ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Odbor pružnosti a pevnosti

Výpočtová analýza kompozitního rámu cyklistického kola

Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Viktor Kulíšek

Student: Ing. Klára Hoyerová, Ph.D.

červenec 2017

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Hoyerová** Jméno: **Klára** Osobní číslo: **382548**

Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**

Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**

Studijní program: **Strojírenství**

Studijní obor: **Konstruování podporované počítačem**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Výpočtová analýza kompozitního rámu cyklistického kola

Název bakalářské práce anglicky:

Computational analysis of road bike's composite frame

Pokyny pro vypracování:

1. Proveďte rešerši přístupů pro modelování kompozitních nosníků a rámů pomocí metody konečných prvků a pomocí zjednodušených analytických modelů.
2. Sestavte skořepinový a nosníkový model kompozitního rámu, který bude určen pro predikci tuhosti a vyšetření pevnosti kritických míst při statickém zatížení modelu.
3. Pro zadané zátěžné stavy porovnejte rozdíl mezi nosníkovým a skořepinovým modelem z hlediska výsledné tuhosti a silového namáhání jednotlivých členů konstrukce. V kritickém místě porovnejte rozdíl mezi MKP a analytickým řešení z hlediska tuhosti a pevnosti.
4. Posuďte vliv kompozitní skladby jednotlivých členů na výslednou tuhost rámu.

Doporučený rozsah textové části cca 40 stran.

Seznam doporučené literatury:

LAŠ, Vladislav. Mechanika kompozitních materiálů. 2., přeprac. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 978-80-7043-689-9.

BARBERO, Ever J. Introduction to composite materials design. 2nd ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2011. ISBN 978-1-4200-7915-9.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Viktor Kulíšek, ústav výrobních strojů a zařízení FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

doc. Ing. Tomáš Mareš Ph.D., ústav mechaniky, biomech.a mechatr. FS

Datum zadání bakalářské práce: **28.04.2017** Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2017**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Podpis vedoucí(ho) práce	Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Studentka bere na vědomí, že je povinna vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

28. 5. 2017	Hoyerová
Datum převzetí zadání	Podpis studentky

© ČVUT v Praze, Design: ČVUT v Praze, VIC

Anotační list

Jméno autora:	Ing. Klára Hoyerová, PhD.
Název bakalářské práce:	Výpočtová analýza kompozitního rámu cyklistického kola
Anglický název:	Computational analysis of road bike's composite frame
Akademický rok:	2016/2017
Obor studia:	Konstruování podporované počítačem
Ústav:	Mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Odbor:	Pružnosti a pevnosti
Vedoucí:	Ing. Viktor Kulíšek
Konzultant:	Doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 55 Počet obrázků: 34 Počet tabulek: 9 Počet příloh: 2
Klíčová slova:	Kompozity, výpočetní metody, metoda konečných prvků
Keywords:	Composites, computational methods, finite element method
Anotace:	V práci je porovnán skořepinový a nosníkový MKP model kompozitního rámu cyklistického kola a posouzen vliv kompozitní skladby jednotlivých členů z hlediska výsledné tuhosti rámu a silového namáhání jednotlivých členů konstrukce.
Abstract:	The shell and beam FEM models of the bike frame are compared and the laminate composition is evaluated with respect to the whole frame stiffness and loads of particular parts.

Poděkování

Na prvním místě bych chtěla poděkovat Ing. Viktoru Kulíškovi za odborné vedení práce, trpělivost a nadhled. Mé poděkování dále patří Bc. Marii Korecké, za obětavé retušování mé nepřítomnosti na pracovišti v době přednášek a cvičení a v neposlední řadě děkuji všem spolužákům, kteří mi umožnili znovu prožít krásná studentská léta.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem

Výpočtová analýza kompozitního rámu cyklistického kola

vypracovala samostatně a použila k tomu úplný výčet citací použitých pramenů, které uvádím v seznamu přiloženém k práci.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V ……. dne …… …….

podpis

Obsah

1 Úvod 1

2 Teoretický rozbor 2

2.1 Kompozitní materiály 2
2.1.1 Charakteristika kompozitních materiálů 2
2.1.2 Charakteristika uhlíkových kompozitních materiálů 3
2.1.3 Technologie používané pro konstrukci cyklistických kol 4

2.2 Mechanika kompozitního materiálu 5
2.2.1 Závislost napětí a deformace u kompozitu 5
2.2.2 Laminační teorie (2.9) 8
2.2.3 Laminační teorie s uvažováním příčné smykové deformace 10
2.2.4 Pevnostní kriteria pro jednosměrové kompozity 11

2.3 Analytická řešení statiky nosníků 13
2.3.1 Obecná analytická řešení 13
2.3.2 Analytická řešení vhodná pro kompozitové nosníkové konstrukce 14

2.4 Metoda konečných prvků (MKP) 16
2.4.1 Princip MKP 16
2.4.2 Lagrangeův variační princip 16
2.4.3 Obecný postup při výpočtech MKP 17
2.4.4 Postup MKP 17
2.4.5 MKP elementy používané pro modelování kompozitů 18
2.4.6 Obecný postup při tvorbě výpočtových modelů v prostředí Abaqus 20

3 Cíle 21

3.1 Dílčí úlohy 21

4 Konstrukce rámu a tvorba modelu 22

4.1 Geometrie rámu 22

4.2 Skořepinový model 23

4.3 Nosníkový model 25

4.4 Zatížení a uložení rámu 26
4.4.1 Definice okrajových podmínek a zatížení 27

5 Analýza tuhosti rámu kola 28

5.1 Porovnání tuhostí skořepinového a nosníkového modelu rámu kola z kompozitu 28
5.1.1 Zkouška „Track holding rigidity“ 28
5.1.2 Zkouška „Out-of-saddle rigidity“ 29

5.2 Porovnání tuhostí skořepinového a nosníkového modelu rámu kola z duralu 31
5.2.1 Zkouška „Track holding rigidity“ 31
5.2.2 Zkouška „Out-of-saddle rigidity“ 32

5.3 Vliv skladby jednotlivých kompozitových komponent rámu na celkovou tuhost skořepinového modelu rámu 34

5.4 Vyšetření namáhání v definovaném kritickém místě pomocí MKP modelů a analytického výpočtu 36
5.4.1 Skořepinový model 36
5.4.2 Nosníkový model 39
5.4.3 Analytický výpočet 40

6 Závěr 43

Seznam použité literatury **45**

Seznam obrázků **46**

Seznam tabulek **48**

Seznam příloh **49**

1 Úvod

Rám jízdního kola a především jeho tuhost zásadně rozhoduje o jízdních vlastnostech kola jako celku. Kromě geometrie rámu a typu konstrukce závisí v neposlední řadě také na použitém materiálu a technologiích. Snahou všech výrobců jízdních kol bylo vždy vyrobit co nejlehčí rám s co nejvyšší tuhostí a co nejdelší životností. Výzkum a vývoj materiálů tak umožnil posun od klasických ocelových konstrukcí přes slitiny hliníku až po v současnosti značně komerčně rozšířené vláknové kompozitní materiály s převahou uhlíkového kompozitu tzv. „karbonu“. Výhodou uhlíkových kompozitů je kromě vysoké pevnosti, nízké hmotnosti a vysoké trvanlivosti (příznivý průběh únavové křivky) především značná konstrukční modularita. Skladbou kompozitu – směr vedení vlákna, počet vláken, poměr výztuže a pryskyřice, počet vrstev – lze měnit mechanické vlastnosti jednotlivých komponent rámu i jejich částí tak, aby bylo dosaženo požadovaných mechanických vlastností rámu jako celku.

V této práci tak budou po krátkém shrnutí nezbytné teorie, věnující se mechanice kompozitních materiálů a výpočtovým metodám nosníkových a rámových struktur, porovnány dva různé modely (skořepinový a nosníkový) zjednodušené geometrie cyklistického rámu určeného pro silniční použití, a to metodou konečných prvků (MKP). Hlavním kriteriem bude celková tuhost rámu s ohledem na materiálové složení jednotlivých komponent. V definovaném místě budou dále určeny a srovnány hodnoty získané pomocí MKP a analytickým řešením.

Nakonec se bude práce věnovat vlivu kompozitní skladby jednotlivých členů na výslednou tuhost rámu simulovanou v prostředí Abaqus.

Na základě uvedených výsledků pak bude posouzena použitelnost skořepinového a nosníkového modelu pro predikci sledovaných vlastností rámu a bude diskutován vliv složení kompozitu (úhel vinutí vlákna, počet vrstev) na sledované mechanické vlastnosti.

2 Teoretický rozbor

2.1 Kompozitní materiály

2.1.1 Charakteristika kompozitních materiálů

Složené materiály, čili kompozity jsou heterogenní materiály složené ze dvou či více chemicky a mechanicky odlišných složek. Cílem kombinování těchto složek je získat materiál s vlastnostmi, které předčí vlastnosti samostatných složek. Typicky jedna složka tvoří matrici kompozitu tj. spojitou fázi a druhá složka má roli zpevňující. Vhodnou volbou materiálu matrice a výztuže, jejich vzájemného objemového poměru a rozložení výztuže v matrici, lze získat materiál s unikátními mechanickými vlastnostmi (tuhost, pevnost, hustota, odolnost proti korozi...), které nelze nalézt u materiálů konvenčních [1].

Úkolem matrice je:

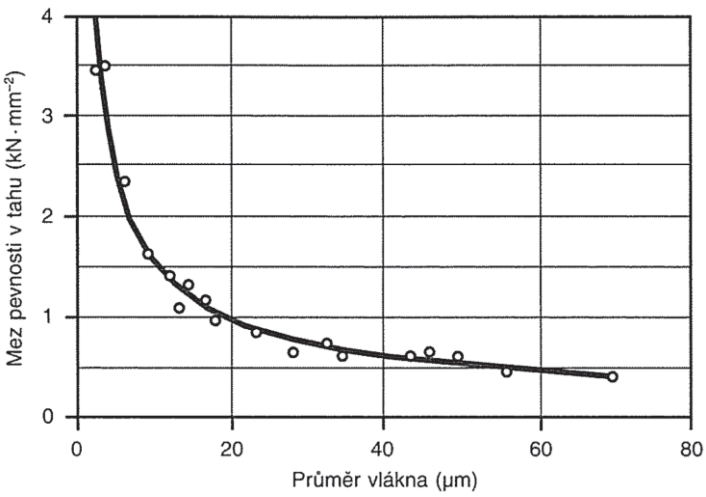
. přenos namáhání na vlákna,

. zajištění geometrické polohy vláken a tvarové stálosti výrobku,

. ochrana vlákna před vlivy okolí,

. zajišťovat interlaminární pevnost.

Úkolem výztuže je pak zajistit žádanou pevnost a tuhost kompozitu. Optimálních vlastností kompozitu lze dosáhnout jen tehdy, jsou-li převedeny všechny působící síly na výztuž. Základním předpokladem je proto dokonalé spojení vláken s matricí [2]. Obecně platí, že mechanické vlastnosti kompozitu stoupají se zvyšujícím se obsahem vyztužující složky až do podílu 80 %. Minimální objemový podíl výztuže je 5 %.



Pevnost vlákna je vždy významně větší než pevnost stejného materiálu v kompaktní formě (obrázek 1).

Obrázek 1: Vliv průměru skleněného vlákna na jeho pevnost; převzato z [2].

Příčinou je:

a) malý příčný průřez vláken; v tenkých vláknech jsou minimalizovány rozměry vrozených vad materiálu a také nebezpečnost povrchových vad je při malých příčných rozměrech menší; existující vady jsou mikroskopické a orientovány v podélném směru vlákna.

b) přednostní nasměrování pevných kovalentních meziatomových vazeb ve směru osy vlákna (u krystalických vláken potvrzeno RTG mikrodifrakcí) [3].

Odborná literatura se zabývá celou řadou členení kompozitů podle různých kritérií, zde bude s ohledem na materiálové požadavky cyklistického rámu charakterizován pouze vláknový kompozit, kde výztuž tvoří uhlíkové vlákno a matrici epoxidová pryskyřice.

2.1.2 Charakteristika uhlíkových kompozitních materiálů

Vzhledem k tomu, že vlákna mají v podélném směru nejvyšší specifické pevnosti a specifické moduly pružnosti, doznalo využití vláknových kompozitů největšího rozmachu.

Uhlíkový kompozit může mít až šestkrát větší pevnost než ocel a být pětkrát lehčí. Podle typu, směru vláken, způsobu pletení tkaniny, zvolené pryskyřici i technologii výroby mohou vznikat rámy různých vlastností.

Uhlíková vlákna jsou technická vlákna s extrémně vysokou pevností a tuhostí, ale vykazující nízkou tažnost. Výchozí organické suroviny (nejběžněji polyakrylonitril-PAN a smola) ve vláknitém tvaru jsou nejprve karbonizovány. Přitom se odštěpí téměř všechny prvky až na uhlík. Se stoupající teplotou, a tím se zvyšující grafitizací, se zlepšují mechanické vlastnosti [2].

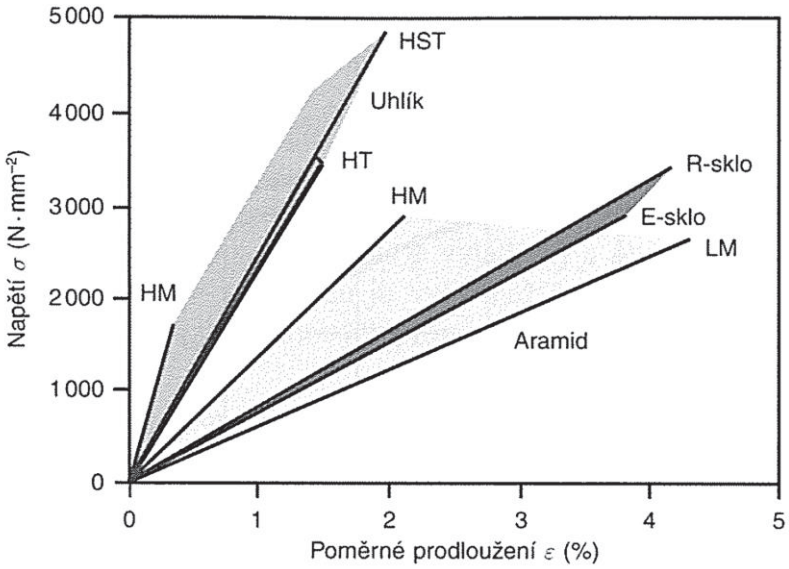
Vlákno/prekurzor	**Pevnost v tahu** GPa	**E-modul** GPa	**Tažnost** %
karbonizované z PAN (95 % uhlíku)	5,5	250	1,9
grafitované z PAN (99 % uhlíku)	4,4	377	1,2
mezofázová smola (99% uhlíku)	3,8	900	0,4
viskóza (99% uhlíku)	1,2	100	0,5
nanovlákno 0,2 μm	7,0	600	0,5
S-sklo	4,5	85	5,7

Tabulka 1:

Materiálové vlastnosti některých druhů uhlíkových a skleněných vláken.

