou Ω_i a buňkou Ω_j je \mathbf{n}_{ij} (Obr. 4.6).

Rovnice (4.10.1) se dá zapsat jako

$$\mathbf{u}_t + \operatorname{div} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) = (\mathbf{f}(\mathbf{u}), \mathbf{g}(\mathbf{u})). \quad (4.10.3)$$

Tuto rovnici integrujeme na ploše Ω_i

$$\int_{\Omega_i} (\mathbf{u}_t + \operatorname{div} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u})) \, d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (4.10.4)$$

Integrál se rozdělí na dva členy, a u prvního se zamění pořadí derivace a integrování (objem Ω_i je nezávislý na čase). U druhého členu se užije Greenova věta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \right) + \oint_{\partial\Omega_i} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_i \, ds = \mathbf{0}. \quad (4.10.5)$$

Na první člen se aplikuje věta o střední hodnotě (4.10.2), tedy

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \right) \approx |\Omega_i| \frac{d\mathbf{u}_i(t)}{dt}. \quad (4.10.6)$$

Druhý integrál se napíše jako součet integrálů přes jednotlivé stěny buňky

$$\oint_{\partial\Omega_i} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_i \, ds = \sum_j \int_{e_{ij}} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_i \, ds. \quad (4.10.7)$$

Tok $\hat{\mathbf{f}}$ se aproximuje tak, že zavede numerický tok Φ

$$\int_{e_{ij}} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_i \, ds \approx |e_{ij}| \Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{n}_{ij}). \quad (4.10.8)$$

Tímto postupem se obdrží semidiskrétní schéma pro metodu konečných objemů

$$|\Omega_i| \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = - \sum_j |e_{ij}| \Phi(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_j^n, \mathbf{n}_{ij}). \quad (4.10.9)$$

Vlastnosti numerického toku:

- Konzervativita

$$\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{n}) = -\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, -\mathbf{n}). \quad (4.10.10)$$

- Konzistence

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.10.11)$$

- Rotační invariance (u Eulerových rovnic)

$$\Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{n}) = \mathbf{R} \Phi(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_i, \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_j, \mathbf{R}^{-1} \mathbf{n}), \quad (4.10.12)$$

kde \mathbf{R} je transformační matice o úhel θ

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.10.13)$$

Více k těmto vlastnostem viz [12].

Numerický tok je určen exaktním nebo přibližným řešičem Riemannova problému, ve smyslu normály \mathbf{n}_{ij} k rozhraní e_{ij} . Zavádí se nové souřadnice ζ (normálová na rozhraní) a τ (tečná k rozhraní)

$$\mathbf{X} = (x, y)^T \quad \tilde{\mathbf{X}} = (\zeta, \tau)^T. \quad (4.10.14)$$

Zavede se matice rotace v rovině xy o úhel θ

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.10.15)$$

Pro normálový a tečný vektor k rozhraní platí

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)^T \quad \mathbf{n}^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)^T. \quad (4.10.16)$$

Přechod mezi souřadnicovými soustavami udávají vztahy

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad \mathbf{X} = \mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}. \quad (4.10.17)$$

Souřadnice v otočené soustavě lze také spočítat následovně

$$\tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}^\perp)^T. \quad (4.10.18)$$

Systém (4.10.1) se rotací transformuje na

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial \tau}(\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}^\perp)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (4.10.19)$$

Vzhledem k tomu, že na obou stranách rozhraní jsou konstantní stavy \mathbf{u} , stačí řešit jednodimenzionální Riemannův problém ve směru normály \mathbf{n}

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(\zeta, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_i, & \zeta < 0, \\ \mathbf{u}_j, & \zeta > 0. \end{cases} \quad (4.10.20)$$

Je zřejmé, že pro výpočet numerického toku lze použít HLL schéma, pouze Riemannův problém není ve směru x , ale ζ . Při použití HLLC řešiče se musí použít jeho rozšířená verze, která řeší Riemannův problém systému 4.10.20. Odkazují na [3].

4.11 Časová diskretizace

V předchozím kroku byl systém diskretizován v prostoru a výsledkem bylo semidiskrétní schéma. Ještě je potřeba diskretizace v čase. Je možno použít některou z mnoha explicitních nebo implicitních metod. My použijeme Eulerovu explicitní diferenci, která je velice jednoduchá.

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} \approx \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} \quad (4.11.1)$$

Tento vztah se dosadí do (4.10.9) a získá se explicitní MKO

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_j \Phi_{ij} e_{ij}. \quad (4.11.2)$$

4.12 Okrajové podmínky

Konkrétní úlohy se řeší na prostorově omezené oblasti, proto je nutné doplnit výchozí rovnice o vhodné okrajové podmínky. Jejich problematika je velice obsáhlá, zde bude pouze nastíněna. Pro úvod do problematiky a odkazují na

[12], z čehož bylo čerpáno. Tato problematika je obtížná zejména tím, že je náročné najít takové okrajové podmínky, které vedou na tzv. *dobře podmíněný problém/podmíněnou úlohou (well-posed problem)*.⁶

Ze zkoumání linearizovaných rovnic vyplývá nutná podmínka pro to, aby byl problém dobře podmíněný. Mějme lineární soustavu

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \end{cases} \quad (4.12.1)$$

kde \mathbf{A} je konstantní matice. Z analýzy této linearizované soustavy vyplývá, že počet okrajových podmínek, které je nutné zadat, odpovídá počtu charakteristik, které danou částí hranice vstupují do výpočetní oblasti (viz [12]).

4.12.1 Okrajové podmínky v dynamice plynů

Okrajové podmínky pro soustavu Eulerových rovnic se dělí na dva základní typy:

- Skutečné okrajové podmínky (*actual boundary conditions*) - může to být OP pro pevnou stěnu, OP pro tekutinu a OP na volném povrchu (tedy hladině) tekutiny
- Umělé okrajové podmínky (*artificial boundary conditions*) - ve vnější aerodynamice, např proudění vzduchu okolo křídla; oblast nemůže být nekonečná a tak se musí zavést vhodné OP

Okrajová podmínka pro tekutinu

Vychází se z linearizovaných Eulerových rovnic. Na okrajích, kde tekutina vstupuje a vystupuje do výpočetní oblasti (v 1D), existují čtyři možnosti, podle nichž se určí počet okrajových podmínek, tedy počet předepsaných fyzikálních veličin.

1. supersonický vstup - musí být předepsán celý stav (ρ, u, p)
2. subsonický vstup - předepisují se dvě veličiny, dvojice (ρ, u) nebo (ρ, p)
3. supersonický vstup - předepisuje se jedna veličina, např. tlak
4. supersonický výstup - žádné veličiny se nezadávají

Okrajová podmínka pro pevnou stěnu

Zde se předepisuje jednoduše

$$(u, v) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.12.2)$$

což znamená, že tekutina neprochází pevnou stěnou, ale směr rychlosti je s ní rovnoběžný.

⁶Pojem zavedený Jacquesem Hadamardem. Znamená to, že matematický model fyzikálního jevu musí splňovat následující vlastnosti: 1) řešení musí existovat 2) řešení musí být jednoznačné 3) řešení se musí měnit spojitě s okrajovými podmínkami. Pokud je některá podmínka porušena, problém je tzv. *špatně podmíněný (ill-posed)*.

4.12.2 Numerická implementace okrajových podmínek

Okraj výpočetní oblasti \mathcal{O} je složen z okrajů hraničních buněk, a pomocí okrajové podmínky se spočítá numerický tok přes ten okraj buňky, který tvoří okraj oblasti. Krom toho, že se musí předepsat určitý počet veličin, je nutné dopočítat i hodnoty nepředepsaných veličin.

