

Český vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Matouš Machka

Simulace transsonického proudění s rázovou vlnou

12101 – Ústav technické matematiky

Vedoucí bakalářské práci: doc. Ing. Jan Halama, PH.D.

Studijní program: Teoretický základ strojího inženýrství

Praha 2016/2017

Prohlášení o autorství

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že České vysoké učení technické v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V _____ dne _____

Podpis autora

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Machka** Jméno: **Matouš** Osobní číslo: **437707**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Simulace transsonického proudění s rázovou vlnou

Název bakalářské práce anglicky:

Simulation of transonic flow with shock wave

Pokyny pro vypracování:

1. Popis matematického modelu 1D proudění stlačitelného ideálního plynu v dýze s proměnným průřezem.
2. Popis a naprogramování vhodné numerické metody.
3. Simulace proudění ve vybraných případech (rázová trubice, Lavalova dýza).
4. Návrh změny diskretizace pro přesnější zachycení rázové vlny.
5. Vhodná prezentace a rozbor získaných výsledků.

Seznam doporučené literatury:

- [1] K. Kozel, J. Fürst: Numerické řešení problémů proudění I, skripta ČVUT, FS.
- [2] J. Fořt a kol.: Numerická simulace proudění I, skripta ČVUT, FS
- [3] Ames Research Staff: Equations, Tables and Charts for Compressible Flow, Report 1135 of the National Advisory Committee for Aeronautics, 1953.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. Ing. Jan Halama Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **10.04.2017**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2017**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Podpis vedoucí(ho) práce

Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

07.4.2017

Datum převzetí zadání

Matouš Machka

Podpis studenta

Poděkování

Děkuji doc. Ing. Janu Halamovi, Ph.D. za trpělivé a systematické vedení této práce.

Děkuji rodičům a prarodičům za podporu během mého studování.

Matouš Machka

Abstrakt

Cílem této práce je popis matematického modelu 1D proudění stlačitelného ideálního plynu v dýze s proměnným průřezem. Tato problematika je matematicky řešena pomocí speciálních numerických metod, jejichž popis je také obsahem této práce. Všechny numerické metody pro dané příklady byly naprogramovány pomocí počítačového software. Práce je zaměřena na dva typy případů a těmi jsou rázová trubice a Lavalova dýza.

Výpočet rázové trubice byl řešen pomocí metody konečných diferencí. Výsledky výpočtu byly, porovnány s analytickými hodnoty. Výpočet Lavalovy dýzy byl řešen dvěma způsoby. Metodou konečných diferencí a metodou konečných objemů. Přesnost výsledků pro Lavalovu dýzu byla porovnávána s teoretickou úvahou o chování dané tekutiny v konkrétním průřezu.

Ve výsledných grafech pro oba případy se objevovali rázové vlny. Tyto vlny znamenají rychlé a krátké skoky v grafech daných fyzikálních veličin. Tyto vlny se snažíme co nejpřesněji vykreslit. Ideální metoda pro přesné vykreslení těchto rázových vln je metoda konečných objemů. Tato metoda pracuje s nerovnoměrnou sítí určenou pro numerický výpočet. Díky této nerovnoměrnosti sítě lze udělat v konkrétních intervalech podezřelých ze vzniku rázových vln velmi hustou síť bodů pro přesnější výpočet rázových vln.

Rázové vlny, které lze vyčíst z grafu nám říkají, kde dochází k prudkým změnám například tlaku nebo rychlosti tekutiny. Tyto prudké změny mají velký vliv na ztráty a účinnost daného stroje. Rázové vlny se dají ovlivnit volbou geometrie průřezu dané dýzy, proto mají dýzy často proměnnou geometrii průřezu. Tudíž zjištění jejich výskytu a následovná práce s nimi přináší velký význam pro strojní průmysl.

Abstract

Basis of this work is description of mathematic model one dimension flowing compressible ideal gas in the tube with variable cross-section. This problem is solved with special numerical methods, which are described in the bachelor thesis too. All numerical methods used for specific examples were programmed in mathematical software. Bachelor thesis is focused on two kind of examples. The first example is called shock tube and second is called Laval's nozzle.

Computation of shock tube was solved by finite difference method. Results of computation were compared with the analytical values. Computation of Laval's nozzle was solved two ways. Finite difference method and finite volume method. Accuracy of results for Laval's nozzle was compared with theoretical idea about attributes concrete fluid in the concrete cross-section.

There were shock waves in the resulting graphs for both cases. Shock waves meaning fast and short changes in the graphs of concrete physical quantity. We try draw these shock waves as exactly as is possible. Ideal method for drawing these waves is finite volume method. This method works with irregular numerical meshes for numerical computation. We can make very dense meshes of points in the concrete intervals where is big risk of discovering shock waves by using finite volume method. Therefore results will be more accurate.

If we look to shock waves in the graphs, we will know where discovering big changes for example big changes of pressure or speed of the fluid. These changes influence losses and efficiency of specific machine. Shock waves are depended of cross-section concrete nozzle, because mostly nozzle have irregular cross-section. Discovering of shock waves and working with them is big importance for mechanical industry.

Obsah

Úvod	0
1. Vlastnosti proudění v 1D	1
1.1 Systém Eulerových rovnic v 1D.....	1
1.2 Řešení Eulerových rovnic.....	1
2. Numerické řešení proudění v 1D	5
2.1 Metoda konečných diferencí	5
2.2 Metoda konečných objemů.....	8
3. Numerické řešení proudění v rázové trubici	12
3.1 Formulace úlohy	12
3.2 Výpočet.....	13
3.3 Grafické výstupy.....	14
4. Numerické řešení proudění v Lavalově dýze pomocí metody konečných diferencí	17
4.1 Formulace úlohy	17
4.2 Výpočet.....	17
4.3 Grafické výstupy.....	20
5. Numerické řešení proudění v Lavalově dýze pomocí metody konečných objemů	23
5.1 Formulace úlohy	23
5.2 Výpočet.....	23
5.3 Grafické výstupy.....	26
5.4 Význam metody konečných diferencí	29
Závěr	32
6. Příloha	33
6.1 Matematické odvození problému proudění	33
6.2 Rovnice kontinuity	36
6.3 Pohybové rovnice aneb zákon zachování hybnosti	37
6.4 Zákon zachování energie	39
6.5 Systém Eulerových rovnic pro 1D proudění	42
6.6 Výpočet vlastních vektorů pro systém Eulerových rovnic v 1D	43

Úvod

Zadání bakalářské práce bylo popsání matematického modelu 1D proudění stlačitelného ideálního plynu v dýze s proměnným průřezem. Proudění stlačitelného plynu nebo jakékoli tekutiny nám popisuje systém Eulerových rovnic. Jelikož systém Eulerových rovnic je nelineární musíme jej řešit numericky. Numerické metody však nejsou úplně přesné, proto je zapotřebí volit tu správnou, která je nejbližší reálným hodnotám. Výpočty těchto matematických operací není možné řešit ručně, ale pomocí počítačového software. Díky počítačovým simulacím můžeme více experimentovat například v návrhu geometrie prostředí, kde proudí tekutina. Geometrie prostředí má velký vliv na průběh tlaku, rychlosti, hustoty a energie proudící tekutiny v daném potrubí či dýze. Při této matematické simulaci řešené pomocí počítačového software můžeme lépe popsat průběhy funkcí daných fyzikálních veličin a pomocí různých naprogramovaných metod můžeme lépe zachytit vznik rázových vln.

1. Vlastnosti proudění v 1D

1.1 Systém Eulerových rovnic v 1D

Eulerovy rovnice nám popisují chování tekutin v daném prostředí. Prostředí může být 3D, 2D nebo 1D. Čím více dimenzí, tím musíme uvažovat více složek fyzikálních veličin ve více směrech proudění. My se budeme zabývat případem pro 1D proudění. Tím pádem nás budou zajímat pouze fyzikální veličiny v jednom směru proudění. Budeme pracovat s následujícími fyzikálními veličiny hustotou ρ , rychlostí u , tlakem p a energií E . Přírůstky těchto veličin budeme popisovat v prostorové souřadnici x a čase t . Toto nám umožňuje popsat systém Eulerových rovnic (1), (2) a (3). Tyto rovnice se skládají z rovnice kontinuity (1), pohybové rovnice (2) a rovnice o zákonu zachování energie (3).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial((E+p)u)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Tyto rovnice jsou doplněny ještě rovnicí (4), ze které můžeme spočítat tlak nebo energii, při znalosti Poissonovi konstanty κ . Při výpočtech budeme uvažovat jako tekutinu vzduch, a proto budeme dosazovat za Poissonovu konstantu 1,4.

$$p = (\kappa - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \quad (4)$$

Odvození těchto rovnic je umístěno v příloze.

1.2 Řešení Eulerových rovnic

Tyto rovnice by bylo časově náročné řešit ručně, proto preferujeme výpočet pomocí počítačového software. Avšak systém Eulerových rovnic je nelineární, tudíž by bylo přímé řešení velice obtížné. Proto zavádíme numerické metody řešení, které nám umožní řešit nelineární případy. Výsledný výpočet však není přesný, proto jej musíme porovnávat se skutečnými analyticky vypočtenými nebo změřenými hodnoty. Před zahájením výpočtu však Eulerovy rovnice zapíšeme vektorově (5).

$$W_t + F_x = 0 \quad (5)$$

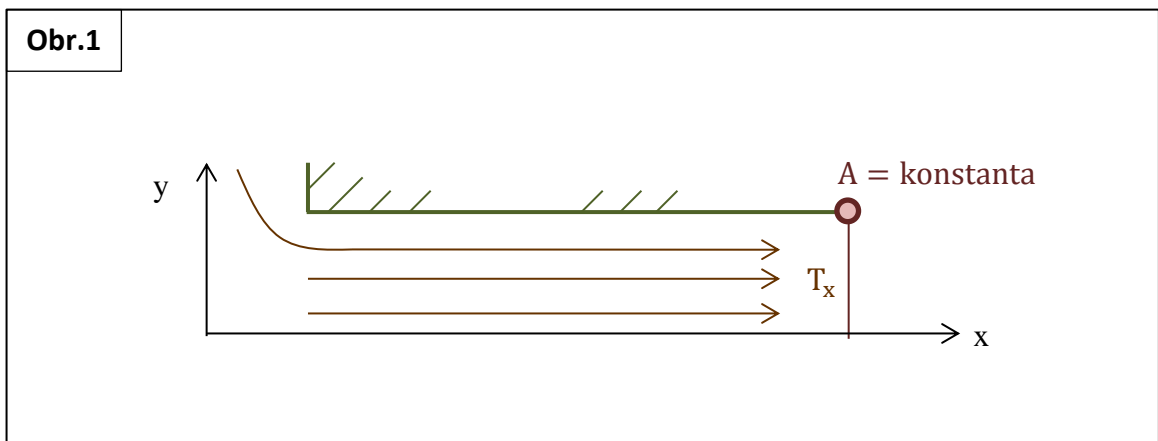
Kde jednotlivé indexy v rovnici (5) znamenají parciální derivace podle dané proměnné.

Vektory rozlišujeme na vektor konzervativních proměnných (6) a vektor fyzikálního toku (7), který je funkcí vektoru fyzikálních proměnných.

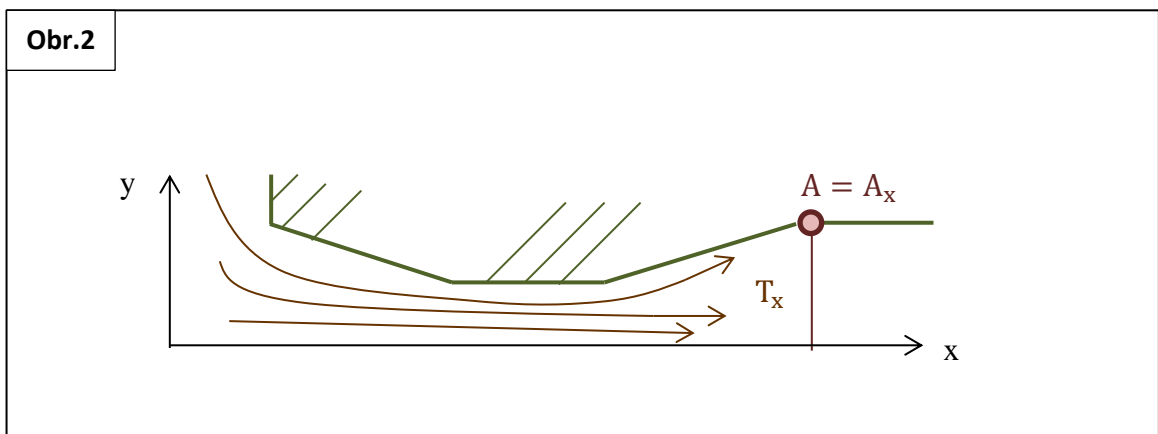
$$W_t = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}_t \quad (6)$$

$$F_x = F_x(W_t) = \begin{bmatrix} u\rho \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix}_x \quad (7)$$

Jak již bylo zmíněno v podkapitole 1.1, tak systém Eulerových je závislý na prostředí. Vztah (5) lze užít pouze tehdy, nachází-li se systém v geometricky konstantním prostředí, tj. kde geometrie průřezu A je konstantní viz. Obr.1. Kde symbol T značí fyzikální veličinu.



Avšak ve většině případů geometrie průřezu konstantní není, což bude mít vliv i na průběh fyzikální veličiny viz. Obr.2.



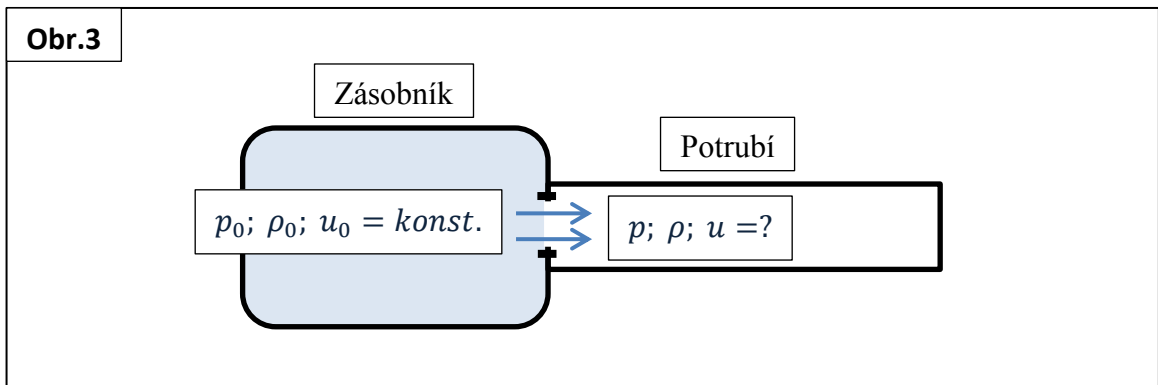
Na Obr.2 je jasně patrné, že v daných úsecích prostředí, kde není geometrie průřezu konstantní, můžeme pozorovat největší změny fyzikální veličiny T . Pro tyto případy musíme použít upravený vztah (5), kde jsme přidali nový vektor Q . Tento upravený vztah vyjádříme rovnicí (8).

$$W_t + F_x = Q \quad (8)$$

Ve vztahu (8) musíme uvažovat proměnnou geometrii průřezu, tudíž vektor konzervativních proměnných a vektor fyzikálního toku F musíme roznásobit funkcí geometrie přířezů A_x . Tudíž vyjde vztah (9). Ze kterého je patrné, že kdyby A_x byl konstantní vyšel by opět vztah (5).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[A(x) \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \begin{pmatrix} u\rho \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ A'(x)p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Během výpočtu rovnic (5) a (8) budeme znát klidové hodnoty třech již známých fyzikálních veličin a to tlaku p_0 , hustoty ρ_0 a rychlosti u_0 . Tyto klidové hodnoty nám budou udávat stav tekutiny před začátkem proudění. Například budeme-li mít zásobník tekutiny o daných počátečních tj. klidových hodnotách p_0 , ρ_0 a u_0 , který bude dodávat tekutinu například do potrubí, budou nás zajímat hodnoty na vstupu do potrubí, které se budou od těch klidových lišit. Tato úvaha je zobrazena na Obr.3.



Tyto vstupní hodnoty tlaku p , hustoty ρ a rychlosti u , spočítáme ze vztahů (10), (11) a (12) z klidových veličin p_0 , ρ_0 a u_0 . Následující vztahy slouží pro výpočet základního vektoru v Eulerových rovnicích a to pro vektor konzervativních proměnných W .

$$\rho = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} (Ma_0)^2 \right)^{\frac{1}{1-\kappa}} \rho_0 \quad (10)$$

$$\rho u = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} (Ma_0)^2 \right)^{\frac{1}{1-\kappa} - \frac{1}{2}} \rho_0 c_0 (Ma_0) \quad (11)$$

$$E = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} (Ma_0)^2 \right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \left(\frac{1}{\kappa(\kappa-1)} + \frac{(Ma_0)^2}{2} \right) \rho_0 c_0 \quad (12)$$

Kde c je rychlost zvuku, která je dána obecným vztahem (11). A pro Machovo číslo Ma platí vzorec (12). Jestliže tyto veličiny jsou označeny indexem 0 , který znamená, že daná fyzikální veličina je v klidovém vztahu, musíme jej opět spočítat z klidových hodnot.

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \quad (13)$$

$$\text{Ma} = \frac{u}{c} \quad (14)$$

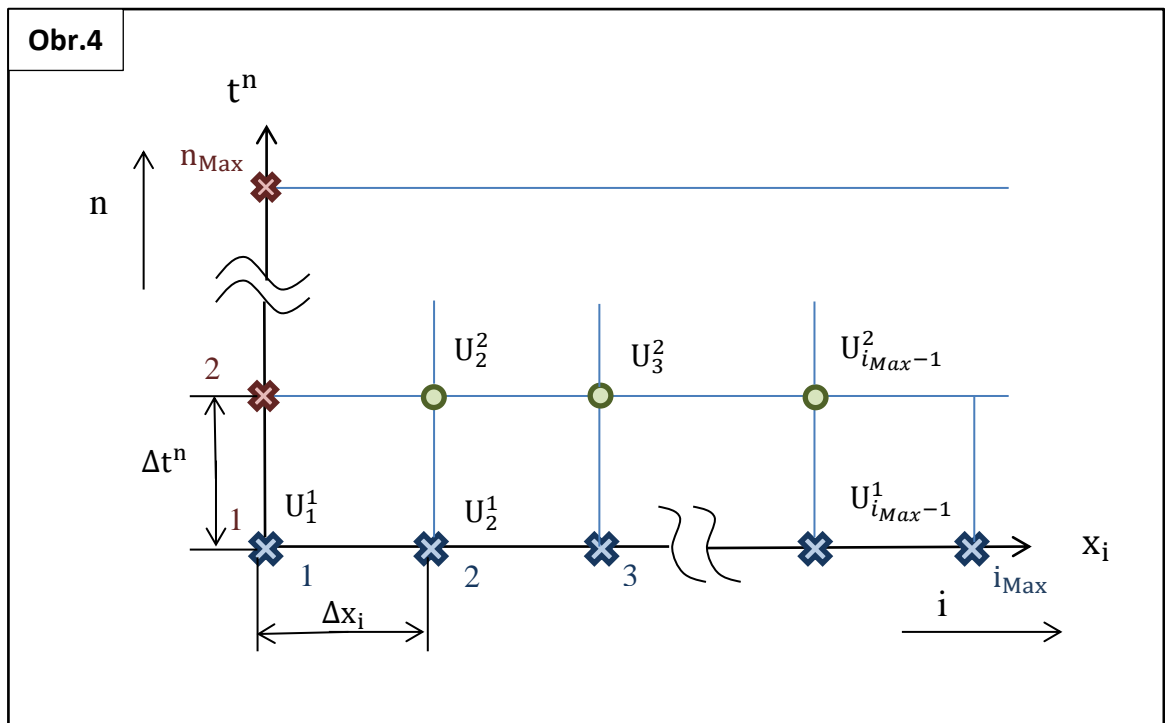
Samozřejmě vztahy (10), (11) a (12) platí pouze pro konstantní geometrii průřezu A , která nebude ovlivňovat průběh výpočtu. Jestliže bude funkce geometrie průřezu proměnná tj. nekonstantní. Bude vektor konzervativních proměnných násoben velikostí geometrii průřezu, který její průběh bude ovlivňovat. Tudíž budou i vztahy (10), (11) a (12) násobeny touto veličinou. Jelikož se jedná o vstupní hodnoty, musí být násobeny pouze velikostí průřezu na vstupu! Této úvahy užíváme zejména při řešení nestacionární úlohy, konkrétně při počítání, v Lavalových dýzách.