Hlavní druhy běžně vyráběných vláken:

- standardní karbonizovaná vlákna: AS (average strength) - s průměrnou pevností
  HS (high strength) - s vysokou pevností
  HT (high tenacity) - s vysokým modulem pružnosti
- vysokomodulová grafitizovaná vlákna (HM – "High Modulus")
- vlákna vysoce pevná, se středním modulem pružnosti (IM – "Intermediate Modulus")
- dutá uhlíková vlákna
- vlákna s vysokým modulem pružnosti (VHM "Very High Modulus", UHM "Ultra High Modulus")
- diskontinuální vlákna porušená tahem (SBCF, "Stretch-Broken Carbon Fiber")
- mletá uhlíková vlákna

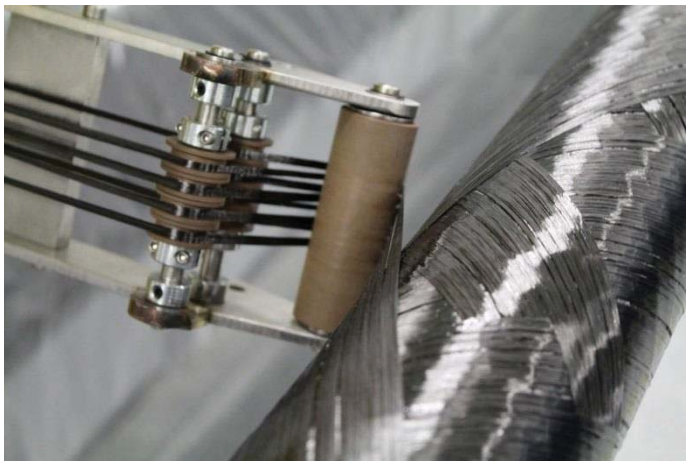


Obrázek 2: Vliv vlastností různých druhů vláken na průběh zatěžovacího diagramu jednosměrně vyztuženého laminátu při tahové zkoušce. Převzato z [2].

2.1.3 Technologie používané pro konstrukci cyklistických kol

V případě výroby uhlíkového kompozitu pro jízdní kola se jedná především o 1) technologii navíjení vedoucí k produkci profilovaných trubek a 2) technologii monocoque, kdy jsou karbonové pláty předem prosycené pryskyřicí (prepregy) namotávány nebo ukládány do předem připravené formy. Strojově navíjené kompozity jsou vysoce uniformní a je možné navíjet i extrémně křehká UHM vlákna. Pohyb ukládacího ramene podél osy za současné rotace trnu a poloha ukládacího oka dovolují přesné kladení vláken v několika osách a umožňují vytváření i relativně složitých tvarů. V impregnačním a naváděcím zařízení se výztuži uděluje určité předpětí, které umožňuje přesné uložení na jádro. Poměrem rychlosti otáčení trnu a

posunem ukládacího zařízení lze regulovat úhel návinu od 90º (obvodový návin) přes křížový návin s různým navíjecím úhlem až po 0º (např. osové vyztužení trubek).



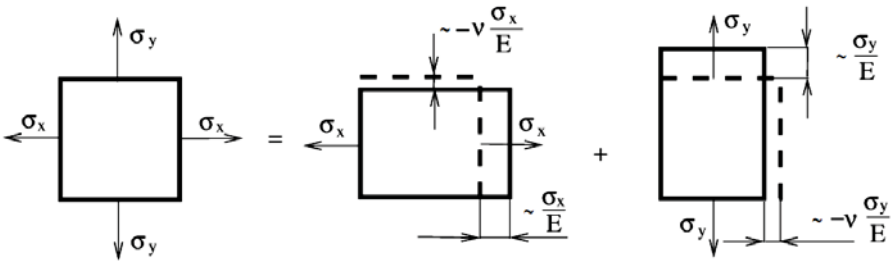
Obrázek 3: Výroba hřídele [4].

Oproti tomu technologie monocoque je výhradně ruční práce a lidský faktor představuje i jedno z rizik. Během kladení prepregů do forem hrozí vznik vzduchových bublin. Jejich přítomnost se následně v laminátu negativně projevuje ve snížení mechanických vlastností. Pro odstranění bublin z kompozitu je provedeno vakuování dílu a tím dochází k poměrně dokonalému vzájemnému přitlačení vrstev. Výhodou zůstává, že tato technologie umožňuje kladení prepregů tak, aby v místech s větším namáháním byla větší vrstva a naopak menší na místech nenamáhaných.

2.2 Mechanika kompozitního materiálu

2.2.1 Závislost napětí a deformace u kompozitu

Působením vnějších sil dochází v tělese kromě napjatosti také k jeho deformaci. Vtah mezi napětím a deformací řeší Hookeův zákon (obrázek 4). Pro rovinnou napjatost platí vztahy:



Obrázek 4: Rozšířený Hookeův zákon.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu \sigma_y\right] \qquad (2.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu \sigma_x\right]$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \qquad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\sigma} \qquad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

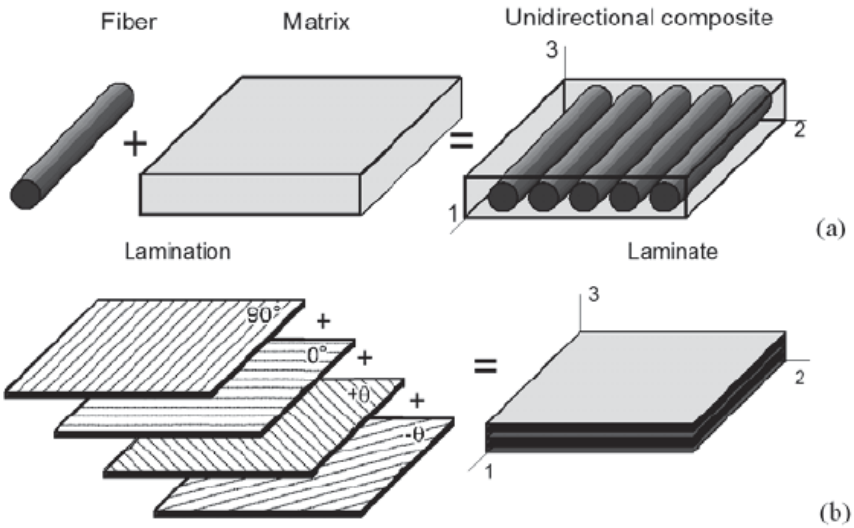
$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$$

Kde C je matice tuhosti a S je matice poddajnosti. Obecně platí, že v matici tuhosti (tj. i poddajnosti) se vyskytuje 36 prvků. Protože je tato matice symetrická obsahuje celkem 21 nezávislých prvků. Tato závislost mezi prvky určuje míru anizotropie materiálu. Nejvíc nezávislých elastických konstant v matici tuhosti se vyskytuje u obecného materiálu, kde jedinou závislost mezi prvky určuje symetrie matice tuhosti. V případě ortotropního materiálu, tj. materiálu vykazujícího 3 vzájemně kolmé roviny symetrie elastických vlastností, je třeba řešit pouze 9 materiálových konstant, jak je patrné ze zápisu (2.5).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2.5)$$

Z Hookeova zákona (2.4) je patrné, že složky deformace jsou závislé pouze na normálových složkách napětích a zkosy pouze na smykových složkách napětích vzhledem k příslušným nulovým prvkům matice. Normálové a smykové složky tedy nejsou vzájemně provázány v případě ortotropního materiálu [1] [5].

U kompozitu předpokládáme, že kromě platnosti Hookeova zákona platí i předpoklad homogennosti materiálu (není vhodné modelovat každé vlákno a matrici zvlášť, vlastnosti vláken a matrice se převedou na ekvivalentní homogenní materiál) a dále že osa 1 základního materiálového souřadného systému je rovnoběžná se směrem vláken výztuhy laminy.



Obrázek 4: Jednosměrový kompozit - lamina

Lamina – kompozitní vrstva tvořená vlákny a matricí, má výrazně převládající rozměry délku a šířku oproti tloušťce laminy. Závislost mezi napětím a deformací lze proto uvést obdobně jako pro případ rovinné napjatosti (tj. napětí mimo rovinu je rovno nule).

Vztahy (2.6) popisují deformace laminy namáhané ve směru vláken, v příčném směru a při namáhání na smyk:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{E_L}\sigma_L\,; \quad \varepsilon_T = -\nu_{LT}\,\varepsilon_T = -\frac{\nu_{LT}}{E_L}\sigma_L \qquad \varepsilon_T = \frac{1}{E_T}\sigma_T\,; \quad \varepsilon_L = -\nu_{TL}\,\varepsilon_T = -\nu_{TL}\frac{\sigma_T}{E_T} \qquad \gamma_{LT} = \frac{\sigma_{LT}}{G_{LT}} \quad (2.6)$$

Po dosazení složek napětí a deformace do Hookeova zákona a při využití matice tuhosti pro ortotropní materiál, lze pro úlohu rovinné napjatosti psát (1.7)

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

Pro vyjádření konstant pomocí E_L, E_T, ν_{LT}, ν_{TL}, G_{LT} použijeme vztahy (2.8)

$$C_{11} = \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\,\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1-\frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2}\,,$$

$$C_{22} = \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\,\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1-\frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L}\,C_{11}\,,$$

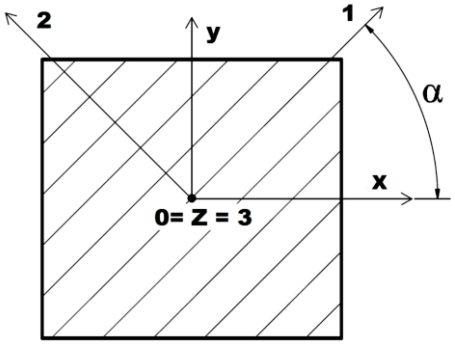
$$C_{12} = C_{21} = \frac{\nu_{LT}\,E_T}{1-\nu_{LT}\,\nu_{TL}} = \nu_{LT}\,C_{22}\,,$$

$$C_{66} = G_{LT}\,.$$

Vzhledem k symetrii matice poddajnosti jsou pro výpočet napětí postačující pouze čtyři nezávislé materiálové konstanty E_L, E_T, ν_{LT}, G_{LT}. Platí tedy, že smyková složka napětí není

závislá na podélné ani příčné deformaci a zároveň napětí v podélném a příčném směru nezávisí na zkosu.

Jednou z vlastností jednosměrných kompozitních materiálů je změna tuhosti a pevnosti v závislosti na úhlu natočení α vůči souřadnému systému O(x,y,z). Systém, který je natočen vůči systému O(x,y,z), označujeme O(1,2,3), přičemž osa 1 je ve směru vláken (značeno též L - longitudinal) a osa 2 je kolmo na vlákna kompozitu (značeno též T - transversal). Osa 3 je totožná s osou z, tj. směr kolmý na rovinu laminy, jak je znázorněno na obrázku 6. Pro výpočet napětí a deformace v různých směrech je pak nutná transformace do příslušného souřadného systému pomocí transformačních matic (2.9) (2.10) [1] [6].



Obrázek 6: Transformace napětí a deformace pro rovinnou úlohu.

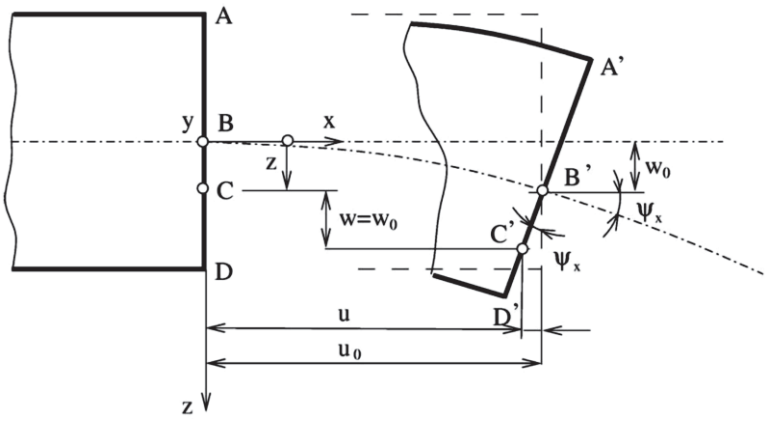
$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ -2\sin\alpha\cos\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Vlastnosti jednosměrného kompozitu jsou výrazně horší v příčném směru (kde o vlastnostech rozhoduje převážně matrice) než v podélném (kde charakter udávají vlákna), proto se jednotlivé laminy vrství tak, aby výsledný kompozit vykazoval požadované mechanické vlastnosti. Použitím klasické laminační teorie (CLT) lze odvodit tuhost výsledného kompozitového laminátu z jeho jednotlivých vrstev (lamin) za těchto následujících předpokladů:

- Každá lamina je ortotropní a kvazihomogenní.
- Tloušťka lamely je ve srovnání s délkou a šířkou velice malá.
- Z důvodu předchozího předpokladu můžeme uvažovat rovinnou napjatost.
- Lamely jsou k sobě připojeny dokonale a nedochází ke smýkání desek.

- Příčné zkosení je rovno nule (Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek). To znamená, že kolmice ke středové čáře zůstanou i po deformaci kolmé.
- Závislost mezi deformací a napětím je lineární.



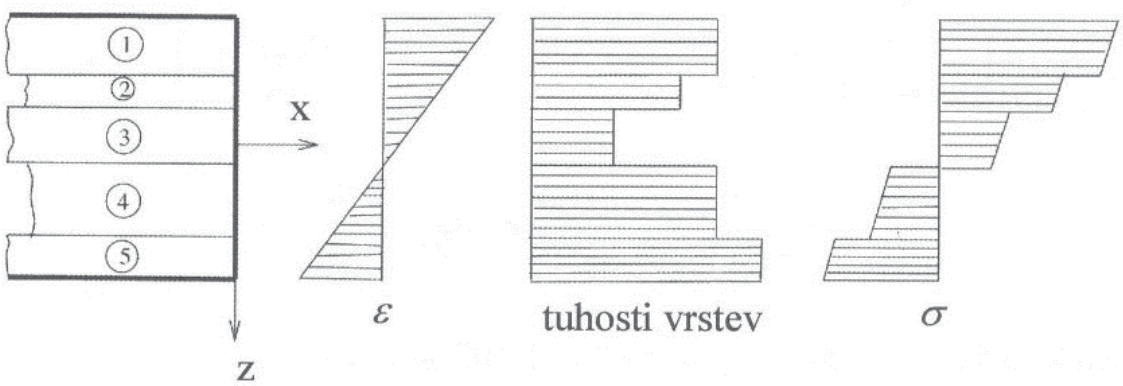
Obrázek 7: Geometrie deformace laminátu pro případ nulového příčného přetvoření. V bodě B vznikají posuvy ve směrech os x, y, z; posuv bodu C ve směru os lze vyjádřit pomocí sklonu střední roviny laminátu ψ a posuvů na

V principu – z deformačních podmínek lze dopočítat vnitřní síly:

- Derivací složek posuvů v jednotlivých směrech os souřadného systému lze získat pole deformací a tím i deformace střední plochy a křivosti desky ve všech směrech.
- Napětí v libovolné vrstvě se vyjádří pomocí vztahu pro mimoosově namáhanou laminu (2.11), kde Q je matice mimoosové tuhosti.

$$\sigma' = Q \cdot \varepsilon' \qquad (2.11)$$

- Síly a momenty působící na příčný průřez vrstvy, lze získat integrací napětí po tloušťce vrstvy.
- Napětí po tloušťce laminátu se mění nespojitě, je tedy třeba sčítat účinky sil a momentů všech vrstev (obrázek 8).



Obrázek 7: Napětí se mění po tloušťce laminátu nespojitě [1].

