ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA DOPRAVNÍ

Vojtěch Kašpar

NÁVRH DISTRIBUČNÍCH TRAS PRO ZUBNÍ LABORATOŘ

Bakalářská práce

2017

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta dopravní
děkan
Konviktská 20, 110 00 Praha 1

K617 ..... Ústav logistiky a managementu dopravy

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení studenta (včetně titulů):

Vojtěch Kašpar

Kód studijního programu a studijní obor studenta:

B 3710 – MED – Management a ekonomika dopravy a telekomunikací

Název tématu (česky): **Návrh distribučních tras pro zubní laboratoř**

Název tématu (anglicky): Distribution Route Planning for Dental Laboratory

Zásady pro vypracování

Při zpracování bakalářské práce se řiďte osnovou uvedenou v následujících bodech:

- Popis fungování zubní laboratoře
- Analýza současného stavu distribuce stomatologických preparátů
- Matematický aparát pro řešení distribučních úloh
- Návrh metody řešení
- Aplikace zvolené metody řešení na distribuci stomatologických preparátů pro zubní laboratoř
- Analýza výsledků a návrh změn

Rozsah grafických prací: řešení dle potřeby

Rozsah průvodní zprávy: minimálně 35 stran textu (včetně obrázků, grafů a tabulek, které jsou součástí průvodní zprávy)

Seznam odborné literatury: VOLEK J., LINDA B. Teorie grafů - aplikace v dopravě a veřejné správě. Univerzita Pardubice, 2012

PASTOR O., TUZAR A. Teorie dopravních systémů. Wolters Kluwer ČR, 2007

JANÁČEK, J. Optimalizace na dopravních sítích. Žilinská univerzita, 2002

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Alena Rybičková**

doc. Ing. Josef Volek, CSc.

Datum zadání bakalářské práce: **30. června 2016**

(datum prvního zadání této práce, které musí být nejpozději 10 měsíců před datem prvního předpokládaného odevzdání této práce vyplývajícího ze standardní doby studia)

Datum odevzdání bakalářské práce: **28. srpna 2017**

a) datum prvního předpokládaného odevzdání práce vyplývající ze standardní doby studia a z doporučeného časového plánu studia

b) v případě odkladu odevzdání práce následující datum odevzdání práce vyplývající z doporučeného časového plánu studia

L.S.

doc. Ing. Lukáš Týfa, Ph.D.
vedoucí
Ústavu logistiky a managementu dopravy

prof. Dr. Ing. Miroslav Svítek, dr. h. c.
děkan fakulty

Potvrzuji převzetí zadání bakalářské práce.

Vojtěch Kašpar
jméno a podpis studenta

V Praze dne .....30. června 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Nemám závažný důvod proti užívání tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne _____ _____

Vojtěch Kašpar

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval všem, kteří se podíleli na vzniku této bakalářské práce. Zvláště pak děkuji vedoucím své práce Ing. Aleně Rybičkové a doc. Ing. Josefu Volkovi, CSc. za cenné rady, poskytnuté materiály a čas strávený konzultacemi této práce. Také jsem vděčný paní Blance Veverové a jejímu manželi Jiřímu, kteří mi poskytli řadu informací a umožnili mi analyzovat dopravu v zubní laboratoři. V neposlední řadě patří velký dík mé rodině, příbuzným a blízkým, kteří mě během celého studia podporovali.

Název: Návrh distribučních tras pro zubní laboratoř

Autor: Vojtěch Kašpar

Obor: Management a ekonomika dopravy a telekomunikací

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Alena Rybičková

doc. Ing. Josef Volek, CSc.

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá dopravou v zubní laboratoři v Kladně. V první části jsou popsány důvody, proč je doprava v zubní laboratoři třeba optimalizovat. Následuje analýza současného stavu a také důvody, proč je tento stav nevyhovující. V další části se práce zabývá teoretickými východisky pro řešení daného problému – zejména tedy poznatky z teorie grafů a vhodnými algoritmy pro řešení daného typu úlohy. V praktické části jsou využita dvě různá softwarová řešení pro návrh rozvozových tras. Součástí návrhu je také finanční analýza daných řešení a návrhy změny, které by mohly vést k zefektivnění dopravy zubní laboratoře.

Klíčová slova: zubní laboratoř, optimalizace, teorie grafů, rozvozové trasy, úloha obchodního cestujícího, úloha okružních jízd

Title: Distribution Route Planning for Dental Laboratory

Author: Vojtěch Kašpar

Branch: Management and Economics of Transportation and Telecommunication

Document type: Bachelor thesis

Thesis advisor: Ing. Alena Rybičková

doc. Ing. Josef Volek, CSc.

Abstract: This bachelor thesis focuses on the distribution in a dental laboratory in Kladno. The introduction describes reasons why the distribution in this dental laboratory needs to be optimized. This is followed by an analysis of the current state and reasons why this condition is inadequate. In the next part the thesis deals with the theoretical basis for solving the given problem – especially the knowledge of graph theory and suitable algorithms for solving the given type of task. In the practical part two different software solutions for the design of distribution routes are used. This thesis also includes a financial analysis of the solutions and proposals for changes that could lead to a more efficient distribution system of the dental laboratory.

Key words: dental laboratory, optimization, graph theory, distribution route, Travelling Salesman Problem, Vehicle Routing Problem

Obsah

Seznam použitých zkratek **8**

1 Úvod **9**

2 Popis fungování zubní laboratoře **11**

2.1 Historie 11

2.2 Charakteristika otiskovacích materiálů 11

2.3 Charakteristika výrobků a služeb 12

2.4 Zubní laboratoř Blanka Veverová 12

2.4.1 Základní údaje o firmě 12

2.5 Specifika dopravy pro zubní laboratoř 12

3 Analýza současného stavu distribuce **14**

3.1 Spolupráce se zubními lékaři 14

3.1.1 Seznam zařízení 14

3.1.2 Mapa obsluhovaného území 15

3.1.3 Četnost zakázek jednotlivých zařízení 20

3.2 Dopravní prostředky 21

3.3 Současný způsob dopravní obsluhy 21

4 Matematický aparát pro řešení distribučních úloh **26**

4.1 Teorie grafů 26

4.2 Základní pojmy teorie grafů 27

4.3 Distribuční úlohy v teorii grafů 30

4.3.1 Hamiltonovská kružnice 30

4.3.2 Úloha obchodního cestujícího 30

4.3.3 Úloha okružních jízd 31

5 Metody řešení okružních jízd **32**

5.1 Optimalizace 32

5.1.1 Druhy metod řešení a algoritmů 32

5.1.2 Složitost řešení 33

5.2 Lineární programování ... 34
5.2.1 Lineární model úlohy okružních jízd ... 35
5.3 Clarkův-Wrightův algoritmus ... 36
5.4 Large neighborhood search ... 37
6 Aplikace zvolené metody řešení ... 39
6.1 Řešení v programu Route4Me ... 39
6.1.1 Informace o softwaru ... 39
6.1.2 Řešení pro všechny požadavky ... 39
6.1.3 Řešení pro požadavky v analyzovaném týdnu ... 43
6.2 Řešení pomocí VRP Spreadsheet Solver ... 49
6.2.1 Informace o software ... 49
6.2.2 Řešení pro všechny požadavky ... 50
6.2.3 Řešení pro požadavky v analyzovaném týdnu ... 51
7 Analýza výsledků a návrh změn ... 56
7.1 Přehled výsledků a vyčíslení možných finančních úspor ... 56
7.2 Návrh změn v organizaci dopravy ... 59
8 Závěr ... 60
Seznam použité literatury ... 62
Seznam obrázků ... 63
Seznam tabulek ... 65

Seznam použitých zkratek

př. n. l.	před naším letopočtem
IČO	identifikační číslo obchodníka
nám.	náměstí
Čsl.	Československý (ulice Československé armády)
VRP	Vehicle Routing Problem (úloha okružních jízd)
tzv.	takzvaný

1 Úvod

Zubní lékařství je jedním z nejdůležitějších a nejdiskutovanějších medicínských oborů. Každý z nás má svého zubního lékaře a každý z nás by k němu měl dvakrát ročně docházet na pravidelné prohlídky. Málokdo si ale uvědomuje, že nezbytným pomocníkem zubního lékaře je kromě jeho sestry také zubní laboratoř. Ta s ním spolupracuje a zprostředkovaně tak poskytuje své služby pacientům všech věkových kategorií – od zubních rovnátek pro dětské pacienty přes korunky pro pacienty každého věku až po zubní náhrady pro pacienty pokročilého věku.

Pro zubní laboratoř je jako pro každou firmu, která je zaměřena na fyzickou výrobu, klíčová doprava. Ta by měla být efektivní, rychlá, pohotová a samozřejmě by měla na svůj provoz spotřebovat co nejméně prostředků. Doprava v zubní laboratoři zajišťuje svoz a rozvoz výrobků mezi zubní lékaře. Jeden výrobek je však na cestě mezi zubním lékařem a zubní laboratoří hned několikrát. Výroba probíhá v několika fázích a jednotlivé fáze se musí v zubní ordinaci na pacientovi vyzkoušet a vrátit zpět do laboratoře. Jediná zubní náhrada či jiný výrobek tedy může mezi lékařem a laboratoří putovat i pětkrát.

Doprava je ve výrobním procesu poslední, ne však méně důležitou částí logistického řetězce. Výrobky je třeba dodat k zákazníkům tak, aby byly ve správném čase na správném místě. Zákazníci jsou v tomto případě zubní lékaři a jejich pacienti a správné místo je ordinace zubního lékaře, do které si pacient přijde zhotovený výrobek vyzvednout.

Aby byla doprava efektivní, je třeba ji plánovat systematicky a s rozmyslem. Není přípustné, aby doprava probíhala náhodně, chaoticky a neinformovaně.

V současné době je klíčové se zabývat optimalizací dopravy. Náklady na pohonné hmoty rostou a tvoří velkou část celkových nákladů. Důraz by měl být taktéž kladen na životní prostředí a na omezení dopravy zejména tam, kde není nutná.

Pro vytvoření efektivního systému dopravy je třeba provést řadu analýz, na základě kterých lze zvolit vhodný počet vozidel a stanovit jejich trasy. Při výběru vozidel je nutné zohledňovat jejich kapacitu, rychlost, ale také průměrnou spotřebu pohonných hmot. Ke stanovení vhodných tras nám mohou sloužit poznatky z operačního výzkumu. Tyto úlohy bývají pojmenovávány jako svozové a rozvozové úlohy.

Každou jednotlivou úlohu charakterizují vlastnosti, kterými se odlišuje od jiných úloh. V tomto případě se dynamicky mění množina míst, které je třeba navštívit. To je ale způsobeno pouze špatnou komunikací mezi zubními lékaři a zubní laboratoří. Řešení

se v této práci tedy omezuje na statickou úlohu, kdy se množina míst s požadavky nemění a je předem známa.

Je také důležité si předem stanovit, jaké bude kritérium pro řešení úlohy. Úlohu se můžeme pokusit optimalizovat z hlediska doby jízdy nebo z hlediska délky trasy. Vzhledem k tomu, že doba jízdy může být velmi individuální a záleží na mnoha aspektech reálného provozu, byla jako kritérium zvolena délka trasy.

Doprava zubní laboratoře je zaběhlý systém, který podle zkušeností z provozu nefunguje zcela správně. Na základě dostupných údajů o současných trasách vozidel lze očekávat, že stanovením vhodných tras a nastavením určitých pravidel, lze ušetřit až 30 % z celkového počtu ujetých kilometrů. Tato hypotéza vychází právě z údajů o trasách vozidel, které ukazují, že jsou místa obsluhována v náhodném a předem nepromyšleném pořadí. Dále je z těchto údajů patrné, že některá místa bývají navštěvována zbytečně vícekrát denně.

Motivací pro řešení tohoto problému je především zjištění, zda je možné pomocí vhodných algoritmů nalézt řešení, které dosahuje odhadovaných úspor. Takto velké úspory by mohly být pro zubní laboratoř atraktivní a mohly by najít své uplatnění v reálném provozu.

Cílem této práce je na základě znalostí získaných v bakalářském studijním programu na Fakultě dopravní analyzovat systém distribuce jako celku, ukázat možné způsoby řešení problému a navrhnout změny, které by vedly k zefektivnění provozu zubní laboratoře.

2 Popis fungování zubní laboratoře

2.1 Historie

Již od doby kamenné trápil lidstvo zubní kaz. Archeologické nálezy prokázaly, že už Etruskové vyráběli v 7. století př. n. l. předchůdce zubních protéz a můstků. V případě zranění či vypadlého zubu vkládali do zlatých držáků náhradní chrup ze zvířat. Féničané zhotovovali falešné zuby ze slonoviny a upevňovali je v ústech zlatými drátky.

Trhání zubů bylo ve středověku velice bolestivé a v některých případech bylo používáno také jako forma trestu. Ošetřujícím ve většině případů nebyl lékař, ale tyto úkony prováděli zpravidla kováři, nebo také kati.

Ani nástroje nebyly uzpůsobeny potřebám lidských úst, a často tak docházelo k poškozením dásní nebo i čelistní kosti. Dobové záznamy uvádějí, že lidé po vytržení zubu nezřídka umírali.

Lékaři se tak snažili bolestivým zubům a komplikacím přecházet a doporučovali lidem čištění zubů. K tomu používali Řekové a Římané párátka, Indové listy fíkovníku a Číňané měli dokonce zubní kartáčky [1].

2.2 Charakteristika otiskovacích materiálů

Aby bylo možné zhotovit zubní náhrady či jiné výrobky, které přesně kopírují tvar pacientovy dásně a dobře sedí v ústech, je nutné vytvořit sádrový model pacientova chrupu. Pro ten je samozřejmě nezbytné chrup otisknout.

Dříve se při otiskování chrupu používala sádra, která se musela v ústech nechat ztuhnout, poté rozlámat, vyjmout a v laboratoři dále opět slepit, aby mohly být zhotoveny modely pro další práci. Tyto materiály nepodléhaly tvarovým a objemovým změnám, a proto rychlost přepravy do laboratoře nebyla klíčová.

Modernější tvárné materiály, které jsou na bázi silikonu a alginátu, jsou snadno zpracovatelné a pro pacienta příjemné, neboť se dochucují esencemi. Také vyjímání z úst je bezpečné, nedochází při něm k poškození pacienta. Na druhou stranu přinášejí moderní materiály i své problémy. Ty spočívají v jejich dalším zpracování v zubní laboratoři. Zhruba po 120 minutách od otisknutí dochází k objemovým změnám – otisk se smršťuje a nekopíruje už dokonale chrup pacienta.

Produkt zhotovený podle modelu z takového otisku není pro pacienta vyhovující a může být až devastující pro pacientovo zubní lože. Výrobek nekopíruje tvar dásně pacienta a v některých místech může pacienta tlačit. V místě otlaku může dokonce vzniknout karcinogenní ložisko.

Z tohoto důvodu zůstává prioritou včasná přeprava zubních otisků do laboratoře a následné zhotovení sádrového modelu. Další fáze, které probíhají při výrobě a dokončení výrobku již nejsou tak náročné na časové zpracování.

2.3 Charakteristika výrobků a služeb

V laboratoři, kterou se tato práce ve své praktické části zabývá, se zhotovují následující výrobky:

- Ortodontické aparátky pro narovnání křivě rostlých zubů dětských i dospělých pacientů.
- Fixní náhrady nahrazující jednotlivé zuby nebo skupiny zubů. Zhotovují se z různých materiálů. Dříve se používaly hlavně zlaté slitiny, v současné době se materiál volí podle nároků pacienta, a to od chrom-kobaltových slitin až po titanové slitiny překryté porcelánovou fazetou. Mezi fixní náhrady se řadí např. korunky či můstky.
- Snímatelné náhrady, také známé jako zubní protézy. Zhotovují se pro všechny věkové skupiny. Vyrábějí se polymerací ze superakrylových pryskyřic.
- Další léčebné pomůcky, především nosiče pasty k fluoridaci nebo k bělení zubů, chrániče chrupu pro sportovce a pomůcky proti skřípání zubů, chrápání a proti změnám v postavení čelistního kloubu.
- Zubní laboratoř také zajišťuje opravy již hotových výrobků, např. čištění korunek nebo opravy prasklých zubních náhrad.

2.4 Zubní laboratoř Blanka Veverová

2.4.1 Základní údaje o firmě

Zubní laboratoř Blanky Veverové, je firma s více než dvacetiletou tradicí. Sídlo firmy je v kladenské části Kročehlavy v ulici Letecká 1459. Firma v současné době zaměstnává 14 lidí, z toho 11 laborantů a 3 řidiče.

Tato zubní laboratoř spolupracuje se zubními lékaři v Kladně a přilehlém okolí, zároveň ale také se zubními lékaři ve Slaném, Novém Strašecí a v Praze. Spolupráce se zubními lékaři ze vzdálenějších měst je dána především jejich dobrými a dlouhodobými zkušenostmi a příznivými cenovými podmínkami zubní laboratoře.

2.5 Specifika dopravy pro zubní laboratoř

Distribuce výrobků zubní laboratoře probíhá každý den. Je třeba zajistit rozvoz hotových výrobků do zubních ordinací a zároveň svoz vyzkoušených výrobků, otisků chrupu nebo zubních náhrad, které jsou určeny k opravě.

Otisky chrupů jsou důvodem, proč je pro dopravu v zubní laboratoři důležitá rychlost. Téměř pro každý výrobek, který zubní laboratoř zhotovuje, je třeba udělat pacientovi otisk horní i dolní čelisti. Z tohoto otisku je v laboratoři zhotoven sádrový odlitek. Laborant má tak k dispozici odlitek pacientova chrupu a může přesně vymodelovat zubní náhrady, rovnátka a podobné výrobky.

Otisky jsou zhotovovány z materiálu, který podléhá tvarovým a objemovým změnám a je velmi důležité z otisku vyrobit odlitek v co nejkratším čase od zhotovení otisku. Podrobnější informace o otiskovacích materiálech uvádím v kapitole 2.2.

Organizace dopravy v zubní laboratoři je tedy podmíněna dvěma důležitými faktory. Prvním faktorem jsou časy, ve kterých zubní lékaři zhotovují otisky. Druhým faktorem jsou časy, na které jsou objednáni pacienti, pro které je třeba dovézt vyhotovený výrobek.

V míře koordinace těchto časů, informovanosti zubní laboratoře a dostatečné komunikaci mezi zubními lékaři a zubní laboratoří vidím možnost, jak zefektivnit dopravu.

Důležitou roli při organizaci chodu ordinace zubního lékaře hraje zdravotní sestra, která se stará o objednávání pacientů. Ta by podle dohody se zubní laboratoří měla objednávat pacienty, kteří vyžadují otisk chrupu, na ranní hodiny, aby si řidiči mohli všechny tyto otisky vyzvednout naráz a nemuseli se do též ordinace vracet několikrát denně.

Pokud by byly požadavky zubních lékařů známy předem, bylo by mnohem jednodušší plánovat dopravu a snížit tak náklady na její provoz.

3 Analýza současného stavu distribuce

3.1 Spolupráce se zubními lékaři

Zubní laboratoř Blanky Veverové spolupracuje se zubními lékaři a zdravotnickými zařízeními v Kladně a okolí, dále také ve Slaném, v Novém Strašecí a v Praze. Se všemi komunikuje na denní bázi a téměř všechna střediska je nutné každý den navštívit za účelem rozvozu hotových výrobků nebo svozu otisků.

