

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta strojní

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petr Čížek

## Parametrický CAD model radiální turbíny

Ústav technické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.

Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství

Praha 2017

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Čížek** Jméno: **Petr** Osobní číslo: **439317**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojího inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Parametrický CAD model radiální turbíny**

Název bakalářské práce anglicky:

**Parametric CAD model of radial turbine**

Pokyny pro vypracování:

- Seznámení se s geometrií radiální turbíny
- Seznámení se s teoretickým základem počítačem podporovaného modelování ploch obecného tvaru vhodných k popisu jednotlivých částí radiální turbíny
- Ve vhodně zvoleném softwaru vytvořit parametrický CAD model radiální turbíny

Seznam doporučené literatury:

Farin, G.: Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. Academic Press, INC. San Diego. 1996  
Piegl L. - Tiller W.: The NURBS Book, Springer-Verlag, Berlin. 1997  
Linkeová, I.: Základy počítačového modelování křivek a ploch. Skripta. Ediční středisko ČVUT. Praha 2008

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:


**doc. Ing. Ivana Linkeová Ph.D., ústav technické matematiky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **19.04.2017** Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2017**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_  
Podpis vedoucí(ho) práce

  
\_\_\_\_\_  
Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
\_\_\_\_\_  
Podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.  
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

Na tomto místě mnohokrát děkuji paní doc. Ing. Ivaně Linkeové, Ph.D., vedoucí této práce, za trpělivé a zkušené vedení a plodné připomínky ke všem částem práce. Dále velmi děkuji své rodině za lásku a podporu po celou dobu studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že České vysoké učení technické v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 10. 6. 2017

Podpis autora:

Název práce: Parametrický CAD model radiální turbíny

Autor: Petr Čížek

Ústav: Ústav technické matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D., Ústav technické matematiky

Anotace: Cílem práce je vypracování zjednodušeného parametrického CAD modelu radiální turbíny s redukovaným množstvím parametrů. Tyto parametry je možné měnit a optimalizovat tak geometrii turbíny.

Klíčová slova: CAD model, radiální turbína, B-spline, Rhinoceros, Rhinoscript

Title: Parametric CAD model of a radial turbine

Author: Petr Čížek

Department: Department of Technical Mathematics

Supervisor: doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D., Department of Technical Mathematics

Abstract: The goal of the thesis is to create a simplified CAD model of a radial turbine. The number of parameters of this model will be, therefore, reduced. Thus the process of turbine optimization could be simplified.

Keywords: CAD model, radial turbine, B-spline, Rhinoceros, Rhinoscript



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>1 Vlastnosti použitých křivek a ploch</b>	<b>7</b>
<b>2 Model rotoru</b>	<b>9</b>
2.1 Ohraničení lopatkového kanálu . . . . .	9
2.1.1 Analýza . . . . .	9
2.1.2 Matematický model . . . . .	11
2.2 Rotorové lopatky . . . . .	14
2.2.1 Analýza . . . . .	14
2.2.2 Matematický model . . . . .	19
2.2.3 Plochy rotorových lopatek . . . . .	22
2.3 Dokončení rotoru . . . . .	23
2.3.1 Střed rotoru . . . . .	24
2.3.2 Oříznutí ploch . . . . .	24
2.3.3 Kruhové pole rotoru . . . . .	26
<b>3 Model statoru</b>	<b>29</b>
3.1 Plochy statorových lopatek . . . . .	29
3.2 Ohraničení statoru . . . . .	32
3.3 Dokončení statoru . . . . .	34
<b>4 Porovnání původního a náhradního modelu</b>	<b>36</b>
<b>Závěr</b>	<b>38</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>39</b>
<b>Příloha</b>	<b>40</b>

# Úvod

Cílem této práce je vytvořit zjednodušený parametrický CAD model na základě již existujícího modelu radiální turbíny. Tento model byl zadán ve formátu IGES (.ige, .igs, .iges)<sup>1</sup>. Na tomto modelu také proběhlo seznámení se základními geometriemi radiální turbíny. Na obrázku 1 je vidět zadaný model v kartézském souřadnicovém systému tak, že osa  $x$  je zároveň osou turbíny.

Pro geometrickou analýzu původního i pro tvorbu nového modelu byl použit program Rhinoceros 3D (dále jen „Rhino“), tedy 3D CAD software s rozsáhlými možnostmi pro analýzu geometrických vlastností křivek a ploch a jejich modelování.

Model byl napsán jako skript v jazyku RhinoScript, který je zásuvným modulem Rhina. Skript je sérií příkazů pro Rhino, kterými se vytvoří model na základě uživatelem zadaných parametrů.

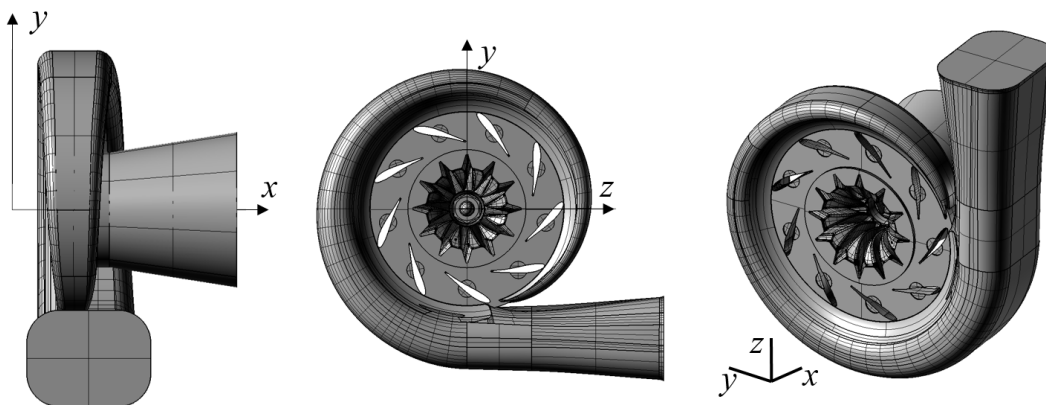
Hlavní výhodou nového modelu je možnost měnit jeho parametry a díky tomu optimalizovat jeho geometrii. Seznam parametrů, které může uživatel měnit (zadávat), se nachází jako příloha na konci práce (str. 40). Byly zjištěny hodnoty těchto parametrů tak, aby nový model odpovídal modelu původnímu. Tyto hodnoty jsou ve zmíněném seznamu i v celé práci označeny dolním indexem  $N$ . V práci je postupně popsán význam každého parametru a je také vysvětleno, jak byla zjištěna hodnota parametru $_N$  odpovídající původnímu modelu.

Model byl zjednodušen, což vedlo ke zmenšení počtu parametrů a také k odlišnosti od původního modelu. Maximální úchylka tvaru odpovídajících si ploch nového a původního modelu byla stanovena na 0.3 mm, pokud možno, což je 0.6 % průměru turbíny. Tato poměrně velká dovolená úchylka umožnila výraznou redukci parametrů turbíny (viz kapitola 4).

Protože byly s pomocí Rhina analyzovány různé odchylky, úchylky a vzdálenosti, bylo potřeba stanovit, jak přesné hodnoty má program vracet. Přesnost dokumentu byla nastavena na 0.001 mm, což je hodnota o řád nižší (přesnější), než velikost některých chyb zapříčiněných zjednodušením modelu.

---

<sup>1</sup>jeden z univerzálních formátů pro převod 3D CAD modelů mezi jednotlivými programy [1]



Obrázek 1: Zadaný model radiální turbíny

# 1. Vlastnosti použitých křivek a ploch

Následují obecné rovnice a vlastnosti křivek a ploch, které byly použity pro popis modelu.

## Křivky

Křivky použité v modelu jsou: kružnice, oblouk a Bézierova křivka.

**Kružnice a oblouk.** Všechny kružnice obsažené v modelu leží v rovině rovnoběžné s jednou z rovin  $xy$ ,  $yz$ ,  $xz$ . Leží-li kružnice  $k$  v rovině  $\rho$  rovnoběžné s rovinou  $xy$  procházející bodem  $(0, 0, z_\rho)$ , je parametrická rovnice kružnice  $k$  se středem  $\mathbf{S} = (x_S, y_S, z_\rho)^1$  a poloměrem  $r \in \mathbb{R}$

$$k : \mathbf{P}(t) = (x_S + r \sin t, y_S + r \cos t, z_\rho), t \in [0, 2\pi]. \quad (1.1)$$

Pro kružnice ležící v rovinách rovnoběžných s rovinou  $xz$  nebo  $yz$  je rovnice obdobná.

Oblouk pak vznikne vhodným omezením parametru  $t$  [3].

**Bézierova křivka.** Pro matematický popis křivek v modelu byly použity Bézierovy křivky. Pro řídicí body  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$  je vektorová rovnice Bézierovy křivky  $k$

$$k : \mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i, t \in [0, 1], \quad (1.2)$$

kde  $n$  je stupeň křivky a bázové funkce

$$B_{i,n} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0, 1] \quad (1.3)$$

jsou Bernsteinovy polynomy  $n$ -tého stupně [4].

Bézierova křivka prvního stupně určená řídicími body  $\mathbf{V}_0$  a  $\mathbf{V}_1$  je **úsečka** s vektorovou rovnicí

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)t, t \in [0, 1], \quad (1.4)$$

Tečný vektor  $\mathbf{P}'(t)$  v bodě Bézierovy křivky  $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  je  $\mathbf{P}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ . Bézierova křivka má následující vlastnosti:

- vždy interpoluje krajní body řídicího polygonu, tedy  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{V}_0$ ,  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{V}_n$ ,
- tečný vektor v počátečním bodě křivky je  $n$ -násobkem vektoru určeného počátečním ramenem řídicího polygonu, tedy  $\mathbf{P}'(0) = n \cdot \mathbf{V}_0 \mathbf{V}_1$ ,
- tečný vektor v koncovém bodě křivky je  $n$ -násobkem vektoru určeného koncovým ramenem řídicího polygonu, tedy  $\mathbf{P}'(1) = n \cdot \mathbf{V}_{n-1} \mathbf{V}_n$ ,
- leží-li všechny body Bézierovy křivky na jedné přímce, redukuje se tato křivka na úsečku, Bézierova křivka je tedy lineárně přesná.

---

<sup>1</sup>v této práci jsou body označovány jejich polohovými vektory

## Plochy

Pro modelování ploch byly využity plochy následující: rotační plocha, Bézierova plocha a přímková přechodová plocha.

**Rotační plocha** je útvar, který vznikne rotačním pohybem tvořící křivky kolem osy rotace  $o$  [5].

Je-li tvořící křivkou rotační plochy Bézierova křivka  $\mathbf{P}(u) = (x(u), y(u), z(u))$  dle (1.2) a osa rotace  $o$  je rovnoběžná s osou  $x$ , tj.  $o = (x, o_y, o_z)$ , je vektorová rovnice rotační plochy

$$\mathbf{S}(u, v) = (x(u), o_y + y(u) \cos v, o_z + z(u) \sin v), u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi]. \quad (1.5)$$

**Bézierova plocha.** Pro síť řídicích bodů reprezentovanou maticí

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \cdots & \mathbf{V}_{0,n} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \cdots & \mathbf{V}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{V}_{m,0} & \mathbf{V}_{m,1} & \cdots & \mathbf{V}_{m,n} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

přičemž body jsou v síti uspořádány ve směru parametru  $u$  do sloupců a ve směru parametru  $v$  do řádků, je vektorová rovnice Bézierovy plochy

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{B}_m(u) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_n^T(v), (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (1.7)$$

kde

$\mathbf{B}_m(u) = (B_{0,m}(u), B_{1,m}(u), \dots, B_{m,m}(u))$ ,  $\mathbf{B}_n(v) = (B_{0,n}(v), B_{1,n}(v), \dots, B_{n,n}(v))$  jsou vektory báze funkcí (Bernsteinových polynomů).  $B_{i,m}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  a  $B_{j,n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  jsou tedy Bernsteinovy polynomy  $m$ -tého, respektive  $n$ -tého stupně (viz (1.3)) [4].

**Přímková přechodová plocha mezi dvěma křivkami.** Pro křivky  $\mathbf{P}_1(u)$ ,  $u \in [0, 1]$  s řídicími body  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k$  a  $\mathbf{P}_2(u)$ ,  $u \in [0, 1]$  s řídicími body  $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_k$  je možno přímkovou přechodovou plochu interpolující tyto křivky popsat jako Bézierovu plochu se sítí řídicích bodů

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{V}_1 & \cdots & \mathbf{V}_k \\ \mathbf{W}_0 & \mathbf{W}_1 & \cdots & \mathbf{W}_k \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

tedy

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{B}_2(u) \cdot \mathbf{M}_p \cdot \mathbf{B}_2^T(v), (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (1.9)$$

a křivky  $\mathbf{P}_1(u)$ ,  $\mathbf{P}_2(u)$  jsou hraniční křivky této plochy [4].

## 2. Model rotoru

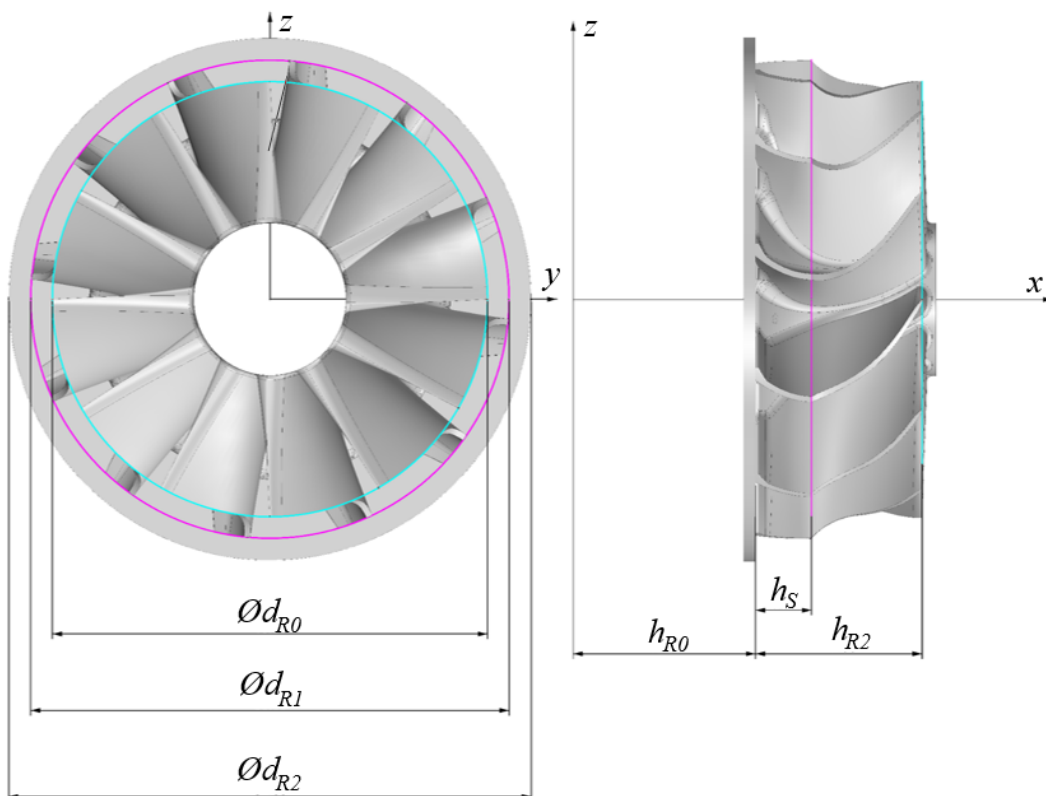
V rámci modelování rotoru bylo popsáno ohraničení lopatkového kanálu, plochy rotorové lopatky, a poté postup, kterým se z těchto ploch složí celý rotor.

### 2.1 Ohraničení lopatkového kanálu

Aby bylo možné modelovat nejdůležitější část rotoru, tedy jeho lopatky, bylo zapotřebí zjistit celkové umístění lopatek v prostoru a jejich velikost.

#### 2.1.1 Analýza

Na obrázku 2.1 je vidět rotor turbíny včetně kót určujících jeho pozici v kartézském souřadnicovém systému. Je zde vidět, jak byly získány hodnoty parametrů  $d_{R0N}$ ,  $d_{R1N}$ ,  $d_{R2N}$ ,  $h_{R0N}$ ,  $h_{R2N}$ ,  $h_{SN}$  a  $n_N$ . Na obrázcích jsou kótovány rozměry obecně, tj. nikoli nutně pro případ odpovídající původnímu modelu, a jsou tedy bez indexu  $N$ .