OP pro pevnou stěnu

Použije se podmínka (4.12.2), takže exaktní tok přes stěnu je

$$\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n} = (0, p_b \mathbf{n}, 0)^T, \quad (4.12.3)$$

příčemž tlak p_b musí být určen. V případě cell-center schématu se postupuje následovně. \mathbf{U}_i je stav v okrajové buňce, proti této buňce (za hranicí \mathcal{O}) se zavede nová fiktivní buňka (tzv. *ghost cell*), která má stav $\tilde{\mathbf{U}}_i$ se stejnými hodnotami hustoty, tlaku a tečné rychlosti $\tilde{\rho}_i = \rho_i$, $\tilde{p}_i = p_i$, $\tilde{u}_{\tau i} = u_{\tau i}$, ale s opačnou hodnotou normálové rychlosti $\tilde{u}_{ni} = -u_{ni}$. Přesným nebo přibližným řešičem se určí numerický tok

$$\Phi(\mathbf{U}_i, \tilde{\mathbf{U}}_i) = (0, p^* \mathbf{n}, 0)^T, \quad (4.12.4)$$

kde p^* je tlak "na stěně", resp. tlak prostředního, "hvězdičkováného" stavu mezi krajními vlnami, viz část 4.3.2.

OP pro tekutinu

Opět se zavede fiktivní buňka, ve které je stav \mathbf{U}_∞ , příčemž počet předepsaných veličin se určí podle postupu popsaného výše. Numerický tok $\Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_\infty)$ se opět vypočítá přesným nebo přibližným Riemannovým řešičem.

4.12.3 Konkrétní implementace okrajových podmínek v mých programech

Izoentropické okrajové podmínky

V samotném řešení proudění v kanále jsem použil izoentropickou okrajovou podmínku v místě, kde tekutina vstupuje do oblasti. V souladu s tím, že přítok tekutiny je subsonický, se předepisují dvě veličiny - klidové hodnoty tlaku a hustoty p_0 , ρ_0 . Je nutné vypočítat stav ve fiktivní buňce $\mathbf{U}_\infty = \mathbf{U}_{-1}$. Ze stavu \mathbf{U}_i (v tomto případě bude $i = 0 \rightarrow \mathbf{U}_i = \mathbf{U}_0$) se extrapoluje tlak $p_{-1}^n = p_0^n$. Z izoentropického vztahu se vypočítá hustota ρ_{-1}^n

$$\left(\frac{\rho_{-1}^n}{\rho_0}\right)^\kappa = \frac{p_{-1}^n}{p_0} \rightarrow \rho_{-1}^n = \left(\frac{p_{-1}^n}{p_0}\right)^{1/\kappa} \rho_0. \quad (4.12.5)$$

Použije se vztah odvozený pro izoentropické proudění (viz [1])

$$\frac{p_{-1}^n}{p_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} (M_{-1}^n)^2\right)^{\frac{-\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (4.12.6)$$

Z tohoto vztahu se vyjádří Machovo číslo

$$M_{-1}^n = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left(\frac{p_0}{p_{-1}^n} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} - 1. \quad (4.12.7)$$

Vypočte se rychlost zvuku

$$c_{-1}^n = \sqrt{\kappa \frac{p_{-1}^n}{\rho_{-1}^n}}, \quad (4.12.8)$$

pomocí níž se získá velikost rychlosti

$$\|u_{-1}^n\| = M_{-1}^n c_{-1}^n. \quad (4.12.9)$$

Nakonec se vypočítá hustota energie

$$e_{-1}^n = \frac{p_{-1}^n}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \rho_{-1} (u_{-1}^n)^2. \quad (4.12.10)$$

Tím je specifikovaný stav \mathbf{U}_{-1} , a lze řešit Riemannův problém mezi stavy tímto a vnitřním stavem \mathbf{U}_0 .

■ Okrajová podmínka na výstupu

OP na výstupu v mém programu je implementovaná následovně. Předepsaná je jedna veličina (subsonický výstup), a to tlak $p[N + 1]$. Tento tlak je zadán jako k -násobek klidového tlaku ($k < 1$)

$$p_{N+1}^n = k p_0. \quad (4.12.11)$$

Ostatní veličiny se extrapolují ze stavu \mathbf{U}_N , a opět se řeší Riemannův problém mezi tímto a vnějším stavem \mathbf{U}_{N+1} .

■ Neumannova okrajová podmínka

Tento typ OP bude využit v jednom případě popsaném v kapitole 5.4. Spočívá v tom, že na okrajích se zadá nulová derivace ve směru x

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0. \quad (4.12.12)$$

Tato derivace se aproximuje diferenčními schémata

$$\frac{\mathbf{u}_{-1}^n - \mathbf{u}_0^n}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\mathbf{u}_{N+1}^n - \mathbf{u}_N^n}{\Delta x} = 0, \quad (4.12.13)$$

ze kterých po úpravě dostaneme

$$\mathbf{u}_{-1}^n = \mathbf{u}_0^n, \quad \mathbf{u}_{N+1}^n = \mathbf{u}_N^n. \quad (4.12.14)$$

4.13 Časový krok

Jedna ze základních vlastností, které se po numerickém schématu požadují, je stabilita. Stabilita se dá zjednodušeně chápat tak, že schéma je stabilní, pokud chyby, které se vytvářejí v každém časovém kroku nerostou příliš rychle. Nutná podmínka stability numerické metody je tzv. *CFL podmínka* ([9]):

Numerická metoda může být stabilní, právě tehdy, když numerická oblast závislosti obsahuje doménu závislosti diferenciální rovnice, alespoň v limitě pro Δt a Δx jdoucí k nule.

Numerická oblast závislosti (*numerical domain of dependence*) je množina všech bodů, kde počáteční data mohou ovlivnit (záleží na metodě) numerické řešení v bodě X, T . Oblast závislosti $\mathcal{D}(X, T)$ (*domain of dependence*) bodu (X, T) , je definována jako

$$\mathcal{D}(X, T) = \{x \in \mathbb{R} : X - S_{max}T \leq x \leq X - S_{min}T\}. \quad (4.13.1)$$

Výše zmíněná věta se dá vysvětlit na příkladu, kdy máme numerické schéma

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n, \mathbf{u}_i^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i-1}^n)]. \quad (4.13.2)$$

Poměr prostorového a časového kroku se musí volit tak malý, aby řešení \mathbf{u}_i^n bylo ovlivněno pouze počátečními hodnotami $\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n$.

V případě schématu Godunovova typu je podmínka stability

$$S_{max_i} \frac{\Delta t_i}{\Delta x_i} \leq 1, \quad (4.13.3)$$

pro všechna $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq N$ (tzn. pro všechny buňky). Pro velikost časového kroku vyplývá

$$\Delta t_i \leq \frac{\Delta x_i}{S_{max_i}}. \quad (4.13.4)$$

Časový krok musí být všude stejný, proto musí platit

$$\Delta t \leq \min_i \left(\frac{\Delta x_i}{S_{max_i}} \right). \quad (4.13.5)$$

Tato podmínka je nutná, nikoliv postačující, a proto se doplní konstanta $CFL \in (0, 1)$

$$\Delta t \leq CFL \min_i \left(\frac{\Delta x_i}{S_{max_i}} \right) \quad (4.13.6)$$

V mém programu jsem užil jednodušší vztah

$$\Delta t \leq CFL \min_i \left(\frac{\Delta x_i}{|u|_i + c_i} \right), \quad (4.13.7)$$

a ve dvoudimenzionálním případě

$$\Delta t \leq CFL \min_i \left(\frac{1}{\frac{|u|_i + c_i}{\Delta x_i} + \frac{|v|_i + c_i}{\Delta y_i}} \right). \quad (4.13.8)$$

4.14 Reziduum

V této práci jsou počítány stacionární případy, které se ale řeší rovnicemi závislými na čase. K tomu, aby se dalo určit, zda se během výpočtu dosáhlo stacionárního stavu, ve kterém se fyzikální veličiny již nemění (resp. mění se naprosto minimálně), se definuje tzv. *reziduum* hustoty pro každou časovou vrstvu

$$rez = \log \left(\sqrt{\sum_{i=0}^N \left(\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \right)^2} \right) \quad (4.14.1)$$

kde N je počet buněk. Výpočet ukončíme tehdy, pokud se reziduum nemění, nebo pokud je dostatečně nízké (já jsem používal $rez = -5$).