3.1.1 Seznam zařízení

V Tabulce 1 jsou uvedeni všichni zubní lékaři a střediska, se kterými Zubní laboratoř Blanka Veverová spolupracuje. V některých institucích a budovách (poliklinika, klinika atp.) je soustředěno několik zubních lékařů. Pro analýzu distribuce nejsou v tomto případě důležití jednotliví lékaři, ale celková střediska. V Tabulce 1 jsou tedy sloučeni pod název celé instituce. Zároveň je také v prvním sloupci uvedené značení jednotlivých zařízení (Z1, Z2, apod.), kterého se práce v dalším zpracování drží.

Tabulka 1: Seznam zařízení spolupracujících se Zubní laboratoří Blanka Veverová

ID	Název zařízení	Adresa	Zeměpisná délka	Zeměpisná šířka
Z1	I. Všeobecná poliklinika Kladno	K nemocnici 2814, Kladno	14,0933	50,1437
Z2	Dentální klinika Kladno	Sportovců 2311, Kladno	14,0860	50,1376
Z3	MDDr. Balejová	Slánská 169, Brandýsek	14,1669	50,1873
Z4	MUDr. Cihlář	Bohumila Kouby 1165, Kladno	14,1089	50,1669
Z5	MUDr. Flusserová	Petra Bezruče 344, Velvary	14,2382	50,2796
Z6	MUDr. Haasová	Meteorologická 21, Praha Libuš	14,4617	50,0062
Z7	MUDr. Hajník	Josefa Hoffmanna 1515, Kladno	14,1056	50,1492
Z8	MUDr. Harviš	V Břízkách 7, Praha 5	14,3608	50,0682
Z9	MUDr. Hovhannisyan	Za Zelenou liškou 953, Praha 4	14,4426	50,0458

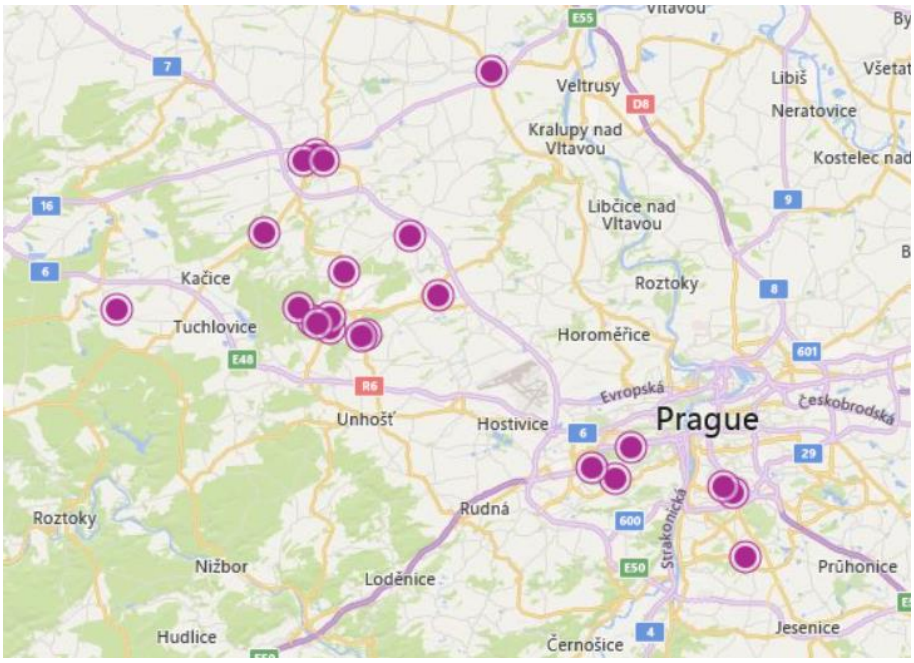
Z10	MUDr. Kašparová, MUDr. Loučka	Pražská 752, Slaný	14,0923	50,2291
Z11	MUDr. Kleindienstová	Fibichova 1800, Kladno	14,0965	50,1408
Z12	MUDr. Krejčíková	Plzeňská 3103, Kladno	14,0973	50,1346
Z13	MUDr. Matoušková	Vikova 512, Slaný	14,0743	50,2293
Z14	MUDr. Protiva	Vašíčkova 3081, Kladno	14,0699	50,1469
Z15	MUDr. Veverová	Kladenská 728, Buštěhrad	14,1913	50,1537
Z16	MUDr. Vojnar	Za Mototechnou 1619, Praha 5	14,3272	50,0565
Z17	MDDr. Zdichová	nám. T. G. Masaryka 109, Smečno	14,0397	50,1884
Z18	MUDr. Zíbová	Moskevská 1843, Kladno	14,0826	50,1393
Z19	Poliklinika Budějovická	Antala Staška 80, Praha 4	14,4503	50,0429
Z20	Poliklinika Kladno Unhošťská	Unhošťská 2533, Kladno	14,1248	50,1305
Z21	Poliklinika Nové Strašecí	Čsl. armády 53, Nové Strašecí	13,9051	50,1488
Z22	Poliklinika Praha 13	Seydlerova 8, Praha 13	14,3468	50,0499
Z23	Poliklinika Slaný	Smetanovo nám. 3, Slaný	14,0847	50,2327
Z24	Zubní středisko Ukrajinská	Ukrajinská 2329, Kladno	14,1302	50,1292

Zdroj informací: Zubní laboratoř Blanky Veverové

3.1.2 Mapa obsluhovaného území

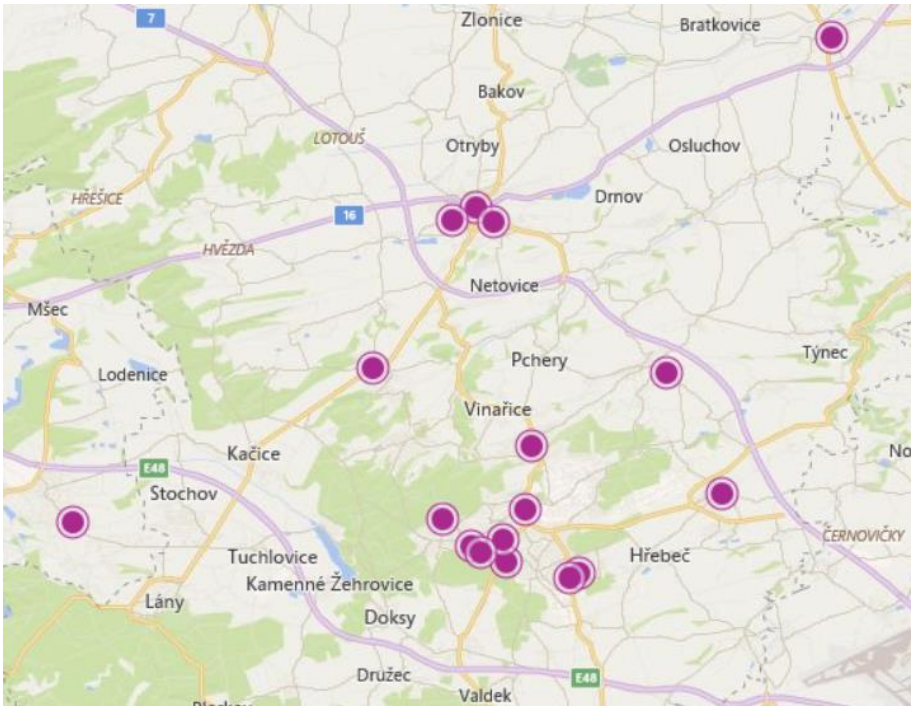
Zubní laboratoř Blanka Veverová obsluhuje zubní lékaře v Kladně a okolí, ale zároveň také v Praze. Konkrétně se jedná o severní část okresu Kladno, jižní část Prahy a dále také Nové Strašecí. Pro vyšší přehlednost jsou jednotlivá zařízení zobrazena na třech jednotlivých obrázcích. Na Obrázku 1 jsou všechna zařízení, na Obrázku 2 jsou zařízení z Nového Strašecí

a okresu Kladno a na Obrázku 3 jsou zařízení z Prahy. Zařízení jsou vyznačena fialovými kruhy. Ke tvorbě map byl použit doplněk *Bing Maps* v programu *Microsoft Excel*.



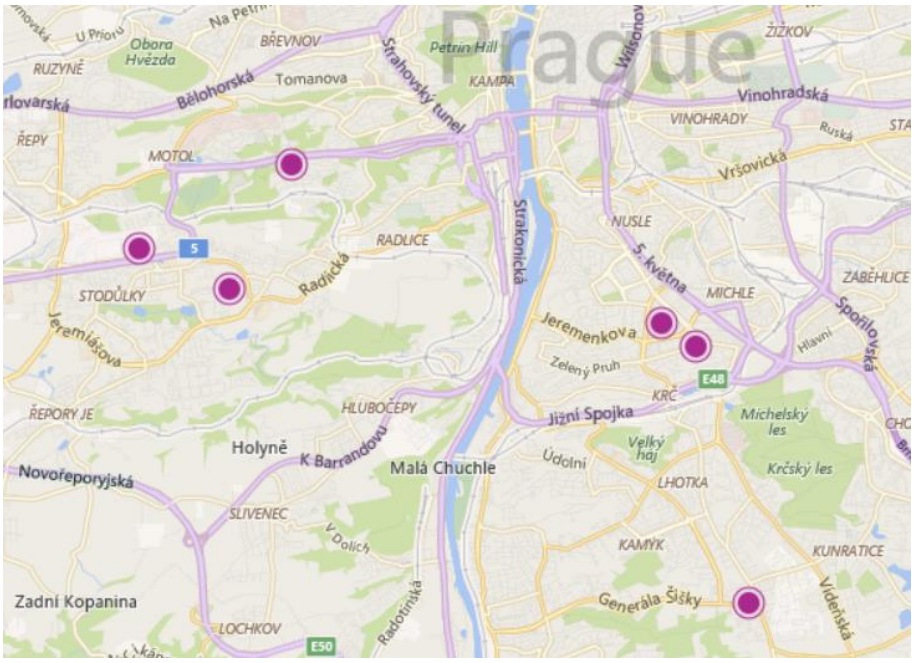
Obrázek 1: Mapa obsluhovaného území

Zdroj: Bing Maps



Obrázek 2: Mapa obsluhovaného území – Nové Strašecí a okres Kladno

Zdroj: Bing Maps



Obrázek 3: Mapa obsluhovaného území – Praha

Zdroj: Bing Maps

Pro úplnost a potřeby dalších výpočtů jsou zde uvedeny ještě dvě matice. V Tabulce 2 je distanční matice, ve které jsou uvedeny kilometrické vzdálenosti mezi jednotlivými zařízeními včetně zubní laboratoře. V Tabulce 3 je podobná matice, jsou zde uvedeny časové vzdálenosti v minutách.

Matice nejsou symetrické, vzdálenost či potřebný čas k jízdě mezi dvěma zařízeními není v obou směrech stejný. Drobné odlišnosti jsou způsobeny zejména jednosměrnými komunikacemi.

Obě matice byly zpracovány v programu *Microsoft Excel* za použití doplňků *Bing Maps* a *CDX Zip Stream.*

Tabulka 2: Distanční matice [km] – zubní laboratoř a jednotlivá zařízení

	ZL	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16	Z17	Z18	Z19	Z20	Z21	Z22	Z23	Z24
ZL	0,0	3,1	3,6	8,2	4,6	25,1	47,2	2,1	32,7	41,8	13,6	2,7	2,3	28,4	5,6	6,6	27,1	11,9	4,0	41,0	1,5	24,7	26,4	23,8	1,6
Z1	3,4	0,0	1,1	8,6	3,8	24,3	49,2	1,7	34,7	43,8	12,8	0,6	1,3	14,6	2,5	8,2	29,1	10,6	1,5	43,0	3,8	23,1	30,8	13,7	3,9
Z2	3,9	1,5	0,0	9,7	4,9	25,3	48,7	2,8	34,2	43,3	16,3	1,0	1,1	17,0	2,2	8,7	28,6	10,2	0,4	42,4	4,7	22,1	29,9	15,2	4,8
Z3	10,9	8,6	9,7	0,0	5,3	14,6	44,9	7,5	30,4	39,5	9,9	8,8	12,1	11,7	10,9	5,3	24,8	11,0	9,7	38,7	10,5	23,2	26,7	10,9	10,2
Z4	4,6	3,8	5,3	5,4	0,0	20,8	52,6	2,9	38,1	47,2	9,2	4,0	4,7	11,1	5,4	9,4	32,5	7,5	4,8	46,4	5,3	26,1	31,4	10,2	5,5
Z5	21,7	24,1	25,6	14,0	18,4	0,0	54,1	21,1	49,4	51,0	13,4	24,3	25,0	14,8	28,6	22,6	44,1	19,3	25,1	51,4	34,1	31,9	45,4	13,7	33,8
Z6	44,2	48,7	47,7	44,5	49,2	54,1	0,0	46,7	15,0	7,3	51,7	47,9	47,4	56,9	48,4	40,5	28,0	55,8	48,1	5,4	43,7	61,7	14,6	53,9	46,3
Z7	2,2	1,3	2,8	7,7	2,6	23,0	50,1	0,0	35,6	44,7	11,5	1,6	2,2	13,4	3,6	6,9	30,0	9,8	2,4	42,0	2,8	23,6	28,9	12,9	3,0
Z8	25,2	29,6	28,6	30,1	34,8	49,6	13,8	32,3	0,0	10,1	37,3	28,9	28,4	42,5	29,3	26,0	6,6	41,4	29,0	12,6	29,2	47,1	6,2	39,4	31,8
Z9	39,6	44,0	43,0	39,8	44,5	46,5	7,0	42,0	9,8	0,0	47,0	43,2	42,7	52,3	43,7	35,8	15,4	51,2	43,4	0,9	38,3	56,2	13,5	48,5	40,9
Z10	22,8	12,7	14,3	9,9	9,2	13,5	52,9	11,9	38,4	47,5	0,0	13,0	13,7	1,9	15,5	16,8	32,8	6,1	13,8	47,0	22,6	18,5	33,9	1,0	22,3
Z11	2,7	0,5	1,1	9,2	4,0	24,5	49,0	1,5	34,5	43,6	13,0	0,0	1,1	14,9	2,9	7,5	28,9	11,0	1,5	43,2	3,4	22,4	30,1	14,0	3,5
Z12	2,3	1,7	1,3	9,9	4,7	25,2	48,6	2,2	34,1	43,2	13,7	1,1	0,0	15,5	3,5	8,1	28,6	11,5	1,7	42,7	2,9	21,8	29,6	14,7	2,8
Z13	24,6	14,6	16,9	11,7	11,1	14,8	54,7	13,7	40,2	49,3	1,8	14,8	15,5	0,0	16,1	18,6	34,6	6,7	16,7	52,2	27,8	22,2	39,1	1,6	27,5
Z14	5,6	2,7	2,2	10,9	5,6	28,9	49,3	3,9	34,8	43,9	15,5	2,9	3,2	16,2	0,0	10,4	29,3	9,4	1,9	43,7	6,3	14,6	30,5	15,7	6,5
Z15	6,6	7,9	8,7	5,2	9,4	22,6	41,3	6,9	26,8	35,9	14,1	7,5	7,8	19,4	10,4	0,0	21,2	18,3	9,1	35,8	6,1	30,1	22,7	17,8	5,7
Z16	24,0	28,4	27,4	24,3	28,9	43,0	29,2	26,4	6,1	15,6	31,4	27,7	27,2	36,7	28,1	20,2	0,0	35,6	27,8	15,4	23,6	41,6	2,4	33,8	26,3
Z17	11,9	10,7	10,2	11,0	7,5	19,5	56,8	10,1	42,3	51,4	6,1	11,3	11,2	7,0	9,4	20,7	36,7	0,0	10,0	51,2	12,6	12,4	38,0	6,3	12,7
Z18	4,4	1,5	0,4	9,6	4,8	25,3	49,1	2,7	34,6	43,7	16,2	1,5	1,5	16,9	2,0	9,1	29,0	10,1	0,0	43,4	5,1	22,5	30,3	16,3	5,2
Z19	39,6	44,0	43,0	39,8	44,5	51,3	5,4	42,0	12,6	0,9	47,0	43,2	42,7	52,2	43,7	35,8	15,4	51,2	43,1	0,0	37,5	55,4	12,7	47,7	40,1
Z20	1,5	3,8	4,7	10,5	5,3	34,1	43,7	2,8	29,2	38,3	22,6	3,4	2,9	27,8	6,3	6,1	23,6	12,6	5,0	37,9	0,0	26,2	25,1	20,8	0,8
Z21	24,7	23,1	22,1	23,2	26,1	31,9	61,7	23,6	47,1	56,2	18,5	22,4	21,8	22,2	14,6	30,1	41,6	12,4	22,3	56,0	25,9	0,0	42,6	19,2	24,9
Z22	26,4	30,8	29,9	26,7	31,4	45,4	14,6	28,9	6,2	13,5	33,9	30,1	29,6	39,1	30,5	22,7	2,4	38,0	30,1	12,9	25,5	41,9	0,0	36,0	26,0
Z23	23,8	13,7	15,2	10,9	10,2	13,7	53,9	12,9	39,4	48,5	1,0	14,0	14,7	1,6	15,7	17,8	33,8	6,3	16,5	48,7	21,3	19,5	35,7	0,0	20,7
Z24	1,6	3,9	4,8	10,2	5,5	33,8	46,3	3,0	31,8	40,9	22,3	3,5	2,8	27,5	6,5	5,7	26,3	12,7	5,1	41,3	0,8	25,3	25,8	21,3	0,0

Tabulka 3: Časová matice [min] – zubní laboratoř a jednotlivá zařízení

	ZL	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16	Z17	Z18	Z19	Z20	Z21	Z22	Z23	Z24
ZL	0	9	9	16	10	35	39	6	34	42	23	8	6	27	14	11	28	23	10	38	5	27	28	25	5
Z1	8	0	2	16	8	33	37	5	32	40	20	3	3	26	6	14	26	15	4	38	10	24	29	24	10
Z2	10	3	0	18	10	35	35	7	30	38	22	3	3	24	4	15	24	14	1	36	11	22	27	26	11
Z3	17	15	17	0	10	18	34	13	29	38	14	16	18	21	19	9	23	18	18	35	17	33	25	18	17
Z4	10	8	10	10	0	26	42	7	37	46	14	8	10	20	12	16	32	13	10	42	11	28	32	18	11
Z5	34	34	36	18	26	0	48	31	47	42	16	34	36	20	37	30	40	25	36	44	35	40	42	16	35
Z6	37	37	35	34	41	48	0	37	25	16	37	36	34	41	37	29	23	40	36	13	36	43	24	40	37
Z7	6	4	6	14	5	30	39	0	34	42	17	5	6	24	8	12	28	17	6	38	7	24	29	22	7
Z8	34	35	33	31	38	49	22	34	0	21	34	33	31	38	34	26	14	37	34	19	31	38	12	35	32
Z9	41	42	40	38	45	45	16	41	22	0	42	40	39	46	41	34	28	44	41	4	39	46	22	44	40
Z10	22	20	23	15	15	16	37	19	32	41	0	21	22	6	22	14	26	9	23	39	22	25	29	3	22
Z11	7	2	2	17	9	34	36	5	31	39	21	0	3	27	7	13	25	16	4	37	9	22	28	24	9
Z12	6	4	3	18	9	34	35	5	31	39	22	3	0	28	8	13	25	17	4	35	7	21	26	25	7
Z13	27	25	25	19	19	19	42	24	37	45	5	25	27	0	23	19	31	11	24	42	26	26	33	6	26
Z14	13	6	5	20	12	35	37	9	32	40	20	7	7	22	0	18	26	12	4	38	14	22	29	23	15
Z15	11	13	14	9	14	29	31	10	26	34	15	12	13	19	18	0	20	17	15	31	10	29	21	17	10
Z16	25	26	24	22	30	39	24	26	12	27	26	25	23	30	26	18	0	29	25	24	25	32	7	30	26
Z17	21	16	15	17	13	24	41	17	36	45	9	19	18	12	14	18	31	0	15	41	23	16	31	11	23
Z18	11	4	1	18	10	35	36	7	31	40	22	4	4	24	5	16	25	14	0	37	12	24	28	25	12
Z19	38	38	36	35	42	44	13	38	19	4	39	37	35	42	38	31	24	41	38	0	31	40	20	41	33
Z20	5	10	11	17	11	35	36	7	31	39	22	9	7	26	14	10	25	23	12	32	0	20	23	20	11
Z21	27	24	22	33	28	40	43	24	38	46	25	22	21	26	22	29	32	16	23	41	21	0	31	23	21
Z22	28	29	27	25	32	42	24	29	12	22	29	28	26	33	29	21	7	31	28	20	22	31	0	30	23
Z23	25	24	26	18	18	16	40	22	35	44	3	24	25	6	23	17	30	11	24	39	20	22	29	0	22
Z24	5	10	11	17	11	35	37	7	32	40	22	9	7	26	15	10	26	23	12	34	10	21	23	21	0

