**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**Fakulta elektrotechnická**

**Katedra elektrotechnologie**

# Diferenciální rovnice v elektrotechnice

# Differential Equations in Electrical Engineering

Bakalářská práce

| | |
|---|---|
| Studijní program: | Elektrotechnika, energetika a management |
| Studijní obor: | Aplikovaná elektrotechnika |
| Vedoucí práce: | RNDr. Martin Bohata, Ph.D. |

**Filip Klouda**

**Praha 2017**

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Klouda** Jméno: **Filip** Osobní číslo: **425635**

Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**

Zadávající katedra/ústav: **Katedra elektrotechnologie**

Studijní program: **Elektrotechnika, energetika a management**

Studijní obor: **Aplikovaná elektrotechnika**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Diferenciální rovnice v elektrotechnice**

Název bakalářské práce anglicky:

**Differential Equations in Electrical Engineering**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se se základní teorií obyčejných diferenciálních rovnic.
2. Seznamte se s Eulerovou metodou numerického řešení diferenciálních rovnic.
3. Pomocí diferenciálních rovnic řešte vybrané úlohy z oblasti elektrotechniky.

Seznam doporučené literatury:


1. W. E. Boyce, R. C. DiPrima: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Wiley, Hoboken, 2009.
2. M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney: Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, Academic Press, San Diego, 2004.


Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**RNDr. Martin Bohata Ph.D., katedra matematiky FEL**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

**Ing. Ivana Beshajová Pelikánová Ph.D., katedra elektrotechnologie FEL**

Datum zadání bakalářské práce: **23.02.2016** Termín odevzdání bakalářské práce: ______________

Platnost zadání bakalářské práce: ______________

Podpis vedoucí(ho) práce | Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry | Podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

.

Datum převzetí zadání | Podpis studenta

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu práce RNDr. Martinu Bohatovi, PhD.

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne ...

Název práce: Diferenciální rovnice v elektrotechnice

Autor: Filip Klouda

Katedra: Katedra elektrotechnologie

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Bohata, Ph.D., Katedra matematiky

Abstrakt: Tato práce se skládá ze tří kapitol. První kapitola pojednává o obecné teorii obyčejných diferenciálních rovnic a prezentuje základní analytické metody jejich řešení. Ve druhé kapitole se soustředíme na numerickou Eulerovu metodu pro hledání aproximace řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Třetí kapitola se týká teorie elektrických obvodů a ukazuje aplikace obyčejných diferenciálních rovnic v této oblasti. Všechny kapitoly obsahují názorné příklady pro lepší pochopení tématu. Teorie obyčejných diferenciálních rovnic patří k základním disciplínám matematické analýzy. V nejjednodušším případě lineárních rovnic s konstantními koeficienty jsme schopni nalézt a vyjádřit explicitně řešení užitím vhodné analytické metody. Naopak u problémů nelineárních (např. van der Polův oscilátor) je to poměrně vzácný případ a jsme nuceni se spokojit s řešením přibližným. Aplikace diferenciálních rovnic nalezneme v mnoha, ne-li ve všech, oblastech vědecké a inženýrské praxe, od mechaniky, přes chemii, biologii až po elektrotechniku.

Klíčová slova: obyčejné diferenciální rovnice, Eulerova metoda, elektrické obvody, van der Polův oscilátor

Title: Differential Equations in Electrical Engineering

Author: Filip Klouda

Department: Department of Electrotechnology

Supervisor: RNDr. Martin Bohata, Ph.D., Department of Mathematics

Abstract: This work consists of three chapters. The First chapter deals with general theory of ordinary differential equations and presents basic analytical methods for their solution. In the second chapter we focus on numerical Euler's method for approximation of solution of systems of ordinary differential equations. The third chapter covers theory of electric circuits and shows applications of the ordinary differential equations in this field. All the chapters contain illustrative examples for better understanding of the topic. The theory of ordinary differential equations belongs to fundamental disciplines of mathematical analysis. In the simplest case of linear equations with constant coefficients we are able to find and express the solution using suitable analytical method. On the other hand for nonlinear problems (e.g. van der Pol oscillator) it is relatively rare case and we are forced to accept approximation of the exact solution. Applications of differential equations can be found in many, if not all, areas of scientific and engineering practice from mechanics through chemistry, biology to electrical engineering.

Keywords: ordinary differential equations, Euler's method, electric circuits, van der Pol oscillator

# Obsah

# Úvod

Teorie diferenciálních rovnic patří k základním disciplínám matematické analýzy. Vznikala přirozeně z potřeb fyziky. Posléze našla uplatnění v celé řadě dalších oblastí lidské činnosti. Díky diferenciálním rovnicím totiž můžeme modelovat chování rozličných systémů vědecké a inženýrské praxe, od mechaniky, přes chemii, biologii až po elektrotechniku.

Základní dělení diferenciálních rovnic je na takzvané obyčejné a parciální diferenciální rovnice. V případě obyčejných diferenciálních rovnic, kterými se budeme výhradně v této práci zabývat, jsou hledané neznámé funkcemi jedné proměnné. Základním příkladem rovnic tohoto typu jsou slavné Newtonovy pohybové rovnice z klasické mechaniky, které popisují pohyb hmotného bodu. Dalším velmi důležitým příkladem jsou obvodové rovnice, které popisují časový vývoj proudů a napětí v elektrickém obvodu.

V parciálních diferenciálních rovnicích jsou hledané neznámé funkcemi více proměnných. Parciální diferenciální rovnice se přirozeně objevují při popisu fyzikálních polí, tj. systému s nekonečně mnoha stupni volnosti. Z nesčetného seznamu jejich konkrétních aplikací vyberme například analýzu proudění tekutin (Navierovy-Stokesovy rovnice), kvantovou mechaniku (Schrödingerova rovnice), vedení tepla (rovnice vedení tepla), nebo popis elektromagnetického pole (Maxwellovy rovnice) či gravitačního pole (Einsteinovy rovnice).

Z matematického pohledu je základní otázkou v teorii diferenciálních rovnic existence a jednoznačnost řešení. Z aplikačního hlediska je však důležité konkrétní řešení nalézt. K tomu nám věty o existenci příliš nepomohou, protože jejich důkaz není často konstruktivní (tj. neobsahuje návod, jak řešení najít). Jak již bylo řečeno, tato práce bude pojednávat pouze o obyčejných diferenciálních rovnicích. V nejjednodušším případě lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty existuje obecný postup, jak nalézt (alespoň v principu) jejich řešení analyticky. Pro nalezení analytického řešení obecné obyčejné diferenciální rovnice však žádný takový postup neexistuje. V případě nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic se tak musíme často spokojit s jejich numerickým řešením. K tomu je hojně využívána výpočetní technika a numerický software.

Numerické metody pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic nebo jejich soustav jsou nejčastěji metody iterační. Nejjednodušším příkladem je metoda Eulerova. Často se využívá široká třída metod typu Runge-Kuta. Z řady důvodů by výběru vhodné metody měl předcházet důkladný analytický rozbor problému. Takový rozbor však nemusí být jednoduchou záležitostí.

Tato práce se skládá ze tří kapitol. První kapitola pojednává o obecné teorii obyčejných diferenciálních rovnic a prezentuje základní analytické metody jejich řešení.

Ve druhé kapitole se soustředíme na numerickou Eulerovu metodu pro hledání aproximace řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

Třetí kapitola se týká teorie elektrických obvodů a ukazuje aplikace obyčejných diferenciálních rovnic v této oblasti. Kromě standardního RLC obvodu zde zmíníme také van der Polovu rovnici, která popisuje nelineární oscilátor. Její řešení budeme hledat numericky Eulerovou metodou vysvětlenou ve druhé kapitole.

# 1. Základy obyčejných diferenciálních rovnic

Diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi v určitém definičním oboru. Pokud je neznámá funkce funkcí jedné proměnné, používáme pro rovnice označení *obyčejná diferenciální rovnice*, v případě funkce více proměnných mluvíme o *parciálních diferenciálních rovnicích*.

V této práci se budeme zabývat výhradně obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Začněme stručným přehledem teorie. Všechny věty budeme uvádět bez důkazů. Důkazy může čtenář nalézt ve standardních učebnicích o obyčejných diferenciálních rovnicích, viz např. [BDH09] a [Wal98].

Tuto kapitolu začneme se základními pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic, následně rozebereme jejich řešitelnost a na závěr uvedeme přehled některých analytických metod pro hledání řešení určitých typů rovnic.

## 1.1 Základní pojmy a definice

**Definice 1.1.** Nechť $F$ je funkce $n+2$ proměnných, která není konstantní vzhledem k poslední proměnné. Obyčejnou diferenciální rovnicí $n$-tého řádu rozumíme rovnici

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.1}$$

Řád diferenciální rovnice odpovídá nejvyššímu řádu derivace, který se v diferenciální rovnici vyskytuje. V dalším se budeme zabývat obyčejnými diferenciálními rovnicemi $n$-tého řádu, které jsou rozřešené vzhledem k nejvyšší derivaci, tj. mají tvar

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)). \tag{1.2}$$

**Definice 1.2.** Řešením rovnice (1.1) na intervalu $I$ nazveme funkci $y(x)$, která má na $I$ $n$-tou derivaci a splňuje (1.1) v každém bodě intervalu $I$.

Podívejme se ještě na soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Kromě jiného jsou zajímavé proto, že do nich lze přepsat rovnici (1.2).

**Definice 1.3.** Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou funkce $n+1$ proměnných. Řešením soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & f_1(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \\ y_2'(x) & = & f_2(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_n'(x) & = & f_n(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \end{array} \tag{1.3}$$

na intervalu $I$ nazveme systém

$$(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \tag{1.4}$$

diferencovatelných funkcí na $I$, které vyhovují soustavě rovnic (1.3) v každém bodě intervalu $I$.

## 1.2 Věty o existenci a jednoznačnosti

Důležitou otázkou v teorii diferenciálních rovnic je existence a jednoznačnost řešení. Uveďme si dvě věty na toto téma. Tyto věty mají pouze lokální charakter. Říkají nám totiž, že při splnění určitých podmínek řešení existuje na nějakém okolí bodu. Tato lokálnost je způsobena tím, že se zatím bavíme o velmi obecných obyčejných diferenciálních rovnicích a jejich soustavách. Později také formulujeme větu o existenci a jednoznačnosti pro speciální typ rovnic, která již bude mít globální charakter.

**Věta 1.1.** *Mějme rovnici* (1.2) *a bod* $P = (x_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Nechť pravá strana rovnice a její derivace*

$$f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

*jsou spojité v okolí bodu* $P$. *Pak v okolí bodu* $x_0$ *existuje právě jedna funkce* $y(x)$, *která řeší rovnici* (1.2) *a vyhovuje počátečním podmínkám*

$$y(x_0) = y_{01}, y'(x_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}.$$

**Věta 1.2.** *Mějme soustavu* (1.3) *a bod* $P = (x_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Nechť* $f_i, i = 1, \dots, n$, *v soustavě* (1.3) *jsou spojité v okolí* $O$ *bodu* $P$ *a mají v* $O$ *spojité parciální derivace podle* $y_i, i = 1, \dots, n$. *Pak v okolí bodu* $x_0$ *existuje právě jeden systém funkcí* (1.4), *který řeší soustavu* (1.3) *a vyhovuje vztahům* $y_i(x_0) = y_{0i}, i = 1, \dots, n$. *Tyto vztahy označíme jako počáteční podmínky.*

## 1.3 Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic

### 1.3.1 Přímá integrace

Nejjednodušší rovnice má tvar $y'(x) = f(x)$, kde $f(x)$ je v spojitá v intervalu $I$. Hledejme řešení této rovnice, které pro $x_0 I$ splňuje $y(x_0) = y_0$. Řešením takové úlohy na intervalu $I$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $I$ vyhovující počáteční podmínce, tj. funkce

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

*Příklad* 1.1. Mějme úlohu $y'(x) = e^x - 1, y(0) = 1$. Funkce $e^x - 1$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Řešením této rovnice na $\mathbb{R}$ je dle předchozího funkce

$$y(x) = 1 + \int_0^x e^t - 1\mathrm{d}t = 1 + e^x - x - 1 = e^x - x.$$

### 1.3.2 Separace proměnných

**Věta 1.3.** *Nechť je* $f(x)$ *spojitá v intervalu* $I$, $g(y)$ *spojitá a nenulová v intervalu* $J$. *Mějme rovnici a počáteční podmínku*

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{f(x)}{g(y)}, \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

*kde* $x_0 \in I$ *a* $y_0$ *je vnitřní bod* $J$. *Potom existuje okolí bodu* $x_0$ *(v případě, že* $x_0$ *je krajním bodem, se jedná o příslušné jednostranné okolí), ve kterém má úloha* (1.5) *právě jedno řešení. Toto řešení je implicitně dáno vztahem*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{y_0}^{y(x)} g(t)\mathrm{d}t.$$

*Poznámka* 1.1. Mějme dánu úlohu

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x)g(y), \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

kde $f(x)$ je spojitá v $I$, $g(y)$ je spojitá v $J$, $x_0 \in I$ a $y_0$ je vnitřní bod $J$. Je-li $g(y_0) \neq 0$, pak díky spojitosti existuje otevřený interval $J_0 \subseteq J$ obsahující bod $y_0$, na kterém je $g(y)$ nenulová. Na $J_0$ proto platí

$$g(y) = \frac{1}{\frac{1}{g(y)}}.$$

Podle předchozí věty existuje okolí bodu $x_0$, ve kterém má (1.6) právě jedno řešení a toto řešení je implicitně dáno vztahem

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}.$$

Pokud $g(y_0) = 0$, je řešením úlohy (1.6) funkce $y(x) \equiv y_0$. V tomto případě však obecně nemáme zajištěnu jednoznačnost řešení na žádném okolí bodu $x_0$, jak uvidíme v následujícím příkladu.