Kapitola 5

Numerické výsledky

Před tím, než jsem napsal bakalářskou práci, jsem připravil několik programů, které řeší různé problémy proudění v kanálech/dýzách. V této kapitole budou ukázány výsledky výpočtů čtyř z nich.

5.1 1D+ schéma

Hlavním cílem této práce je výpočet proudění v kanále s náhlým rozšířením. Tento případ nelze správně postihnout použitím kvazi-1D schématu, které je odvozeno pro proudění v kanále, jehož průřez se mění spojitě a "nenáhle" (tedy dostatečně pomalu). Druhá možnost je použít plnohodnotné 2D schéma, zde ovšem nastává problém s vyšší výpočetní náročností. Metoda, která si zachovává jednoduchost kvazi-1D schématu a je schopna řešit proudění v kanále s náhlým rozšířením, byla navržena autory Audebert, Hérard, Martin a Touazi v článku [17]. Tento způsob bude dále v textu označován 1D+.

Při odvození 1D+ schématu pro Eulerovy rovnice se vyjde z odvozování MKO, popsané v 4.10. Oblast, na které se integruje je Ω_i na obr. 5.1.9. Okraj buňky se rozdělí na jednotlivé segmenty. e_{i1}, \dots, e_{i6} , $\cup_j e_{ij} = \partial\Omega_i$. Je potřeba tvar rovnice MKO, kde ještě nejsou použity numerické toky. Časová derivace je již diskretizována.

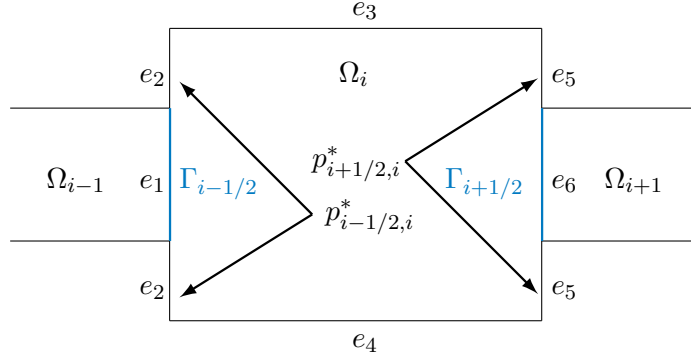
$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_j \int_{e_{ij}} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_i \, ds \quad (5.1.1)$$

Rozepsáno do složek

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_j \int_{e_{ij}} (\rho u, \rho v) \cdot \mathbf{n}_i \, ds, \\ (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_j \int_{e_{ij}} (\rho u^2 + p, \rho uv) \cdot \mathbf{n}_i \, ds, \\ (\rho v)_i^{n+1} = (\rho v)_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_j \int_{e_{ij}} (\rho uv, \rho v^2 + p) \cdot \mathbf{n}_i \, ds, \\ e_i^{n+1} = e_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \int_{e_{ij}} ((e + p)u, (e + p)v) \cdot \mathbf{n}_i \, ds. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Předpokládá se, že rychlost v je v počáteční podmínce nulová. Po aplikaci okrajových podmínek se rovnice zjednoduší na

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \left[- \int_{e_1} \rho u \, ds + \int_{e_6} \rho u \, ds \right], \quad (5.1.3)$$



Obrázek 5.1: Odvození 1D+ schématu

$$(\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \left[- \int_{e_1} (\rho u^2 + p) ds - \int_{e_2} p ds + \int_{e_5} p ds + \int_{e_6} (\rho u^2 + p) ds \right], \quad (5.1.4)$$

$$e_i^{n+1} = e_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \left[- \int_{e_1} (e + p)u ds + \int_{e_6} (e + p)u ds \right]. \quad (5.1.5)$$

Dále se nahradí fyzikální toky numerickými $(\psi)^h$. Na stěny e_2 a e_5 působí zatím neznámé tlaky $p_{i+1/2,i}^*$ a $p_{i-1/2,i}^*$. Výsledné schéma je

$$(\rho)_i^{n+1} = (\rho)_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \left[(\rho u)_{i+1/2}^h \Gamma_{i+1/2} - (\rho u)_{i-1/2}^h \Gamma_{i-1/2} \right], \quad (5.1.6)$$

$$(\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \left[(\rho u^2 + p)_{i+1/2}^h \Gamma_{i+1/2} - (\rho u^2 + p)_{i-1/2}^h \Gamma_{i-1/2} \right] - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \left[p_{i+1/2,i}^* (A_i - \Gamma_{i+1/2}) - p_{i-1/2,i}^* (A_i - \Gamma_{i-1/2}) \right], \quad (5.1.7)$$

$$(e)_i^{n+1} = (e)_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \left[((e + p)u)_{i+1/2}^h \Gamma_{i+1/2} - ((e + p)v)_{i-1/2}^h \Gamma_{i-1/2} \right], \quad (5.1.8)$$

kde $\Gamma_{i+1/2} = \min(A_i, A_{i+1})$, $\Gamma_{i-1/2} = \min(A_i, A_{i-1})$. Tyto rovnice lze zapsat vektorově

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Omega_i} (\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} \cdot \Gamma_{i+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} \cdot \Gamma_{i-1/2}) + \mathbf{Q}, \quad (5.1.9a)$$

se zdrojovým členem

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \left[p_{i+1/2}^* (A_i - \Gamma_{i+1/2}) - p_{i-1/2}^* (A_i - \Gamma_{i-1/2}) \right] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1.9b)$$

$\mathbf{F}_{i+1/2}$, $\mathbf{F}_{i-1/2}$ jsou numerické toky, získané přesným nebo přibližným Riemannovým řešičem (v této práci tedy HLL/HLLC řešičem).

Je třeba určit neznámé tlaky $p_{i+1/2,i}^*$ a $p_{i-1/2,i}^*$. To je popsáno v [17], a zde také bylo navrženo zjednodušení, které jsem použil ve svých programech a ze kterého plyne

$$p_{i+1/2,i}^* = p_{i-1/2,i}^* = p_i^n. \quad (5.1.10)$$

V [17] bylo dále ukázáno, že to není na úkor přesnosti.

5.2 Popis programu

Programy jsem napsal v jazyce C++. Toky jsou počítány HLL nebo HLLC řešičem, a řeší se dle typu úlohy kvazi-1D rovnice (3.3.19), 1D+ rovnice (5.1.9), nebo rozšířené 1D+ rovnice (5.6.1) (viz dále). Prostorový krok je buď konstantní, nebo u některých programů se mění podle toho, jak moc se v daném místě mění průřez (prostorový krok je tedy navázán na derivaci průřezu). Rovnice jsou časově diskretizovány Eulerovou dopřednou diferencí, okrajové podmínky jsou popsány v kapitole 4.12.3 a poté konkrétně u každé úlohy zvlášť. Pro kontrolu dosažení ustáleného stavu se používá kontrola rezidua, viz kapitola 4.14. Výsledky se zapisují do datových souborů, a pro zobrazení průběhů veličin jsem použil program *gnuplot*. Ve všech případech se jedná o proudění vzduchu s hodnotami $\kappa = 1,4$ a $r = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Diagram algoritmu je zobrazen na obrázku 5.2a.