3.1.3 Četnost zakázek jednotlivých zařízení

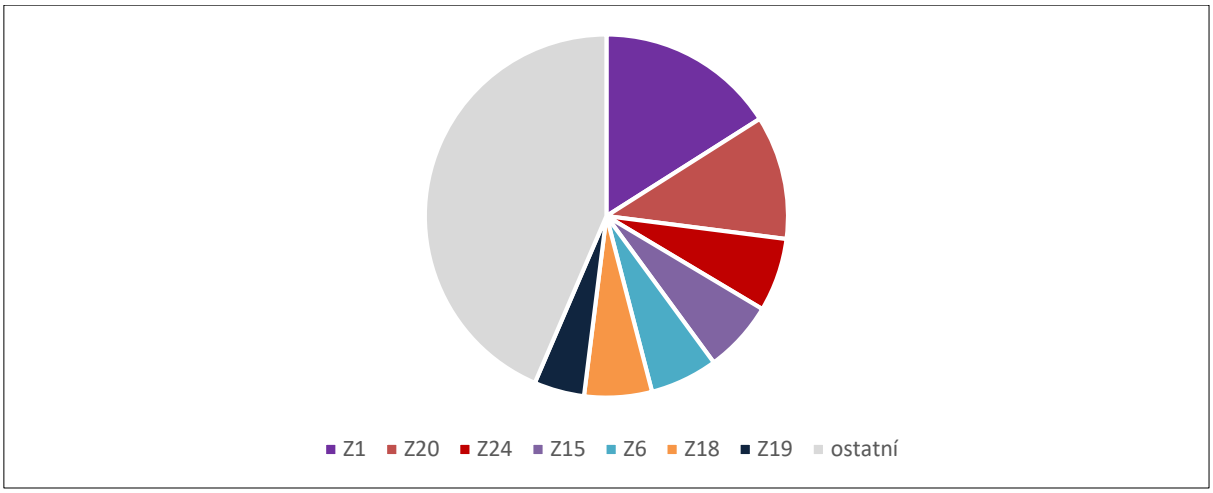
Poptávka po výrobcích zubní laboratoře se v průběhu roku mění. Mezi měsíce, kdy je laboratoř nejvytíženější, se řadí duben, květen a listopad. Naopak nejméně vytížená je laboratoř v období letních prázdnin, tedy v červenci a v srpnu. V Tabulce 4 jsou uvedeny počty zakázek pro jednotlivá zařízení v dubnu 2016. Tyto údaje jsou z účetnictví laboratoře a znamenají tedy počet výrobků, které laboratoř pro dané zařízení zhotovila. Jak již bylo řečeno v úvodu bakalářské práce, jeden výrobek mnohdy vyžaduje několik cest mezi laboratoří a zubním lékařem. Tato čísla tedy neznamenají počet cest mezi zubní laboratoří a daným zařízením, pouze odrážejí rozdíly ve vytížení jednotlivých zařízení.

Tabulka 4: Četnost zakázek jednotlivých zařízení

Zařízení	Počet		Zařízení	Počet
Z1	93		Z13	2
Z2	23		Z14	18
Z3	6		Z15	37
Z4	12		Z16	6
Z5	14		Z17	10
Z6	35		Z18	35
Z7	15		Z19	26
Z8	23		Z20	64
Z9	13		Z21	15
Z10	20		Z22	20
Z11	22		Z23	23
Z12	11		Z24	38

Zdroj informací: Zubní laboratoř Blanky Veverové

Z koláčového grafu na Obrázku 4, který vychází z dat v Tabulce 4, je vidět, že nejvíce zakázek je v zařízení Z1 a Z20. Jedná se o dvě velké kladenské polikliniky, ve kterých působí několik zubních lékařů. Dalšími zařízeními, které poptávají nejvíce výrobků, jsou Z24, Z15, Z6, Z18 a Z19. Ostatní zařízení s počtem výrobků menším než 25 výrobků měsíčně, jsou z důvodu zachování přehlednosti sloučeny pod jednu část grafu.



Obrázek 4: Diagram četností zakázek v dubnu 2016

Zdroj: vlastní zpracování

3.2 Dopravní prostředky

V současné době je distribuce výrobků zubní laboratoře zajišťována čtyřmi vozidly, z nichž jedno slouží jako záložní vozidlo. Výrobky tedy pravidelně rozváží tři vozidla. Jejich technické údaje jsou v Tabulce 5.

Vzhledem k zanedbatelným rozměrům přepravovaných výrobků nejsou potřeba velká auta nebo dodávky. Všechna vozidla užívaná pro rozvoz výrobků jsou malá osobní vozidla.

Tabulka 5: Technické údaje o vozidlech

	Vozidlo I.	**Vozidlo II.**	**Vozidlo III.**
Značka	Škoda	Citroën	Peugeot
Typ	Fabia	C3	307
Registrační značka	3SZ 4965	1SM 7951	3S8 3713
Datum první registrace	1. 10. 2003	9. 10. 2008	1. 11. 2002

Zdroj informací: Zubní laboratoř Blanky Veverové

3.3 Současný způsob dopravní obsluhy

V současné době je doprava v této zubní laboratoři značně neorganizovaná. Řidiči se ráno setkají a rozdělí si výrobky určené k rozvozu. Každý z řidičů má svou typickou trasu a obsluhuje tedy většinou stejná střediska. Nicméně v průběhu celého dne přicházejí požadavky od zubních lékařů a řidiči se poté musí domluvit, který z nich nově vzniklý

požadavek obslouží. Dochází tedy k situacím, kdy se musí řidič vracet do jednoho střediska i několikrát v jednom dni.

V týdnu od 18. 7. 2016 do 22. 7. 2016 byla prováděna analýza organizace dopravy v této laboratoři a zaznamenány trasy jednotlivých vozidel.

18. 7. 2016

vozidlo I.: zubní laboratoř → Z20 → Z12 → Z1 → Z11 → Z2 → Z18 → Z14 → Z2 → Z15 → zubní laboratoř → Z4 → Z10 → Z23 → zubní laboratoř

vozidlo II.: vozidlo v tento den nevyjelo

vozidlo III.: zubní laboratoř → Z21 → Z17 → Z6 → Z19 → Z8 → Z9 → zubní laboratoř

19. 7. 2016

vozidlo I.: zubní laboratoř → Z24 → Z20 → Z1 → Z2 → Z18 → Z14 → Z4 → Z15 → zubní laboratoř

vozidlo II.: zubní laboratoř → Z23 → Z17 → Z21 → Z2 → zubní laboratoř → Z23 → zubní laboratoř

vozidlo III.: zubní laboratoř → Z8 → Z16 → Z22 → Z19 → Z9 → Z6 → zubní laboratoř

20. 7. 2016

vozidlo I.: zubní laboratoř → Z24 → Z20 → Z12 → Z1 → Z11 → Z18 → Z2 → Z4 → Z7→ zubní laboratoř → Z1 → zubní laboratoř

vozidlo II.: zubní laboratoř → Z23 → Z10 → Z13 → Z5 → Z3 → Z15→ zubní laboratoř

vozidlo III.: zubní laboratoř → Z21 → Z15 → Z6 → Z19 → Z9 → Z22 → zubní laboratoř → Z8 → zubní laboratoř

21. 7. 2016

vozidlo I.: zubní laboratoř → Z24 → Z20 → Z12 → Z1 → Z2 → Z18 → Z14 → Z15→ zubní laboratoř → Z14 → zubní laboratoř

vozidlo II.: zubní laboratoř → Z23 → Z13 → Z17 → Z3 → Z15 → Z1 → Z20 → zubní laboratoř

vozidlo III.: zubní laboratoř → Z21 → Z17 → Z9 → Z8 → Z22→ zubní laboratoř

22. 7. 2016

<u>vozidlo I.:</u> zubní laboratoř → Z24 → Z11 → Z1 → Z2 → Z18 → Z4 → Z23 → zubní laboratoř

<u>vozidlo II.:</u> zubní laboratoř → Z7 → Z5 → Z10 → Z15 → zubní laboratoř

<u>vozidlo III.:</u> zubní laboratoř → Z6 → Z19 → Z9 → Z8 → Z21 → zubní laboratoř

V Tabulce 6 jsou uvedeny počty kilometrů, které vozidla ve sledovaných dnech ujela. Uveden je také celkový počet ujetých kilometrů pro každý den, pro každé vozidlo a zároveň celkový počet, který všechna tři vozidla v daném týdnu ujela. Tyto vzdálenosti byly určeny na základě tras jednotlivých vozidel a příslušných dat v distanční matici v Tabulce 2.

V Tabulce 7 jsou analogicky uvedeny časy, které daná vozidla strávila na svých trasách. Ty byly určeny z časové matice v Tabulce 3. Pro obsluhu každého zařízení je uvažována doba 10 minut. V některých případech se vozidla vracela do zubní laboratoře a poté opět vyjížděla obsluhovat zařízení. Čas strávený v laboratoři řidiči využívají k odpočinku, je tedy neproduktivní, a z tohoto důvodu není tento čas započítán do celkového součtu.

Tabulka 6: Počet ujetých kilometrů ve sledovaných dnech

[km]	**18. 7.**	**19. 7.**	**20. 7.**	**21. 7.**	**22. 7.**	**celkem**
vozidlo I.	66,3	31,3	26,0	38,7	45,9	208,2
vozidlo II.	0	116,1	67,4	61,6	61,9	307,0
vozidlo III.	161,6	106,7	200,2	130,9	135,1	734,5
celkem	227,9	254,1	293,6	231,2	242,9	**1249,7**

Zdroj: vlastní zpracování

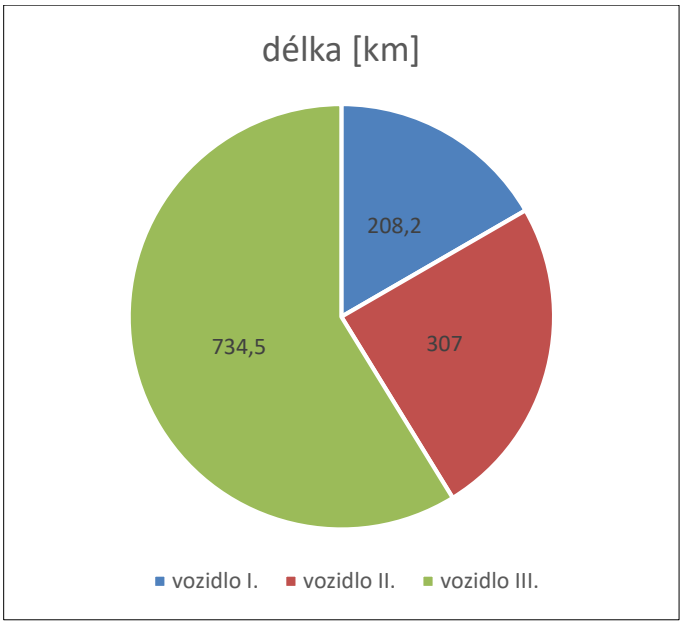
Tabulka 7: Doby strávené na trasách ve sledovaných dnech

[min]	**18. 7.**	**19. 7.**	**20. 7.**	**21. 7.**	**22. 7.**	**celkem**
vozidlo I.	230	152	174	180	142	878
vozidlo II.	0	184	151	166	117	618
vozidlo III.	238	192	292	200	193	1115
celkem	468	528	617	546	452	**2611**

Zdroj: vlastní zpracování

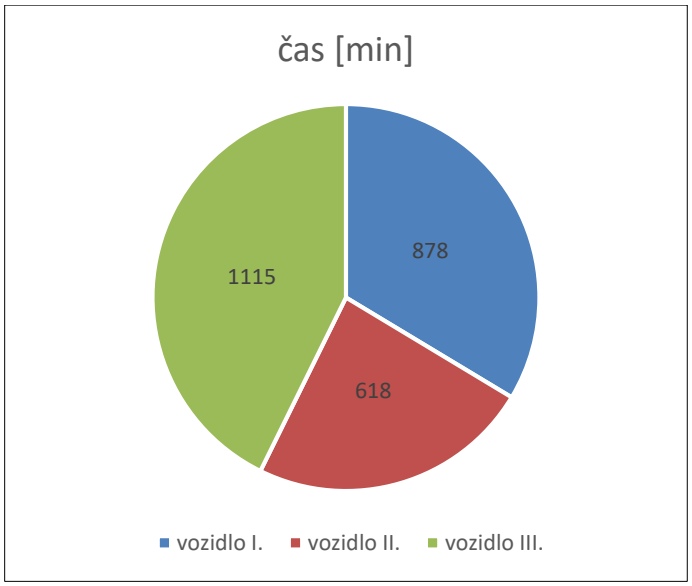
Z Tabulky 6 vyplývá, že nejdelší trasu pravidelně ujede vozidlo III. Je to způsobeno tím, že toto vozidlo většinou obsluhuje vzdálenější zařízení v Praze a Novém Strašecí. Rozdíly v Tabulce 7 už nejsou tak velké. Vozidlo III. jezdí po dálnicích a zbylá dvě vozidla ve městě a po komunikacích nižších tříd. I tak je ale vozidlo III. nejvytíženější jak z hlediska kilometrického proběhu, tak z hlediska časových nároků.

Mezi jednotlivými vozidly byly ve sledovaném týdnu značné rozdíly. Rozdíly mezi ujetými vzdálenostmi jsou zobrazeny na grafu na Obrázku 5, rozdíly mezi časy strávenými na trasách jsou zobrazeny na grafu na Obrázku 6.



Obrázek 5: Rozdíly mezi ujetými vzdálenostmi pro jednotlivá vozidla

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 6: Rozdíly mezi časy strávenými na trasách pro jednotlivá vozidla

Zdroj: vlastní zpracování

4 Matematický aparát pro řešení distribučních úloh

Pro řešení distribučních úloh a optimalizaci v dopravě se využívá teorie grafů a algoritmy definované na grafech.

4.1 Teorie grafů[1]

Teorie grafů patří spolu s teorií zásob, teorií her, teorií rozvrhů či teorií front mezi disciplíny operačního výzkumu. Ten se nejvíce rozvinul v období II. světové války a zejména také ve druhé polovině 20. století díky využití počítačů.

V matematice existuje pojem graf ve dvou smyslech. Tím prvním a obecně známějším je graf jako interpretace závislosti určitých proměnných. Druhou variantou je právě graf, se kterým se setkáváme v teorii grafů. Jedná se o útvar, který modeluje některý reálný systém prostřednictvím vrcholů a hran.

Za zakladatele teorie grafů je považován Leonard Euler.[1] Ten v roce 1736 vyřešil úlohu sedmi mostů města Královce, respektive dokázal neřešitelnost této úlohy. V Královci se konal průvod, který měl projít každým ze sedmi mostů právě jednou. Euler zjistil, že k řešení problému je třeba splnit dvě důležité podmínky – graf musí být souvislý a všechny vrcholy musí být sudého stupně. Právě podmínku o stupních vrcholů grafická interpretace nesplňuje a úloha tak nemá žádné řešení.

Další osobností je Gustav Kirchhoff, který se zabýval zákony platícími v elektrických obvodech. Tyto zákony se v teorii grafů uplatňují především v tocích v síti.

V roce 1852 publikoval student Francis Guthrie jako svou diplomovou práci tzv. problém čtyř barev. Jednalo se o to, kolika barvami je potřeba vybarvit politickou mapu Británie za podmínky, aby země, které spolu sousedí hranicí (nikoli pouze v jednom bodě) měly různou barvu. Tento problém byl vyřešen až o sto let později pomocí počítače.

O pár let později přišel William Hamilton s hlavolamem zvaným dodecahedron. Jednalo se o pravidelný dvanáctistěn opatřený kolíky a provázkem. Řešitel měl za úkol projít každý vrchol dvanáctistěnu právě jednou.

Také u nás máme některé významné matematiky, kteří se dané problematice věnovali. Ve 20. letech minulého století se Otakar Borůvka a Vojtěch Jarník zabývali týmž problémem. Jednalo se o elektrifikaci určité části jižní Moravy. Bylo samozřejmě potřeba obsloužit co největší území a zároveň použít co nejméně materiálu. Otakar Borůvka publikoval zobecněný

[1] Tato teoretická kapitola vychází ze zdrojů [2] a [3] uvedených v seznamu použité literatury.

algoritmus v roce 1926, Vojtěch Jarník o pár let později, v roce 1930. V obou případech se jednalo o algoritmy k nalezení minimální kostry grafu.

V dnešním světe nalézá Teorie grafů široké uplatnění v různých oborech. Jedná se o dopravu, ekonomiku, veřejnou správu, další využití nacházíme i ve fyzice, chemii či biologii.

4.2 Základní pojmy teorie grafů

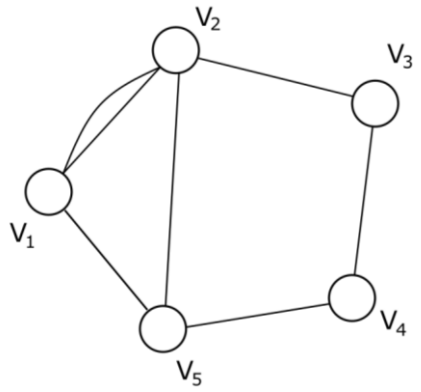
Neorientované grafy

Neorientovaný graf definujeme jako uspořádanou trojici $G = (V, H, p)$, kde písmeno V značí množinu všech vrcholů, písmeno H označuje množinu všech existujících hran a p je incidenční zobrazení. Incidenční zobrazení je zobrazení množiny hran do množiny všech neuspořádaných dvojic vrcholů z množiny vrcholů [2].

V grafech se můžeme také setkat se smyčkami a násobnými hranami. Smyčka je taková hrana, která spojuje vrchol sám se sebou. Násobností hrany rozumíme počet hran, které spojují stejnou dvojici vrcholů [4].

Rozlišujeme několik speciálních případů grafů. Obyčejný graf je takový, který neobsahuje žádné násobné hrany ani smyčky. Prostý graf obsahuje smyčky, ale neobsahuje násobné hrany. Multigraf obsahuje smyčky i násobné hrany [4].

Na Obrázku 7 je zobrazen neorientovaný multigraf. Mezi vrcholy V_1 a V_2 je násobná hrana.