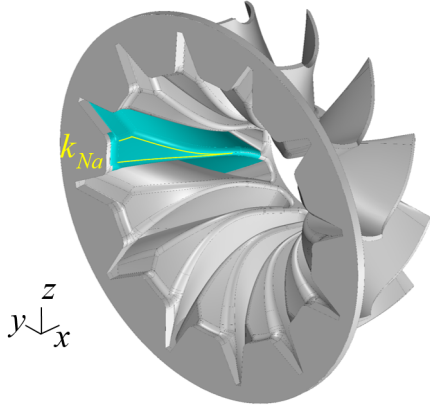


Obrázek 2.1: Rotor turbíny

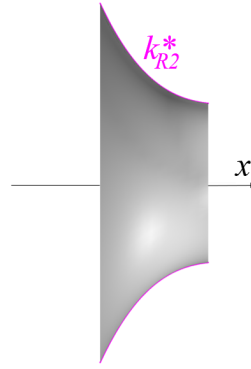
#### Tvar náboje rotoru

Pro zjištění tvaru náboje rotoru byla vytvořena rotační plocha s osou rotace totožnou s osou turbíny. Tvořící křivka byla křivka  $k_{Na}$  (viz obrázek 2.2). Řezem

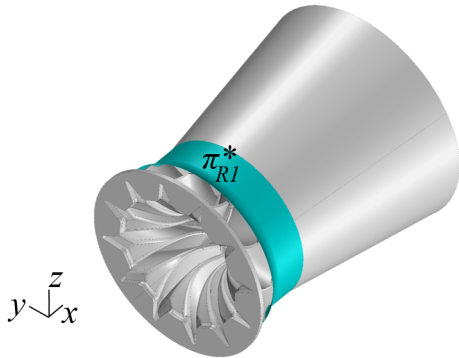
této rotační plochy rovinou  $xy$  (použit příkaz Rhina `_Section`) vznikla křivka  $k_{R2}^*$ , která je vidět na obrázku 2.3). Křivka  $k_{R2}^*$  je polomeridián rotační plochy [5]. Tato křivka je NURBS křivka, která byla aproximována Bézierovou křivkou třetího stupně  $k_{R2}$  s řídicími body  $G_R, L_R, C_R, F_R$  (obrázek 2.6). Z obrázku je vidět, že křivka  $k_{R2}$  má poblíž bodu  $C_R$  poměrně výraznou úchylku tvaru od křivky  $k_{R2}^*$  (vyšší, než 1 mm). Při zvoleném stupni zjednodušení, tedy nahrazení celého úseku mezi bodu  $G_R$  a  $F_R$  jednou křivkou, je tato úchylka nevyhnutelná.



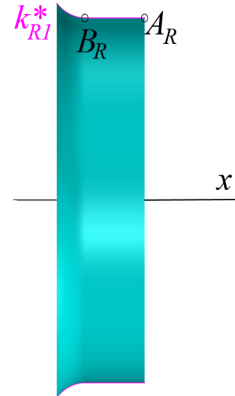
Obrázek 2.2: Získání křivky  $k_{Na}^*$



Obrázek 2.3: Řez náboje



Obrázek 2.4: Plocha  $\pi_{R1}^*$



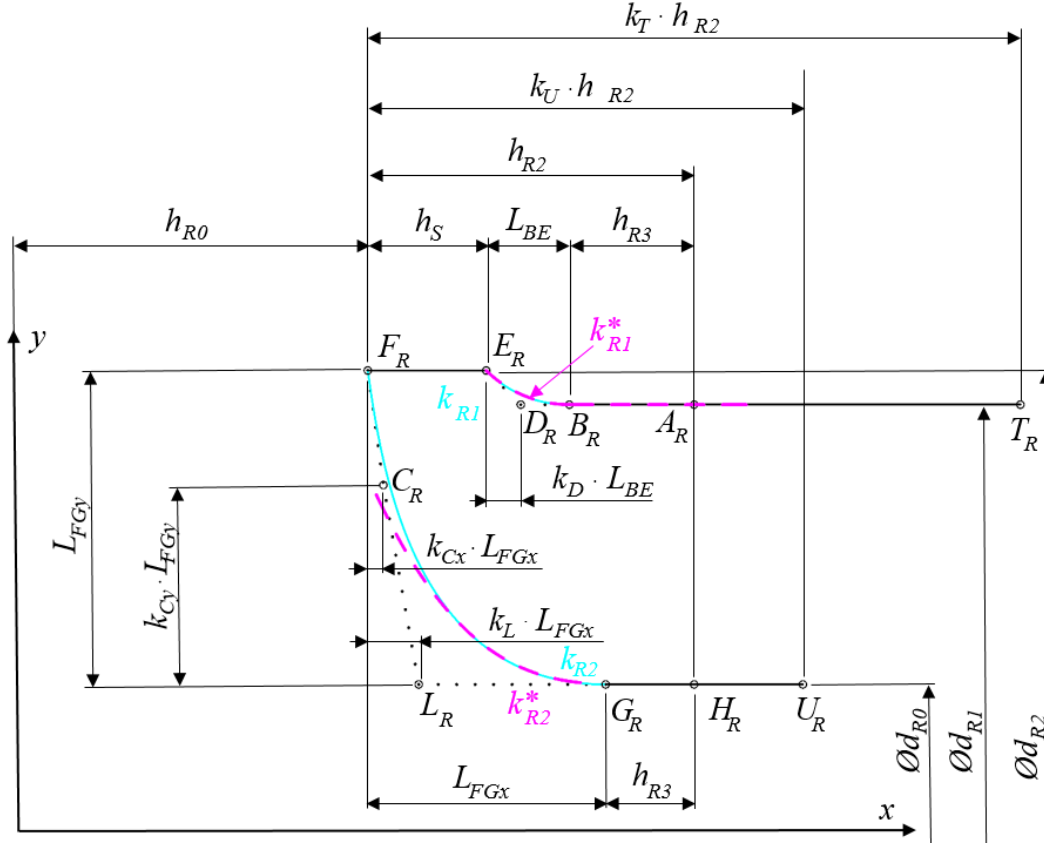
Obrázek 2.5: Řez obalu

### Krajní plocha rotoru

Následně byla zjištěna tvořící křivka skříně (vnějšího okraje rotoru) obdobným postupem. Byl proveden řez obalové plochy rotoru  $\pi_{R1}^*$  (viz obrázek 2.4) rovinou  $xy$ . Tímto řezem vznikla křivka  $k_{R1}^*$  a úsečka  $A_RB_R$  (viz obrázek 2.5). Křivka  $k_{R1}^*$  je NURBS křivka určená třemi řídicími body  $B_R, D_R$  a  $E_R$ . Tato křivka byla nahrazena Bézierovou křivkou druhého stupně se stejnými řídicími body (obě křivky jsou vidět na obrázku 2.6), čímž vznikla tvarová úchylka od původního modelu 0.019 mm. To je hodnota ve vymezené toleranci.

Pro popis křivek  $k_{R1}$  a  $k_{R2}$  bylo využito algoritmu zřejmého z obrázku 2.6. Z důvodu stručnosti a přehlednosti byly označeny vzdálenosti  $L_{BE} = x_{B_R} - x_{E_R}$ ,  $L_{FGx} = x_{G_R} - x_{F_R}$  a  $L_{FGy} = y_{F_R} - y_{G_R}$ . Poloha řídicích bodů  $C_R, D_R$  a  $L_R$  byla potom popsána pomocí koeficientů  $k_{Cx}, k_{Cy}, k_D$  a  $k_L$  ve shodě s obrázkem.

Postupem obráceným (tedy změřením vzdáleností  $L_{BE}$ ,  $L_{FGx}$  a  $L_{FGy}$ , zjištěním souřadnic řídicích bodů a vydělením příslušných vzdáleností) byly získány hodnoty koeficientů  $k_{CxN}$ ,  $k_{CyN}$ ,  $k_{DN}$  a  $k_{LN}$ .



Obrázek 2.6: Okraje rotorové lopatky

## 2.1.2 Matematický model

Následuje matematický popis jednotlivých bodů, křivek a ploch tvořících ohraničení lopatkového kanálu.

### Body a křivky

Z obrázku 2.6 je možné vyčíst matematickou reprezentaci jednotlivých bodů (viz tabulka 2.1) a následně křivek ohraničení lopatek. Zároveň platí:

$$\begin{aligned} L_{BE} &= x_{B_R} - x_{E_R} = h_{R2} - h_S - h_{R3}, \\ L_{FGx} &= x_{F_R} - x_{G_R} = h_{R2} - h_S - h_{R1}, \\ L_{FGy} &= y_{F_R} - y_{G_R} = \frac{1}{2} \cdot (d_{R1} - d_{R0}). \end{aligned}$$

**Křivka**  $k_{R1}$  je Bézierova křivka druhého stupně. Matematický popis Bézierovy křivky je dle (1.2)

$$k_{R1} : \mathbf{P}_{R1}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

Tabulka 2.1: Matematický popis bodů ohraničení lopatek

bod	analytické souřadnice			číselné souřadnice		
$A_R$	$(h_{R0} + h_{R2},$	$\frac{1}{2}d_{R1},$	$0)$	$(36.634,$	$23.150,$	$0)$
$B_R$	$(h_{R0} + h_{R2} - h_{R3},$	$\frac{1}{2}d_{R1},$	$0)$	$(29.894,$	$23.150,$	$0)$
$C_R$	$(h_{R0} + k_{Cx} \cdot L_{FGx},$	$\frac{1}{2}d_{R0} + k_{Cy} \cdot L_{FGy},$	$0)$	$(19.683,$	$14.020,$	$0)$
$D_R$	$(h_{R0} + h_S + k_D \cdot L_{BE},$	$\frac{1}{2}d_{R1},$	$0)$	$(27.269,$	$23.150,$	$0)$
$E_R$	$(h_{R0} + h_S,$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$0)$	$(25.4,$	$25,$	$0)$
$F_R$	$(h_{R0}$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$0)$	$(19,$	$25,$	$0)$
$G_R$	$(h_{R0} + h_{R2} - h_{R1},$	$\frac{1}{2}d_{R0},$	$0)$	$(31.853,$	$8,$	$0)$
$H_R$	$(h_{R0} + h_{R2},$	$\frac{1}{2}d_{R0},$	$0)$	$(36.634,$	$8,$	$0)$
$L_R$	$(h_{R0} + k_{Lx} \cdot L_{FGx},$	$\frac{1}{2}d_{R0},$	$0)$	$(24.065,$	$8,$	$0)$
$T_R$	$(h_{R0} + k_T \cdot h_{R2},$	$\frac{1}{2}d_{R1},$	$0)$	$(54.268,$	$23.150,$	$0)$
$U_R$	$(h_{R0} + k_U \cdot h_{R2},$	$\frac{1}{2}d_{R0},$	$0)$	$(42.512,$	$8,$	$0)$

Pro křivku druhého stupně (tedy  $n = 2$ ) s řídicími body  $B_R$ ,  $D_R$  a  $E_R$ :

$$\mathbf{P}_{R1}(t) = B_{0,2}(t) \cdot \mathbf{B}_R + B_{1,2}(t) \cdot \mathbf{D}_R + B_{2,2}(t) \cdot \mathbf{E}_R, \quad t \in [0, 1] \quad (2.2)$$

$$\mathbf{P}_{R1}(t) = (1 - t)^2 \cdot \mathbf{B}_R + 2t(1 - t) \cdot \mathbf{D}_R + t^2 \cdot \mathbf{E}_R, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

Číselná rovnice křivky  $k_{R1N}$  po dosazení souřadnic bodů  $B_{RN}$ ,  $D_{RN}$  a  $E_{RN}$  je v tabulce 2.2.

Křivka  $k_{R2}$  je Bézierovou křivkou třetího stupně s řídicími body  $F_R$ ,  $C_R$ ,  $L_R$  a  $G_R$ . Po dosazení  $n = 3$  do (1.2) a (1.3) byl získán matematický popis této křivky a je uveden v tabulce 2.2.

Úsečky na obrázku 2.6 byly všechny popsány dle (1.4). V tabulce 2.2 jsou k vidění včetně dosazení.

## Plochy

Výše popsané úsečky a křivky byly použity jako tvořící křivky pro rotační plochy (s osou rotace totožnou s osou turbíny) představující kraj rotorové lopatky a také ohraničující část modelu.

Tyto plochy byly popsány pomocí (1.5). Pro plochu  $\pi_{R1}$ , jejíž tvořící křivka je  $k_{R1}$ , vypadá dosazení do (1.5) následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \pi_{R1} : \mathbf{S}_{R1}(u, v) &= (x_{k_{R1}}(u), y_{k_{R1}}(u) \cdot \cos v, y_{k_{R1}}(u) \cdot \sin v), \\ u &\in [0, 1], v \in \left[ -\frac{2\pi}{n_R}, \frac{2\pi}{n_R} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

a tedy:

$$\begin{aligned} \pi_{k_{R1}} : \mathbf{S}_{R1}(u, v) &= ((1 - u)^2 \cdot \mathbf{x}_{B_R} + 2u(1 - u) \cdot \mathbf{x}_{V_R} + u^2 \cdot \mathbf{x}_{E_R}, \\ &((1 - u)^2 \cdot \mathbf{y}_{B_R} + 2u(1 - u) \cdot \mathbf{y}_{V_R} + u^2 \cdot \mathbf{y}_{E_R}) \cdot \cos v, \end{aligned}$$



Tabulka 2.2: Matematický popis křivek ohraničení lopatek

křivka	analytické souřadnice	
	číslné souřadnice	
$k_{R1}$	$\mathbf{K}_{R1}(t) = (1-t)^2 \cdot \mathbf{B}_R + 2t(1-t) \cdot \mathbf{V}_R + t^2 \cdot \mathbf{E}_R, t \in [0, 1]$ $(7.946t^2 + 18.73t + 36.364, \quad 1.85t^2 + 23.15, \quad 0)$	
$k_{R2}$	$\mathbf{K}_{RA}(t) = (1-t)^2 \cdot \mathbf{B}_R + 2t(1-t) \cdot \mathbf{V}_R + t^2 \cdot \mathbf{E}_R, t \in [0, 1]$ $(-0.295t^3 + 11.099t^2 + 2.049t + 19, \quad 1.056t^3 + 14.888t^2 - 32.944t + 25, \quad 0)$	
$A_RB_R$	$A_RB_R : \mathbf{K}_{AB}(t) = \mathbf{A}_R + t \cdot (\mathbf{B}_R - \mathbf{A}_R), t \in [0, 1]$ $(-6.74t + 36.634, 23.15, 0)$	
$A_RT_R$	$A_RT_R : \mathbf{K}_{AT}(t) = \mathbf{A}_R + t \cdot (\mathbf{T}_R - \mathbf{A}_R), t \in [0, 1]$ $(-17.634t + 36.634, 23.15, 0)$	
$E_RF_R$	$E_RF_R : \mathbf{K}_{EF}(t) = \mathbf{E}_R + t \cdot (\mathbf{F}_R - \mathbf{E}_R), t \in [0, 1]$ $(-6.4t + 25.4, 25, 0)$	
$H_RG_R$	$H_RG_R : \mathbf{K}_{HG}(t) = \mathbf{H}_R + t \cdot (\mathbf{G}_R - \mathbf{H}_R), t \in [0, 1]$ $(-4.781t + 31.853, 8, 0)$	
$H_RU_R$	$H_RU_R : \mathbf{K}_{HU}(t) = \mathbf{H}_R + t \cdot (\mathbf{U}_R - \mathbf{H}_R), t \in [0, 1]$ $(-5.878t + 36.634, 8, 0)$	
$T_RA_R$	$T_RA_R : \mathbf{K}_{TA}(t) = \mathbf{T}_R + t \cdot (\mathbf{A}_R - \mathbf{T}_R), t \in [0, 1]$ $(-17.634t + 36.634, 23.15, 0)$	

$$\begin{aligned}
 & (1-u)^2 \cdot \mathbf{y}_{B_R} + 2u(1-u) \cdot \mathbf{y}_{V_R} + u^2 \cdot \mathbf{y}_{E_R} \cdot \sin v \\
 & u \in [0, 1], v \in \left[ -\frac{2\pi}{n_R}, \frac{2\pi}{n_R} \right]. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

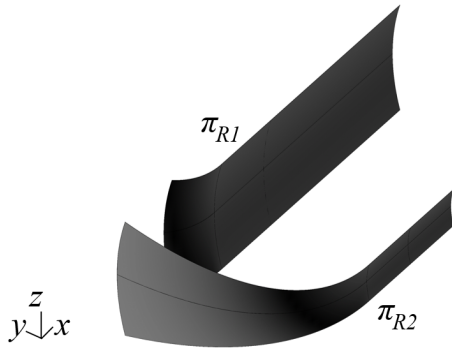
Po dosazení hodnot odpovídajících původnímu modelu

$$\begin{aligned}
 \pi_{R1N} : \mathbf{S}_{R1}(u, v) = & ((7.946u^2 + 18.73u + 36.364, (1.85u^2 + 23.15) \cdot \cos v, \\
 & (1.85u^2 + 23.15) \cdot \sin v), u \in [0, 1], v \in \left[ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

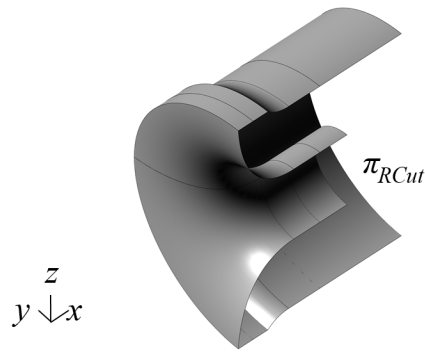
Je vidět, že matematická reprezentace i velmi jednoduché rotační plochy je dlouhá a nepřehledná. Z matematického hlediska je velmi jednoduché získat rovnici rotační plochy na základě rovnice tvořící křivky. Z těchto důvodů nebudou již další rovnice rotačních ploch uvedeny.

Matematické vyjádření ploch  $\pi_{R1}$  a  $\pi_{R2}$  na obrázku 2.7 se skládá z (2.5) a dalších pěti rovnic naprosto analogických (tvořícími křivkami jsou na místě křivky  $k_{R1}$  křivky  $A_RT_R$ ,  $A_RB_R$ ,  $H_RU_R$ ,  $G_RH_R$  a  $k_{R2}$ ).

Obrázek 2.8 pak ukazuje plochu  $\pi_{RCut}$ , která byla použita k oříznutí rotorových lopatek. Její analytickou reprezentaci je možno získat postupně dosazením křivek a úseček z obrázku 2.6 do (1.5) způsobem ukázaným na (2.5) a (2.6), ovšem musí platit  $v \in [-\pi, \pi]$ .



