



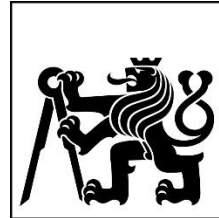
**ČVUT**

**ČESKÉ VYSOKÉ  
UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE**

**PRUŽNOST A PEVNOST  
V BÁJEČNÉM SVĚTĚ  
JULESE VERNEA**

**Jitka Řezníčková**





**ČVUT**  
ČESKÉ VYSOKÉ  
UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE

# **PRUŽNOST A PEVNOST V BÁJEČNÉM SVĚTĚ JULESE VERNEA**

**JITKA ŘEZNÍČKOVÁ**



*Jules Verne*

Logika vás dostane z bodu A do bodu B, fantazie vás dostane kamkoliv  
ALBERT EINSTEIN

PRAHA 2017

## OSOBNOSTI PRUŽNOSTI A PEVNOSTI

1452 – 1519	<b>Leonardo da Vinci</b>
1564 – 1642	<b>Galileo Galilei</b>
1620 – 1684	<b>Edme Mariotte</b>
1635 – 1703	<b>Robert Hooke</b>
1623 – 1662	<b>Blasie Pascal</b>
1642 – 1727	<b>Isaac Newton</b>
1654 – 1705	<b>Jakob Bernoulli</b>
1700 – 1782	<b>Daniel Bernoulli</b>
1707 – 1783	<b>Leonard Euler</b>
1717 – 1783	<b>Jean-Baptiste d'Alembert</b>
1736 – 1806	<b>Charles-Augustin de Coulomb</b>
1749 – 1827	<b>Piere Simon Laplace</b>
1773 – 1829	<b>Thomas Young</b>
1781 – 1840	<b>Simeon Denis Poisson</b>
1797 – 1886	<b>Adhémar Jean-Claude de Saint-Venant</b>
1814 – 1885	<b>Henri Edouard Tresca</b>
1818 – 1889	<b>James Prescott Joule</b>
1819 – 1914	<b>August Wöhler</b>
1820 – 1872	<b>William John Macquorn Rankin</b>
1821 – 1891	<b>Dmitrij Ivanovič Žuravskij</b>
1823 – 1892	<b>Enrico Betti</b>
1823 – 1892	<b>Johann Wilhelm Schwedler</b>
1824 – 1887	<b>Gustav Robert Kirchhoff</b>
1830 – 1903	<b>Antonio Luigi Giuseppe Cremona</b>
1831 – 1879	<b>James Clerk Maxwell</b>
1833 – 1872	<b>Alfred Clebsch</b>
1835 – 1888	<b>Emil Winkler</b>
1835 – 1918	<b>Christian Otto Mohr</b>
1841 – 1912	<b>Josef Šolín</b>
1871 – 1945	<b>Boris Grigorgijevič Galerkin</b>
1872 – 1950	<b>Tytus Maksymilian Huber</b>
1878 – 1972	<b>Štěpán Prokofjevič Timošenko</b>
1878 – 1909	<b>Walther Ritz</b>
1883 – 1953	<b>Richard von Mises</b>
1885 – 1951	<b>Heinrich Hencky</b>
1847 – 1884	<b>Carlo Alberto Castigliano</b>
1875 – 1953	<b>Ludwig Prandtl</b>
1880 – 1942	<b>Viktor Felber</b>
1905 – 1956	<b>Ferdinand Budinský</b>
1908 – 1968	<b>Lev Davidovič Landau</b>
1918 – 1991	<b>Emanuel Hájek</b>
1919 – 2000	<b>Clifford Ambrose Truesdell</b>
1921 – 2009	<b>Olgierd (Oleg) Cecil Zienkiewicz</b>





# OBSAH

<b>SEZNAM POUŽITÝCH OZNAČENÍ</b>	<b>4</b>
<b>ÚVOD</b>	<b>5</b>
<b>1. ZÁKLADY TEORIE TENKOSTĚNNÝCH SKOŘEPIN</b> PONORKA SWORD	<b>6</b>
<b>2. ZÁKLADY TEORIE SILNOSTĚNNÝCH VÁLCOVÝCH NÁDOB</b> KOLUMBIADA	<b>13</b>
<b>3. ZÁKLADY TEORIE TENKÝCH KRUHOVÝCH ROTAČNĚ SYMETRICKÝCH DESEK</b> PONORKA NAUTILUS	<b>17</b>
<b>4. ZÁKLADY TEORIE KOMBINOVANÉHO NAMÁHÁNÍ</b> LOŽ ALBATROS	<b>23</b>
<b>5. ZÁKLADY TEORIE STABILITY TENKÝCH PŘÍMÝCH PRUTŮ</b> OCELOVÉ MĚSTO	<b>29</b>
<b>ZÁVĚR</b>	<b>35</b>
<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY</b>	<b>36</b>

## SEZNAM POUŽITÝCH OZNAČENÍ

$A$	[m <sup>2</sup> ], [mm <sup>2</sup> ]	plocha
$C$	[N], [kN]	výpočtová konstanta
$D$	[m], [mm]	rozměr - průměr
$E$	[N·m <sup>-2</sup> ], [N·mm <sup>-2</sup> ]	modul pružnosti v tahu (Youngův)
$F$	[N], [kN], [MN]	síla
$G$	[N·m <sup>-2</sup> ], [N·mm <sup>-2</sup> ]	modul pružnosti ve smyku
$G$	[N], [kN]	síla - tíhová
$H$	[m], [mm]	rozměr - hloubka
$J$	[m <sup>4</sup> ], [mm <sup>4</sup> ]	kvadratický moment průřezu
$K$	[N·m <sup>-2</sup> ], [N·mm <sup>-2</sup> ]	výpočtová konstanta
$L$	[m], [mm]	rozměr - délka
$M$	[N·m], [N·mm]	moment
$N$	[N], [kN]	síla - normálová
$Q$	[N], [kN]	síla
$R$	[N], [kN]	síla - reakce
$R$	[m], [mm]	rozměr - poloměr
$T$	[N], [kN]	síla - tečná
$U$	[N·m], [N·mm]	deformační energie
$V$	[m <sup>3</sup> ], [mm <sup>3</sup> ]	objem
$W$	[m <sup>3</sup> ], [mm <sup>3</sup> ]	průřezový modul
$a$	[m], [mm]	rozměr
$b$	[m], [mm]	rozměr
$d$	[m], [mm]	rozměr - průměr/deformace
$g$	[m·s <sup>-2</sup> ]	gravitační zrychlení
$h$	[m], [mm]	rozměr - tloušťka/hloubka
$i$	[m], [mm]	poloměr setrvačnosti
$k$	[1]	součinitel bezpečnosti
$\ell$	[m], [mm]	rozměr - délka
$p$	[N·m <sup>-2</sup> ], [N·mm <sup>-2</sup> ]	tlak
$q$	[N·m <sup>-1</sup> ], [N·mm <sup>-1</sup> ]	spojité zatížení
$r$	[m], [mm]	rozměr - poloměr
$s$	[m], [mm]	rozměr - tloušťka
$u$	[m], [mm]	deformace - posunutí
$v$	[m], [mm]	deformace - průhyb
$w$	[m], [mm]	deformace - průhyb
$\alpha$	[1]	úhel
$\beta$	[1]	úhel
$\varepsilon$	[1]	deformace
$\varphi$	[1]	natočení
$\lambda$	[1]	štíhlost
$\lambda$	[N·m <sup>-2</sup> ], [N·mm <sup>-2</sup> ]	hustota deformační energie
$\nu$	[1]	Poissonovo číslo
$\rho$	[kg·m <sup>-3</sup> ]	hustota
$\sigma$	[N·m <sup>-2</sup> ], [N·mm <sup>-2</sup> ]	napětí - normálové
$\tau$	[N·m <sup>-2</sup> ], [N·mm <sup>-2</sup> ]	napětí - smykové



## ÚVOD

Při přípravě podkladů pro tento text jsem vycházela ze zkušeností, které mám z vlastní výuky předmětu Pružnost a pevnost v minulých letech na Fakultě strojní ČVUT v Praze.