Veškeré informace byly, získány ze zdrojů [2] a [3].

2. Numerické řešení proudění v 1D

2.1 Metoda konečných diferencí

Metoda konečných diferencí nebo též metoda sítí spočívá v rozdělení prostorové osy x do několika malých úseků Δx neboli diferencí. Čím více těchto úseků uděláme, tím bude síť hustší a můžeme získat hladší funkci. Ale výpočet bude trvat mnohem déle. To samé uděláme i na časové ose t . Kde se snažíme opět udělat co nejvíce časových úseků Δt , abychom získali co nejpřesnější výsledky. Postupným dělením obou os nám vzniká síť. Princip metody je na Obr.4.



Z Obr.4 je patrné síť je v obou osách dělena do jednotlivých kroků, a to do prostorových i a časových n . Počet těchto kroků určuje hustotu sítě. Jestliže, budeme mít nelineární funkci U , kterou chceme počítat numericky, proto tuto nejdříve přepíšeme do tvaru U_i^n . Tento tvar nám udává hodnotu funkce v konkrétním prostorovém a časovém kroku neboli časové vrstvě. Nejdříve musíme určit její hodnoty v první časové vrstvě tj. U_i^1 , kde $1 \leq i \leq i_{Max}$. Nás však budou zajímat hodnoty v nové časové vrstvě tj. U_i^2 , v této nové časové vrstvě však platí, že $2 \leq i \leq i_{Max} - 1$. To znamená, že nebudeme znát hodnoty funkce na začátku a na konci tj. U_1^2 a $U_{i_{Max}}^2$ budou neznámé. Určení těchto hodnot bude záviset na typu úlohy. Úlohy mohou být dvě.

Nestacionární úloha:

Doba výpočtu pro n vrstev, bude záviset na t , tj. době výpočtu dokud výsledky v dané časové vrstvě budou stabilní. Pro náš případ bude platit, že výpočet bude stabilní, tak dlouho dokud se v nové časové vrstvě nebudou lišit hodnoty krajních hodnot. Proto užíváme těchto dvou okrajových podmínek (15) a (16).

$$U_1^n = U_1^{n+1} \quad (15)$$

$$U_{i_{\text{Max}}}^n = U_{i_{\text{Max}}}^{n+1} \quad (16)$$

Stacionární úloha:

Výpočet n vrstev, je závislý na volbě velikosti Rezidua, pomocí něhož určíme počet n_{Max} časových vrstev, tj. na maximální počet časových vrstev, dokud bude výpočet ukazovat ještě přesné hodnoty. Pro tuto úlohu platí, že $x \in \langle a; b \rangle$, kde $a; b \in R$. A užíváme těchto dvou okrajových podmínek (17) a (18).

$$U_1^{n+1} = \text{Počáteční podmínka (17)}$$

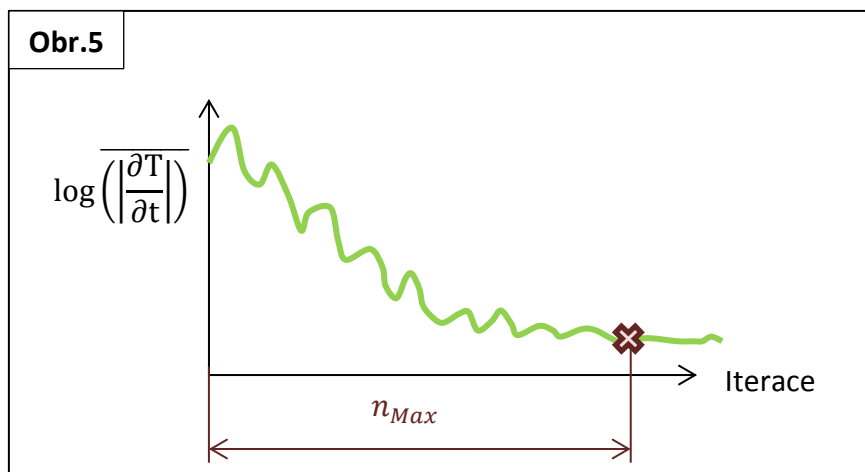
Pro náš případ vše závisí na klidových hodnotách, proto podmínku na vstupu spočítáme z již zmíněných vztahu (10), (11) a (12), které byli uvedeny v první kapitole. Avšak v poslední složce U ve vztahu (18), musíme užít počáteční podmínku, která bude vysvětlena v dalších kapitolách.

$$U_{i_{\text{Max}}}^{n+1} = U_{i_{\text{Max}-1}}^{n+1} \quad (18)$$

Jestliže, uděláme dostatečně hustou síť, kde prostorové kroky Δx_i budou velmi malé. Lze uvažovat, že sousední hodnoty funkce v posledním a předposledním prostorovém kroku i , prakticky nezmění.

Nyní musíme stanovit optimální počet časových vrstev neboli n_{Max} , takový aby byl výpočet stabilní. Tento počet stanovíme pomocí Rezidua. Ze vztahu (19), je patrné, že Reziduum je parciální derivace příslušné fyzikální veličiny T dle času t .

$$\overline{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\text{Max}}} [T_i^{n+1} - T_i^n]}{i_{\text{Max}}} \quad (19)$$



Pro lepší představu je význam Rezidua zobrazen na Obr.5. Kde na vodorovné ose je zobrazen počet iterací a na svislé ose je logaritmus z absolutní hodnoty Rezidua. Je vidět, že v prvních časových vrstvách je velký rozptyl výsledku rozdílů dané fyzikální veličiny v nové a původní časové vrstvě. To znamená, že po zvolení počtu časových vrstev n v těchto rozkmitaných úsecích, bychom získali špatný výsledek. Proto musíme počkat do ustálení funkce Rezidua, kde se tyto rozdíly prakticky neliší a poté zvolit n_{Max} jak na Obr.5.

Výpočet časového kroku Δt :

Časový krok nelze volit libovolně, ale musíme jej spočítat z podmínky stability (18). Kde velikost maximálního vlastního čísla $max|\lambda_{Max_i}|$, jsme získali z matice, kterou jsme vytvořili ze systému Eulerových rovnic (5). Výpočet λ_{Max} je uveden v příloze.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|\lambda_{Max}|} \quad (20)$$

Po výpočtu λ_{Max} a zpětném dosazení do rovnice (20) získáme vztah (21). Kde jednotlivé členy u a c znamenají rychlost proudící tekutiny a rychlost zvuku (13). Tyto veličiny se budou v průběhu výpočtu měnit, tak proto do numerických schémat dosazují vždy nejmenší hodnotu velikosti časového úseku Δt .

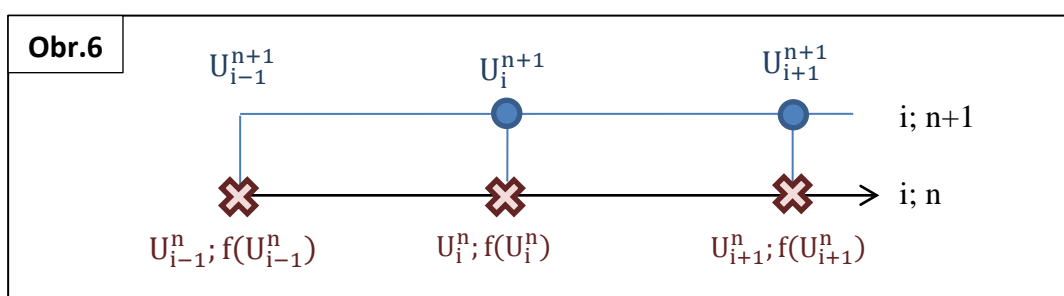
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{|u|+c} \rightarrow \Delta t_i = \frac{\Delta x}{|u_i|+c_i} \rightarrow \Delta t = \min(\Delta t_i) \quad (21)$$

Vztahy (20) a (21) jsou platné pouze pro rovnoměrnou síť tj. kde jednotlivé prostorové a časové úseky Δx a Δt jsou konstantní. Jestliže se bude jednat o nerovnoměrnou síť, kde jednotlivé prostorové a časové úseky Δx a Δt budou proměnné, bude platit vztah (22). Ale vždy nás zajímá pouze jedno Δt a to minimální z celé řady.

$$\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{|u|+c} \rightarrow \Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{|u_i|+c_i} \rightarrow \Delta t = \min(\Delta t_i) \quad (22)$$

Nyní si musíme zvolit nějaké numerické schéma podle kterého budeme dané výpočty proudění provádět. Musíme vybrat, takové schéma, které bude pro danou metodu vyhovující, tj. bude stabilní a relativně přesné. Při výběru z mnoha schémat jsme volili Laxovo-Friedrichsovo schéma, které je definováno pro obecnou funkci U vztahem (21), kde f znamená funkci obecné funkce U . Tento princip je ideální pro náš případ Eulerových rovnic (5). Princip Laxovo-Friedrichsova schématu je zobrazen na Obr.6.

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{i+1}^n) - f(U_{i-1}^n)) \quad (23)$$



Po dokončení výpočtu však opět získáme neznámé na okrajích a to U_{i-1}^{n+1} a U_{i+1}^{n+1} . Tyto okrajové neznáme, opět určíme z formulace zadání. A to jestli se rovná o stacionární nebo nestacionární úlohu a podle toho připsáme příslušné okrajové podmínky.

Nyní budeme Laxovo-Friedrichsovo schéma aplikovat pro náš případ pro proudění v 1D, tj. pro systém Eulerových rovnic v 1D (5). S využitím vztahů (6) a (7) dosadíme do Laxova-Friedrichsova schématu (23) a získáme vztah (24).

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{2}(W_{i-1}^n + W_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) \quad (24)$$

Tento vztah pro lepší výpočet rozšíříme o vektor konzervativních proměnných W a po drobné matematické úpravě získáme vztah (26).

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{2}(W_{i-1}^n + W_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + W_i^n - W_i^n \quad (25)$$

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(W_{i-1}^n - 2W_i^n + W_{i+1}^n) \quad (26)$$

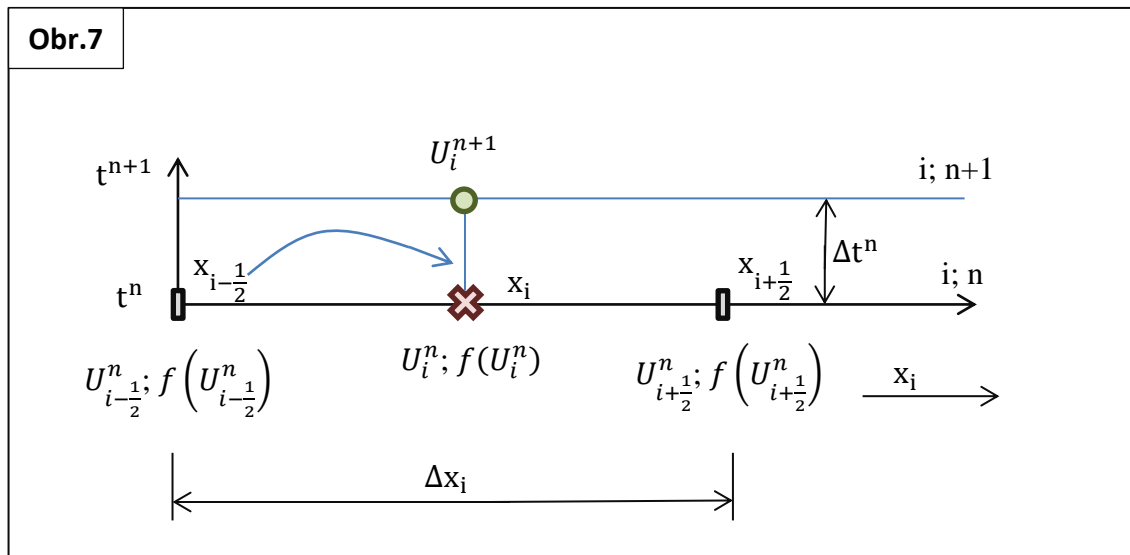
Pro zpřesnění Laxova-Friedrichsova schématu vkládáme do řešení ještě parametr ε ($\varepsilon \in (0; 1)$). Schéma pro ε rovné jedné vyjadřuje vztah (26). Avšak ne vždy by bylo toto schéma stabilní. Proto během výpočtu užíváme následující vztah (27).

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{\varepsilon}{2}(W_{i-1}^n - 2W_i^n + W_{i+1}^n) \quad (27)$$

Cílem této metody jako všech jiných numerických metod je to, aby rozdíl skutečných hodnot W^* a numericky vypočtených hodnot W_i^n konvergoval k nule (28).

$$\|W^* - W_i^n\| \rightarrow 0 \text{ pro } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0_+ \quad (28)$$

2.2 Metoda konečných objemů



Tato metoda spočívá v tom, že si daný objekt rozdělím na několik malých objemů. A v každém objemu, řešíme co, do něj tzv. přiteče a odeče, proto hlavní část výpočtu soustředíme do jejich středů. Tento postup se od metody konečných diferencí výrazně neliší, akorát že výpočet hodnoty obyčejné funkce U v nové časové vrstvě U_i^{n+1} , soustředíme do středu prostorového úseku Δx , který pro 1D proudění chápeme jako objemový úsek. Tato úvaha je zobrazena na Obr.7. Přítoky nám symbolizují členy $U_{i-\frac{1}{2}}^n; f\left(U_{i-\frac{1}{2}}^n\right)$ a odtoky zase členy $U_{i+\frac{1}{2}}^n; f\left(U_{i+\frac{1}{2}}^n\right)$. Tyto hodnoty nám vstupují do objemového úseku Δx a zároveň z něj i vystupují. A budeme je souhrnně nazývat a označovat numerickým tokem ψ . Nyní tuto metodu popíšeme matematicky přímo pro systém Eulerových rovnic rozšířených o vektor Q (8), abychom uvažovali možnou proměnou geometrii průřezu. Nyní rovnici (8) napíšeme v diferenciálním tvaru (29).

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = Q \quad (29)$$

Z rovnice (29) vyjádříme vektor konzervativních proměnných W (30), protože se jedná o základní vektor, a právě jeho hodnotu chceme znát v nové vrstvě.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + Q \quad (30)$$

Jestliže vyjdeme z úvahy na Obr.7, tak je patrné, že jestli chceme znát všechny hodnoty v prostorovém a časovém úseku. Budeme muset rovnici (30) integrovat podle časového úseku dt a prostorového úseku dx . Podobnou úvahy lze vyčíst z oblasti řešení rovnice (30), která je dána vztahem (31).

$$D = \{[x; t] \in \mathbb{R}^2; x_{\text{Min}} < x < x_{\text{Max}}; t_{\text{Min}} < t < t_{\text{Max}}\} \quad (31)$$

Nyní budeme rovnici (28) integrovat, podle již zmíněné úvahy.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial W}{\partial t} dx dt = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial F}{\partial x} dx dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} Q dx dt \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\right) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial W_i}{\partial t} dt &= -(t^{n+1} - t^n) \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial F^n}{\partial x} dx + \\ &+ \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\right) (t^{n+1} - t^n) Q_i^n \end{aligned} \quad (33)$$

Dále dosadíme dle Obr.7, za jednotlivé členy do rovnice (33).

$$\Delta x(i) = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \quad (34)$$

$$\Delta t^n = t^{n+1} - t^n \quad (35)$$

Po dosazení těchto členů (34) a (35) do rovnice (33), získáme vztah (36).

$$\Delta x(i) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial W_i}{\partial t} dt = -\Delta t^n \int_{x_{i-\frac{1}{2}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial F^n}{\partial x} dx + \Delta x(i) \Delta t^n Q_i^n \quad (36)$$

Po integraci rovnice (36) dostaneme rovnici (37).

$$\Delta x(i)(W_i^{n+1} - W_i^n) = -\Delta t^n \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \Delta x(i) \Delta t^n Q_i^n \quad (37)$$

Z rovnice (37) pochopitelně vyjádříme člen W_i^{n+1} .

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x(i)} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \Delta t^n Q_i^n \quad (38)$$

Kde fyzikální tok F aproximujeme již zmíněným numerickým tokem ψ .

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x(i)} \left(\psi_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \Delta t^n Q_i^n \quad (39)$$

Jak je patrné z Obr.7 je numerický tok ψ složen z okrajových hodnot funkcí U a $f(U)$. Tudíž pro náš případ platí, že numerický tok ψ musí být složen z okrajových hodnot vektorů W a $F(W)$. Tento fakt zapíšeme pro Laxovo-Friedrichsovo schéma. A vyjdou vztahy (40) a (41). Tyto vztahy uvažujeme pro nerovnoměrné rozložení sítě, kde Δx a Δt , nejsou konstantní.