Obrázek 2.7: Ohraničení rotorového kanálu



Obrázek 2.8: Plocha pro oříznutí lopatky

## 2.2 Rotorové lopatky

Vzhledem k tomu, že se jedná o parametrický model turbíny, je důležité především co nejnějněji a zároveň co nejjednodušeji popsat lopatky.

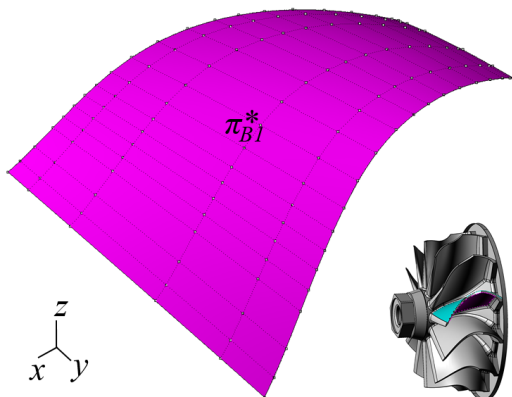
Plochy lopatek původního modelu jsou tvořeny dvojicí oříznutých ploch  $\bar{\pi}_{B1}$  a  $\bar{\pi}_{B2}$ . Protože oříznuté plochy jsou obtížně matematicky popsatelné a těžko analyzovatelné, byly analyzovány plochy  $\pi_{B1}^*$  a  $\pi_{B2}^*$ , jejichž stříhem vznikly plochy  $\bar{\pi}_{B1}$  a  $\bar{\pi}_{B2}$ . Pro získání ploch  $\pi_{B1}^*$  a  $\pi_{B2}^*$  byl použit příkaz Rhina `_Untrim`.

### 2.2.1 Analýza

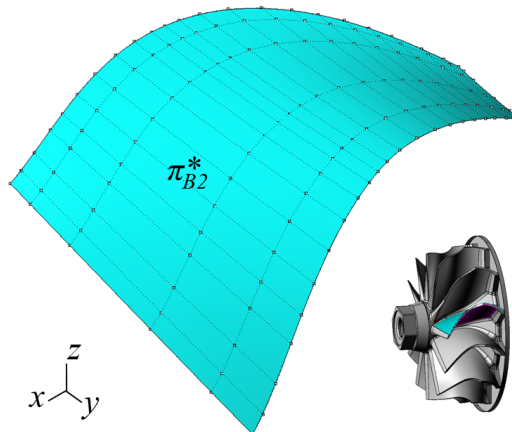
Následuje analýza ploch rotorových lopatek.

#### Základní vlastnosti

Plochy rotorových lopatek původního modelu po zrušení stříhu  $\pi_{B1}^*$  (plocha na přetlakové straně<sup>1</sup>) a  $\pi_{B2}^*$  (plocha na sací straně) včetně řídicích bodů jsou vidět na obrázcích 2.9 a 2.10.

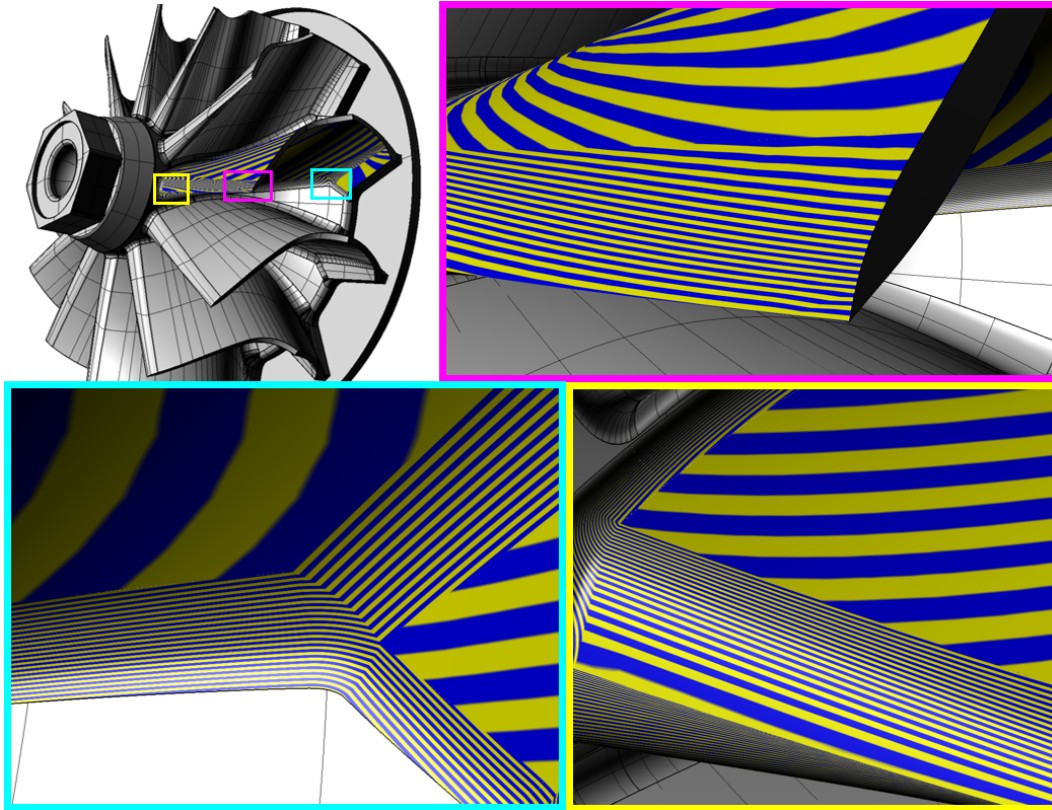


Obrázek 2.9: Plocha přetlakové strany rotorové lopatky po zrušení stříhu



Obrázek 2.10: Plocha sací strany rotorové lopatky po zrušení stříhu

<sup>1</sup>terminologie převzata z [6]



Obrázek 2.11: Analýza spojitosti ploch

K analýze vlastností těchto ploch byl použit příkaz `_List`. Vlastnosti ploch  $\pi_{B1}^*$  a  $\pi_{B2}^*$  shrnuje tabulka 2.3.

Tabulka 2.3: Vlastnosti původních ploch rotorových lopatek

Plocha	$n_u^2$	$n_v^3$	velikost řídicí sítě <sup>4</sup>	počet řídicích bodů	uniformní
$\pi_{B1}^*$	3	3	23 x 6	138	NE
$\pi_{B2}^*$	3	3	21 x 6	126	NE

Z tabulky vyplývá, že se jedná o neuniformní plochy (uzlové vektory ploch nejsou uniformní [4]) třetího stupně (V obou směrech) dané v obou případech více jak 125 řídicími body. To znamená stovky reálných parametrů pro popis jediné plochy.

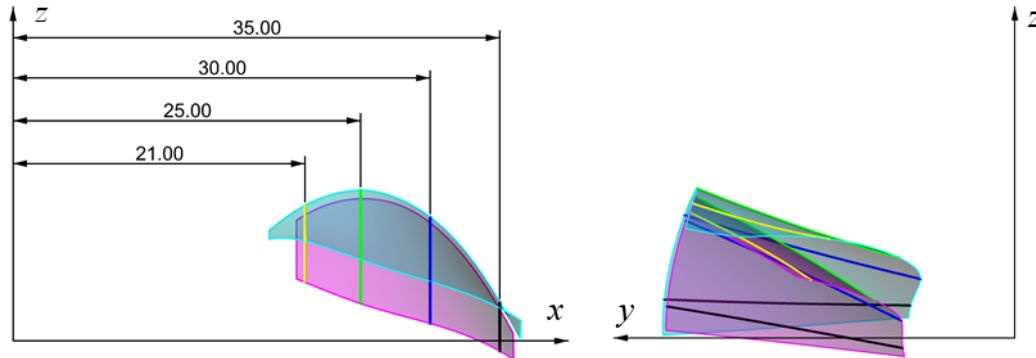
### Návaznost ploch

Pro analýzu návaznosti ploch byl použit příkaz Rhina `_Zebra`. Tento příkaz vykreslí na ploše zebří pruhy a podle nich lze usoudit na spojitost a hladkost plochy (případně spojitost navázání více ploch). Pokud pruhy navazují spojitě, jedná se o  $G^1$  spojitost, pro hladce navazující pruhy se jedná o  $G^2$  spojitost. Plochy lopatek se zebřími pruhy ukazuje obrázek 2.11.

Jak je vidět, jednotlivé plochy rotorových lopatek analyzovaného modelu jsou napojené s  $G^1$  spojitostí [4].

## Osová souměrnost profilu

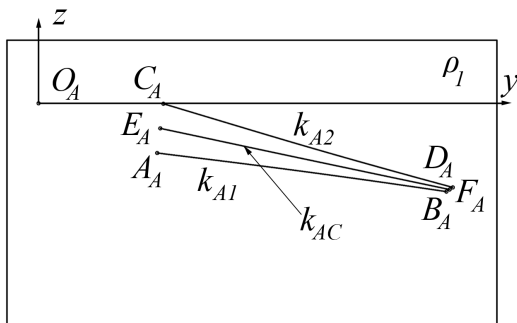
Pro lepší představu o geometrických vlastnostech ploch  $\pi_{R1}^*$  a  $\pi_{R2}^*$  byla provedena série řezů rovinami kolnými na osu rotoru (osu  $x$ ), a sice v místech  $x = 21$ ,  $x = 25$ ,  $x = 30$  a  $x = 35$ . Takto byly získány vždy dvojice rovinných křivek, které ukazuje obrázek 2.12.



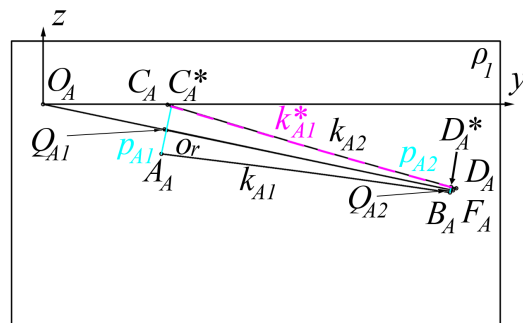
Obrázek 2.12: Řezy rotorovými lopatkami

Profillem lopatky bude v této práci nazýván řez lopatky rovinou kolnou na osu turbíny. Následuje postup, kterým byla ověřena jeho osová souměrnost.

Nejprve bylo ověřeno, jestli je profil pro dané řezy symetrický a jestli případná osa souměrnosti profilu protíná osu rotoru. Je-li  $\rho_1$  je libovolná rovina rovnoběžná s rovinou  $yz$  pro kterou platí, že  $\exists k_{B1} = \rho_1 \cap \pi_{B1}^* \wedge \exists k_{B2} = \rho_1 \cap \pi_{B2}^*$ . Pohled kolmý na rovinu  $\rho_1$  ukazující křivky  $k_{A1}$  a  $k_{A2}$  je na obrázcích 2.13 a 2.14.



Obrázek 2.13: Střední křivka profilu rotorové lopatky



Obrázek 2.14: Analýza osově souměrnosti lopatky

Na křivky  $k_{A1}$  a  $k_{A2}$  byl použit příkaz Rhina `_MeanCurve` (střední křivka). Tím vznikla křivka  $k_{AC}$  s krajními body  $E_C$  a  $F_C$  (viz obrázek 2.13).

Na obrázku 2.14 je vidět přímka  $o_r$ , která prochází body  $O_A$  a  $F_A$ . Je předpokládáno, že se jedná o osu profilu. Přímka  $p_{A1}$  je kolmice na tuto přímku tak, že  $A_A \in p_{A1}$ . Potom  $C_A^*$  je průsečík  $p_{A1} \cap k_{A2}$ . Obdobně je  $p_{A2}$  kolmice na  $o_r$  tak, že  $B_A \in p_{A2}$ . Potom  $D_A^*$  je průsečík  $p_{A2} \cap k_{A2}$ . Průsečík  $o_r \cap A_A C_A$  je bod  $Q_{A1}$ , průsečík  $o_r \cap B_A D_A$  potom  $Q_{A2}$ . Středů úseček  $A_A C_A$  a  $B_A D_A$  jsou nazvány  $S_{A1}$  resp.  $S_{A2}$  (tyto body by na obrázku 2.14 splývaly s body  $Q_{A1}$  a  $Q_{A2}$ , proto nejsou zakresleny).

Vzdálenosti  $|S_{A1}Q_{A1}|$  a  $|S_{A2}Q_{A2}|$  byly použity jako měřítko tvarové úchyly profilu od ideálního symetrického tvaru s osou profilu protínající osu turbíny.

Také byla vyhodnocena maximální tvarová úchyly  $\delta_{A1}$  křivek  $k_{A1}^*$  a  $k_{A2}$ , kde  $k_{A1}^*$  je symetrickým obrazem křivky  $k_{A1}$  podle osy  $o_r$  (viz obrázek 2.14). K vyhodnocení maximální tvarové úchyly byl použit příkaz Rhina `_CrvDeviation`.

Vyhodnocení symetrie pro 4 řezy (viz obrázek 2.12) ukazuje tabulka 2.4. Jak je vidět, odchylky v žádném z řezů nejsou příliš velké (do 0.035 mm), a proto je možno pro zjednodušený model předpokládat, že profil lopatky je symetrický a jeho osa symetrie protíná osu turbíny.

Tabulka 2.4: Analýza osové souměrnosti, rozměry v mm

Poloha řezu	$ S_{1A}P_{1A} $	$ S_{2A}P_{2A} $	$\delta_{A1}$	$\delta_{p1}$	$\delta_{p2}$
x=20	0.005	0.003	0.0093	0.19	0.19
x=25	0.006	0.003	0.0013	0.23	0.24
x=30	0.008	0.002	0.0016	0.15	0.17
x=35	0.018	0.01	0.035	0.067	0.081
<b>maximum</b>	<b>0.018</b>	<b>0.01</b>	<b>0.035</b>	<b>0.23</b>	<b>0.24</b>

### Aproximace přímkovou plochou

Dále bylo zjištěno, jaká chyba by vznikla, pokud by plochy byly považovány za přímkové. Byla vyhodnocena tvarová úchyly přímky  $A_A B_A$  od křivky  $k_{A1}$  a následně tvarová úchyly přímky  $C_A D_A$  a křivky  $k_{A2}$ . Hodnoty těchto odchylek jsou v tabulce 2.4 jako  $\delta_{p1}$  resp.  $\delta_{p2}$ .

Došlo ke značné redukci počtu parametrů modelu za cenu poměrně velké tvarové úchyly (až 0.24 mm, tedy až 1.5 % délky lopatky).

Z provedených analýz vyplývá, že profil lopatky lze nahradit dvěma osově souměrnými přímkami, jejichž vzdálenost od osy není konstantní.

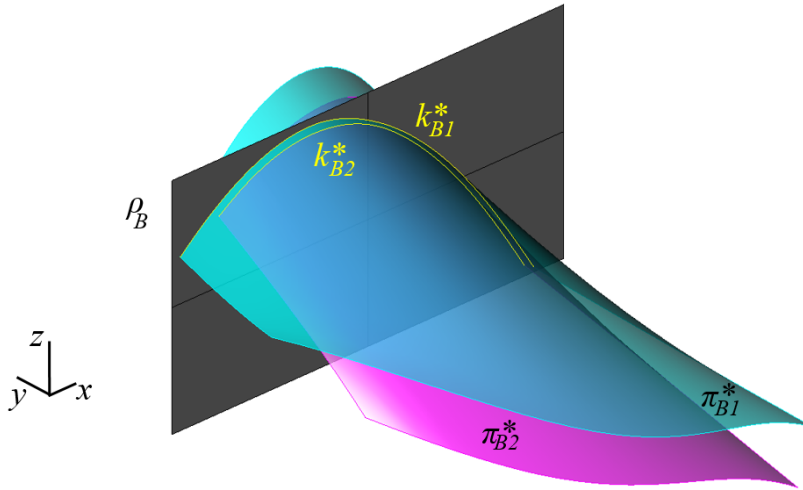
### Popis střední plochy

Na základě poznatků uvedených v předchozích odstavcích lze soudit, že existuje střední plocha  $\pi_{B0}$  (na obrázku 2.17), která má v každém řezu kolmém na osu rotoru tu vlastnost, že její průmět odpovídá ose profilu (osa  $o_r$  z obrázku 2.14). Tato plocha je samozřejmě jen myšlená, v konečném modelu se neobjeví, a proto ani nebudou uvedeny její rovnice. Je však důležité ji popsat, protože s její pomocí budou popsány plochy lopatek.

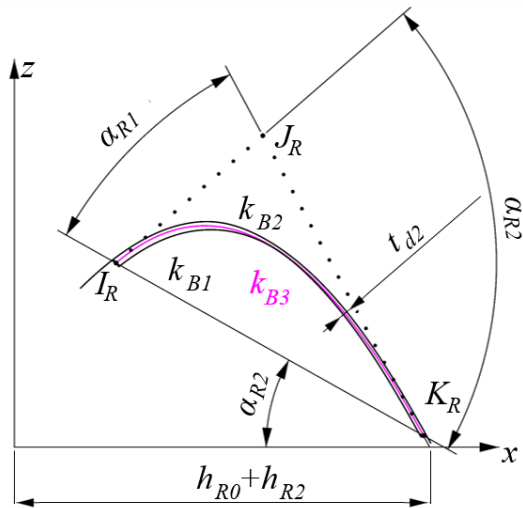
Plocha  $\pi_{B0}$  může být vzhledem k zjednodušení, které bylo provedeno, popsána jako přímková přechodová plocha mezi křivkou  $k_{B0}$  a úsečkou  $O_{IR}O_{KR}$  (tato úsečka je část osy rotoru).