Protože dnes většina z vás studentek a studentů přichází na fakultu z víceletých gymnázií, znamená pro řadu z vás pojem stroj asi nejčastěji automobil, letadlo nebo lokomotivu a jejich konstruování (kreslení) v některém CAD-u. Málokdo z vás si ale při nástupu na fakultu dokázal představit širší předmětů teoretického základu, který musí být součástí bakalářského stupně výuky. Ze středních škol jste byli zvyklí, že veškerou probíranou látku jste dostávali v předpřipravené formě bez zásadních návazností na další předměty.

Proto patří Pružnost a pevnost I na Fakultě strojní ČVUT v Praze k nejproblémovějším předmětům v bakalářském studiu. Jedná se totiž o první skutečně „syntetický“ předmět pracující v rámci modelování se značným stupněm abstrakce vzhledem k reálným součástem. Základem úspěšného zvládnutí Pružnosti a pevnosti I jsou znalosti z fyziky, ale pro správné pochopení látky je třeba ovládat znalosti z mechaniky-statiky, konstrukce, nauky o materiálu, technologie a také termomechaniky, a to vše při využívání nástrojů vyšší (diferenciální) matematiky.

Toto propojení řada z vás zvládá jen obtížně, a to díky nedobrym návykům ze středních škol a malým zkušenostem s „problémovou“ výukou, se kterou se prakticky setkáváte poprvé až ve 2. ročníku právě v předmětu Pružnost a pevnost I. Následující předmět Pružnost a pevnost II vám již takové problémy nečiní, protože většina z vás principy fungování pružnosti a pevnosti pochopila.

Cílem tohoto učebního textu je přiblížit často abstraktní výpočtové modely „reálným“ problémům, i když v tomto případě problémům vzniklým ve fantazii spisovatele Julese Vernea. Při tvorbě tohoto textu jsem vycházela ze skript ČVUT v Praze Pružnost a pevnost v technické praxi I, II a III, které se mezi studenty těší stálé oblibě.

Samotný text obsahuje vždy základní, nejnnutnější informace, které je třeba mít k řešení daného problému. Následuje příklad vybraný z některého z vědeckofantastických románů Julese Vernea, který je řešen klasickými nástroji probíranými v předmětu Pružnost a pevnost. Další příklady pak doplňují danou kapitolu a jsou jakousi sbírkou řešených příkladů, o které je mezi vámi velký zájem, a to nejen v případě pružnosti a pevnosti.

Doufám, že Vás tato forma osloví a zjistíte, že pružnost a pevnost stojí skoro za vším, co člověk vyrobil, vyrábí nebo bude vyrábět, ale také za tím, o čem člověk jen snil.

Jitka Řezníčková

# 1. ZÁKLADY TEORIE TENKOSTĚNNÝCH SKOŘEPIN

## MEMBRÁNOVÝ STAV:

Je to rovinná napjatost, kdy v každém bodě tenké stěny skořepiny působí pouze tahové/tlakové síly, které vyvolají jen normálová tahová/tlaková napětí (bez ohybových nebo smykových napětí). Tato normálová napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  jsou ve směrech hlavních křivosti  $R_1$  a  $R_2$  v daném bodě a současně se jedná přímo o dvě hlavní napětí. Třetí hlavní napětí je v tomto případě mnohonásobně menší než zbývající dvě hlavní napětí, a proto ho ve výpočtech zanedbáváme ( $\sigma_3 \approx 0$ ).

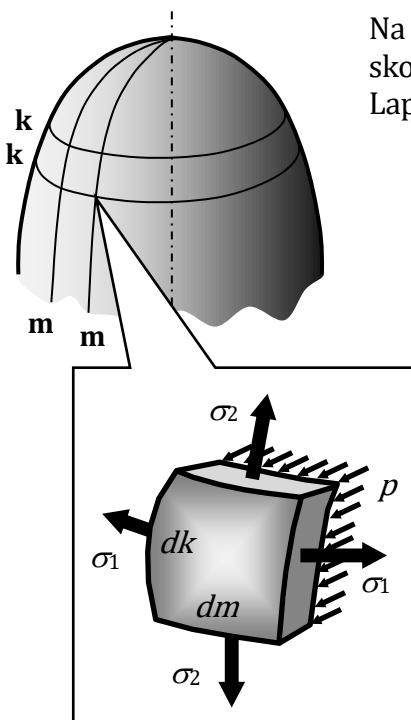
## PODMÍNKY ZAJIŠTĚNÍ MEMBRÁNOVÉHO STAVU:

- 1) Tloušťka stěny je výrazně menší než zbývající rozměry skořepiny ( $s \ll R_1, R_2$ ).
- 2) Plášť tvoří skořepina stálé tloušťky nebo tloušťky plynule se měnící.
- 3) Na skořepinu působí pouze tlaky kolmo ke stěně, které se nesmí měnit skokem.
- 4) Jednotlivé hlavní křivosti skořepiny se nesmí měnit skokem.

## ROTAČNĚ SYMETRICKÉ SKOŘEPINY:

Vznikají rotací výtvarné křivky okolo přímé osy. Jeden ze středů hlavních poloměrů křivosti tak vždy leží na této ose. Ve skořepině lze pak definovat dvojici křivek:

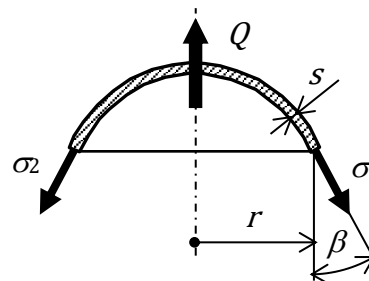
- rovnoběžky **k** jsou kružnice se středem na ose rotační skořepiny,
- poledníky (meridiány) **m** jsou kolmé k rovnoběžkám a odpovídající výtvarné křivce.



Na základě silové rovnováhy vyjmutého elementu pláště tenkostěnné skořepiny sestavil francouzský matematik a fyzik Pierre-Simone Laplace jednoduchou rovnicí ve tvaru:

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{p}{s}$$

Sama o sobě však tato rovnice nestačí (obsahuje dvě neznámá napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ ). Proto je třeba ještě použít rovnici rovnováhy odříznuté části nádoby, na kterou působí v jednom směru výsledná síla od zatížení  $Q$  a ve druhém výsledná síla od napjatosti  $\sigma_2$ .



Tato rovnice bude mít tvar:  $Q - \sigma_2 \cdot \cos \beta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s = 0$ , odkud vyplývá pro  $\sigma_1$  výsledný vztah:

$$\sigma_2 = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot s \cdot \cos \beta}$$

Tato soustava dvou rovnic o dvou neznámých pak již stačí k popisu složek membránové napjatosti.





## PONORKA SWORD

Ponorka Sword se objevuje v románu **Vynález zkázy**, který se odehrává kolem roku 1885 a je příběhem francouzského vynálezce Thomase Rocha a jeho ošetřovatele Simona Harta. Roch objevil strašlivou výbušninu a chce jí prodat francouzské vládě, která nabídku odmítla. Po únosu na ostrov Back Cup se v tamních laboratořích podaří Rochovi jeho „vynález zkázy“ realizovat.

Světové mocnosti vyšlou k ostrůvku nejprve malou ponorku *Sword*, aby Rocha a Harta zachránila. Ponorka je snýtovaná z ocelových plechů a její posádku tvoří kapitán a dva muži.

Román Julese Vernea do filmové podoby zpracoval v roce 1958 Karel Zeman, který některé vizionářské představy Julese Vernea upravil do aktuálnější podoby. V původní verzi je Hart ošetřovatelem vynálezce Rocha a v Zemanově verzi je Ing. Hart asistentem vynálezce Rocha. V původní verzi je ponorka Sword zničena ještě před tím, než naloží na palubu Rocha a Harta, ale v Zemanově verzi nejprve zachrání Ing. Harta, ale je již s Hartem na palubě také zničena pirátskou ponorkou. Ing. Hart se ale zachrání a vrátí se na ostrov, aby spolu s Janou, která se na ostrov dostala jako trosečnice z piráty potopené lodi, uprchli v balónu z ostrova těsně před jeho úplným zničením.



Představa „bleskometu“ dle Vernea v dobovém vyobrazení ilustrátorem původního vydání a obří dělo jako ničivá „superzbraň“ ve filmu Karla Zemana.