O rovnicích z Věty 1.3 a Poznámky 1.1 říkáme, že mají *separované proměnné.*

*Příklad* 1.2. Mějme úlohu $y'(x) = y^{\frac{2}{3}}(x), y(0) = 1$. Protože $g(y) = y^{\frac{2}{3}}(x)$ nabývá kladných hodnot an intervalu $(0, \infty)$, dostaneme pro řešení zadané úlohy vztah

$$\int_1^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{2}{3}}} = \int_0^x \mathrm{d}t.$$

Odtud $3y^{\frac{1}{3}}(x) - 3 = x$. Tedy $y(x) = \frac{(x+3)^3}{27}$. Protože jsme požadovali, aby $y(x) > 0$, musí platit $x > -3$. Dle výše uvedené věty máme zajištěno, že tato funkce je jednoznačně určeným řešením zadané úlohy na nějakém okolí bodu 0. Přirozená otázka je, na jakém největším intervalu je řešení určeno podmínkou $y(0) = 1$ jednoznačně. Touto zajímavou otázkou se zde však zabývat nebudeme. Pouze poznamenejme, že dosazením snadno ověříme, že $y(x) = \frac{(x+3)^3}{27}$ řeší úlohu dokonce na $\mathbb{R}$. Ale na $\mathbb{R}$ není řešení počáteční podmínkou $y(0) = 1$ určeno jednoznačně, protože $y(x) = \max\left\{0, \frac{(x+3)^3}{27}\right\}$ je také řešením uvedené úlohy.

Jestliže si předepíšeme podmínku $y(0) = 0$ místo podmínky $y(0) = 1$, pak $y(x) \equiv 0$ je řešení na $\mathbb{R}$. Avšak identicky nulová funkce není jednoznačně určeným řešením na žádném okolí bodu 0, protože $y(x) = \frac{x^3}{27}$ je také řešením vyhovujícím podmínce $y(0) = 0$ a zřejmě $\frac{x^3}{27} \neq 0$ pro každé $x \neq 0$.

Grafy řešení pro obě počáteční podmínky můžete vidět ma Obrázku 1.1.

### 1.3.3 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

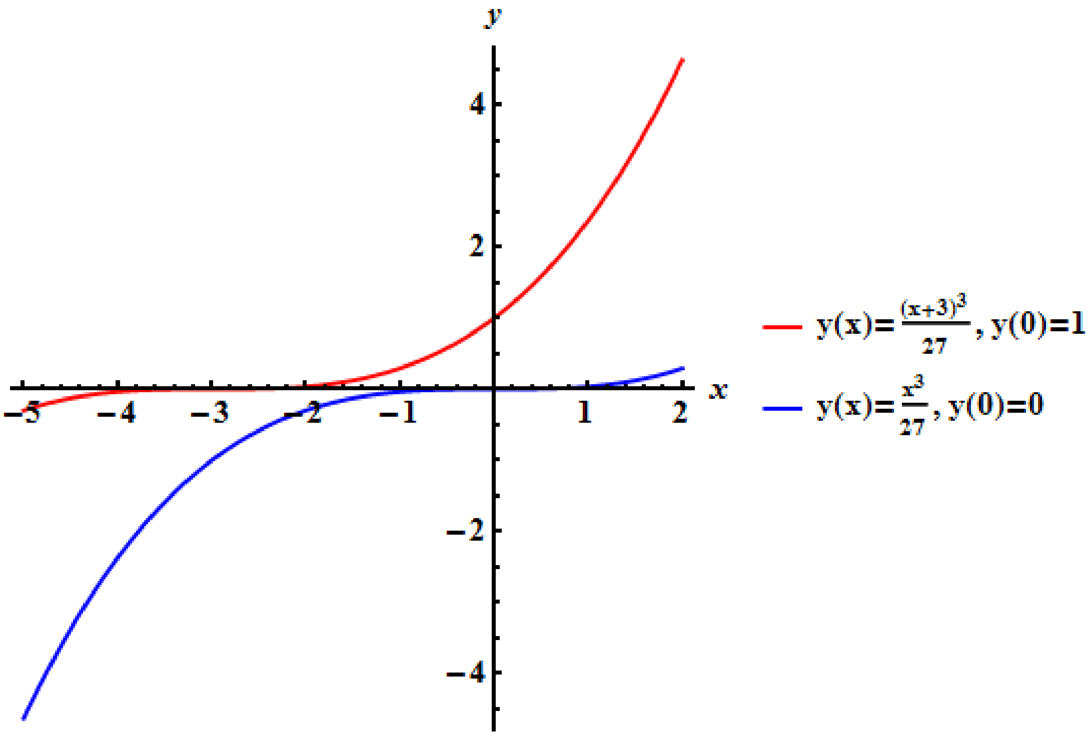
Mějme obyčejnou *lineární* diferenciální rovnici

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{1.7}$$

a k ní příslušnou *homogenní* lineární rovnici

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0. \tag{1.8}$$

Předpokládejme, že funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité v intervalu $I$. Potom je dle Věty 1.4 uvedené dále v textu zaručena v intervalu $I$ existence a jednoznačnost řešení rovnice (1.7) s počáteční podmíkou $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$.




Obrázek 1.1: Řešení úlohy z Příkladu 1.2

Homogenní lineární rovnici (1.8) můžeme řešit separací proměnných. S přihlédnutím k podmínce $y\,(x_0) = y_0$ můžeme pro $y_0 \neq 0$ psát

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{t} &= -\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t, \\ \log\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| &= -\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t, \\ \left|\frac{y(x)}{y_0}\right| &= \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right), \\ y(x) &= y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right), \end{aligned} \tag{1.9}$$

kde odstranění absolutní hodnoty je korektní vzhledem k následující poznámce.

*Poznámka* 1.2. Absolutní hodnotu v (1.9) můžeme odstranit, protože Věta 1.3 o separaci proměnných lze aplikovat jen na takových intervalech, kde $g(y) = y$ je nenulová. Máme danou podmínku $y(x_0) = y_0$. Je-li tedy $y_0 > 0$, pak se omezujeme jen na kladné hodnoty funkce $y(x)$ a naopak je-li $y_0 < 0$, omezujeme se jen na záporné hodnoty funkce $y(x)$. Podíl $\frac{y(x)}{y_0}$ musí tedy být vždy kladný. Věta o separaci proměnných nám dává existenci a jednoznačnost řešení jen na nějakém okolí $x_0$, avšak dosazením z (1.9) do (1.8) se snadno přesvědčíme, že se jedná o řešení na celém $I$, jehož jednoznačnost na $I$ plyne z Věty 1.4.

*Poznámka* 1.3. Odvození (1.9) nelze aplikovat v případě, kdy $y_0 = 0$, leč poslední výraz platí i v tomto případě a plyne z něj $y(x) \equiv 0$.

Řešení rovnice (1.7) získáme tzv. *metodou variace konstanty*. Vyjdeme z předpokladu, že řešení rovnice (1.7) má tvar

$$y(x) = C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right), \tag{1.10}$$

kde
$$C(x_0) = y_0. \tag{1.11}$$
Derivací (1.10) získáme
$$y'(x) = C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right) - C(x)a(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right) \tag{1.12}$$
Po dosazení (1.10) a (1.12) do (1.7) a využití metody přímé integrace z části 1.3.1 s podmínkou (1.11) můžeme psát
$$\begin{aligned} C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right) - C(x)a(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ + a(x)C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right) &= b(x), \\ C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right) &= b(x), \\ C(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t) \exp\left(\int_{x_0}^{t} a\,(s)\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.13}$$
Řešení rovnice (1.7) dostaneme po dosazení (1.13) do (1.10), tedy
$$y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t) \exp\left(\int_{x_0}^{t} a\,(s)\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t\right) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\,(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
*Příklad* 1.3. Chceme řešit rovnici
$$y'(x) + 3x^2 y(x) = 3x^2, \quad y(0) = 2. \tag{1.14}$$
Začneme řešením příslušné homogenní rovnice $y'(x) + 3x^2 y(x) = 0$. Můžeme využít odvozeného vzorce z (1.9), ale pro ilustraci na tomto příkladě zopakujeme celé odvození. Můžeme psát
$$\begin{aligned} \int_{1}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{t} &= -\int_{0}^{x} 3t^2 \mathrm{d}t, \\ \log\left|\frac{y(x)}{2}\right| &= -x^3, \\ \left|\frac{y(x)}{2}\right| &= e^{-x^3}, \\ y(x) &= 2e^{-x^3}, \end{aligned}$$
kde odstranění absolutní hodnoty je korektní vzhledem k Poznámce 1.2.

Dle (1.10) bude mít řešení (1.14) tvar
$$y(x) = C(x)e^{-x^3}, \tag{1.15}$$
kde
$$C(0) = 2.$$
Po derivaci (1.15) dostaneme
$$y'(x) = C'(x)e^{-x^3} - 3C(x)x^2 e^{-x^3} \tag{1.16}$$
a po dosazení (1.15) a (1.16) do (1.14) máme podle (1.13)
$$C'(x)e^{-x^3} - 3C(x)x^2 e^{-x^3} + 3x^2 C(x)e^{-x^3} = 3x^2,$$

$$C'(x)e^{-x^3} = 3x^2,$$
$$C(x) = 2 + \int_0^x 3t^2 e^{t^3} \mathrm{d}t = 1 + e^{x^3} \tag{1.17}$$

Řešení rovnice (1.14) dostaneme po dosazení (1.17) do (1.15), tedy

$$y(x) = \left(1 + e^{x^3}\right) e^{-x^3} = e^{-x^3} + 1.$$

### 1.3.4 Lineární diferenciální rovnice $n$-tého řádu

V předchozí části jsme se zabývali obyčejnými lineárními diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Nyní se podíváme na obecný případ lineárních diferenciálních rovnic $n$-tého řádu. Zejména si zde formulujeme větu pro tuto třídu rovnic, která má globální charakter.

**Definice 1.4.** Lineární diferenciální rovnice $n$-tého řádu je rovnice tvaru

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \tag{1.18}$$

Funkce $a_i(x), i = 0, \ldots, n-1$, označíme jako koeficienty rovnice (1.18)

**Věta 1.4.** *Jsou-li funkce $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x), f(x)$ z rovnice (1.18) spojité v intervalu $I$, pak existuje právě jedno řešení $y(x)$ rovnice (1.18), které splňuje podmínky*

$$y(x_0) = y_{01}, y'(x_0) = y_{02}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}.$$

*kde $x_0 \in I$ a $y_{0i} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, přičemž toto řešení je definováno v celém intervalu $I$.*

**Definice 1.5.** Definujeme homogenní lineární rovnici příslušnou k nehomogenní lineární rovnici (1.18) jako

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \tag{1.19}$$

Důležitou vlastností obyčejných lineárních diferenciálních rovnic je *princip superpozice*, který je formulován v následující větě.