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tahová síla}\\ \text{Tahová síla}\\ \text{Smyková síla}\\ \text{Ohybový moment}\\ \text{Ohybový moment}\\ \text{Ohybový moment}\end{array}\right\}\begin{bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\\M_x\\M_y\\M_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}&B_{11}&B_{12}&B_{16}\\A_{21}&A_{22}&A_{26}&B_{21}&B_{22}&B_{26}\\A_{61}&A_{62}&A_{66}&B_{61}&B_{62}&B_{66}\\B_{11}&B_{12}&B_{16}&D_{11}&D_{12}&D_{16}\\B_{21}&B_{22}&B_{26}&D_{21}&D_{22}&D_{26}\\B_{61}&B_{62}&B_{66}&D_{61}&D_{62}&D_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x^0\\\varepsilon_y^0\\\gamma_{xy}^0\\\kappa_x\\\kappa_y\\\kappa_{xy}\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{l}\text{Protažení}\\ \text{Protažení}\\ \text{Zkos}\\ \text{Ohyb (křivost)}\\ \text{Ohyb (křivost)}\\ \text{Ohyb (křivost)}\end{array}\right.$$

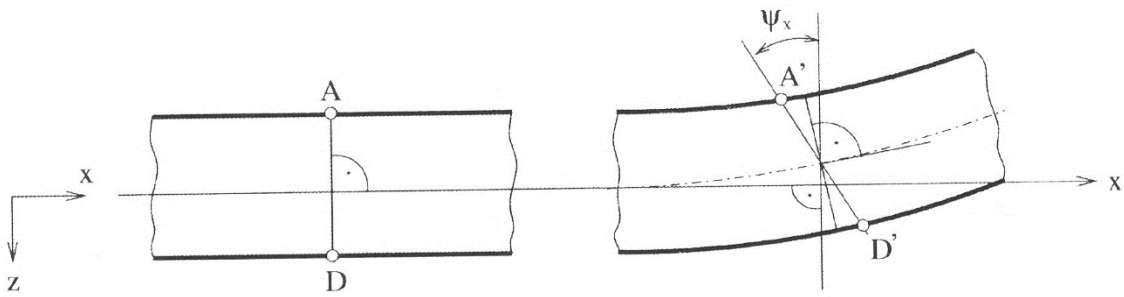
(2.12)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{N}\\\mathbf{M}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{B}&\mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^0\\\boldsymbol{\kappa}\end{bmatrix}\qquad(2.13)$$

Konstitutivní rovnice laminátové desky (2.12) (2.13) slouží tedy k výpočtu sil a momentů v závislosti na deformacích ve střední rovině a na křivostech. N a M jsou vektory ekvivalentních sil a momentů, ε^0 je deformace střednice plochy, k je křivost desky. Matice A je matice tahové tuhosti a váže složky sil s deformacemi ve střední rovině. D matice ohybové tuhosti vyjadřuje vazbu mezi složkami momentů a křivosti plochy. B je matice vazební tuhosti a váže jak složky momentů a deformace, tak i složky vektoru vnitřních sil s křivostí plochy (ohýbání a zkroucení střední plochy).

2.2.3 Laminační teorie s uvažováním příčné smykové deformace

V řadě případů však není možné zanedbat přetvoření v příčném směru, přestože délka a šířka desky převažuje výrazně nad tloušťkou. Klasická laminační teorie potom pro řešení takových případů nedostačuje a to díky nepravdivosti předpokladu nulové smykové deformace, jak ji uvažuje Kirchhoffova hypotéza, platná pro velmi tenké desky. Kolmice na střední rovinu potom nezůstane kolmicí po deformaci (obrázek 9) a zjištěné hodnoty posuvů, deformací a napětí následně neodpovídají skutečným hodnotám.



Obrázek 9: Geometrie deformace laminátu pro případ uvažování příčného přetvoření. V zatíženém stavu (vpravo) přestává být úsečka AD kolmicí na střední rovinu [1].

Obdobně jako v klasické laminační teorii 2.2.2 lze pole deformací získat s využitím pole posuvů a následně lze odvodit pole napětí pro definovanou vrstvu. Navíc je však třeba vyšetřit působení vnějších sil působících kolmo na desku a působící příčné přetvoření a to přes všechny vrstvy. Lamina přenáší jak ohyb, tak i smyk - konstitutivní rovnice dostává následně podobu (2.14), kde Q_s je výslednice vnějších sil působících kolmo na desku a způsobujících smykové deformace a γ_s jsou zkosy vzniklé vlivem smyku.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\gamma}_s \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

V případě vrstveného kompozitu tvořeného z jednosměrových lamin s různou orientací vláken tak ke 4 materiálových konstantám přibývají další 2 příčné smykové moduly (2.15).

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}{}^{0} \\ \gamma_{zx}{}^{0} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Výše uvedené postupy 2.2.2 a 2.2.3 se týkaly tzv. přímé úlohy, kdy pro těleso se známou geometrií, materiálem, zatížením a vazbami k okolí je potřeba stanovit jeho deformaci a napjatost, tj. pole posunutí, pole deformací a pole napětí. Laminační teorie umožňuje i řešení inverzní úlohy, kdy pro těleso je předepsáno pole napětí nebo posuvů a úlohou je stanovit vnější zatížení případně zjistit okrajové podmínky, kterým dané funkce pole napětí vyhovují [7].

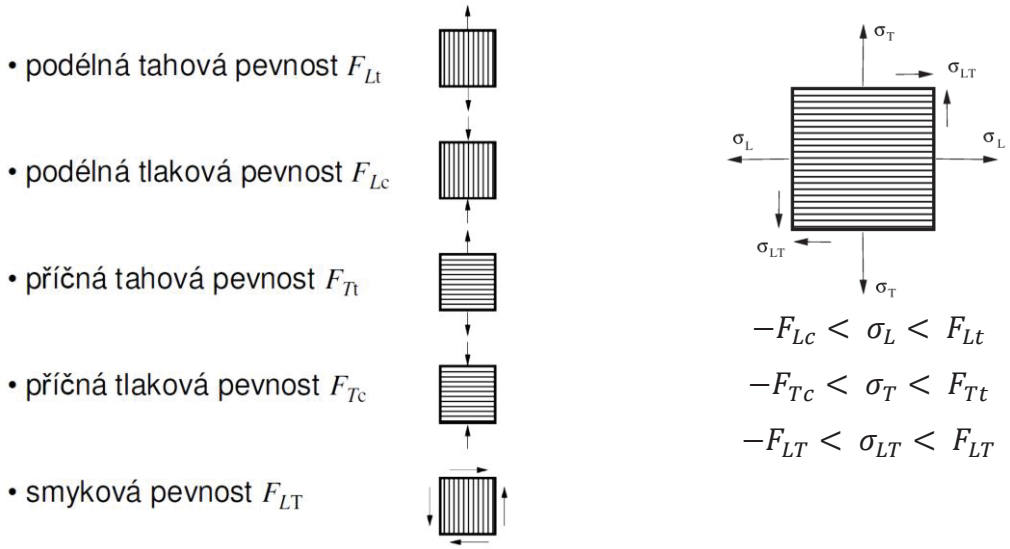
2.2.4 Pevnostní kriteria pro jednosměrové kompozity

Ani v případě izotropních materiálů není definována univerzální podmínka pevnosti platná pro různé materiály a typy napjatosti. U kompozitů i za předpokladu, že materiál je homogenní, je třeba zahrnout pět hodnot napětí v hlavních materiálových směrech (obrázek 10 - vlevo). Pro jednosměrové kompozity jsou nejčastěji používána tato kritéria, která jsou zároveň implementována v prostředí Abaqus:

Kritérium maximálního napětí

patří mezi tzv. neinteraktivní kriteria, která nezohledňují žádnou vazbu mezi normálovými složkami napětí ani mezi složkami normálovými a smykovými. Kritérium maximálního napětí předpokládá, že k poruše dojde, pokud kterákoli ze složek napětí překročí dovolenou

mez, tj. dojde buď k porušení vláken tahem-tlakem, porušení matrice tahem-tlakem nebo porušení matrice smykem (obrázek 10 - vpravo).



Obrázek 10:
Vlevo: Konstanty pevnosti pro základní typy namáhání vhledem k materiálovým osám
Vpravo: Kritérium maximálního napětí, podmínky [1].

Hillovo a Tsai-Hillovo kritérium pevnosti

Patří mezi kritéria interaktivní, která vazbu mezi normálovými složkami napětí a mezi složkami normálovými a smykovými předpokládají. Hillovo kritérium vychází s podmínky hustoty deformační energie potřebné pro změnu tvaru izotropního materiálu (Mises), které bylo rozšířeno na materiál ortotropní a byla zahrnuta podmínka porušení materiálu. Tsai-Hillovo kritérium je dalším zjednodušením pro jednosměrné kompozity, kdy je zavedena podmínka, že $F_T = F_{T'}$.

Tsai-Wu kritérium pevnosti

Je kritérium interaktivní a oproti všem výše zmíněným kritériím poloempirické, které uvažuje i parametry získané z experimentů. Kritérium vzniklo při snaze o definování obecné teorie poškození anizotropních materiálů, která by umožnila předpovědět porušení materiálu při obecném stavu napjatosti.

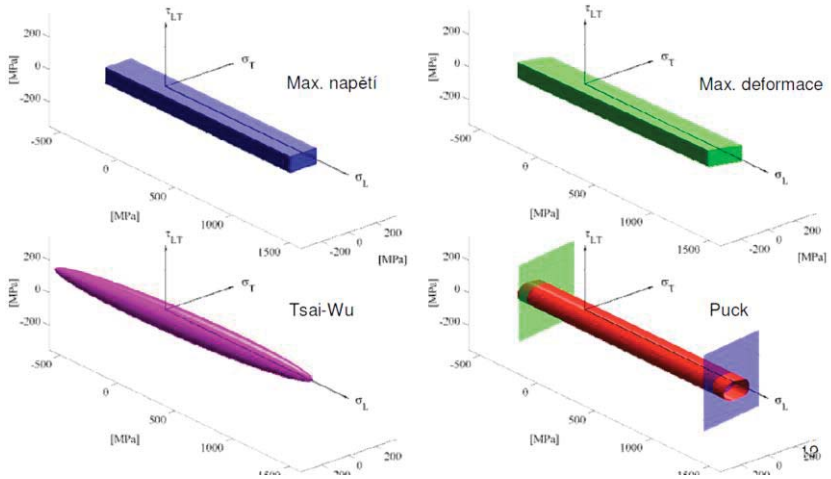
Pevnostní kritéria pro jednosměrové kompozity, přehled:

Neinteraktivní kritéria:

- Kritérium maximálního napětí
- Kritérium maximální deformace

Interaktivní kritéria:

- Hillovo kritérium pevnosti
- Tsai-Hillovo kritérium pevnosti
- Hoffmanovo kritérium pevnosti
- Tsai-Wu kritérium pevnosti
- Puckovo kritérium pevnosti



Obrázek 11: Různě formulované podmínky (funkce) pevnosti – jinak predikovaná nosnost materiálu pro obecné namáhání (převzato z Zemčík R. přednáška). Složitější kritéria (např. Puck) mohou poskytovat přesnější predikci poruchy první vrstvy, nicméně vyžadují mnohem větší objem materiálových dat, která nemusí být snadno dostupná.

2.3 Analytická řešení statiky nosníků

2.3.1 Obecná analytická řešení

Při analytickém řešení je hledán výsledek ve tvaru spojitých funkcí. Využívají se přitom postupy matematické analýzy, využitím diferenciálního a integrálního počtu. Výhodou tohoto, historicky staršího postupu je, že v případě nalezení analytického řešení v uzavřeném tvaru je k dispozici obecnou funkční závislost mezi vstupními veličinami (proměnnými) a výstupními veličinami řešeného problému. S takto získaným předpisem pak lze jednoduše pracovat a je použitelný pro obdobný typ problémů. Základním problémem však je, že nalezení analytického řešení v uzavřeném tvaru je možné pouze pro velmi omezenou škálu úloh. Zpravidla se jedná o úlohy s jednoduchou geometrií a při odvození je použito mnoho zjednodušení [7].

2.3.2 Analytická řešení vhodná pro kompozitové nosníkové konstrukce

S ohledem na řešenou problematiku –vyšetření namáhání komponent kompozitového rámu jízdního kola v určitých předem specifikovaných místech, lze s výhodou využít Castiglianovu větu. Jednotlivé členy rámu budou uvažovány jako přímé nosníky kruhového průřezu. Na modelovém příkladu vetknutého nosníku bude postup demonstrován. Průhyb pod silou F je tedy dán vztahem $v = \partial U/\partial F$, kde U je deformační energie namáhaného nosníku.

Průhyb od ohybového momentu lze vyjádřit jako:

$$v_M = \int_0^l \frac{M(x)}{E_x J_z} \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx$$

(2.16)

Průhyb od posouvající síly lze vyjádřit jako:

$$v_F = \int_0^l \frac{T(x)\beta}{G_{xy} A} \frac{\partial T(x)}{\partial F} dx$$

(2.17)

Potom:

$$v = v_M + v_F$$

(2.18)

Vztah lze přepsat:

$$v = \frac{F l^3}{3 E_x J_z} + \frac{F l \beta}{G_{xy} A}$$

(2.19)

M(x)	Ohybový moment.
E_x	Modul pružnosti v tahu.
J_z	Kvadratický moment průřezu k ose z. Pro mezikruží: $J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$
T(x)	Posouvající síla.
G_{xy}	Modul pružnosti ve smyku.
β	Průřezový součinitel rozdělení smykových napětí; pro kruhový β = 32/27
A	Plocha průřezu. Pro mezikruží: $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$

Neznámé moduly pružnosti lze získat buď experimentálně nebo pomocí přepočtu ze známých materiálových charakteristik pro vlákno a matrici pomocí tzv. směšovacích pravidel.

Z tabulky 2 je patrné, že vliv posouvající síly klesá s délkou trubky a ne pro všechny materiály je zanedbatelný. V případě UHM/E je podíl smyku na deformaci až 25 % při délce trubky 400 mm. Nicméně vliv momentu na celkový průhyb je dominantní, což je zjevné i

vzhledem k tomu, že deformace od ohybového momentu roste se třetí mocninou, zatímco od posouvající síly pouze s první mocninou.

	Ocel	HSC/E	UHM/E	Efektivní moduly trubky
E_x [MPa]	200 000	130 000	400 000	80 000
G_{xy} [MPa]	79 000	5 000	5 000	15 300
L = 400 mm				
Průhyb od [mm]	5.99	9.21	2.99	14.97
Průhyb od T [mm]	0.06	1.02	1.02	0.33
Celkový průhyb[mm]	6.05	10.23	4.01	15.30
Podíl smyku na deformaci [%]	0.99	9,97	25,44	2,16
L = 800 mm				
Průhyb od M [mm]	47.90	73.69	23.95	119.75
Průhyb od T [mm]	0.13	2.04	2.04	0.67
Celkový průhyb[mm]	48.03	75.73	25.99	120.41
Podíl smyku na deformaci [%]	0.27	2.69	7.85	0.56
L = 1200 mm				
Průhyb od M [mm]	161.66	248.70	80.83	404.14
Průhyb od T [mm]	0.19	3.06	3.06	1.00
Celkový průhyb[mm]	161.85	251.77	83.89	405.14
Podíl smyku na deformaci [%]	0.12	1.22	3.65	0.25

Další uvažované veličiny: D = 40 mm; t = 1,5 mm; A = 92,5 mm^2; J_z = 17 815,5 mm^4, β = 1,18; L = 400, 800, 1200 mm; F = 1000 N

Tabulka 2: Srovnání průhybu pod silou pro případ zahrnutí ohybu od posouvající síly a pro několik materiálových charakteristik.