([https://cs.wikipedia.org/wiki/Vyn%C3%A1lez\\_zk%C3%A1zy](https://cs.wikipedia.org/wiki/Vyn%C3%A1lez_zk%C3%A1zy))

## PŘÍKLAD 1.0

Stanovte, do jaké hloubky by se mohla potopit miniponorka Sword s ohledem na maximální namáhání „válcového“ pláště ponorky vyrobeného z tenkých ocelových plátů při využití Laplaceovy teorie tenkostěnných skořepin a vhodných hypotéz pružnosti.

### **Dáno:**

Střední průměr válcové části trupu ponorky  $D_S = 2,5$  m,  
tloušťka ocelových plátů pláště ponorky  $s = 3$  mm,  
mez kluzu použitého materiálu plátů  $\sigma_K = 300$  N·mm<sup>-2</sup>,  
uvažovaná bezpečnost vůči mezi kluzu  $k_K = 1,7$ ,  
hustota mořské vody  $\rho = 1\,025$  kg·m<sup>-3</sup>.



**Řešení:**

Laplaceova rovnice byla odvozena pro vnitřní přetlak  $p_i$  (interní), ale na základě stejné teorie lze odvodit obdobné vztahy i pro vnější přetlak  $p_e$  (externí). Výsledky se budou lišit pouze ve znaménkách, kdy při vnějším přetlaku budou všechna napětí záporná.

Jedná se o uzavřenou válcovou tenkostěnnou nádobu, kde platí  $R_s = D_s/2$ .

Vznikající napětí jsou:

$$\text{tečné } \sigma_t = -\frac{p_e \cdot R_s}{s}, \quad \text{osové } \sigma_o = -\frac{p_e \cdot R_s}{2 \cdot s} \quad \text{a radiální: } \sigma_r \approx 0$$

Podle hypotézy  $\tau_{\text{MAX}}$  (Tresca) bude redukované napětí:

$$\sigma_{red} = \sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}} \cdot$$

Pro náš případ platí:

$$\sigma_{red} = 0 - \sigma_t = +\frac{p \cdot R_s}{s} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_K}{k_K}$$

Odkud vychází:

$$p_D^{\tau_{\text{MAX}}} \leq \frac{\sigma_K \cdot t}{R_s \cdot k_K} = \frac{300 \cdot 3}{1\,250 \cdot 1,7} = 0,424 \text{ MPa}$$

Podle energetické hypotézy (Huber-Miseses-Hencky) bude redukované napětí:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_o^2 - \sigma_t \cdot \sigma_o} \cdot$$

Pro náš případ platí:

$$\begin{aligned} \sigma_{red} &= \sqrt{\left(-\frac{p \cdot R_s}{s}\right)^2 + \left(-\frac{p \cdot R_s}{2 \cdot s}\right)^2 - \left(-\frac{p \cdot R_s}{s}\right) \cdot \left(-\frac{p \cdot R_s}{2 \cdot s}\right)} = \\ &= \frac{p \cdot R_s}{t} \cdot \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{p \cdot R_s}{t} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,866 \cdot \frac{p \cdot R_s}{t} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_K}{k_K} \end{aligned}$$

Odkud vychází:

$$p_D^{\text{energ.}} \leq \frac{\sigma_K \cdot t}{0,866 \cdot R_s \cdot k_K} = \frac{300 \cdot 3}{0,866 \cdot 1\,250 \cdot 1,7} = 0,489 \text{ MPa}$$

Pro výpočet hledané hloubky  $h_{\text{max}}$  využijeme vztah pro velikost hydrostatického tlaku:

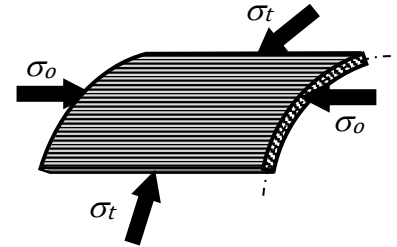
$$p = \rho \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{p}{\rho \cdot g} \cdot$$

Pro výpočet hledané hloubky budeme dosazovat v základních jednotkách (SI):

$$h_{\text{max}}^{\tau_{\text{MAX}}} = \frac{p_D^{\tau_{\text{MAX}}}}{\rho \cdot g} = \frac{0,424 \cdot 10^6}{1\,025 \cdot 9,81} = 42,2 \text{ m} \cdot,$$

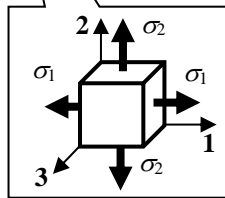
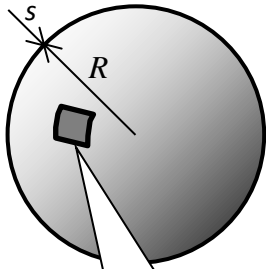
$$h_{\text{max}}^{\text{energ.}} = \frac{p_D^{\text{energ.}}}{\rho \cdot g} = \frac{0,489 \cdot 10^6}{1\,025 \cdot 9,81} = 48,6 \text{ m} \cdot$$

Maximální ponor miniponorky Sword tedy vychází přibližně 40 až 45 metrů.





## PŘÍKLAD 1.1 (TENKOSTĚNNÁ KULOVÁ NÁDOBA):



**Dáno:**  $p, R, s, E$  a  $\mu$

**Určit:**  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  (hlavní napětí vznikající v plášti nádoby),  
 $p_D$  (dovolený tlak podle teorie  $\tau_{MAX}$ ),  
 $\Delta R$  a  $\Delta s$  (změny hlavních rozměrů nádoby),  
 $U$  (celkovou def. energii akumulovanou v plášti této nádoby).

**Řešení:**

Základem řešení je Laplaceova rovnice upravená pro předpoklady:

$$R_1 = R_2 = R \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad (\sigma_3 = 0).$$

(u kulové nádoby nelze rozhodnout, který směr je tečný a který směr je osový, protože podmínky hlavních křivostí splňují kterékoli dva navzájem kolmé směry k povrchu kulového pláště).

Po dosazení dostáváme:

$$\frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{s} \quad \text{odkud vychází} \quad \sigma = \frac{p \cdot R}{2 \cdot s}.$$

Pevnostní podmínka podle hypotézy  $\tau_{MAX}$  bude mít tvar:

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma - 0 = \frac{p \cdot R}{2 \cdot s} - 0 = \frac{p \cdot R}{2 \cdot s} \leq \sigma_D \Rightarrow p_D \leq \frac{2 \cdot \sigma_D \cdot s}{R}.$$

(nejmenším – minimálním – napětím je v tomto případě třetí – nulové – napětí  $\sigma_3$ ).

Pro výpočet změn hlavních rozměrů nádoby použijeme rozšířený Hookův zákon pro rovinnou napjatost:

$$\Delta R = R \cdot \varepsilon_r = \frac{R}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2) = \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot E \cdot s} \cdot (1 - \nu) \quad \text{a} \quad \Delta s = s \cdot \varepsilon_r = \frac{s}{E} \cdot [-\nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)] = -\nu \cdot \frac{p \cdot R}{E}.$$

Celkovou deformační energii  $U$  určíme pomocí hustoty deformační energie  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \cdot \varepsilon_3 = \sigma \cdot \varepsilon$$

a objemu  $V$  pláště nádoby (objem pláště tenkostěnné kulové nádoby vypočteme jako  $V \approx S \cdot s$ :

$$V = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot s.$$

Po dosazení vychází:

$$U = \iiint_{(V)} \lambda \cdot dV = \lambda \cdot V = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot s = \sigma \cdot \frac{1}{E} \cdot (\sigma - \nu \cdot \sigma) \cdot S \cdot s.$$

Po dosazení dostáváme:

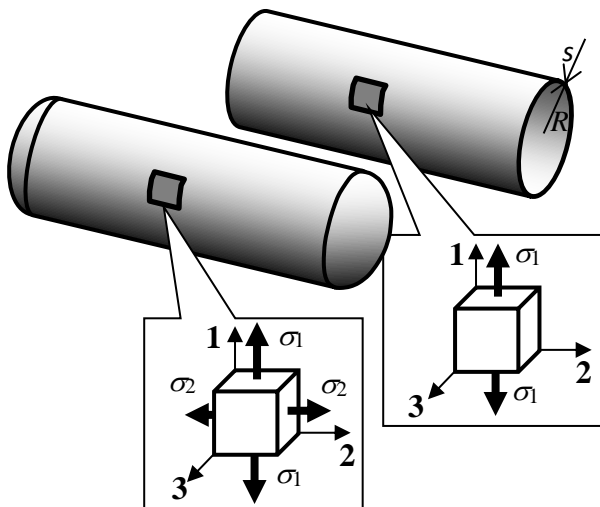
$$U = \frac{\sigma^2}{E} \cdot (1 - \nu) \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot s = 2 \cdot \pi \cdot \frac{p^2 \cdot R^4}{E \cdot s} \cdot (1 - \nu).$$