5.3 Numerické řešení proudění dýzou

První úloha je výpočet proudění v běžné dýze bez náhlého rozšíření. Jsou použity kvazi-1D rovnice a HLL schéma.

Geometrie

Geometrie je zadána funkcí průřezu, viz obr. 5.3

$$A(x) = \begin{cases} (1 + 1,5(1 - \frac{x}{5})^2) / 2,5 & 0 \leq x \leq 5, \\ (1 + 0,5(1 - \frac{x}{5})^2) / 2,5 & 5 < x \leq 10. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Klidové hodnoty tlaku a hustoty

$$p_0 = 100\,000 \text{ Pa}$$

$$\rho_0 = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$$

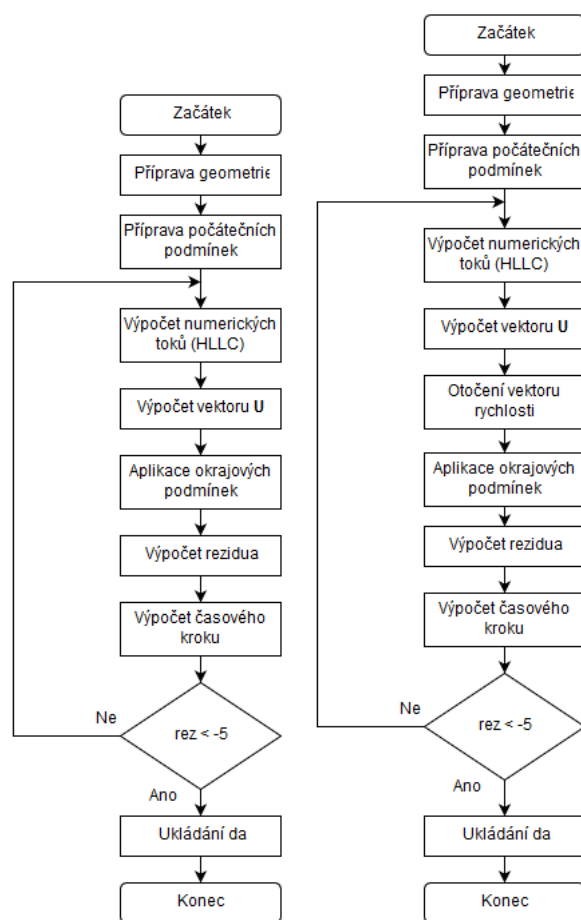
Počáteční podmínka

$$p_i^0 = p_0$$

$$\rho_i^0 = \rho_0$$

$$u_i^0 = 100 \text{ m s}^{-1}$$

$$e_i^0 = \frac{p_i^0}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \rho_i^0 (u_i^0)^2$$



(a) : Bez otáčení vektoru rychlosti

(b) : S otáčením vektoru rychlosti

Obrázek 5.2: Vývojové diagramy

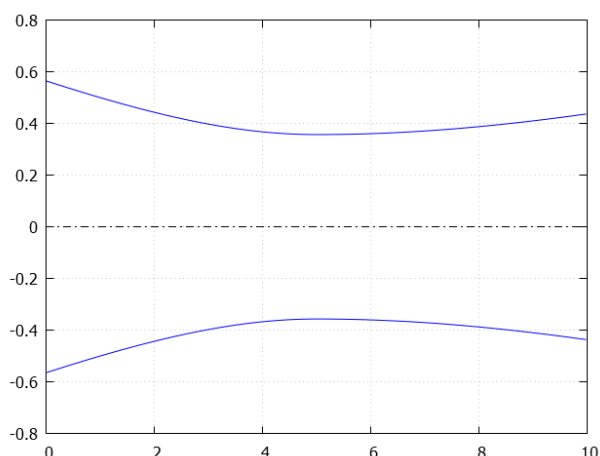
Okrajové podmínky

Viz 4.12.3 (první dva případy).

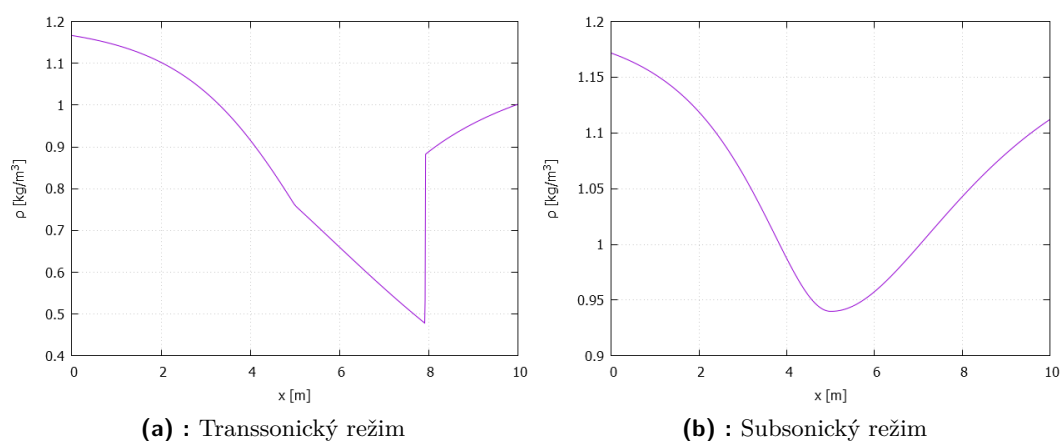
Režimy proudění

a) transsonický - koeficient tlaku je $k = 0,8$. V kanálu jsou oblasti, kde je rychlost větší než rychlost zvuku ($M > 1$). Průběh hustoty je na obr. 5.4a, Machova čísla na obr. 5.5a. Ve zužující části dýzy roste Machovo číslo a klesá hustota, přičemž rychlosti zvuku je dosaženo v nejužším místě ($M = 1$). V rozšiřující části se objevuje rázová vlna, kdy dojde k přechodu zpět do podzvukového proudění, hustota roste a Machovo číslo klesá.

b) subsonický - koeficient tlaku je $k = 0,9$. V celém proudovém poli je rychlost menší než rychlost zvuku ($M < 1$). Průběh hustoty je na obr. 5.4b, Machova čísla na obr. 5.5b. V tomto režimu hustota (Machovo číslo) klesá (roste) ve zužující se části a roste (klesá) v rozšiřující se části.