2.4 Metoda konečných prvků (MKP)

2.4.1 Princip MKP

Zatímco analytické metody jsou založeny na diferenciálním a integrálním počtu, MKP je založena na počtu variačním, kdy hledá minimum nějakého funkcionálu. Základním funkcionálem v deformačně-napěťové analýze pružných těles je jejich energie napjatosti. Je to práce spotřebovaná na deformaci tělesa, která je v případě pružné deformace vratná. Vlastní princip spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do určitého (konečného) počtu prvků, přičemž zjišťované parametry jsou určovány v jednotlivých uzlových bodech. Hodnoty mimo uzlové body jsou interpolovány. MKP je využívána nejčastěji pro simulace průběhů napětí, deformací, vlastních frekvencí, ale i proudění tepla, jevů elektromagnetismu, proudění tekutin atd. na vytvořeném fyzikálním modelu [8].

Řešení numerické je vždy řešení přibližné. Při tomto postupu se převádí problém hledání spojitých funkcí na problém hledání konečného počtu neznámých parametrů, pomocí nichž se hledané funkce přibližně aproximují. Tento přechod se označuje jako diskretizace spojitého problému. Diskretizovaný problém je řešen algebraickými prostředky v konečném počtu kroků. Bez použití výpočetní techniky je tento proces velice obtížně zvládnutelný a to je hlavním důvodem, proč se numerické metody jako MKP začaly rozvíjet až v druhé polovině dvacátého století. Numerické řešení je teoreticky dostupné pro každou matematicky popsanou úlohu, jakékoliv geometrie a jakkoliv komplikovanou [7].

2.4.2 Lagrangeův variační princip

MKP je založena na Lagrangeově principu: Mezi všemi funkcemi posuvů zachovávajících spojitost tělesa a splňujících geometrické okrajové podmínky, se realizují ty posuvy, které udílejí potenciální energii Π stacionární (extrémní) hodnotu.

$\Pi = W - P$ (2.20) Π... celková potenciální energie tělesa

W... energie napjatosti tělesa

P... potenciál vnějšího zatížení

Těleso je v rovnováze tehdy, jestliže celková potenciální energie deformace soustavy je minimální. Hledáme minimum funkce Π = Π(u), což odpovídá parciální derivaci Π (u) podle deformace (posuvu) u (2.21).

(2.21) $\partial\Pi/\partial u = 0$

Pod pojmem MKP si lze tedy představit způsob diskretizace kontinua, který vychází z představy rozdělení tělesa na podoblasti a vyjádření celkové potenciální energie tělesa jako součtu potenciálních energií těchto podoblastí.

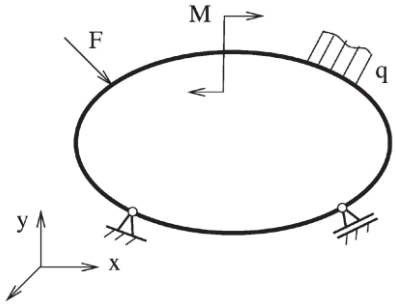
2.4.3 Obecný postup při výpočtech MKP

Deformační varianta - vlivem zatížení dochází k deformaci tělesa a získáváme:

pole posuvů

pole deformací

pole napětí



• Hledání neznámých funkcí posunutí u (x, y, z) je nahrazeno hledáním konečného počtu hodnot těchto funkcí, z nichž lze zkonstruovat přibližné řešení.

• Hledané neznámé funkce posunutí aproximujeme pomocí bázových polynomických funkcí v diskrétních bodech a s jejich pomocí vyjádříme neznámé posuvy v celém kontinuu.

• Řešení diferenciálních rovnic se tak převádí na řešení soustav algebraických rovnic.

V případě silové varianty MKP je naopak neznámou zatížení, které hledáme ze známé deformace.

2.4.4 Postup MKP

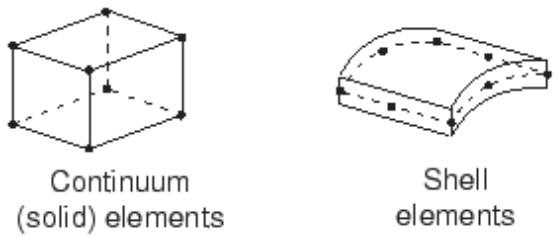
1. Tvorba modelu (CAD).
2. Rozdělení řešené oblasti (tělesa, soustavy) na podoblasti, tzv. konečné prvky či elementy.
3. Formulace chování jednotlivých elementů. Pro každý diskrétní bod získáme 3 rovnice - pole posuvů do všech směrů (x,y,z) a snažíme se spočítat pole deformací (6 rovnic) a pole napětí (6 rovnic).
4. Nahrazení funkce posuvů polynomem a vyjádření funkce posuvů tj. opětovné složení a získání výsledné soustavy rovnic popisujících chování celého systému využitím rovnic získaných při analýze elementů.
5. Aplikace okrajových či počátečních podmínek.
6. Vlastní řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Získání primárních neznámých. V případě deformační varianty MKP se jedná o posuvy.
7. Výpočet deformací a napětí pro jednotlivé uzlové body.
8. Grafické zobrazení na modelu s výpisem důležitých hodnot.

2.4.5 MKP elementy používané pro modelování kompozitů

Kompozitní materiály se využívají především při požadavku na příznivý poměr hmotnosti a pevnosti a s tím související konstrukční řešení. Oproti klasickým izotropním materiálům je postup stavby kompozitního MKP modelu výrazně složitější.

Náročnější je jak pre-processing, kdy je modelována úloha (geometrie, materiálové vlastnosti, okrajové podmínky, zatížení, atd..) a je tedy třeba uvážlivě přistoupit k možným zjednodušením při stavbě modelu (která mohou vést k chybovosti) a způsobu modelování jako takovému, tak i vlastní simulace (omezení typu prvků pro výpočty, objem dat) a v neposlední řadě je náročnější i post-processing tj. vyhodnocení výstupů simulací. V současné době jsou do MKP programů implementovány funkce pro zadávání kompozitních parametrů, což vede ke značnému zjednodušení pro uživatele.

Pro modelování laminátů a vrstvených struktur pomocí MKP se používají nejčastěji objemové skořepiny a konvenční skořepiny. Objemové prvky jsou využívány pro modelování vrstvených struktur jen zřídka. Problémem je zde, mimo jiné, zachycení vlivů příčného smyku (nedostatečná interpolace deformace pro zachycení změny v tloušťce laminátu si vyžaduje hustou síť po tloušťce) (obrázek 11).



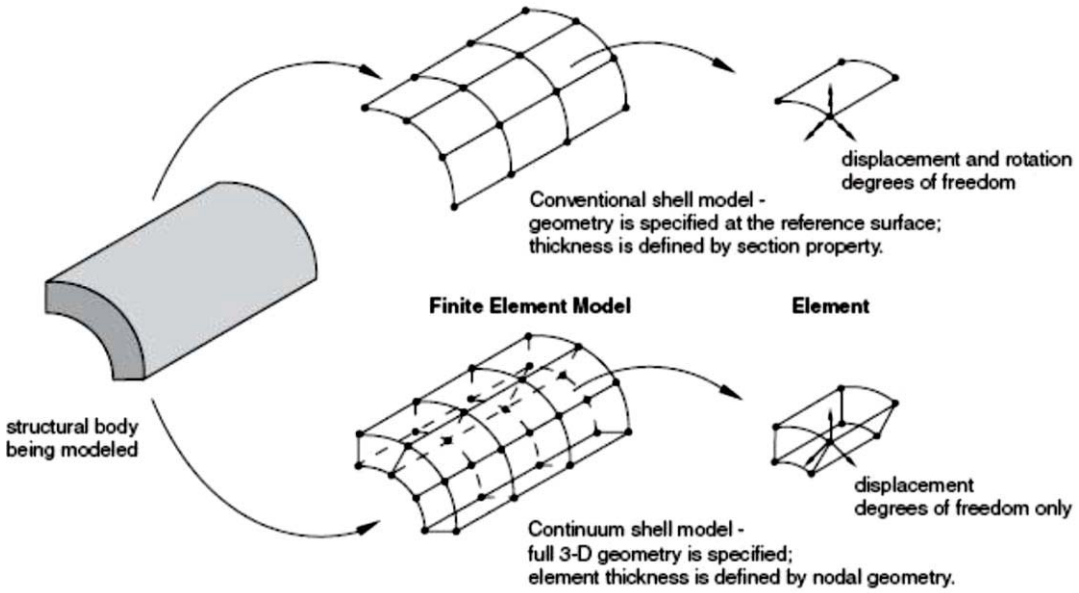
Obrázek 12: Prvky využívané při modelování kompozitů. Objemový prvek – vlevo; skořepinový prvek – vpravo [9].

Skořepinové prvky (oproti objemovým) umožňují snadnou definici počtu vrstev, materiálu i natočení každé vrstvy. Při modelování kompozitních materiálů jsou tedy skořepinové prvky nejpoužívanější. Je možné použít dva typy skořepin – konvenční (klasické) skořepiny (conventional shell elements) a objemové skořepiny (continuum shell elements).

Podmínky a předpoklady pro skořepinové modelování:

- Musí být splněny Kirchhoffovy podmínky pro desky či skořepiny.
- Tloušťka skořepiny se s deformací nemění.
- Spojení mezi vrstvami je dokonale tuhé a nekonečně tenké.

- Tloušťka laminy je velmi malá ve srovnání s ostatními rozměry.
- Tuhost laminátu v souřadnicích x, y, z skořepiny se neliší více, než o dva řády [10].



Obrázek 13: Rozdíl mezi konvenčním a objemovým skořepinovým prvkem [9].

Klasické skořepiny

Při použití konvečních skořepin se geometrie modeluje na referenční ploše. Referenční plocha však nemusí být vždy shodná se střednicí skořepiny. Pokud to situace vyžaduje, může být referenční plocha definována jako spodní-bottom či horní-top povrch nebo odsazena jako offset. Po tloušťce vrstvy se modeluje 1 prvek, který má pro každý uzel definovaných 6 stupňů volnosti (tj. nejen posuvy, ale i rotace). Podle tloušťky skořepiny se volí optimální elementy: tenké skořepiny STRI3, S8R5, S9R5, tlusté skořepiny S8R, tenké i tlusté skořepiny S4R, S3R. Pro lineární elastické případy se volí prvky S3R, S4R v případě potřeby výpočtu příčné smykové tuhosti S8R.

Objemové skořepiny

Umožňují pracovat s objemovou geometrií. Tloušťka skořepiny je daná geometrií a při definici skladby laminátu se zadávají pouze relativní tloušťky lamin k celkové tloušťce. Výhodou objemových skořepin je přesnější řešení kontaktu oproti konvenčním elementům a přesnější řešení vlivu příčného smyku. Pro modelování se volí elementy typu SC6R, SC8R (pro každý uzel jsou definovány 3 stupňe volnosti – posuvy). Mínusem je pomalá konvergence pro velmi tenké skořepiny a nemožnost modelovat hyperelastické materiály.

2.4.6 Obecný postup při tvorbě výpočtových modelů v prostředí Abaqus

Každý z dílčích kroků je v prostředí Abaqus vytvářen v příslušných modulech, které vykazují logickou posloupnost tak, jak je model postupně vytvářen. Pomocí stromu se lze ke všem krokům vracet a upravovat je.

Modul Part - v tomto modulu je vytvořena geometrie jednotlivých dílů výpočtového modelu.

Modul Property - umožňuje definování materiálových vlastností jednotlivých dílů. V tomto modulu se také definují sekce jednotlivých dílů, ke kterým jsou přiřazeny odpovídající materiálové modely. Dále se zde zadávají profily nosníkových dílů (Beam), tloušťka skořepin (Shell), vrstvy kompozitních materiálů a orientace těchto vrstev, atd.

Modul Assembly – slouží k tvorbě tzv. Instancí. Instance mohou být typu Dependent a Independent. Zatímco Instance typu Dependent je pouze ukazovatel na příslušný díl, je Independent přímo kopie geometrie původního dílu. Oba případy se v důsledku liší možností síťování. Pokud je výpočtový model složen z více dílů, je zde vytvořena sestava těchto dílů.

Modul Step - v tomto modulu je definován typ úlohy (statická, dynamická, akustika,…), dále počet výpočetních kroků (stepů) a nastavení výpočtové úlohy (lineární/nelineární, inkrementace, stabilizace, atd.). Dále se v tomto modulu definují výstupy výsledků výpočtové úlohy (pole napětí, deformací, kontaktní tlaky, atd.)

Modul Interaction - zde jsou zadávány vzájemné vazby a interakce mezi jednotlivými díly výpočtového modelu např. kontaktní páry a vlastnosti kontaktů, fyzikální vazby (coupling, tie,…). Dále zde mohou být vytvořeny speciální prvky - konektory (Connector), které mohou nahrazovat některé vazby, či elementy.

Modul Load - v tomto modulu je vytvářena MKP síť v dílech modelu, volen typ použitých elementů a jejich formulace (lineární, kvadratická, s redukovanou integrací, hybridní,…). Je zde také nastavena velikost elementů, metoda síťování a ověřuje se zde i kvalita vygenerované sítě.

Modul Job - tvoří výpočtovou úlohu a odesílá ji do výpočtu z prostředí Abaqus.

Modul Vizualization - umožňuje zobrazit výsledky výpočtové analýzy.

3 Cíle

Cílem bakalářské práce je porovnat skořepinový a nosníkový model kompozitního rámu cyklistického kola z hlediska výsledné tuhosti, vyšetřit důsledky silového namáhání členů konstrukce a posoudit vliv kompozitní skladby jednotlivých členů na výslednou tuhost rámu.

3.1 Dílčí úlohy

- Zjednodušení geometrie rámu cyklistického kola a tvorba modelů rámu pomocí MKP prvků typu „plošná skořepina“ a typu „nosník“.
- Zavedení okrajových podmínek a zatížení rámu v obou modelových systémech pro účely simulace zatížení různých částí rámu.
- Vyšetření zatížení rámu s ohledem na výslednou tuhost rámu pro jednu skladbu kompozitu.
- Srovnání vlivu kompozitní skladby jednotlivých komponent rámu na celkovou tuhost rámu.
- Srovnání namáhání v definovaném kritickém místě získané MKP na skořepinovém a nosníkovém modelu a pomocí analytického výpočtu.

4 Konstrukce rámu a tvorba modelu

4.1 Geometrie rámu

Konstrukce rámu typu hardtail určeného pro silniční užití:

Obrázek 14: Geometrie rámu silničního kola Festka.