### Poznámka:

Na závěr provedeme rozměrovou kontrolu výsledku:

$$U = [1] \cdot \frac{\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]^2 \cdot [\text{m}]^4}{\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \cdot [\text{m}]} \cdot [1] = [\text{N} \cdot \text{m}]$$

## PŘÍKLAD 1.2 (TENKOSTĚNNÁ VÁLCOVÁ NÁDOBA):



**Dáno:**  $p, R, s, E$  a  $\nu$ .

**Určit:** a) pro otevřenou nádobu:

$\sigma_1$  a  $\sigma_2$  (hlavní napětí v plášti nádoby),  
 $\Delta R$  a  $\Delta s$  (změny hlavních rozměrů).

b) pro uzavřenou nádobu:

$\sigma_1$  a  $\sigma_2$  (hlavní napětí v plášti nádoby),  
 $\Delta R$  a  $\Delta s$  (změny hlavních rozměrů).

**Řešení:**

Základem řešení je Laplaceova rovnice, pro kterou musí platit:

$$R_1 = R \quad \text{a} \quad R_2 \rightarrow \infty \quad (\sigma_3 = 0).$$

Dosažením do Laplaceovy rovnice dostáváme:

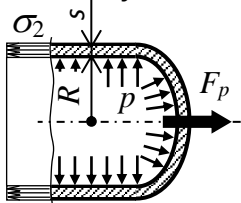
$$\frac{\sigma_1}{R} + \frac{\sigma_2}{\infty} = \frac{p}{s}$$

odkud vychází v obou případech první hlavní napětí:

$$\sigma_1 = \frac{p \cdot R}{s}.$$

Druhé hlavní napětí bude v případě otevřeného válce nulové:  $\sigma_2 = 0$  (ve stěně otevřené válcové nádoby tak vzniká pouze jednoosá napjatost).

V případě uzavřené válcové nádoby vypočteme druhé hlavní napětí  $\sigma_2$  z podmínky silové rovnováhy do osového směru:



$$\sigma_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot s = F_p = p \cdot \pi \cdot R^2 \quad \text{a odtud již dostáváme:} \quad \sigma_2 = \frac{p \cdot R}{2 \cdot s}.$$

(ve stěně uzavřené válcové nádoby vzniká rovinná napjatost, kdy první hlavní napětí je dvakrát větší než druhé:  $\sigma_1 = 2 \cdot \sigma_2$ ).

Pro výpočet změn hlavních rozměrů nádoby použijeme rozšířený Hookův zákon pro jednoosou resp. rovinnou napjatost:

**a) otevřená nádoba:**

$$\Delta R_{ot.} = R \cdot \varepsilon_t = \frac{R}{E} \cdot \sigma_1 = \frac{p \cdot R^2}{E \cdot s} \quad \text{a} \quad \Delta s_{ot.} = s \cdot \varepsilon_r = \frac{s}{E} \cdot [-\nu \cdot \sigma_1] = -\nu \cdot \frac{p \cdot R}{E}.$$

**b) uzavřená nádoba:**

$$\Delta R_{uz.} = \frac{R}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2) = \frac{p \cdot R^2}{E \cdot s} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \quad \text{a} \quad \Delta s_{uz.} = \frac{s}{E} \cdot [-\nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)] = -\nu \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{p \cdot R}{E}.$$

**Poznámka:**

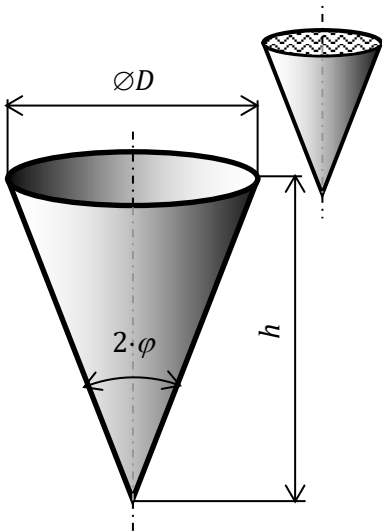
Pro Poissonovo číslo  $\nu = 0,3$  vychází:

Změna poloměru uzavřené nádoby je o 15% menší než u nádoby uzavřené:  $\Delta R_{uz.} \approx 0,85 \cdot \Delta R_{ot.}$

Stěna uzavřené nádoby se zeslabí o 50% více než stěna otevřené nádoby:  $\Delta s_{uz.} \approx 1,5 \cdot \Delta s_{ot.}$



## PŘÍKLAD 1.3 (TENKOSTĚNNÁ KUŽELOVÁ NÁDOBA):



**Dáno:**  $\rho$ ;  $D$ ;  $h$  a  $s$   $\left( \varphi = \arctg \frac{D/2}{h} \right)$ .

**Určit:**  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  (hlavní napětí v plášti nádoby).

**Řešení:**

Základem řešení je opět Laplaceova rovnice, jen musíme věnovat pozornost správnému určení hlavních poloměrů křivosti  $R_1$  a  $R_2$ . První hlavní poloměr křivosti  $R_1$  této kuželové nádoby se stejně jako u válcové nádoby blíží nekonečnu:

$$R_1 \rightarrow \infty.$$

Druhý hlavní poloměr křivosti  $R_2$  vyjádříme podle obrázku jako:

$$R_2 = \frac{r(y)}{\cos \varphi}, \text{ když současně platí } r(y) = y \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Spojením obou vztahů dostáváme výsledný výraz pro určení druhého hlavního poloměru křivosti:

$$R_2 = \frac{y \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} = y \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Poloměry  $R_1$  a  $R_2$  dosadíme do Laplaceovy rovnice:

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{p}{s}$$

spolu se závislostí hydrostatického tlaku na hloubce  $(h - y)$ :

$$p(y) = \rho \cdot g \cdot (h - y)$$

a dostaneme výsledný vztah pro hlavní napětí  $\sigma_2$  (ve směru tečném):

$$\frac{\sigma_1(y)}{\infty} + \frac{\sigma_2(y)}{r \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} = \frac{\rho \cdot g \cdot (h - y)}{s} \Rightarrow \sigma_2(y) = \frac{\rho \cdot g}{s} \cdot (h - y) \cdot y \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Zbývající hlavní napětí  $\sigma_1$  určíme z rovnováhy odříznuté části podle vztahu:

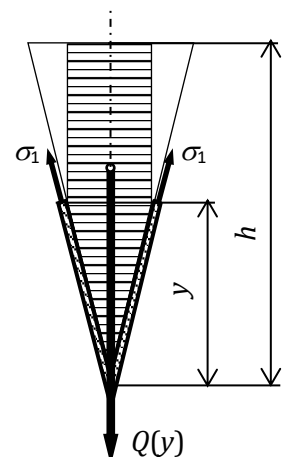
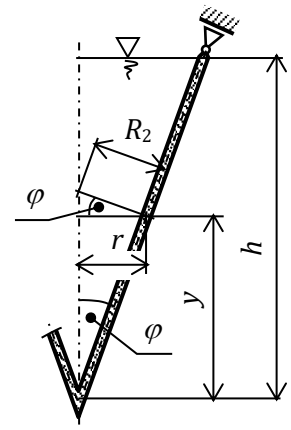
$$\sigma_1(y) = \frac{Q(y)}{2 \cdot \pi \cdot r(y) \cdot s \cdot \cos \varphi}.$$

Tíhová síla kapaliny  $Q$ , která působí v místě řezu je podle obrázku:

$$Q(y) = \rho \cdot g \cdot \left[ \frac{\pi \cdot r^2 \cdot y}{3} + \pi \cdot r^2 \cdot (h - y) \right] = \dots = \rho \cdot g \cdot (y \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2 \cdot \left( h - \frac{2}{3} \cdot y \right).$$