Nejprve byla identifikována křivka  $k_{B0}$ , která je určena jako průnik plochy  $\pi_{B0}$  s rovinou  $\rho_B$  rovnoběžnou s rovinou  $xz$  a procházející bodem  $(0, -\frac{d_{R2}}{2}, 0)$ .

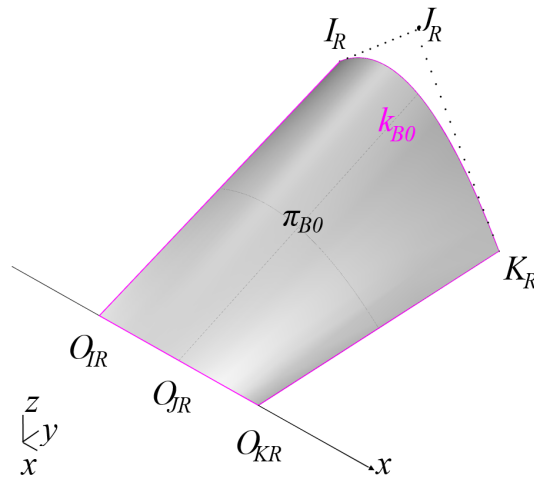
Nejprve byla postupem zřejmým z obrázků 2.15 a 2.16 popsána křivka  $k_{B0}^*$ . Průniky  $\rho_B \cap \pi_{B1}$  a  $\rho_B \cap \pi_{B2}$  byly označeny  $k_{B1}$ , resp.  $k_{B2}$ . Je-li  $k_{B0}$  rovinná křivka ležící v rovině  $\rho_B$  a  $n_{3i}$  normála této křivky v jejím obecném bodě  $C_{3i}$ , a jsou-li průsečíky  $n_{3i} \cap k_{B1}$  a  $n_{3i} \cap k_{B2}$  označeny  $C_{1i}$ , resp.  $C_{2i}$ , potom je  $k_{B0}^*$  právě taková křivka, pro kterou platí ve všech bodech:  $|C_{1i}C_{3i}| = |C_{2i}C_{3i}|$ .



Obrázek 2.15: Rotorové lopatky a rovina  $\rho_B$



Obrázek 2.16: Řez lopatky rovinou  $\rho_B$  a aproximace křivky  $k_{B0}$



Obrázek 2.17: Střední plocha rotorové lopatky  $\pi_{B3}$

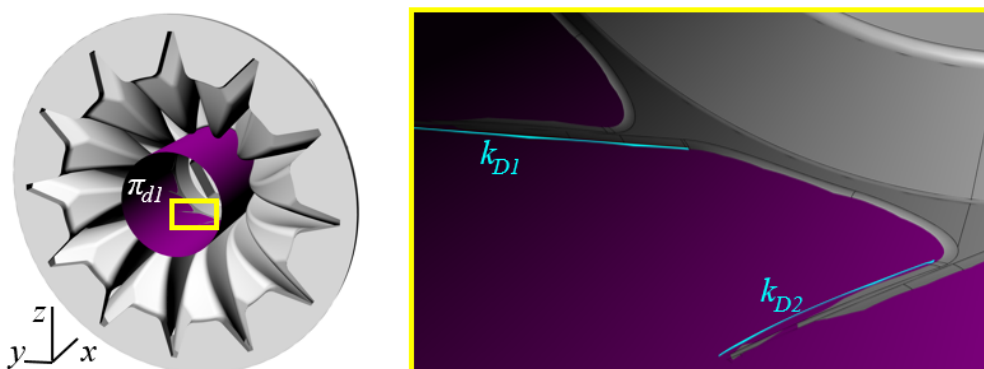
Hledat křivku  $k_{B0}^*$  přesně by bylo velmi složité, ale protože bylo v modelu provedeno již několik zjednodušení vedoucích k nepřesnostem, lze tuto křivku aproximovat Bézierovou křivkou druhého stupně, což je právě hledaná křivka  $k_{B0}$  (na obrázku 2.16 včetně řídicího polygonu  $I_R J_R K_R$ ).

Ze souřadnic bodů  $I_R$ ,  $J_R$ ,  $K_R$  byly odvozeny úhly  $\alpha_{R1N}$ ,  $\alpha_{R2N}$  a  $\alpha_{RN}$ , a také tloušťka lopatky v tomto řezu  $t_{d2N}$ . Další způsob, jakým je možno tyto úhly zjistit, je příkaz Rhina \_ Angle.

Úsečka  $O_{IR}O_{KR}$  je částí osy rotoru (osy  $x$ ) takovou, že  $x_{O_{IR}} = x_{I_R}$  a  $x_{O_{KR}} = x_{K_R}$ .

### Tloušťka lopatky

Již bylo popsáno, jak byla z původního modelu zjištěna tloušťka rotorových lopatek  $t_{d2N}$  na průměru  $d_{R2}$ . Tloušťka stěny  $t_{d1}$  na průměru  $d_{R1}$  byla určena z průniků ploch lopatky s válcovou plochou  $\pi_{d1}$ , jejíž průměr je roven  $d_{R1}$  (obrázek 2.18). Tyto průniky jsou křivky  $k_{D1}$  a  $k_{D2}$ , jejichž střední vzdálenost je  $t_{D1N} = 2.585$  mm.



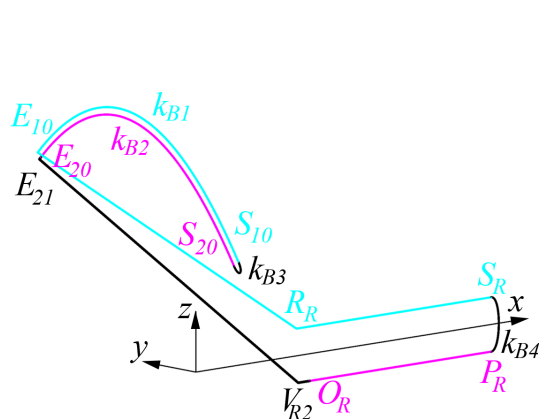
Obrázek 2.18: Zjištění tloušťky  $t_{d1}$

## 2.2.2 Matematický model

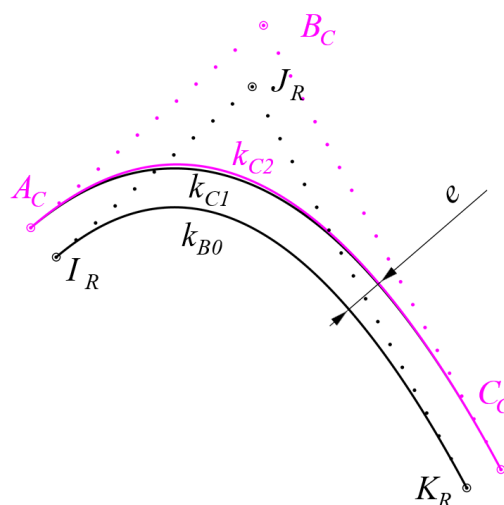
Model lopatkových ploch rotoru vychází ze střední plochy popsané v předchozím odstavci. Hraniční křivky plochy lopatky budou ekvidistantní křivky  $k_{B1}$ ,  $k_{B2}$  ke křivce  $k_{B3}$  v rovině  $\rho_B$  a rovnoběžky s úsečkou  $O_{IR}O_{KR}$  v rovině  $xz$  (viz obrázek 2.19).

### Ekvidistantní křivka

K vytvoření ekvidistantní křivky nebyl použit příkaz Rhina *\_Offset*, neboť jeho výsledkem je křivka určená velkým množstvím řídicích bodů, která aproximuje ekvidistantní křivku. Zde byla ekvidistantní křivka k Bézierově křivce druhého stupně aproximována křivkou s ekvidistantním řídicím polygonem. Tvarová úchylka takto aproximované ekvidistantní křivky byla zjištěna následujícím způsobem.



Obrázek 2.19: Hraniční křivky ploch rotorových lopatek



Obrázek 2.20: Aproximace ekvidistantní křivky

Numericky vypočítaná ekvidistanta byla získána aplikací příkazu Rhina *\_Offset*. Protože Rhino umožňuje získat ekvidistantní křivku v uživatelem zadané toleranci, lze takto získanou křivku považovat za „přesnou“. Na obrázku 2.20 je křivka  $k_{B0}$ , k níž byla hledána ekvidistanta. Křivka  $k_{C1}$  je k ní ekvidistantní („přesná“) ve vzdálenosti  $e$  a křivka  $k_{C2}C$  má ekvidistantní řídicí polygon od řídicího polygonu křivky  $k_{B0}$ .

Je-li  $\delta_{C12}$  maximální tvarová úchylka křivek  $k_{C1}$  a  $k_{C2}$ , lze určit relativní vzdálenost  $e_R$  křivek  $k_{B0}$  a  $k_{C1}$

$$e_R = \frac{e}{|I_R K_R|}. \quad (2.7)$$

Relativní tvarová úchylka  $\delta_{C12}$  je potom

$$\delta_{C12R} = \frac{\delta_{C12}}{|I_R K_R|}. \quad (2.8)$$

Závislost odchylek  $\delta_{BC}$  a  $\delta_{BCR}$  na vzdálenosti  $e_{CR}$  ukazuje tabulka 2.5.

Tabulka 2.5: Analýza přesnosti aproximace ekvidistantní křivky

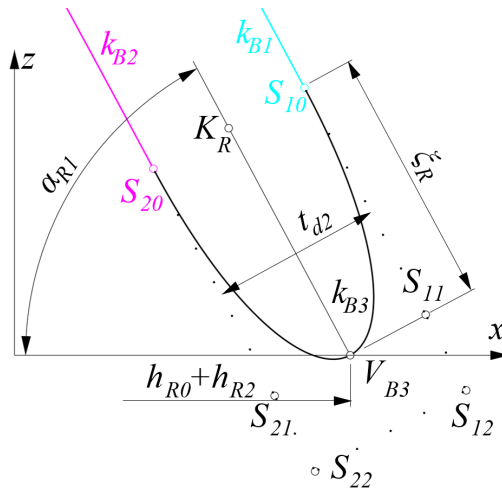
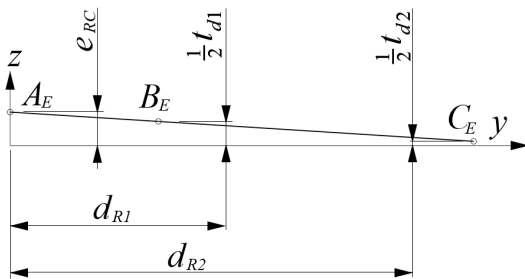
$e_{CR}$ [%]	0.5	1	2	5	10
$\delta_{BC}$ [mm]	0.044	0.051	0.065	0.109	0.186
$\delta_{BCR}$ [%]	0.2	0.01	0.035	0.23	0.24

Vzhledem k tomu, že tloušťka stěny  $t_{D2N} = 0.45$  mm (vzdálenost křivek tím pádem poloviční), je možno přijmout tuto aproximaci za dostatečně přesnou.

### Tloušťka lopatky

Z uživatelem zadaných parametrů  $t_{d0}$  a  $t_{d2}$  byla dopočítána vzdálenost  $e_{RC}$  rovnoběžek s úsečkou  $O_{IR}O_{KR}$  v rovině  $xz$ . Z obrázku 2.21 plyne

$$e_{RC} = \frac{1}{2}t_{d2} + \frac{1}{2} \frac{(t_{d0} - t_{d2})}{d_{R0}} \cdot \frac{1}{2}d_{R2}. \quad (2.9)$$



Obrázek 2.21: Lineární přepočítání tloušťky

Obrázek 2.22: Tvořící křivka plochy náběžné hrany  $k_{B3}$



## Hraniční křivky náběžné hrany

Náběžná hrana je v původním modelu, jak vyplynulo z analýzy, napojena na plochu lopatky s  $G^1$  spojitostí. Protože plochy lopatek budou modelovány jako přímkové přechodové plochy, stačí pro  $G^1$  spojitost ploch  $G^1$  spojitě hraniční křivky [4], což je podle vlastností uvedených v kapitole 1 právě tehdy, když navazující ramena řídicích polygonů navazujících křivek leží na společné přímce. Jako hraniční křivky pro náběžnou hranu byly zvoleny Bézierovy křivky třetího stupně.

**Hraniční křivka  $k_{B3}$  v rovině  $\rho_B$**  je vidět na obrázku 2.22 včetně řídicího polygonu  $S_{10}S_{12}S_{22}S_{20}$ . Směry jednotlivých ramen jsou dány úhlem  $\alpha_{R1}$ , délky jsou dány jako

$$|S_{10}S_{20}| = |S_{11}S_{21}| = |S_{12}S_{22}| = t_{d2}, \quad (2.10)$$

$$|S_{10}S_{12}| = |S_{20}S_{22}| = k_{th} \cdot t_{d2}, \quad (2.11)$$

kde  $k_{th}$  je uživatelem volený parametr. Bylo zvoleno  $k_{thN} = 2$ . Střed (který vzhledem k symetrickému řídicímu polygonu odpovídá hodnotě parametru  $t = \frac{1}{2}$ ) křivky leží na ose x. Pro Bézierovu křivku třetího stupně s takto uspořádanými řídicími body plyne z de Casteljau algoritmu [4]

$$\xi_R = |V_{B3}K_R| = \frac{3}{4}|S_{10}S_{11}| = \frac{3}{4}k_{th} \cdot t_{d2}. \quad (2.12)$$

**Hraniční křivka  $k_{B4}$  v rovině  $xz$**  je potom na obrázku 2.24. Platí obdobně jako v (2.10), (2.11) a (2.12)

$$|E_3E_4| = 2e_{RC}, \quad (2.13)$$

$$|S_RE_3| = |P_RE_4| = k_{th} \cdot t_{d2} \quad (2.14)$$

$$|V_{B4}O_{KR}| = \frac{3}{4}|S_RE_3| = \frac{3}{4}k_{th} \cdot t_{d2}. \quad (2.15)$$

Souřadnice bodů na obrázcích 2.22 a 2.24 byly popsány a vypočítány v tabulce 2.6. Rovnice křivek  $k_{B3}$  a  $k_{B4}$  byly odvozeny analogicky jako (2.3) a jsou uvedeny v tabulce 2.7.

## Hraniční křivky a úsečky ploch rotorových lopatek

**Hraniční křivky  $k_{B1}$  a  $k_{B2}$  v rovině  $\rho_B$**  jsou ekvidistantní ke křivce  $k_{B0}$  a byly modelovány jako Bézierovy křivky druhého stupně s ekvidistantními řídicími polygony vzhledem k řídicímu polygonu křivky  $k_{B0}$ . Z obrázku 2.23 plyne analytická reprezentace bodů znázorněná v tabulce 2.6. Pro přehlednější zápis bodu  $J_R$  do tabulky bylo nejprve vyjádřeno:

$$K_R J_R : z = -\tan \alpha_{R1} \cdot x + (z_{K_R} + \tan \alpha_{R1} \cdot x_{K_R}) = A_{K_R} \cdot z + B_{K_R} \quad (2.16)$$

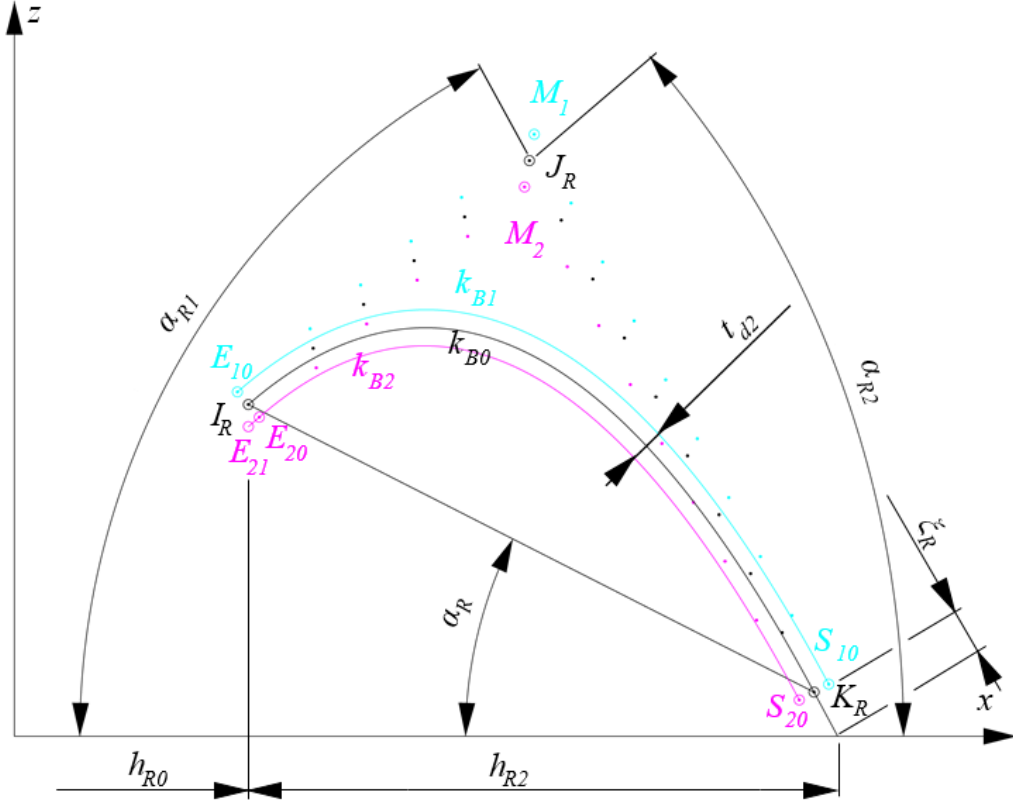
$$I_R J_R : z = \tan \alpha_{R2} \cdot x + (z_{I_R} - \tan \alpha_{R1} \cdot x_{I_R}) = A_{I_R} \cdot z + B_{I_R}, \quad (2.17)$$

přičemž souřadnice bodů  $M_1$  a  $M_2$  na základě souřadnic bodů  $E_{10}$ ,  $S_{10}$  (resp  $E_{20}$ ,  $S_{20}$ ) a úhlů  $\alpha_{R1}$  a  $\alpha_{R2}$  byly vypočteny pomocí koeficientů  $A_{E_{10}}$ ,  $B_{E_{10}}$  (resp  $A_{E_{20}}$ ,  $B_{E_{20}}$ ) obdobným postupem. Křivka  $k_{B2}$  byla navíc z bodu  $E_{20}$  prodloužena v tangenciálním směru do bodu  $E_{21}$ , pro který platí  $x_{E_{21}} = h_{R0}$ .