**Věta 1.5.** *Mějme funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$, které řeší rovnici (1.19). Potom rovnici (1.19) řeší také libovolná lineární kombinace těchto funkcí.*

**Definice 1.6.** Mějme funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$, které mají v intervalu $I$ spojité parciální derivace až do řádu $k-1$. Definujeme Wronského determinant příslušný k těmto funkcím jako

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{k-1}(x) & f_2^{k-1}(x) & \cdots & f_k^{k-1}(x) \end{vmatrix}.$$

**Věta 1.6.** *Nechť $y_i(x), i = 1, \ldots, n$ jsou řešení rovnice (1.19), která jsou lineárně nezávislá v intervalu $I$, v němž jsou koeficienty rovnice spojité. Potom Wronského determinant*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \cdots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

*pro všechna $x \in I$. Jsou-li naopak řešení rovnice lineárně závislá v $I$, je $W(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.*

*Příklad* 1.4. Mějme rovnici

$$y''(x) + y(x) = 0 \tag{1.20}$$

v $\mathbb{R}$. Řešeními této rovnice jsou například funkce $\sin x$ a $\cos x$. Wronského determinant příslušný k těmto funkcím

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou tedy lineárně nezávislé všude, kde má rovnice (1.20) spojité koeficienty, tedy v celém oboru reálných čísel.

**Definice 1.7.** Jako fundamentální systém rovnice (1.19) označíme systém $n$ lineárně nezávislých řešení této rovnice $y_i(x), i = 1, \ldots, n$.

**Věta 1.7.** *Pokud známe fundamentální systém* $y_i(x), i = 1, \ldots, n$, *rovnice* (1.19), *pak všechna řešení této rovnice mají tvar*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

*kde* $c_i \in \mathbb{R}$ *pro* $i = 1, \ldots, n$.

**Věta 1.8.** *Pro každou rovnici* (1.19) *se spojitými koeficienty v intervalu* $I$ *existuje v* $I$ *fundamentální systém.*

*Příklad* 1.5. Budeme hledat řešení rovnice (1.20) z Příkladu 1.4, které splňuje podmínky

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{1.21}$$

Fundamentální systém této rovnice tvoří například funkce $\sin x$ a $\cos x$. Všechna řešení a jejich derivace tedy mají tvar

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \sin x + c_2 \cos x, \\ y'(x) &= c_1 \cos x - c_2 \sin x, \end{aligned} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.22}$$

Dosadíme-li podmínky (1.21) do (1.22), dostaneme soustavu linerních algebraických rovnic, která má řešení $c_1 = 1$ a $c_2 = 0$. Hledané řešení má tedy tvar $y(x) = \sin x$.

Nyní přejdeme od homogenní rovnice (1.19) k rovnici (1.18) s obecně nenulovou pravou stranou.

**Věta 1.9.** *Pokud máme fundamentální systém* $y_i(x), i = 1, \ldots, n$, *homogenní rovnice* (1.19), *potom obecné řešení příslušné nehomogenní rovnice* (1.18) *má tvar*

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

*kde* $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, *a* $y_p(x)$ *je libovolná funkce, která vyhovuje rovnici* (1.18), *tzv. partikulární řešení.*

Funkci $y_p(x)$ z Věty 1.9 najdeme pomocí metody variace konstant ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \cdots + c_n(x) y_n(x), \tag{1.23}$$

kde $y_i(x), i = 1, \ldots, n$, je fundamentální systém rovnice (1.19).

**Věta 1.10.** *Mějme fundamentální systém $y_i(x), i = 1, \dots, n$ rovnice* (1.19) *a funkce $c_i(x), i = 1, \dots, n$, které vyhovují rovnicím*

$$\begin{array}{lllllllll} c_1'(x)y_1(x) & + & c_2'(x)y_2(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)y_n(x) & = & 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) & + & c_2'(x)y_2'(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)y_n'(x) & = & 0, \\ \dots & & & & & & & & \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0, \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & f(x), \end{array} \tag{1.24}$$

*kde $y_i(x), i = 1, \dots, n$, je fundamentální systém rovnice* (1.19) *a $f(x)$ je funkce z rovnice* (1.18)*. Potom funkce* (1.23) *je partikulární řešení, které vyhovuje rovnici* (1.18)*.*

*Příklad* 1.6. Budeme hledat obecné řešení rovnice

$$y''(x) + y(x) = 3\sin x \cos x. \tag{1.25}$$

Z příkladu 1.4 víme, že fundamentální systém příslušné homogenní rovnice je $y_1(x) = \sin x$ a $y_2(x) = \cos x$. Obecné řešení rovnice (1.25) bude mít tvar

$$y(x) = y_p(x) + c_1 \sin x + c_2 \cos x, \tag{1.26}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Soustava (1.24) bude mít tvar

$$\begin{array}{lllll} c_1'(x)\sin x & + & c_2'(x)\cos x & = & 0, \\ c_1'(x)\cos x & - & c_2'(x)\sin x & = & 3\sin x\cos x. \end{array} \tag{1.27}$$

Řešením soustavy (1.27) a následnou přímou integrací dostaneme

$$\begin{array}{lcl} c_1'(x) = 3\sin x\cos^2 x, & & c_1(x) = -\cos^3 x + k_1, \\ & \Rightarrow & \\ c_2'(x) = -3\sin^2 x\cos x, & & c_2(x) = -\sin^3 x + k_2, \end{array}$$

kde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení rovnice (1.25) bude například

$$y_p(x) = -\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = -\sin x \cos x$$

a obecné řešení bude mít tvar

$$y(x) = -\sin x \cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Nyní se více zaměříme na lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Začněme s rovnicí homogenní

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \tag{1.28}$$

kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n-1$. Předpokládejme, že řešení rovnice (1.28) má tvar $y(x) = e^{\alpha x}$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li toto řešení do (1.28), dostaneme po vydělení výsledné rovnice výrazem $e^{\alpha x}$ tzv. charakteristickou rovnici

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0. \tag{1.29}$$

Je-li nyní $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $r_i$-násobný kořen rovnice (1.29) pro $i = 1, \dots, k$, pak fundamentální systém rovnice (1.28) je dán $n$ funkcemi

$$y_{ij}(x) = x^j e^{\alpha_i x}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, r_i - 1.$$

*Příklad* 1.7. Mějme rovnici

$$y'''(x) - y''(x) - y'(x) + y(x) = 0. \tag{1.30}$$

Příslušná charakteristická rovnice má tvar

$$\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

a po úpravě

$$(\alpha - 1)^2(\alpha + 1) = 0.$$

Tato rovnice má jednoduchý kořen $\alpha_1 = -1$ a dvojnásobný kořen $\alpha_2 = 1$. Fundamentální systém rovnice (1.30) se bude skládat z funkcí

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^x, \quad y_3(x) = xe^x.$$

Kořeny charakteristické rovnice nemusí být vždy reálné, leč vždy je možné nalézt reálný fundamentální systém. Pokud je $r$-násobným kořenem charakteristické rovnice imaginární číslo $a + bi$, je také komplexně sdružené číslo $a - bi$ $r$-násobným kořenem charakteristické rovnice. Těmto kořenům přísluší ve fundamentálním systému $2r$ funkcí

$$\begin{array}{l} x^j e^{ax} \cos bx, \\ x^j e^{ax} \sin bx, \end{array} \qquad j = 0, \dots, r-1.$$

V praxi se často setkáme s lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty, jejichž pravá strana má speciální tvar. V dalším se na takové rovnice podíváme blíže. Mějme tedy rovnici tvaru

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = e^{ax}\left(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right), \tag{1.31}$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a, b \in \mathbb{R}$, $P(x)$ je mnohočlen $p$-tého stupně a $Q(x)$ je mnohočlen $q$-tého stupně, $P(x)$ i $Q(x)$ mají reálné koeficienty. Jeden z mnohočlenů $P(x)$ nebo $Q(x)$ může být nulový, v takovém případě definujeme stupeň mnohočlenu číslem $-1$. Upozorněme zde, že podle Věty 1.4 existuje pro takové rovnice řešení na celé reálné ose.

V případě, že má pravá strana rovnice speciální tvar jako rovnice (1.31), nebývá vhodné hledat partikulární řešení $y_p(x)$ metodou variace konstant, ale pomocí níže uvedené věty. Příslušná homogenní rovnice k rovnici (1.31) má charakteristickou rovnici

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0. \tag{1.32}$$

Označíme $s = \max\{p, q\}$.

**Věta 1.11.** *Pokud $a+bi$ není kořenem rovnice* (1.32)*, potom partikulární řešení rovnice* (1.31) *má tvar*

$$y_p(x) = e^{ax}\left(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right),$$

*kde $R(x)$ a $S(x)$ jsou mnohočleny nejvýše $s$-tého stupně.*

*Pokud $a+bi$ je $r$-násobným kořenem rovnice* (1.32)*, potom partikulární řešení rovnice* (1.31) *má tvar*

$$y_p(x) = x^r e^{ax}\left(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right),$$

*kde $R(x)$ a $S(x)$ jsou mnohočleny nejvýše $s$-tého stupně.*

*Příklad* 1.8. Budeme řešit rovnici

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = (x+1)e^{2x}. \tag{1.33}$$

Porovnáním s (1.31) máme $a = 2, b = 0, P(x) = x+1, Q(x) \equiv 0$. Tím pádem $s = p = 1$. Charakteristická rovnice

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

rovnice (1.33) má kořeny $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2$, takže $a + bi = 2$ je jednoduchým kořenem této charakteristické rovnice. Podle Věty 1.11 hledáme tedy partikulární řešení rovnice (1.33) ve tvaru

$$y_p(x) = xe^{2x}\left(Ax + B\right) = e^{2x}\left(Ax^2 + Bx\right), \tag{1.34}$$

kde $A, B$ jsou zatím neurčené konstanty. Dosadíme (1.34) za $y(x)$ do (1.33) a dostaneme

$$e^{2x}\left(6Ax + 2A + 3B\right) = e^{2x}\left(x+1\right).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin $x$ dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 6A &= 1, \\ 2A + 3B &= 1, \end{aligned}$$

z čehož plyne $A = \frac{1}{6}, B = \frac{2}{9}$. Dosazením do (1.34) dostaneme partikulární řešení rovnice (1.33)

$$y_p(x) = e^{2x}\left(\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{9}\right)$$

a obecné řešení tedy bude mít tvar

$$y(x) = e^{2x}\left(\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{9}\right) + c_1e^{-x} + c_2e^{2x},$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

### 1.3.5 Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

**Definice 1.8.** Soustava obyčejných diferenciálních rovnic se nazývá lineární, pokud má tvar

$$\begin{array}{rcccccccccc} y_1'(x) &=& a_{11}(x)y_1(x) &+& a_{12}(x)y_2(x) &+& \cdots &+& a_{1n}(x)y_n(x) &+& h_1(x), \\ y_2'(x) &=& a_{21}(x)y_1(x) &+& a_{22}(x)y_2(x) &+& \cdots &+& a_{2n}(x)y_n(x) &+& h_2(x), \\ \multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\ y_n'(x) &=& a_{n1}(x)y_1(x) &+& a_{n2}(x)y_2(x) &+& \cdots &+& a_{nn}(x)y_n(x) &+& h_n(x). \end{array} \tag{1.35}$$

Soustava (1.35) se nazývá homogenní, pokud $h_i(x) \equiv 0, i = 1, \ldots, n$, v opačném případě se nazývá nehomogenní.

**Věta 1.12.** *Jsou-li funkce $a_{ij}(x), h_i(x), i, j = 1, \ldots, n$, ze soustavy rovnic* (1.35) *spojité v intervalu $I$, pak existuje právě jedno řešení soustavy* (1.35)*, tj. systém funkcí $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$, které splňují podmínky $y_i(x_0) = y_{0i}, i = 1, \ldots, n$, kde $x_0 \in I$ a $y_{0i} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, přičemž toto řešení je definováno v celém intervalu $I$.*

**Definice 1.9.** Mějme soustavu (1.35), která je homogenní. Dále mějme $n$ řešení této soustavy, tj. $n$ systémů funkcí $\left(y_{1i}(x), y_{2i}(x), \ldots, y_{ni}(x)\right), i = 1, \ldots, n$. Tuto $n$-tici řešení nazveme fundamentálním systémem homogenní soustavy (1.35) v $I$, pokud determinant

$$D(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.36}$$

pro všechna $x \in I$.