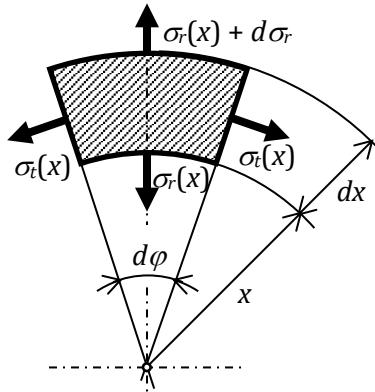
Výsledný vztah pak je:

$$\sigma_1(y) = \frac{\rho \cdot g \cdot (y \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2 \cdot \left( h - \frac{2}{3} \cdot y \right)}{2 \cdot \pi \cdot y \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot s \cdot \cos \varphi} \Rightarrow \sigma_1(y) = \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot s} \cdot \left( h - \frac{2}{3} \cdot y \right) \cdot y \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$



## 2. ZÁKLADY TEORIE SILNOSTĚNNÝCH VÁLCOVÝCH NÁDOB

Ze stěny silnostěnné nádoby vyjmeme element popsany souřadnicí  $x$ , resp.  $dx$  a úhlem  $d\varphi$  a sestavíme jeho silovou rovnováhu ve tvaru:



$$dF_t \cdot d\varphi = dF_{rv}$$

Po dosazení za jednotlivé silové účinky dostaneme základní diferenciální rovnici:

$$d[\sigma_r(x) \cdot x] - \sigma_t(x) \cdot dx = 0$$

Jedná se o diferenciální rovnici se dvěma neznámými veličinami  $\sigma_t(x)$  a  $\sigma_r(x)$ . Pomocí obecného vyjádření radiální a tečné deformace:

$$\varepsilon_r(x) = \frac{du}{dx} = u'(x) \quad \text{a} \quad \varepsilon_t(x) = \frac{u(x)}{x}$$

převědeme původní diferenciální rovnici se dvěma neznámými na novou diferenciální rovnici druhého řádu jedné proměnné  $u(x)$ :

$$u''(x) \cdot x + u'(x) - \frac{u(x)}{x} = 0.$$

Tato rovnice má pouze homogenní řešení (pravá strana je nulová) ve známém tvaru:

$$u(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x}$$

Po dosazení do rovnic deformací  $\varepsilon_t(x)$  a  $\varepsilon_r(x)$  a následně do rozšířeného Hookova zákona získáme hledané vztahy pro napětí ve tvaru:

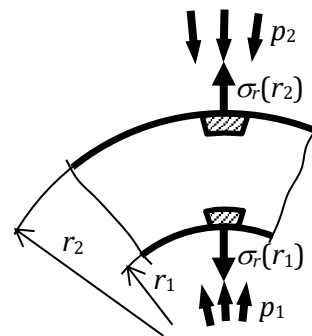
$$\sigma_t(x) = K + \frac{C}{x^2} \quad \text{a} \quad \sigma_r(x) = K - \frac{C}{x^2}.$$

Konstanty  $K$  a  $C$  určíme z okrajových podmínek podle obrázku:

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \quad \text{a} \quad \sigma_r(r_2) = -p_2$$

a dostáváme:

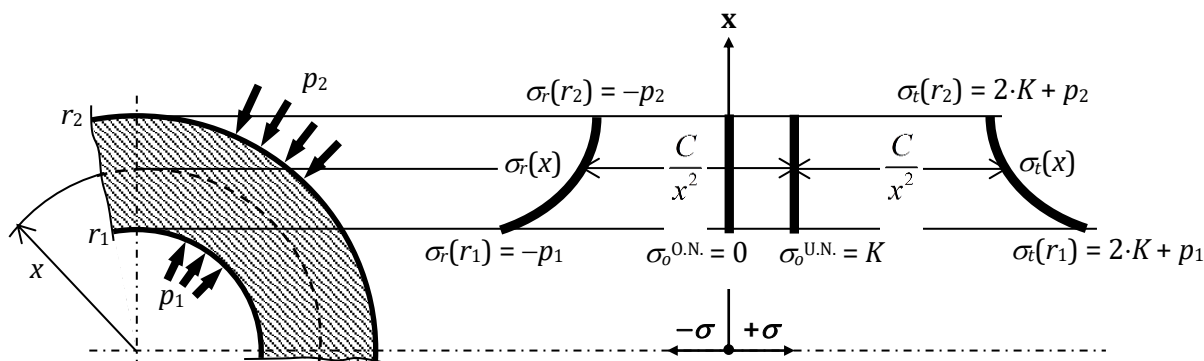
$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad C = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$



Bude-li nádoba **uzavřená**, bude mít osově napětí velikost konstanty:  $\sigma_o = K$ .

Bude-li nádoba **otevřená**, nevzniká ve stěně nádoby žádné osově napětí:  $\sigma_o = 0$ .

Výsledné funkce popisující napětí  $\sigma_t(x)$ ,  $\sigma_o$  a  $\sigma_r(x)$  budou mít průběhy podle obrázku:

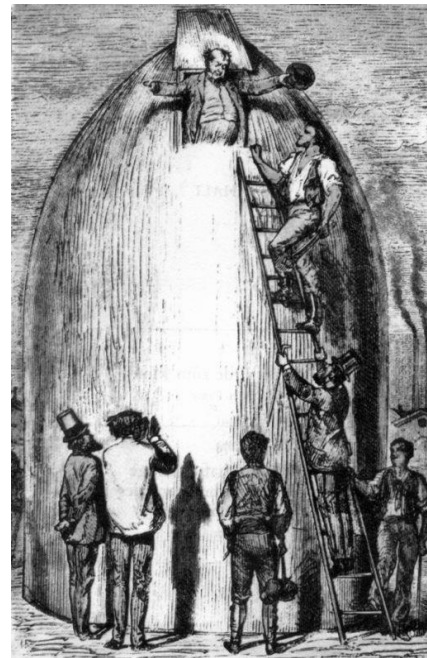




## KOLUMBIADA

*Ze Země na Měsíc* (*De la Terre à la Lune*) patří ke známým vědeckofantastickým románům z Verneova cyklu *Podivuhodné cesty* a vyšel poprvé v roce 1865. Jeden z výtisků prvního vydání tohoto románu vynesl v roce 2008 na oběžnou dráhu okolo Země modul Jules Verne zásobující Mezinárodní kosmickou stanicí ISSS.

Román vypráví o odvážné kosmické cestě tří přátel (kapitán Nicholl, Impey Barbicane a Michel Ardan), členů Gun Clubu z Baltimore, kteří se rozhodli překonat zemskou tíži v projektilu vystřeleném z obrovitého děla **Kolumbiada** namířeného na Měsíc. Toto dělo mělo obří rozměry (délka okolo 270 m) a vážilo šedesát tisíc tun. Bylo zakopáno kolmo do země na Floridě nedaleko Stone's Hill (o sto let později startoval první skutečný let na Měsíc z mysu Canaveral, vzdáleného od tohoto místa jen 250 km). Start výpravy byl vpravdě velkolepý. Na Floridu přijelo několik miliónů diváků, plamen výstřelu byl pozorovatelný do vzdálenosti až sto šedesáti kilometrů. Na tento román pak navazuje další část vyprávění v románu *Okolo Měsíce*, kde autor líčí osudy hrdinů od okamžiku výstřelu po celou dobu letu. Čtenář tak s nimi prožívá stav beztlíže, který zažijí při dosažení tzv. „neutrální čáry“, sleduje s nimi jejich dojmy a pozorování prováděná dalekohledem i okénkem střely, když oblétaávají Měsíc, a nakonec je svědkem šťastného přistání projektilu do moře na Zemi.



([https://cs.wikipedia.org/wiki/Ze\\_Zem%C4%9B\\_na\\_M%C4%9Bs%C3%ADc](https://cs.wikipedia.org/wiki/Ze_Zem%C4%9B_na_M%C4%9Bs%C3%ADc))

## Příklad 2.0

Stanovte dovolený tlak plynů při výbuchu nálože při výstřelu projektilu z obřího děla Kolumbiada. Dělo bylo vyrobené z vysoko pevnostní ušlechtilé oceli.

### Dáno:

Ráže děla  $\varnothing D_1 = 2,7$  m (9 stop),

síla stěny  $s = 1,8$  m (6 stop)  $\Rightarrow \varnothing D_2 = 6,3$  m ( $D_1 + 2 \cdot s$ ),

mez kluzu použitého materiálu  $\sigma_K = R_e = 450$  N·mm<sup>-2</sup>,

požadovaná minimální bezpečnost k mezi kluzu  $k_{K\min} = 1,8$ .