Rovnice křivek  $k_{B1}$ ,  $k_{B2}$  byly odvozeny analogicky jako (2.3) a jsou uvedeny v tabulce 2.7 spolu s rovnicí úsečky  $E_{20}E_{21}$ .

**Hraniční úsečky v rovině  $xz$** , jak vyplynulo z analýzy, jsou rovnoběžné s osou  $x$  a leží v rovině  $xz$  ve vzdálenosti  $e_{RC}$  od osy  $x$  (viz obrázek 2.19). Bylo určeno, že dvojice bodů  $R_R E_{10}$ ,  $Z_R M_1$ ,  $S_R S_{10}$ ,  $P_R S_{20}$ ,  $W_R M_2$ ,  $O_R E_{20}$  budou mít stejnou souřadnici  $x$ . Souřadnice  $y$  všech bodů je rovna nule a další souřadnice  $x$  a  $z$  plynou z obrázku 2.25. Souřadnice bodů jsou zapsány v tabulce 2.6.

Pro další využití byly popsány i úsečky  $R_R E_{10}$  a  $V_{R2} E_{21}$  (také viz tabulka 2.7).



Obrázek 2.23: Hraniční křivky  $k_{B1}$  a  $k_{B2}$

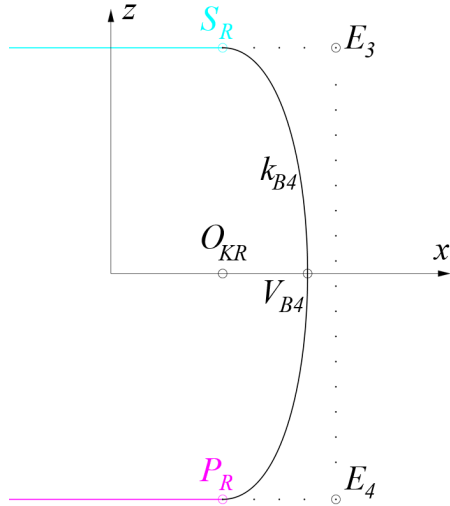
### 2.2.3 Plochy rotorových lopatek

Reprezentace ploch rotorových lopatek je představována dohromady čtyřmi přímkovými přechodovými plochami. Jak plyne z (1.8) a (1.9), rovnice jednotlivých ploch se budou lišit jen sítí řídicích bodů a vektorem bázových funkcí  $\mathbf{B}_n(v)$ . Pokud jsou hraniční křivky plochy  $\pi_i$  (s řídicí sítí  $\mathbf{M}_{\pi_i}$ ) nejvýše prvního stupně, je rovnice takové plochy

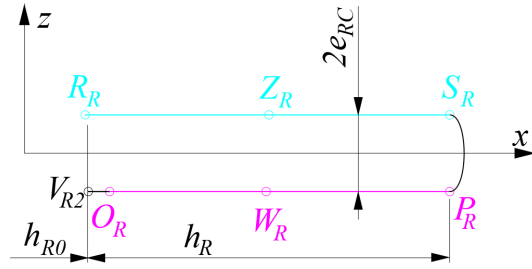
$$\pi_{B_i} : \mathbf{S}_{\pi_i} = (1 - u, u) \cdot \mathbf{M}_{\pi} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix}, (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (2.18)$$

pro hraniční křivky nejvýše druhého stupně

$$\pi_{B_i} : \mathbf{S}_{\pi_i} = (1 - u, u) \cdot \mathbf{M}_{\pi} \cdot \begin{pmatrix} (1 - v)^2 \\ 2v(1 - v) \\ v^2 \end{pmatrix}, (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (2.19)$$



Obrázek 2.24: Tvořící křivka plochy ná-  
běžné hrany  $k_{B4}$



Obrázek 2.25: Hraniční úsečky  $R_R S_R$ ,  
 $V_{R2} O_R$  a  $O_R P_R$

a pro hraniční křivky nejvýše třetího stupně

$$\pi_{B_i} : \mathbf{S}_{\pi_i} = (1 - u, u) \cdot \mathbf{M}_{\pi} \cdot \begin{pmatrix} (1 - v)^3 \\ 3v(1 - v)^2 \\ 3v^2(1 - v) \\ v^3 \end{pmatrix}, (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (2.20)$$

Pro plochu  $\pi_{B1}$  platí

$$\mathbf{M}_{\pi_{B1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{10} & \mathbf{M}_1 & \mathbf{E}_{10} \\ \mathbf{R}_R & \mathbf{Z}_R & \mathbf{S}_R \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

a po dosazení (2.21) do rovnice (2.19)

$$\pi_{B1} : \mathbf{S}_{\pi_{B1}} = (1 - u, u) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{10} & \mathbf{M}_1 & \mathbf{E}_{10} \\ \mathbf{R}_R & \mathbf{Z}_R & \mathbf{S}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1 - v)^3 \\ 3v(1 - v)^2 \\ 3v^2(1 - v) \\ v^3 \end{pmatrix}, (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (2.22)$$

Po dosazení číselných souřadnic bodů z tabulky 2.6 vyjde

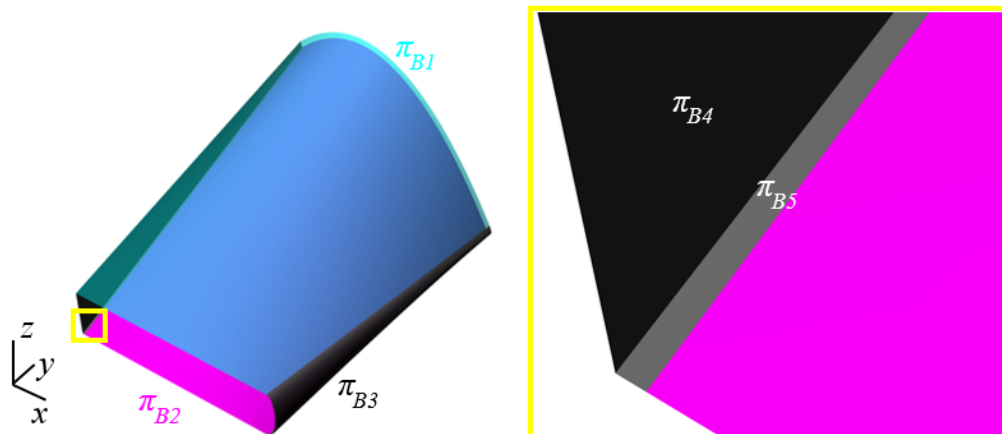
$$\pi_{B1} : \mathbf{S}_{\pi_{B1}} = (-0.554uv^2 + 0.417v^2 + 35.322uv - 17.661u - 18.071v + 36.514, \\ 50uv - 25u + 25, 24, 366uv^2 - 24.366v^2 - 50.372uv + 1.094u + 33.764v + 0.701), \\ (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (2.23)$$

Rovnice všech ploch v tabulce 2.8 po dosazení by zabraly několik stránek, proto nejsou uvedeny. Z tabulky je však vidět, jak je možné tyto rovnice odvodit.

Plocha, která by vznikla sjednocením všech ploch z tabulky 2.8, byla nazvána  $\pi_B$  a je na obrázku 2.26.

## 2.3 Dokončení rotoru

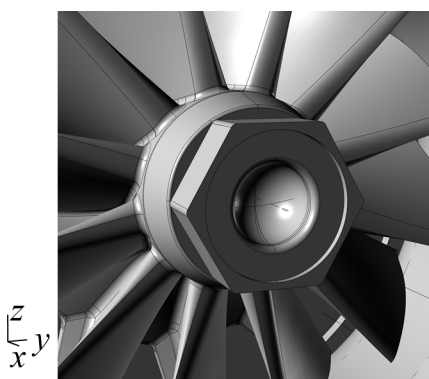
Popsané plochy ohraničující plochu lopatkového kanálu a rotorové lopatky bylo potřeba oříznout, okopírovat kruhovým polem a dále dodělat střed rotoru.



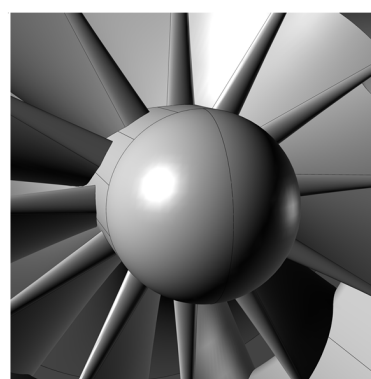
Obrázek 2.26: Plochy rotorové lopatky

### 2.3.1 Střed rotoru

V původním modelu je hřídel rotoru zakončen komplikovanou tvarovou plochou (obrázek 2.27). Tato plocha nemá velký význam na proudění v rotoru a proto nemá smysl tuto plochu přesným způsobem aproximovat. Na místo této plochy byla v novém modelu umístěna polovina kulové plochy o průměru  $d_{R0}$ . Nový střed rotoru je na obrázku 2.28.



Obrázek 2.27: Střed rotoru původního modelu



Obrázek 2.28: Střed rotoru nového modelu

### 2.3.2 Oříznutí ploch

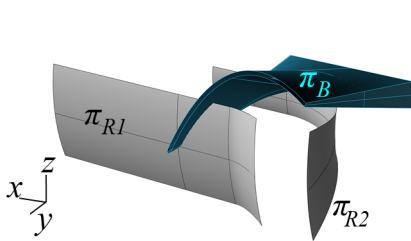
Výpočet oříznutí ploch je úloha přesahující svým rozsahem a náročností obsah této práce i náplň bakalářského studia. Proto je tato část výpočtu provedena pouze v Rhinu.

#### Tvorba pomocných ploch

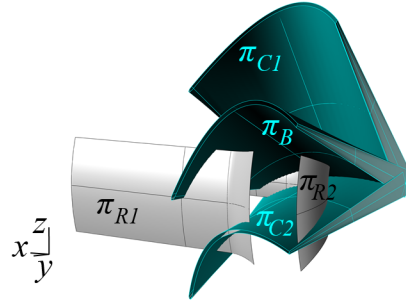
Na obrázku 2.29 jsou plochy, které byly dosud vytvořeny, tedy plochy ohraničující lopatkový kanál ( $\pi_{R1}$  a  $\pi_{R2}$ ) a plocha rotorové lopatky  $\pi_B$ . Je vidět, že tyto plochy se navzájem neořezou dostatečně. Aby k tomuto dostatečnému ořezání došlo, byly

použity pomocné plochy  $\pi_{C1}$  a  $\pi_{C2}$  (viz následující odstavec) a  $\pi_{RCut}$  (viz obrázek 2.8 na str. 14 a obrázek 2.32).

Plochy  $\pi_{C1}$  a  $\pi_{C2}$  jsou zobrazeny na obrázku 2.30. Vznikly otočením plochy  $\pi_B$  o úhel  $\pm \frac{2\pi}{n_R}$  odpovídající rozteči mezi dvěma rotorovými lopatkami.



Obrázek 2.29: Rotorové plochy k ořezání



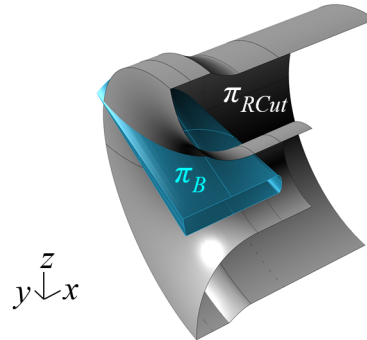
Obrázek 2.30: Pomocné plochy  $\pi_{C1}$  a  $\pi_{C2}$

### Oříznutí lopatkového kanálu

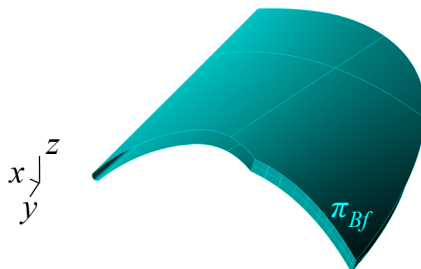
Plochy  $\pi_{R1}$  a  $\pi_{R2}$  byly oříznuty pomocí ploch  $\pi_B$ ,  $\pi_{C1}$  a  $\pi_{C2}$ . Oříznuté plochy  $\pi_{R1f}$  a  $\pi_{R2f}$  jsou na obrázku 2.31.



Obrázek 2.31: Oříznuté plochy  $\pi_{R1f}$  a  $\pi_{R2f}$



Obrázek 2.32: Pomocná plocha  $\pi_{RCut}$



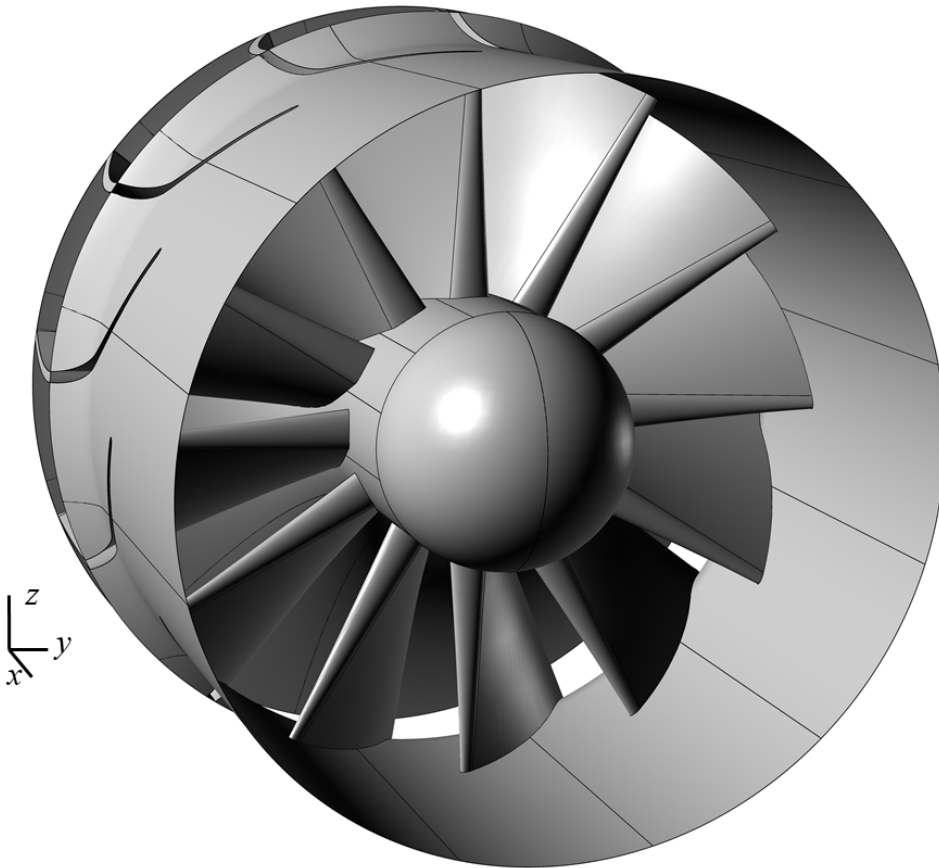
Obrázek 2.33: Hotová plocha rotorové lopatky

### Oříznutí lopatky

Plocha  $\pi_B$  byla ořezána plochou  $\pi_{RCut}$  (plochy jsou na obrázku 2.32). Tuto oříznutou lopatku bylo třeba ze strany směřující ke statoru uzavřít. Proto byly nalezeny křivky odpovídající hranám této plochy, vhodné z těchto křivek byly spojeny a mezi nimi byla vytvořena přímková přechodová plocha. Tato plocha byla posléze sjednocena s plochou  $\pi_B$  a nepoužité hraniční křivky byly smazány. Hotová ořezaná lopatka  $\pi_{Bf}$  je na obrázku 2.33.

### 2.3.3 Kruhové pole rotoru

Na závěr byly oříznuté plochy lopatky a lopatkového kanálu  $n_R$ -krát zkopírovány kruhovým polem. Kruhové pole bylo aplikováno i na oddělené části ploch  $\pi_{R1f}$  a  $\pi_{R2f}$  (na obrázku 2.31 označeny fialově). Celý rotor po použití kruhového pole je na obrázku 2.34.