Obrázek 5.3: Geometrie dýzy



(a) : Transsonický režim

(b) : Subsonický režim

Obrázek 5.4: Dýza - průběh hustoty

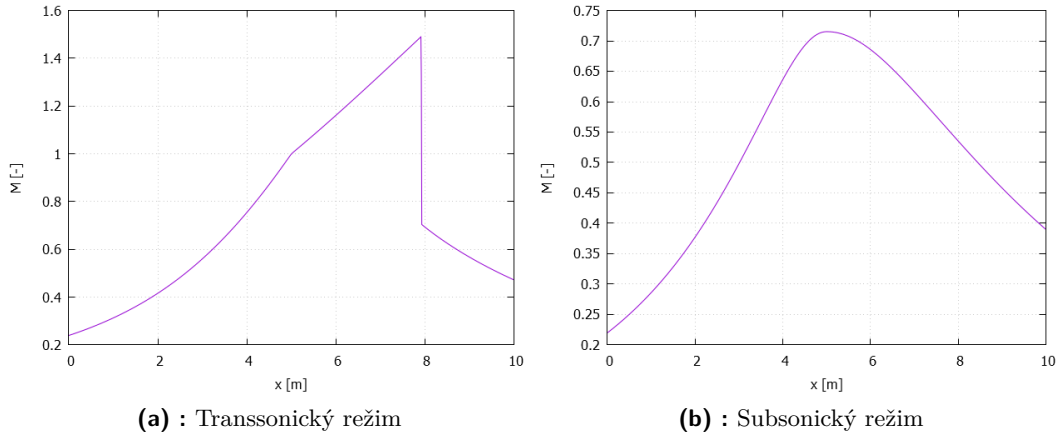
5.4 Testovací případ

Tato úloha slouží k otestování 1D+ schématu na případě Riemannova problému v kanálu, jehož geometrie je nespojitá. Tento případ je řešen v článku [17] a je porovnáván s kvazi-1D a 2D metodou. Tento případ jsem řešil, abych porovnal můj výsledek s výsledkem z článku a tím si zajistil, že v můj program funguje správně. Toky jsou počítány HLLC schématem.

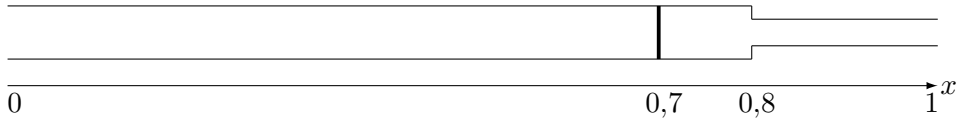
Výpočetní geometrie je osově souměrný kanál, jehož průřez se v jednom místě nespojitě mění, jinak je konstantní. Průřez je tedy definován jako

$$A(x) = \begin{cases} 0,5 & x \leq 0,8, \\ 0,025 & x > 0,8. \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Poměr průřezů je $A_l/A_r = 2$. V článku [17] je řešen i náročnější případ, kdy je poměr $A_l/A_r = 100$.



Obrázek 5.5: Dýza - průběh Machova čísla



Obrázek 5.6: Testovací případ - Riemannův problém v kanále s nespojitým průřezem

Počáteční podmínka

Riemannův problém

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & x < 0,7, \\ \mathbf{u}_r, & x \geq 0,7, \end{cases} \quad (5.4.2)$$

kde

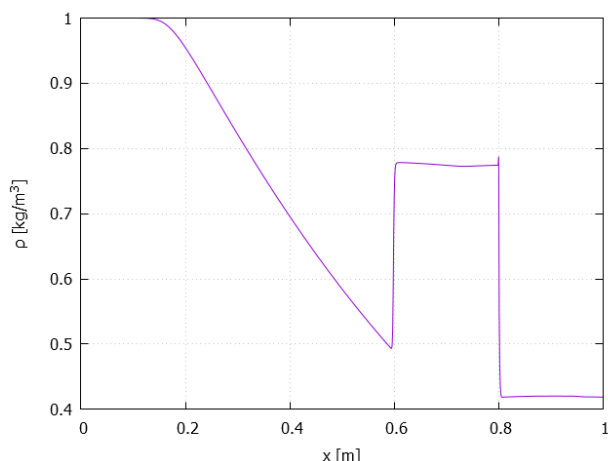
$$\begin{aligned} \rho_l &= 1, & \rho_r &= 0,125, \\ u_l &= 0, & u_r &= 0, \\ p_l &= 100000, & p_r &= 10000. \end{aligned}$$

Hustota energie se potom získá ze vztahu $e = \frac{p}{\kappa+1} + \frac{1}{2}u^2$.

Okrajové podmínky

Popsané v 4.12.3, poslední případ.

Výsledný průběh hustoty je na obrázku 5.7. Protože jsem získal stejný průběh jako autoři 1D+ přístupu, je ověřeno, že je schéma implementováno správně a můžu jej použít na jiné problémy.



Obrázek 5.7: Testovací případ - Riemannův problém v kanálu s nespojitým průřezem - průběh hustoty

5.5 Numerické řešení proudění kanálem s náhlým rozšířením

Zde se zabývám výpočty na modelu odtokové části mezilopatkového kanálu rotorové lopatky SE1050⁷, která je na obrázku 5.8. Je použit 1D+ přístup a HLLC schéma.

Geometrie

Je zadána funkcí průřezu:

$$A = \begin{cases} 0,5 \cdot (s - t - 10tx) & 0 \geq x \geq -0,1 \\ s/2 - \sqrt{t^2/4 - x^2} & t \geq x > 0 \end{cases} \quad (5.5.1)$$

kde $s = 0,055\,115\,8$; $t = 0,000\,751\,94$

Klidové hodnoty tlaku a hustoty

$p_0 = 100\,000$ Pa

$\rho_0 = 1,2$ kg m⁻³

Počáteční podmínka

Stejná jako v části 5.3

Okrajové podmínky

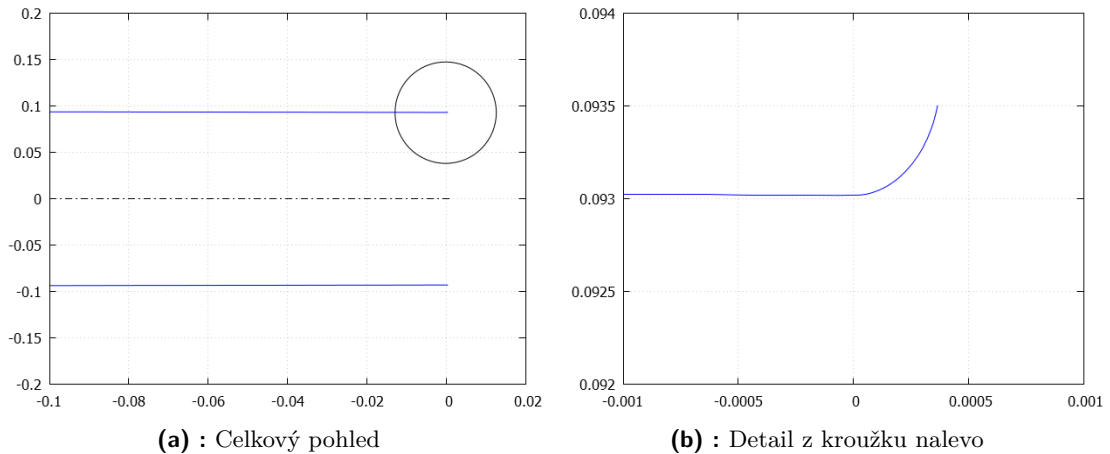
Viz 4.12.3 (první dva případy).