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{[\Delta x_i + \Delta x_{i+1}]}{2\Delta t^n} (W_{i+1}^n - W_i^n) \quad (40)$$

$$\psi_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (F_{i-1}^n + F_i^n) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{[\Delta x_{i-1} + \Delta x_i]}{2\Delta t^n} (W_i^n - W_{i-1}^n) \quad (41)$$

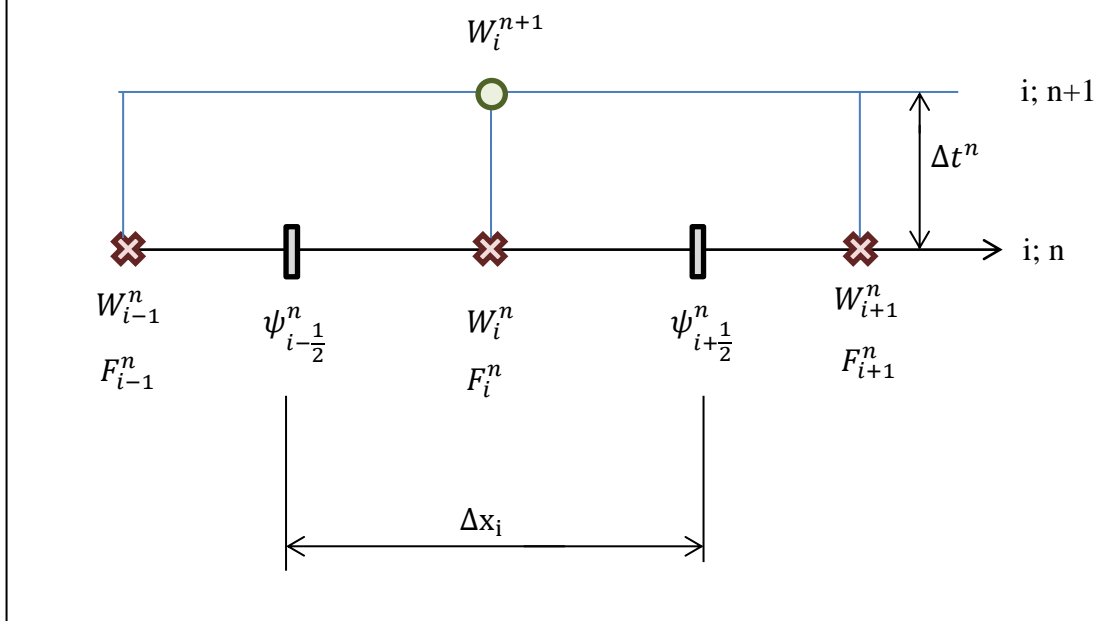
Jestliže budeme uvažovat konstantní velikost polohového kroku Δx ve vztazích (40), (41) a (39). Získáme po dosazení vztahů (40) a (41) do (39) klasické Laxovo-Friedrichsovo schéma (27), se kterým jsme počítali v předešlém případě.

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{\varepsilon}{2} (W_{i-1}^n - 2W_i^n + W_{i+1}^n) + \Delta t Q_i^n \quad (27)$$

Pro dosazení za velikost časového úseku Δt platí stejná pravidla jako v metodě konečných diferencí.

Úlohy pro metodu konečných objemu, jsou většinou stacionární, a proto pro ně platí stejné okrajové podmínky jak pro stacionární úlohy řešené metodou konečných diferencí tj. platí vztahy (17) a (18).

Obr.8



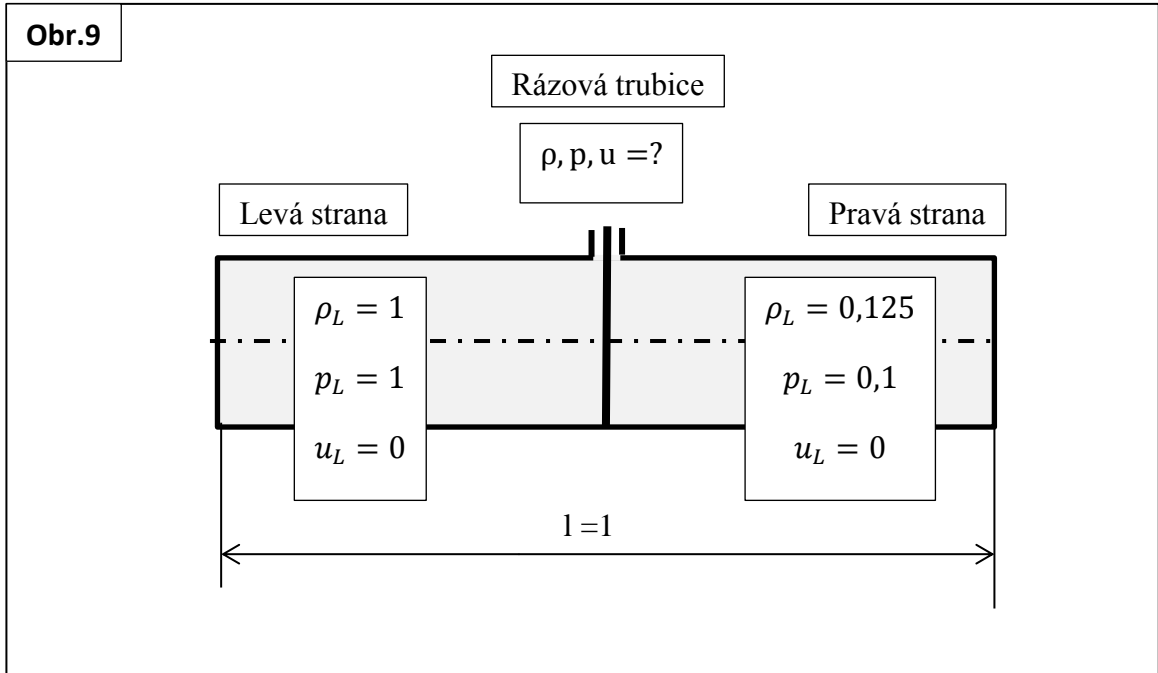
Pro lepší představu výpočtu této metody nám ilustruje Obr.8. Z tohoto obrázku je patrné, že při aplikaci této metody je potřeba zavést jiné trochu dělení sítě než u předchozí metody. To je způsobeno vlivem numerických toků, se kterými metoda konečných diferencí nepočítá.

Veškeré informace byly, získány ze zdroje [3]

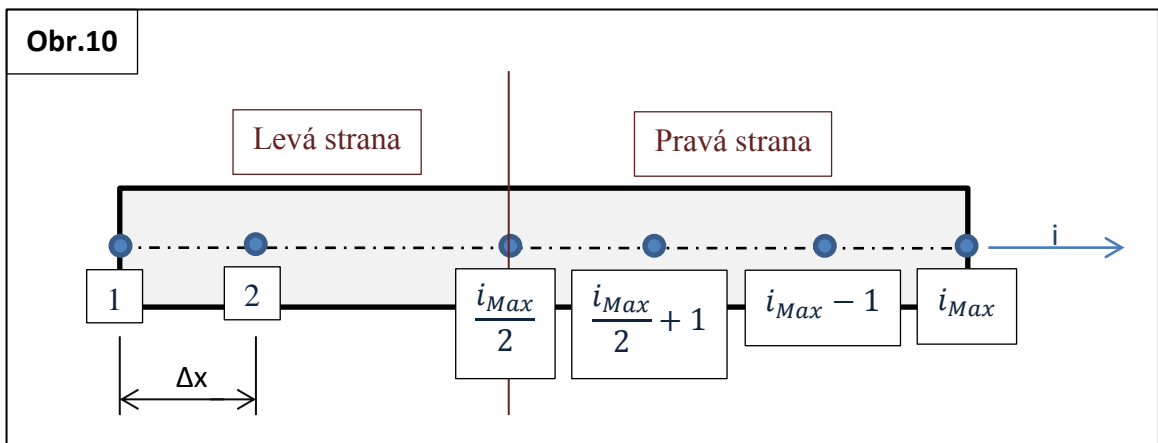
3. Numerické řešení proudění v rázové trubici

3.1 Formulace úlohy

Jedná se o nestacionární úlohu, tudíž nás bude zajímat doba trvání výpočtu t , abychom věděli, jak dlouho bude výpočet stabilní, tj. bude ukazovat dobré výsledky. Dobu trvání výpočtu jsme volili dle zdroje [5] 0,2s. Schéma zadání je na Obr.9.



Z Obr.9 je vidět, že již známe klidové hodnoty na levé a pravé straně. Z Obr.9 je patrné, že neznáme hodnoty tlaku p , hustoty ρ a rychlosti u v rázové trubici po odstranění přepážky, která se nachází uprostřed trubice. Tyto hodnoty, se budou s každým časovým krokem Δt po odstranění přepážky průběžně měnit. Po uběhnutí doby potřebné k ustálení budou v každém prostorovém úseku trubice Δx jiné hodnoty pro p , ρ a u . Tyto hodnoty zjistím z Eulerových rovnic, jelikož trubice má neproměnnou geometrii, tj. funkce geometrie průřezu A je konstantní, budeme počítat s rovnicí (5). Poissonovu konstantu pro ideální plyn κ budu volit 1,4.



3.2 Výpočet

Pro výpočet Eulerových rovnic, abych získal požadované fyzikální veličiny v daných úsecích Δx , využiji metodu konečných diferencí. Pro lepší výpočet si trubici rozdělím na dvě poloviny a to na levou a pravou stranu viz. Obr.10. Levou stranu a její hodnoty nacházející se na levé straně označíme indexem L . Naopak pro pravou stranu, budeme volit index P . Pro výpočet, budeme užívat Laxovo-Friedrichsovo schéma (27).

Nyní napočítáme potřebné hodnoty pro Laxovo-Friedrichsovo schéma (27). A to velikost prostorového úseku Δx (42), kde l je délka trubice. Jelikož budeme uvažovat rovnoměrné rozložení sítě, tak budou všechny úseky v síti stejné.

$$\Delta x = \frac{l}{(i_{\text{Max}}-1)} \quad (42)$$

Dále spočítáme vektor konzervativních proměnných W , ze vztahu (6), ale musíme uvažovat levou a pravou stranu. Proto budou platit následující vztahy.

$$1 < i < \frac{i_{\text{Max}}}{2}$$

$$W_L = W_i^1 = \begin{bmatrix} \rho_L \\ \rho_L u_L \\ E_L \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\frac{i_{\text{Max}}}{2} + 1 < i < i_{\text{Max}}$$

$$W_P = W_i^1 = \begin{bmatrix} \rho_P \\ \rho_P u_P \\ E_P \end{bmatrix} \quad (44)$$

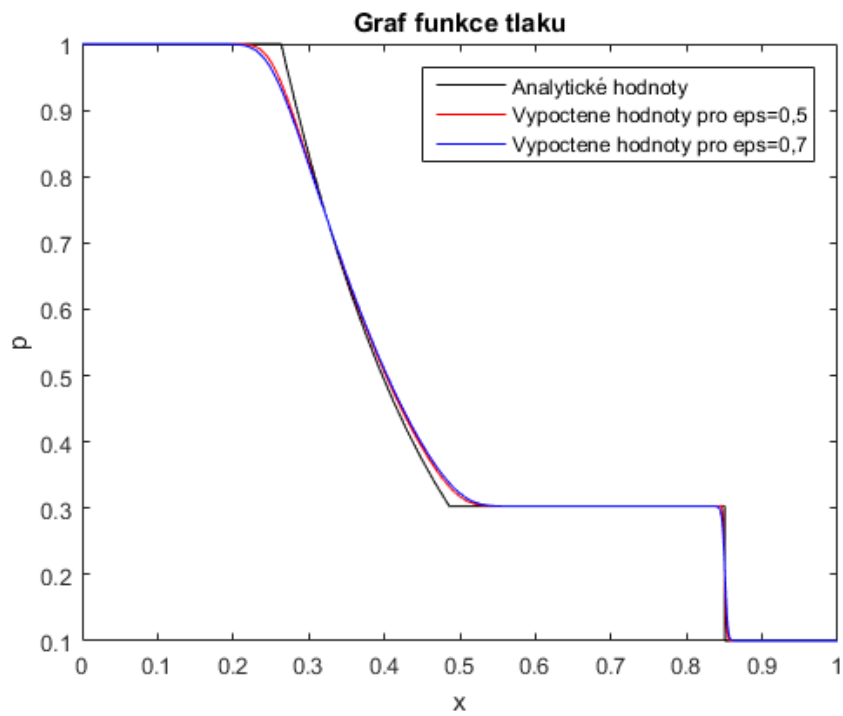
Nyní máme spočítaný vektor konzervativních proměnných W pro první časovou vrstvu. Klidovou energii na vstupu a výstupu potřebnou k výpočtu, spočítáme ze vztahu (4). Po těchto krocích můžeme spočítat vektor fyzikálního toku F (7). Během výpočtu je však, potřeba hlídat stabilitu, tj. velikost časového kroku Δt , kterou musíme volit v každé časové vrstvě minimální viz. vztah (21). A pro výpočet doby trvání výpočtu užitíme vztah (45).

$$t = \sum_{n=1}^{n_{\text{Max}}} [\min(\Delta t^n)] \quad (45)$$

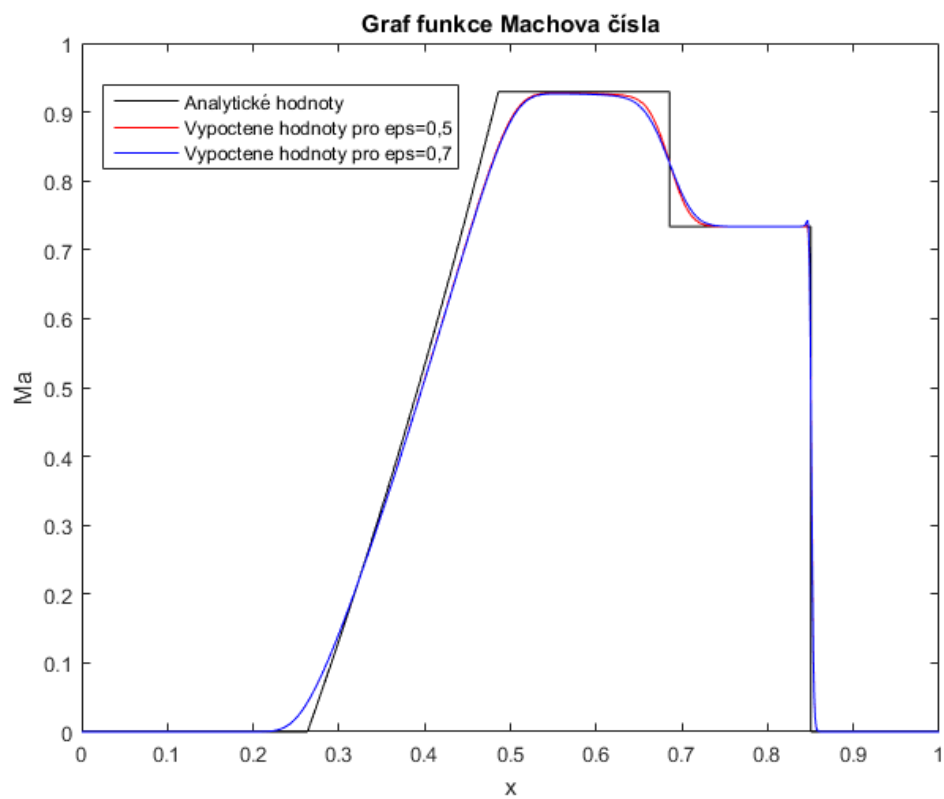
Je patrné, že pro kompletní výpočet, dle Laxovo-Friedrichsovo schématu, všech hodnot ve všech prostorových úsecích Δx , v nové časové vrstvě $n+1$, musíme znát dvě okrajové podmínky. Jelikož se jedná o Nestacionární úlohu, užitíme okrajových podmínek dle vztahů (15) a (16), kde obyčejnou funkci U nahradíme pro náš případ vektorem konzervativních proměnných W .

3.3 Grafické výstupy

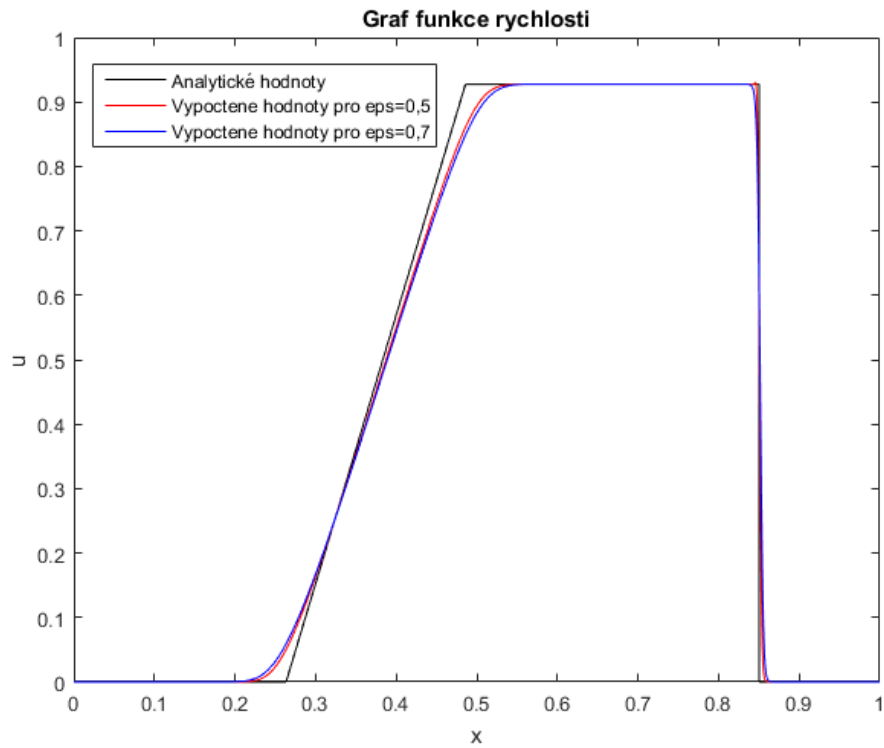
Graf1 zobrazuje průběh tlaku v rázové trubici.



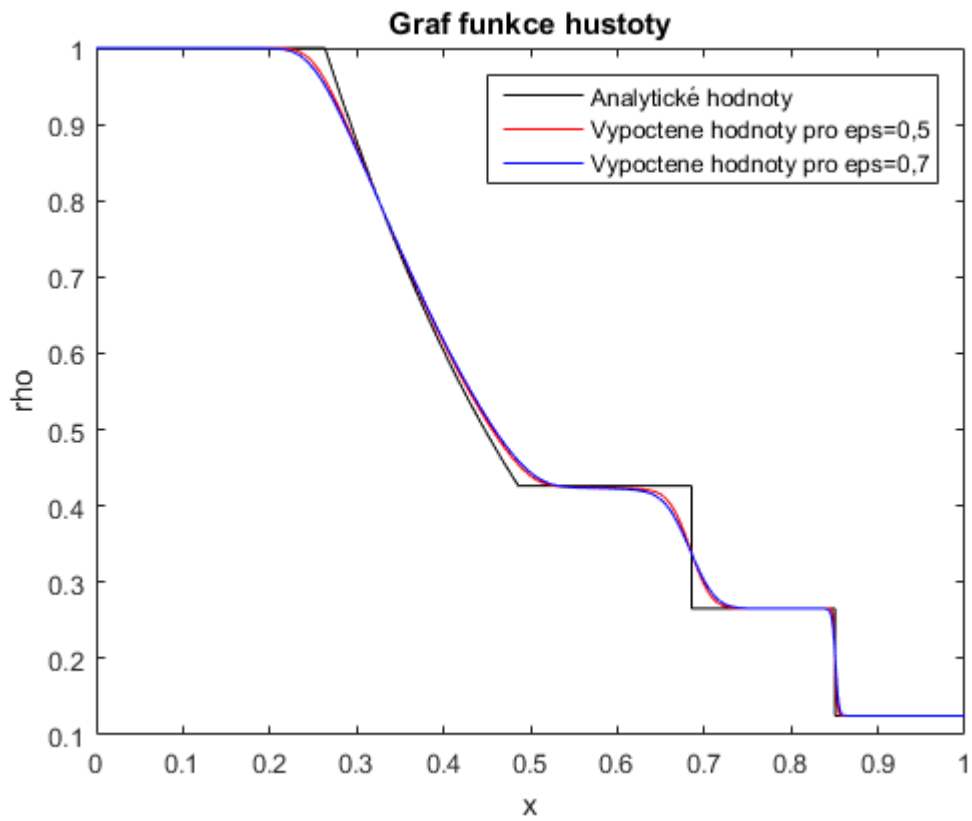
Graf2 zobrazuje průběh Machova čísla v rázové trubici.