Obrázek 7: Neorientovaný multigraf

Zdroj: vlastní zpracování

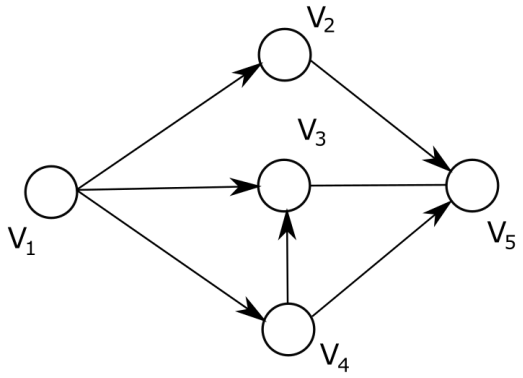
Orientované grafy

Orientovaný graf definujeme jako uspořádanou trojici $G = (V, H, p)$, kde písmeno V značí množinu všech vrcholů, písmeno H označuje množinu všech existujících

orientovaných hran a p je incidenční zobrazení. Incidenční zobrazení je v případě orientovaných grafů zobrazení množiny hran do množiny všech uspořádaných dvojic vrcholů z množiny vrcholů [2].

Orientaci hrany vyznačujeme šipkou směřující z výchozího vrcholu do koncového.

Příklad orientovaného grafu je na Obrázku 8.



Obrázek 8: Orientovaný graf

Zdroj: vlastní zpracování

Smíšené grafy

Smíšený graf je takový graf, ve kterém se objevují orientované i neorientované hrany [3].

V dopravních aplikacích se tedy často setkáváme s grafy smíšenými, protože orientované hrany vyjadřují jednosměrné ulice a neorientované hrany vyjadřují ulice průjezdné oběma směry.

Souvislost grafů

Neorientovaný graf nazýváme ***souvislým***, pokud pro každou dvojici jeho vrcholů existuje cesta $m(u, v)$; v opačném případě říkáme, že je graf ***nesouvislý***.

U orientovaných grafů rozlišujeme několik druhů souvislostí. Graf nazveme ***neorientovaně souvislým***, pokud je souvislý bez ohledu na orientaci hran, tj. pokud je souvislý ve smyslu neorientovaného grafu. Pokud není orientovaný graf neorientovaně souvislý, pak o něm říkáme, že je **nesouvislý**.

Orientovaný graf nazveme ***silně souvislým***, pokud mezi každou dvojicí vrcholů v tomto grafu existuje dráha $m[u, v]$ a zároveň dráha $m[v, u]$.

Pokud mezi libovolnou dvojící vrcholů existuje dráha $m[u,v]$ nebo dráha $m[v,u]$, pak tento graf nazýváme ***orientovaně souvislým*** [3].

Ohodnocení hrany

Ohodnocení hrany je funkce $o(h)$, která každé hraně $h \in H$ přiřazuje nezáporné číslo vyjadřující určitou kvalitativní nebo kvantitativní vlastnost hrany [3]. Ohodnocení hrany může v dopravních aplikacích vyjadřovat délku hrany, její propustnost či spolehlivost.

Sled

Sled je posloupnost po sobě následujících vrcholů a hran, která začíná i končí ve vrcholu. Pokud začíná a končí ve stejném vrcholu, jedná se o sled uzavřený. V opačném případě hovoříme o sledu otevřeném. Rozlišujeme také sled orientovaný a neorientovaný [4].

Tah

Sled, ve kterém se neopakuje žádná hrana, nazýváme tahem [2].

Cesta

Cesta je tah, ve kterém se neopakuje žádný vrchol. Cestu začínající ve vrcholu u a končící ve vrcholu v značíme jako $m(u,v)$ [2].

Délka cesty

V hranově ohodnoceném grafu G pro délku cesty platí:

$$|m(u,v)| = \sum_{h \in m(u,v)} o(h) \quad [2].$$

Vzdálenost dvou vrcholů

V hranově ohodnoceném grafu G je vzdálenost dvou vrcholů $u, v \in V$ definována jako:

$$d\,(u,v) = \min_{m\,(u,v) \in M} \left\{ \sum_{h \in m\,(u,v)} o(h) \right\} \quad [2].$$

Podgraf grafu

Podgrafem grafu $G = (V, H, p)$ rozumíme graf $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{H}, \bar{p})$, pro který platí:

$\bar{V} \subseteq V$, $\bar{H} \subseteq H$, a pro každou hranu $h \in \bar{H}$ platí $\bar{p}(h) = p(h)$ [2].

4.3 Distribuční úlohy v teorii grafů

Distribuční úlohy jsou úlohy, které v řeší mnoho praktických problémů – může se jednat o rozvoz výrobků, svoz odpadu, vybírání poštovních schránek, plánování služebních cest apod. Distribucí rozumíme procesy, které zajišťují, aby se výrobky dostaly na požadované místo, v požadovaném množství, v požadovaném čase a v požadované kvalitě [3].

Hlavním úkolem distribučních úloh je navštívit všechna místa dané sítě a urazit při tom minimální vzdálenost.

4.3.1 Hamiltonovská kružnice

Jako první přednesl podobný problém v 19. století irský matematik R. W. Hamilton. Z tohoto důvodu je kružnice, která obsahuje všechny vrcholy grafu, nazývána hamiltonovská kružnice.

Hamiltonovská kružnice je podgraf grafu, který je kružnicí a obsahuje všechny vrcholy grafu [2].

4.3.2 Úloha obchodního cestujícího

Právě pro obchodní cestující, kteří musí plánovat své cesty tak, aby navštívili všechny své zákazníky a urazili při tom co nejmenší vzdálenost, byly úlohy poprvé formulovány.

Dopravní síť je reprezentována ohodnoceným souvislým grafem. Tento graf může být neorientovaný i orientovaný. V případě orientovaného grafu se musí jednat o graf neorientovaně souvislý. Uzly (vrcholy) tohoto grafu představují jednotlivá místa, která je třeba navštívit. Hrany mezi těmito uzly jsou existující dopravní cesty, které lze mezi těmito místy uskutečnit. Ohodnocení hrany udává obecně náročnost přejezdu. Většinou se ale setkáváme s ohodnocením ve významu kilometrické vzdálenosti jednotlivých míst [3].

Úkolem této úlohy je nalézt trasu, která začíná i končí ve výchozím vrcholu a prochází všemi vrcholy dané sítě. Je zřejmé, že požadavkem je, aby tato trasa byla minimální.

4.3.3 Úloha okružních jízd

V literatuře bývá tato úloha označována také jako úloha optimálního trasování. Často se také setkáváme se zkratkou VRP z anglického *Vehicle Routing Problem*. O úloze okružních jízd hovoříme tehdy, pokud vozidla daného vozového parku mají kapacitu dostatečnou na obsluhu více než jednoho zákazníka.

Tato úloha je formulována pro graf $G = (V, H)$. Ve vrcholu V_0 se nachází středisko sítě a ve vrcholech $V_1, \dots V_n$ vznikají požadavky na určitý objem dopravních elementů. Požadavky jednotlivých vrcholů V_i pro $i = 1, \dots, n$ označíme c_i.

U úlohy s homogenním vozovým parkem předpokládáme, že firma disponuje určitým množstvím stejných vozidel s ložnou kapacitou c. Jsou známy vzdálenosti mezi výchozím střediskem V_0 a vrcholy $V_1, \dots V_n$ – d_{0j} pro $i = 1, \dots, n$ a rovněž také vzdálenosti d_{ij} pro $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, n$ pro libovolnou dvojici vrcholů [2].

Každé vozidlo vyjíždí z výchozího vrcholu V_0 a po obsluze jednoho či více vrcholů se vrací zpět. Každý vrchol je obsluhován právě jedním vozidlem [2].

Cílem této úlohy je najít pro každé vozidlo, které obsluhu vrcholů realizuje, takovou uzavřenou trasu, která začíná i končí v daném vrcholu V_0. Zároveň musí platit, že každý z vrcholů, který má být obsloužen, je součástí trasy právě jednoho vozidla. Je zřejmé, že hledané trasy musí být minimální.

5 Metody řešení úlohy okružních jízd

5.1 Optimalizace

Optimalizace je proces, při kterém z množiny přípustných řešení vybíráme optimální řešení. Optimální řešení je takové řešení, při kterém účelová funkce nabývá svého minimální či maximální hodnoty. Množinu přípustných řešení vymezujeme soustavou omezujících podmínek. Účelovou funkcí rozumíme takovou funkci, která jednotlivá přípustná řešení ohodnocuje na základě předem stanovených kritérií. Tím může být jakákoli veličina, která je pro daný typ úlohy vhodná. Často se setkáváme s kritériem v podobě zobecněných nákladů (v tom případě tedy hovoříme o minimalizaci) či kritériem zisku (v tom případě hovoříme o maximalizaci). Úloha může být i vícekriteriální (tj. úkolem je minimalizovat více veličin) [5].

5.1.1 Druhy metod řešení a algoritmů

V operačním výzkumu se setkáváme se třemi základními typy metod řešení:

- exaktními,
- heuristickými,
- metaheuristickými.

Každá z výše jmenovaných metod přináší svá pro a proti. Jedná se zejména o kvalitu dosahovaných řešení a o časovou náročnost. Při řešení se tedy musíme rozhodnout, jestli je pro nás důležitější, jak rychle získáme řešení nebo jak kvalitní řešení bude.

Exaktní metody

Ze zmiňovaných metod jsou exaktní metody jediné, které zaručují dosažení optimálního řešení. To s sebou samozřejmě přináší velkou spotřebu času a u většiny typů distribučních úloh můžeme exaktní metody použít pouze pro omezený počet vrcholů. Například pro úlohu okružních jízd jsou exaktní metody použitelné do 60 vrcholů [6].

Příkladem exaktních metod je lineární celočíselné programování, prozkoumání všech permutací [2] nebo také metody z rodiny *branch and X*, tedy metoda *branch and bound*, *branch and cut* nebo *branch and price* [6].

Heuristické metody

Oproti exaktním metodám jsou heuristické metody velmi rychlé, avšak nezaručují dosažení optimálního řešení. Podle zkušeností mohou dávat velmi dobrá a v praxi použitelná řešení. Využívají se tedy pro úlohy, ve kterých hraje čas dosažení výsledného řešení, největší roli.

Název pochází z řeckého slova *heuriskó*, což by se dalo přeložit jako zkusmé řešení problémů, pro jejichž řešení nemáme exaktní algoritmus nebo jinou přesnější metodu [7].

Příkladem heuristické metody pro vyhledání minimální hamiltonovské kružnice je hladový algoritmus (*greedy search*).

Metaheuristické metody

Jak již z názvu vyplývá, metaheuristické metody jsou určitým vylepšením heuristických metod. Vylepšení spočívá v tom, že v určitém okamžiku dokážou opustit lokální optimum a posunout se v množině přípustných řešení. Tyto metody prohledávají větší množinu řešení, a i z toho důvodu jsou časově náročnější než heuristické metody. To má však v konečném důsledku dopad na to, že dosahovaná řešení jsou obvykle lepší a bližší optimálnímu řešení [6].

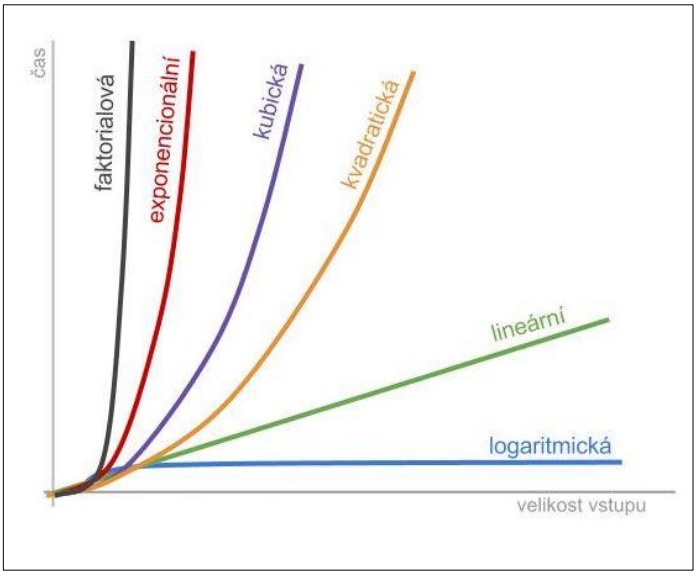
Z metaheuristických metod lze pro úlohu okružních jízd použít metodu *large neighborhood search*, genetické algoritmy nebo tzv. optimalizaci mravenčí kolonií.

5.1.2 Složitost řešení

Při řešení úloh a výběru vhodného algoritmu často narážíme na výpočetní složitost úlohy. Ta nám říká, kolik operací musí algoritmus provést pro nalezení optimálního řešení. Výpočetní složitost můžeme popsat funkcí *f(n)*, kde *n* je počet vstupních dat (např. vrcholů grafu). Podle podoby této funkce rozlišujeme úlohy s polynomiální složitostí a nepolynomiální složitostí.

Právě úlohy s nepolynomiální (např. exponenciální či faktoriálovou) složitostí jsou extrémně náročné na čas a s každým vrcholem navíc dochází k tzv. výpočetní explozi, která mnohonásobně rozšiřuje množinu přípustných řešení a znemožňuje využití algoritmů pro úlohy větších rozměrů [11].

Časová náročnost pro různé složitosti řešení je charakterizována na Obrázku 9.



Obrázek 9: Časová náročnost úloh

Zdroj: Lucie Žoltá

5.2 Lineární programování

Lineární programování je typ matematického programování. Jedná se o odvětví optimalizace. Úkolem je tedy nalezení maxima či minima dané účelové funkce na základě omezujících podmínek.

Matematický model se skládá z:

- účelové funkce,
- soustavy omezujících podmínek včetně podmínky nezápornosti všech proměnných.

Slovo *programování* v názvu nijak nesouvisí s programováním počítačů, ale je v tomto smyslu spíše synonymem pro plánování nebo rozvrh činností. Cílem je totiž naplánovat úkol tak, aby byl splněn co nejlépe [8].

Slovo *lineární* v tomto významu naznačuje, že všechny vazby v matematickém modelu jsou lineární, tj. všechny použité funkce jsou lineární. To znamená, že proměnné v modelu můžeme sčítat, odečítat a násobit reálnými konstantami. Pro zápis účelové funkce a omezujících podmínek můžeme použít pouze rovnosti a nerovnosti (tj. znaménka =, ≤ a ≥).

Velké množství technických, ekonomických či biologických procesů můžeme dostatečně přesně popsat lineárním modelem. Typickými příklady lineárního programování jsou:

- úlohy výrobního plánování,
- úlohy finančního plánování,

- nutriční problém (úloha o výživě),
- směšovací problém [8].

5.2.1 Lineární model úlohy okružních jízd

Základní lineární model pro úlohu vícenásobného obchodního cestujícího, resp. okružních jízd může být následující [9].

$$\min f(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \tag{1}$$

za podmínek:

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \qquad \text{pro } i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0} = m, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{pro } i = 1, \dots, n, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{pro } j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

$$y_i - y_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1 \qquad \text{pro } i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n. \tag{7}$$

$$y_i \geq 0 \qquad \text{pro } i = 1, \dots, n \tag{8}$$

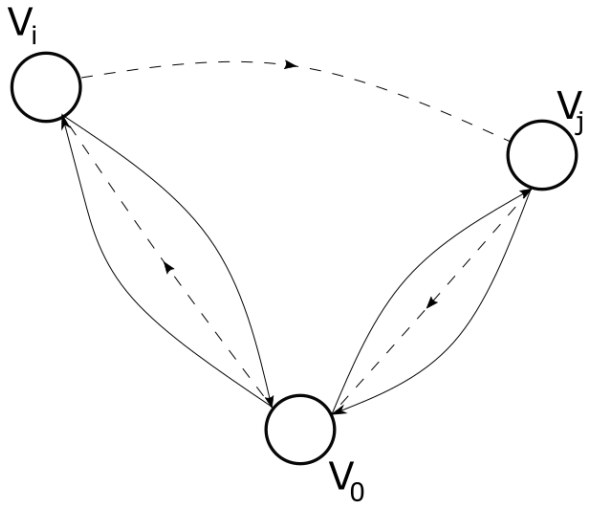
Výraz (1) je účelová funkce, která vyjadřuje celkové náklady na realizaci. Tuto funkci budeme minimalizovat. Podmínka (2) je tzv. obligatorní podmínka, která určuje, z jakého definičního oboru budou proměnné vybírány. V tomto případě se jedná o bivalentní proměnnou – při hodnotě 1 je daná relace obchodním cestujícím využita a místa jsou tedy v trase přímo propojena a následují po sobě, při hodnotě 0 naopak. Podmínky (3) a (4) zaručují, že z výchozího depa s indexem *0* vyjede právě *m* vozidel (obchodních cestujících) a stejný počet vozidel se do depa opět vrátí. Podmínky (5) a (6) zajišťují, že každé místo (kromě výchozího depa) bude obslouženo právě jednou a právě jedním vozidlem. Konkrétně podmínka (5) říká, že z každého místa vyjede vozidlo právě jedním směrem a podmínka (6) naopak říká, že do každého místa přijede vozidlo z právě jednoho jiného místa. Poslední podmínka (7) je

tzv. anticyklická podmínka, která zabraňuje vzniku nepřípustných podcyklů, vynechání některých míst a spojení míst sama se sebou. K této podmínce je nutné přiřadit ještě obligatorní podmínku (8) pro proměnnou y_i.

5.3 Clarkův-Wrightův algoritmus

Tento heuristický algoritmus vychází z počátečního řešení, kdy pro je pro obsluhu každého zákazníka využito jedno vozidlo. Jedná se tedy o trasy *0 – j – 0* a těchto tras je celkově *N*. Smyslem algoritmu je spojit tyto jednotlivé trasy tak, aby byly celkové náklady minimální.

Podstatou tohoto algoritmu je úvaha, která je zřejmá z Obrázku 10.



Obrázek 10: Podstata Clarkova-Wrightova algoritmu

Zdroj: vlastní zpracování

Základním (triviálním) řešením jsou cykly $\{v_0, v_i, v_0\}$ a $\{v_0, v_j, v_0\}$. Pokud je to výhodné, můžeme tyto cykly spojit v jeden. Výhodnost propojení cyklů je dána tím, jestli se celková ujetá vzdálenost sníží nebo nikoliv.

Pokud je $d_{ij} < d_{i0} + d_{0j}$, potom je spojení vrcholů *i,j* výhodné a tuto výhodnost můžeme vyjádřit jako $\lambda_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$.

Algortimus lze popsat těmito kroky [2]:

1. Pro každou dvojici vrcholů vypočteme výhodnost $\lambda_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$.
2. Položíme $\gamma_i = 1$ pro každý vrchol. To vyjadřuje skutečnost, že alespoň jedna z hran $[v_0, v_i]$ a $[v_i, v_0]$ je součástí aktuálního řešení. Vrchol s hodnotou $\gamma_i = 1$ je tedy krajním vrcholem cyklu.

3. V maticí úspor zjistíme, jestli existuje ještě nějaké $\lambda_{ij} \geq 0$, které jsme ještě nepoužili.
    a. Pokud takové $\lambda_{ij} \geq 0$ existuje, pokračujeme krokem 4.
    b. Pokud takové $\lambda_{ij} \geq 0$ neexistuje, pokračujeme krokem 5.
4. Vybereme maximální λ_{ij}, které nebylo dosud vybráno.
    a. Pokud $\gamma_i = 1$ a $\gamma_j = 1$ a požadavky zákazníků na slučovaných cyklech odpovídají přípustnosti řešení (omezení doby řízení, omezená kapacita vozidla apod.), pak tyto cykly můžeme sloučit, určíme nová γ_i pro všechny vrcholy a pokračujeme krokem 3.
    b. Pokud alespoň jedna z výše uvedených podmínek není splněna, pak pokračujeme znovu krokem 3.
5. Konec algoritmu, dané řešení je optimální nebo suboptimální.