**Věta 1.13.** *Jsou-li funkce $a_{ij}(x), i, j = 1, \dots, n$, ze soustavy rovnic* (1.35) *spojité v $I$, potom pro determinant* (1.36) *platí buď $D(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ nebo $D(x) \equiv 0$ v $I$.*

**Věta 1.14.** *Mějme $n$ systémů funkcí $(y_{1i}(x), y_{2i}(x), \dots, y_{ni}(x))$, $i = 1, \dots, n$, které tvoří fundamentální systém homogenní soustavy* (1.35)*. Obecné řešení této soustavy má poté tvar*

$$\begin{array}{rcccccccc} y_1(x) & = & C_1 y_{11}(x) & + & C_2 y_{12}(x) & + & \cdots & + & C_n y_{1n}(x), \\ y_2(x) & = & C_1 y_{21}(x) & + & C_2 y_{22}(x) & + & \cdots & + & C_n y_{2n}(x), \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ y_n(x) & = & C_1 y_{n1}(x) & + & C_2 y_{n2}(x) & + & \cdots & + & C_n y_{nn}(x), \end{array}$$

*kde $C_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.*

Nyní se zaměříme na soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Mějme homogenní soustavu

$$\begin{array}{rcccccccc} y_1'(x) & = & a_{11} y_1(x) & + & a_{12} y_2(x) & + & \cdots & + & a_{1n} y_n(x), \\ y_2'(x) & = & a_{21} y_1(x) & + & a_{22} y_2(x) & + & \cdots & + & a_{2n} y_n(x), \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ y_n'(x) & = & a_{n1} y_1(x) & + & a_{n2} y_2(x) & + & \cdots & + & a_{nn} y_n(x), \end{array} \tag{1.37}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n$. Předpokládejme, že řešení soustavy (1.37) má tvar

$$\left(k_1 e^{\lambda x}, k_2 e^{\lambda x}, \dots, k_n e^{\lambda x}\right)$$

pro $\lambda, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li toto řešení do (1.37), dostaneme po vydělení všech výsledných rovnic výrazem $e^{\lambda x}$ soustavu

$$\begin{array}{rcccccccc} (a_{11} - \lambda) k_1 & + & a_{12} k_2 & + & \cdots & + & a_{1n} k_n & = & 0, \\ a_{21} k_1 & + & (a_{22} - \lambda) k_2 & + & \cdots & + & a_{2n} k_n & = & 0, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} k_1 & + & a_{n2} k_2 & + & \cdots & + & (a_{nn} - \lambda) k_n & = & 0, \end{array}$$

která má nenulové řešení právě tehdy, když determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.38}$$

Je-li nyní $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $r_i$-násobný kořen charakteristické rovnice (1.38) pro $i = 1, \dots, k$, definujeme-li navíc $r_0 \equiv 0$, pak fundamentální systém soustavy (1.37) je dán $n$ systémy funkcí $(y_{1i}(x), y_{2i}(x), \dots, y_{ni}(x))$, $i = 1, \dots, n$, ve tvaru

$$y_{jl_i}(x) = P_{jl_i}(x) e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \dots, k, \quad l_i = 1 + \sum_{m=0}^{i-1} r_m, \dots, \sum_{m=0}^{i} r_m, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1.39}$$

kde $P_{jl_i}$ je mnohočlen stupně nejvýše $(r_i - 1)$.

*Příklad* 1.9. Budeme řešit soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1'(x) & = & 2y_1(x), & & & & \\ y_2'(x) & = & -\ 2y_1(x) & + & 4y_2(x) & - & 2y_3(x), \\ y_3'(x) & = & -\ 4y_1(x) & + & 4y_2(x) & - & 2y_3(x). \end{array} \tag{1.40}$$

Příslušná charakteristická rovnice má tvar

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

a po úpravě

$$\lambda(\lambda-2)^2 = 0.$$

Tato rovnice má jednoduchý kořen $\lambda_1 = 0$ a dvojnásobný kořen $\lambda_2 = 2$. Řešení, příslušná kořenu $\lambda_1$, hledáme podle (1.39) ve tvaru

$$y_{11}(x) = A_1, \quad y_{21}(x) = B_1, \quad y_{31}(x) = C_1, \tag{1.41}$$

kde $A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{R}$. Dosazením (1.41) do (1.40) dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 2A_1 &= 0, \\ -2A_1 + 4B_1 - 2C_1 &= 0, \\ -4A_1 + 4B_1 - 2C_1 &= 0, \end{aligned}$$

z čehož plyne po zpětném dosazení do (1.41)

$$y_{11}(x) = 0, \quad y_{21}(x) = D_1, \quad y_{31}(x) = 2D_1, \tag{1.42}$$

kde $D_1 \in \mathbb{R}$. Jelikož součtem mnohočlenů stupně nejvýše $(r_2 - 1)$ dostaneme opět mnohočlen stupně nejvýše $(r_2 - 1)$, můžeme řešení, příslušná kořenu $\lambda_2$, hledat podle (1.39) ve tvaru

$$\begin{aligned} y_{12}(x) + y_{13}(x) &= (A_2x + A_3)e^{2x}, \\ y_{22}(x) + y_{23}(x) &= (B_2x + B_3)e^{2x}, \\ y_{32}(x) + y_{33}(x) &= (C_2x + C_3)e^{2x}, \end{aligned} \tag{1.43}$$

kde $A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Dosazením (1.43) do (1.40) dostaneme po úpravě rovnice

$$\begin{aligned} A_2 &= 0, \\ 2A_3 + B_2 - 2B_3 + 2C_3 &= 0, \\ B_2 - C_2 &= 0, \\ C_2 &= 0, \end{aligned}$$

z čehož plyne po zpětném dosazení do (1.43)

$$\begin{aligned} y_{12}(x) + y_{13}(x) &= D_2e^{2x}, \\ y_{22}(x) + y_{23}(x) &= D_2e^{2x} + D_3e^{2x}, \\ y_{32}(x) + y_{33}(x) &= D_3e^{2x}, \end{aligned} \tag{1.44}$$

kde $D_2, D_3 \in \mathbb{R}$. Z (1.42) a (1.44) dostaneme obecné řešení rovnice (1.40)

$$\begin{aligned} y_1(x) &= D_2e^{2x}, \\ y_2(x) &= D_1 + D_2e^{2x} + D_3e^{2x}, \\ y_3(x) &= 2D_1 + D_3e^{2x}, \end{aligned}$$

kde $D_1, D_2, D_3 \in \mathbb{R}$.

Kořeny charakteristické rovnice nemusí být vždy reálné, leč vždy je možné nalézt reálný fundamentální systém. Pokud je $r$-násobným kořenem charakteristické rovnice imaginární číslo $a+bi$, je také komplexně sdružené číslo $a-bi$ $r$-násobným kořenem charakteristické rovnice. Těmto kořenům přísluší ve fundamentálním systému $2r$ systémů funkcí ve tvaru

$$y_{ji}(x) = \left(P_{ji}(x)\cos bx + Q_{ji}(x)\sin bx\right)e^{ax},$$

kde $P_{ji}(x)$ a $Q_{ji}(x)$ jsou mnohočleny stupně nejvýše $r-1$.

Na závěr této části ještě stručně rozebereme soustavy nehomogenní.

**Věta 1.15.** *Pokud máme fundamentální systém* $(y_{1i}(x), y_{2i}(x), \dots, y_{ni}(x))$, $i = 1, \dots, n$, *soustavy* (1.35)*, která je homogenní, potom obecné řešení příslušné nehomogenní soustavy má tvar*

$$\begin{array}{rcccccccccc}
y_1(x) & = & y_{1p}(x) & + & C_1 y_{11}(x) & + & C_2 y_{12}(x) & + & \cdots & + & C_n y_{1n}(x), \\
y_2(x) & = & y_{2p}(x) & + & C_1 y_{21}(x) & + & C_2 y_{22}(x) & + & \cdots & + & C_n y_{2n}(x), \\
\multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\
y_n(x) & = & y_{np}(x) & + & C_1 y_{n1}(x) & + & C_2 y_{n2}(x) & + & \cdots & + & C_n y_{nn}(x),
\end{array}$$

*kde* $C_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, *a* $(y_{1p}(x), y_{2p}(x), \dots, y_{np}(x))$ *je libovolný systém funkcí, který vyhovuje soustavě* (1.35)*, tzv. partikulární řešení.*

Systém funkcí $(y_{1p}(x), y_{2p}(x), \dots, y_{np}(x))$ z Věty 1.15 najdeme pomocí metody variace konstant ve tvaru

$$\begin{array}{rcccccccc}
y_{1p}(x) & = & C_1(x)y_{11}(x) & + & C_2(x)y_{12}(x) & + & \cdots & + & C_n(x)y_{1n}(x), \\
y_{2p}(x) & = & C_1(x)y_{21}(x) & + & C_2(x)y_{22}(x) & + & \cdots & + & C_n(x)y_{2n}(x), \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
y_{np}(x) & = & C_1(x)y_{n1}(x) & + & C_2(x)y_{n2}(x) & + & \cdots & + & C_n(x)y_{nn}(x),
\end{array} \tag{1.45}$$

kde $(y_{1i}(x), y_{2i}(x), \dots, y_{ni}(x))$, $i = 1, \dots, n$, je fundamentální systém homogenní soustavy (1.35).

**Věta 1.16.** *Mějme funkce* $C_i(x), i = 1, \dots, n$, *které vyhovují rovnicím*

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_1'(x)y_{11}(x) & + & C_2'(x)y_{12}(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_{1n}(x) & = & h_1(x), \\
C_1'(x)y_{21}(x) & + & C_2'(x)y_{22}(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_{2n}(x) & = & h_2(x), \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
C_1'(x)y_{n1}(x) & + & C_2'(x)y_{n2}(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_{nn}(x) & = & h_n(x),
\end{array}, \tag{1.46}$$

*kde* $(y_{1i}(x), y_{2i}(x), \dots, y_{ni}(x))$, $i = 1, \dots, n$, *je fundamentální systém homogenní soustavy příslušné k soustavě* (1.35) *a* $h_i(x), i = 1, \dots, n$, *jsou funkce ze soustavy* (1.35)*. Potom systém funkcí* (1.45) *je partikulární řešení, které vyhovuje soustavě* (1.35).

*Příklad* 1.10. Budeme hledat obecné řešení rovnice

$$\begin{array}{rcccc}
y_1'(x) & = & y_2(x), & & \\
y_2'(x) & = & y_1(x) & + & 2.
\end{array} \tag{1.47}$$

Snadno zjistíme, že obecné řešení homogenní soustavy příslušné k soustavě (1.47) má tvar

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$
$$y_2(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x}.$$

Sestavíme soustavu (1.46)

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0,$$

$$C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 2,$$

z které plyne

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \phantom{-}e^{-x}, \\ C_2'(x) &= -e^x, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} C_1(x) &= -e^{-x} + K_1, \\ C_2(x) &= -e^x + K_2, \end{aligned}$$

kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení rovnice (1.47) bude například

$$\begin{aligned} y_{1p}(x) &= -\,e^{-x}e^x - e^xe^{-x} = -\,2, \\ y_{2p}(x) &= -\,e^{-x}e^x + e^xe^{-x} = \phantom{-}\,0 \end{aligned}$$

a obecné řešení bude mít tvar

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -2 + C_1e^x + C_2e^{-x}, \\ y_2(x) &= C_1e^x - C_2e^{-x}, \end{aligned}$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

# 2. Eulerova metoda

V první kapitole jsme se z Věty 1.2 dozvěděli, že soustava obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (1.3) s počátečními podmínkami v bodě $x_0$ má jednoznačné řešení v okolí $x_0$ při splnění podmínek na lokální spojitost funkcí $f_i$ ze soustavy (1.3) a jejich parciálních derivací. Tento zajisté zajímavý výsledek nám ovšem nedává žádný návod k tomu, jak toto řešení najít. Výčet metod na hledání řešení soustav diferenciálních rovnic z první kapitoly není zdaleka úplný, přesto se v praxi často setkáme s rovnicemi, jejichž řešení není možné nalézt tzv. *analyticky*, tzn. symbolickou manipulací s rovnicemi pomocí aritmetických a diferenciálních operací jak jsme právě činili v první kapitole.