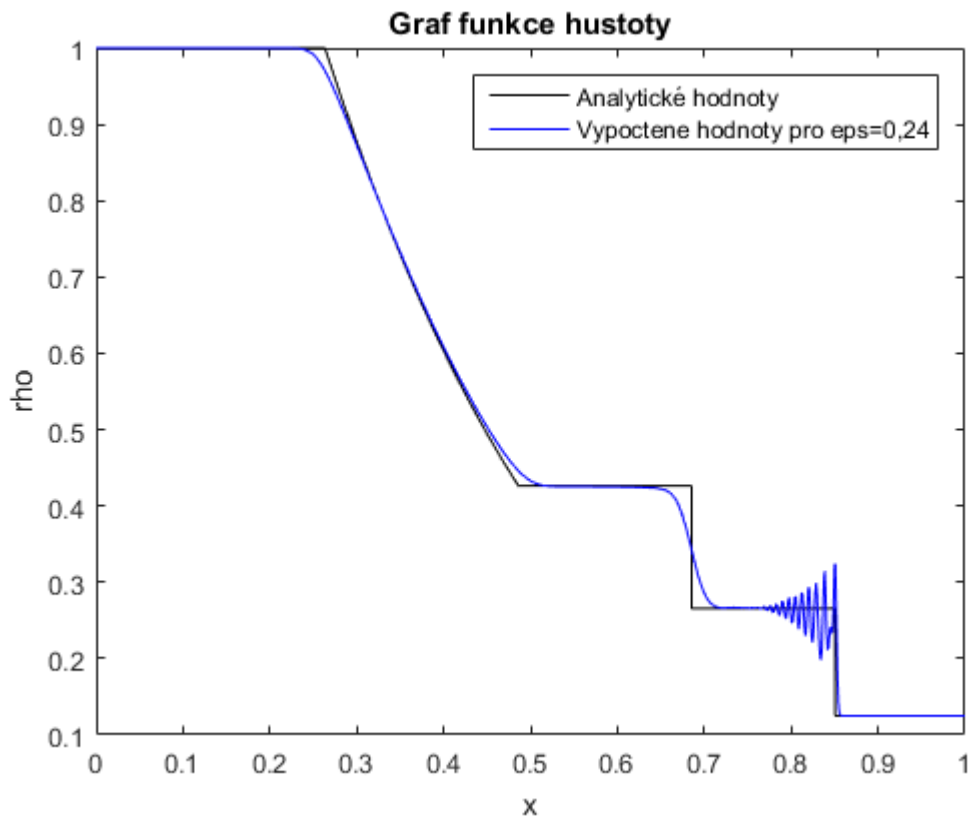
Graf3 zobrazuje průběh rychlosti v rázové trubici.



Graf4 zobrazuje průběh hustoty v rázové trubici.



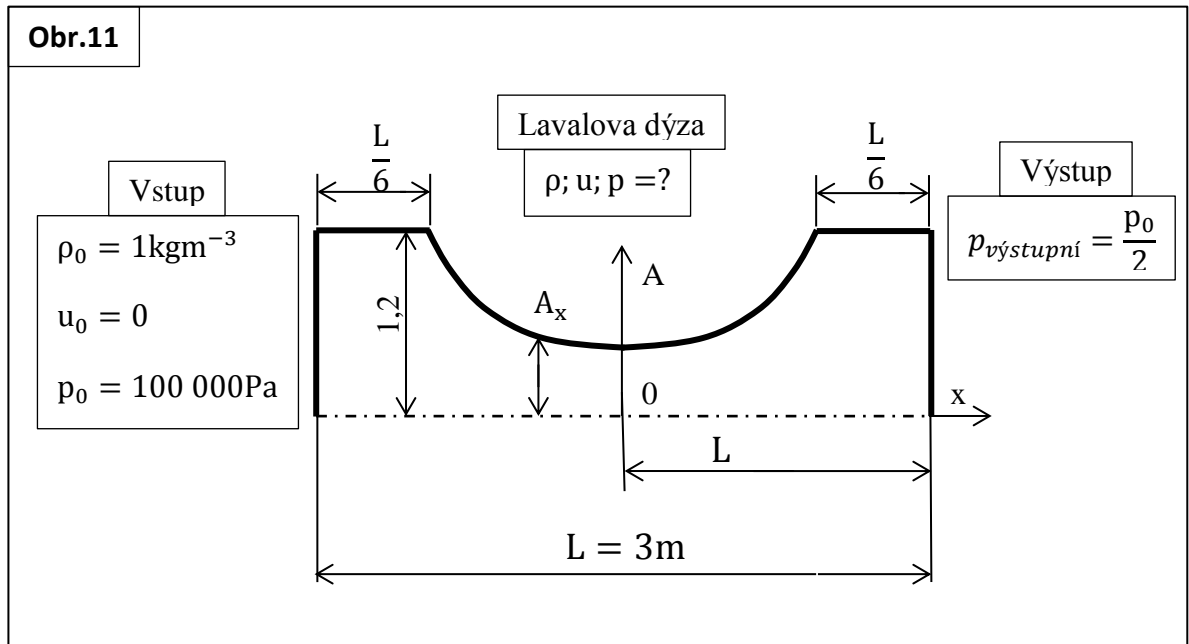
Po dokončení výpočtu jsme porovnávali hodnoty vypočtené s analytickými, které jsou zobrazeny na grafech černou křivkou. Tyto hodnoty jsme získali ze zdroje (<http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/stube/stube.html>). Avšak přesnost výpočtu ovlivňovala i volba parametru ε , který je v grafech symbolizován jako *eps*. Jako nejlepší volba pro parametr ε byla hodnota 0,5. Tato hodnota je zobrazena červenou křivkou a je krásně spojitá a schéma nejeví stopy kmitů. Další vhodná volba pro parametr ε , byla 0,7. Tato hodnota je zobrazena modrou křivkou a téměř splývá s červenou, ale občas pro schéma vykazuje nepatrné známky kmitu. Hodnoty větší než 0,7 nebo menší než 0,4, již vykazovali pro použité schéma znatelné známky kmitání a výsledek byl tudíž nepřesný viz. **Graf15**.



4. Numerické řešení proudění v Lavalově dýze pomocí metody konečných diferencí

4.1 Formulace úlohy

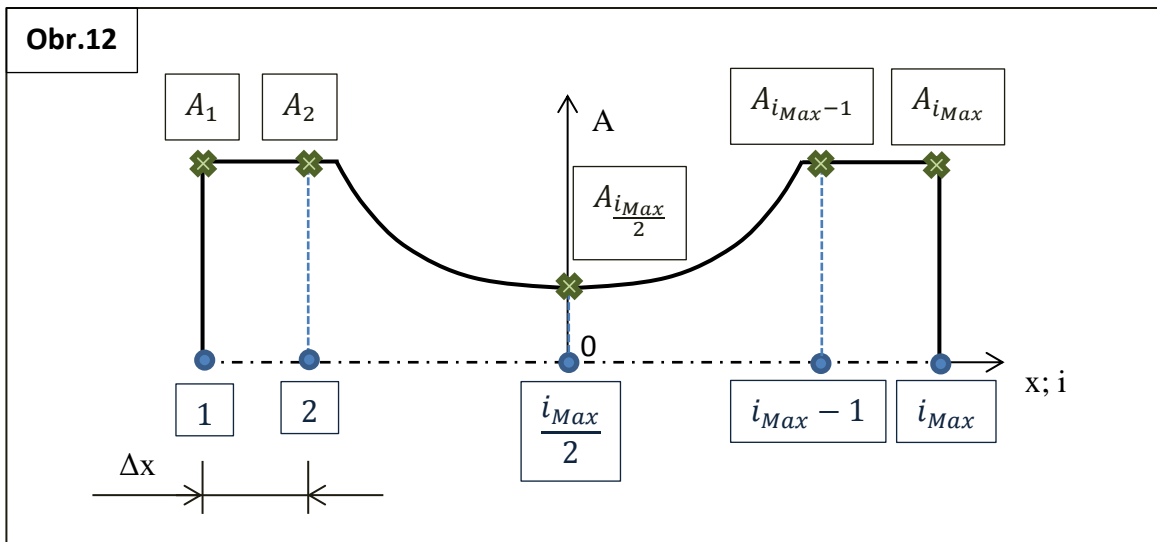
Jedná se o stacionární úlohu. Proto během výpočtu budeme muset napočítat Reziduum (19) pro nějaký počet časových vrstev, abychom zjistili optimální počet časových vrstev, kdy bude funkce nebo-li výsledek konstantní viz. Obr.5. Schéma úlohy je na Obr.11.



Z Obr.11 jsou známy klidové hodnoty na vstupu a to hustota ρ_0 ; rychlost u_0 a tlak p_0 . Z ustálených hodnot na výstupu známe jen výstupní tlak $p_{\text{výstupní}}$, pro výpočet zbylých fyzikálních veličin rychlosti a hustoty budeme vycházet z okrajové podmínky (18). Pro Poissonovu konstantu ideálního plynu κ opět dosadíme 1,4. Opět budeme řešit proudění v 1D, kde budeme pracovat se systémem Eulerových rovnic. Avšak pro tento případ musíme uvažovat proměnnou geometrii průřezu A , proto použijeme vztah (8).

4.2 Výpočet

Před zahájením výpočtu je třeba napočítat hodnoty proměnné funkce geometrie průřezu A , a to v každém kroku i . Schematické znázornění pro numerický výpočet je na Obr.12.



Budeme uvažovat rovnoměrné rozložení sítě, tím pádem bude velikost prostorového Δx (46), konstantní.

$$\Delta x = \frac{L}{i_{Max}-1} \quad (46)$$

$$x_i = i \Delta x \quad (47)$$

Následující rovnice vyjadřují matematický popis funkce geometrie průřezu A , který má pro tento případ proměnný tvar.

Pro $1 \leq i \leq i_{Max}$ a zároveň $-1,5 \leq x_i \leq 1,5$ platí

$$A_i = 1 + 0,2(x_i)^2 \quad (48)$$

Kde vztah (48) symbolizuje nekonstantní průběh funkce geometrie průřezu A . Abychom do vzorce, zahrnuli i konstantní průběh A musíme rovnici (48) doplnit počátečními podmínkami (49) a (50).

$$x_i \leq -1 \text{ platí } A_i = 1,2 \quad (49)$$

$$x_i \geq 1 \text{ platí } A_i = 1,2 \quad (50)$$

Nyní můžeme spočítat derivace funkce geometrie průřezu \hat{A} (51), kterou potřebujeme dosadit do vztahu (8).

$$i \in \langle 2; i_{Max} - 1 \rangle$$

$$\hat{A}_i = \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2\Delta x} \quad (51)$$

Po dokončení výpočtu (51) nám vyjdou dvě neznámé, tudíž musíme přidat okrajové počáteční podmínky (52) a (53), tyto podmínky jsme odvodili z konstantní funkce geometrie průřezu A viz. Obr.11 a Obr.12.

$$\hat{A}_1 = 0 \quad (52)$$

$$A_{i_{Max}} = 0 \quad (53)$$

Ještě před zahájením výpočtu vektoru konzervativních proměnných W , musíme ze vztahu (4), dopočítat klidovou energii, kterou získáme, ze zadaných klidových hodnot rychlosti, tlaku a rychlosti viz. Obr.11. Po tomto kroku již můžeme spočítat vektor konzervativních proměnných W , který spočítáme ze vztahu (6), ale násobíme jej funkcí geometrie průřezu A , viz vztah (9). Po té můžeme spočítat vektor fyzikálního toku F a vektor Q v první časové vrstvě. Během tohoto výpočtu, budeme zapotřebí znát v každém prostorovém kroku ještě rychlost zvuku c (13), ze které spočítáme velikost časového úseku Δt (22), v každém prostorovém kroku. Po dokončení tohoto výpočtu opět vybereme z řady Δt tu nejmenší hodnotu, kterou pak dosadíme do Laxovo-Friedrichsovo schématu (27), viz. předchozí případ s rázovou trubicí. Nyní známe vše, co je potřebné dosadit do již zmíněného Laxovo-Friedrichsova schématu (27). Avšak po výpočtu velikostí hodnot v nové časové vrstvě nám opět vyjdou dvě neznámé a to na vstupu tj. v prvním prostorovém kroku a na výstupu tj. v posledním i_{Max} . Jelikož, se jedná o stacionární úlohu, užitíme těchto okrajových podmínek.

Okrajová podmínka pro vstup je definována vztahy (10), (11) a (12). Tyto vztahy symbolizují vektor konzervativních proměnných W na vstupu, protože jsme užili vztah (9), kde bereme v potaz proměnou funkci geometrie průřezu A . Musíme i tyto vztahy (10), (11) a (12), násobit velikostí funkce geometrie průřezu, v prvním prostorovém kroku A_1 .

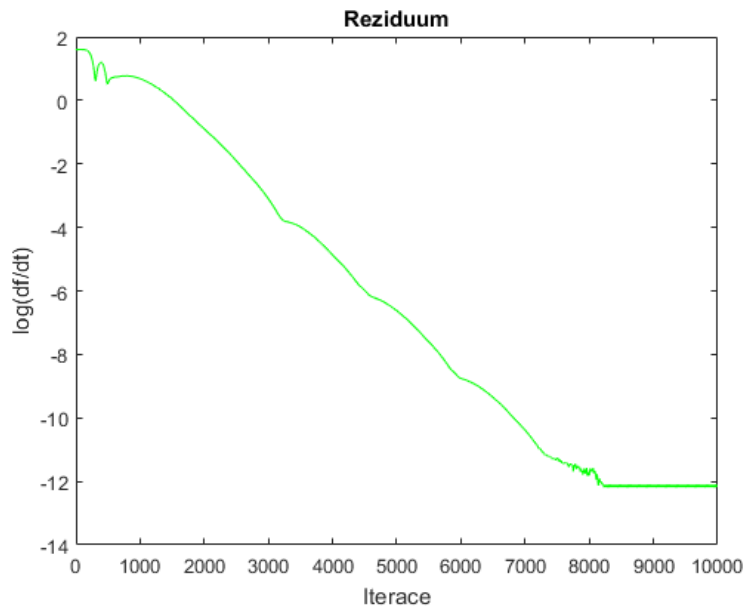
Okrajová podmínka pro výstup je definována (18), kde využijeme úvahy velkého množství prostorových kroků. Tato úvaha nám říká, že hodnoty v posledním prostorovém kroku i_{Max} jsou téměř stejné jako v předposledním. Ale však tuto hodnotu užitíme pouze pro dvě složky vektoru W , tudíž platí (54).

$$W = \left[A_{i_{Max}} \begin{pmatrix} \rho_{i_{Max}} \\ \rho_{i_{Max}} u_{i_{Max}} \\ E_{i_{Max}} \end{pmatrix} \right] = \left[A_{i_{Max}} \begin{pmatrix} \rho_{i_{Max}-1} \\ \rho_{i_{Max}-1} u_{i_{Max}-1} \\ \frac{p_{výstupní}}{(1-\kappa)} + \frac{1}{2} \rho_{i_{Max}} (u_{i_{Max}})^2 \end{pmatrix} \right] \quad (54)$$

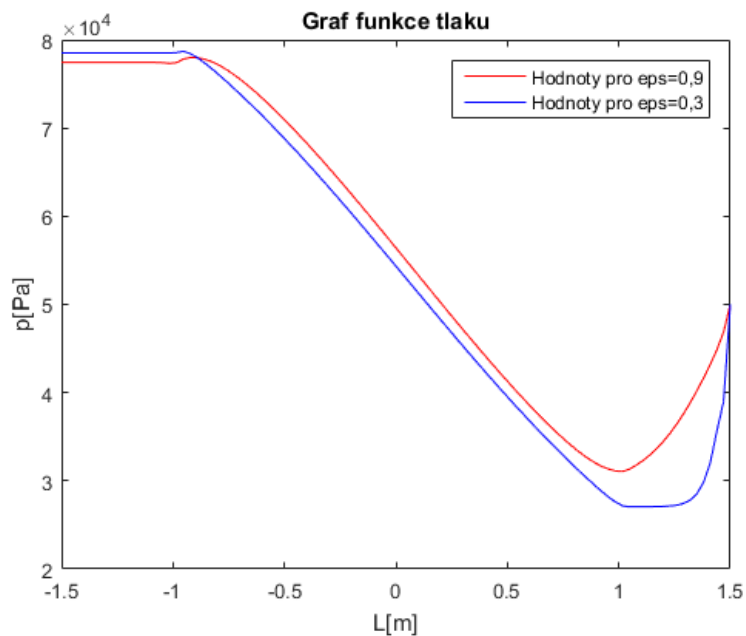
Kde jsme v poslední složce dosadili místo tlaku $p_{i_{Max}-1}$, tlak $p_{výstupní}$, který je roven polovině tlaku klidového.

4.2 Grafické výstupy

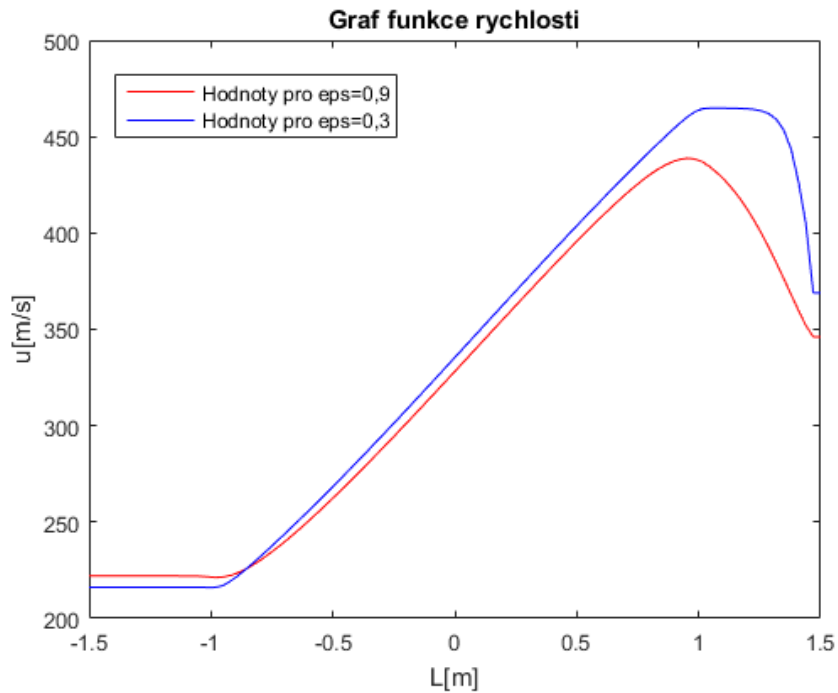
Graf5 zobrazuje vypočtenou funkci Rezidua pro $\varepsilon = 0,9$, pro $\varepsilon = 0,3$, konvergovalo Reziduum téměř na stejném počtu iterací. Z grafu je patrné, že se funkce ustálí tak na 8 200 časových krocích n , ale jistější je pro výpočet volit optimální počet časových vrstev $n_{Max} = 9\,000$, kdy je funkce Rezidua plně konstantní. Reziduum bylo vypočteno pro hustotu.