Obrázek 2.34: Náhradní model rotoru

Tabulka 2.6: Matematický popis bodů hraničních křivek lopatek

bod	analytické souřadnice			číselné souřadnice
$E_{10}$	$(x_{I_R} - \frac{1}{2}t_{d2} \sin \alpha_{R2},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$z_{I_R} + \frac{1}{2}t_{d2} \cos \alpha_{R2})$	(18.625, 25 10.099)
$E_{20}$	$(x_{I_R} + \frac{1}{2}t_{d2} \sin \alpha_{R2},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$z_{I_R} - \frac{1}{2}t_{d2} \cos \alpha_{R2})$	(19.147, 25, 9.759)
$E_{21}$	$(h_{R0},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$z_{I_R} - \frac{t_{d2}}{2 \cos \alpha_{R2}})$	(19, 25, 9.631)
$E_3$	$(h_{R0} + h_{R2} + \frac{1}{4}k_{th}t_{d2},$	0,	$e_{RC})$	(36.689, 0, -1.795)
$E_4$	$(h_{R0} + h_{R2} + \frac{1}{4}k_{th}t_{d2},$	0,	$-e_{RC})$	(36.859, 0, 1.795)
$I_R$	$(h_{R0},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$\xi_R \sin \alpha_{R1} + h_{R2} \tan \alpha_R)$	(19, 25, 9.929)
$J_R$	$\frac{B_{K_R} - B_{I_R}}{A_{I_R} - A_{K_R}},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$A_{I_R}x_{J_R} + B_{I_R})$	(27.409, 25, 17.228)
$K_R$	$(h_{R0} + h_{R2} - \xi_R \cos \alpha_{R1},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$\xi_R \sin \alpha_{R1})$	(36.315, 25, 0.595)
$M_1$	$\frac{B_{E_{10}} - B_{S_{10}}}{A_{E_{10}} - A_{S_{10}}},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$A_{E_{10}}x_{M_1} + B_{E_{10}})$	(27.475, 25, 17.853)
$M_2$	$\frac{B_{E_{20}} - B_{S_{20}}}{A_{E_{20}} - A_{S_{20}}},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$A_{E_{20}}x_{M_2} + B_{E_{20}})$	(27.344, 25, 16.874)
$O_R$	$(x_{E_{20}}$	0,	$-e_{RC})$	(19.147, 0, 1.795)
$P_R$	$(h_{R0} + h_{R2} - \frac{3}{4}k_{th}t_{d2},$	0,	$-e_{RC})$	(35.959, 0, -1.795)
$R_R$	$(x_{E_{10}}$	0,	$e_{RC})$	(18.853, 0, 1.795)
$S_{10}$	$(x_{K_R} + \frac{1}{2}t_{d2} \sin \alpha_{R1},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$z_{K_R} + \frac{1}{2}t_{d2} \cos \alpha_{R1})$	(36.514, 25, 0.701)
$S_{11}$	$(x_{V_{B3}} + \frac{1}{2}t_{d2} \sin \alpha_{R1},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$z_{V_{B3}} + \frac{1}{2}t_{d2} \cos \alpha_{R1})$	(36.832, 25, 0.106)
$S_{12}$	$(x_{S_{11}} + \frac{1}{4}k_{th}t_{d2} \cos \alpha_{R1},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$z_{S_{11}} + \frac{1}{4}k_{th}t_{d2} \sin \alpha_{R1})$	(36.939, 25, -0.092)
$S_{20}$	$(x_{K_R} - \frac{1}{2}t_{d2} \sin \alpha_{R1},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$z_{K_R} - \frac{1}{2}t_{d2} \cos \alpha_{R1})$	(36.117, 25, 0.489)
$S_{21}$	$(x_{V_{B3}} - \frac{1}{2}t_{d2} \sin \alpha_{R1},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$z_{V_{B3}} - \frac{1}{2}t_{d2} \cos \alpha_{R1})$	(36.436, 25, -0.106)
$S_{22}$	$(x_{S_{21}} + \frac{1}{4}k_{th}t_{d2} \cos \alpha_{R1},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	$z_{S_{21}} + \frac{1}{4}k_{th}t_{d2} \sin \alpha_{R1})$	(36.542, 25, -0.305)
$S_R$	$(h_{R0} + h_{R2} - \frac{3}{4}k_{th}t_{d2},$	0,	$e_{RC})$	(36.959, 25, 1.795)
$V_{B3}$	$(h_{R0} + h_{R2},$	$\frac{1}{2}d_{R2},$	0)	(36.634, 25, 0)
$V_{R1}$	$(h_{R0}$	0,	$e_{RC})$	(19, 0, 1.795)
$V_{R2}$	$(h_{R0}$	0,	$-e_{RC})$	(19, 0, -1.795)
$W_R$	$(x_{M_2}$	0,	$-e_{RC})$	(27.344, 0, -1.795)
$Z_R$	$(x_{M_1}$	0,	$e_{RC})$	(19.683, 0, 1.795)

Tabulka 2.7: Matematický popis hraničních křivek lopatek

křivka	analytická rovnice číselné souřadnice
$E_{20}E_{21}$	$E_{20}E_{21} : \mathbf{P}_{E_{12}}(t) = \mathbf{E}_{20} + t \cdot (\mathbf{E}_{21} - \mathbf{E}_{20}), t \in [0, 1]$ (-5.878t + 36.634, 8, 0)
$k_{B1}$	$\mathbf{K}_{B1}(t) = (1-t)^2 \cdot \mathbf{S}_{10} + 2t(1-t) \cdot \mathbf{M}_1 + t^2 \cdot \mathbf{E}_{10}, t \in [0, 1]$ (0.417t <sup>2</sup> - 18.078t + 36.514, 25, -24.366t <sup>2</sup> + 33.764t + 0.7013)
$k_{B2}$	$\mathbf{K}_{B2}(t) = (1-t)^2 \cdot \mathbf{S}_{20} + 2t(1-t) \cdot \mathbf{M}_2 + t^2 \cdot \mathbf{E}_{20}, t \in [0, 1]$ (0.576t <sup>2</sup> - 17.546t + 36.117, 25, -23.5t <sup>2</sup> + 32.770t + 0.4889)
$k_{B3}$	$(1-t)^3 \mathbf{S}_{10} + 3t(1-t)^2 \mathbf{S}_{12} + 3t^2(1-t) \mathbf{S}_{22} + t^3 \mathbf{S}_{20}, t \in [0, 1]$ (0.793t <sup>3</sup> - 2.465t <sup>2</sup> + 1.274t + 36.514, 25, 0.425t <sup>3</sup> + 1.743t <sup>2</sup> - 2.380t + 0.701)
$k_{B4}$	$(1-t)^3 \mathbf{S}_R + 3t(1-t)^2 \mathbf{E}_3 + 3t^2(1-t) \mathbf{E}_4 + t^3 \mathbf{P}_R, t \in [0, 1]$ (-2.7t <sup>2</sup> + 2.7t + 35.959, 0, 7.179t <sup>3</sup> - 10.769t <sup>2</sup> + 1.795)
$O_R P_R$	$O_R P_R : \mathbf{K}_{OP}(t) = \mathbf{O}_R + t \cdot (\mathbf{P}_R - \mathbf{O}_R), t \in [0, 1]$ (-16.812t + 19.147, 0, -1.795)
$O_R V_{R2}$	$O_R V_{R2} : \mathbf{K}_{OVR2}(t) = \mathbf{O}_R + t \cdot (\mathbf{V}_{R2} - \mathbf{O}_R), t \in [0, 1]$ (-0.147t + 19.147, 0, -1.795)
$S_R R_R$	$S_R R_R : \mathbf{K}_{SR}(t) = \mathbf{S}_R + t \cdot (\mathbf{R}_R - \mathbf{S}_R), t \in [0, 1]$ (-17.106t + 35.959, 0, 1.795)

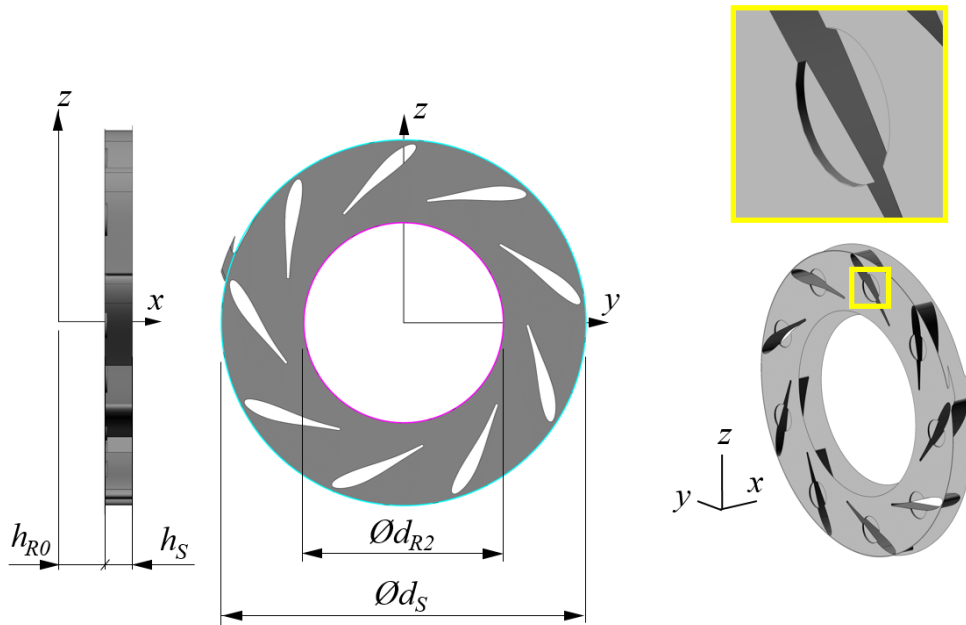
Tabulka 2.8: Matematický popis ploch rotorových lopatek

plocha $i$	hraniční křivky	řídící síť $\mathbf{M}_i$	analytická rovnice
$\pi_{B1}$	$k_{B1}, R_R S_R$	$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{10} & \mathbf{M}_1 & \mathbf{E}_{10} \\ \mathbf{R}_R & \mathbf{Z}_R & \mathbf{S}_R \end{pmatrix}$	2.19
$\pi_{B2}$	$k_{B2}, P_R O_R$	$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{20} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{E}_{20} \\ \mathbf{P}_R & \mathbf{W}_R & \mathbf{O}_R \end{pmatrix}$	2.19
$\pi_{B3}$	$k_{B3}, k_{B4}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{10} & \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{20} \\ \mathbf{S}_R & \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_4 & \mathbf{P}_R \end{pmatrix}$	2.20
$\pi_{B4}$	$R_R E_{20}, V_{R2} E_{11}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_R & \mathbf{E}_{20} \\ \mathbf{V}_{R2} & \mathbf{E}_{11} \end{pmatrix}$	2.18
$\pi_{B5}$	$E_{10} E_{11}, O_R V_{R2}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} \\ \mathbf{O}_R & \mathbf{V}_{R2} \end{pmatrix}$	2.18

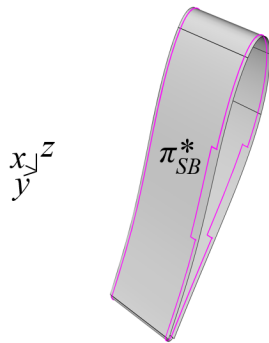


### 3. Model statoru

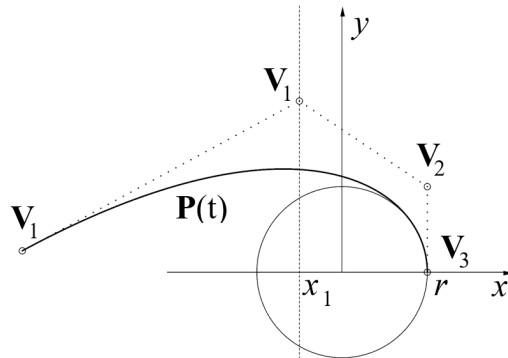
Statorová část turbíny je proti rotorové výrazně jednodušší. Celý stator původního modelu je na obrázku 3.1. Jedná se o lopátkové plochy ohraničené z obou stran ořezanou rovinnou plochou. Hned je vidět, že  $n_{SN} = 9$ .



Obrázek 3.1: Stator



Obrázek 3.2: Statorová lopatka



Obrázek 3.3: Křivka s předepsanou křivostí

#### 3.1 Plochy statorových lopatek

Statorové lopatky jsou tvořeny spojením více různých ploch. Na první pohled je vidět (lze to též vyčíst z analýzy ploch, je-li použit příkaz `_List`), že se jedná o tzv. translační plochy, tj. které vznikly posunutím uzavřené tvořící křivky ve směru kolmém na rovinu křivky (v tomto případě směr osy  $x$ ). Příkaz, pod kterým

se skrývá tento způsob vytvoření plochy, je ve většině programů (mj. Autodeskinventor [8] a SOLIDWORKS [9]) přeložen jako „vytáhnutí křivky“, proto je dále používáno toto označení.

Plochy lopatek byly ořezány hraničními plochami a také ovládacími prvky rotoru. Ovládací prvky jsou vidět ve žlutém detailu na obrázku 3.1. Na obrázku 3.2 je vidět plocha statorové lopatky  $\pi_{SB}^*$  po zrušení oříznutí, fialovou křivkou je ukázán tvar ořezané plochy.

Tvořící křivka pro nahrazení plochy statorové lopatky byla složena ze tří křivek, oblouku  $o_S$  a dvou Beziérových křivek šestého stupně  $k_{S1}$  a  $k_{S2}$ . Na jedné straně se křivky  $k_{S1}$  a  $k_{S2}$  tečně napojují na oblouk  $o_S$ , na druhé straně na sebe křivky navazují s uživatelem předepsanou křivostí.

### Řídící body křivky s předepsanou křivostí v koncovém bodě

Vlastnosti řídicího polygonu  $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$  Beziérovky křivky 3. stupně  $\mathbf{P}(t)$  s předepsanou křivostí v jejím koncovém bodě (na obrázku 3.3) byly odvozeny v [10]. Toto bude použito pro odvození souřadnic řídicích bodů křivek u náběžné hrany. Předepsaná první křivost  $1/r$  Bézierovy křivky v jejím koncovém bodě je dosažena, leží-li bod  $\mathbf{V}_1$  na rovnoběžce s vektorem  $\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2$  a je-li vzdálenost  $e_{X1}$  této rovnoběžky od bodu  $\mathbf{V}_3$

$$e_{X1} = r - \frac{1}{2}r \cdot (2 - 3a^2) = \frac{3}{2}a^2 \cdot r = k_{X1} \cdot r, \quad (3.1)$$

kde  $a \cdot r = |\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2|$ , pro další výpočty bylo zvoleno  $a = 1$  (tomu odpovídá i obrázek 3.3).

### Umístění statorové lopatky

Pro snadnost popisu byl stator otočen (příkazem Rhina `_Rotate`) tak, aby se střed oblouku odtokové hrany jedné lopatky nacházel na ose  $y$ . Řez plochy  $\pi_{SB}^*$  rovinou  $\rho_S$  (rovinou rovnoběžná s rovinou  $xy$  a procházející bodem  $(h_{R0}, 0, 0)$ ) takto natočené lopatky, který je shodný s tvořící křivkou, je vidět na obrázku 3.4. Odtud byly získány hodnoty  $e_{SN}$ ,  $l_{SN}$ ,  $R_{S1N}$ ,  $R_{S2N}$ ,  $\alpha_{SN}$ ,  $\alpha_{S1N}$ ,  $\alpha_{S2N}$  a  $\alpha_{S21N}$ . Analýzou tohoto řezu byly způsobem stejným jako u rotoru<sup>1</sup> odvozeny hodnoty koeficientů  $k_{ISN}$ ,  $k_{JSN}$ ,  $k_{KyN}$ ,  $k_{KzN}$ ,  $k_{LyN}$ ,  $k_{LzN}$ ,  $k_{MN}$ ,  $k_{NyN}$ ,  $k_{NzN}$ ,  $k_{PN}$ ,  $k_{WyN}$ ,  $k_{WzN}$  řídicích bodů křivek  $k_{S1}$  a  $k_{S2}$ .