1 - hlavová trubka (Head tube)

2 - horní rámová trubka (Top tube)

3 - spodní rámová trubka (Down tube)

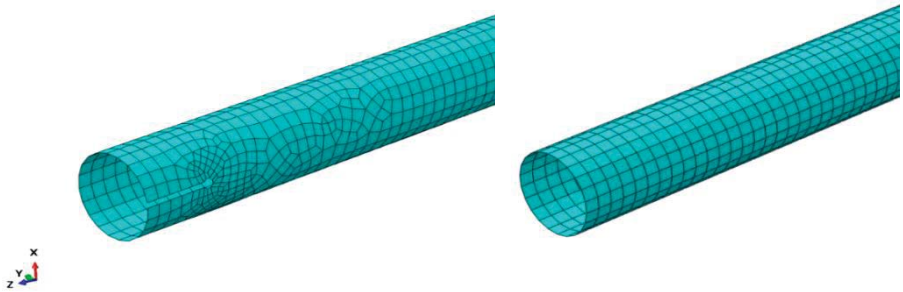
4 - sedlová trubka (Seat tube)

5 – střed (BB tube)

6 - zadní stavba rámu – řetězová podpěra (Chain-stay)

7 - zadní stavba rámu – sedlová podpěra (Seat-stay)

Pro použití k simulacím na MKP modelu v prostředí Abaqus, bylo třeba geometrii rámu zjednodušit při zachování původních vlastností konstrukce. Zjednodušení sice může vést k chybovosti a v důsledku až k neplatným závěrům, na druhou stranu příliš složitá geometrie může značně zkomplikovat celý výpočet.



Obrázek 15: Vliv geometrie dílu na vysíťování. Vlevo díl s drážkou, vpravo bez drážky.

4.2 Skořepinový model

Pro modelování skořepinového modelu rámu byla provedena tato zjednodušení na jednotlivých komponentách rámu:

Zadní stavba rámu – geometricky jednodušší spojky uvažovány z duralu.

Sedlová trubka – odstraněna z drážka.

Horní rámová trubka – průřez zjednodušen na kruhový.

Spodní rámová trubka pravá i levá – průřez zjednodušen na kruhový.

Hlavová trubka, střed, horní trubky zadní zástavby zůstaly beze změny.

Výsledná zjednodušená konstrukce rámu je vidět na obrázku 16.

Obrázek 16: Zjednodušená geometrie rámu – skořepinový model**.**

Postup:

1) Zjednodušené komponenty byly převedeny z původní geometrie objemových těles na komponenty skořepinové pomocí funkce „Midsurface modeling“ a definováním „offsetu“, což umožňuje vytvořit zjednodušenou skořepinovou reprezentaci původního objemového tělesa.
2) Komponenty byly vzájemně svázány (v duchu původních lepených tvarových spojů) pomocí vazbové podmínky „Tie“ kontakt, která svazuje pevně posuv uzlů na podřízené ploše s posuvem uzlů na ploše řídicí.
3) Byla vytvořena MKP síť v dílech modelu, a to pomocí S4R elementů (čtyřuzlový membránový element se šesti stupni volnosti v každém uzlu s dodatečnou ochranou proti „hourglassingu“) o velikosti 5.
4) Materiálové vlastnosti byly definovány pro jednotlivé komponenty jako homogenní izotropní pro použití duralu nebo byla definována skladba kompozitu (obrázek 17).

Kompozitní skladba rámu:

Pro konstrukci rámu byly využity dva typy uhlíkových vláken a to vysokopevnostní HSC vlákna a vysokomodulová vlákna HM. Vlákna tvořila 55% objemu kompozitu, charakteristiky jsou uvedeny v tabulce 3.

	EL	ET	GLT	νLT
	MPa	*MPa*	*MPa*	–
HSC/E	130510	5066	3422	0.34
HM/E	218510	5066	3422	0.34

Tabulka 3: Tabulka elastických konstant HSC a HM vláken.

Všechny vrstvy kladené v úhlech vyšších než 0° a nižších než 80° byly vinuty křížem. Detailní složení kompozitu jednotlivých komponent nebude blíže specifikováno. Tloušťky vrstev jednotlivých trubek rámu:

Hlavová trubka: 2.39 mm

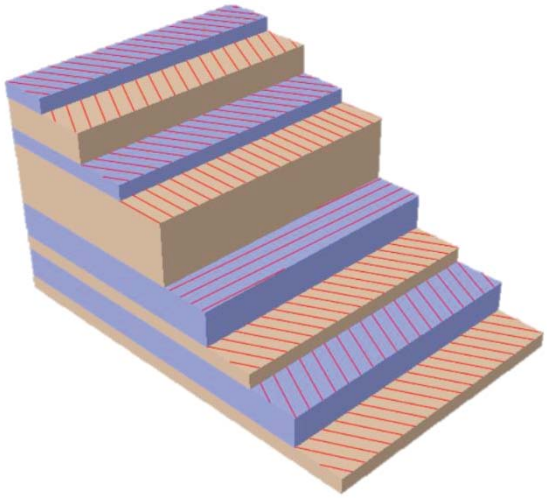
Horní rámová trubka: 1.278 mm

Spodní rámová trubka: 1.36 mm

Sedlová trubka: 1.275 mm

Střed: 2.578 mm

Zadní stavba rámu: 1.31 mm.



Obrázek 17: Ukázka vrstvení laminátu v prostředí Abaqus.

4.3 Nosníkový model

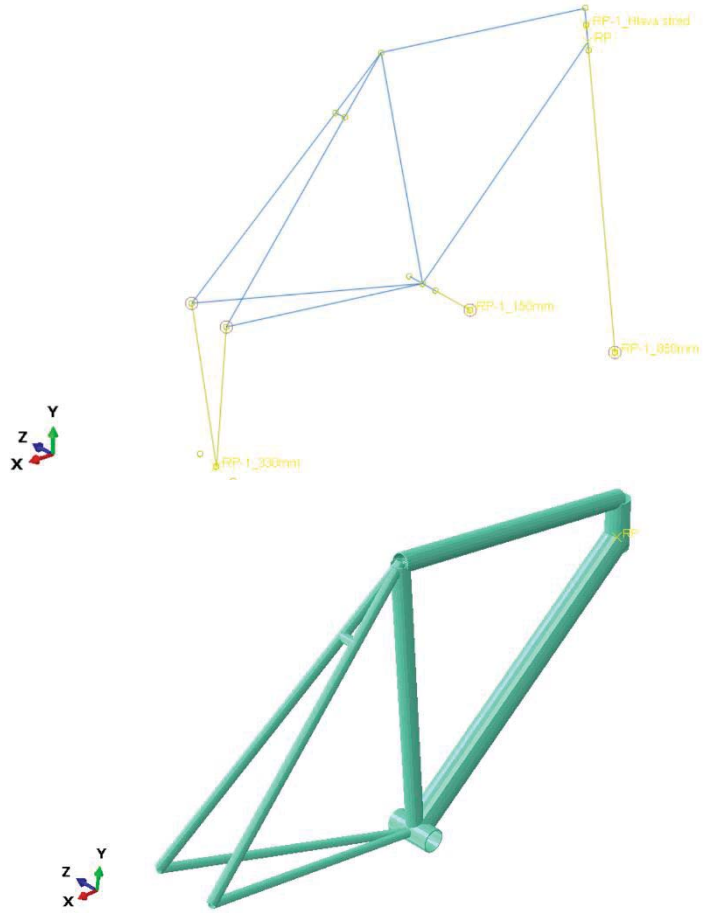
V případě modelování rámu pomocí prvků typu nosník „beam“ se značně sníží počet elementů a tím i náročnost výpočtu. Je však nutné určit elastické vlastnosti elementu. Další nevýhodou je nemožnost sledování namáhání jednotlivých vrstev ve výsledcích, v těch jsou v takovém případě pouze silové účinky a deformace jednotlivých elementů a napětí na homogenizovaný průřez.

Jednoduchá drátěná konstrukce byla vytvořena následujícím způsobem:

1) Byla vytvořena geometrie odpovídající původní konstrukci pomoci „Create wire – point to point“.

2) Bylo definováno 6 profilů odpovídajících jednotlivým komponentám rámu, 6 materiálů s definovanými moduly pro každou kompozitovou trubku a 6 sekcí, kterými se vlastnosti přiřadily geometrii rámu.

3) Síť byla definována pomocí elementů B31 – dvouuzlových lineárních elementů v prostoru.



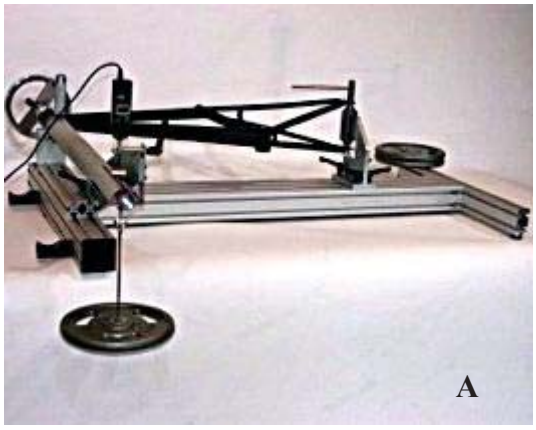
Obrázek 18: Zjednodušená geometrie rámu – nosníkový model**.**

4.4 Zatížení a uložení rámu

Testování tuhosti rámu jízdního kola se opírá o dvě aktuálné nejpoužívanější metody, které zavedla firma EFBE Pruftechnik Gmbh. Je to tzv. zkouška „Track holding rigidity“ tedy zkouška torzní tuhosti a „Out-of-saddle rigidity“, zkouška tuhosti šlapacího středu.

„Track holding rigidity“ (THR) - při této zkoušce je rám upevněn v horizontální poloze za osu zadního kola a hlavová trubka je podepřena v polovině své délky. Vidlice je nahrazena tuhou náhradou v podobě ocelové trubky. Na konec této náhrady ve vzdálenosti 850 mm od středu hlavové trubky je zavedena svislá síla a také je zde měřena svislá výchylka (obrázek 19A). Z velikosti výchylky a síly je následně spočítána tuhost Track holding rigidity.

„Out-of-saddle rigidity“ (OSR) - při měření tuhosti šlapacího středu je osa předního kola uchycena pevně. Pokud není testovaný rám prodáván v setu s vidlicí, je vidlice nahrazena tuhou náhradou. Ukotvení zadní stavby je provedeno tak, aby jí byl umožněn pohyb v rozsahu odpovídajícím běžnému provozu kola. Na šlapací střed je připevněna konzola, na kterou je ve vzdálenosti 150 mm od roviny symetrie rámu zavedena zátěžná síla. Ta není svislá, nýbrž svírá s rovinou symetrie rámu úhel 26°. V jejím směru se také měří výchylka (obrázek 19B). Z velikosti síly a výchylky se opět spočte tuhost [11].



Obrázek 19: Zkušebních metody na měření tuhosti rámů jízdních kol.
A -měření tzv. Track holding rigidity; B - měření tzv. Out-of-saddle rigidity.

4.4.1 Definice okrajových podmínek a zatížení

Pro určení tuhostí rámu byly analyzovány oba výše zmíněné případy zatížení (obr.20).

„Track holding rigidity“ = zkouška torzní tuhosti:

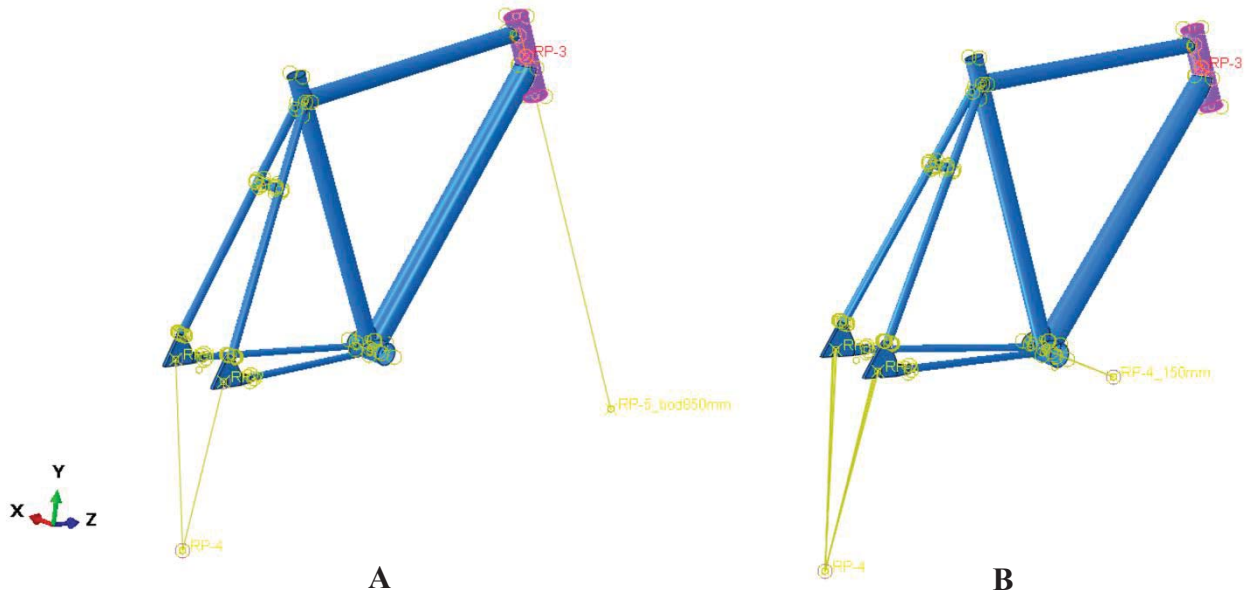
Uložení: Zadní osa je fixována, povolena je pouze rotace kolem osy x. Okrajová podmínka byla realizována svázáním vnitřních ploch trojúhelníkových koncovek se středovým bodem odpovídající koncovky. Tyto pak byly uloženy s omezením posuvů a rotací kromě rotace ve směru osy x. Bod uprostřed osy hlavové trubky byl svázán vazbou „Coupling-continuum distributing“ s vnitřní plochou hlavové trubky a byly mu odebrány translační stupně volnosti.

Zatížení: 100 N ve směru osy x bylo zavedeno na do referenčního bodu vzdáleného 850 mm od středu hlavové trubky, se kterou byl referenční bod svázán vazbou „Coupling kinematic“.

„Out-of-saddle rigidity“ = měření tuhosti šlapacího středu

Uložení: Osa zadního kola byla uložena přes plochy styku zadního trojúhelníku s nábojem do referenčního bodu vzdáleného 330 mm v záporně vzatém směru osy y tj. s bodem dotyku kola s podložkou pomocí vazby „Coupling kinematic“. Tomuto bodu byly odebrány translační stupně volnosti, ne však rotace. Bod uprostřed osy hlavové trubky byl svázán vazbou „Coupling-continuum distributing“ s vnitřní plochou hlavové trubky a byly mu odebrány translační stupně volnosti.

Zatížení: 100 N v rovině y-x, bylo odkloněno vlevo o 26° od záporného směru osy y a bylo zavedeno do referenčního bodu na ose šlapacího středu, 150 mm od roviny symetrie rámu.



Obrázek 20: Uložení a zatížení rámu pro testování „Track holding rigidity“ (A) a „Out-of-saddle rigidity“ (B).

5 Analýza tuhosti rámu kola

Vyšetřovaná tuhost rámu byla analyzována pro oba výše zmíněné zátěžné stavy tj. „Track holding rigidity“ a „Out-of-saddle rigidity“ skořepinového i nosníkového modelu a s ohledem na materiálové složení: 1) předepsaná kompozitová skladba pro každou trubku,
2) dural o stejné tloušťce jako kompozit odpovídající komponenty rámu s orientací 0°.