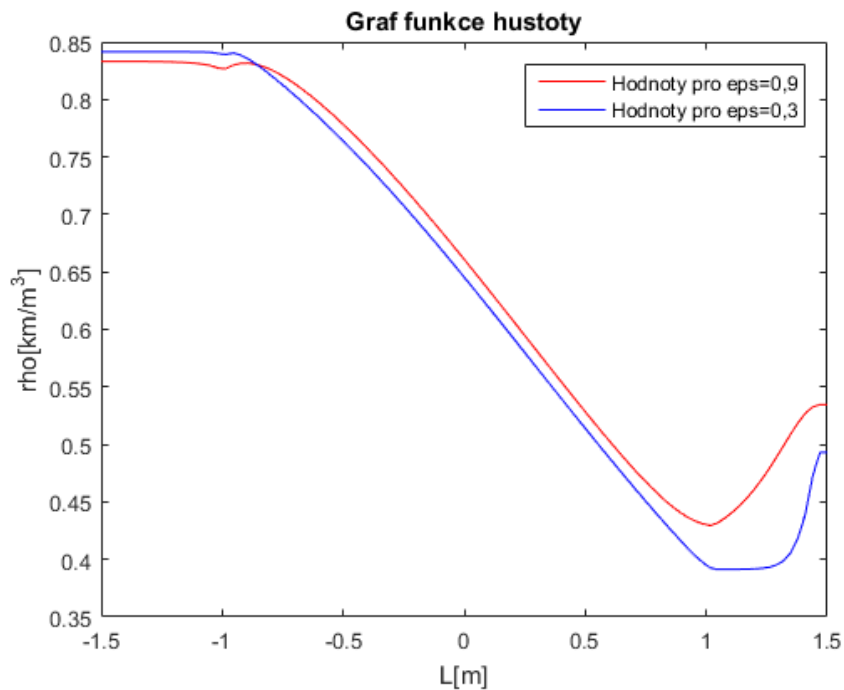
Graf6 ukazuje vypočtené hodnoty tlaku v Lavalově dýze, pro dva volené parametry ε , v grafu značeno eps.



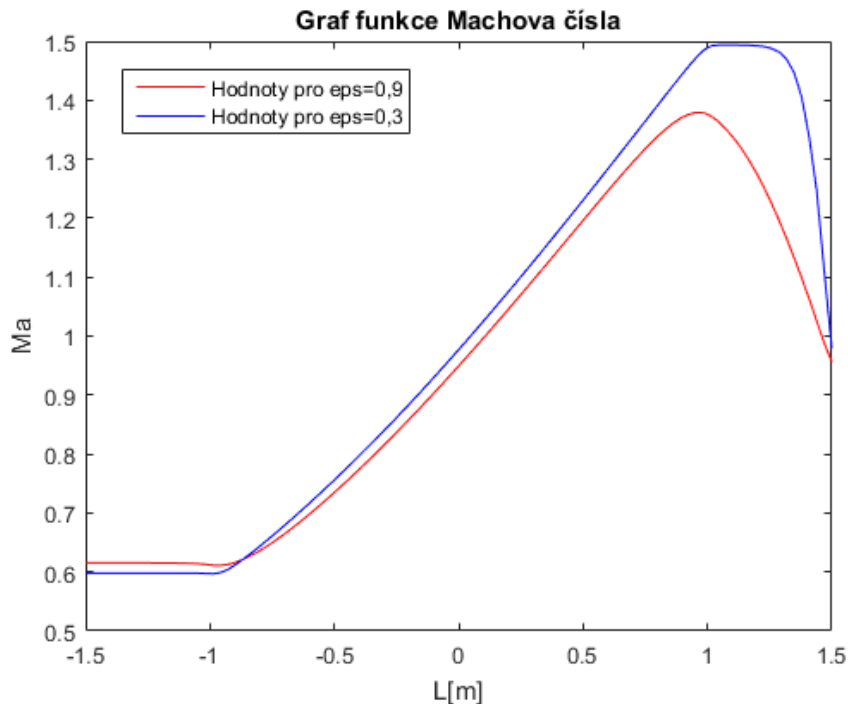
Graf7 ukazuje vypočtené hodnoty rychlosti v Lavalově dýze, pro dva volené parametry ε , v grafu značeno eps.



Graf8 ukazuje vypočtené hodnoty hustoty v Lavalově dýze, pro dva volené parametry ε , v grafu značeno eps.



Graf9 ukazuje vypočtené hodnoty Machova čísla v Lavalově dýze, pro dva volené parametry ε , v grafu značeno eps.



Z grafů je patrné, že hodnoty pro $\varepsilon = 0,9$ nejsou tak přesné jak pro hodnoty $\varepsilon = 0,3$. Tuto nepřesnost již můžeme přímo vyčíst z geometrie dýzy a to tak, že dýza v intervalech $\langle -1,5; -1 \rangle$ a $\langle 1; 1,5 \rangle$ má konstantní geometrii průřezu. Jak je patrné z Obr.1 a Obr.2, které byly uvedeny v první kapitole, tak platí, že konstantní geometrie průřezu dané dýzy má minimální, téměř nulový vliv na průběh fyzikálních veličin. Tudíž platí, že průběh funkce fyzikální veličiny v konstantním průřezu dýzy je také konstantní. Tuto úvahu splňuje hodnota $\varepsilon = 0,3$ mnohem více než hodnota $\varepsilon = 0,9$. Dále přesnost metody je možné ověřit pomocí Machova čísla, které by mělo být ve středu dýzy rovné jedné. A však pro $\varepsilon = 0,9$ je rovné $0,95$, ale pro $\varepsilon = 0,3$ je rovné $0,983$. Ale však výsledek je stále nepřesný. Tato nepřesnost může být způsobena, dalšími fyzikálními vlivy nebo nepřesností Laxovo-Friedrichsova schématu pro tuto úlohu. Kdybychom se posunuli od středu o dva nebo tři kroky (pozn.*) na vodorovné ose v Graf9, již bychom dosáhli požadované hodnoty Machova čísla, které by bylo rovné jedné. V Graf9 a Graf7 je také možné sponzorovat, že funkce pro $\varepsilon = 0,3$, klesá na výstupu prudce dolů a vzniká tzv. rázová vlna, tato vlna je nejspíše způsobena nízkou hodnotou rychlostí tekutiny na výstupu. Rázová vlna vzniká také v Graf6, kde je zase způsobena příliš vysokým tlakem na výstupu.

Pozn.(pro $\varepsilon = 0,3$ by stačili dva kroky, ale pro $\varepsilon = 0,9$, by bylo zapotřebí více kroků)*

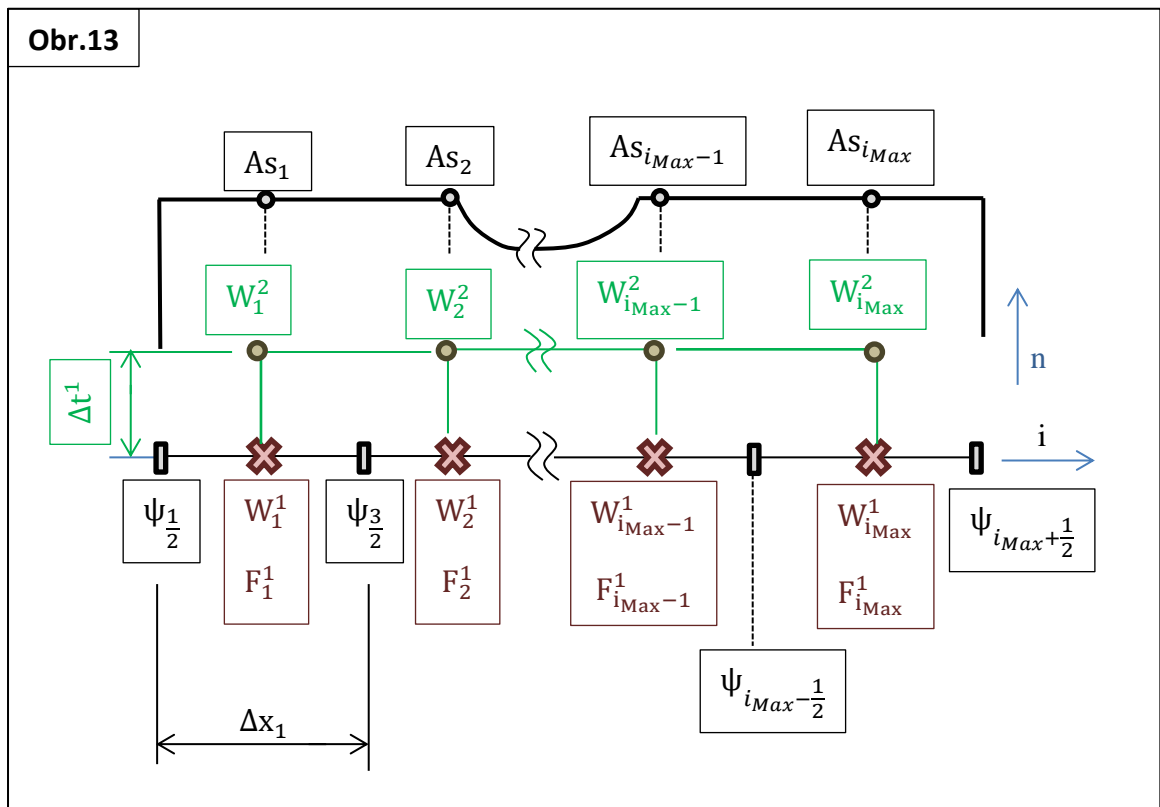
5. Numerické řešení proudění v Lavalově dýze pomocí metody konečných objemů

5.1 Formulace úlohy

Zadání úlohy je prakticky stejné, jako v kapitole 4. To znamená, že máme stacionární úlohu a stejnou dýzu viz. Obr.11. Akorát, že úlohu budeme řešit pomocí metody konečných objemů, tím pádem budeme uvažovat jiné numerické schéma úlohy. Numerické schéma, úlohy bude podobné schématu z Obr.8.

5.2 Výpočet

Úvaha numerického postupu výpočtu je zobrazena na Obr.13.



Při výpočtu budeme užívat stejných vztahů jak v kapitole 4. To znamená, že budeme používat rovnici (8). Tím pádem musíme znát hodnoty funkce geometrie průřezu A , v každém prostorovém kroku i . Jelikož se jedná o metodu konečných objemů, při které budou velikosti prostorových kroků Δx nekonstantní, musíme vytvořit nerovnoměrnou síť. Vytvoření nerovnoměrné sítě popisují následující vztahy.

$$\Delta x_1 = \frac{L}{i_{Max}} \quad (55)$$

Kde $1 \leq i \leq i_{\text{Max}}$

$$\Delta x_{i+1} = 0,99\Delta x_i \quad (56)$$

Nyní lze napsat vztah pro matematický popis vodorovné osy x (58).

$$x_1 = 0 \quad (57)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad (58)$$

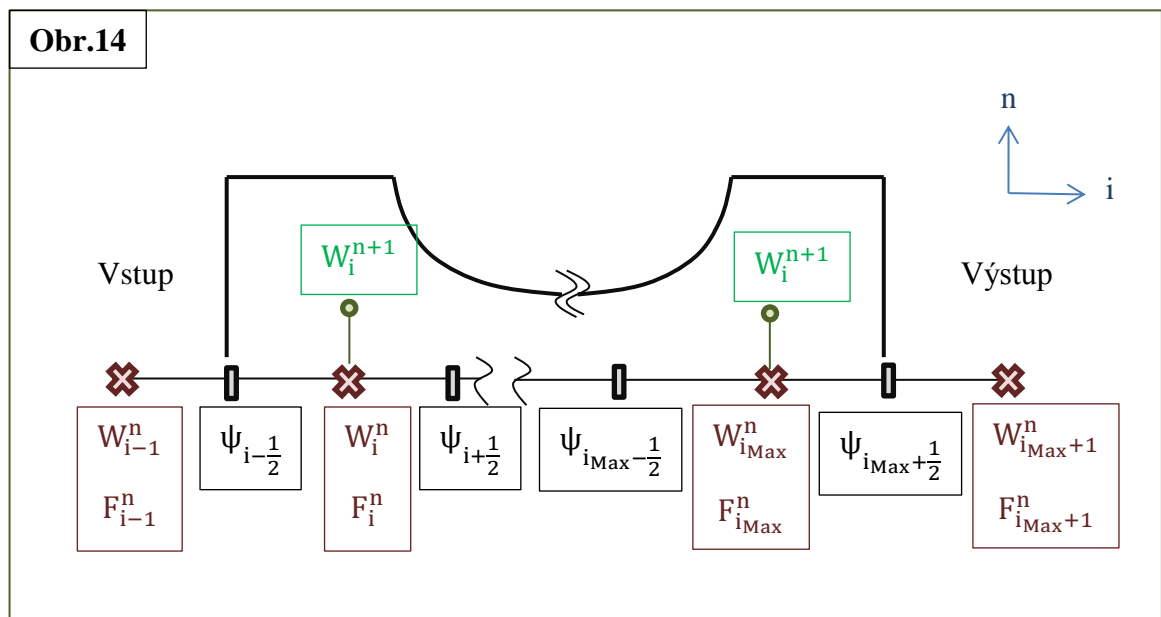
Ve vztahu (59) jsme převedli vztah (58), a to tak, aby pořadí jednotlivých x_i , bylo shodné s osou x dle Obr.11.

$$x_i = \frac{x_i}{x_{i_{\text{Max}}}} L - 1,5 \quad (59)$$

Nyní jsme vytvořili nerovnoměrnou prostorovou osu x , která je základem nerovnoměrné sítě. Jestliže však chceme počítat s požadovaným systémem Eulerových rovnic (9), musíme napočítat potřebnou funkci geometrie průřezu A . Tu spočítáme úplně stejně jako v kapitole 4, akorát že do vztahů (48) za proměnou x_i , dosadíme nově spočtené hodnoty ze vztahu (59). A po tomto výpočtu dopočítáme derivace A stejně jak ve vztahu (51). Protože se jedná o metodu konečných objemů, kde výpočet soustředíme do středů objemů. Musíme také do vztahu (9) dosazovat hodnotu funkce geometrie průřezu A_s nacházející se uprostřed daného objemu viz. vztah (60).

$$A_s = \frac{A_{i+1} - A_i}{2} \quad (60)$$

Nyní máme již vše potřebné k výpočtu všech vektorů ze vztahu (8). Jako první spočítáme pro všechny středy i vektory konzervativních proměnných W a poté vektory fyzikálních toků F . Tyto vektory budou násobeny funkcí geometrie průřezu A_s .



V dalším kroku dopočítáme vektor Q . Během výpočtu, musíme opět počítat pro každý prostorový krok i rychlost zvuku (11). Dále také musíme spočítat pro každý prostorový krok i velikost časového úseku Δt , ze kterého pak vybereme ten nejmenší viz. vztah (22), který dosadíme do finální rovnice (39) a do vzorců pro výpočet numerických toků (40) a (41). Z Obr.13 je patrné, že finální rovnici (39), nelze použít pro celý rozsah $1 \leq i \leq i_{Max}$, ale pouze pro vnitřek dýzy, kde platí $2 \leq i \leq i_{Max} - 1$. Protože by bylo nemožné spočítat numerické toky na vstupu a výstupu. Tato nemožnost vychází přímo z jejich vzorců (40) a (41), kde bychom neznali hodnoty vektorů konzervativních proměnných W_0 a $W_{i_{Max}+1}$. Tento fakt je patrný z Obr.14. Proto do výpočtu musíme přidat dvě okrajové podmínky, jelikož se jedná o stacionární úlohu, použijeme těchto okrajových podmínek (17) a (18).

Okrajovou podmínku pro vstup, kterou použijeme k výpočtu vektoru W_0^n , který by vznikl, kdybychom za prostorový krok dosadili jedna. Vektor W_0^n bude definován vztahy (10), (11) a (12), které budou násobeny funkcí geometrie průřezu v prvním prostorovém kroku As_1 .

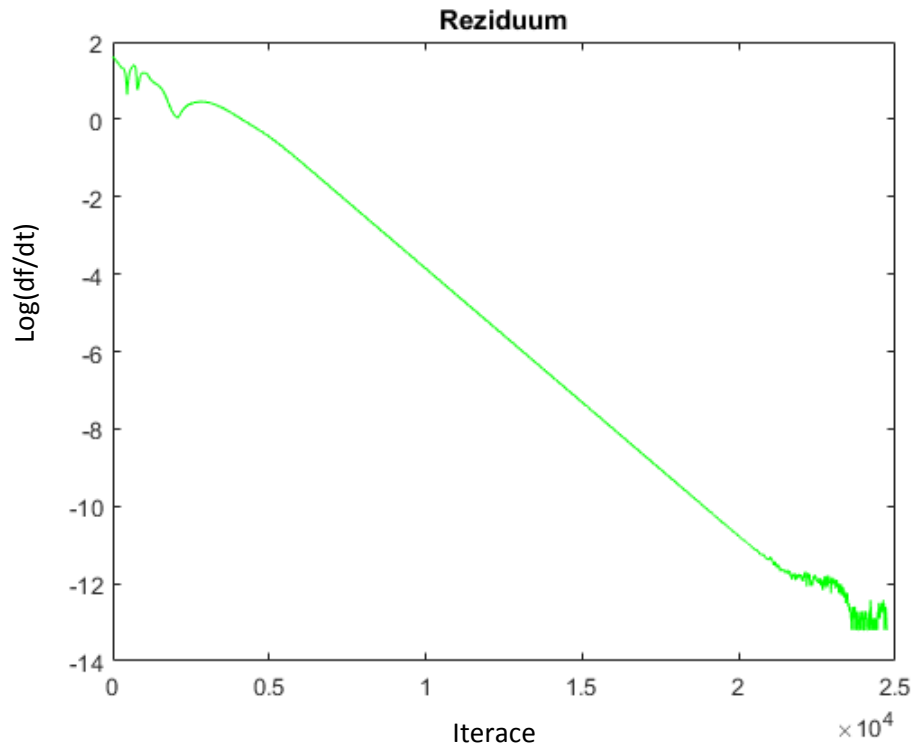
Okrajovou podmínku pro výstup, kterou použijeme k výpočtu vektoru $W_{i_{Max}+1}^n$, spočítáme ze stejné úvahy, jako v kapitole 4. Početní řešení je definováno vztahem (61).

$$W_{i_{Max}+1}^n = \left[As_{i_{Max}} \begin{pmatrix} \rho_{i_{Max}+1} \\ \rho_{i_{Max}+1} u_{i_{Max}+1} \\ E_{i_{Max}+1} \end{pmatrix} \right] = \left[As_{i_{Max}} \begin{pmatrix} \rho_{i_{Max}} \\ \rho_{i_{Max}} u_{i_{Max}} \\ \frac{p_{výstupní}}{(1-\kappa)} + \frac{1}{2} \rho_{i_{Max}} (u_{i_{Max}})^2 \end{pmatrix} \right] \quad (61)$$

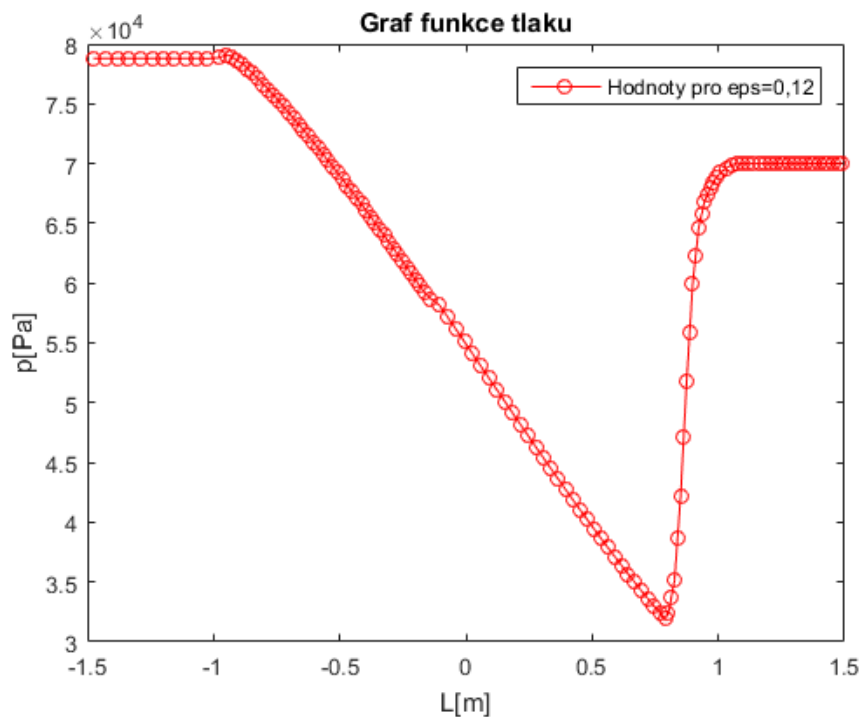
Kde dosadíme za výstupní tlak $p_{výstupní}$ hodnotu $0,7p_0$ tlaku klidového. Jestliže máme spočítané všechny hodnoty W , F a Q . Můžeme bez problému spočítat všechny numerické toky ψ , v celém rozsahu dýzy. Po všech těchto výpočet můžeme spočítat hodnoty vektoru konzervativních proměnných v nové časové vrstvě W_i^{n+1} dle vztahu (39).