### Řešení:

Ze zadání je zřejmé, že těleso děla tvoří dlouhá otevřená silnostěnná nádoba, kde nevznikne žádné osově napětí ( $\sigma_\theta = 0$ ).

Zbývající napětí určíme podle základní teorie ze vztahů:

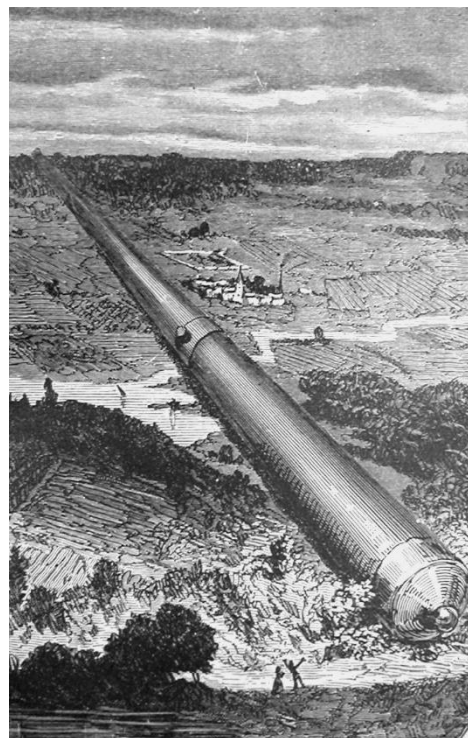
$$\sigma_t(x) = K + \frac{C}{x^2} \quad \text{a} \quad \sigma_r(x) = K - \frac{C}{x^2} .$$

Z rovnic průběhů a při použití okrajových podmínek:

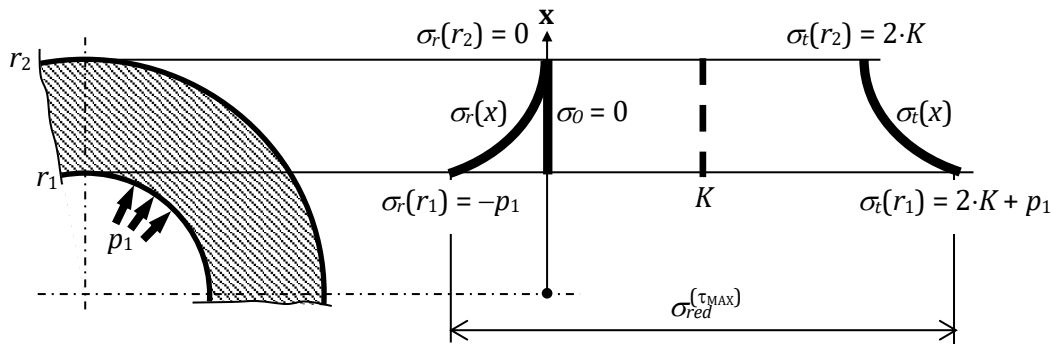
$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \quad \text{a} \quad \sigma_r(r_2) = -p_2 = 0 \quad (\text{volný povrch})$$

vychází:

$$\sigma_t(r_1) = 2 \cdot K + p_1 \quad \text{a} \quad \sigma_t(r_2) = 2 \cdot K + 0 .$$



V našem případě se původní průběhy napětí relativně zjednoduší ( $\sigma_0 = 0$  a  $p_2 = 0$ ):



Podle zobrazených průběhů napětí pro silnostěnnou nádobu namáhanou vnitřním přetlakem je patrné, že nejnamáhanějším místem bude vnitřní povrch děla, kde podle pevnostní hypotézy  $\tau_{\max}$  (Tresca) musí platit:

$$\sigma_{red}(r_1) = \sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1) = 2 \cdot K + p_1 - (-p_1) = 2 \cdot (K + p_1) \leq \sigma_D = \frac{\sigma_K}{k_{K \min}} .$$

Po úpravě dostáváme výsledný vztah pro výpočet dovoleného přetlaku  $p_{1D}$ :

$$(p_1 - p_2)_D \leq \frac{\sigma_K}{2 \cdot k_{K \min}} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \Rightarrow p_{1D} \leq \frac{\sigma_K}{2 \cdot k_{K \min}} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] .$$

Po dosazení pro hodnoty děla Kolumbiada ( $r_1 = 1,35$  m a  $r_2 = 3,15$  m) dostáváme:

$$p_{1D} \leq \frac{450}{2 \cdot 1,8} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{1\,350}{3\,150} \right)^2 \right] = 102 \text{ MPa} .$$

Maximální tlak uvnitř děla je při zachování zadané bezpečnosti „jen“ 102 MPa.

**Poznámky:**

- Konstanta  $K$  potřebná pro výpočty průběhů napětí bude:

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{102 \cdot 1\,350^2 - 0 \cdot 3\,150^2}{3\,150^2 - 1\,350^2} = 22,95 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} .$$

- Výsledná napětí tak budou:

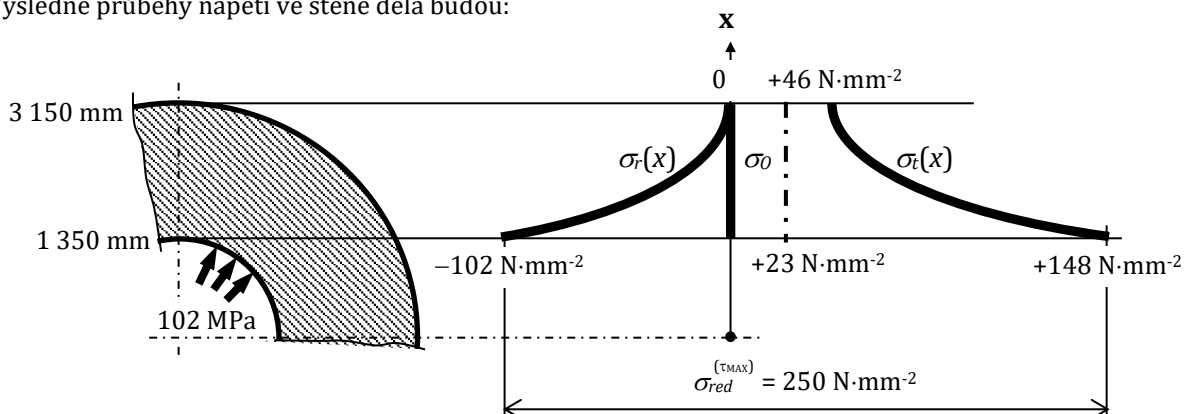
$$\sigma_r(r_1) = -125 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} \quad \text{a} \quad \sigma_r(r_2) = 0$$

$$\sigma_t(r_1) = 2 \cdot 22,95 + 102 = 147,9 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} \quad \text{a} \quad \sigma_t(r_2) = 2 \cdot 22,95 = 45,90 .$$

$$\sigma_{red}(r_1) = \sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1) = 147,9 - (-102) = 249,9 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

$$\sigma_D = \frac{\sigma_K}{k_{K \min}} = \frac{450}{1,8} = 250 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} .$$

- Výsledné průběhy napětí ve stěně děla budou:







## PŘÍKLAD 2.1 (SILNOSTĚNNÁ NÁDOBA – PEVNOSTNÍ TEORIE):

**Dáno:** Válec stacionárního hydraulického zvedáku má  $d = 100$  mm a  $D = 160$  mm. Celý je vyroben z oceli  $E = 2,1 \cdot 10^5$  N·mm<sup>-2</sup> a  $\sigma_K = 230$  N·mm<sup>-2</sup>. Při výpočtu uvažujte bezpečnost  $k = 5$ .

**Určit:** Maximální sílu  $F_{\max}$  na pístu válce při dodržení bezpečnosti  $k$ .

**Řešení:**

Jedná se o otevřenou tlakovou silnostěnnou nádobu, a tak ve válcové části budou vznikat pouze dvě napětí – tečné a radiální.

Oblast ovlivněnou dnem nebudeme řešit, protože zde vzniká podstatně složitější napjatost, která překračuje rozsah základní pružnosti a pevnosti.

Ve výpočtu předpokládáme nulový vnější přetlak:  $p_2 = 0$ .