Režimy proudění

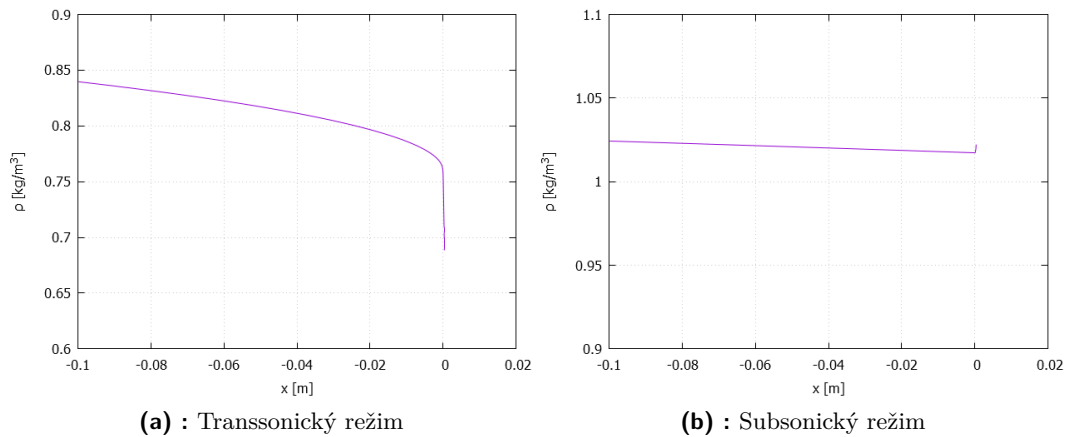
a) transsonický - $k = 0,4$, průběh hustoty je na obr. 5.9a, Machova čísla na obr. 5.10a. V zužující se části (tedy pro $x \in \langle -0,1; 0 \rangle$) dochází k mírnému poklesu hustoty a růstu Machova čísla, zatímco v náhle se rozšiřující části hustota prudce poklesne, zatímco Machovo číslo nadále roste.

b) subsonický - $k = 0,8$, průběh hustoty je na obr. 5.9b, Machova čísla na obr. 5.10b. V zužující se části hustota mírně klesá, v rozšiřující naopak mírně vzroste, Machovo číslo nejprve mírně stoupá, a na konci opět mírně klesne.

⁷Turbínová mříž Škoda.



Obrázek 5.8: Geometrie kanálu s náhlým rozšířením (SE1050)

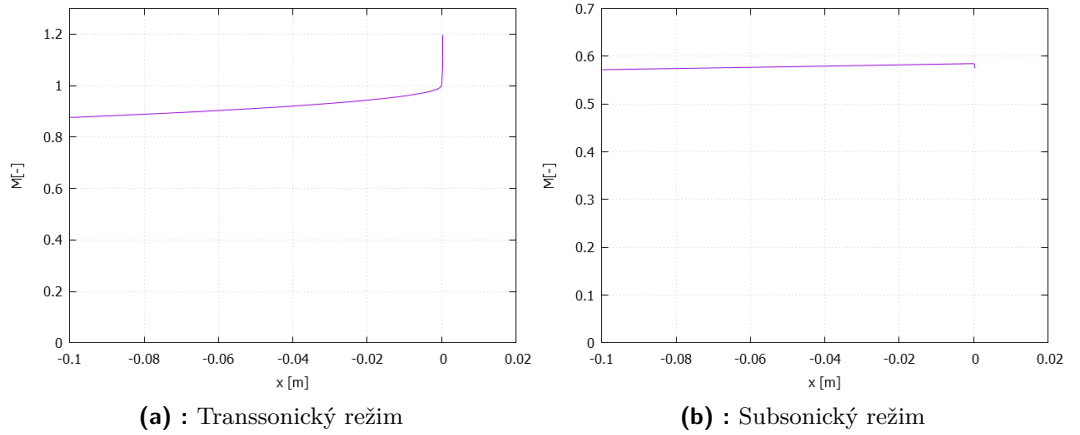


Obrázek 5.9: SE1050 - průběh hustoty

5.6 Řešení proudění v kanálu se sklonem pomocí 1D+ schématu

Zde se jedná o obtížnější případ, který je blíže reálnému problému, neboť lopatky v turbínových strojích jsou též skloněny pod určitým úhlem vůči vektoru rychlosti vstupujícího vzduchu. Je nutné použít 2D Eulerovy rovnice 3.2.1, protože rychlost bude mít dvě složky - horizontální u a vertikální v . Na výchozí rovnice se aplikuje rozšířené 1D+ schéma, které má oproti normálnímu 1D+ schématu (5.1.9) o jednu rovnici navíc a vypadá následovně

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Omega_i} (\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} \cdot \Gamma_{i+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} \cdot \Gamma_{i-1/2}) + \mathbf{Q}, \quad (5.6.1a)$$



Obrázek 5.10: SE1050 - průběh Machova čísla

kde zdrojový člen je

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \left[p_{i+1/2}^* (A_i - \Gamma_{i+1/2}) - p_{i-1/2}^* (A_i - \Gamma_{i-1/2}) \right] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6.1b)$$

Použit samotný uvedený způsob je však nesprávné, neboť není uvažována nesymetričnost skloněného kanálu. Při zkoušení uvedeného způsobu jsem zjistil, že rychlost ve směru osy y (v) se během výpočtu ustálí na hodnotě, která je všude stejná, zatímco rychlost ve směru osy x (u) se podél osy kanálu mění. Platí tedy, že úhel α , který svírá vektor výsledné rychlosti s osou x se mění podél osy kanálu. Zároveň však musí platit, že tento úhel se musí rovnat úhlu β mezi osou kanálu a osou x (tzn. vektor rychlosti musí ležet v ose kanálu). Proto bylo nutné přistoupit k tomu, že během každého kroku se vypočtený vektor rychlosti "otáčí" do požadovaného směru, a to následujícím způsobem. Nejprve se vypočte velikost vektoru rychlosti

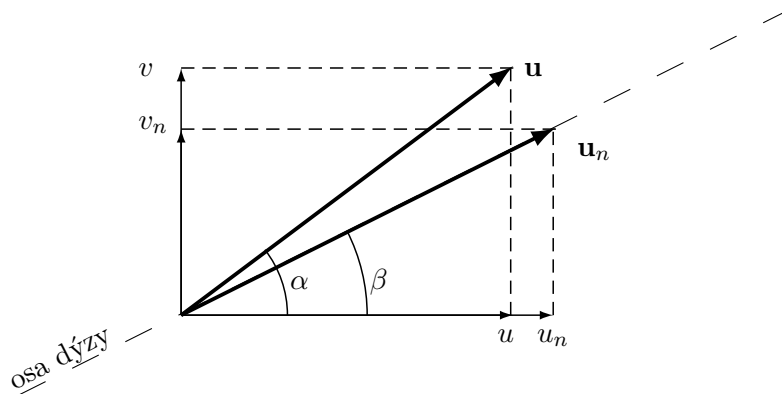
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad (5.6.2)$$

a složky otočeného vektoru rychlosti se určí jako

$$u_n = \|\mathbf{u}\| \cos \beta, \quad (5.6.3)$$

$$v_n = \|\mathbf{u}\| \sin \beta. \quad (5.6.4)$$

Graficky je to zobrazeno na obr. 5.11. Jiná metoda, kterou jsem nezkoušel, by spočívala v přidání dalšího zdrojového členu, který by jistým způsobem respektoval skloněnou geometrii.



Obrázek 5.11: Otáčení vektoru rychlosti

Popsané otáčení vektoru rychlosti se v každém časovém kroku aplikuje dvakrát, jak je zobrazeno na obr. 5.2b.