5.3 Grafické výstupy

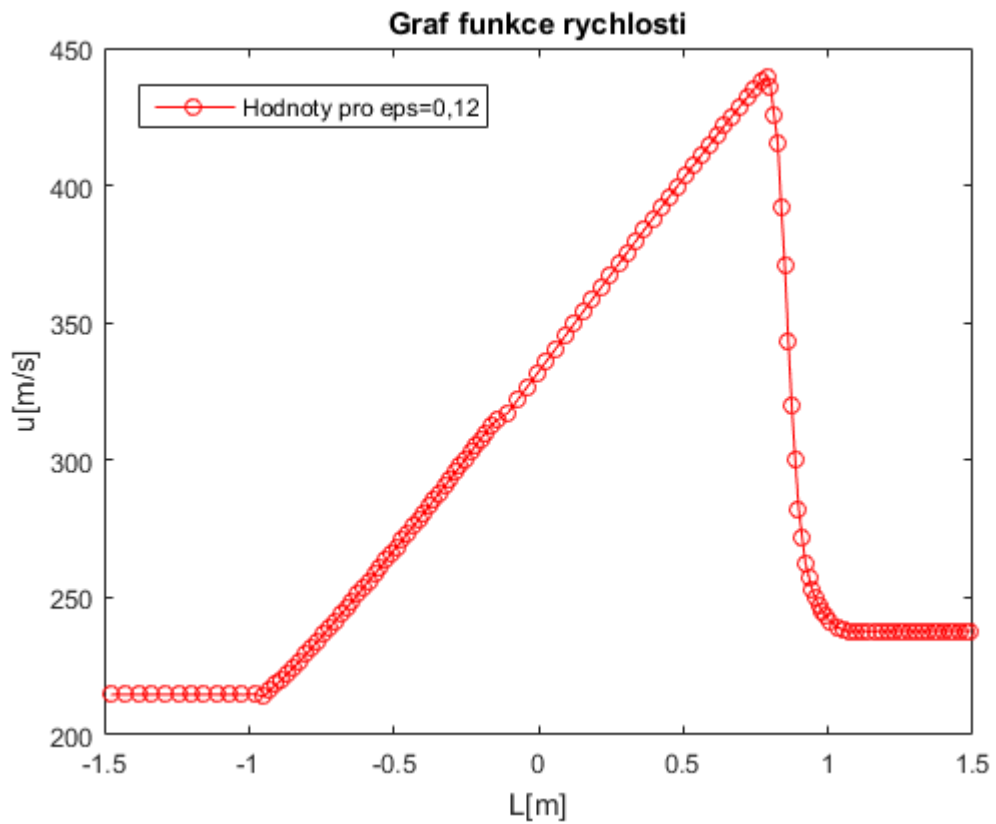
Graf10 zobrazuje funkci Rezidua vypočtenou pro hustotu. Z grafu je patrné, že se výpočet ustálí přibližně po 25 000 iterací, to znamená, že optimální počet časových vrstev n_{Max} je 25 000.



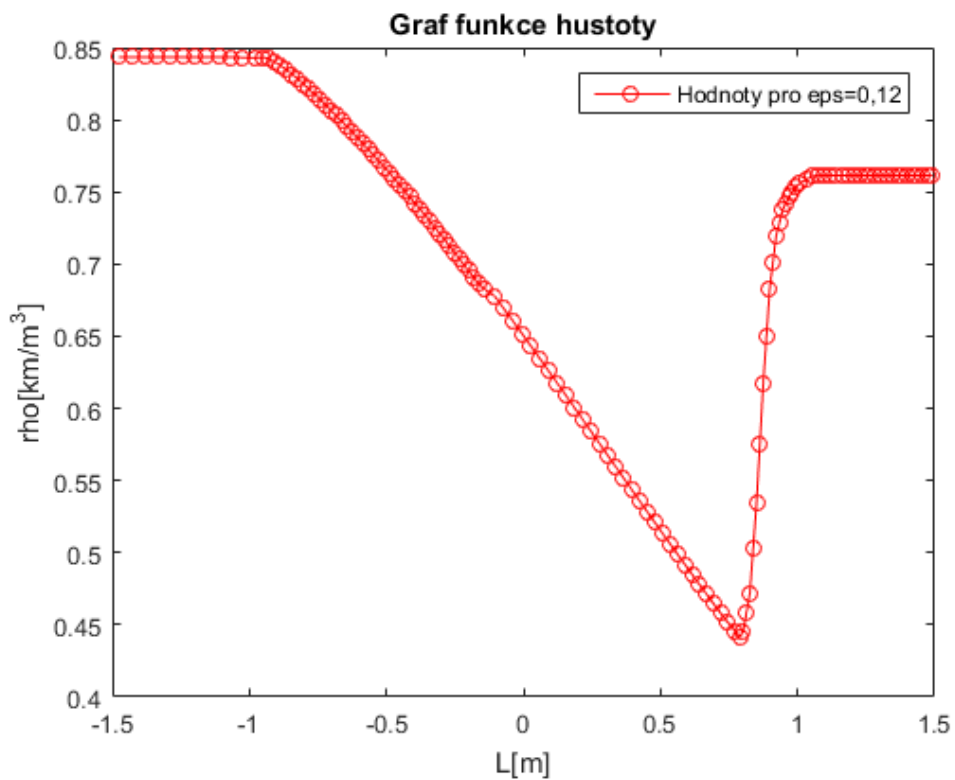
Graf11 ukazuje vypočtené hodnoty tlaku v Lavalově dýze, pro jeden volený parametr ε , v grafu značen jako eps.



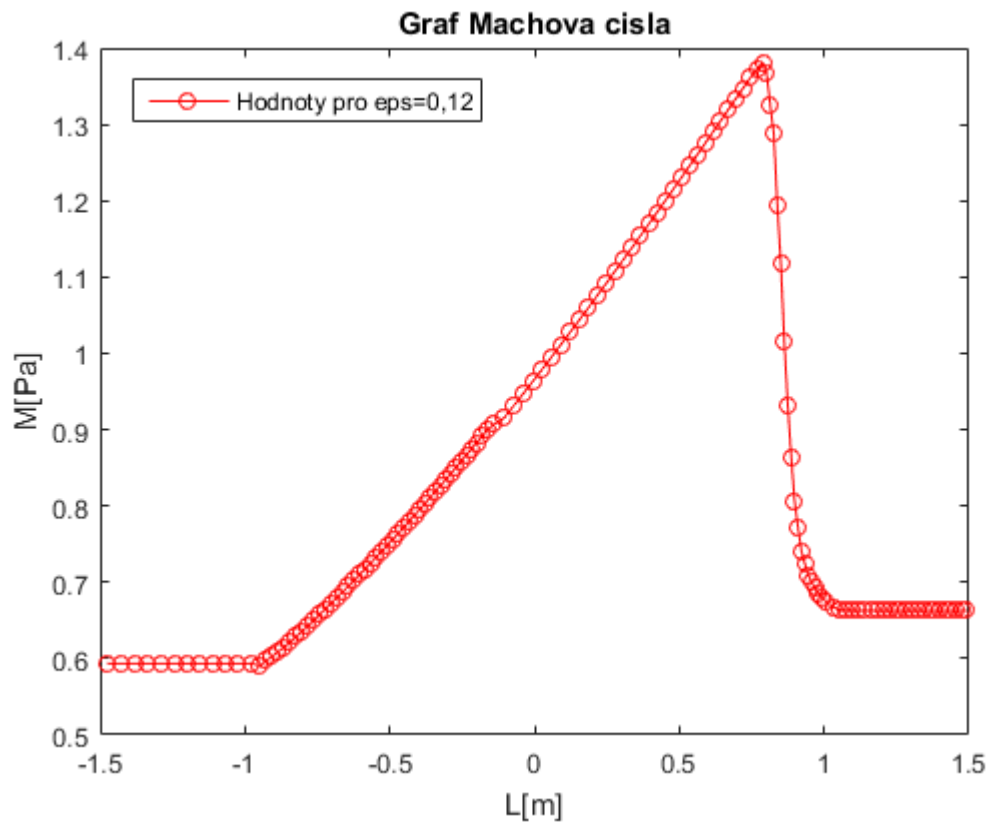
Graf12 ukazuje vypočtené hodnoty rychlosti v Lavalově dýze, pro jeden volený parametr ε , v grafu značen jako eps.



Graf13 ukazuje vypočtené hodnoty hustoty v Lavalově dýze, pro jeden volený parametr ε , v grafu značen jako eps.



Graf14 ukazuje vypočtené hodnoty Machova čísla v Lavalově dýze, pro jeden volený parametr ε , v grafu značen jako eps.



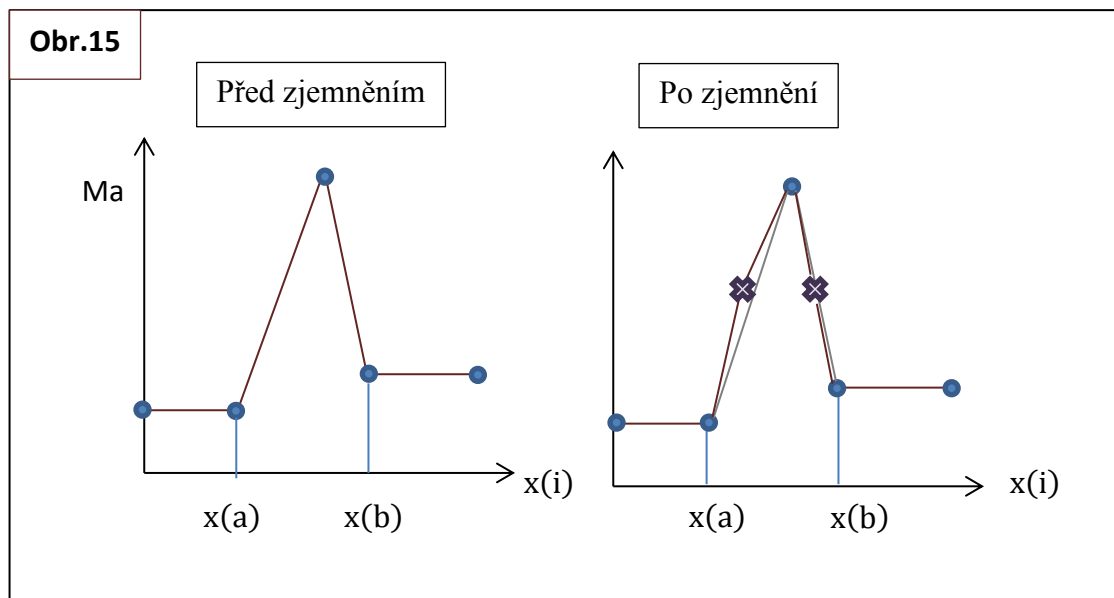
Styl křivky jsme volili takový, aby bylo dobře viditelné nerovnoměrné rozložení sítě na vodorovné ose x viz.Obr.11. Při použití metody konečných objemů jsme získali téměř stejný průběh vypočtených funkcí daných fyzikálních veličin jako při řešení stejné dýzy metodou konečných diferencí. A to včetně chyb, a to konkrétně opět pro Machovo číslo, které v bodě nule je rovno 0,982. Je však patrné, že jsme pro tuto metodu museli volit poloviční velikost parametru ε , abychom získali přesné hodnoty. Přesnost metody lze, také vidět na konstantním průběhu funkce v místech, kde má funkce geometrie průřezu konstantní průběh a to konkrétně v $x \in \langle -1,5; -1 \rangle$ a $\langle 1; 1,5 \rangle$. Ale však z grafů je také patrné, že v intervale $x \in \langle 1; 1,5 \rangle$, se hodnoty výrazně liší. Toto je způsobeno rozdílnými výstupními hodnoty pro tento případ. Z grafů lze také vidět rázovou vlnu, která vzniká z přestupu tekutiny z nekonstantního prostředí do konstantního prostředí. Tento jev může být opět způsoben příliš nízkými nebo vysokými hodnotami.

5.4 Význam metody konečných objemů

Jestliže se podíváme na Graf11 až Graf14. Můžeme na grafech vidět vyznačené body, které znamenají vypočtené hodnoty v daných středech objemů. Z grafů je také patrné, že daných bodů je někde příliš mnoho a jinde zase příliš málo. Konkrétně v místech, kde je funkce konstantní stačí dva body, avšak tam, kde se funkce rychle mění je zapotřebí více bodů. Pomocí přidávání bodů tzv. zhušťování sítě nám lépe umožní zachytit rázové vlny, které mohou mít výrazný vliv na průběh řešení. Problém je ten, že to nelze předem přesně určit, kde se průběh funkce bude rychle měnit popřípadě, kde budou vznikat rázové vlny. Pro konkrétní postup lepšího zachycení, můžeme využít dvě metody.

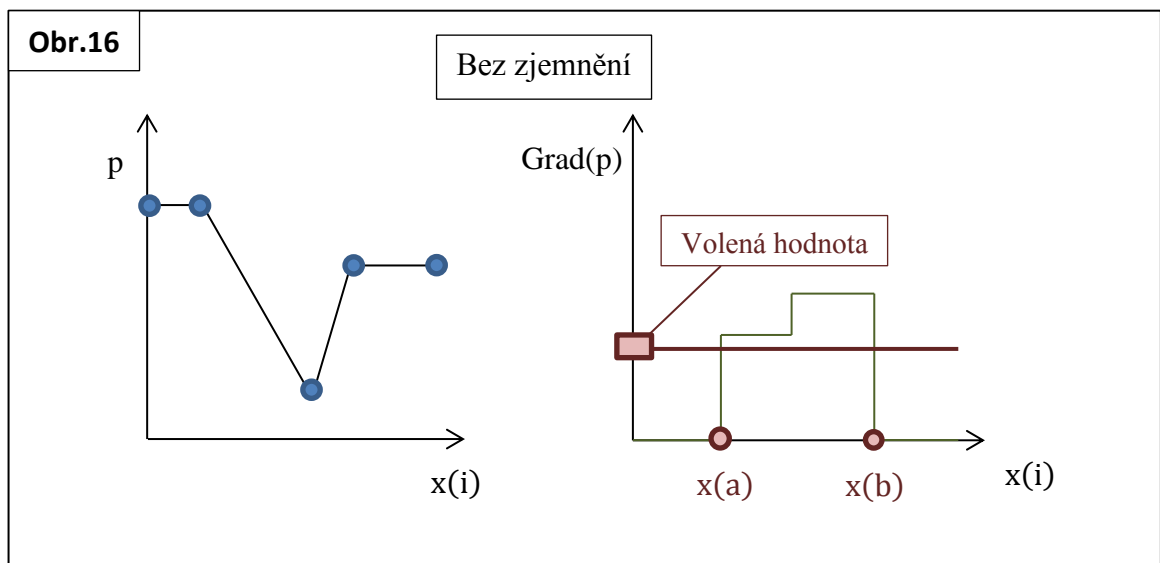
Metoda odhadu:

V této metodě předem vytvoříme nerovnoměrnou síť dle experimentů nebo odhadu. Po vytvoření nerovnoměrné sítě výpočet necháme dojet do poslední časové vrstvy n_{Max} . Poté se podíváme na výstupní grafy a nerovnoměrnou síť vytvoříme znovu, ale v té oblasti, kde se funkce nějakým způsobem mění, navýšíme počet prostorových kroků i . Tyto prostorové kroky budeme opět umisťovat do poloviny velikosti prostorového úseku (objemu) Δx , aby zůstal zachován princip metody konečných objemů. Tím se také budou zmenšovat velikosti nově vznikajících prostorových úseků Δx (objemů). A tím pádem dojde ke zhušťování, tj. k zjemňování sítě. Tento postup však nelze automatizovat. Budeme muset vytvářet nové a nové sítě, které budeme zhušťovat tak dlouho, dokud se bude funkce přibližovat co nejbližší k reálným hodnotám. Tato úvaha je zobrazena na Obr.15.