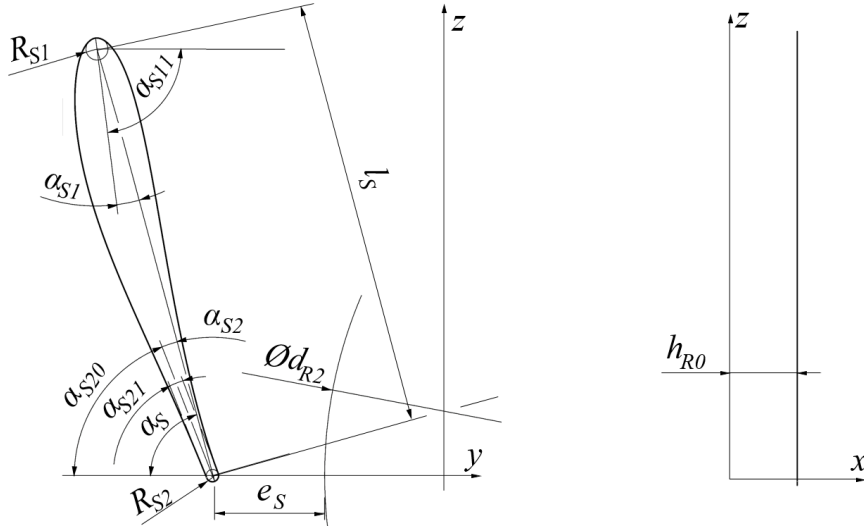
### Tvořící křivky statorové lopatky

Poloha řídicích bodů křivek  $k_{S1}$  a  $k_{S2}$  je vidět z obrázků 3.4 a 3.5. Detail křivek u náběžné hrany je navíc na obrázku 3.6 a detail křivek a oblouku u odtokové hrany je na obrázku 3.7. Na tomto obrázku byl proti obrázkům 3.4 a 3.5 pro názornost zvětšen úhel  $\alpha_{S21}$ . Z těchto obrázků a z (3.1) až (3.10) plynou souřadnice bodů v tabulce 3.1.

$$\alpha_{S20} = \alpha_S - \alpha_{S2}, \alpha_{S11} = \alpha_S + \alpha_{S1}, \alpha_{S23} = \alpha_{S20} - \alpha_{S22}, \alpha_{S24} = \alpha_{S20} + \alpha_{S22} \quad (3.2)$$

$$L_{IAy} = y_{AS} - y_{IS}, L_{IAz} = z_{IS} - z_{AS}, \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>(2.1.2) na str. 11, tabulka 2.1 na str. 12, obrázek 2.6 na str. 11



Obrázek 3.4: Pozice a natočení tvořících křivek statorové lopatky

$$L_{JBz} = z_{J_S} - z_{B_S}, L_{JB_y} = y_{B_S} - y_{J_S} \quad (3.4)$$

$$L_{AP_y} = (1 - k_P) \cdot L_{IA_y}, L_{AP_z} = \tan(\alpha_{S20} + \alpha_{S22}) L_{AP_y} \quad (3.5)$$

$$L_{BM_y} = (1 - k_M) \cdot L_{JB_y}, L_{BM_z} = \tan(\alpha_{S20} - \alpha_{S22}) L_{BM_y} \quad (3.6)$$

$$A_{y_{IS}} = e_{X1} \cos \alpha_{S11} + k_I R_{S1} \sin \alpha_{S11} \quad (3.7)$$

$$A_{z_{IS}} = -e_{X1} \sin \alpha_{S11} + k_I R_{S1} \cos \alpha_{S11} \quad (3.8)$$

$$A_{y_{JS}} = e_{X1} \cos \alpha_{S11} - k_I R_{S1} \sin \alpha_{S11} \quad (3.9)$$

$$A_{z_{JS}} = -e_{X1} \sin \alpha_{S11} - k_I R_{S1} \cos \alpha_{S11} \quad (3.10)$$

Rovnice křivek  $k_{S1}$  a  $k_{S2}$  mohou být odvozeny stejným způsobem, jako např. rovnice křivky  $k_{B1}$  v tabulce 2.7 na str. 28 s tím rozdílem, že do (1.3) by bylo dosazeno  $n = 6$  (křivky  $k_{S1}$  a  $k_{S2}$  jsou šestého stupně). Z důvodu úspornosti textu rovnice těchto křivek nebudou uvedeny.

Matematický popis oblouku  $o_S$  ležícího rovinně  $\rho_S$  a středem  $\mathbf{C}_{S2}$  a poloměrem  $R_{S2}$  je dle (1.1)

$$o_S : \mathbf{P}_{oS}(t) = (h_{R0} y_{CS2} + \mathbf{R}_{S2} \sin t, z_{CS2} + \mathbf{R}_{S2} \cos t),$$

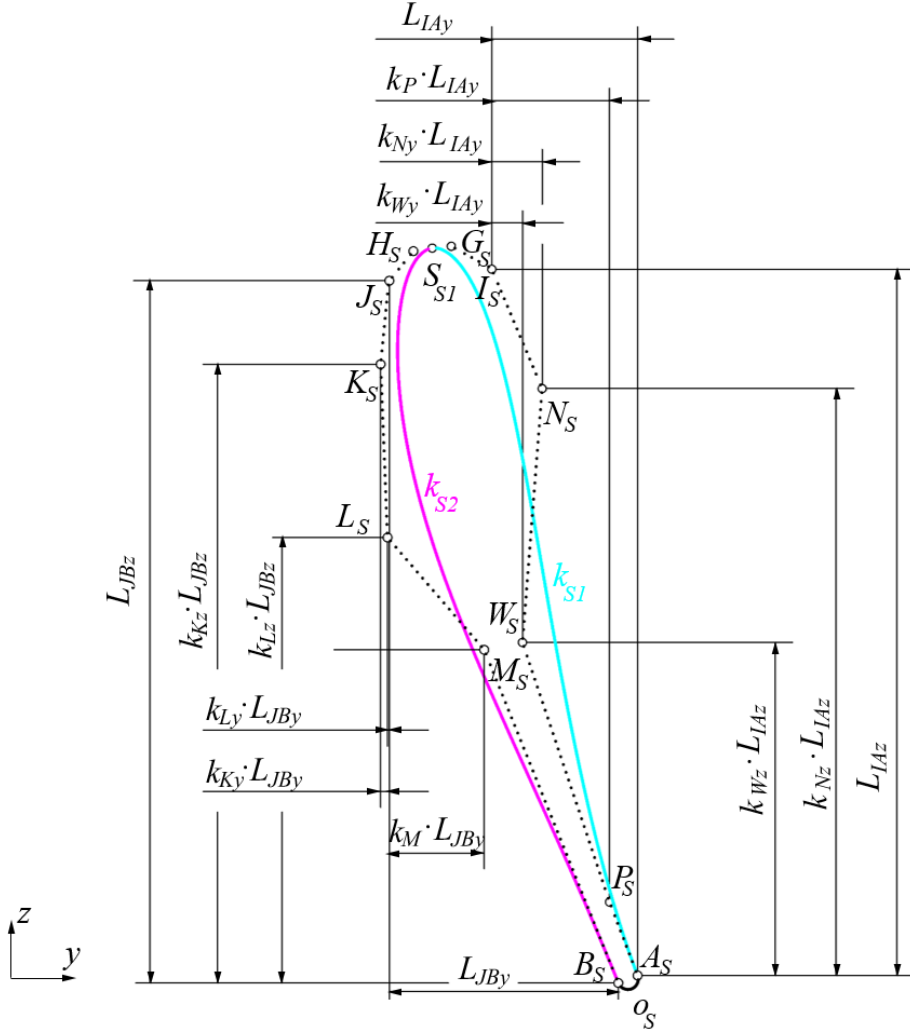
$$t \in [-\pi - \alpha_{S20} + \alpha_{S22}, \frac{1}{4}\pi \alpha_{S20} - \alpha_{S22}], \quad (3.11)$$

a po dosazení z tabulky 3.1

$$o_S : \mathbf{P}_{oS}(t) = (19, -31.323 + 0.337 \sin t, 0 + 0.337 \cos t),$$

$$t \in [-0.878\pi, 0.116\pi]. \quad (3.12)$$

Maximální tvarová úchylka nové plochy statorové lopatky od plochy z původního modelu je 0.052 mm, proto lze konstatovat, že statorová lopatka byla aproximována velmi věrně.



Obrázek 3.5: Pozice a natočení tvořících křivek statorové lopatky

### Statorové lopatky

Rovnice statorové lopatky je translační plocha, která vznikla vysunutím tří křivek ve směru osy  $x$  a skládá se tedy ze tří ploch. Rovnice translační plochy vytvořené vysunutím oblouku  $\mathbf{P}_{oS}(u)$ ,  $u \in [u_{min}, u_{max}]$ , je

$$\begin{aligned} \pi_{S3} : \mathbf{S}_{S3}(u, v) &= (h_{R0} + h_S v, -31.323 + 0.337 \sin u, 0 + 0.337 \cos u), \\ u &\in [-0.878\pi, 0.116\pi], v \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Rovnice zbylých dvou translačních ploch tvořících lopatku je možné odvodit obdobným způsobem.

## 3.2 Ohraničení statoru

Ohraničení rotoru se skládá ze dvou rovinných oříznutých ploch  $\pi_{S4}^*$  a  $\pi_{S5}^*$ , které jsou vidět na obrázku 3.8.

V plochách  $\pi_{S4}^*$  a  $\pi_{S5}^*$  byly vyříznuty díry pro statorové lopatky a do plochy  $\pi_{S4}^*$  ještě navíc otvory pro ovládací prvky lopatek. Vzhledem k zanedbání ovládacích prvků byly odpovídající plochy v náhradním modelu  $\pi_{S4}$  a  $\pi_{S5}$  modelovány

Tabulka 3.1: Matematický popis bodů statoru

bod	analytické souřadnice			číselné souřadnice		
$A_S$	$(h_{R0},$	$y_{C_{S2}} + R_{S2} \sin \alpha_{S23},$	$z_{C_{S2}} + R_{S2} \cos \alpha_{S23})$	(19,	-30.808	0.120)
$B_S$	$(h_{R0},$	$y_{C_{S2}} - R_{S2} \sin \alpha_{S24},$	$z_{C_{S2}} + R_{S2} \cos \alpha_{S24})$	(19,	-31.436	-0.126)
$C_{S1}$	$(h_{R0},$	$y_{S_{S1}} + R_{S1} \cos \alpha_{S11},$	$z_{C_{S1}} - R_{S1} \sin \alpha_{S11})$	(19,	-37.426	23.252)
$C_{S2}$	$(h_{R0},$	$y_{E_{S1}} + R_{S2} \sin \alpha_{S23},$	$0)$	(19,	-31.123	0)
$D_S$	$(h_{R0},$	$y_{C_{S2}} + R_{S2} \frac{\cos \alpha_{S20}}{\sin \alpha_{S22}},$	$z_{C_{S2}} - R_{S2} \frac{\sin \alpha_{S20}}{\sin \alpha_{S22}})$	(19,	-17.036	-35.957)
$E_{S1}$	$(h_{R0},$	$-\frac{1}{2}d_{R2} - e_S,$	$-R_{S2} \sin \alpha_{S20})$	(19,	-31	-0.314)
$G_S$	$(h_{R0},$	$y_{S_{S1}} + R_{S1} \cos \alpha_{S11},$	$z_{S_{S1}} + R_{S1} \sin \alpha_{S11})$	(19,	-36.904	23.923)
$H_S$	$(h_{R0},$	$y_{S_{S1}} - R_{S1} \cos \alpha_{S11},$	$z_{S_{S1}} - R_{S1} \sin \alpha_{S11})$	(19,	-38.094	23.772)
$I_S$	$(h_{R0},$	$y_{S_{S1}} + A_{yIS},$	$z_{S_{S1}} + A_{zIS})$	(19,	-35.568	23.185)
$J_S$	$(h_{R0},$	$y_{S_{S1}} + A_{yJS},$	$z_{S_{S1}} + A_{zJS})$	(19,	-38.914	22.760)
$K_S$	$(h_{R0},$	$y_{J_S} + k_{Ky}L_{JB_y},$	$z_{B_S} + k_{Kz}L_{JB_z})$	(19,	-39.180	20.060)
$L_S$	$(h_{R0},$	$y_{J_S} + k_{Ly}L_{JB_y},$	$z_{B_S} + k_{Lz}L_{JB_z})$	(19,	-38.955	14.407)
$M_S$	$(h_{R0},$	$y_{B_S} - L_{BM_y},$	$z_{B_S} + L_{BM_z})$	(19,	-35.803	10.742)
$N_S$	$(h_{R0},$	$y_{I_S} + k_{Ny}L_{IA_y},$	$z_{A_S} + k_{Nz}L_{IA_z})$	(19,	-33.916	19.264)
$P_S$	$(h_{R0},$	$y_{A_S} - L_{AP_y},$	$z_{A_S} + L_{AP_z})$	(19,	-31.717	2.502)
$S_{S1}$	$(h_{R0},$	$y_{E_{S1}} - l_S \cos \alpha_S,$	$z_{E_{S1}} + l_S \sin \alpha_S)$	(19,	-37.499	23.847)
$T_S$	$(h_{R0},$	$-R_S - e_{SD},$	$0)$	(19,	-48.327	0)
$U_S$	$(h_{R0} + h_S,$	$-\frac{1}{2}d_{R2},$	$0)$	(25.4,	-25	0)
$V_S$	$(h_{R0} + h_S,$	$-R_S - e_{SD},$	$0)$	(25.4,	-48.327	0)
$W_S$	$(h_{R0},$	$y_{I_S} + k_{Wy}L_{IA_y},$	$z_{A_S} + k_{Wz}L_{IA_z})$	(19,	-34.559	10.984)
$Z_S$	$(h_{R0},$	$-\frac{1}{2}d_{R2},$	$0)$	(19,	-25	0)

jako dvě stejná mezikruží ořezaná statorovými lopatkami, která jsou navzájem posunutá ve směru osy  $x$ .

### Body a tvořící křivky

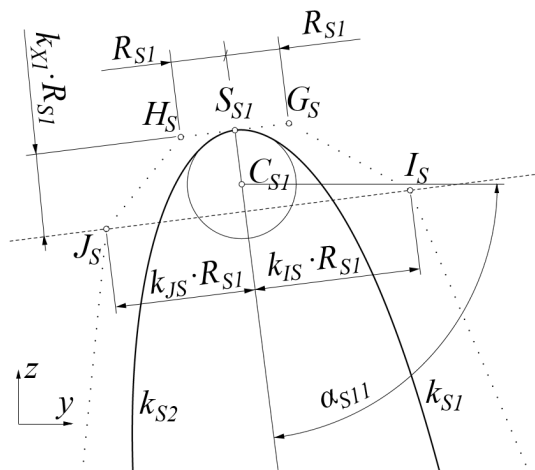
Mezikruží byla modelována jako rotační plochy, jejichž tvořící křivka je úsečka kolmá na osu rotace. Tyto úsečky jsou vidět na obrázku 3.9. Na tomto obrázku je zakótován rozměr

$$e_S = k_{RS} \cdot (R_S - \frac{1}{2}d_{R2}), \quad (3.14)$$

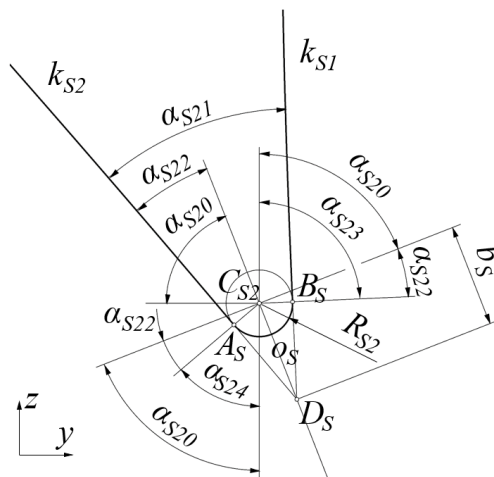
kde  $R_S$  je z kosinové věty

$$R_S = \sqrt{\left(\frac{1}{2}d_{R2} + e_S\right)^2 + l_S^2 + 2l_s \left(\frac{1}{2}d_{R2} + e_S\right) \cos(\pi - \alpha_S)} \quad (3.15)$$

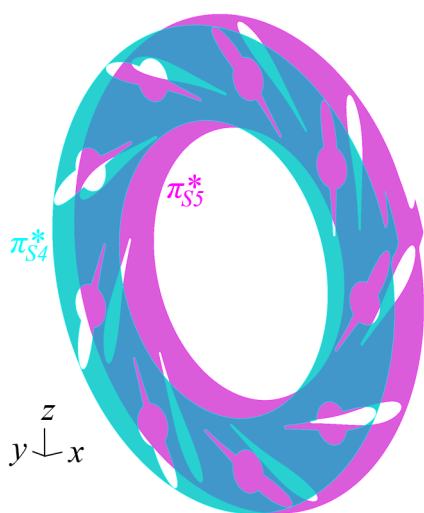
a  $k_{RS}$  je uživatelem volený parametr. Bylo zvoleno  $k_{RSN} = 0.2$ . Z tohoto obrázku vyplývají souřadnice bodů  $T_S$ ,  $U_S$ ,  $V_S$  a  $Z_S$  v tabulce 3.1.



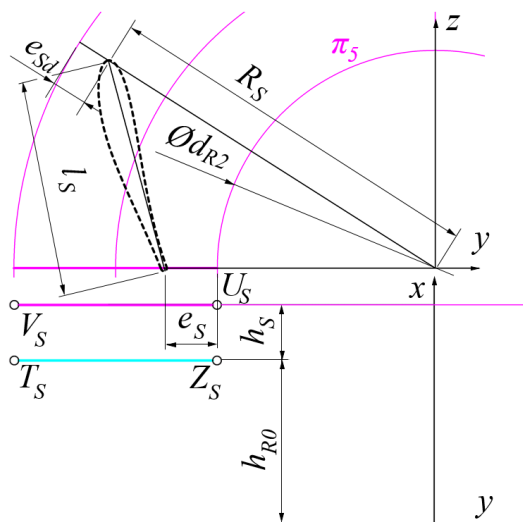
Obrázek 3.6: Tvořící křivky statorové lopatky na straně náběžné hrany



Obrázek 3.7: Tvořící křivky statorové lopatky na straně odtokové hrany



Obrázek 3.8: Hraniční plochy statoru



Obrázek 3.9: Tvořící úsečky ohraničení statoru

Rovnice úseček  $T_S U_S$  a  $V_S Z_S$  je možné odvodit stejným způsobem, jako rovnici úsečky  $A_R B_R^2$ .

### Plochy

Hraniční plochy statoru byly vytvořeny rotací úseček  $T_S U_S$  a  $V_S Z_S$  kolem osy  $x$ . Rovnice těchto ploch je obdobná s (2.5)<sup>3</sup>.