Musíme tedy k problému přistoupit jinak. Jedna z možností je použít metodu, kterou publikoval švýcarský matematik Leonhard Paul Euler již v roce 1768 a nazývá se po něm Eulerova metoda. Jedná se o nejjednodušší metodu numerického řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Jak tato metoda funguje? Mějme dány počáteční podmínky $y_i(x_0) = y_{0i}, i = 1, \ldots, n$, kde $(x_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ a $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ je řešení soustavy

$$\begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & f_1(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \\ y_2'(x) & = & f_2(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_n'(x) & = & f_n(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \end{array} \tag{2.1}$$

splňující zadané počáteční podmínky. Pokud máme libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, plyne z těchto podmínek, že funkce $y_i(x)$ prochází bodem $(x_0, y_{0i})$. Navíc ze soustavy (2.1) známe hodnotu derivace $y_i'(x_0) = f_i(x_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})$. Tím pádem můžeme napsat rovnici tečny funkce $y_i(x)$ v bodě $x_0$

$$\tau_{0i}(x) = y_{0i} + f_i(x_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})(x - x_0). \tag{2.2}$$

Na dostatečně krátkém intervalu, kde se derivace řešení znatelně nemění, je tato tečna dobrou aproximací tohoto řešení, viz Obrázek 2.1. Proto, pokud je $x_1$ dostatečně blízko k $x_0$, můžeme $y_i(x_1)$ aproximovat hodnotou $y_{1i} \equiv \tau_{0i}(x_1)$ dosazením $x = x_1$ do rovnice tečny (2.2), tedy

$$y_i(x_1) \approx y_{1i} \equiv \tau_{0i}(x_1) = y_{0i} + f_i(x_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})(x_1 - x_0).$$

Dále můžeme zkusit zopakovat stejný postup. Neznáme sice hodnotu řešení $y_i(x_1)$, nabízí se nám ovšem její aproximace $y_{1i}$ a pro $x_2 > x_1$ můžeme definovat

$$y_i(x_2) \approx y_{2i} = y_{1i} + f_i(x_1, y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n})(x_2 - x_1).$$

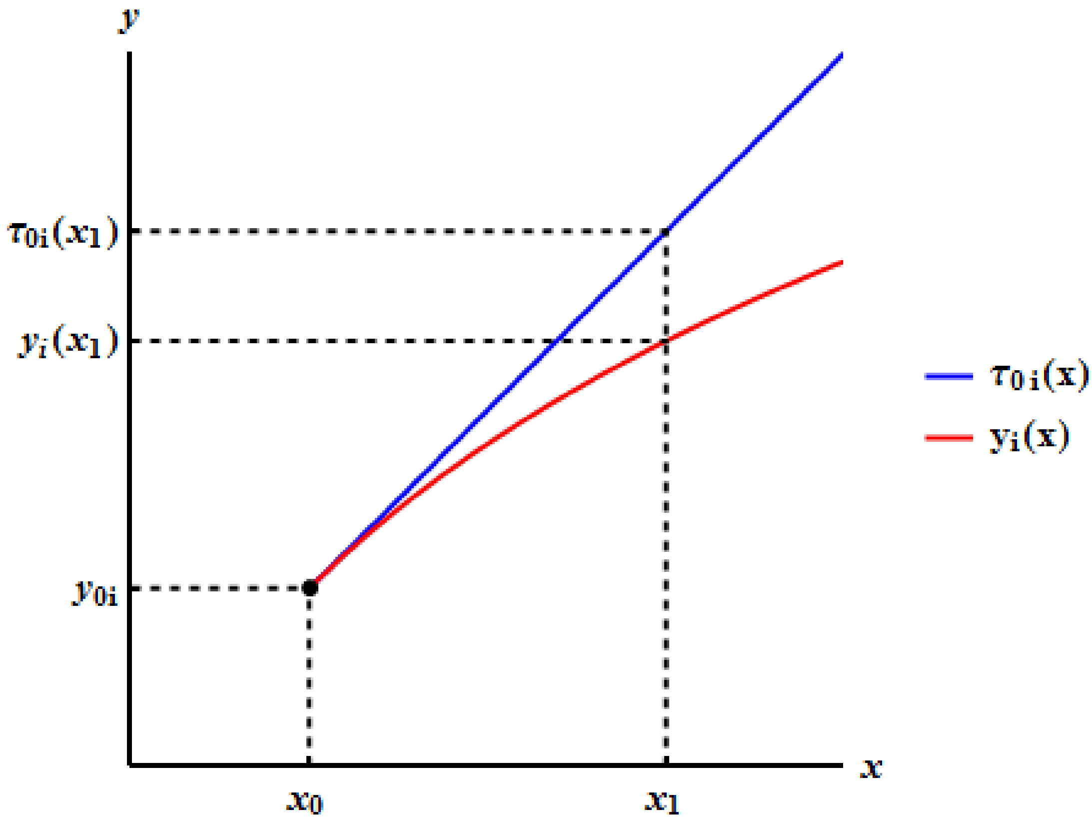
Pokračujeme-li tímto způsobem, dostaneme obecný vztah pro aproximaci $y_i(x_{k+1})$

$$y_i(x_{k+1}) \approx y_{(k+1)i} = y_{ki} + f_i(x_k, y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kn})(x_{k+1} - x_k), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Definujeme-li nakonec $f_{ki} \equiv f_i(x_k, y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kn})$ a předpokládáme-li konstantní krok $x_{k+1} - x_k = h$ pro všechna $k$, dostaneme vzorec Eulerovy metody ve tvaru

$$y_{(k+1)i} = y_{ki} + f_{ki}h, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{2.3}$$

Eulerovu metodu použijeme tak, že opakovaně vyčíslíme rovnici (2.3) a tím budeme generovat posloupnost hodnot $y_{1i}, y_{2i}, \ldots$, které aproximují řešení $y_i(x)$ v bodech $x_1, x_2, \ldots$.




Obrázek 2.1: Eulerova metoda - tečna k řešení

*Příklad* 2.1. Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcl} y_1'(x) & = & & - & y_2(x) \\ y_2'(x) & = & 2y_1(x) & + & 2y_2(x), \end{array} \tag{2.4}$$

s počátečními podmínkami

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1. \tag{2.5}$$

Použijeme Eulerovu metodu s krokem $h_1 = 0,1$ a $h_2 = 0,05$, abychom našli přibližné hodnoty řešení úlohy (2.4)–(2.5) na intervalu $[0, 2\pi]$. Tyto hodnoty následně porovnáme s přesným řešením.

V úloze (2.4)–(2.5) se jedná o soustavu lineárních diferenciálních rovnic, která je homogenní. Metodou z části 1.3.5 získáme přesné řešení ve tvaru

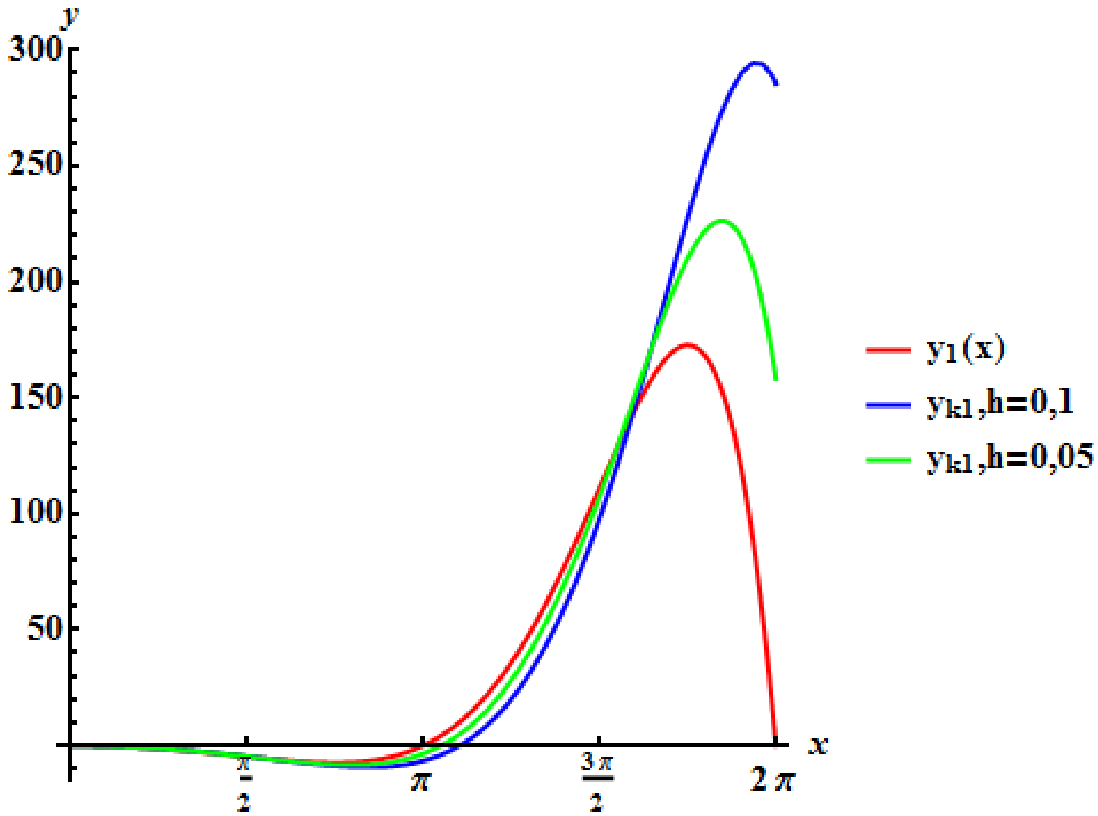
$$y_1(x) = -e^x \sin x, \quad y_2(x) = e^x(\sin x + \cos x).$$

Aproximaci tohoto řešení Eulerovou metodou s $h = 0,1$ získáme pomocí vzorce (2.3). Máme

$$\begin{aligned} y_{11} = y_{01} + 0,1f_{01} = 0 + 0,1 \cdot -1 &= -0,1 \\ y_{12} = y_{02} + 0,1f_{02} = 1 + 0,1 \cdot 2 &= 1,2 \end{aligned}$$

V dalším kroce máme

$$\begin{aligned} y_{21} = y_{11} + 0,1f_{11} = -0,1 + 0,1 \cdot -1,2 &= -0,22 \\ y_{22} = y_{12} + 0,1f_{12} = 1,2 + 0,1 \cdot 2,2 &= 1,42 \end{aligned}$$



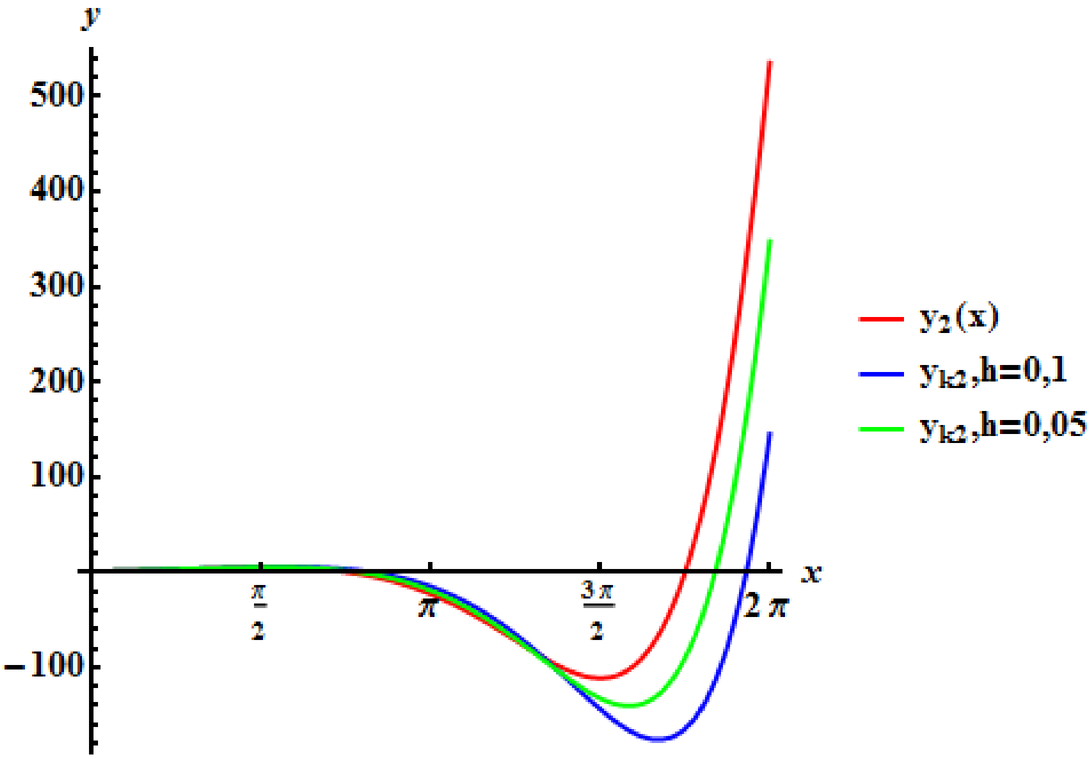

Obrázek 2.2: Eulerova metoda - srovnání přesného řešení $y_1(x)$ s přibližným řešením při kroku $h = 0,1$ a $h = 0,05$

Opakováním tohoto postupu dostaneme hodnoty $y_{k1}, y_{k2}, k = 0, 1 \ldots,$ které aproximují řešení úlohy (2.4)–(2.5). Stejně budeme postupovat i pro $h = 0,05$. K celému výpočtu můžeme využít vhodný numerický software, např. [WR12], který výsledné hodnoty interpoluje a následně můžeme srovnat přibližné a přesné řešení, viz obrázky 2.2 a 2.3.