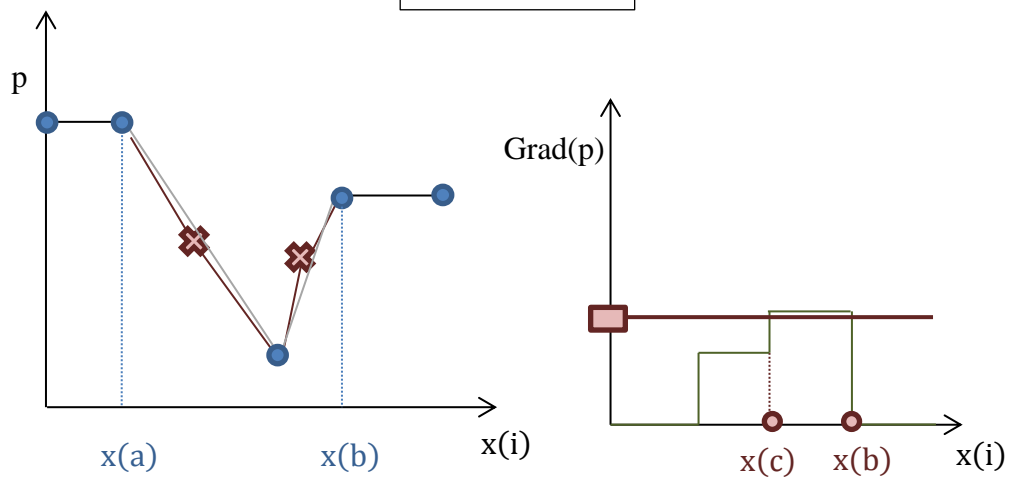
Metoda největšího gradientu:

Tato metoda je mnohem výhodnější, a méně pracnější na výpočet, protože ji lze automatizovat. Před začátkem zjemňování si musíme nejdříve spočítat gradient tj. derivace dané funkce. Jestliže bude derivace nulová, tak je jasné, že je funkce konstantní a není třeba zjemňovat síť. Jestliže derivace vyjde konstantní nebo bude vyjádřena nějakou funkcí, tak nás zajímají její hodnoty, které předem stanovíme. Program bude počítat, tak dlouho dokud hodnota gradientu nebude pod zvolenou hraniční hodnotou. Program si také vyhodnotí daný interval, kde hodnota gradientu přesahuje stanovenou mez. Náznak řešení je na Obr.16 a Obr.17. Tato metoda je vhodná pro případy, kdy je funkce dlouhou dobu konstantní a náhle se objeví skoková změna v průběhu funkce tj. rázová vlna. Jestliže zvolíme vhodný počet prostorových kroků i kroků a nižší gradient. Tak je velká šance, že tuto změnu zachytíme. A můžeme jí dokonale zjemnit a tím pádem znát její průběh. Což by u metody konečných diferencí bylo velmi obtížné, protože bychom museli udělat velmi mnoho prostorových kroků i , což by nám ještě více zpomalovalo výpočet a mnoho polohových úseků by bylo tam, kde by vůbec být nemuselo. A mohlo by se stát, že bychom potřebnou skokovou změnu vůbec nemuseli zachytit. Nebo jen velmi ostře. Proto je výhodnější pro výpočty, kde hrozí riziko skokových změn užít metodu konečných objemů.

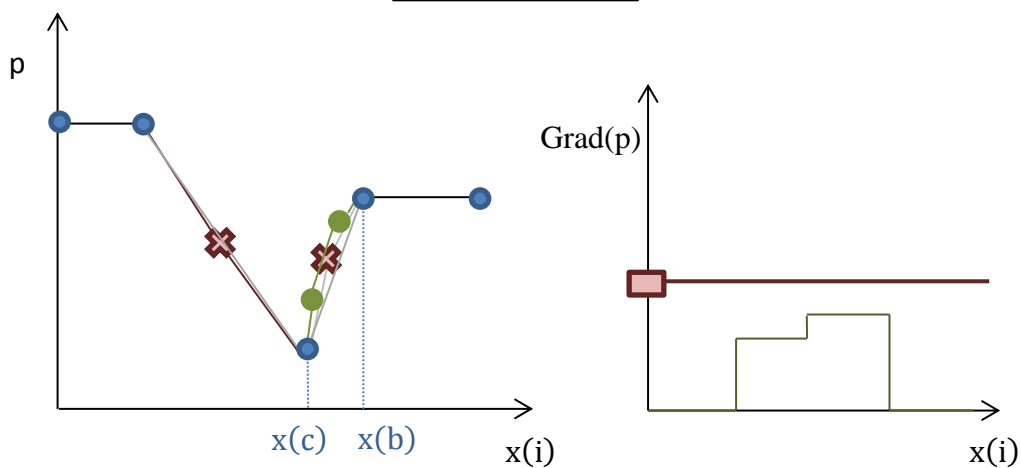


Obr.17

První zjemnění



Druhé zjemnění



Závěr

Před začátkem řešení jsem nejprve odvodil všechny potřebné rovnice, které nám popisují proudění tekutiny. Tyto rovnice jsem napsal vektorově, a tím pádem jsem získal systém Eulerových rovnic. Poté jsem tento systém převedl pro náš případ a to pro 1D proudění. Tyto rovnice byly aplikovány na dvou případech dle zadání. A to pro rázovou trubici s konstantní funkcí geometrie průřezu a Lavalovu dýzu naopak s proměnnou funkcí geometrie průřezu. V následujících krocích bylo zapotřebí zvolit vhodné numerické schéma, pomocí něhož by byla daná problematika řešena. Jako numerické schéma jsem volil jednoduché Laxovo-Freidrichsovo schéma, které není až tak přesné, ale je postačující pro tyto případy. Toto schéma bylo používáno pro dvě metody řešení a to pro metodu konečných diferencí a metodu konečných objemů. Metoda konečných objemů se ukázala být mnohem výhodnější pro zachycování náhlých skoků objevující se v průběhu funkce nebo rázových vln. Tato výhoda je způsobena nerovnoměrným dělením prostorové osy a následným vytvořením nerovnoměrné sítě. Díky nerovnoměrnému dělení sítě můžeme dát méně prostorových kroků do míst, kde je funkce téměř konstantní a tam, kde se funkce začne rychle měnit, přidáme těchto prostorových kroků více a tím dojde ke zhušťování sítě v dané oblasti. Výsledkem bude průběh funkce, kde rychlé funkční skoky nebo rázové vlny budou přehledně vypočítány v mnoha bodech.

6. Příloha

Tato kapitola je věnována, fyzikálnímu objasnění problematiky proudění. Toto objasnění nám lépe pomůže pochopit systém Eulerových rovnic, se kterými jsme počítali v předchozích kapitolách.

6.1 Matematické odvození problému proudění

Úvaha je zobrazena na Obr.26, kde jednotlivé členy znamenají, poloha částice $\vec{x} \in R^3$, čas $t \in \langle 0; \infty \rangle$, poloha částice čase nula \vec{Y} a fyzikální vlastnost T .

Fyzikální vlastnost T má charakter fyzikálního pole závislých na souřadnicích a čase. Fyzikální vlastnost vztahujeme k objemu soustavy daného tělesa, který látka zaujímá v prostoru, a tím získáme parametr nezávislý na rozměrech tělesa.

Platí Eulerův princip, který je užíván pro fyzikální vlastnost vztáženou k prostoru (61).

$$T = T(\vec{x}; t) \quad (61)$$

Jestliže budeme chtít vyjádřit celkový přírůstek fyzikální vlastnosti v prostoru a čase, musíme vyjádřit totální diferenciál (62) pro fyzikální veličinu T (61).

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx \quad (62)$$

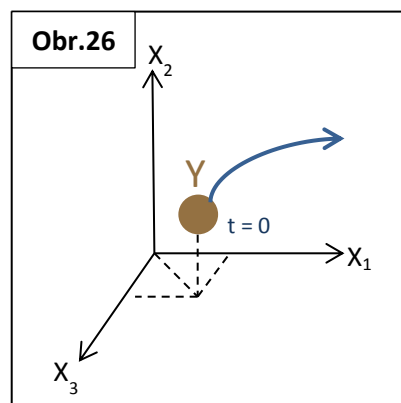
Vztáhneme-li totální diferenciál dT k časovému diferenciálu dt obdržíme totální rychlost změny a tím i výslednou konvektivní materiálovou derivaci (63).

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (63)$$

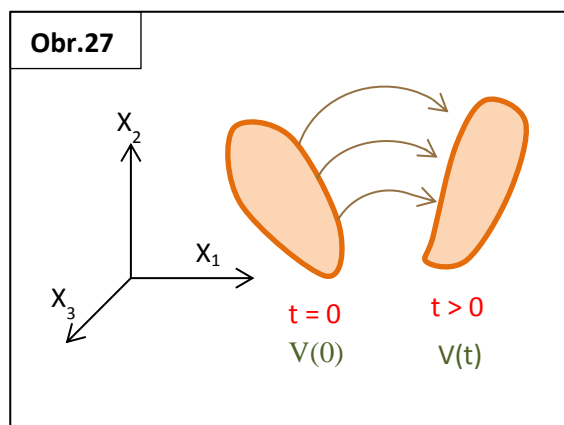
Po dosazení rychlosti u ($u_i = \frac{dx}{dt}$) do rovnice (63), získáme úplné vyjádření materiálové derivace (64).

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x_i} u_i \quad (64)$$

Jestliže nás bude zajímat proudění prezentováno pohybem tj. transportem částic, budeme muset znát rovnici, která nám tento pohyb neboli transport bude vyjadřovat. Tato potřebná rovnice se nazývá Transportní rovnice, a v následujících krocích se pokusíme o její odvození.



Pro odvození Transportní rovnice potřebujeme materiálovou derivaci v integrálním tvaru. Kde integrovaná funkce i integrační oblast jsou v prostorové konfiguraci. Oblastí integrace je objem, který se mění v čase, a tudíž nelze prohodit integrování a derivování. Schématické znázornění je na Obr.27. Kde jednotlivé členy znamenají, $\Phi(t)$ bilancovanou veličinu a objem $V(t)$. Bilancovaná veličina $\Phi(t)$ je definována vztahem (65).



$$\Phi = \int_{V(t)} T(\vec{x}; t) \vec{dx} \quad (65)$$

Nyní využijeme rovnici (66) pro substituci do rovnice (65).

$$\int f(\vec{x}) \vec{dx} = \left| \begin{array}{l} \vec{x} = h(\vec{y}) \\ \vec{dx} = \vec{h} \vec{dy} \end{array} \right| = \int_{V(t)} f(h(\vec{y})) \vec{h} \vec{dy} \quad (66)$$

Ze které vyjádříme $\vec{h} = \frac{\vec{dx}}{\vec{dy}}$

Nyní uděláme Jakobián J (67).

$$J = \left| \frac{\vec{dx}}{\vec{dy}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_1}{dy_2} & \frac{dx_1}{dy_3} \\ \frac{dx_2}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_2} & \frac{dx_2}{dy_3} \\ \frac{dx_3}{dy_1} & \frac{dx_3}{dy_2} & \frac{dx_3}{dy_3} \end{vmatrix} \quad (67)$$

Po vyjádření Jakobiánu (67), vyjádříme jeho determinant. A poté nově vzniklou rovnici, budeme derivovat podle času. Tuto operaci lze vyjádřit vztahem (68).

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial y_1} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial y_2} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial y_3} \\ \frac{dx_2}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_2} & \frac{dx_2}{dy_3} \\ \frac{dx_3}{dy_1} & \frac{dx_3}{dy_2} & \frac{dx_3}{dy_3} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_1}{dy_2} & \frac{dx_1}{dy_3} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial y_1} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial y_2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial y_3} \\ \frac{dx_3}{dy_1} & \frac{dx_3}{dy_2} & \frac{dx_3}{dy_3} \end{vmatrix} +$$

$$+ \det \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_1}{dy_2} & \frac{dx_1}{dy_3} \\ \frac{dx_2}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_2} & \frac{dx_2}{dy_3} \\ \frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial y_1} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial y_2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial y_3} \end{vmatrix} = J^I + J^{II} + J^{III}. \quad (68)$$

Rovnici (55) lze zobecnit na rovnici (69).

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial y_j} (u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial x_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \quad (69)$$

Po rozepsání rovnice (69) získáme rovnici (70), kde za jednotlivé indexy dosazujeme $i; j; k \dots 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_j} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_j} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \\ &\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_j} \dots \quad (70) \end{aligned}$$

Jestliže dál rozepíšeme jednotlivé členy rovnice (70) do y_j a za derivace $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, kde $i \neq k$ dosadíme 1, obdržíme vzorce pro jednotlivé členy viz. (71), (72) a (73).

$$J^I = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} J \quad (71)$$

$$J^{II} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} J \quad (72)$$

$$J^{III} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} J \quad (73)$$

Tudíž platí vztah (74).

$$J^I + J^{II} + J^{III} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} J + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} J + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} J = J \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J \quad (74)$$

Nyní budeme derivovat bilancovanou veličinu $\Phi(t)$ podle času.

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi} &= \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_{V(t)} T(\vec{x}; t) \vec{dx} \right] = \frac{d}{dt} \left[\int_{V(t)} T(\vec{x}; t) J \vec{dy} \right] = \\
 &= \int_{V(t)} \left[\frac{dT(\vec{x}; t)}{dt} J + T(\vec{x}; t) \frac{dJ}{dt} \right] \vec{dy} = \int_{V(t)} \left[\frac{dT}{dt} J + T \frac{dJ}{dt} \right] \vec{dy} = \\
 &= \int_{V(t)} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x_i} u_i \right) J + T \frac{dJ}{dt} \right] \vec{dy} = \int_{V(t)} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x_i} u_i \right) J + T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J \right] \vec{dy} = \\
 &= \int_{V(t)} \left[J \frac{\partial T}{\partial t} + J \frac{\partial T}{\partial x_i} u_i + T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J \right] \vec{dy} = \int_{V(t)} \left[J \frac{\partial T}{\partial t} + J \frac{\partial(u_i T)}{\partial x_i} \right] \vec{dy} = \\
 &= \int_{V(t)} \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_i T)}{\partial x_i} \right] J \vec{dy} = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_i T)}{\partial x_i} \right] \vec{dx} \quad (75)
 \end{aligned}$$

Výsledkem je již zmíněná transportní rovnice (76).

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_i T)}{\partial x_i} \right] \vec{dx} \quad (76)$$

6.2 Rovnice kontinuity

Z transportní rovnice lze odvodit rovnici kontinuity, která je potřebná pro výpočty proudění. Kde Bilancovanou veličinou je hmotnost m a ta je prezentována fyzikální veličinou hustotou ρ . Po dosazení těchto veličin do transportní rovnice (76), získáme integrální tvar rovnice kontinuity (77).

$$\dot{m} = \frac{dm(t)}{dt} = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \rho)}{\partial x_i} \right] \vec{dx} \quad (77)$$

Položíme-li rovnici (77) rovnou nule získáme diferenciální tvar rovnice kontinuity pro homogenní prostředí tj. tekutinu (78).

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \rho)}{\partial x_i} \right] \vec{dx} = 0 \quad (78)$$

Diferenciální tvar rovnice kontinuity pro homogenní tekutinu je vyjádřen vztahem (79).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \rho)}{\partial x_i} = 0 \quad (79)$$

6.3 Pohybové rovnice aneb zákon zachování hybnosti

Další potřebnou rovnicí pro proudění částic, je ta, která nám vyjadřuje jejich hybnost. Kde Bilancovanou fyzikální veličinou Φ je hybnost H a ta je prezentována příslušnou fyzikální veličinou, kterou získáme tím, že hybnost (80) vydělíme objemem V .

$$\Phi = H = m\vec{u} = mu_j \quad (80)$$

$$T = \rho\vec{u} = \rho u_j \quad (81)$$

Obecný vztah pro hybnost (82), kde F je síla.

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n F_j \quad (82)$$

Po přidání transportní rovnice (76) do rovnice (82) a dalších matematických úpravách získáme rovnici hybnosti (83).

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_i} \right] \vec{dx} = \sum_{j=1}^n F_j \quad (83)$$

Kde

$$\sum_{j=1}^n F_j = \sum_{j=1}^3 F_j = F^{\text{objemové}} + F^{\text{povrchové}} \quad (84)$$

Vnější objemové síly určíme ze vztahu (85)

$$F^{\text{objemové}} = \int_V \rho \vec{f} \vec{dx} \quad (85)$$

Kde \vec{f} je vektor pole působících na jednotku hmotnosti. Nejčastěji bývá zastupován gravitačním polem \vec{g} ($\vec{f} = \vec{g}$).

Vnitřní povrchové síly určíme ze vztahu (86), kde \vec{n} je normálový vektor.

$$F^{\text{povrchové}} = \int_S \vec{n} \cdot \vec{\sigma} dS \quad (86)$$

Kde $\vec{\sigma}$ je tenzor celkových vnitřních napětí a po dosazení za jednotlivé síly získáme rovnici (87).

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_i} \right] \vec{dx} = \int_V \rho \vec{f} \vec{dx} + \int_S \vec{n} \cdot \vec{\sigma} dS \quad (87)$$

Jestliže v rovnici (74) budeme aplikovat Gaussovu větu, získáme integrální tvar (88).

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_i} \right] \vec{dx} = \int_V \rho \vec{f} \vec{dx} + \int_V \text{div } \vec{\sigma} \vec{dx} \quad (88)$$

Diferenciální tvar rovnice (88) vyjadřuje vztah (89).

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_i} = \rho \vec{f} + \text{div } \bar{\sigma} \quad (89)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_i} = \rho f_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \quad (90)$$

Kde tenzor celkových napětí $\bar{\sigma}$ lze rozložit do dvou částí (91), kde p znamená izotropní tlak, $\bar{\delta}$ jednotkový vektor a $\bar{\tau}$ tenzor dynamických napětí.

$$\bar{\sigma} = -p\bar{\delta} + \bar{\tau} \quad (91)$$

Tenzor dynamických napětí je závislý na tenzoru rychlosti deformace $\bar{\Delta}$ a dynamické viskozitě μ . Dále jednotlivé členy znamenají koeficient λ a tr , který je odvozen z anglického slova trace a jedná se o stopu tenzoru tj. součet prvků po hlavní diagonále.

Rozložení tenzoru dynamických napětí je vyjádřeno vztahem (92).

$$\bar{\tau} = \lambda \bar{\delta} \text{tr} \bar{\Delta} + 2\mu \bar{\Delta} \quad (92)$$

Kde člen $tr \bar{\Delta}$ lze vyjádřit vztahy (93) a (94).

$$\text{tr} \bar{\Delta} = \text{tr} \Delta_{ii} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{u} \quad (93)$$

$$\text{tr} \bar{\Delta} = \text{tr} \Delta_{ij} = \text{tr} \Delta_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (94)$$

Pro stlačitelné tekutiny dosadíme rovnici (93) do rovnice (92) a získáme Newtonův zákon pro stlačitelné tekutiny (94).

$$\bar{\tau} = \lambda \bar{\delta} (\nabla \cdot \vec{u}) + 2\mu \bar{\Delta} \quad (94)$$

Kde rovnice kontinuity pro nestlačitelné tekutiny (95) tj. kapaliny se rovná nule ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$).

$$\bar{\tau} = 2\mu \bar{\Delta} \quad (95)$$

Pro stlačitelné tekutiny dosadíme rovnici (94) do rovnice (92) a po dalších matematických úpravách získám Newtonův zákon pro nestlačitelné tekutiny (102). Tohoto postupu užíváme pro vyjádření koeficientu λ v rovnici (92).

$$\bar{\tau} = \lambda \bar{\delta} (\text{tr} \bar{\Delta}) + 2\mu \bar{\Delta} \quad (96)$$

$$\bar{\tau} = \lambda \bar{\delta} (\text{tr} \bar{\Delta}) + 2\mu \bar{\Delta} / \cdot \text{tr} \quad (97)$$

$$\text{tr} \bar{\tau} = \lambda \text{tr} \bar{\delta} (\text{tr} \bar{\Delta}) + 2\mu \text{tr} \bar{\Delta} \quad (98)$$

$$\text{tr } \bar{\tau} = \lambda 3 (\text{tr } \bar{\Delta}) + 2\mu \text{tr } \bar{\Delta} \quad (99)$$

$$\text{tr } \bar{\tau} = \text{tr } \bar{\Delta} (\lambda 3 + 2\mu) \quad (100)$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (101)$$

$$\bar{\tau} = -\frac{2}{3}\mu \bar{\delta} (\text{tr } \bar{\Delta}) + 2\mu \bar{\Delta} \quad (102)$$

Jestliže rovnici (91) dosadíme do rovnice (89) získáme rovnici (103). Po dalších matematických úpravách dostaneme dynamickou rovnici (107), potřebnou pro popis proudění.