5.4 Large neighborhood search

Large neighborhood search je metaheuristický algoritmus, který se využívá při úlohách okružních jízd a úlohách obchodního cestujícího.

V tomto algoritmu je klíčové definovat si, co konkrétně znamená *neighborhood*. V tomto smyslu můžeme výraz přeložit jako *sousedství* či spíše *okolí*. Jedná se tedy o okolí aktuálního řešení, které se od něj liší drobnými změnami. V úloze obchodního cestujícího si tyto změny můžeme představit jako drobné úpravy trasy (tj. většina trasy je v daných řešeních stejná, pouze některá místa jsou navštěvována v jiné posloupnosti).

Smyslem algoritmu je aktuální řešení neustále zlepšovat. To se provádí právě porovnáváním aktuálně nejlepšího řešení s řešeními, které se od něho v drobných změnách liší.

Okolí tvoří nová řešení, která se porovnávají s aktuálně nejlepším řešením. Tato nová řešení mohou být tvořena např. metodou *destroy and repair*. Z názvu metody vyplývá, že probíhá ve dvou fázích – v první části dochází ke zrušení některých částí řešení (typicky jsou tedy vypuštěna z daných tras některá místa) a ve druhé části je řešení opraveno (vypuštěná místa jsou do tras znovu vložena). Opětovné vkládání míst do tras probíhá heuristickým algoritmem. Pokud je nové řešení výhodnější než aktuálně nejlepší řešení, potom se toto nové řešení stává aktuálně nejlepším řešením [10].

Je třeba si určit, jaká část vrcholů bude v části *destroy* vypouštěna. V každém kroku existuje obrovské množství možností, které vrcholy můžeme vypustit. S tím souvisí i název algoritmu, kde *large* znamená *obrovský*. Budeme-li uvažovat úlohu se 100 místy a budeme-li v každém kroku vypouštět 15 míst, potom existuje $\binom{100}{15} = 2{,}5 \cdot 10^{17}$ různých možností, jak vybrat místa ke zrušení [10]. Místa jsou obecně vybírána náhodně. Otázkou tedy je, jak správně nastavit

počet vypouštěných míst. Pokud bude tento počet nízký, má algoritmus problém prohledat velké okolí daného řešení a tím v podstatě klesá význam a princip tohoto algoritmu. Pokud je počet vypouštěných míst naopak vysoký, potom je porovnávané řešení příliš odlišné od původního řešení.

6 Aplikace zvolené metody řešení

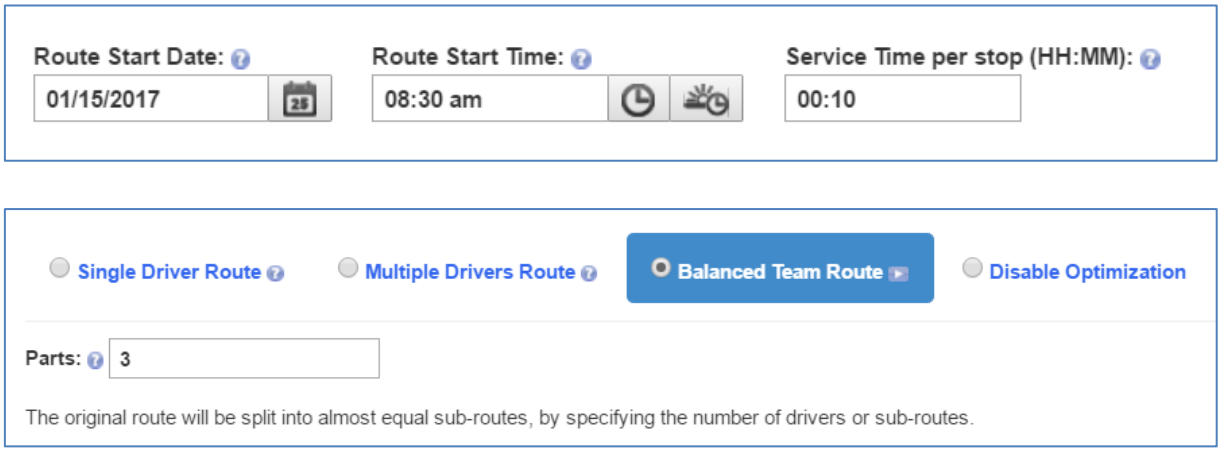
6.1 Řešení v programu Route4Me

6.1.1 Informace o softwaru

Tato internetová aplikace je určena pro malé a střední podniky, které ve své činnosti potřebují určovat výhodné trasy pro vozidla. Aplikace je provozována na komerční bázi a její používání je zpoplatněno. Pro účely této práce byla využita zkušební časově omezená verze, která má některé funkce zablokované. Z obchodních důvodů odmítl provozovatel této aplikace poskytnout informace o algoritmu, který je pro určování tras vozidel použitý.

6.1.2 Řešení pro všechny požadavky

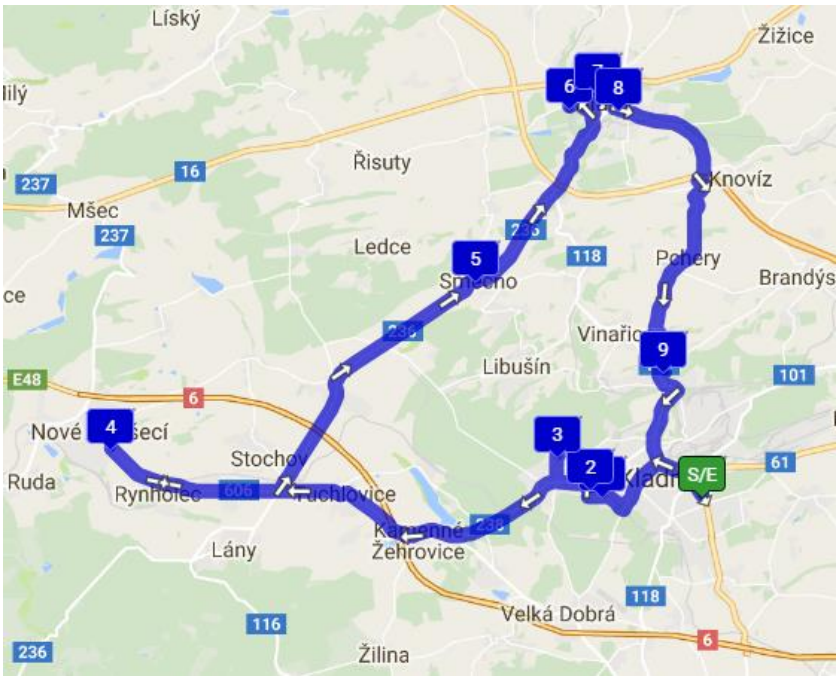
Jako první byly vytvořeny rozvozové trasy pro uspokojení všech požadavků v síti. Vozidla tedy obslouží všechna zařízení. V programu bylo potřeba nastavit kritéria a vstupní hodnoty pro toto řešení. Čas výjezdu byl nastaven v 8:30 a doba obsluhy jednoho zařízení 10 minut. Aby program určil trasy pro 3 vozidla, bylo nutné zvolit možnost *Balanced Team Route* a jako počet vozidel zadat hodnotu 3. Nastavení úlohy je zobrazeno na Obrázku 11.



Obrázek 11: Nastavení úlohy pro uspokojení všech požadavků

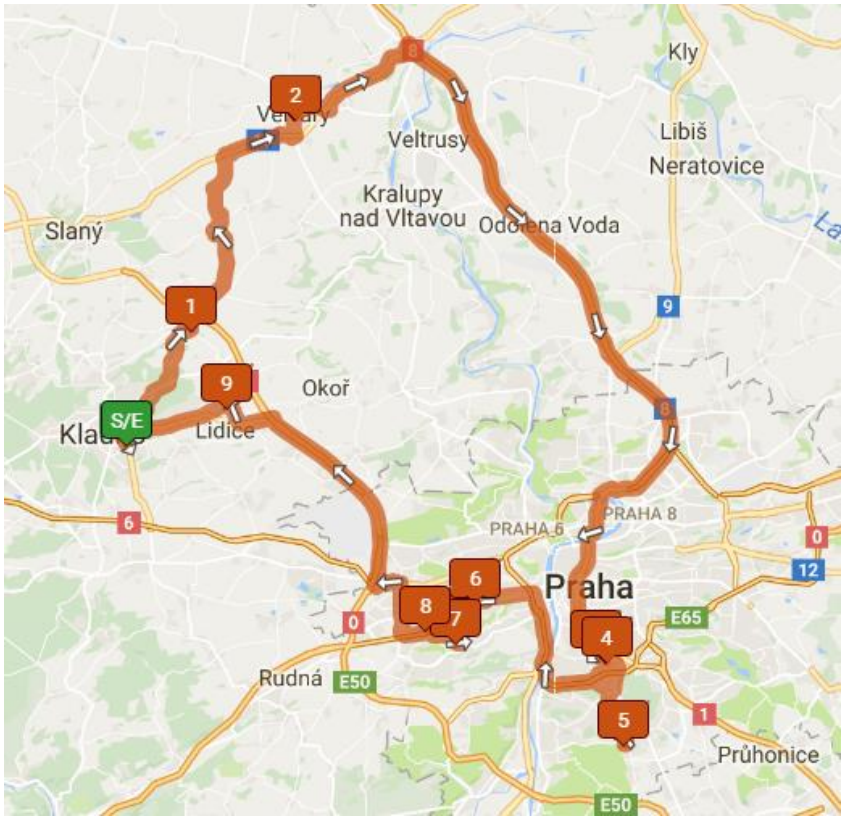
Zdroj: Route4Me

Program určil tři rozvozové trasy. Jedno vozidlo obsluhuje severozápadní část sítě, druhé vozidlo východní část včetně Prahy a třetí vozidlo obsluhuje výhradně požadavky v Kladně. Trasa prvního vozidla je vykreslena na Obrázku 12, trasa druhého vozidla na Obrázku 13 a trasa třetího vozidla na Obrázku 14.



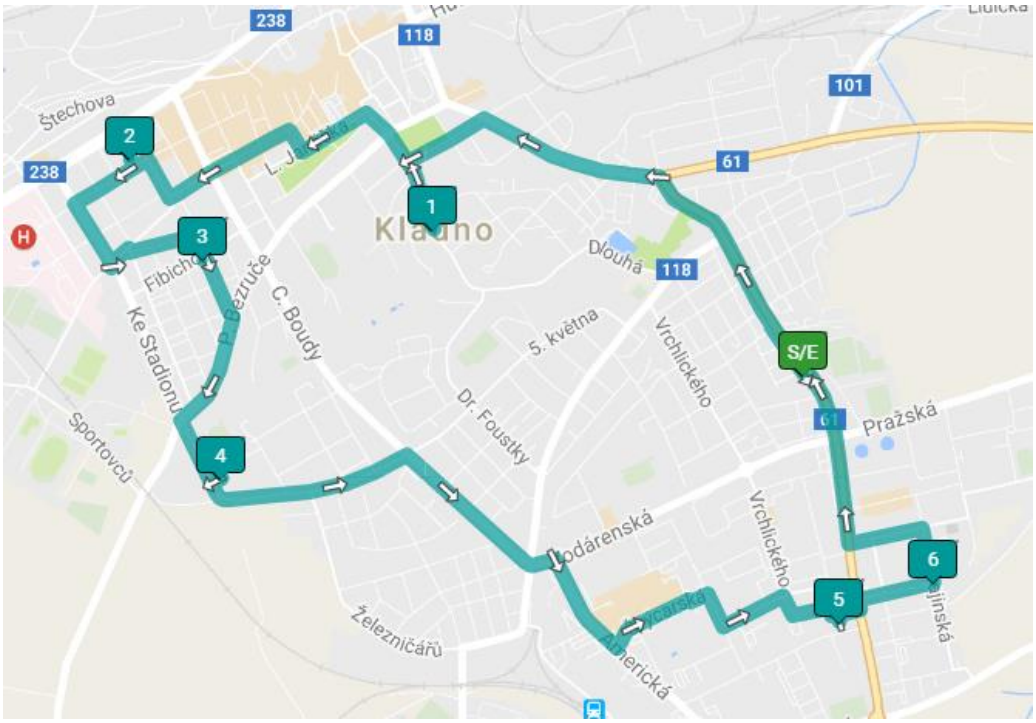
Obrázek 12: Trasa prvního vozidla (Route4Me, 3 vozidla)

Zdroj: Route4Me



Obrázek 13: Trasa druhého vozidla (Route4Me, 3 vozidla)

Zdroj: Route4Me



Obrázek 14: Trasa třetího vozidla (Route4Me, 3 vozidla)

Zdroj: Route4Me

Údaje o trasách jednotlivých vozidel včetně jejich délky a doby jízdy jsou přehledně uvedeny v Tabulce 8.

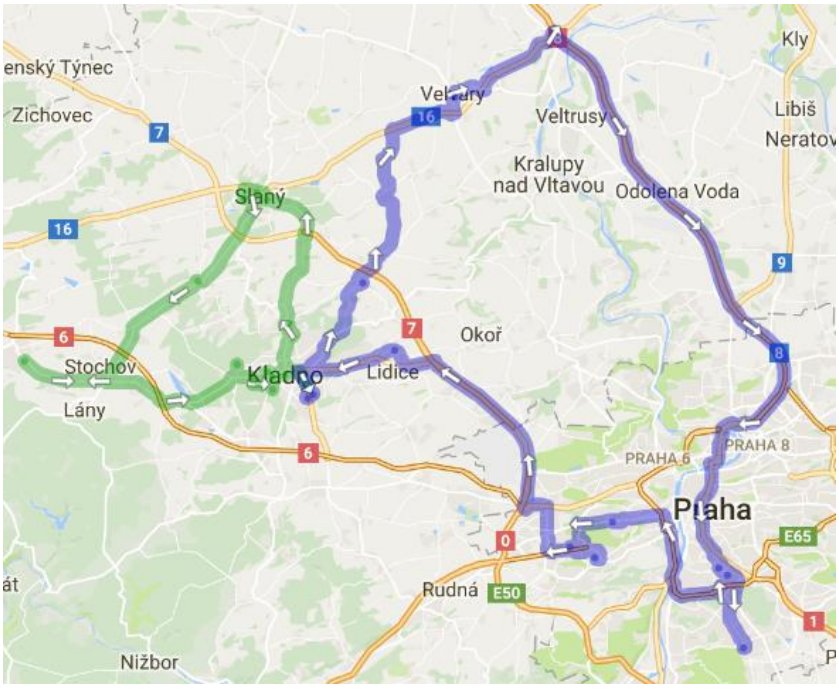
Tabulka 8: Údaje o trasách vozidel – 3 vozidla (Route4Me)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z2, Z18, Z14, Z21, Z17, Z13, Z23, Z10, Z4	55,99	174
vozidlo II.	Z3, Z5, Z9, Z19, Z6, Z8, Z22, Z16, Z15	122,79	237
vozidlo III.	Z7, Z1, Z11, Z12, Z20, Z24	9,17	78
celkem		187,95	489

Zdroj: Route4Me

Doby jízdy jednotlivých vozidel jsou velmi krátké a vozidlo III. v této variantě obsluhuje jen malé území. Z tohoto důvodu byla úloha zadána znovu s tím, že počet vozidel byl snížen na dvě. Došlo k očekávanému řešení – trasy vozidel I a II zůstaly velmi podobné, pouze se k nim

připojily požadavky vozidla III, tedy požadavky z Kladna. Trasy jsou zobrazeny na Obrázku 15 a podrobnosti o trasách jsou uvedeny v Tabulce 9.



Obrázek 15: Trasy vozidel pro všechny požadavky (Route4Me, 2 vozidla)

Zdroj: Route4Me

Tabulka 9: Údaje o trasách vozidel – 2 vozidla (Route4Me)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z4, Z10, Z23, Z13, Z17, Z21, Z14, Z18, Z2, Z1, Z11, Z12, Z7	58,52	220
vozidlo II.	Z3, Z5, Z9, Z19, Z6, Z8, Z22, Z16, Z15, Z24	125,98	263
celkem		184,50	483

Zdroj: Route4Me

Řešení pro dvě vozidla je výhodnější z časového hlediska i z hlediska délky trasy. Při výjezdu v 8:30 se jedno vozidlo vrátí ve 12:10 a druhé vozidlo ve 12:53.

Snížením počtu vozidel také klesají další náklady spojené s vlastnictvím vozidla a mzdové náklady na řidiče, což také patří do optimalizace rozvozových tras. Z tohoto důvodu je v další části práce počítáno pouze se dvěma vozidly.

6.1.3 Řešení pro požadavky v analyzovaném týdnu

Aby mohly být přesně porovnány náklady, které by optimalizací rozvozových tras mohla laboratoř ušetřit, bylo třeba navrhnout trasy pro týden, ve kterém byla reálná doprava analyzována. Vzhledem k tomu, že analýza probíhala v červenci v době dovolených, nejsou všechna zařízení navštěvována každý den, neboť nevznesla žádné požadavky. V Tabulce 10 jsou pro každý den vypsána zařízení, která bylo nutné navštívit a pro větší přehlednost také zařízení, která v daný den nevznesla požadavky a nebylo je potřeba obsloužit.