Pro výpočet dovoleného tlaku  $p_{1D}$  podle hypotézy  $\tau_{\max}$  (Tresca) můžeme přímo dosadit:

$$(p_1 - p_2)_D \leq \frac{\sigma_D}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \Rightarrow (p_1)_D \leq \frac{\sigma_K}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right] = \frac{230}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{100}{160} \right)^2 \right] = 14,0 \text{ MPa} .$$

Pro výpočet podle hypotézy energetické (Huber-Mises-Hencky) musíme nejprve vyjádřit jednotlivá napětí na vnitřním povrchu válce jako funkce neznámého tlaku  $p_1$ :

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 ; K = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} ; \sigma_t(r_1) = 2 \cdot K + p_1 = p_1 \cdot \left( 2 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + 1 \right) = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} .$$

Tyto hodnoty nyní dosadíme do pevnostní podmínky pro dvojosou napjatost  $\sigma_t$  a  $\sigma_r$ :

$$\sqrt{\sigma_t(r_1)^2 + \sigma_r(r_1)^2 - \sigma_t(r_1) \cdot \sigma_r(r_1)} \leq \sigma_D \Rightarrow p_1 \cdot \sqrt{\left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 + (-1)^2 - \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot (-1)} \leq \frac{\sigma_K}{k} ,$$

odkud vychází:

$$(p_1)_D \leq \frac{\sigma_K}{k \cdot \sqrt{\left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 + 1 + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}}} = \frac{230}{5 \cdot \sqrt{\left( \frac{160^2 + 100^2}{160^2 - 100^2} \right)^2 + 1 + \frac{160^2 + 100^2}{160^2 - 100^2}}} = 15,8 \text{ MPa} .$$

Hledaná maximální síla pak bude:  $F_{\max} = (p_1)_D \cdot A_{\text{pístu}}$

$$\tau_{\max}: F_{\max} = 14,0 \cdot \pi \cdot 50^2 = 109\,956 \text{ N} .$$

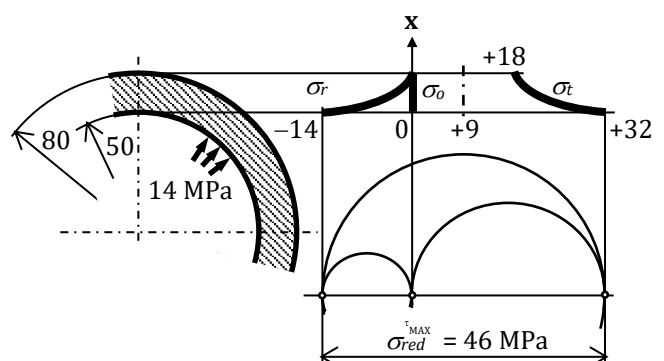
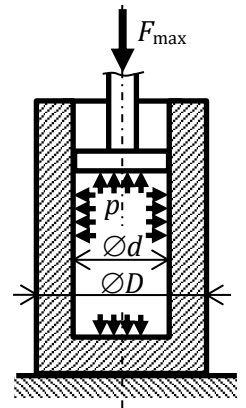
$$\text{Energ.: } F_{\max} = 15,8 \cdot \pi \cdot 50^2 = 124\,093 \text{ N} .$$

**Poznámka:**

Jednotlivé hodnoty podle  $\tau_{\max}$  jsou:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r(r_1) = -14 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} \\ K = 9 \text{ MPa} \\ \sigma_t(r_1) = +32 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{red} = 46 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} = \sigma_D$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r(r_2) = 0 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} \\ \sigma_t(r_2) = 18 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} \end{array} \right\}$$



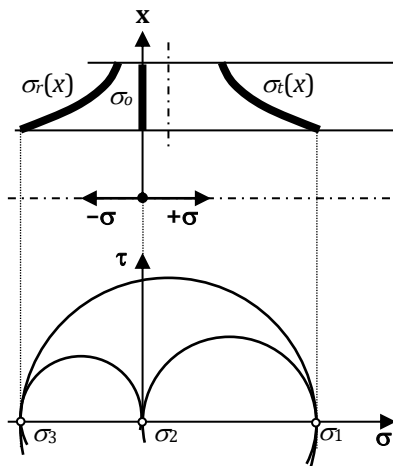
## PŘÍKLAD 2.2 (SILNOSTĚNNÁ NÁDOBA – OTEVŘENÁ A UZAVŘENÁ):

**Dáno:**  $r_1 = 100 \text{ mm}$ ;  $r_2 = 200 \text{ mm}$ ;  $p_1 = 50 \text{ MPa}$ ;  $p_2 = 5 \text{ MPa}$  a  $\sigma_D = 150 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ .

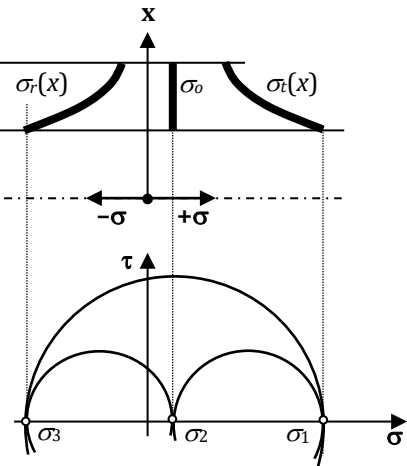
**Určit:** Proved'te pevnostní kontrolu pomocí energetické hypotézy pro: a) otevřenou nádobu, b) uzavřenou nádobu.

**Řešení:**

**a) OTEVŘENÁ NÁDOBA:**



**b) UZAVŘENÁ NÁDOBA:**



**Pevnostní podmínka dle energetické hypotézy (Huber-Mises-Hencky):**

$$\sigma_{red}^{energ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{[\sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1)]^2 + [\sigma_r(r_1) - \sigma_o]^2 + [\sigma_o - \sigma_t(r_1)]^2}.$$

**Shodné hodnoty pro oba typy nádoby:**

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{50 \cdot 100^2 - 5 \cdot 200^2}{200^2 - 100^2} = 10 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2},$$

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 = -50 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2},$$

$$\sigma_t(r_1) = 2 \cdot K + p_1 = 2 \cdot 10 + 50 = 70 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2},$$

**Rozdílné hodnoty pro oba typy nádoby:**

$$\sigma_o^{O.N.} = 0 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$$

$$\sigma_o^{U.N.} = K = 10 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}.$$

**Dvojosá (rovinná) napjatost:**

$$\sigma_{red}^{O.N.} = 104,4 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} < \sigma_D \quad (\text{rozdíl } 0,5\%)$$

**Trojosá (prostorová) napjatost:**

$$\sigma_{red}^{U.N.} = 103,9 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} < \sigma_D.$$

**Poznámka:**

V tomto případě, kdy se jedná o extrémně silnostěnnou nádobu (tloušťka stěny je  $t = 100 \text{ mm}$  při velikosti vnitřního poloměru  $r_1 = 100 \text{ mm}$ ), vychází osové napětí v uzavřené nádobě relativně malé ( $\sigma_o = 10 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ ), a proto je také rozdíl mezi uzavřenou a otevřenou nádobou malý.