5.7 Numerické řešení proudění kanálem s náhlým rozšířením a sklonem

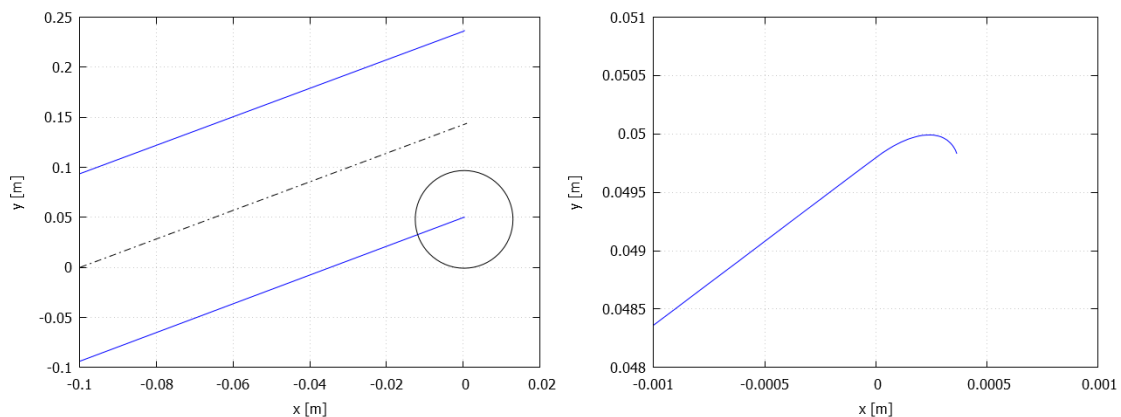
Jako nejnáročnější úlohu jsem řešil proudění v geometrii SE1050, jejíž osa je skloněná o úhel $\beta = 55^\circ$. Je užit výše zmíněná rozšířená 1D+ metoda s otáčením vektoru rychlosti a HLLC schéma.

Geometrie

Je zadána funkcí průřezu:

$$A = \begin{cases} 0,5 \cdot (s - t - 10tx) & 0 \geq x \geq -0,1 \\ s/2 - \sqrt{t^2/4 - x^2} & t \geq x > 0 \end{cases} \quad (5.7.1)$$

kde $s = 0,0551158$; $t = 0,00075194$. Je nutné si však uvědomit sklon osy kanálu.



(a) : Celkový pohled

(b) : Detail z kroužku nalevo

Obrázek 5.12: Geometrie kanálu s náhlým rozšířením a sklonem (SE1050)

Klidové hodnoty tlaku a hustoty

$$p_0 = 100\,000 \text{ Pa}$$

$$\rho_0 = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$$

Počáteční podmínka

Je podobná jako u kanálu beze sklonu, pouze musíme předepsat obě složky rychlosti

$$p_i^0 = p_0$$

$$\rho_i^0 = \rho_0$$

$$u_i^0 = 100 \cdot \cos(\alpha) \text{ m s}^{-1}$$

$$v_i^0 = 100 \cdot \sin(\alpha) \text{ m s}^{-1}$$

$$e_i^0 = \frac{p_i^0}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \rho_i^0 (u_i^0 + v_i^0)^2$$

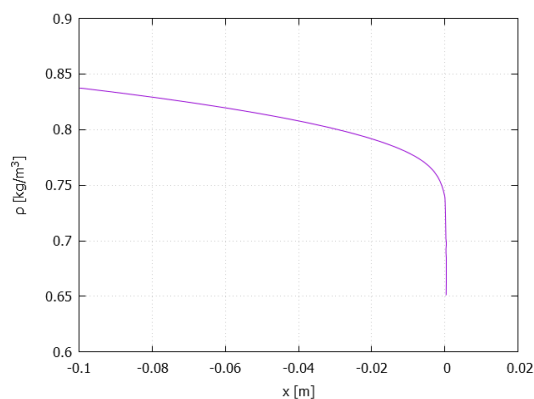
Okrajové podmínky

Viz 4.12.3 (první dva případy).

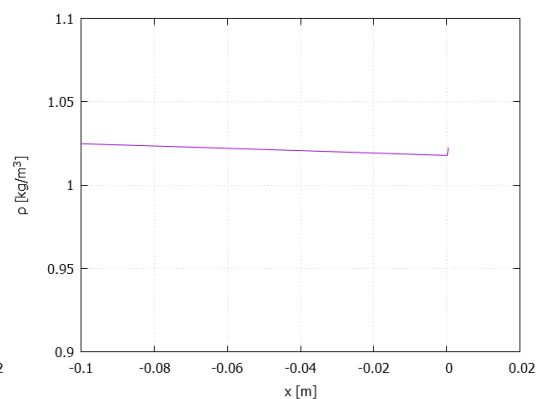
Režimy proudění

a) transsonický - $k = 0,4$. Průběh hustoty je na obr. 5.13a, Machova čísla na obr. 5.14a a úhlu α na obr. 5.15a.

b) subsonický - $k = 0,8$. Průběh hustoty je na obr. 5.13b, Machova čísla na obr. 5.14b a úhlu α na obr. 5.15b. Průběhy veličin jsou podobné jako v případě bez sklonu.

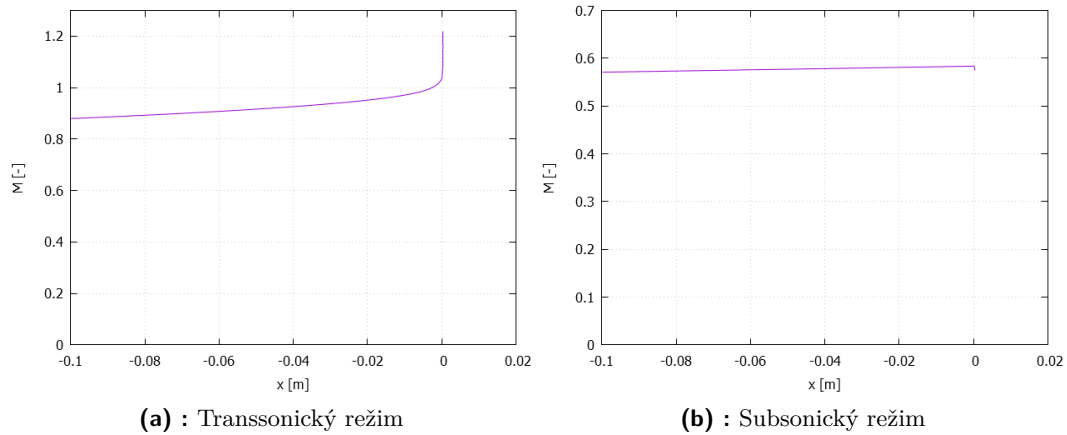


(a) : Transsonický režim

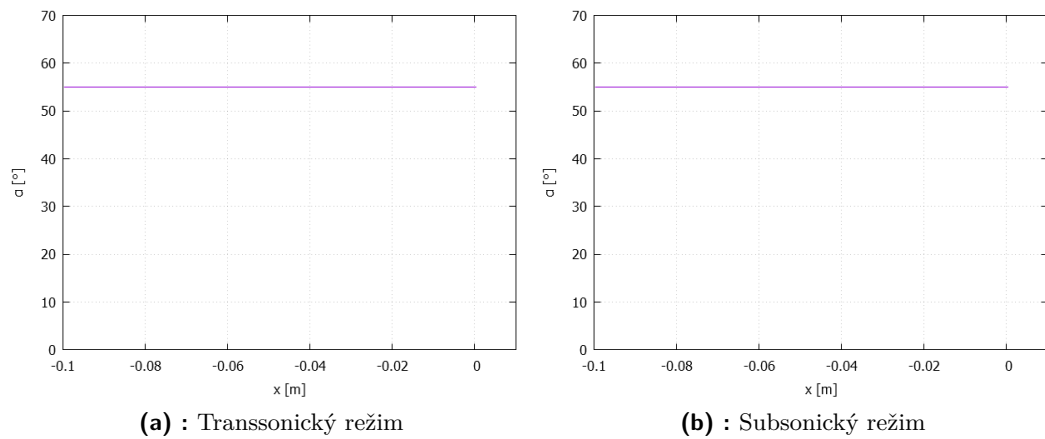


(b) : Subsonický režim

Obrázek 5.13: SE1050 se sklonem - průběh hustoty



Obrázek 5.14: SE1050 se sklonem - průběh Machova čísla



Obrázek 5.15: SE1050 se sklonem - průběh úhlu α

Je vidět, že nutná podmínka pro to, aby program fungoval správně - tedy aby vektor rychlosti ležel v ose dýzy ($\alpha = \beta = 55^\circ$) - je splněna.