Z obrázků 2.2 a 2.3 je zřetelné, že čím dále se nacházíme od počátečního bodu $x_0 = 0$, tím horší je aproximace přesného řešení. Kratší krok metody vede dle očekávání k lepší aproximaci přesného řešení. Další vlastnost přibližného řešení, která je z obrázků patrná, je, že v intervalech, kde je přesné řešení konvexní, je přibližné řešení menší, než řešení přesné. Naopak intervalům, kde je přesné řešení konkávní, odpovídá přibližné řešení s hodnotami většími, než má řešení přesné. Tato vlastnost plyne z polohy grafu tečny vůči grafu přesného řešení. Pokud je přesné řešení konvexní, leží graf tečny pod grafem tohoto řešení a naopak.

Eulerova metoda lze použít na soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Jak ale řešit rovnice vyšších řádů (rozřešených vzhledem k nejvyšší derivaci)? Takové rovnice můžeme substitucí snadno převést na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu a aplikovat poté Eulerovu metodu. Ukažme si tento postup na jednoduchém příkladu. Mějme rovnici $y''(x) - y(x) = 0$. Položme $y'(x) = v(x)$. Pak dostáváme soustavu $v'(x) = y(x), y'(x) = v(x)$. Na tuto soustavu již můžeme aplikovat Eulerovu metodu.

Na závěr je nutné poznamenat, že při užití Eulerovy metody nebo obecně jakékoliv jiné numerické metody je vždy potřeba mít na paměti, že metoda je pouze přibližná a je na místě se ptát, zda výsledné řešení je dostatečně přesné k tomu, aby bylo použitelné pro naše účely. V předchozím případě jsme mohli přesnost přibližného řešení




Obrázek 2.3: Eulerova metoda - srovnání přesného řešení $y_2(x)$ s přibližným řešením při kroku $h = 0,1$ a $h = 0,05$

posoudit přímo srovnáním s řešením získaným analyticky. Obvykle ovšem analytické řešení nemáme k dispozici a musíme se spolehnout na odhady, které znalost tohoto řešení nevyžadují. Pro více informací o Eulerově metodě (například odhadech chyb, kterých se dopouštíme) a dalších numerických metodách řešení diferenciálních rovnic viz [BDH09], [HSD12], [Rek63] nebo [DB12].

# 3. Elektrické obvody

Elektrickým obvodem budeme rozumět idealizovaný model elektrického zařízení tvořený propojením ideálních součástek za pomoci perfektních vodičů. V prostoru mimo uvažované prvky musí být veškeré elektromagnetické pole zanedbatelné. Budeme předpokládat, že všechny prvky obvodů mají idealizované vlastnosti a že jejich parametry jsou známy. Více informací o řešení elektrických obvodů lze nalézt např. v [HPZ14].

V této kapitole formulujeme základní zákonitosti z teorie elektrických obvodů, matematicky popíšeme hlavní součástky, z kterých se elektrické obvody skládají a nakonec uvedeme konkrétní aplikace obyčejných diferenciálních rovnic v teorii elektrických obvodů.

## 3.1 Kirchhoffovy zákony

Částečný matematický popis obvodu lze získat z Kirchhoffových zákonů, které je možné odvodit z Maxwellových rovnic, popisujících elektromagnetické pole. Kirchhoffovy zákony jsou přímé důsledky dvou obecných fyzikálních zákonů. Jedná se o zákon zachování elektrického náboje a zákon zachování energie.

### 3.1.1 První Kirchhoffův zákon

První Kirchhoffův zákon lze odvodit z rovnice kontinuity pro elektrický náboj, viz [Nov05]. Předpokládejme, že se v obvodu nachází *uzel*, tj. bod, ve kterém je spojeno několik vodičů. Pokud do tohoto uzlu přitékají proudy $i_j, j = 1, \dots, m$ a odtékejí z něj proudy $i_k, k = m+1, \dots, n$, můžeme první Kirchhoffův zákon napsat ve tvaru

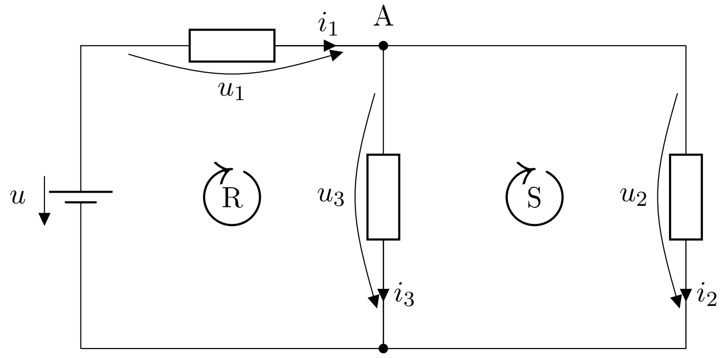
$$\sum_{j=1}^{m} i_j = \sum_{k=m+1}^{n} i_k. \tag{3.1}$$

*Příklad* 3.1. Pro uzel A v obvodu na Obrázku 3.1 by měla rovnice (3.1) tvar

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

### 3.1.2 Druhý Kirchhoffův zákon

Druhý Kirchhoffův zákon můžeme odvodit z Faradayova indukčního zákona, viz [Nov05]. Budeme předpokládat, že se v obvodu nachází *smyčka*, tj. uzavřená dráha tvořená jednotlivými prvky obvodu, které jsou spojeny perfektními vodiči. Pokud tato smyčka neobepíná časově proměnný magnetický tok a obsahuje prvky o napětích $u_j, j = 1, \dots, m$




Obrázek 3.1: Kirchhoffovy zákony

shodně orientovaných s orientací smyčky a prvky o napětích $u_k, k = m+1, \ldots, n$ opačně orientovaných než je orientace smyčky, můžeme druhý Kirchhoffův zákon napsat ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{m} u_j = \sum_{k=m+1}^{n} u_k. \tag{3.2}$$

*Příklad* 3.2. Pro smyčky R a S v obvodu na Obrázku 3.1 by měly rovnice (3.2) tvar

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_3, \\ u_2 &= u_3. \end{aligned}$$

## 3.2 Prvky elektrických obvodů

V této části si probereme základní *prvky elektrických obvodů*, tzn. idealizované součástky tvořící elektrický obvod. Omezíme se na prvky lineární, jejichž vlastnosti jsou nezávislé na velikostech napětí a proudů. Jedná se o zjednodušení, jelikož všechny skutečné součástky jsou nelineární, nicméně pokud není vliv nelinearit příliš velký, lze analýzu linearizací těchto součástek usnadnit. Proměnná $t$ v následujícím značí čas.

### 3.2.1 Rezistor

Rezistor je pasivní dvojpól, ve kterém dochází k přeměně elektrické energie na jinou formu energie. Je jednoznačně popsán vztahem mezi napětím $u$ a proudem $i$, tzv. *voltampérovou charakteristikou* ve tvaru

$$u = Ri, \tag{3.3}$$

kde konstanta $R$ je *odpor rezistoru* s jednotkou *ohm* [Ω]. Vztahu (3.3) se také označuje jako *Ohmův zákon*.

Schematickou značku resistoru vidíme na Obrázku 3.2a.

### 3.2.2 Kapacitor

Kapacitor je pasivní dvojpól, ve kterém dochází k akumulaci elektrické energie ve formě elektrického pole. Je jednoznačně popsán vztahem mezi nábojem $q$ a napětím $u$, tzv. *voltcoulombovou charakteristikou* ve tvaru

$$q = Cu, \tag{3.4}$$

kde konstanta $C$ je *kapacita kapacitoru* s jednotkou *farad* [F].

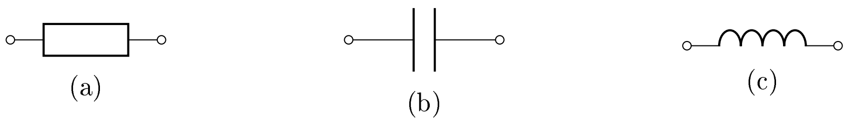
Pro elektrický proud $i$ platí vztah

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \tag{3.5}$$

který nám spolu s (3.4) dává

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Schematickou značku kapacitoru vidíme na Obrázku 3.2b.




Obrázek 3.2: Prvky elektrických obvodů - rezistor (a), kapacitor (b), induktor (c)

### 3.2.3 Induktor

Induktor je pasivní dvojpól, ve kterém dochází k akumulaci elektrické energie ve formě magnetického pole. Je jednoznačně popsán vztahem mezi cívkovým magnetickým tokem $\Phi_c$ a proudem $i$, tzv. *ampérweberovou charakteristikou* ve tvaru

$$\Phi_c = Li, \tag{3.6}$$

kde konstanta $L$ je *indukčnost induktoru* s jednotkou *henry* [H].

Pro napětí $u$ platí vztah

$$u = \frac{\mathrm{d}\Phi_c}{\mathrm{d}t},$$

který nám spolu s (3.6) dává

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{3.7}$$

Schematickou značku induktoru vidíme na Obrázku 3.2c.

## 3.3 Aplikace

V této části využijeme předchozí poznatky z teorie obyčejných diferenciálních rovnic a elektrických obvodů k aplikaci na konkrétní úlohy z elektrotechniky. Začneme s jednodušším lineárním problémem, který vyřešíme analyticky, a budeme pokračovat s numerickým řešením problému nelineárního.

### 3.3.1 RLC obvod

Uvažujme jednoduchý RLC obvod bez zdroje podle Obrázku 3.3, kde $R, L$ respektive $C$ jsou kladné hodnoty odporu rezistoru, indukčnosti induktoru respektive kapacity kapacitoru. Z prvního Kirchhoffova zákona pro uzel A dostaneme rovnici

$$i_R(t) - i_C(t) - i_L(t) = 0, \tag{3.8}$$

z druhého Kirchhoffova zákona pro smyčku R dostaneme rovnici

$$u_R(t) + u_L(t) = 0 \tag{3.9}$$

a pro smyčku S rovnici

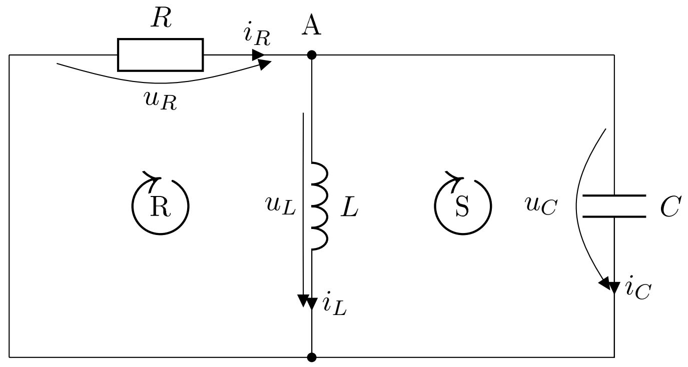
$$u_C(t) - u_L(t) = 0. \tag{3.10}$$

Dosadíme do rovnice (3.9) z (3.3) a (3.7) a máme

$$Ri_R(t) + Li'_L(t) = 0. \tag{3.11}$$

Dále dosadíme do rovnice (3.10) z (3.4), (3.7), následně rovnici zderivujeme a s použitím (3.5) dostaneme

$$\frac{q_C(t)}{C} - Li'_L(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C(t) - LCi''_L(t) = 0. \tag{3.12}$$




Obrázek 3.3: RLC obvod bez zdroje

Dosadíme-li ještě do (3.11) z (3.8) a následně z (3.12), můžeme psát

$$Ri_C(t) + Ri_L(t) + Li'_L(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad RLCi''_L(t) + Li'_L(t) + Ri_L(t) = 0, \tag{3.13}$$

což je homogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, která má dle Věty 1.4 řešení na $\mathbb{R}$. Se znalostí funkce $i_L(t)$ dostaneme z (3.12) $i_C(t)$ a následně z (3.8) také $i_R(t)$.