Tabulka 10: Přehled požadavků v analyzovaném týdnu

datum	navštívená zařízení	nenavštívená zařízení
18. 7. 2016	Z1, Z2, Z4, Z6, Z8, Z9, Z10, Z11, Z12, Z14, Z15, Z17, Z18, Z19, Z20, Z21, Z23	Z3, Z5, Z7, Z13, Z16, Z22, Z24
19. 7. 2016	Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6, Z8, Z9, Z14, Z15, Z16, Z17, Z18, Z19, Z20, Z21, Z22, Z23, Z24	Z7, Z10, Z11, Z12, Z13
20. 7. 2016	Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10, Z11, Z12, Z13, Z15, Z18, Z19, Z20, Z21, Z22, Z23, Z24	Z14, Z16, Z17
21. 7. 2016	Z1, Z2, Z3, Z8, Z9, Z12, Z13, Z14, Z15, Z17, Z18, Z20, Z21, Z22, Z23, Z24	Z4, Z5, Z6, Z7, Z10, Z11, Z16, Z19
22. 7. 2016	Z1, Z2, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10, Z11, Z18, Z19, Z21, Z23, Z24	Z3, Z12, Z13, Z14, Z15, Z16, Z17, Z20, Z22

Zdroj informací: Zubní laboratoř Blanky Veverové

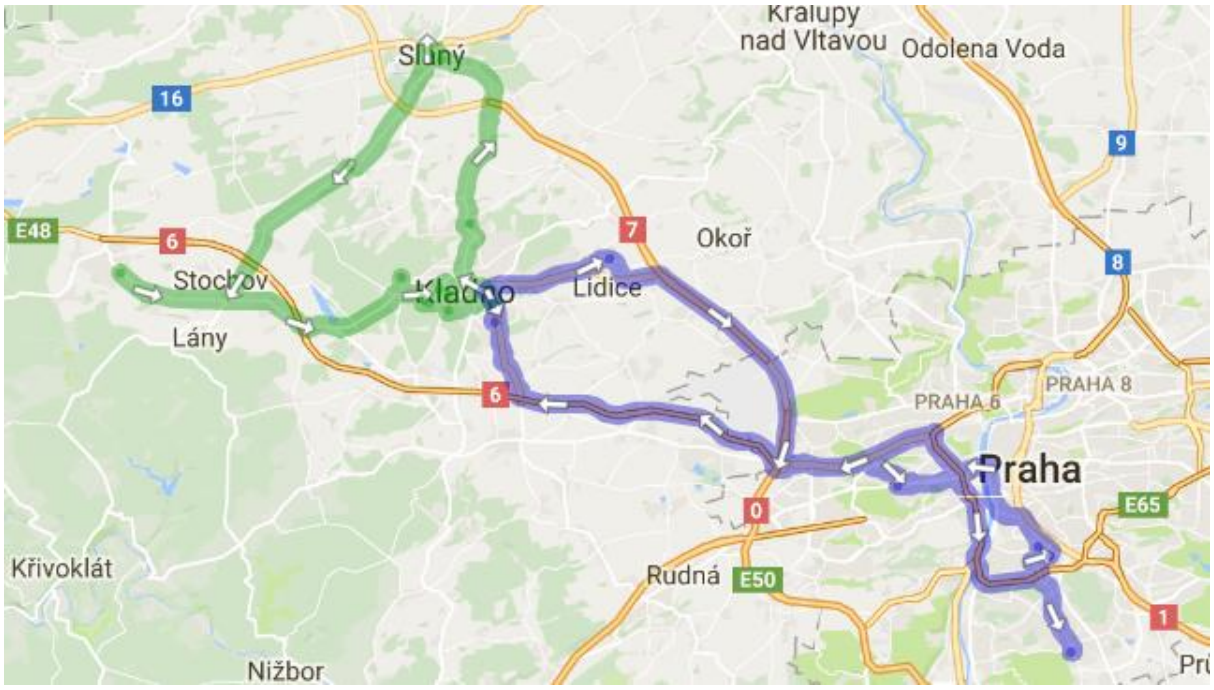
Do programu Route4Me byla stejným způsobem zadána kritéria této úlohy. Počet vozidel byl po zkušenostech z předchozího řešení omezen pouze na dvě. Pro každý den bylo samozřejmě potřeba zadat úlohu znovu, protože v každém dni jsou uspokojovány jiné požadavky. Údaje o trasách vozidel jsou uvedeny v Tabulkách 11-15 a tyto trasy jsou vykresleny na Obrázcích 16-20.

pondělí 18. 7. 2016

Tabulka 11: Údaje o trasách vozidel pro 18. 7. 2016 (Route4Me)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z4, Z10, Z23, Z17, Z21, Z14, Z18, Z2, Z1, Z11, Z12	55,76	195
vozidlo II.	Z15, Z8, Z6, Z19, Z9, Z20	80,39	157
celkem		136,15	352

Zdroj: Route4Me



Obrázek 16: Trasy vozidel pro 18. 7. 2016 (Route4Me)

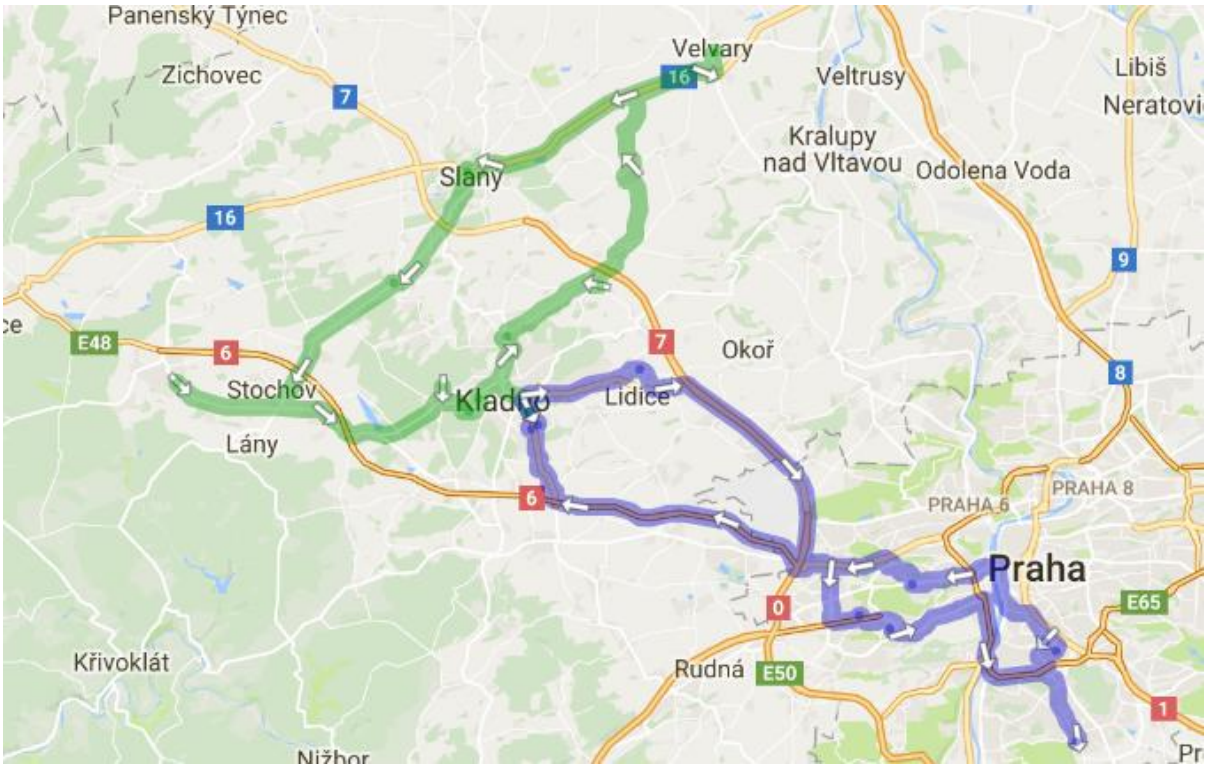
Zdroj: Route4Me

úterý 19. 7. 2016

Tabulka 12: Údaje o trasách vozidel pro 19. 7. 2016 (Route4Me)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z4, Z3, Z5, Z23, Z17, Z21, Z14, Z18, Z2, Z1	78,29	209
vozidlo II.	Z15, Z16, Z22, Z6, Z19, Z9, Z8, Z20, Z24	83,04	193
celkem		161,33	402

Zdroj: Route4Me



Obrázek 17: Trasy vozidel pro 19. 7. 2016 (Route4Me)

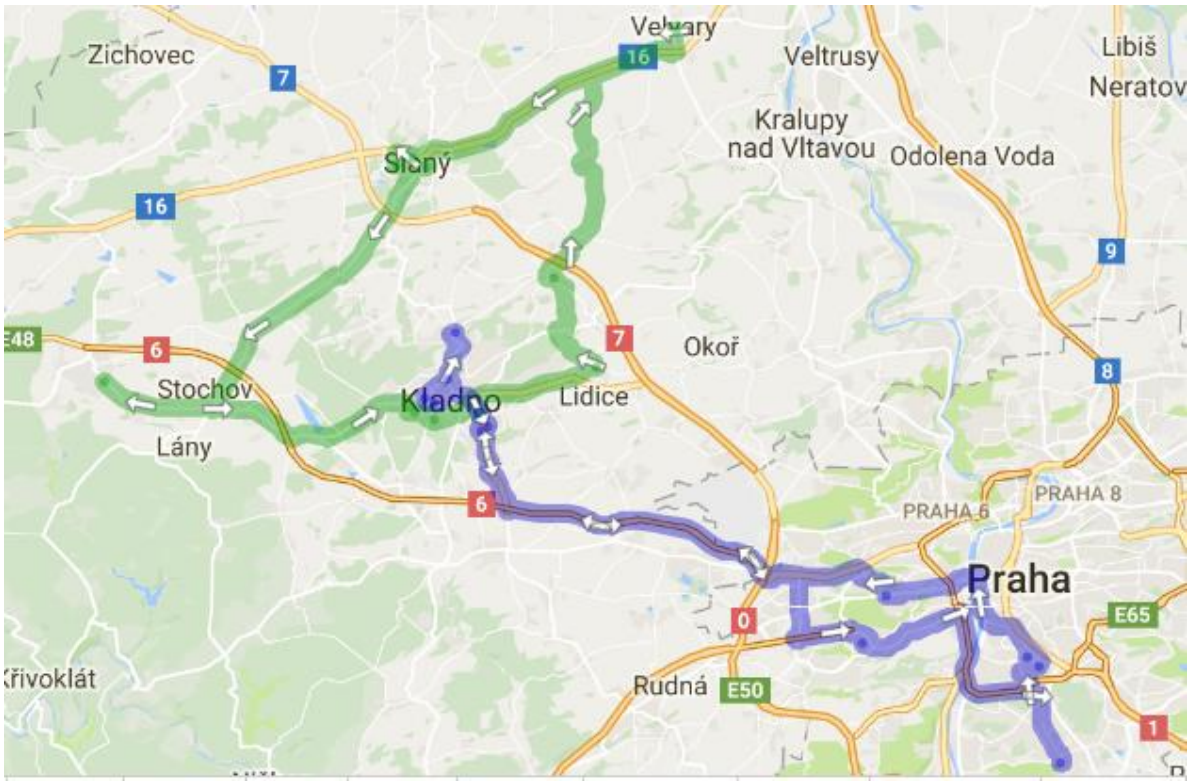
Zdroj: Route4Me

středa 20. 7. 2016

Tabulka 13: Údaje o trasách vozidel pro 20. 7. 2016 (Route4Me)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z15, Z3, Z5, Z23, Z13, Z10, Z21, Z18, Z2, Z12	81,48	214
vozidlo II.	Z20, Z22, Z6, Z19, Z9, Z8, Z24, Z11, Z1, Z4, Z7	91,88	224
celkem		173,36	438

Zdroj: Route4Me



Obrázek 18: Údaje o trasách vozidel pro 20. 7. 2016 (Route4Me)

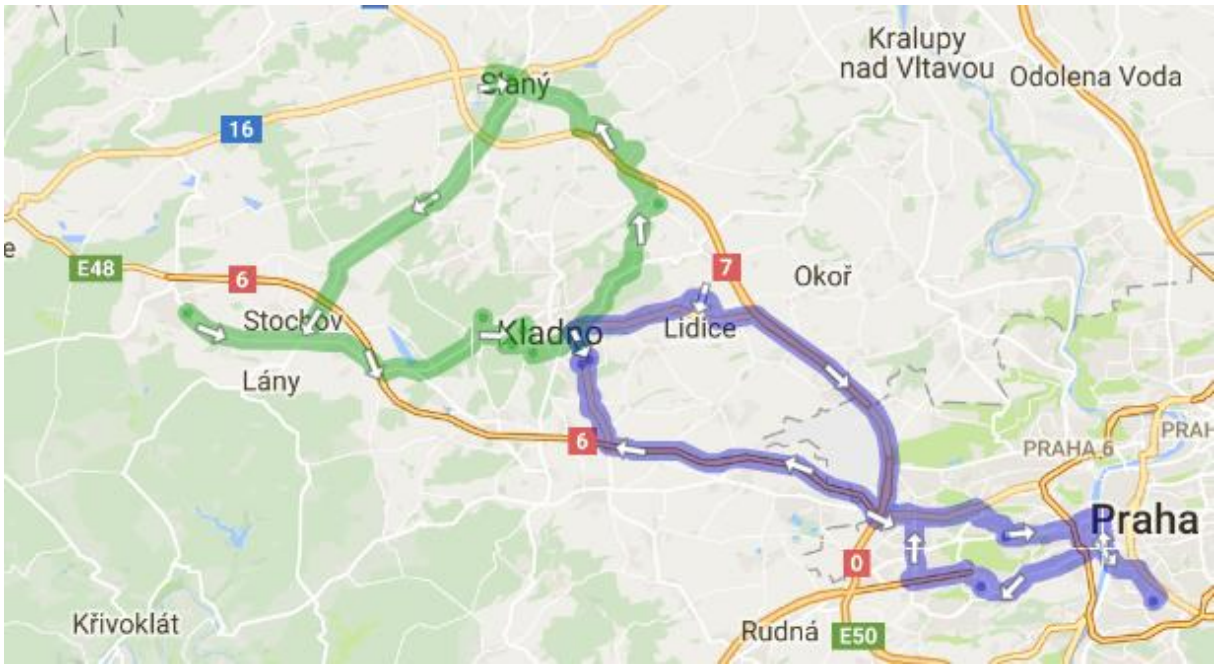
Zdroj: Route4Me

čtvrtek 21. 7. 2016

Tabulka 14: Údaje o trasách vozidel pro 21. 7. 2016 (Route4Me)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z3, Z23, Z13, Z17, Z21, Z14, Z18, Z2, Z1, Z12	60,59	195
vozidlo II.	Z15, Z8, Z9, Z22, Z20, Z24	74,51	151
celkem		135,10	346

Zdroj: Route4Me



Obrázek 19: Trasy vozidel pro 21. 7. 2016 (Route4Me)

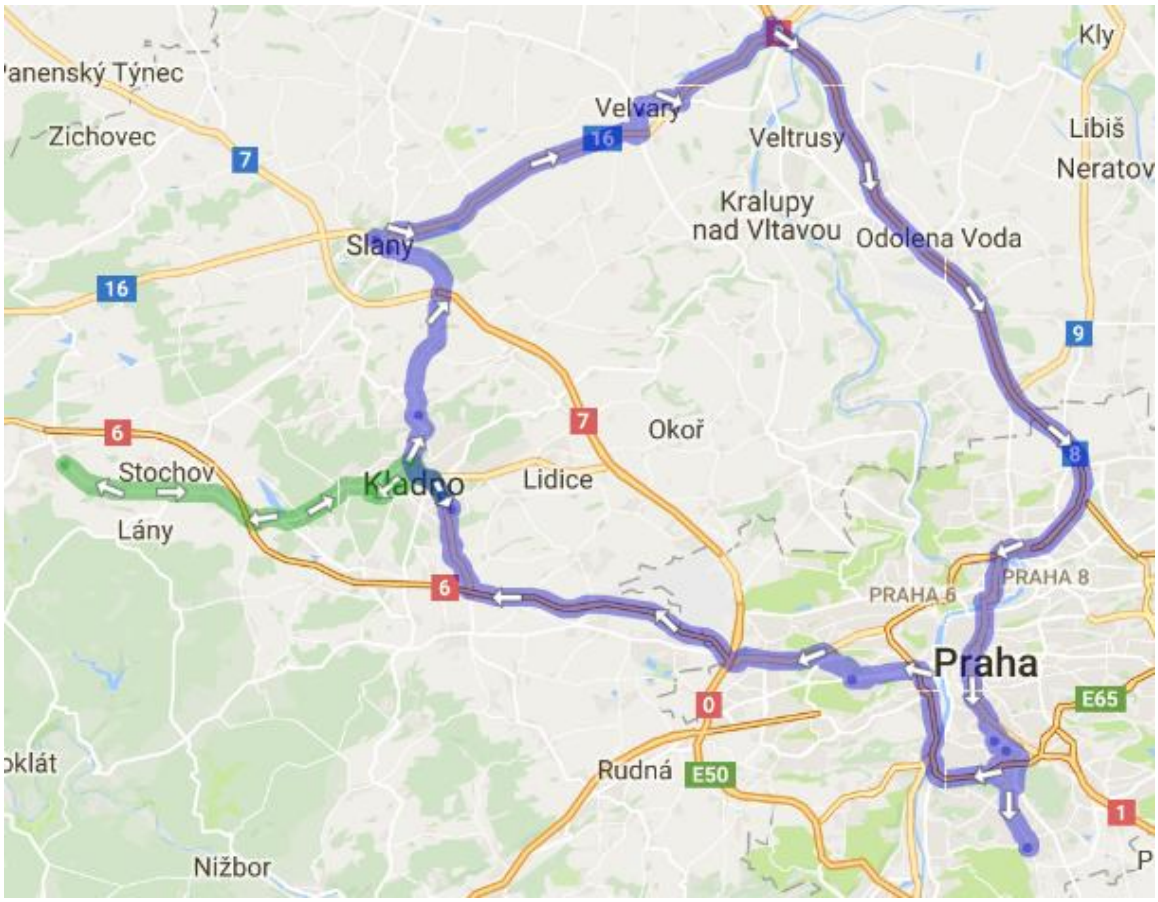
Zdroj: Route4Me

pátek 22. 7. 2016

Tabulka 15: Údaje o trasách vozidel pro 22. 7. 2016 (Route4Me)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z11, Z2, Z18, Z21, Z1, Z7	37,19	114
vozidlo II.	Z4, Z10, Z23, Z5, Z9, Z19, Z6, Z8, Z24	118,88	227
celkem		156,07	341

Zdroj: Route4Me



Obrázek 20: Trasy vozidel pro 22. 7. 2016 (Route4Me)

Zdroj: Route4Me

6.2 Řešení pomocí VRP Spreadsheet Solver

6.2.1 Informace o software

VRP Spreadsheet Solver je vytvořen v prostředí Microsoft Excel. Jedná se o práci tureckého matematika a informatika Gunese Erdogana, který působí na University of Bath ve Velké Británii. Tento software využívá algoritmus *Large neighborhood search*.

Na jednotlivých listech dokumentu uživatel zadává základní vstupní údaje. Tyto listy jsou mezi sebou propojeny a sdílejí informace. Finální řešení potom zohledňuje informace ze všech listů.

Je možné si úlohu nastavit podle vlastních podmínek. Uživatel si pro každého zákazníka může nastavit čas, který je potřebný pro jeho obsloužení a také zvolit, jestli má být zákazník navštíven *(Must be visited)* nebo jestli se v této variantě daný zákazník navštěvovat nebude *(Don't visit)*. Tato možnost umožňuje rychlé nastavování úlohy v případě, že se požadavky zákazníků v jednotlivých dnech liší. Je také možné nastavit si časové okno *(Time window start, Time window end)* pro jednotlivé zákazníky. Základní nastavení úlohy je na Obrázku 21.

Location ID	Name	Address	Latitude (y)	Longitude (x)	Time window start	Time window end	Must be visited?	Service time
0	Depot	Letecká 1459, Kladno	50,1375600	14,1232300	00:00	23:59	Starting location	0:00
1	Customer 1	K nemocnici 2814, Kladno	50,1436876	14,0932800	00:00	23:59	Must be visited	0:10
2	Customer 2	Sportovců 2311, Kladno	50,1375630	14,0859713	00:00	23:59	Must be visited	0:10
3	Customer 3	Slánská 169, Brandýsek	50,1873325	14,1669463	00:00	23:59	Don't visit	0:10
4	Customer 4	Bohumila Kouby 1165, Kladno	50,1669092	14,1089429	00:00	23:59	Must be visited	0:10
5	Customer 5	Petra Bezruče 344, Velvary	50,2796088	14,2382325	00:00	23:59	Must be visited	0:10
6	Customer 6	Meteorologická 21, Praha Libuš	50,0062103	14,4616807	00:00	23:59	Must be visited	0:10
7	Customer 7	Josefa Hoffmanna 1515, Kladno	50,1492463	14,1055650	00:00	23:59	Must be visited	0:10
8	Customer 8	V Břízkách 7, Praha 5	50,0682427	14,3607756	00:00	23:59	Must be visited	0:10
9	Customer 9	Za Zelenou liškou 953, Praha 4	50,0458425	14,4425749	00:00	23:59	Must be visited	0:10
10	Customer 10	Pražská 752, Slaný	50,2290826	14,0923050	00:00	23:59	Must be visited	0:10
11	Customer 11	Fibichova 1800, Kladno	50,1408326	14,0965300	00:00	23:59	Must be visited	0:10
12	Customer 12	Plzeňská 3103, Kladno	50,1345963	14,0973363	00:00	23:59	Don't visit	0:10
13	Customer 13	Vikova 512, Slaný	50,2292866	14,0742801	00:00	23:59	Don't visit	0:10
14	Customer 14	Vašíčkova 3081, Kladno	50,1468826	14,0698910	00:00	23:59	Don't visit	0:10

Obrázek 21: Zadání úlohy ve VRP Spreadsheet Solver

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver

Výsledné řešení dává VRP Spreadsheet Solver ve dvou podobách – vizualizaci a rozpisu tras jednotlivých vozidel. Příklad řešení je na Obrázku 22.