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_i} = \rho \vec{f} + \text{div}(-p \bar{\delta} + \bar{\tau}) \quad (103)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_i} = \rho \vec{f} + \frac{\partial}{\partial x_i} (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) \quad (104)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_i} = \rho \vec{f} - \frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (105)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_i} = \rho \vec{f} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (106)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i + p \delta_{ij})}{\partial x_i} = \rho \vec{f} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (107)$$

6.4 Zákon zachování energie

Poslední vztah, který je, potřebný pro popis proudění je znalost energie proudících částic. Při odvození této rovnice budeme postupovat obdobně jak v předchozích případech. Bilancovanou veličinou bude energie E a fyzikální vlastnost T bude prezentována kinetickou energií E_k . Ve vztahu (108) znamená E_p potenciální energii.

$$\Phi = E = E_p + E_k \quad (108)$$

Nyní vztah (108) dosadíme do transportní rovnice (76).

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (E u_i)}{\partial x_i} \right] \vec{d}\vec{x} = P + G \quad (109)$$

Kde členy P a G vyjadřují energie.

$$P = p_{\text{objemu}} + p_{\text{povrchu}} \quad (110)$$

$$G = G_{\text{zdroj tepla}} - G_{\text{tok tepla}} \quad (111)$$

Tyto jednotlivé členy dále rozepíšeme do vztahů (112), (113), (114) a (115). Písmeno s ve vztahu (115) znamená objemový zdroj tepla.

$$p_{\text{objemu}} = \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} \, d\vec{x} \quad (112)$$

$$p_{\text{povrchu}} = \int_S \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{u} \, dS \quad (113)$$

$$Q_{\text{zdroj tepla}} = \int_V \rho s \, d\vec{x} \quad (114)$$

$$Q_{\text{tok tepla}} = \int_S \vec{n} \cdot \vec{q} \, dS \quad (115)$$

Tyto vztahy (112), (113), (114) a (115), dosadíme do rovnice (109) za jednotlivé členy energií P a Q . A poté získáme integrální tvar rovnice zachování energie (116).

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i)}{\partial x_i} \right] d\vec{x} = \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} \, d\vec{x} + \int_S \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{u} \, dS + \int_V \rho s \, d\vec{x} - \int_S \vec{n} \cdot \vec{q} \, dS \quad (116)$$

Pro získání diferenciálního tvaru budeme v rovnici (116) aplikovat Gaussovu větu a získáme vztah (117).

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i)}{\partial x_i} \right] d\vec{x} = \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} \, d\vec{x} + \int_V \text{div}(\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) \, d\vec{x} + \int_V \rho s \, d\vec{x} - \int_V \text{div} \vec{q} \, d\vec{x} \quad (117)$$

Diferenciální tvar rovnice (118) získáme matematickou úpravou rovnice (117).

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i)}{\partial x_i} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \text{div}(\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) + \rho s - \text{div} \vec{q} \quad (118)$$

Dále upravíme rovnici (118) a to tak, že za tenzor celkových vnitřních napětí $\vec{\sigma}$ dosadíme vztah (91) do rovnice (118).

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i)}{\partial x_i} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \text{div} \left((-p\vec{\delta} + \vec{\tau}) \cdot \vec{u} \right) + \rho s - \text{div} \vec{q} \quad (119)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i)}{\partial x_i} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \text{div}(-p\vec{\delta} \cdot \vec{u} + \vec{\tau} \cdot \vec{u}) + \rho s - \text{div} \vec{q} \quad (120)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i)}{\partial x_i} = \rho f_i u_i - \text{div}(p\vec{\delta} \cdot \vec{u}) + \text{div}(\vec{\tau} \cdot \vec{u}) + \rho s - \text{div} \vec{q} \quad (121)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i)}{\partial x_i} = \rho f_i u_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (p\delta_{ji} \cdot u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} \cdot u_i) + \rho s - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (122)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i)}{\partial x_i} = \rho f_i u_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (p u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} \cdot u_i) + \rho s - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (123)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(pu_i)}{\partial x_i} = \rho f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} \cdot u_i) + \rho s - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (124)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu_i + pu_i)}{\partial x_i} = \rho f_i u_i + \frac{\partial(\tau_{ji} \cdot u_i)}{\partial x_j} + \rho s - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (125)$$

A finální tvar rovnice zachování mechanické energie (126)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial((E+p)u_i)}{\partial x_i} = \rho f_i u_i + \frac{\partial(\tau_{ji} \cdot u_i)}{\partial x_j} + \rho s - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (126)$$

Tyto rovnice dále doplníme ještě dvěma rovnicemi a to stavovou rovnicí ideálního plynu (127), kde jednotlivé členy znamenají tlak p , hustotu ρ , měrnou plynovou konstantu (pro suchý vzduch $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$) r a teplotu T .

$$p = \rho r T \quad (127)$$

Vzorec pro výpočet měrné plynové konstanty r je dán vztahem (128). Kde jednotlivé členy znamenají c_p měrnou tepelnou kapacitu za stálého tlaku [$\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$] a c_v měrnou tepelnou kapacitu za stálého objemu [$\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$].

$$r = c_p - c_v \quad (128)$$

Dále uvedeme vzorec pro výpočet Poissonovi konstanty κ (129).

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (129)$$

A vztah pro výpočet energie (130), kde U představuje vnitřní energii.

$$E = U + E_{\text{kinetická}} \quad (130)$$

Po dosazení za jednotlivé členy vydělíme rovnicí (130) objemem, a tudíž vyjde vztah (132).

$$E = c_v m T + \frac{1}{2} m u_i u_i / \div V \quad (131)$$

$$E = c_v \rho T + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \quad (132)$$

Nyní vyjádříme c_p z rovnice (129) a dosadím do vztahu (128).

$$c_p = \kappa c_v \quad (133)$$

$$r = \kappa c_v - c_v = c_v (\kappa - 1) \quad (134)$$

V dalším kroku dosadíme rovnicí (134) do stavové rovnice (128) a vyjádřím c_v , které dosadíme do vztahu (132).

$$p = \rho r T = \rho c_v (\kappa - 1) T \quad (135)$$

$$c_v = \frac{p}{\rho (\kappa - 1) T} \quad (136)$$

$$E = \frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2}\rho u_i u_i \quad (137)$$

Z rovnice (137) lze vyjádřit také vztah pro tlak (138).

$$p = (\kappa - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) \quad (138)$$

6.5 Systém Eulerových rovnic pro 1D proudění

Během předešlých výpočtů jsme získali tzv. systém Navier-Stokesových rovnic. A těmi jsou.

Rovnice kontinuity (79).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \rho)}{\partial x_i} = 0 \quad (79)$$

Pohybová rovnice (107).

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho u_i + p \delta_{ij})}{\partial x_i} = \rho \vec{f} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (107)$$

Rovnice o zákonu zachování energie (126).

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial((E+p)u_i)}{\partial x_i} = \rho f_i u_i + \frac{\partial(\tau_{ji} \cdot u_i)}{\partial x_j} + \rho s - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (126)$$

Stavová rovnice (127).

$$p = \rho r T \quad (127)$$

Rovnice pro výpočet tlaku (138)

$$p = (\kappa - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) \quad (138)$$

Jestliže pravou stranu rovnic (79), (107) a (126), položíme rovnou nule, získáme systém Eulerových rovnic.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \rho)}{\partial x_i} = 0 \quad (139)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho u_i + p \delta_{ij})}{\partial x_i} = 0 \quad (140)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial((E+p)u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (141)$$

Tyto rovnice přepíšeme pro 1D proudění do vztahů (142), (143) a (144).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (142)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \quad (143)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial((E+p)u)}{\partial x} = 0 \quad (144)$$

Veškeré informace byli získány ze zdrojů [1], [2] a [4].

6.6 Výpočet vlastních vektorů pro systém Eulerových rovnic v 1D

Jestliže budeme mít již zmiňovaný systém Eulerových rovnic ve vektorovém tvaru (145), který vznikl z vztahu (142), (143) a (144).

$$W_t + F_x = 0 \quad (145)$$

A po dosazení za jednotlivé vektory vyjde vztah (146).

$$\frac{\partial[\rho \quad \rho u \quad E]^T}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u \quad \rho u^2 + p \quad (E+p)u]^T}{\partial x} = 0 \quad (146)$$

Kde energii E vyjádříme ze vztahu (137).

$$\frac{\partial[\rho \quad \rho u \quad \frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2}\rho u^2]^T}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u \quad \rho u^2 + p \quad (\frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2}\rho u^2 + p)u]^T}{\partial x} = 0 \quad (147)$$

Nyní rovnici (147) přepíšeme do jednotlivých složek (148), (149) a (150).

$$(\rho)_t + (\rho u)_x = 0 \quad (148)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 \quad (149)$$

$$\left(\frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2}\rho u^2\right)_t + \left(\left(\frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2}\rho u^2 + p\right)u\right)_x = 0 \quad (150)$$

Nyní provedeme derivaci těchto rovnic (148), (149) a (150) dle příslušných indexů.

Derivace rovnice (148):

$$\rho_t + u_x \rho + \rho_x u = 0 \quad (151)$$

Derivace rovnice (149):

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = (\rho u)_t + ((\rho u)u + p)_x = 0 \quad (152)$$

$$\rho_t u + u_t \rho + \rho u_x u + u_x \rho u + p_x = 0 \quad (153)$$

$$(\rho_t + \rho u_x)u + u_t \rho + u_x \rho u + p_x = 0 \quad (154)$$

Kde člen $(\rho_t + \rho u_x = 0)$ je rovnicí kontinuity

$$u_t \rho + u_x \rho u + p_x = 0 \quad (155)$$

$$u_t + u_x u + \frac{1}{\rho} p_x = 0 \quad (156)$$

Derivace rovnice (150):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right)_t + \left(\left(\frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) u \right)_x = \\ & = \left(\frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u) u \right)_t + \left(\left(\frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u) u + p \right) u \right)_x = \\ & = \frac{p_t}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u)_t u + u_t \frac{1}{2} (\rho u) + \left(\frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u) u + p \right)_x u + \\ & + u_x \left(\frac{p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u) u + p \right) = \frac{p_t}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u)_t u + u_t \frac{1}{2} (\rho u) + \\ & + \left(\frac{\kappa p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u) u \right)_x u + u_x \left(\frac{\kappa p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u) u \right) = 0 \quad (157) \end{aligned}$$

Nyní dosadíme za jednotlivé členy:

Z rovnice (149) vyjádříme.

$$(\rho u)_t = -(\rho u^2 + p)_x = -(\rho u^2)_x - (p)_x = (\rho u)_t \quad (158)$$

Z rovnice (155) vyjádříme.

$$u_t = -u_x u - \frac{p_x}{\rho} \quad (159)$$

A dosadíme do rovnice (157).

$$\begin{aligned} & \frac{p_t}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (-(\rho u^2)_x - (p)_x) u + \left(-u_x u - \frac{p_x}{\rho} \right) \frac{1}{2} (\rho u) + \\ & + \left(\frac{\kappa p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u) u \right)_x u + u_x \left(\frac{\kappa p}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2} (\rho u) u \right) = 0 \quad (160) \end{aligned}$$

Dále rozepíšeme poslední dva členy v rovnici (160).

$$\begin{aligned} & \frac{p_t}{(\kappa-1)} + \frac{1}{2}(-(\rho u^2)_x - (p)_x)u + \left(-u_x u - \frac{p_x}{\rho}\right)\frac{1}{2}(\rho u) + \\ & + \left(\frac{\kappa p}{(\kappa-1)}\right)_x u + \frac{1}{2}(\rho u^2)_x u + u_x \left(\frac{\kappa p}{(\kappa-1)}\right) + u_x \frac{1}{2}(\rho u^2) = 0 \end{aligned} \quad (161)$$

Po matematických úpravách získáme finální tvar (166)

$$\frac{p_t}{(\kappa-1)} - \frac{1}{2}(p)_x u - \frac{1}{2}\frac{p_x}{\rho}(\rho u) + \left(\frac{\kappa p}{(\kappa-1)}\right)_x u + u_x \left(\frac{\kappa p}{(\kappa-1)}\right) = 0 \quad (162)$$

$$\frac{p_t}{(\kappa-1)} - \frac{1}{2}p_x u - \frac{1}{2}p_x u + \frac{\kappa p_x u}{(\kappa-1)} + \frac{\kappa p u_x}{(\kappa-1)} = 0 \quad (163)$$

$$\frac{p_t}{(\kappa-1)} + p_x \left(-\frac{u}{2} - \frac{u}{2} + \frac{\kappa u}{(\kappa-1)}\right) + \frac{\kappa p u_x}{(\kappa-1)} = 0 \quad (164)$$

$$\frac{p_t}{(\kappa-1)} - p_x \left(\frac{u}{(\kappa-1)}\right) + \frac{\kappa p u_x}{(\kappa-1)} = 0 \quad (165)$$

$$p_t + p_x u + \kappa p u_x = 0 \quad (166)$$

Nyní shrneme výsledky:

$$\rho_t + u_x \rho + \rho_x u = 0 \quad (151)$$

$$u_t + u_x u + \frac{1}{\rho} p_x = 0 \quad (156)$$

$$p_t + p_x u + \kappa p u_x = 0 \quad (166)$$

Nyní výsledky zapíšeme vektorově tj. v kvazilineárním tvaru. A poté spočítáme vlastní čísla. V tomto případě vlastní čísla spočítám z matice P .

$$U_t + P U_x = 0 \quad (167)$$

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \kappa p & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}_x = 0 \quad (168)$$

Nyní můžeme určit vlastní čísla pro matici P . Jestliže, matice P bude mít pouze reálná vlastní čísla lze říci, že je systém hyperbolický a matici P lze diagonalizovat. Toto tvrzení využijeme pro výpočet stability při numerickém řešení.

$$\det|P - \lambda\delta| = \det \begin{vmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \kappa p & u \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \kappa p & u - \lambda \end{vmatrix} = (u - \lambda)^3 - \frac{\kappa p}{\rho} (u - \lambda) = 0 \quad (169)$$

Kde dosadíme do rovnice (169) rychlost zvuku c ($c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$).

$$(u - \lambda)^3 - c^2(u - \lambda) = (u - \lambda)[(u - \lambda)^2 - c^2] =$$

$$= (u - \lambda)\{(u - \lambda) - c\}\{(u - \lambda) + c\} = 0 \quad (170)$$

Nyní získáme vlastní čísla:

$$\lambda_1 = u \quad (171)$$

$$\lambda_2 = u - c \quad (172)$$

$$\lambda_3 = u + c \quad (173)$$

Tudíž, lze dosadit do vztahu pro výpočet stability.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\lambda_{\text{Max}}} \leq \frac{\Delta x}{|u| + c} \quad (174)$$

Veškeré informace byly získány ze zdroje [4].

Seznam použitých zdrojů a literatury

Literatura

- [1] ŠESTÁK, Jiří a František RIEGER. *Přenos hybnosti, tepla a hmoty*. Vyd. 3. Praha: ČVUT, 2004. ISBN 80-01-02933-6.
- [2] NOŽIČKA, Jiří. *Základy termomechaniky*. Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2008. ISBN 978-80-01-04022-5.
- [3] KOZEL, Karel a Jiří FÜRST. *Numerické metody řešení problémů proudění I*. Praha: ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02384-2.
- [4] Článek, www.kmp.tul.cz: *Zákony bilance* [online]. [Cit. 20. 8. 2017]. Dostupné z: http://www.kmp.tul.cz/system/files/zakony_bilance.pdf
- [5] ANDERSON J.D, *Modern Compressible Flow*. McGraw Hill Inc. New York, 1984. [online] [Cit. 1. 1. 2017]. Dostupné z: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/stube/stube.html>

Obrázky

Obr.1	Proudění fyzikální veličiny v konstantním prostředí	2
Obr.2	Proudění fyzikální veličiny v nekonstantním prostředí	2
Obr.3	Nástin výpočtu proudění v trubici.....	3
Obr.4	Znázornění výpočtu pomocí metody konečných diferencí	5
Obr.5	Schématický tvar Rezidua.....	6
Obr.6	Načrt Laxova-Freidrichsovova schématu	7
Obr.7	Znázornění výpočtu pomocí metody konečných objemů	8
Obr.8	Načrt Laxova-Freidrichsovova schématu pro metodu konečných objemů	11
Obr.9	Schéma úlohy pro rázovou trubici	12
Obr.10	Numerické schéma úlohy pro rázovou trubici	12
Obr.11	Schéma úlohy pro Lavalovu dýzu.....	17

Obr.12	Numerické schéma číslo 1 úlohy pro Lavalovu dýzu	18
Obr.13	Numerické schéma číslo 2 úlohy pro Lavalovu dýzu řešenou metodou konečných objemů	23
Obr.14	Numerické schéma číslo 2 úlohy pro Lavalovu dýzu řešenou metodou konečných objemů	24
Obr.15	Úkázka číslo 1 pro zjemňování pomocí metody konečných objemů.....	29
Obr.16	Úkázka číslo 2 pro zjemňování pomocí metody konečných objemů.....	30
Obr.17	Úkázka číslo 3 pro zjemňování pomocí metody konečných objemů.....	31
Obr.18	Umístění částice v prostoru.....	32
Obr.19	Umístění tělesa v prostoru.....	33

Všechny obrázky jsem vytvořil sám.

Grafy

Graf1	Průběh tlaku v rázové trubici	14
Graf2	Průběh Machova čísla v rázové trubici	14
Graf3	Průběh rychlosti v rázové trubici	15
Graf4	Průběh hustoty v rázové trubici.....	15
Graf5	Reziduum pro Lavalovu dýzu řešenou pomocí metodou konečných diferencí.....	20
Graf6	Průběh tlaku v Lavalově dýze pro metodu konečných diferencí.....	20
Graf7	Průběh rychlosti v Lavalově dýze pro metodu konečných diferencí.....	21
Graf8	Průběh hustoty v Lavalově dýze pro metodu konečných diferencí.....	21
Graf9	Průběh Machova čísla v Lavalově dýze pro metodu konečných diferencí.....	22

Graf10	Reziduum pro Lavalovu dýzu řešenou pomocí metodou konečných objemů.....	26
Graf11	Průběh tlaku v Lavalově dýze pro metodu konečných objemů.....	26
Graf12	Průběh rychlosti v Lavalově dýze pro metodu konečných objemů.....	27
Graf13	Průběh hustoty v Lavalově dýze pro metodu konečných objemů.....	27
Graf14	Průběh Machova čísla v Lavalově dýze pro metodu konečných objemů.....	28
Graf15	Ukázka špatného řešení pro nevhodně zvolený parametr ε	16

Software

Všechny numerické výpočty byly provedeny v programu Matlab. Všechny grafy byly vykresleny v programu Matlab.