5.1 Porovnání tuhostí skořepinového a nosníkového modelu rámu kola z kompozitu

5.1.1 Zkouška „Track holding rigidity“

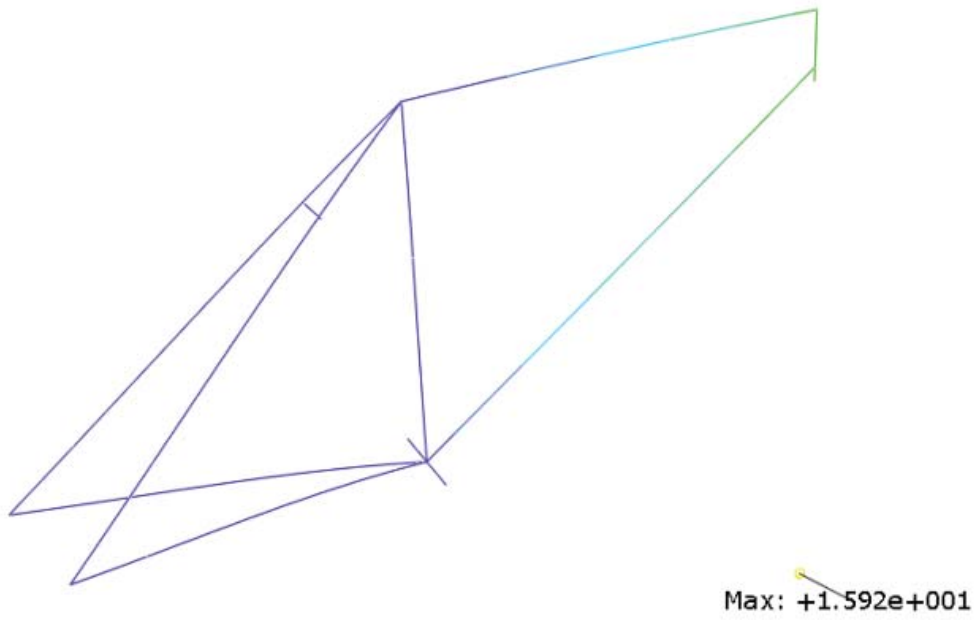
Skořepinový model

Výsledné pole deformací po zatížení je na obrázku 21. Maximální deformace rámu nastala v místě zavedení síly. Hodnota deformace je 9.385 mm a z ní plynoucí tuhost ($k_{THR} = F/u$) je 10.66 N/mm.

Obrázek 21: Pole deformací po zatížení skořepinového modelu zkouškou THR.

Nosníkový model

V případě zavedení stejného zatížení do nosníkového modelu, byla maximální deformace 15.92 mm a odpovídající tuhost rámu 6.28 N/mm (obrázek 22), což je o cca 40 % méně, než bylo spočítáno pomocí skořepinového modelu.

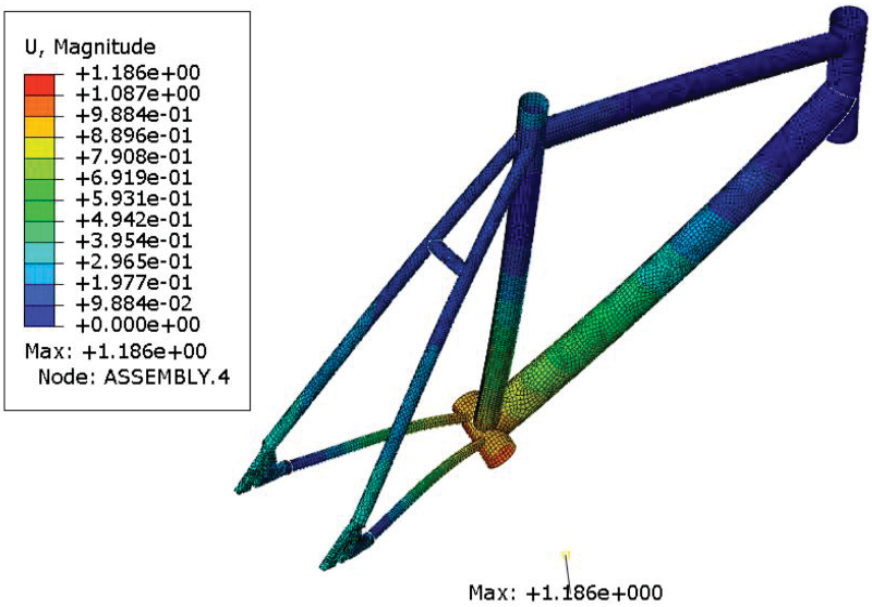


Obrázek 22: Pole deformací po zatížení nosníkového modelu zkouškou THR.

5.1.2 Zkouška „Out-of-saddle rigidity“

Skořepinový model

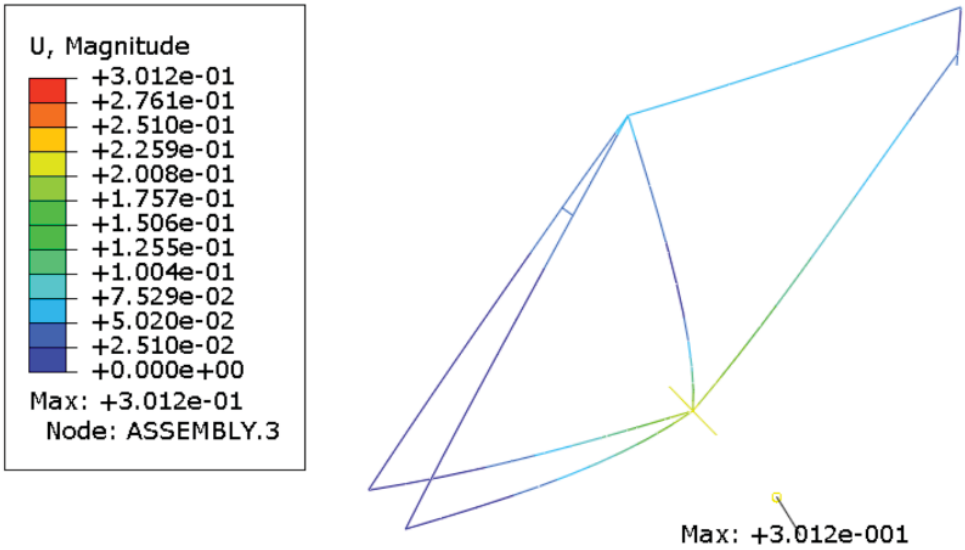
Výsledné namáhání rámu při zkoušce tuhosti šlapacího středu je zobrazeno na obrázku 23, kde je patrné výrazně barevně ohraničené kritické místo v oblasti středové trubky. Maximální deformace rámu činila pro skořepinový model 1.186 mm s odpovídající tuhostí 84.32 N/mm.



Obrázek 23: Pole deformací po zatížení skořepinového modelu zkouškou OSR.

Nosníkový model

Již s ohledem na absenci středové trubky lze u nosníkového modelu předpokládat zásadní odchylky v hodnotách deformace a tuhosti. Nosníkové prvky jsou v tomto případě svázány pevně v jednom středovém bodě konstrukce a lze se domnívat, že vypočítaná tuhost bude patrně vyšší než u skořepinového modelu. Tento předpoklad se také prokázal po zatížení nosníkového rámu zkouškou tuhosti šlapacího středu (obrázek 24). Přestože hodnota maximální deformace u skořepinového modelu činila 1.186 mm u nosníkového modelu pouze 0.31 mm. Odpovídající tuhost rámu - 333 N/mm, pak nelze považovat za zcela reálnou.



Obrázek 24: Pole deformací po zatížení nosníkového modelu zkouškou OSR.

5.2 Porovnání tuhostí skořepinového a nosníkového modelu rámu kola z duralu

5.2.1 Zkouška „Track holding rigidity“

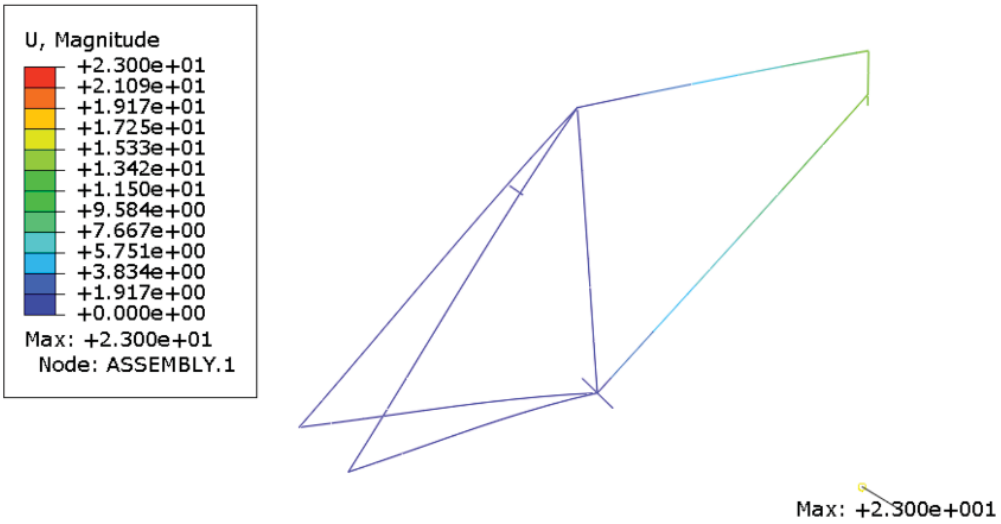
Skořepinový model

Za účelem srovnání vlivu materiálových vlastností na celkovou tuhost rámu byl kompozit (5.1.1) porovnáván s duralem ve zkoušce torzní tuhosti. Maximální deformace v případě duralu byla 9.56 mm s odpovídající tuhostí 10.46 N/mm (obrázek 25), což jsou hodnoty zcela srovnatelné s kompozitem a hodnotami deformace 9.385 mm resp. tuhostí 10.66 (obrázek 21).

Obrázek 25: Pole deformací po zatížení skořepinového modelu zkouškou THR pro dural.

Nosníkový model

Stejně jako v případě THR zkoušky kompozitového nosníkového modelu (obrázek 22) se projevila deformace nosníkového modelu výrazněji i v případě duralu ve srovnání se skořepinovým modelem. Maximální deformace dosáhla 23.0 mm s tuhostí pouze 4.35 N/mm.

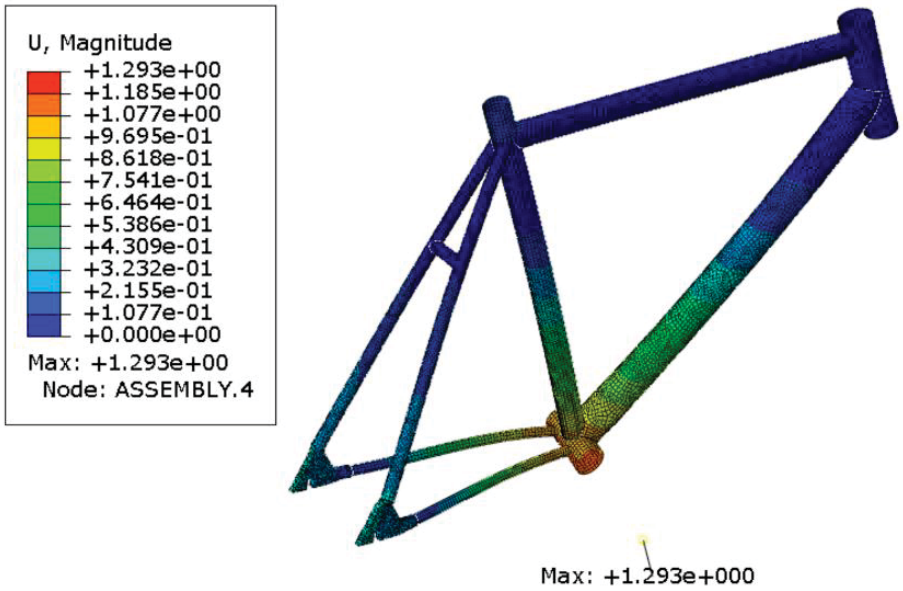


Obrázek 26: Pole deformací po zatížení nosníkového modelu zkouškou THR pro dural.

5.2.2 Zkouška „Out-of-saddle rigidity“

Skořepinový model

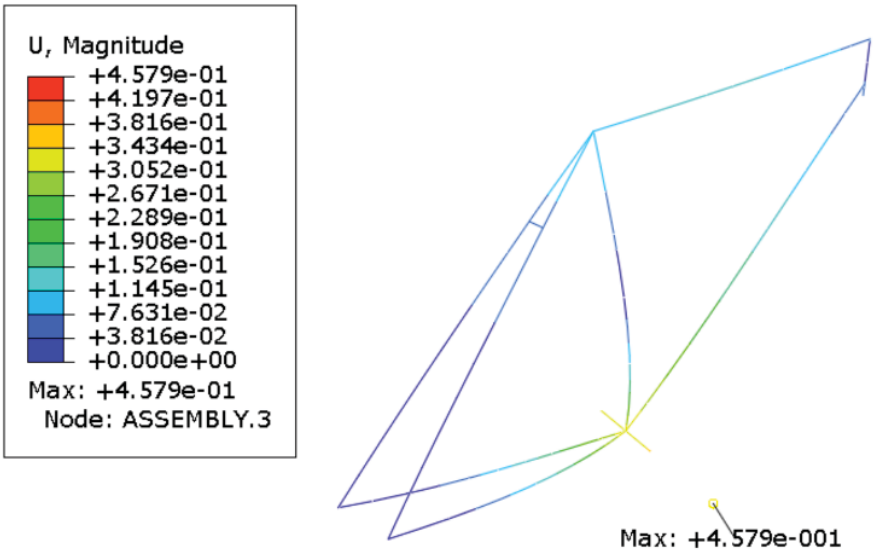
V případě zkoušky tuhosti šlapacího středu byly dosažené hodnoty maximální deformace u duralu 1.29 mm s odpovídající tuhostí 77.34 N/mm (obrázek 27), což je hodnota značně blízká tuhosti spočítané na skořepinového modelu z kompozitu, 84.32 N/mm (5.1.2).



Obrázek 27: Pole deformací po zatížení skořepinového modelu zkouškou OSR pro dural.

Nosníkový model

Obdobně jako v případě kompozitu (5.1.2, obrázek 24) se zjednodušený nosníkový model jeví jako nevhodný pro testování tuhosti šlapacího středu. Získané hodnoty maximální deformace 0.46 mm a tuhost 217.39 N/mm pro dural, patrně neodrážejí skutečnou situaci.



Obrázek 28: Pole deformací po zatížení nosníkového modelu zkouškou OSR pro dural.

5.3 Vliv skladby jednotlivých kompozitových komponent rámu na celkovou tuhost skořepinového modelu rámu

Za účelem vyhodnocení vlivu kompozitového složení jednotlivých trubek na celkovou tuhost skořepinového modelu rámu, byla uvažována zátěžná situace „Track holding rigidity“ a sledovány dvě změny ve složení kompozitu. V prvním uvažovaném případě byl modifikován poměr tloušťky křížem vinutých vrstev k vrstvám s nulovou orientací a to tak, že byla zvětšena tloušťka vrstvy s nulovou orientací o 50 %, zatímco vrstvy křížem orientované byly o stejnou tloušťku zeslabeny. Takto upravené složení kompozitu je dále označeno jako Kompozit A. V případě Kompozitu B byl poměr mezi nulovými a kříženými vrstvami zaměněn, tj. byla o 50 % zvýšena tloušťka vrstev křížených a o stejnou tloušťku sníženo množství vrstev pod úhlem 0°. Důsledky těchto záměn jsou patrné v tabulce 4. Vrstvy pod úhlem cca 90° zvlášť vyšetřovány nebyly, a to proto, že tyto vrstvy plní spíš roli technologickou a zvyšují stabilitu proti vzpěru, než že by zásadně ovlivňovaly tuhost s výjimkou trubky středové.