Vehicle:	V1	Stops:	7	Net profit:	-94,66	
Stop count	Location name	Distance travelled	Driving time	Arrival time	Departure time	Working time
0	Depot	0,00	0:00		08:00	0:00
1	Customer 7	2,16	0:06	08:06	08:16	0:16
2	Customer 24	5,74	0:14	08:24	08:34	0:34
3	Customer 19	43,19	0:50	09:10	09:20	1:20
4	Customer 9	44,14	0:54	09:24	09:34	1:34
5	Customer 6	49,87	1:08	09:48	09:58	1:58
6	Customer 8	64,87	1:34	10:24	10:34	2:34
7	Depot	94,66	2:08	11:08		3:08

Obrázek 22: Řešení úlohy ve VRP Spreadsheet Solver

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver

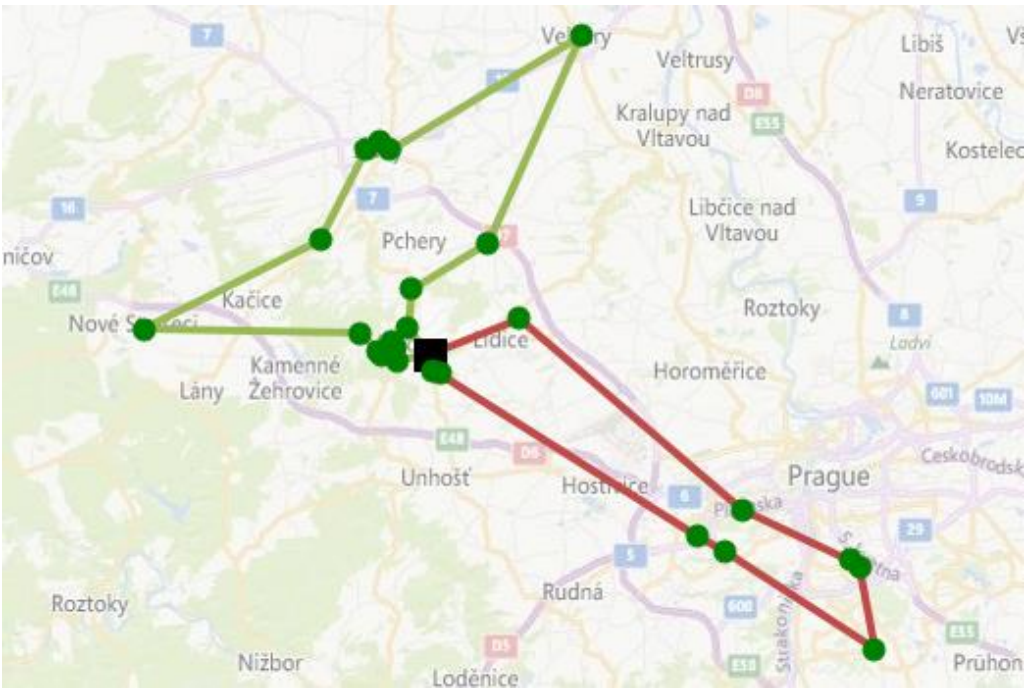
6.2.2 **Řešení pro všechny požadavky**

Stejně jako v předchozí metodě řešení bylo i v tomto případě prvním krokem určení tras vozidel pro případ obsluhy všech smluvních zařízení ve stejný den. Po zkušenostech z předchozího řešení již nebyla uvažována varianta se třemi, ale pouze se dvěma vozidly. Údaje o trasách jsou uvedeny v Tabulce 16 a trasy jsou vykresleny na Obrázku 23.

Tabulka 16: Údaje o trasách vozidel pro všechny požadavky (VRP Spreadsheet Solver)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z20, Z24, Z16, Z22, Z6, Z19, Z9, Z8, Z15	92,50	230
vozidlo II.	Z7, Z4, Z3, Z5, Z10, Z23, Z13, Z17, Z21, Z14, Z18, Z2, Z11, Z1, Z12	82,00	281
celkem		174,50	511

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver



Obrázek 23: Trasy vozidel pro všechny požadavky (VRP Spreadsheet Solver)

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver

6.2.3 Řešení pro požadavky v analyzovaném týdnu

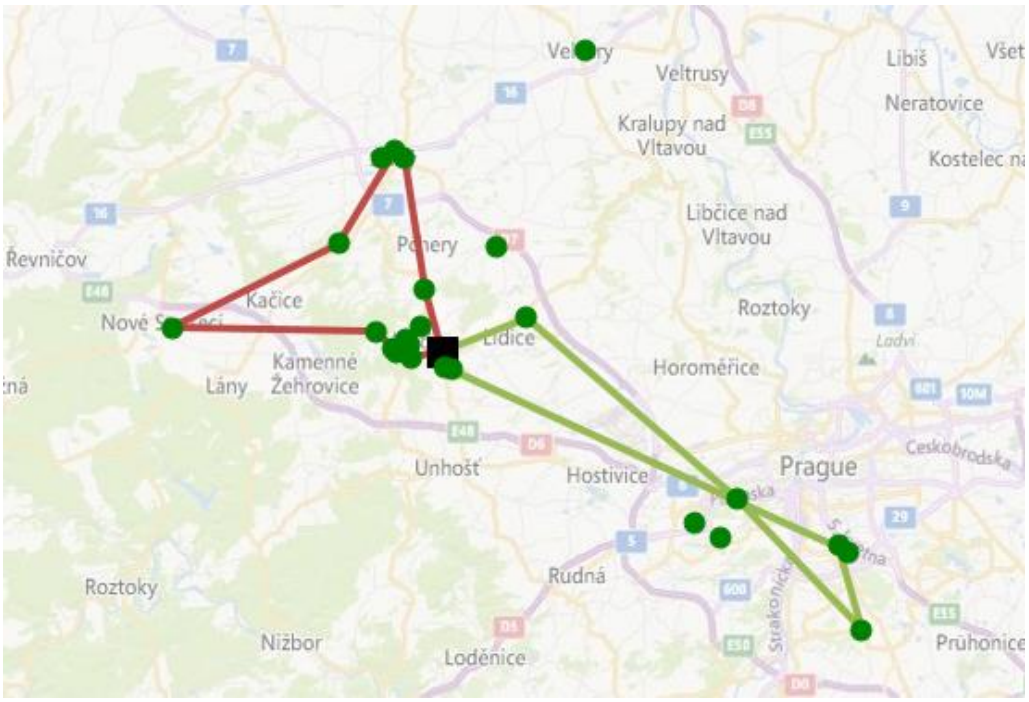
U zákazníků, kteří v daných dnech nebyli obsluhováni, byla zvolena možnost *„Don't visit"* a do tras vozidel tedy nejsou zahrnuti. Údaje o trasách vozidel pro jednotlivé dny jsou v Tabulkách 17 – 21 a tyto trasy jsou znázorněny na Obrázcích 24 – 28.

pondělí 18. 7. 2016

Tabulka 17: Údaje o trasách vozidel pro 18. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z4, Z10, Z23, Z17, Z21, Z14, Z18, Z2, Z11, Z1, Z12	55,90	206
vozidlo II.	Z20, Z19, Z9, Z6, Z8, Z15	93,60	182
celkem		149,50	388

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver



Obrázek 24: Trasy vozidel pro 18. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

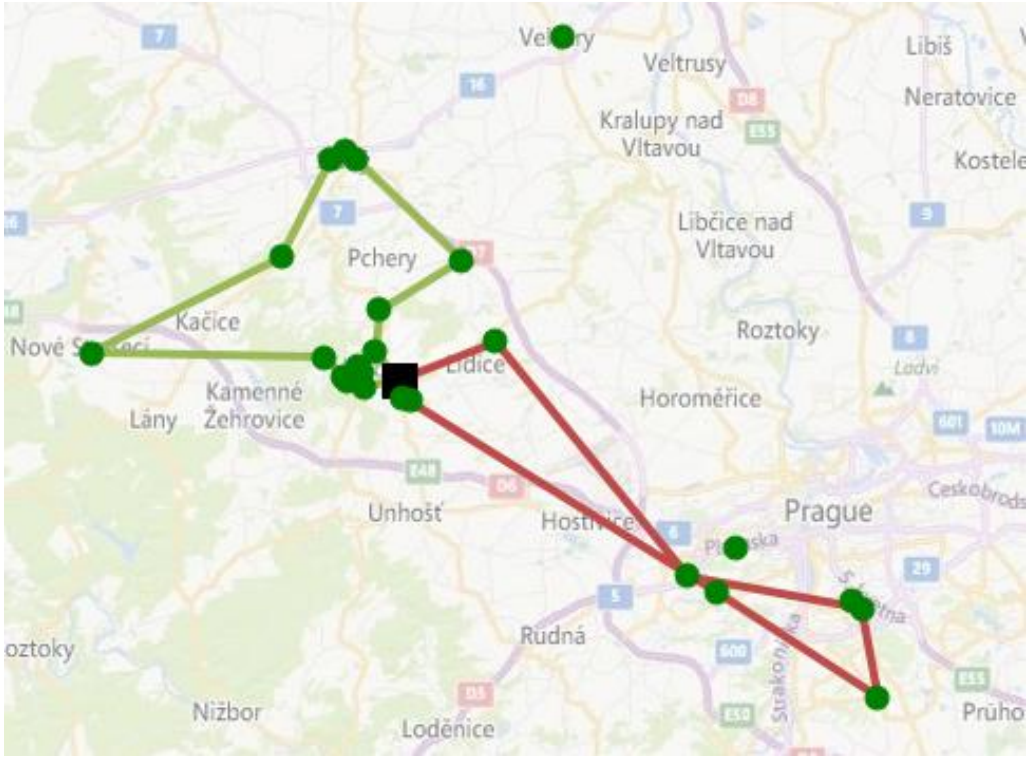
Zdroj: VRP Spreadsheet Solver

úterý 19. 7. 2016

Tabulka 18: Údaje o trasách vozidel pro 19. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z20, Z24, Z22, Z6, Z19, Z16, Z15	91,30	197
vozidlo II.	Z7, Z4, Z3, Z23, Z13, Z17, Z21, Z14, Z2, Z18, Z1, Z12	63,40	228
celkem		154,70	425

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver



Obrázek 25: Trasy vozidel pro 19. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

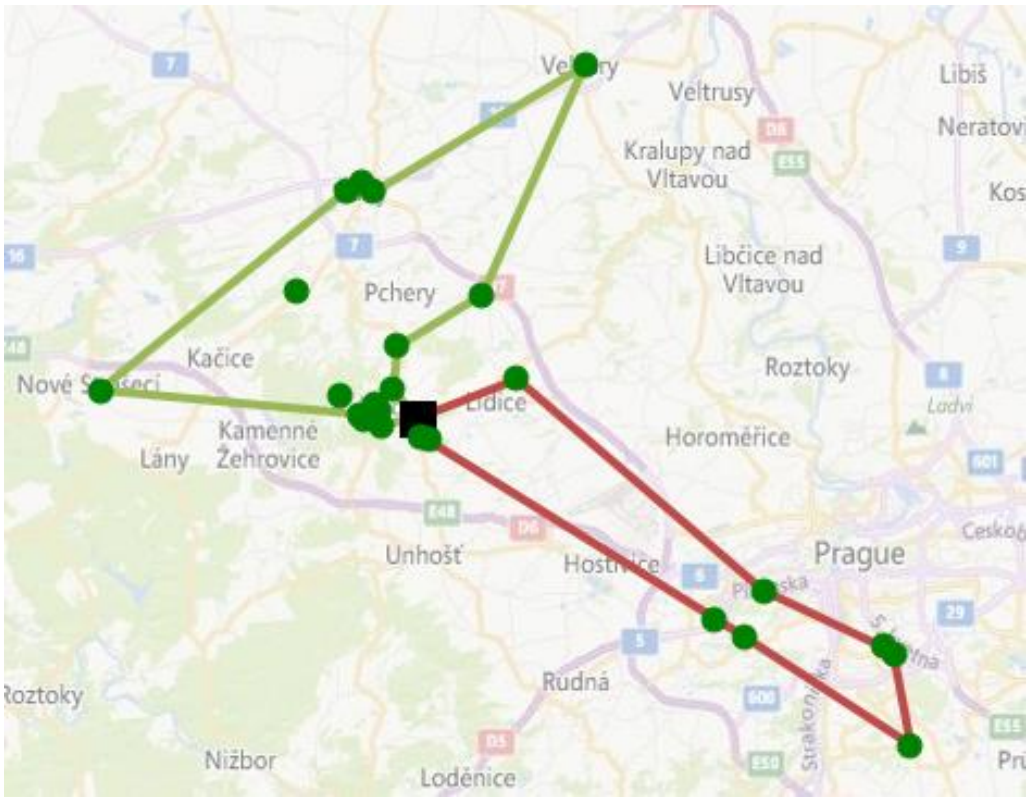
Zdroj: VRP Spreadsheet Solver

středa 20. 7. 2016

Tabulka 19: Údaje o trasách vozidel pro 20. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z20, Z24, Z22, Z6, Z19, Z9, Z8, Z15	92,50	214
vozidlo II.	Z7, Z4, Z3, Z5, Z10 Z23, Z13 Z21, Z18, Z2, Z11, Z1, Z12	80,60	256
celkem		173,10	470

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver



Obrázek 26: Údaje o trasách vozidel pro 20. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

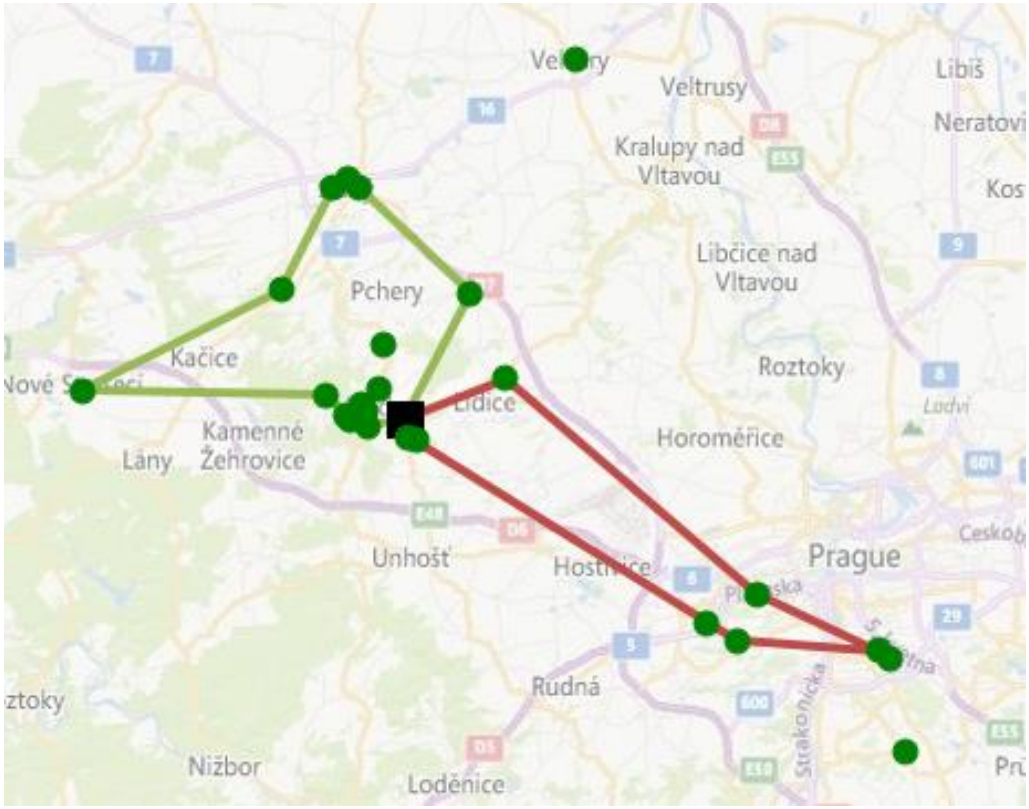
Zdroj: VRP Spreadsheet Solver

čtvrtek 21. 7. 2016

Tabulka 20: Údaje o trasách vozidel pro 21. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z20, Z24, Z22, Z9, Z8, Z15	83,90	175
vozidlo II.	Z3, Z23, Z17, Z21, Z14, Z2, Z18, Z1, Z12	61,50	204
celkem		145,40	379

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver



Obrázek 27: Trasy vozidel pro 21. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

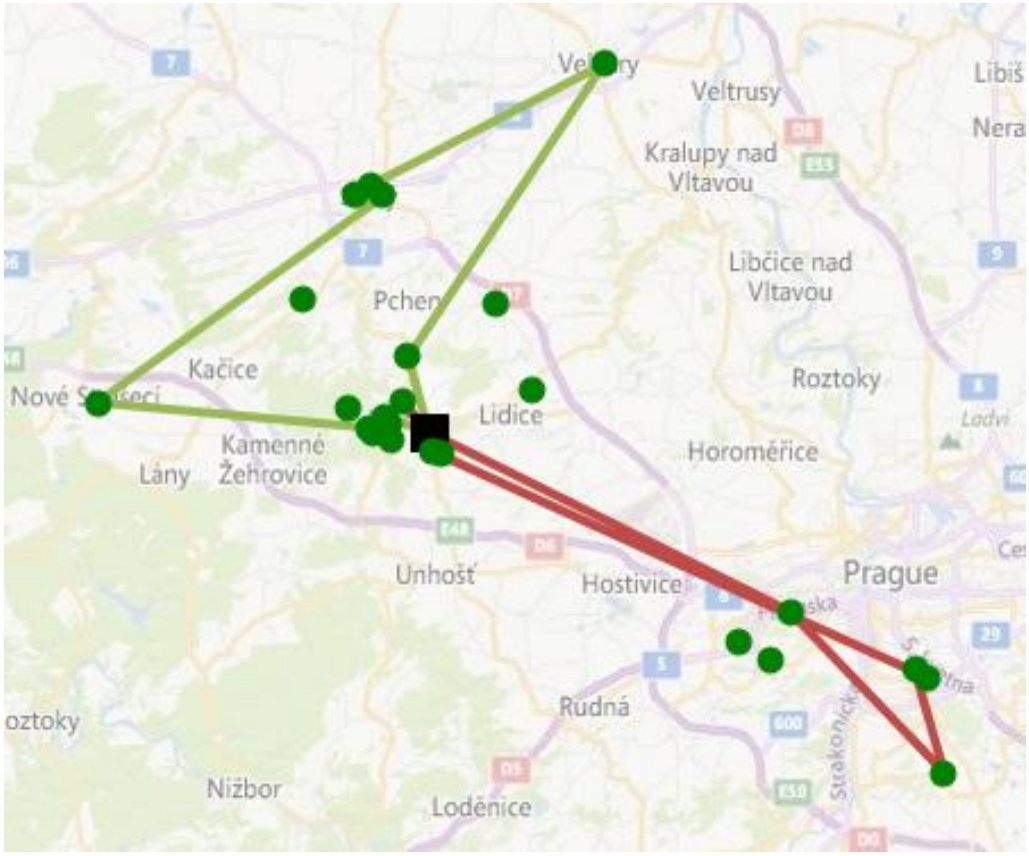
Zdroj: VRP Spreadsheet Solver

pátek 22. 7. 2016

Tabulka 21: Údaje o trasách vozidel pro 22. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

	trasa	**délka [km]**	**čas [min]**
vozidlo I.	Z7, Z24, Z19, Z9, Z6, Z8	94,70	188
vozidlo II.	Z4, Z5, Z23, Z10, Z21, Z18, Z2, Z11, Z1	78,80	205
celkem		173,50	393

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver



Obrázek 28: Trasy vozidel pro 22. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Zdroj: VRP Spreadsheet Solver

7 Analýza výsledků a návrh změn

Úloha byla řešena dvěma různými softwary. V prvním případě se jedná o software, který je uživatelsky velmi nenáročný a je dostupný široké veřejnosti. Druhý software byl vytvořen na univerzitě a není určen pro komerční použití. Pro jeho používání je nutné, aby byl uživatel poučen o problematice a jeho ovládání je tedy nepatrně náročnější.