*Příklad* 3.3. Uvažujme obvod podle Obrázku 3.3 s hodnotami $R = 200\Omega$, $L = 0,25$H a $C = 1\mu$F. Spočítejme průběh proudů $i_R(t), i_L(t)$ a $i_C(t)$ při počátečních podmínkách $i_L(0) = 4$A, $i_C(0) = 1$A.

Rovnice (3.13) bude mít tvar

$$0,5 \cdot 10^{-4} i''_L(t) + 0,25 i'_L(t) + 200 i_L(t) = 0, \tag{3.14}$$

příslušná charakteristická rovnice je

$$0,5 \cdot 10^{-4}\alpha^2 + 0,25\alpha + 200 = 0.$$

Její kořeny jsou

$$\alpha_1 = -4000 \quad \alpha_2 = -1000$$

a obecné řešení rovnice (3.14) má tedy tvar

$$i_L(t) = C_1 e^{-4000t} + C_2 e^{-1000t}, \tag{3.15}$$

kde $C_1$ a $C_2$ jsou zatím neupřesněné konstanty. Dosadíme-li $i_L(t)$ do (3.12), získáme

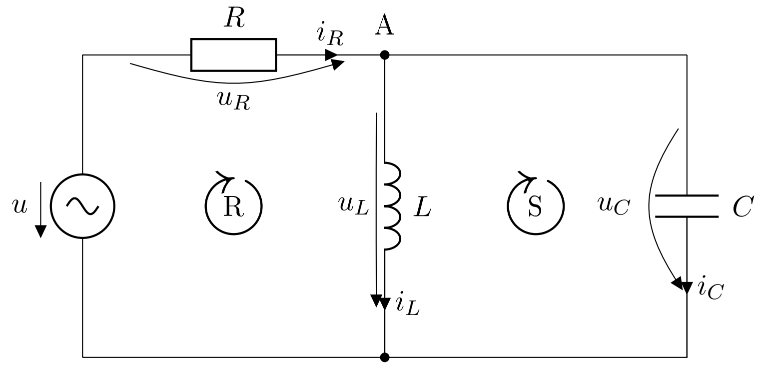
$$i_C(t) = 4C_1 e^{-4000t} + 0,25 C_2 e^{-1000t}. \tag{3.16}$$

Dosazením z počátečních podmínek do (3.15) a (3.16) obdržíme soustavu dvou lineárních rovnic pro $C_1$ a $C_2$, která má řešení $C_1 = 0, C_2 = 4$, z čehož spolu s (3.8) plyne

$$\begin{aligned} i_R(t) &= 5e^{-1000t}, \\ i_L(t) &= 4e^{-1000t}, \\ i_C(t) &= \ \ e^{-1000t}. \end{aligned}$$

Nyní do obvodu přidáme zdroj střídavého napětí jak je vidět na Obrázku 3.4. V tomto případě dostaneme z druhého Kirchhoffova zákona pro smyčku R rovnici

$$u_R(t) + u_L(t) = u(t). \tag{3.17}$$




Obrázek 3.4: RLC obvod se zdrojem napětí

Pro smyčku S a uzel A jsou rovnice stejné jako v předchozím případě. Výsledná rovnice pro $i_L(t)$ bude mít tvar

$$RLCi_L''(t) + Li_L'(t) + Ri_L(t) = u(t), \tag{3.18}$$

což je obecně nehomogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, která má dle Věty 1.4 řešení na intervalu, na kterém je funkce $u(t)$ spojitá.

*Příklad* 3.4. Uvažujme obvod podle Obrázku 3.4 opět s hodnotami $R = 200\Omega$, $L = 0,25\text{H}$ a $C = 1\mu\text{F}$. Napětí na zdroji nechť je $u(t) = 1500 \sin 2000t$. Spočítejme průběh proudů $i_R(t), i_L(t)$ a $i_C(t)$ při počátečních podmínkách $i_L(0) = 0\text{A}, i_C(0) = 0\text{A}$.

Rovnice (3.18) bude mít tvar

$$0,5 \cdot 10^{-4} i_L''(t) + 0,25 i_L'(t) + 200 i_L(t) = 1500 \sin 2000t. \tag{3.19}$$

Řešení příslušné homogenní rovnice jsme získali v Příkladu 3.3. Partikulární řešení (3.19) dostaneme pomocí Věty 1.11, jelikož pravá strana rovnice má speciální tvar. Bude

$$i_{Lp}(t) = P \cos 2000t + Q \sin 2000t, \tag{3.20}$$

kde $P$ a $Q$ jsou zatím neupřesněné polynomy nejvýše nultého stupně, tedy konstanty. Dosazením (3.20) za $i_L(t)$ do (3.19) a porovnáním koeficientů u $\sin 2000t$ a $\cos 2000t$ dostaneme $P = -3, Q = 0$. Obecné řešení rovnice (3.19) má tedy tvar

$$i_L(t) = -3 \cos 2000t + C_1 e^{-4000t} + C_2 e^{-1000t}, \tag{3.21}$$

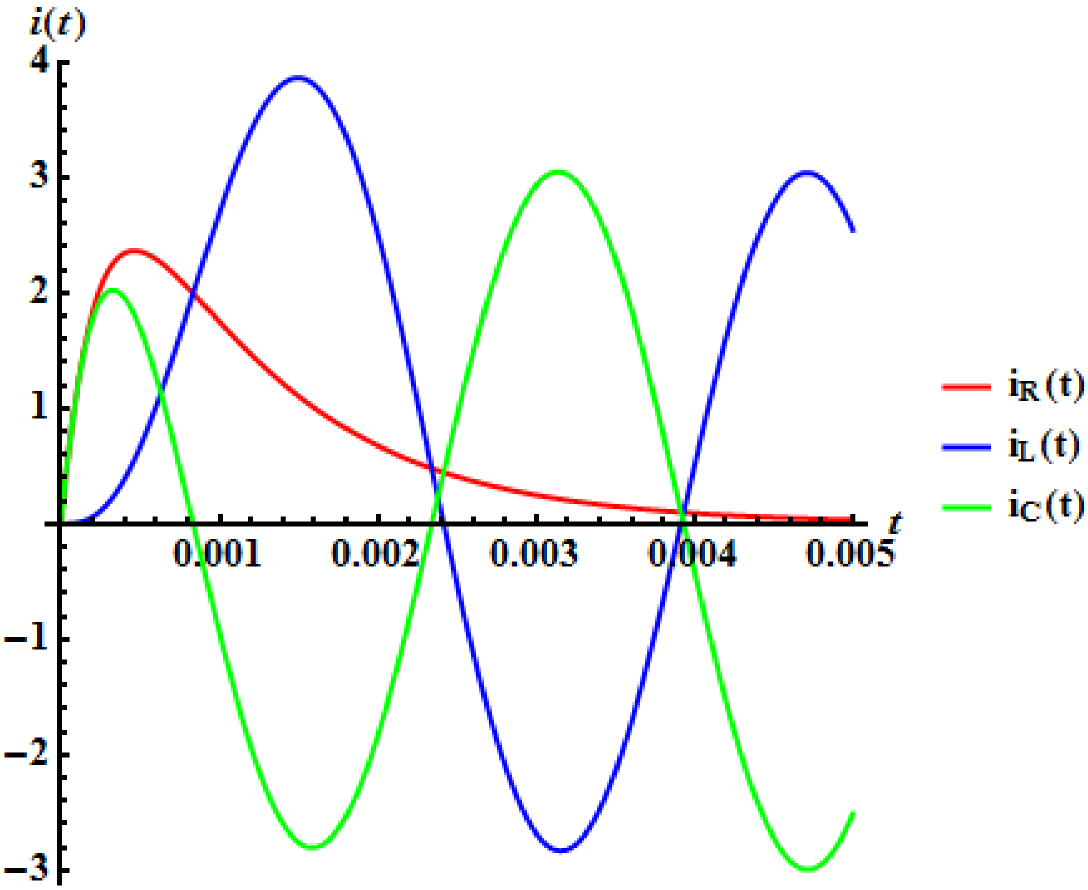
kde $C_1$ a $C_2$ jsou zatím neupřesněné konstanty. Dosadíme-li $i_L(t)$ do (3.12), získáme

$$i_C(t) = 3 \cos 2000t + 4C_1 e^{-4000t} + 0,25 C_2 e^{-1000t}. \tag{3.22}$$

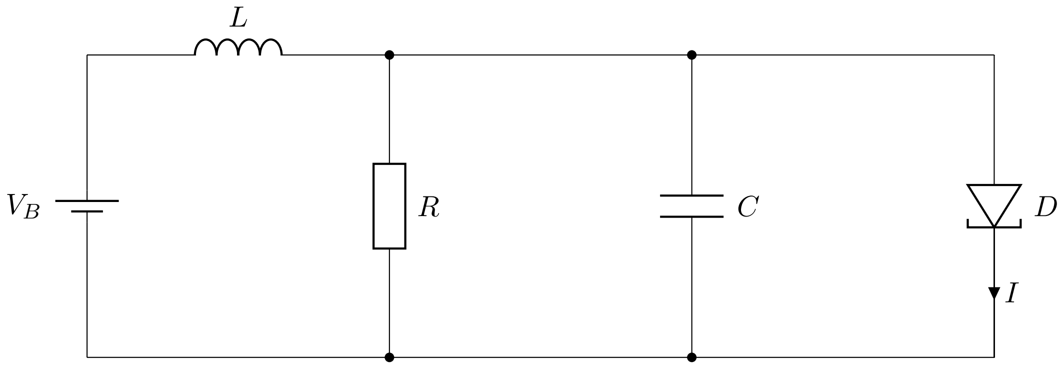
Dosazením z počátečních podmínek do (3.21) a (3.22) obdržíme soustavu dvou lineárních rovnic pro $C_1$ a $C_2$, která má řešení $C_1 = -1$ a $C_2 = 4$, z čehož spolu s (3.8) plyne

$$\begin{aligned}
i_R(t) &= && - 5e^{-4000t} + 5e^{-1000t}, \\
i_L(t) &= -3 \cos 2000t && - e^{-4000t} + 4e^{-1000t}, \\
i_C(t) &= 3 \cos 2000t && - 4e^{-4000t} + e^{-1000t}.
\end{aligned}$$

Grafy řešení vynášíme na Obrázku 3.5.




Obrázek 3.5: Průběh proudů v obvodu se zdrojem napětí z Příkladu 3.4




Obrázek 3.6: Elektrický obvod s tunelovou diodou pro van der Polův oscilátor

### 3.3.2 Van der Polova rovnice

Důležitým příkladem nelineárního problému je van der Polova rovnice

$$u''(t) - \mu(1 - u^2(t))u'(t) + u(t) = 0, \quad \mu > 0, \tag{3.23}$$

která popisuje napětí $u(t)$ ve van der Polově oscilačním obvodu. Na obrázku 3.6 je jedna z možných realizací tohoto obvodu. Detailnější rozbor tohoto obvodu je v knize [Enn11]. Tuto rovnici můžeme považovat za nelineární zobecnění rovnice tlumeného harmonického oscilátoru. Za „útlum“ odpovídá „koeficient“ $-\mu(1 - u^2(t))$. Přesněji platí, že napětí je tlumené, je-li $|u(t)| > 1$. Jestliže je naopak $|u(t)| < 1$, pak napětí bude narůstat.

Počátky van der Polovy rovnice se datují do roku 1927. Byla zavedena kvůli popisu oscilací v nelineárním elektrickém obvodu. V dnešní době se jedná o důležitou rovnici při studiu oscilací nejen ve fyzice, ale také například v ekonomii, viz [Mil99]. Kromě svého aplikačního potenciálu je rovnice důležitá také z čistě matematického pohledu kvůli relativní jednoduchosti a velmi zajímavým vlastnostem.