	Dolní rámová t.	Hlavová trubka	Horní rámová	Sedlová trubka	Sedlová vzpěra	Řetězová vzpěra 9°
Základní složení kompozitu – poměr křížem vinutých vrstev k vrstvám 0°.	1.77	2.02	1.76	1.28	1.18	1.10
Posuv u [mm]	9.39					
Tuhost k_{THR}	10.66					
Kompozit A – poměr křížem vinutých vrstev k vrstvám 0°.	0.85	1.01	0.84	0.96	0.46	0.40
Posuv u [mm]	10.08	9.45	9.75	9.43	9.35	9.48
Tuhost k_{THR}	**9.92**	**10.58**	**10.26**	**10.60**	**10.69**	**10.55**
Kompozit B – poměr křížem vinutých vrstev k vrstvám 0°.	4.54	5.04	4.53	4.88	3.37	3.78
Posuv u [mm]	8.91	9.36	9.12	9.35	9.44	9.43
Tuhost k_{THR}	**11.23**	**10.69**	**10.97**	**10.70**	**10.59**	**10.60**

Tabulka 4: Vliv skladby jednotlivých kompozitových komponent rámu na celkovou tuhost rámu.

Vzhledem k tomu, že skladba kompozitu středové trubky neobsahuje žádné vrstvy kladené s nulovou orientací, byla provedena citlivostní analýza na tloušťku celého kompozitu avšak opět s přihlédnutím k vrstvám kladeným křížem jako v předchozí situaci (tabulka 5).

Tuhost základního rámu	
Posuv u [mm]	9.39
Tuhost k_{THR}	10.66
Křížené vrstvy 67%	
Posuv u [mm]	9.49
Tuhost k_{THR}	**10.54**
Křížené vrstvy 50%	
Posuv u [mm]	9.56
Tuhost k_{THR}	**10.47**
Křížené vrstvy 150 %	
Posuv u [mm]	9.28
Tuhost k_{THR}	**10.77**
Křížené vrstvy 200 %	
Posuv u [mm]	9.21
Tuhost k_{THR}	**10.86**

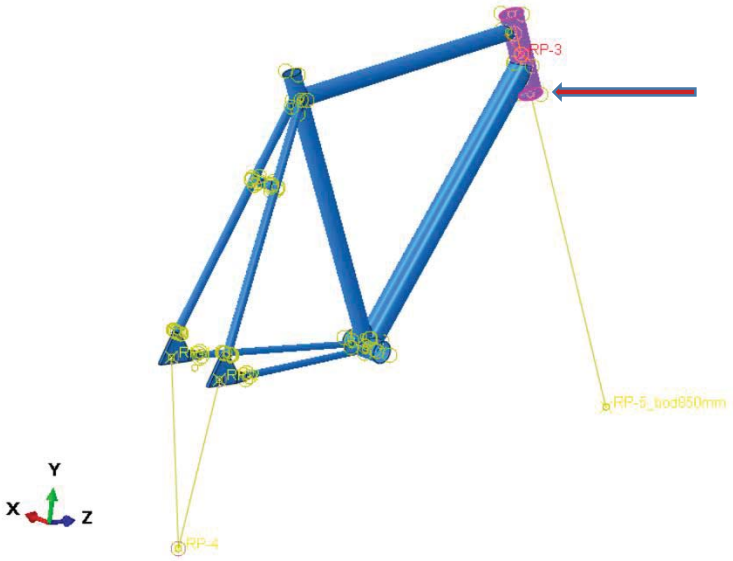
Tabulka 5: Vliv tloušťky kompozitové vrstvy středové trubky na celkovou tuhost rámu.

Z výstupů MKP modelu je patrné, že vyšší tuhosti rámu lze dosáhnout spíše posunutím poměru tloušťky vrstvy ve prospěch křížem orientovaných vrstev a na úkor vrstev s nulovou orientací než naopak. Nejvýznamnější nárůst tuhosti rámu činí 5 % v případě změněného poměru vrstev u dolní rámové trubky a přibližně 3 % u horní rámové trubky.

Z citlivostní analýzy středové trubky vyplývá, že vliv zesílení či zeslabení křížem vinutých vrstev je poměrně nevýznamný, v případě zesílení těchto vrstev o 200 % se zvýšila tuhost o 1.9 %.

5.4 Vyšetření namáhání v definovaném kritickém místě pomocí MKP modelů a analytického výpočtu

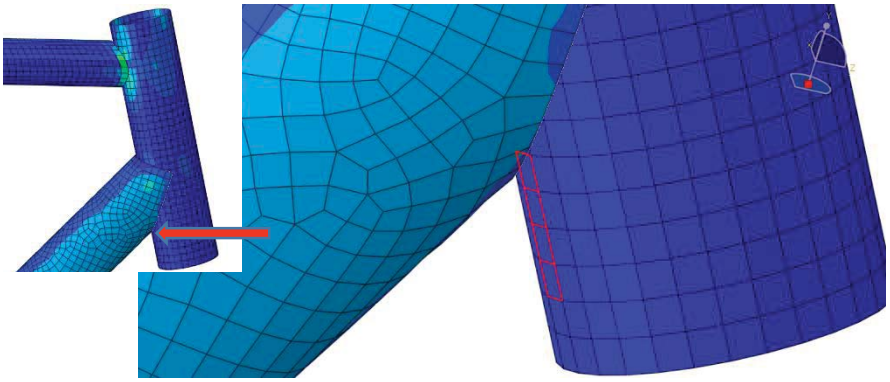
Srovnání namáhání hlavové trubky v těsné blízkosti napojení na spodní rámovou trubku bylo provedeno při zatížení „Track holding rigidity“ (obrázek 27) na skořepinovém i nosníkovém kompozitovém modelu s tím, že síla ve vzdálenosti 850 mm od středu hlavové trubky byla z důvodu snazšího analytického výpočtu svázána s dolní hranou.



Obrázek 29: Zátěžný testovací stav „Track holding rigidity“. Šipkou vyznačeno místo připojení síly k hlavové trubce.

5.4.1 Skořepinový model

V případě skořepinového modelu byly vyšetřovány posuvy a napětí 4 elementů v blízkosti přiléhající dolní rámové trubky a v blízkosti osy symetrie rámu.



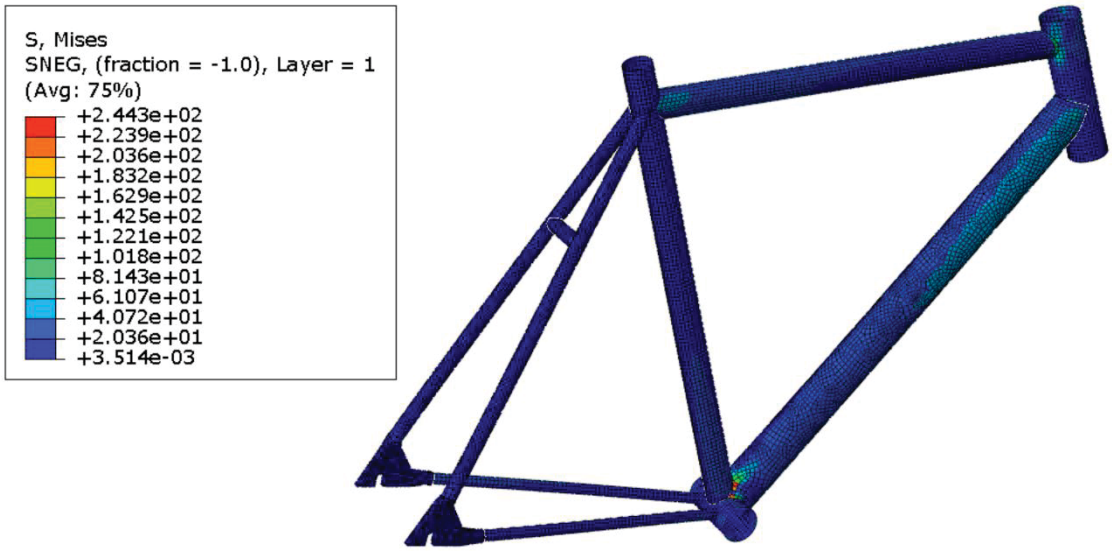
Obrázek 30: Detail vyšetřovaného kritického místa hlavové trubky – skořepinový model**.** Čísla elementů odshora dolů: 153, 124, 95, 66.

Posuvy v uzlech vyšetřovaných elementů nabývaly v souladu s předpokladem vyšší hodnoty v uzlech vzdálenějších od osy symetrie rámu. Maximální hodnota dosanovala 0.763 mm v uzlu elementu nejblíže hrany hlavové trubky (tabulka 6).

Element	**Uzel levý**	**Uzel pravý**
153	152	153
Posuv u [mm]	**0.588**	**0.602**
124	123	124
Posuv u [mm]	**0.641**	**0.655**
95	94	95
Posuv u [mm]	**0.696**	**0.709**
66	65	66
Posuv u [mm]	**0.751**	**0.763**

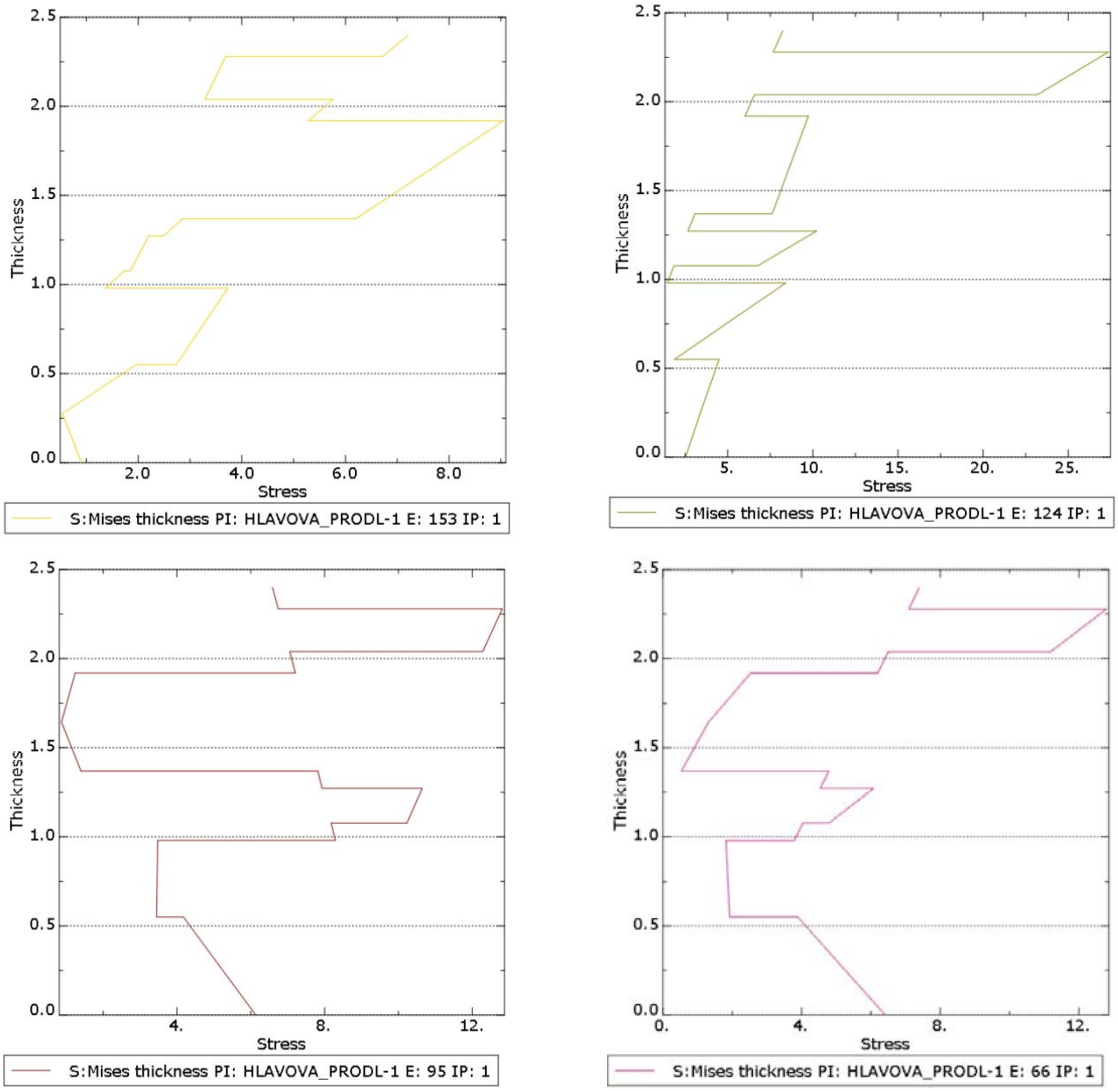
Tabulka 6: Posuvy v uzlech sledovaných elementů.

Obdobně byl vyšetřen na skořepinovém modelu i průběh napětí podle Misese. Na obrázku 31 je vykreslen průběh napětí v celé konstrukci. Zkouškou THR je nejvíce zatížen střed rámu a následně spodní rámová trubka ve směru zatížení.



Obrázek 31: Průběh napětí v celé skořepinové konstrukci.

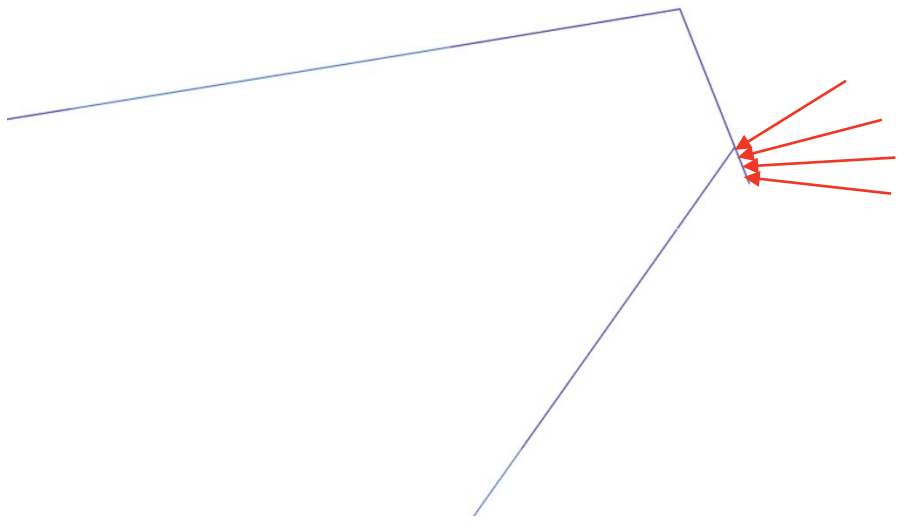
Celková tloušťka skořepiny hlavové trubky je 2.39 mm. Z obrázku 32 je patrné, že největší namáhání podle Misese - cca **28 MPa** se nachází pro element 124 ve 4. vrstvě kompozitu cca 1.8 mm od spodní vrstvy skořepiny. Maximální napětí v elementu 153, který se přímo napojuje na dolní rámovou trubku, dosahuje nejmenší hodnoty **8-9 MPa** také ve 4. vrstvě. Maximální napětí v elementech 95 a 66, které jsou nejblíž volné hraně trubky, jsou shodná, opět ve 4. vrstvě kompozitu a dosahují cca **12 MPa**.