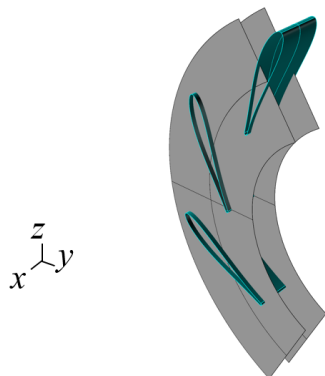
## 3.3 Dokončení statoru

Nakonec byly vytvořené prvky statoru ořezány a okopírovány kruhovým polem. Princip tohoto algoritmu je shodný s postupem použitým pro rotor (viz kapitola

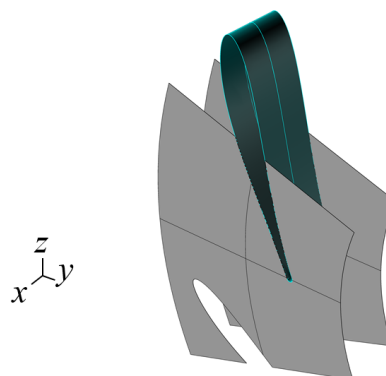
<sup>2</sup>viz tabulka 2.2 str. 13

<sup>3</sup>str. 13

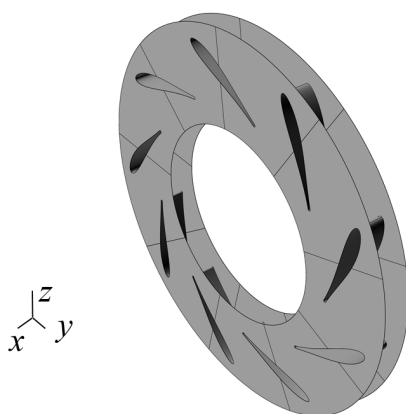
2.3), kde byl tento algoritmus podrobně popsán. Proto je zde uvedeno stručné shrnutí pro stator. Na obrázku 3.10 jsou vidět plochy lopatky i ohraničení připravené k ořezání a na obrázku 3.11 jsou již ořezané plochy připravené ke kopírování kruhovým polem. Hotový stator po aplikování kruhového pole je vidět na obrázku 3.12 a na obrázku 3.13 je kompletní náhradní model včetně rotoru.



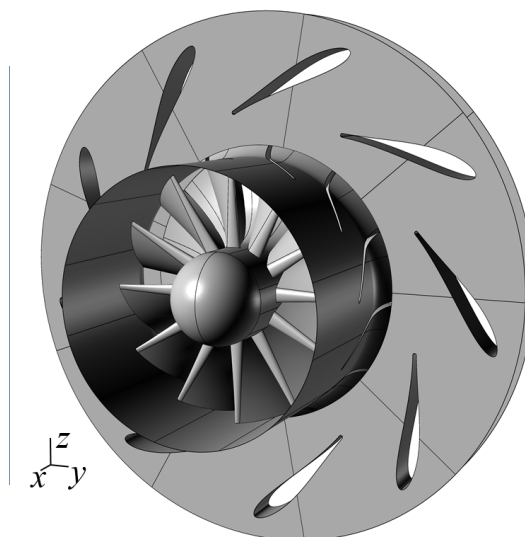
Obrázek 3.10: Plochy statoru připravené na ořezání



Obrázek 3.11: Ořezané plochy statoru



Obrázek 3.12: Náhradní model statoru



Obrázek 3.13: Náhradní model radiální turbíny

## 4. Porovnání původního a náhradního modelu

Následuje srovnání zadaného modelu s modelem vytvořeným skriptem, jsou-li do skriptu dosazeny hodnoty odpovídající původnímu modelu, tedy hodnoty uvedené v seznamu parametrů modelu na str. 40.

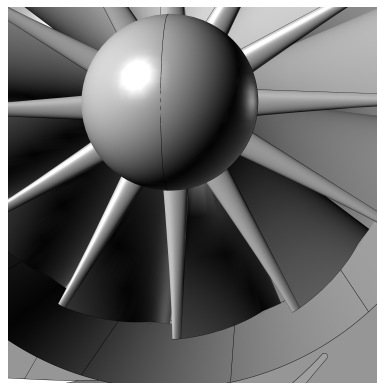
### Odlišnosti

Model vytvořený v rámci této práce byl od počátku koncipován jako zjednodušený, proto je také v některých místech odlišný:

- náhradní model nemá vstupní volutu (modelovat tuto plochu nebylo cílem práce) ani výstupní difuzor (viz obrázek 1 a obrázek 3.13),
- byly odstraněny ovládací prvky na statorových lopatkách (viz obrázek 3.1),
- původní model měl mezi rotorovými lopatkami a vnější stěnou rotoru malé mezery, nový model tyto mezery nemá (viz obrázky 4.1 a 4.2),
- aproximací původních ploch pomocí jednoduchých ploch došlo k odchylce nových ploch od ploch původních v řádu desetin mm.



Obrázek 4.1: Rotorové lopatky původního modelu



Obrázek 4.2: Rotorové lopatky náhradního modelu

### Zjednodušení

Plochy náhradního modelu jsou výrazně jednodušší, než plochy modelu původního. K ilustraci tohoto faktu slouží tabulka 4.1, která udává počet řídicích bodů ploch původních a náhradních lopatek. Je vidět, že i velmi složitým plochám se podařilo najít jednoduchou reprezentaci a zredukovat počet řídicích bodů.

### Ověření výpočtem

Na původním i novém modelu byl v rámci spolupráce na Ústavu technické matematiky vypočten průběh tlaku v turbíně v závislosti na poloze, což ukazují

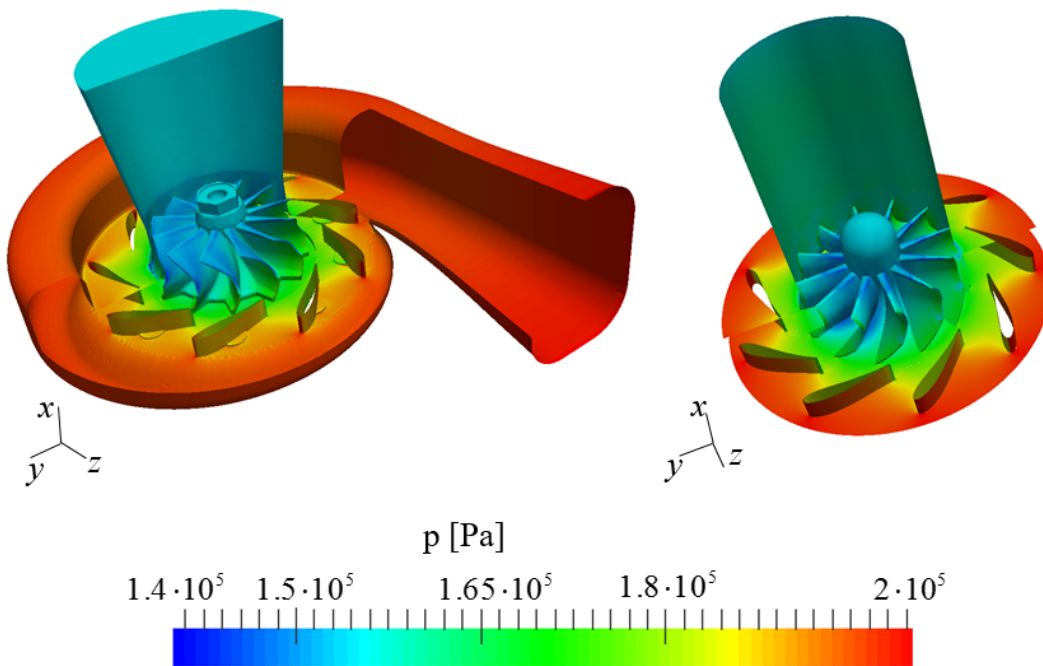


Tabulka 4.1: Porovnání složitosti původního a náhradního modelu

plocha (obr.)	počet řídicích bodů	
	původní plochy	náhradní plochy
$\pi_{B1}(2.9)$	$23 \times 6 = 138$	$3 \times 2 = 6$
$\pi_S(2.9)$	$78 \times 2 = 156$	$18 \times 2 = 36$

obrázky 4.3 a 4.4. Tabulka 4.2 ukazuje závislost hmotnostního průtoku turbínou na poměru tlaků  $p_{01}/p_2$ , kde  $p_{10}$  je vstupní statický tlak a  $p_2$  je celkový výstupní tlak.

Odchytky ve výsledcích jsou způsobeny důvody popsány výše, jsou ale relativně malé. Tento náhradní model je velmi jednoduchý, dá se říci, že se jedná o první přiblížení, proto je taková shoda výpočtu dobrým výsledkem.



Obrázek 4.3: Průběh tlaku v původním modelu

Obrázek 4.4: Průběh tlaku v náhradním modelu

Tabulka 4.2: Výpočet hmotnostního průtoku v původním a náhradním modelu

$p_{01}/p_2$	hmotnostní průtok [ $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ]	
	původní model	náhradní model
1.2	0.0684	0.0705
1.3	0.0859	0.0921
1.4	0.0973	0.1055

# Závěr

Pomocí programu Rhinoceros byl analyzován zadaný model a proběhlo seznámení s geometrií radiální turbíny.

Z literatury uvedené na konci práce byly vybrány analytické rovnice potřebné pro popis křivek a ploch, z nichž model vznikl. Posléze byly pomocí těchto rovnic popsány body, křivky a plochy obsažené v náhradním modelu, nebo bylo alespoň ukázáno, jak by rovnice daných křivek či ploch byly odvozeny.

Jako vhodný program pro vývoj parametrického modelu byl vybrán program Rhinoceros se zásuvným modulem RhinoScript. V jazyce RhinoScript byl pak napsán skript, sekvence příkazů, jejichž následkem je vymodelován nový model. Uživatel může přímo uvnitř programu upravovat libovolné z hodnot, které se nachází v příloze na straně 40.

Vytvořený skript je umístěn včetně pdf dokumentu s komentářem na příloženém CD, stejně jako náhradní model ve formátech .3dm (formát Rhina), .stl (STereoLithografie) a .stp (formát pro přenos CAD modelů mezi CAD programy - obdoba .iges)

Bylo provedeno zhodnocení odlišnosti původního a náhradního modelu a složitosti modelů. Výpočtem tlaku a průtoku byla ověřena použitelnost náhradního modelu pro výpočty. Model vyšel z hodnocení těmito kritérii jako použitelný.

# Seznam použité literatury

- [1] MCHENRY, Kenton a Peter BAJCSY. *An overview of 3d data content, file formats and viewers*. National Center for Supercomputing Applications, 2008, 1205: 22.
- [2] KRYNICKÝ, Martin. *Elektronická učebnice matematiky: Analytická geometrie v prostoru - Parametrická rovnice přímky* [online]. Třeboň, Realisticky.cz, 2017 [cit 2017-05-02]. Dostupné z: <http://realisticky.cz>.
- [3] LÁVIČKA, M. *Kuželosečky* [online]. Praha, Ústav technické matematiky ČVUT, 2017. [cit 2017-05-02]. Dostupné z: <http://mat.fsv.cvut.cz/bakalari/kog/kzs/files/KuzeloseckyLavicka.pdf>.
- [4] LINKEOVÁ, Ivana. *Základy počítačového modelování křivek a ploch*. Praha, Nakladatelství ČVUT, 2008. ISBN 978-80-01-04011-9.
- [5] LINKEOVÁ, Ivana. *Aplikovaná geometrie*. Praha, 2017. Dostupné z: [linkeova.cz](http://linkeova.cz).
- [6] ŠKORPÍK, Jiří. *Lopatkový stroj* [online]. Brno, transformacni-technologie.cz, 2017. Dostupné z: <http://www.transformacni-technologie.cz/pdf/tls.pdf>. ISBN 1804-8293.
- [7] VALÁŠEK, Michael, Zbyněk ŠIKA a Václav BAUMA. *Mechanika B*. V Praze: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-010-2919-0.
- [8] WAGUESPACK, Curtis a Loren JAHRAUS. *Mastering Autodesk Inventor 2010*. Indianapolis, Ind: Wiley Pub, 2009. ISBN 04-705-5002-3.
- [9] Přidání a odebrání vysunutím. *2015 Náповěda pro SOLIDWORKS* [online]. Velizy-Villacoublay, France: Dassault Systemes, 2017 [cit. 2017-06-02]. Dostupné z: <http://help.solidworks.com>.
- [10] LINKEOVÁ, Ivana. *Řídící body ukotvené křivky s předepsanou křivostí v koncovém bodě*. [online]. Praha, 2017. Dostupné z: <http://www.linkeova.cz/vyuka/gcad/public/curvature.pdf>
- [11] ROGERS, David F. *An introduction to NURBS: with historical perspective* [online]. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. ISBN 978-1-55860-669-2.

# Příloha: Seznam parametrů náhradního modelu

označení	jedn.	popis	hodnota <sub>N</sub>	obrázek či rovnice
$d_{R0}$	mm	vnitřní průměr náboje	16 mm	2.1, s. 9
$d_{R1}$	mm	malý vnější průměr náboje	46.3 mm	2.1, s. 9
$d_{R2}$	mm	velký vnější průměr náboje	50 mm	2.1, s. 9
$e_S$	mm	vzdálenost s. lop <sup>1</sup> od průměru $d_{R2}$	6 mm	3.4, s. 31
$h_{R0}$	mm	vzdálenost rotoru od roviny $yz$	19 mm	2.1, s. 9
$h_{R1}$	mm	vnitř. výška horní části r. lop. <sup>2</sup>	4.781 mm	2.1, s. 9
$h_{R2}$	mm	celková výška r. lop. <sup>2</sup>	17.634 mm	2.1, s. 9
$h_{R3}$	mm	vněj. výška horní části r. lop. <sup>2</sup>	6.740 mm	2.1, s. 9
$h_S$	mm	výška statorové lopatky	6.4 mm	2.1, s. 9
$k_{Cx}$	-	koeficient souřadnice $x_{C_R}$	0.05313	2.6, s. 11
$k_{Cy}$	-	koeficient souřadnice $y_{C_R}$	0.3540	2.6, s. 11
$k_D$	-	koeficient souřadnice $x_{D_R}$	0.4159	2.6, s. 11
$k_{I_S}$	-	koeficient polohy bodu $I_S$	3.053	3.6, s. 34
$k_{J_S}$	-	koeficient polohy bodu $J_S$	2.569	3.6, s. 34
$k_{Ky}$	-	koeficient souřadnice $y_{K_S}$	-0.0335	3.5, s. 32
$k_{Kz}$	-	koeficient souřadnice $z_{K_S}$	0.882	3.5, s. 32
$k_L$	-	koeficient souřadnice $x_{L_S}$	0.4221	2.6, s. 11
$k_{Ly}$	-	koeficient souřadnice $y_{L_S}$	-0.00542	3.5, s. 32
$k_{Lz}$	-	koeficient souřadnice $z_{L_S}$	0.635	3.5, s. 32
$k_M$	-	koeficient souřadnice $y_{M_S}$	0.416	3.5, s. 32
$k_{Ny}$	-	koeficient souřadnice $y_{N_S}$	0.347	3.5, s. 32
$k_{Nz}$	-	koeficient souřadnice $z_{N_S}$	0.830	3.5, s. 32
$k_P$	-	koeficient souřadnice $y_{P_S}$	0.808	3.5, s. 32
$k_{RS}$	-	koeficient vnějšího průměru statoru	0.2	(3.14), s. 33
$k_T$	-	koeficient souřadnice $x_{T_R}$	2	2.6, s. 11
$k_{th}$	-	koeficient náběžné hrany rotoru	2	(2.11), s. 21
$k_U$	-	koeficient souřadnice $x_{U_R}$	$\frac{4}{3}$	2.6, s. 11
$k_{Wy}$	-	koeficient souřadnice $y_{W_S}$	0.212	3.5, s. 32
$k_{Wz}$	-	koeficient souřadnice $z_{W_S}$	0.471	3.5, s. 32

<sup>1</sup>statorová lopatka

<sup>2</sup>rotorová lopatka

označení	jedn.	popis	hodnota <sub>N</sub>	obrázek
$l_S$	mm	délka statorové lopatky	25.020 mm	3.4, s. 31
$n_R$	-	počet rotorových lopatek <sup>2</sup>	12	2.6, s. 11
$n_S$	-	počet statorových lopatek <sup>1</sup>	9	3.1, s. 29
$R_{S1}$	mm	poloměr náběžové hrany s. lop <sup>1</sup>	0.6 mm	3.4, s. 31
$R_{S2}$	mm	poloměr odtokové hrany s. lop <sup>1</sup>	0.337 mm	3.4, s. 31
$t_{d1}$	mm	tloušťka r. lop. <sup>2</sup> na průměru $d_{R1}$	2.585 mm	2.18, s. 19
$t_{d2}$	mm	tloušťka r. lop. <sup>2</sup> na průměru $d_{R2}$	0.45 mm	2.16, s. 18
$\alpha_R$	°	celkový sklon r. lop. <sup>2</sup>	61.883 °	2.16, s. 18
$\alpha_{R1}$	°	úhel náběžové hrany r. lop. <sup>2</sup>	40.959 °	2.16, s. 18
$\alpha_{R2}$	°	úhel odtokové hrany r. lop. <sup>2</sup>	29.852 °	2.16, s. 18
$\alpha_S$	°	celkový sklon s. lop <sup>1</sup>	74.945 °	3.4, s. 31
$\alpha_{S1}$	°	rel. sklon náběžové hrany s. lop. <sup>1</sup>	7.816 °	3.4, s. 31
$\alpha_{S2}$	°	rel. sklon odtokové hrany s. lop. <sup>1</sup>	6.340 °	3.4, s. 31
$\alpha_{S21}$	°	odchýlení ploch na straně odtokové hrany s. lop. <sup>1</sup>	1 °	3.4, s. 31

<sup>1</sup>statorová lopatka

<sup>2</sup>rotorová lopatka