7.1 Přehled výsledků a vyčíslení možných finančních úspor

Výsledky těchto dvou způsobů řešení jsou uvedeny v Tabulce 22 a v Tabulce 23 a jsou porovnány s údaji o skutečném provozu ve sledovaném týdnu. Pro přehlednost jsou také uvedeny procentuální rozdíly mezi daným řešením a údaji z analýzy reálného provozu. Úspora ujetých kilometrů se pohybuje až okolo 40 %, časová úspora je o něco nižší.

Tabulka 22: Výsledky řešení a přehled úspor oproti reálnému provozu – km

	reálný provoz	**Route4Me**		**VRP Spreadsheet S.**	
	počet km	počet km	úspora km %	počet km	úspora km %
obecné řešení		184,5		174,5	
18. 7.	227,9	136,2	- 40 %	149,5	- 34 %
19. 7.	254,1	161,3	- 37 %	154,7	- 39 %
20. 7.	293,6	173,4	- 41 %	173,1	- 41 %
21. 7.	231,2	135,1	- 42 %	145,4	- 37 %
22. 7.	242,9	156,1	- 36 %	173,5	- 29 %
sledovaný týden	1249,7	762,1	- 39 %	796,2	- 36 %

Zdroj: vlastní zpracování na základě výsledků z Route4Me, VRP Spreadsheet Solver

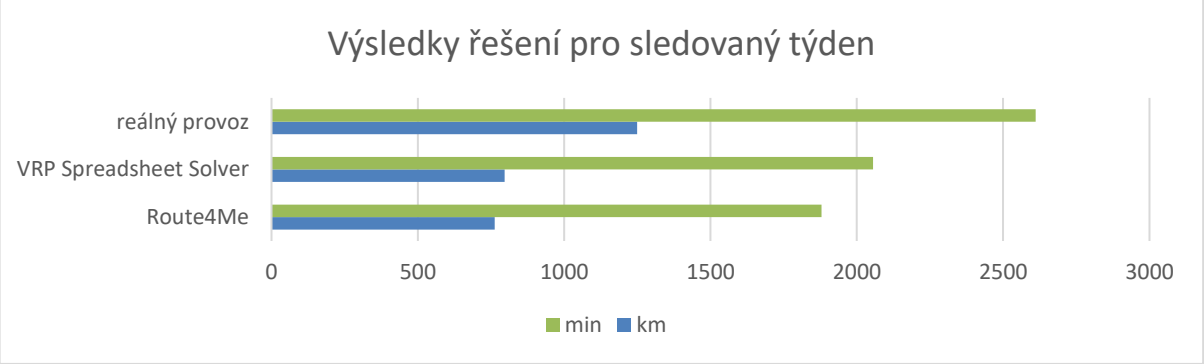
Tabulka 23: Výsledky řešení a přehled úspor oproti reálnému provozu – min

	reálný provoz	**Route4Me**		**VRP Spreadsheet S.**	
	min	počet min	úspora min %	počet min	úspora min %
obecné řešení		483		511	
18. 7.	468	352	- 25 %	388	- 17 %
19. 7.	528	402	- 24 %	425	- 20 %
20. 7.	617	438	- 29 %	470	- 24 %
21. 7.	546	346	- 37 %	379	- 31 %
22. 7.	452	341	- 25 %	393	- 13 %
sledovaný týden	2611	1879	- 28 %	2055	- 21 %

Zdroj: vlastní zpracování na základě výsledků z Route4Me, VRP Spreadsheet Solver

Oba způsoby řešení dávají velmi dobré výsledky. Používají však metaheuristické algoritmy a z tohoto důvodu nejsou výsledky řešení shodné. Je zjevné, že výsledek řešení pro sledovaný týden softwarem VRP Spreadsheet Solver je nepatrně horší než řešení softwarem Route4Me. Výsledky řešení obou softwarů je ale výrazně lepší než výsledky, které byly zaznamenány ve sledovaném týdnu.

Na Obrázku 29 jsou výsledky řešení znázorněny na pruhovém grafu. Je patrné, že v obou způsobech řešení došlo k výraznému zlepšení. Délky tras v obou řešeních jsou téměř stejné, významněji se potom liší doby jízd. To může být způsobeno individuálním nastavením rychlostí vozidel v daných softwarech. Doby jízdy jsou však ovlivněny provozem na komunikacích a způsobem jízdy řidiče, a proto je v tomto ohledu můžeme považovat spíše za orientační.



Obrázek 29: Graf s výsledky řešení pro sledovaný týden

Zdroj: vlastní zpracování na základě výsledků z Route4Me, VRP Spreadsheet Solver

V Tabulce 24 jsou uvedeny rozdíly mezi délkami tras vypočtených softwary a délkami tras z reálného provozu.

Tabulka 24: Přehled možných úspor při aplikaci řešení

	Route4Me	**VRP Spreadsheet Solver**
kilometrická úspora ročně	25 355,2 km	23 582,0 km
časová úspora ročně	634,4 hod	483,6 hod

Zdroj: vlastní zpracování na základě výsledků z Route4Me, VRP Spreadsheet Solver

Pro názornější prezentaci úspěšnosti tohoto řešení můžeme tyto úspory vyjádřit také finančně. V Tabulce 25 jsou uvedeny hodnoty, které poslouží pro orientační kalkulaci těchto úspor.

Tabulka 25: Souhrn nákladů

průměrná spotřeba pohonných hmot	7 l / 100 km
cena pohonných hmot	32 Kč / l
mzda řidiče	80 Kč / hod
sociální pojištění řidiče	26 %
zdravotní pojištění řidiče	9 %

Zdroj informací: Zubní laboratoř Blanky Veverové

Jelikož je podrobná kalkulace nákladů v dopravě nad rámec této práce, je uvedena pouze velmi zjednodušená varianta, která zahrnuje nejvýznamnější položky nákladové kalkulace, tedy náklady na pohonné hmoty a mzdové náklady. Vzhledem ke stáří vozidel, která jsou pro účely dopravy v zubní laboratoři používána, není uvedena položka odpisů, která obecně bývá také velmi významná. Do kalkulace je také zahrnuta přibližná částka, kterou by laboratoř mohla ušetřit po propuštění jednoho z řidičů. Orientační kalkulace úspor je uvedena v Tabulce 26.

Tabulka 26: Zjednodušená kalkulace finančních úspor

	Route4Me	**VRP Spreadsheet Solver**
náklady na pohonné hmoty	56 795,6 Kč	52 823,7 Kč
mzdové náklady	50 752,0 Kč	38 688,0 Kč
mzdové náklady (propuštění řidiče)	15 000,0 Kč	15 000,0 Kč
zdravotní pojištění	13 195,5 Kč	10 058,9 Kč
sociální pojištění	4 567,7 Kč	3 481,9 Kč
celkem	**140 310,8 Kč**	**120 052,5 Kč**

Zdroj: vlastní zpracování

7.2 Návrh změn v organizaci dopravy

Z předchozí části plyne, že výběr vhodných tras by mohl pro zubní laboratoř přinést poměrně velké finanční úspory. Je ale zřejmé, že pro skutečné úspory v reálném provozu laboratoře je nutné provést několik změn, které zjednoduší organizaci dopravy.

Nejdůležitějším krokem je zlepšení komunikace se zubními lékaři. Je nutné zavést pravidelné časy, ve kterých budou zubní lékaři navštěvováni. Zubní lékař tedy bude vědět, kdy přesně k němu bude řidič pravidelně dojíždět a tomu musí přizpůsobit objednávání svých pacientů. Je nevýhodné, nesystémové a neefektivní, aby byl jeden zubní lékař obsluhován několikrát denně.

Základem by mělo být přijímání objednávek vždy do určité doby (ideálně den předem, případně také do 9:00 hodin ráno). Zubní lékař by tedy dal telefonicky vědět zubní laboratoři, jestli pro ni má v tento den nějakou zakázku. Pokud by ani zubní laboratoř neměla žádný výrobek, který by v tento den potřebovala zubnímu lékaři doručit, není nutné tohoto zubního lékaře navštěvovat.

Po uzavření objednávek jsou zřejmá místa, která je nutné v daný den obsloužit. Pro výhodné trasování je vhodné využít softwarové řešení. V případě použití programu Route4Me je ovládání velmi jednoduché a rychlé. Pokud ale zubní laboratoř nechce investovat finanční prostředky do nákupu licence pro používání tohoto software, je možné využít trasy obecného řešení pro všechny požadavky, které jsou uvedené a zobrazené v této práci. V případě, že nebude některé místo vyžadovat obsluhu, je možné trasu upravit pouhým vyloučením místa z této trasy. Toto řešení pravděpodobně nebude optimální, ale bude dostatečně výhodné, velmi rychlé a nebude vyžadovat investici do software.

8 Závěr

Hlavním cílem této práce byla analýza organizace dopravy v zubní laboratoři Blanky Veverové a návrh distribučních tras včetně doporučení a opatření, která by měla být pro zlepšení dopravy provedena.

V první části práce jsem charakterizoval fungování zubní laboratoře a také jsem uvedl důvody, proč je pro zubní laboratoř doprava významná a z jakého důvodu je nutné, aby byly hotové i rozpracované výrobky přepravovány v co nejkratším čase a bez zbytečných odkladů.

Dále jsem se věnoval současnému stavu organizace dopravy. Ten je dlouhodobě nevyhovující zejména kvůli velkému chaosu a neustálým objednávkám přicházejícím od zubních lékařů. Mimo jiné jsem provedl analýzu současného stavu, kdy jsem se na jeden týden stal jedním z řidičů a zapisoval si detaily o trasách jednotlivých vozidel. Na těchto informacích jsem zakládal další výpočty a také jsem tento týden považoval za referenční při porovnávání s trasami navrženými v další části této práce.

V teoretické části této práce se věnuji zejména základům teorie grafů a také charakteristikou některých algoritmů a rozdílů mezi nimi.

Praktická část obsahuje návrhy tras pro obecné zadání – tedy pro obsluhu všech zubních lékařů, se kterými tato zubní laboratoř spolupracuje. Kromě toho jsem navrhl trasy pro jednotlivé dny v analyzovaném týdnu. Tyto trasy tedy obsahují pouze ta místa, která byla ve sledovaném týdnu opravdu navštívena.

Návrhy těchto tras byly provedeny v internetové aplikaci Route4Me a také v dostupném modelu VRP Spreadsheet Solver, který je navržen v prostředí Microsoft Excel. Oba tyto softwary dávaly velmi podobná řešení. Vzhledem k tomu, že tyto softwary používají metaheuristické algoritmy, nebyla řešení stejná.

Zajímavým poznatkem bylo to, že pro obsluhu navržených tras pokaždé postačila pouze dvě vozidla. Jedná se o významnou úsporu, neboť současně jsou pro distribuci výrobků využívána tři vozidla.

Poskytnutá řešení jsou oproti údajům z analyzovaného týdne mnohem výhodnější. Z hlediska délky tras se úspora pohybuje až okolo 40 %. Časové úspory jsou o něco nižší, ale stále znatelné. Při aplikaci tras ze softwaru Route4Me pro analyzovaný týden by kilometrická úspora byla 39 % a časová úspora 28 %.

Na základě délek navržených tras jsem vypočítal možné roční finanční úspory, které by mohly dosáhnout až přibližně 140 000 Kč. Tyto výsledky jsem konzultoval s majiteli zubní laboratoře.

Ti jsou se současným obecným hospodářským výsledkem činnosti laboratoře spokojeni, ale uznávají, že zlepšení organizace dopravy by vedlo nejen ke snížení nákladů, ale také ke zlepšení nálady ve firmě, která bývá neuspořádaností distribuce často ovlivněna.

Zubní laboratoři jsem navrhl změny v organizaci, které by mohly vést k zefektivnění dopravy. Nejzásadnější je v tomto smyslu komunikace se zubními lékaři, kteří musí zubní laboratoř o všem včas informovat. Bylo by také vhodné zavést pravidelné časy, ve kterých budou zubní lékaři navštěvováni. Na základě těchto časů mohou zubní lékaři vhodně objednávat své pacienty.

Věřím, že navržená opatření a změny budou v zubní laboratoři implementovány a povedou ke zvýšení efektivity. Také doufám, že veškeré poznatky získané při tvorbě této bakalářské práce využiji i ve své další práci a budoucím studiu.

Seznam použité literatury

Monografie a akademické práce

[1] PAICHL, Přemysl. *Dějiny zubní medicíny*. Praha: Nuga, 2000. ISBN 80-85903-12-1.

[2] VOLEK, Josef a Bohdan LINDA. *Teorie grafů - aplikace v dopravě a veřejné správě*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2012. ISBN 978-80-7395-225-9.

[3] PASTOR, Otto a Antonín TUZAR. *Teorie dopravních systémů*. Praha: ASPI, 2007. ISBN 978-80-7357-285-3.

[4] MOCKOVÁ, Denisa. *Základy teorie dopravy: úlohy*. V Praze: Nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 9788001037911.

[5] MAŇAS, Miroslav. *Optimalizační metody pro podnik, finance a trh*. 3. přepr. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1997. ISBN 80-7079-284-1.

[6] TALBI, El-Ghazali. *Metaheuristics: from design to implementation*. Hoboken, N.J.: John Wiley, 2009. ISBN 978-0-470-27858-1.

[7] PEARL, Judea. *Heuristics: intelligent search strategies for computer problem solving*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., 1984. ISBN 0-201-05594-5.

[8] ZÍSKAL, Jan, Martina BERÁNKOVÁ a Milan HOUŠKA. *Lineární programování I*. V Praze: Česká zemědělská univerzita, Provozně ekonomická fakulta, 2005. ISBN 80-213-1313-7.

[9] TOLGA, Bektas. *The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures*. Ankara: Department of Industrial Engineering, Baskent University, 2005.

[10] PISINGER, David; RØPKE, Stefan. *Large Neighborhood Search.* Kodaň: Technical University of Denmark, 2010.

Internetové zdroje

[11] ŽOLTÁ, Lucie. *Složitost algoritmů* [online]. [cit. 2017-06-12]. Dostupné z: http://lucie.zolta.cz/index.php/zaklady-teoreticke-informatiky/15-turingovy-a-ram-stroje/15-slozitost-algoritmu

Seznam obrázků

Obrázek 4: Mapa obsluhovaného území

Obrázek 5: Mapa obsluhovaného území – Nové Strašecí a okres Kladno

Obrázek 6: Mapa obsluhovaného území – Praha

Obrázek 4: Diagram četností zakázek v dubnu 2016

Obrázek 5: Rozdíly mezi ujetými vzdálenostmi pro jednotlivá vozidla

Obrázek 6: Rozdíly mezi časy strávenými na trasách pro jednotlivá vozidla

Obrázek 7: Neorientovaný multigraf

Obrázek 8: Orientovaný graf

Obrázek 9: Časová náročnost úloh

Obrázek 10: Podstata Clarkova-Wrightova algoritmu

Obrázek 11: Nastavení úlohy pro uspokojení všech požadavků

Obrázek 12: Trasa prvního vozidla (Route4Me, 3 vozidla)

Obrázek 13: Trasa druhého vozidla (Route4Me, 3 vozidla)

Obrázek 14: Trasa třetího vozidla (Route4Me, 3 vozidla)

Obrázek 15: Trasy vozidel pro všechny požadavky (Route4Me, 2 vozidla)

Obrázek 16: Trasy vozidel pro 18. 7. 2016 (Route4Me)

Obrázek 17: Trasy vozidel pro 19. 7. 2016 (Route4Me)

Obrázek 18: Údaje o trasách vozidel pro 20. 7. 2016 (Route4Me)

Obrázek 19: Trasy vozidel pro 21. 7. 2016 (Route4Me)

Obrázek 20: Trasy vozidel pro 22. 7. 2016 (Route4Me)

Obrázek 21: Zadání úlohy ve VRP Spreadsheet Solver

Obrázek 22: Řešení úlohy ve VRP Spreadsheet Solver

Obrázek 23: Trasy vozidel pro všechny požadavky (VRP Spreadsheet Solver)

Obrázek 24: Trasy vozidel pro 18. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Obrázek 25: Trasy vozidel pro 19. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Obrázek 26: Údaje o trasách vozidel pro 20. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Obrázek 27: Trasy vozidel pro 21. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Obrázek 28: Trasy vozidel pro 22. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Obrázek 29: Graf s výsledky řešení pro sledovaný týden

Seznam tabulek

Tabulka 1: Seznam zařízení spolupracujících se Zubní laboratoří Blanky Veverové

Tabulka 2: Distanční matice [km] – zubní laboratoř a jednotlivá zařízení

Tabulka 3: Časová matice [min] – zubní laboratoř a jednotlivá zařízení

Tabulka 4: Četnost zakázek jednotlivých zařízení

Tabulka 5: Technické údaje o vozidlech

Tabulka 6: Počet ujetých kilometrů ve sledovaných dnech

Tabulka 7: Doby strávené na trasách ve sledovaných dnech

Tabulka 8: Údaje o trasách vozidel – 3 vozidla (Route4Me)

Tabulka 9: Údaje o trasách vozidel – 2 vozidla (Route4Me)

Tabulka 10: Přehled požadavků v analyzovaném týdnu

Tabulka 11: Údaje o trasách vozidel pro 18. 7. 2016 (Route4Me)

Tabulka 12: Údaje o trasách vozidel pro 19. 7. 2016 (Route4Me)

Tabulka 13: Údaje o trasách vozidel pro 20. 7. 2016 (Route4Me)

Tabulka 14: Údaje o trasách vozidel pro 21. 7. 2016 (Route4Me)

Tabulka 15: Údaje o trasách vozidel pro 22. 7. 2016 (Route4Me)

Tabulka 16: Údaje o trasách vozidel pro všechny požadavky (VRP Spreadsheet Solver)

Tabulka 17: Údaje o trasách vozidel pro 18. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Tabulka 18: Údaje o trasách vozidel pro 19. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Tabulka 19: Údaje o trasách vozidel pro 20. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Tabulka 20: Údaje o trasách vozidel pro 21. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Tabulka 21: Údaje o trasách vozidel pro 22. 7. 2016 (VRP Spreadsheet Solver)

Tabulka 22: Výsledky řešení a přehled úspor oproti reálnému provozu – km

Tabulka 23: Výsledky řešení a přehled úspor oproti reálnému provozu – min

Tabulka 24: Přehled možných úspor při aplikaci řešení

Tabulka 25: Souhrn nákladů

Tabulka 26: Zjednodušená kalkulace finančních úspor