Kapitola 6

Závěr

V této práci jsem se nejprve zabýval fyzikálními základy proudění tekutin, dále matematickou teorií zákonů zachování a možnostmi jejich numerického řešení. Provedl jsem výpočty proudění stlačitelné neviské tekutiny dýzou a kanálem s náhlým rozšířením a dále modelovou geometrií rotorové lopatky SE 1050 a to i se sklonem.

Použité metody lze efektivně použít pro návrhové výpočty turbínových strojů. V budoucnu by bylo vhodné porovnat výsledky dosažené 1D+ metodou s 2D řešičem Eulerových rovnic a případně s experimentem.

Případný další rozvoj použitého modelu by kromě zmíněného porovnání s jinými programy stálo za úvahu použít jiné metody pro otáčení vektoru rychlosti, a popřípadě zkusit tento model použít na náročnější úlohy, kde se úhel sklonu osy β podél dýzy mění.

Hlavní přínos této práce je kromě toho, že jsem otestoval použití 1D+ schématu pro simulaci proudění ve skloněné dýze, to, že jsem se podrobně seznámil s fyzikálními a matematickými základy numerické simulace proudění a významně jsem si rozšířil obzory v tomto oboru, což využiji v dalším studiu.



Příloha A

Literatura

- [1] J. D. Anderson, Jr. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, 1 edition, 1995.
- [2] J. D. Anderson, Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 5 edition, 2011.
- [3] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, D. M. Causon. On the choice of wavespeeds for the hllc riemann solver. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(6), 1997.
- [4] S. F. Davis. Simplified second-order godunov-type methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 9(3), 1988.
- [5] B. Einfeldt. On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(2), 1988.
- [6] S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sb.*, 47(3), 1959.
- [7] R. Dvořák, K. Kozel. *Matematické modelování v aerodynamice*. Vydavatelství ČVUT, 1996.
- [8] A. Harten, P. D. Lax. A random choice finite difference scheme for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18(2), 1981.
- [9] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 1 edition, 2004.
- [10] F. Maršík. *Termodynamika kontinua*. Academia, 1999.
- [11] J. Fořt, J. Neustupa. *Parciální diferenciální rovnice*. Vydavatelství ČVUT, 1 edition, 2000.
- [12] E. Godlewski, P.-A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer-Verlag New York Inc., 1996.

- [13] P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43(2), 1981.
- [14] B. Einfeldt, C. D. Muntz, P. L. Roe, B. Sjögren. On godunov-type methods near low densities. *Journal of Computational Physics*, 92(2), 1991.
- [15] M. Brdička, L. Samek, B. Sopko. *Mechanika kontinua*. Academia, 4 edition, 2011.
- [16] E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares. Restoration of the contact surface in the hll-riemann solver. *Shock Waves*, 4(1), 1994.
- [17] B. Audebert, J.-M. Hérard, X. Martin, O. Touazi. A simple finite volume approach to compute flows in variable cross-section ducts. In J. Fuhrman, M. Ohlberger, Christian Rohde, editor, *Finite Volumes for Complex Applications VII - Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems*, volume 78 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Springer International Publishing Switzerland, 2014.
- [18] A. Harten, P. D. Lax, B. van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1), 1983.

Příloha B

Použité značení

Seznam symbolů

Symbol	Význam
a_i	vektor zrychlení
A	průřez kanálu
\mathbf{A}	matice
b_i	obecný vektor
c	rychlost zvuku
c_p	měrná tepelná kapacity při konstantním tlaku
c_v	měrná tepelná kapacita při konstantním objemu
$d\mathbf{x}$	element objemu
\mathcal{D}	oblast
$\frac{D}{Dt}$	materiální derivace
div	divergence
e	hustota energie (energie na jednotku objemu)
e_{ij}	segmenty hranice buňky
E	měrná energie (energie na jednotku hmotnosti)
f_i	vektor vnější objemové síly
\mathbf{f}_j	tok
F_j	tok entropie
\mathbf{F}_j	tok fyzikálních veličin
$\hat{\mathbf{f}}$	vektor $(\mathbf{f}(\mathbf{u}), \mathbf{g}(\mathbf{u}))^T$
\mathbf{g}	numerický tok
G	numerický tok entropie
H	hustota entalpie
j	tok veličiny přes hranici
k	tepelná vodivost
k	koeficient tlaku
m	hmotnost
M	Machovo číslo
n_i, \mathbf{n}	vektor vnější normály plochy
\mathcal{O}	oblast
p	tlak
q_i	vektor hustoty tepelného toku

Q	zdrojový člen
r	plynová konstanta
\mathbb{R}^p	p -rozměrný prostor reálných čísel
S	plocha
S_L	signální rychlost levé vlny
S_R	signální rychlost pravé vlny
S_M	signální rychlost střední vlny
T	termodynamická teplota
T	čas
u	rychlost ve směru x
u	měrná vnitřní energie
u	vektor konzervativních proměnných
U	entropie
U	vektor konzervativních proměnných v Eulerových rovnicích
v	rychlost ve směru y
v_i	vektor rychlosti
V	objem
v	numerická aproximace
w	aproximace Riemannova problému
x	vektor proměnných x_1, x_2, \dots
\mathbb{Z}	množina celých čísel
α	úhel mezi vektorem rychlosti a osou x
β	úhel mezi osou y a osou x
Γ	menší z průřezu dvou sousedních buněk
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
ϵ	umělá viskozita
ζ	normálová souřadnice
κ	Poissonova konstanta
λ	druhá vazkost
λ	zlomek $\frac{\Delta t}{\Delta x}$
λ_i	rychlosti vln v Riemannově problému
μ	dynamická viskozita
π	hustota produkce veličiny
ρ	hustota
σ_{ij}	tenzor napětí
τ	tečná souřadnice
τ_{ij}	tenzor tečných napětí
φ	hustota veličiny
φ	obecný skalár
φ	testovací skalární funkce
φ	testovací vektorová funkce
Φ	bilancovaná veličina
Φ	numerický tok (MKO)
ψ	obecný skalár
ω	vektor
Ω	podmnožina \mathbb{R}^p

Ω_i	buňka
Δt	velikost buňky v čase
Δx	velikost buňky v prostoru
$\partial\Omega_i$	hranice buňky
∂V	hranice objemu

Seznam zkratek

Zkratka	Význam
CFD	Computational Fluid Dynamics
FDM	Finite Difference Method
FEM	Finite Element Method
FVM	Finite Volume Method
HLL	Harten Lax van Leer
HLLC	Harten Lax van Leer Contact
MKD	Metoda konečných diferencí
MKO	Metoda konečných objemů
MKP	Metoda konečných prvků
N-S	Navier-Stokes
OP	Okrajové podmínky
1D	Jednodimenzionální
2D	Dvoudimenzionální
3D	Trojdimenzionální

Dolní indexy

Zkratka	Význam
e	entropické řešení
i	index buňky
$i \pm 1/2$	rozhraní buňky
l, L	stav nalevo od rozhraní
n	nový stav
r, R	stav napravo od rozhraní
0	počáteční stav

Horní indexy

Zkratka	Význam
n	časová vrstva