Obrázek 32: Průběh napětí po tloušťce vrstvy vyšetřovaných elementů.

5.4.2 Nosníkový model

Obdobně jako skořepinový model 5.4.1 byl vyšetřen průběh napětí a posuvy v elementech nosníkového modelu v místě 25 mm od místa spojení hlavové trubky a trubky dolní.



Obrázek 33: Detail vyšetřovaného kritického místa hlavové trubky – nosníkový model**.** Čísla elementů odshora dolů: 83, 84, 85, 86.

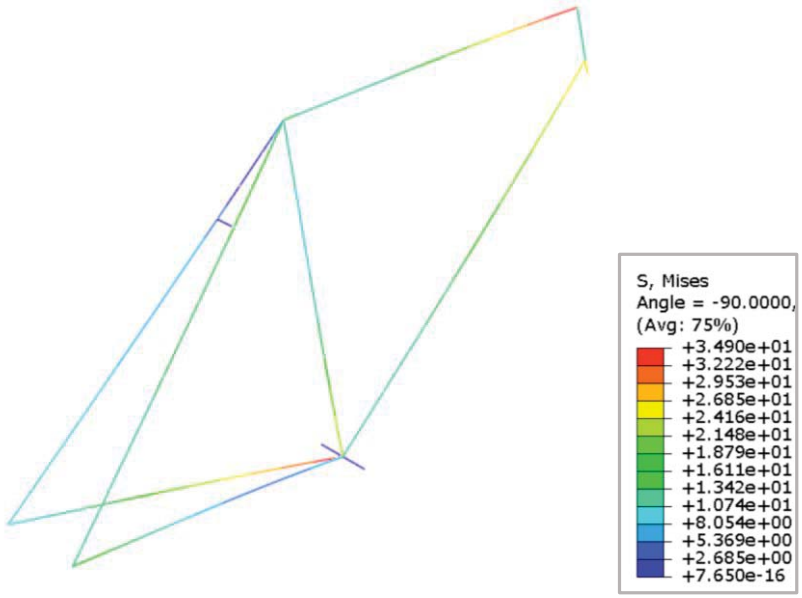
Posuvy v uzlech nabývaly hodnot přibližně o třetinu nižších než v případě skořepinového modelu. Hodnoty se směrem k volnému konci zvyšovaly s maximem posuvu 0.47 mm.

Uzel	**Posuv u [mm]**
83	0.407
84	0.428
85	0.449
86	0.470

Tabulka 7: Posuvy v uzlech sledovaných elementů.

Vzhledem k nemožnosti sledování namáhání jednotlivých vrstev ve výsledcích, byly sledovány pouze posuvy jednotlivých elementů a napětí na homogenizovaný průřez. Obrázek 34 ilustruje průběh napětí v celé konstrukci. Oproti nosníkovému modelu je zde značné namáhání v horní rámové trubce. Vzhledem k tomu, že středová trubka, díky spojení ostatních komponent

v jednom uzlu, postrádá svoji funkci, je její zatížení téměř nulové. Z nosníkového modelu je patrný vliv asymetrického zatížení.



Obrázek 34: Průběh napětí v celé nosníkové konstrukci.

Zatímco u skořepinového modelu napětí v elementech nabývalo hodnot od cca 8-9 MPa do cca 28 MPa, je rozložení napětí v elementech nosníkového modelu daleko rovnoměrnější, což lze přičíst především zjednodušené geometrii modelu, která se nepotýká s problémem dokonalého svázání skořepinových trubek. Napětí podle Misese mírně klesá se vzdáleností od spojení s dolní rámovou trubkou. Tento trend by byl v zásadě shodný i u skořepinového modelu, když vyloučíme element 153, který je částečně zanořen do další komponenty.

Uzel	Napětí S [MPa]
83	25.16
84	25.10
85	25.04
86	24.98

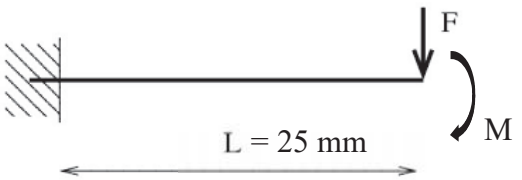
Tabulka 8: Napětí v uzlech sledovaných elementů.

5.4.3 Analytický výpočet

Hodnoty zjištěné pomocí MKP na obou modelech byly porovnány s analyticky získanými hodnotami v místě vzdáleném 25 mm od volného okraje hlavové trubky.

Zadané veličiny pro hlavovou trubku z kompozitu:

- F = 100 N
- L_{hrana} = 25 mm
- $L_{zatížení}$ = 850 mm
- D = 43.8 mm
- d = 41.41 mm
- E = 43 283 MPa
- G = 22 560 MPa



$$A = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2) = 160\ mm^2 \tag{5.1}$$

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) = 36320\ mm^4 \tag{5.2}$$

$$W_O = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D} = 1658\ mm^4 \tag{5.3}$$

$$M_O = M_{O(F)} + M_{O(M)} = F \cdot L_{hrana} + F \cdot L_{zatížení} = 100 \cdot 25 + 100 \cdot 850 = 87\ 500\ N \cdot mm \tag{5.4}$$

$$\sigma_{oMAX} = \frac{M_O}{Wo} = \frac{87\ 500}{1658} = 52.8\ MPa \tag{5.5}$$

$$u_{celk} = u_F + u_M + u_{smyk} \tag{5.6}$$

$$u_{celk} = \frac{Fl^3}{3EJ} + \frac{Ml^2}{2EJ} + \frac{Fl\beta}{GA} = 3.31 \cdot 10^{-4} + 168.9 \cdot 10^{-4} + 8.2 \cdot 10^{-4} = 184.41 \cdot 10^{-4} = 0.02\ mm$$

Posuv získaný analytickým výpočtem je o řád nižší než hodnoty získané z MKP, což může být dáno zásadním zjednodušením vyšetřované situace oproti modelovým situacím. Především síla není zavedena přesně do osy, což může působit značná zkreslení. Dále pak smykový modul G je zde v rovině laminátu, zatímco pro výpočet je nutno použít příčný smykový modul trubky, který se u kruhového průřezu nachází mezi příčným smykovým modulem vrstvy a smykovým modulem v rovině laminátu.

6 Závěr

V práci byly vytvořeny dva modely, skořepinový a nosníkový, zjednodušené geometrie rámu cyklistického kola za účelem MKP analýzy vlivu kompozitního složení na výslednou tuhost rámu. Tuhost rámu pak byla testována pomocí dvou, v současné době standardizovaných zátěžových zkoušek a to tzv. „Track holding rigidity“ zkoušky torzní tuhosti a „Out-of-saddle rigidity“, zkoušky tuhosti šlapacího středu. Na základě těchto mechanických zkoušek byly zavedeny okrajové podmínky a odpovídající zatížení do obou modelů. Ze shrnující tabulky 9 vyplývá, že v případě skořepinového modelu se jeví kompozitová konstrukce jako mírně tužší oproti duralové při stejných tloušťkách jednotlivých trubek, a to pro oba testované zátěžné stavy.

Skořepinový model lze obecně považovat za bližší realitě z důvodu reálnějších vazeb mezi jednotlivými komponentami – trubkami a také z důvodu přesnějšího vystižení materiálové skladby. Oproti skořepinovému modelu se nosníkový liší zásadně v případě zkoušky tuhosti šlapacího středu. Zde lze předpokládat, že napojení komponent do jednoho středového bodu (oproti realističtější středové trubce v případě skořepinového modelu) vytváří z podstaty tužší konstrukci, což je zvlášť patrné při asymetrickém zatížení v tomto bodě.

		Skořepinový model		**Nosníkový model**	
		Kompozit	**Dural**	**Kompozit**	**Dural**
Zkouška THR	max. u [mm]	9.39	9.56	15.92	22.18
	k	10.66	10.46	6.28	4.50
Zkouška OSR	max. u [mm]	1.19	1.29	0.30	0.46
	k	84	77.34	331.45	217.39

Tabulka 9: Analýza tuhosti rámu pomocí MKP - souhrn.

V rámci zkoušky torzní tuhosti na skořepinovém modelu byl dále analyzován vliv kompozitního složení všech jednotlivých komponent na celkovou tuhost rámu. Sledován byl především vliv pozměněného poměru křížem vinutých vrstev k vrstvám s nulovou orientací. Zjištěné výstupy z MKP modelu shrnuté v tabulce 4 naznačují, že vyšší tuhosti lze dosáhnout spíše posunutím poměru tloušťky skladby ve prospěch křížem orientovaných vrstev a na úkor vrstev s nulovou orientací než naopak. To by odpovídalo potřebě zvýšit tuhost v krutu a příčném

smykovém namáhání na úkor tuhosti ohybové. S ohledem na absenci vrstev s nulovou orientací u středové trubky, byl vyšetřen ještě samotný vliv tloušťky křížových vrstev na celkovou tuhost rámu (tabulka 5). Závislost mezi tloušťkou křížové vrstvy a tuhostí se zdá být přibližně lineární. Vliv zesílení či zeslabení křížem vinutých vrstev je poměrně nevýznamný, v případě zesílení těchto vrstev o 200 % se zvýšila celková tuhost rámu o 1.9 %.

Posledním bodem bylo vyšetření zátěžného stavu „Track holding rigidity“ v definovaném kritickém místě na hlavové trubce v bezprostřední blízkosti napojení na spodní rámovou trubku pomocí MKP na skořepinovém a nosníkovém modelu a pomocí analytického výpočtu. Jak je patrno z výsledů, mezi nosníkovým a skořepinovým modelem je větší shoda než při vyšetření analytickým výpočtem, což může být způsobeno zásadním zjednodušením vyšetřované situace oproti modelovým situacím.

Seznam použité literatury

[1] LAŠ, Vladislav. Mechanika kompozitních materiálů. 2., přeprac. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2008, 200 s. ISBN 978-80-7043-689-9.

[2] EHRENSTEIN Gottried W. Polymerní kompozitní materiály. 1. vydání. Praha: Scientia, 2009.

[3] KOŘÍNEK Zdeněk. Vlákna pro kompozity. http://kompozity.webnode.cz/

[4] NOVOTNÝ Petr. Vývoj a konstrukce uhlíkových ráfků pro automobilový průmysl. Diplomová práce UTB, 2016.

[5] VOYIADJIS George Z. a KATTAN Peter I. Mechanics of Composite Materials with MATLAB. Springer 2005.ABAQUS Users Manual. Dassault Systèmes Simulia Corp. 2016.

[6] BARBERO Ever J. Finite element analysis of composite materials. Taylor & Francis Group, 2008.

[7] FUSEK Martin a HALAMA Radim. MKP a MHP. Text k projektu Matematika pro inženýry 21. století (reg.č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), 2011.

[8] HORÁK Zdeněk a ŠPANIEL Miroslav. Aplikace metody konečných prvků. Skriptum ČVUT, 2010.

[9] ABAQUS Users Manual. Dassault Systèmes Simulia Corp. 2016.

[10] KULÍŠEK Viktor. MKP a ortotropní materiály. [Přednáška]. Praha: ČVUT, 2014.

[11] ČAPEK Jan. Návrh a analýza rámu horského kola z uhlíkového kompozitu. Diplomová práce ČVUT, 2015.

Seznam obrázků

Obrázek 1: Vliv průměru skleněného vlákna na jeho pevnost 2

Obrázek 2: Průběh zatěžovacího diagramu jednosměrně vyztuženého laminátu při tahové zkoušce 4

Obrázek 3: Výroba hřídele. 5

Obrázek 4: Rozšířený Hookeův zákon. 7

Obrázek 5: Jednosměrový kompozit - lamina 7

Obrázek 6: Transformace napětí a deformace pro rovinnou úlohu. 8

Obrázek 7: Geometrie deformace laminátu pro případ nulového příčného přetvoření.. 9

Obrázek 8: Napětí se mění po tloušťce laminátu nespojitě.. 9

Obrázek 9: Geometrie deformace laminátu pro případ uvažování příčného přetvoření.. 10

Obrázek 10: Konstanty pevnosti pro základní typy namáhání. 12

Obrázek 11: Různě formulované podmínky pevnosti. 13

Obrázek 12: Prvky využívané při modelování kompozitů. 18

Obrázek 13: Rozdíl mezi konvenčním a objemovým skořepinovým prvkem 19

Obrázek 14: Geometrie rámu silničního kola Festka 22

Obrázek 15: Vliv geometrie dílu na vysíťování. 23

Obrázek 16: Zjednosušená geometrie rámu – skořepinový model. 23

Obrázek 17: Ukázka vrstvení laminátu v prostředí Abaqus. 24

Obrázek 18: Zjednodušená geometrie rámu – nosníkový model. 25

Obrázek 19: Zkušebních metody na měření tuhosti rámů jízdních kol. 26

Obrázek 20: Uložení a zatížení rámu pro testování THR a OSR 27

Obrázek 21: Analýza zatížení THR, skořepinový model, kompozit 28

Obrázek 22: Analýza zatížení THR, nosníkový model, kompozit 28

Obrázek 23: Analýza zatížení OSR, skořepinový model, kompozit 29

Obrázek 24: Analýza zatížení OSR, nosníkový model, kompozit 29

Obrázek 25: Analýza zatížení THR, skořepinový model, dural 29

Obrázek 26: Analýza zatížení THR, nosníkový model, dural 30

Obrázek 27: Analýza zatížení OSR, skořepinový model, dural 29

Obrázek 28: Analýza zatížení OSR, nosníkový model, dural 29

Obrázek 29: Zátěžný testovací stav „Track holding rigidity“. 36

Obrázek 30: Detail vyšetřovaného kritického místa – skořepinový model.. 36

Obrázek 31: Průběh napětí v celé skořepinové konstrukci. 37

Obrázek 32: Průběh napětí po tloušťce vrstvy vyšetřovaných elementů 38

Obrázek 33: Detail vyšetřovaného kritického místa – nosníkový model..... 39

Obrázek 34: Průběh napětí v celé nosníkové konstrukci...... 40

Seznam tabulek

Tabulka 1: Materiálové vlastnosti některých druhů uhlíkových a skleněných vláken. 3

Tabulka 2: Srovnání průhybu pod silou. 15

Tabulka 3: Tabulka elastických konstant HSC a HM vláken..... 24

Tabulka 4: Vliv skladby jednotlivých kompozitových komponent rámu na celkovou tuhost rámu. 33

Tabulka 5: Vliv tloušťky kompozitové vrstvy středové trubky na celkovou tuhost rámu. 34

Tabulka 6: Posuvy v uzlech sledovaných elementů – skořepinový model...... 37

Tabulka 7: Posuvy v uzlech sledovaných elementů – nosníkový model. 37

Tabulka 8: Napětí v uzlech sledovaných elementů – nosníkový model. 40

Tabulka 9: Analýza tuhosti rámu pomocí MKP - souhrn 42

V práci použité názvy programových produktů, firem apod. mohou být ochrannými známkami nebo registrovanými ochrannými známkami příslušných vlastníků.

Abaqus® je registrovaná obchodní známka firmy Dassault Systèmes Simulia Corp.

Seznam příloh

Přílohy jsou k této práci přikládány v elektronické podobě na CD.

1. Modelová databáze Abaqusu obsahující výpočetní model skořepinového rámu (pouze pro dural). [CD]/Abaqus/Shell_ram_dural.cae
2. Modelová databáze Abaqusu obsahující výpočetní model nosníkového rámu (pouze pro dural). [CD]/Abaqus/Wire_ram_dural.cae