Pro zajímavost uveďme, že existuje jedno netriviální periodické řešení van der Polovy rovnice a každé další řešení (kromě konstantního) se k němu přibližuje. Zdůvodnění tohoto tvrzení však výrazně přesahuje rámec této práce. Je možné ho najít např. v [HSD12].

Rovnici (3.23) si můžeme napsat jako soustavu dvou rovnic. Stačí provést substituci $x(t) = u(t), y(t) = u'(t)$, z které plyne

$$\begin{aligned} x'(t) &= \quad y(t), \\ y'(t) &= -x(t) + \mu(1 - x^2(t))y(t). \end{aligned} \tag{3.24}$$

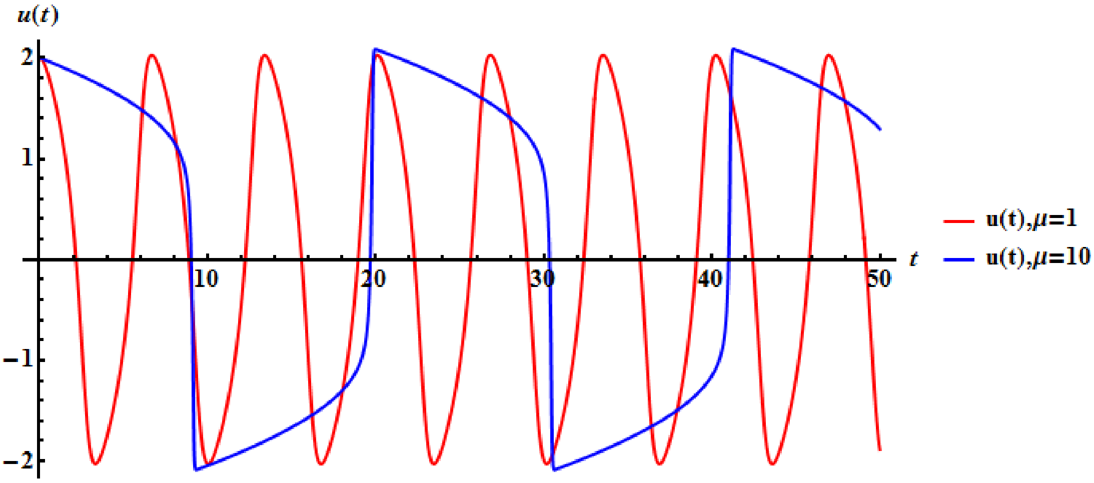
K řešení této soustavy nelze využít žádné analytické metody z první kapitoly, lze ovšem využít numerickou Eulerovu metodu z kapitoly druhé.

*Příklad* 3.5. Řešme Eulerovou metodou rovnici (3.23) s počátečními podmínkami $u(0) = 2, u'(0) = 0$ a s dvěma hodnotami $\mu = 1, \mu = 10$.

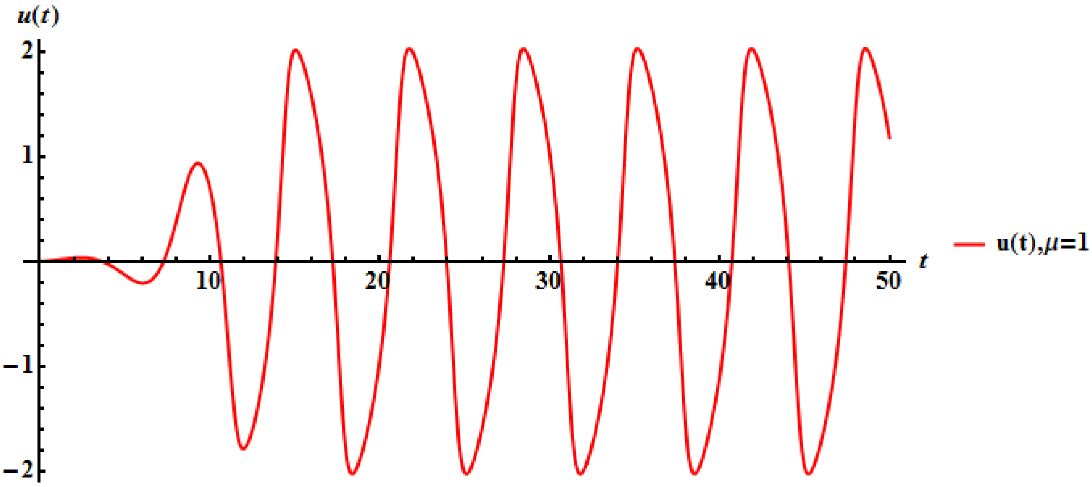
Přeformulujeme úlohu do tvaru soustavy (3.24), zvolíme krok Eulerovy metody $h = 0.01$ a použijeme software [WR12], který nám dá výsledky na Obrázku 3.7. Je vidět, že amplituda řešení se s $\mu$ mění velmi málo, naopak perioda s rostoucím $\mu$ roste.

*Příklad* 3.6. Řešme opět Eulerovou metodou rovnici (3.23), nyní s počátečními podmínkami $u(0) = 0, u'(0) = \frac{1}{100}$ a s $\mu = 1$.

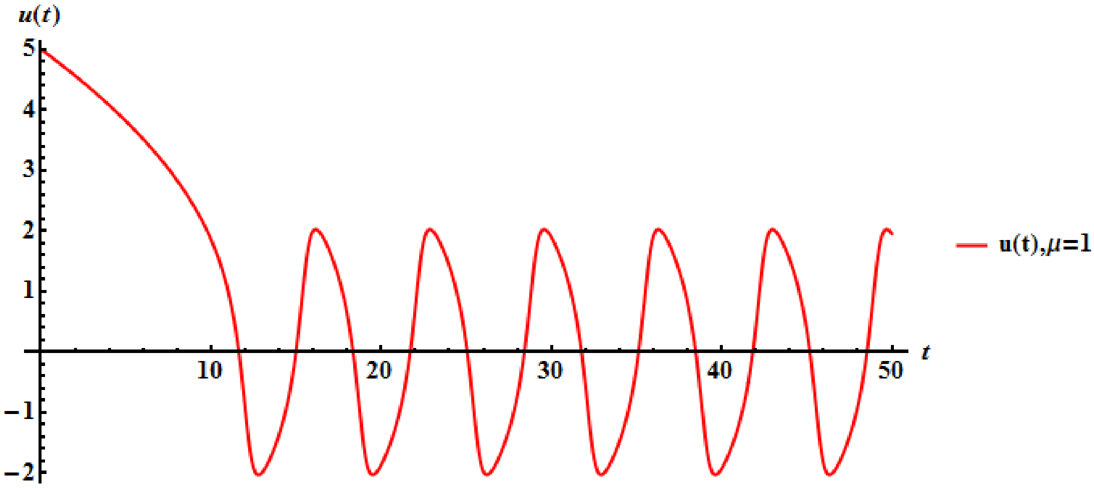
Použitím stejného postupu jako v předchozím příkladu obdržíme výsledky na Obrázku 3.8. Je vidět, že amplituda řešení se postupně zvětšuje až se po nějakém čase ustálí.



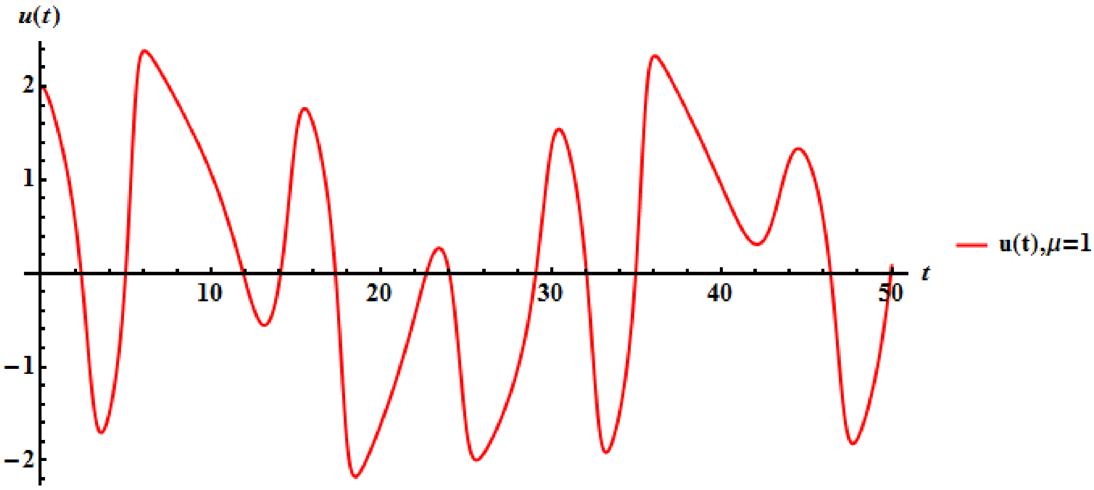

Obrázek 3.7: Řešení van der Polovy rovnice pro $u(0) = 2, u'(0) = 0$




Obrázek 3.8: Řešení van der Polovy rovnice pro $u(0) = 0, u'(0) = \frac{1}{100}$




Obrázek 3.9: Řešení van der Polovy rovnice pro $u(0) = 5, u'(0) = 0$




Obrázek 3.10: Řešení van der Polovy rovnice s nenulovou pravou stranou pro $u(0) = 2, u'(0) = 0$

*Příklad* 3.7. Řešme opět Eulerovou metodou rovnici (3.23), nyní s počátečními podmínkami $u(0) = 5, u'(0) = 0$ a s $\mu = 1$.

Použitím stejného postupu jako v předchozím příkladu obdržíme výsledky na Obrázku 3.9. Je vidět, že amplituda řešení je na počátku tlumena.

*Příklad* 3.8. Řešme nyní Eulerovou metodou rovnici

$$u''(t) - \mu(1 - u^2(t))u'(t) + u(t) = \sin\left(\frac{t}{5}\right) \tag{3.25}$$

s nenulovou pravou stranou a s počátečními podmínkami $u(0) = 2, u'(0) = 0$ a s $\mu = 1$.

Použitím stejného postupu jako v předchozím příkladu obdržíme výsledky na Obrázku 3.10. Je vidět, že řešení se chová „chaoticky“. Jedná se o odpověď van der Polova oscilátoru na periodické buzení.

# Závěr

V této práci jsme se zabývali obyčejnými diferenciálními rovnicemi a jejich soustavami. Kromě základních pojmů a definic jsme uvedli věty o existenci a jednoznačnosti řešení. Provedli jsme rozbor základních analytických metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav s důrazem na rovnice lineární. Všechny metody jsme ilustrovali na názorných příkladech. Samostatnou kapitolu jsme věnovali Eulerově metodě. Provedli jsme její odvození a použití jsme demonstrovali na konkrétní úloze. Ukázali jsme jak funguje iterační proces této numerické metody a využili jsme software pro výpočet a grafické zobrazení výsledků. Jak analytické, tak numerické metody, jsme použili na konkrétní aplikace z teorie elektrických obvodů. Formulovali jsme základní zákony elektrických obvodů a popsali hlavní prvky, z kterých se obvody skládají. Ukázali jsme sestavení rovnic pro RLC obvod, které jsme vyřešili analyticky. Eulerovou metodou jsme řešili různé modifikace nelineární van der Polovy rovnice a graficky jsme zobrazili její řešení.

# Seznam použité literatury


[BDH09] William E Boyce, Richard C DiPrima, and Charles W Haines. *Elementary differential equations and boundary value problems.* Wiley New York, 9th edition, 2009.

[DB12] Peter Deuflhard and Folkmar Bornemann. *Scientific computing with ordinary differential equations*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2012.

[Enn11] RH Enns. Its a nonlinear world, 2011.

[HPZ14] Václav Havlíček, Martin Pokorný, and Ivan Zemánek. *Elektrické obvody.* České vysoké učení technické v Praze, 2014.

[HSD12] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.* Academic press, 2012.

[Mil99] Vošvrda Miloslav. Van der pol's equation and an economic model of cycles. *Bulletin of the Czech Econometric Society*, 6:10, 1999.

[Nov05] Karel Novotný. *Teorie elektromagnetického pole I.* Vydavatelství ČVUT, 2005.

[Rek63] Karel Rektorys. *Přehled užité matematiky.* Státni nakladatelství technické literatury, 1963.

[Wal98] W. Walter. *Ordinary Differential Equations.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1998.

[WR12] Inc. Wolfram Research. Mathematica. `http://www.wolfram.com/`, 2012.

# Seznam obrázků