Pokud bychom při zachování tlaků  $p_1$  a  $p_2$  ztenčili tloušťku stěny na polovinu ( $t = 50 \text{ mm}$ ) při zachování  $r_1 = 100 \text{ mm}$  a hodnotě  $r_2 = 150 \text{ mm}$ , vyšlo by osové napětí u uzavřené nádoby výrazně vyšší ( $\sigma_o = 31 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ ) a rozdíl redukováných napětí podle energetické metody mezi otevřenou a uzavřenou nádobou by také vzrostl:

$$\sigma_{red}^{O.N.} = 143,7 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} < \sigma_D \quad (\text{rozdíl } 2,4\%) \quad \sigma_{red}^{U.N.} = 140,3 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} < \sigma_D.$$



## PŘÍKLAD 2.3 (SILNOSTĚNNÁ NÁDOBA – OTEVŘENÁ A UZAVŘENÁ):

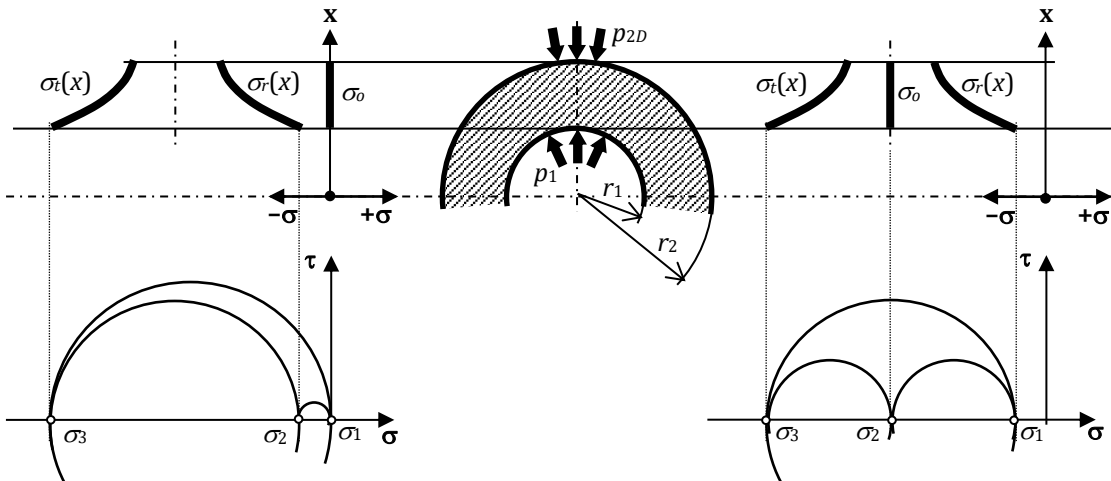
**Dáno:**  $r_1 = 50$  mm;  $r_2 = 100$  mm;  $p_1 = 5$  MPa a  $\sigma_D = 150$  N·mm<sup>-2</sup>.

**Určit:**  $p_{2D}$  podle hypotézy  $\tau_{MAX}$  (Tresca) pro: a) otevřenou nádobu, b) uzavřenou nádobu.

**Řešení:**

a) OTEVŘENÁ NÁDOBA:

b) UZAVŘENÁ NÁDOBA:



**Pevnostní podmínka dle  $\tau_{MAX}$  (Tresca):**

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} \leq \sigma_D, \text{ resp. } \sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_D.$$

$$\sigma_{red} = \sigma_o - \sigma_t(r_1) \leq \sigma_D$$

$$\sigma_{red} = \sigma_r(r_1) - \sigma_t(r_1) \leq \sigma_D.$$

**Shodné vyjádření konstanty  $K$  pro oba typy nádob:**

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_{2D} \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{5 \cdot 50^2 - p_{2D} \cdot 100^2}{100^2 - 50^2} = 1,67 - 1,33 \cdot p_{2D}.$$

**Dosazení vztahů pro  $\sigma_r(r_1)$  a  $\sigma_t(r_1)$  do pevnostní podmínky:**

$$0 - (2 \cdot K + p_1) \leq \sigma_D$$

$$-p_1 - (2 \cdot K + p_1) \leq \sigma_D.$$

**Číselné dosazení do pevnostní podmínky:**

$$0 - [2 \cdot (1,67 - 1,33 \cdot p_{2D}) + 5] \leq 150$$

$$5 - [2 \cdot (1,67 - 1,33 \cdot p_{2D}) + 5] \leq 150,$$

$$2,66 \cdot p_{2D} \leq 150 + 3,34 + 5$$

$$2,66 \cdot p_{2D} \leq 150 + 3,34 + 10.$$

**Výsledek:**

$$p_{2D}^{O.N.} \leq \frac{158,34}{2,66} = 59,5 \text{ MPa}$$

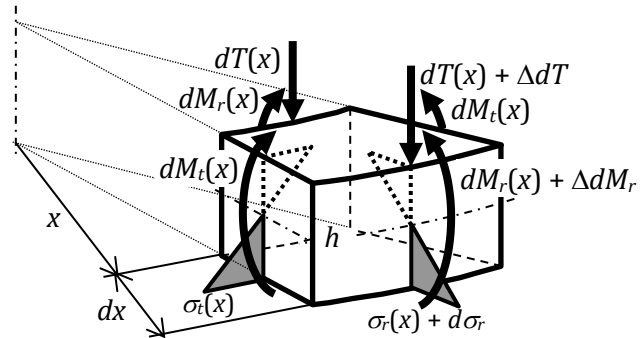
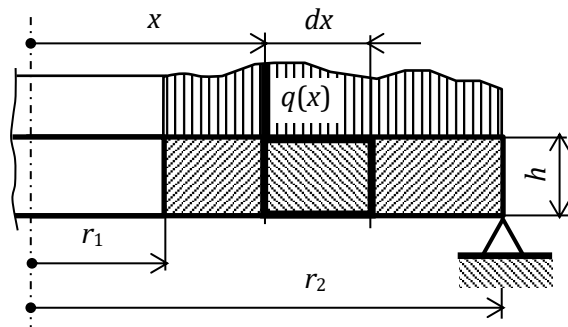
$$p_{2D}^{U.N.} \leq \frac{163,34}{2,66} = 61,4 \text{ MPa}.$$

**Poznámka:**

Rozdíl mezi otevřenou a uzavřenou nádobou není v tomto případě nijak velký (cca 3%), protože vnitřní tlak  $p_1$  je relativně malý. Např. pro  $p_1 = 25$  MPa by vyšlo  $p_{2D}^{O.N.} \leq 72,1$  MPa a  $p_{2D}^{U.N.} \leq 81,5$  MPa (rozdíl 13%).

### 3. ZÁKLADY TEORIE TENKÝCH KRUHOVÝCH ROTAČNĚ SYMETRICKÝCH DESEK

V tenké desce vznikají dvě ohybová napětí – ve směru tečném  $\sigma_t$  a ve směru radiálním  $\sigma_r$  – vyvolaná ohybovými momenty  $dM_t$  a  $dM_r$ .



Výsledná diferenciální rovnice má tvar:

$$d(\sigma_r(x) \cdot x) - \sigma_t(x) \cdot dx = -6 \cdot \frac{Q(x)}{2 \cdot \pi \cdot h^2} \cdot dx.$$

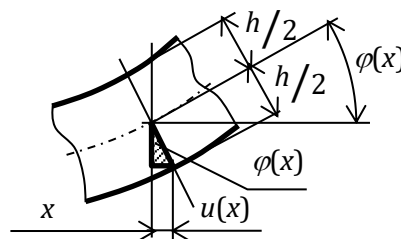
Jedná se o diferenciální rovnice se dvěma neznámými veličinami  $\sigma_t(x)$  a  $\sigma_r(x)$ .

Po doplnění deformační podmínky ve tvaru:

$$u(x) = \frac{h}{2} \cdot \varphi(x)$$

a vyjádření radiální a tečné deformace:

$$\varepsilon_r(x) = \frac{du}{dx} = \frac{h}{2} \cdot \varphi'(x) \quad \text{a} \quad \varepsilon_t(x) = \frac{u(x)}{x} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varphi(x)}{x}$$



dostaneme pomocí rozšířeného Hookova zákona tečné napětí  $\sigma_t(x)$  a radiální napětí  $\sigma_r(x)$  vyjádřené pomocí jediné neznámé – úhlu  $\varphi(x)$ :

$$\sigma_t(x) = E^+ \cdot \frac{h}{2} \cdot \left[ \frac{\varphi(x)}{x} + \mu \cdot \varphi'(x) \right] \quad \text{a} \quad \sigma_r(x) = E^+ \cdot \frac{h}{2} \cdot \left[ \varphi'(x) + \mu \cdot \frac{\varphi(x)}{x} \right].$$

Dosazením těchto vztahů do původní diferenciální rovnice se dvěma neznámými již získáme novou diferenciální rovnici druhého řádu s jedinou neznámou  $\varphi(x)$ :

$$\varphi''(x) \cdot x + \varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{x} = -\frac{6 \cdot Q(x)}{\pi \cdot E^+ \cdot h^3}.$$

Řešení diferenciální rovnice se bude skládat z homogenní části a z partikulárního řešení, které bude záležet na pravé straně řešené rovnice a může tak nabývat různých tvarů podle způsobu zatížení řešené desky:

$$\varphi(x) = \varphi_H(x) + \varphi_P(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x} + \varphi_P(x).$$

Integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$  opět záleží na okrajových podmínkách řešené desky.

**Poznámka:**

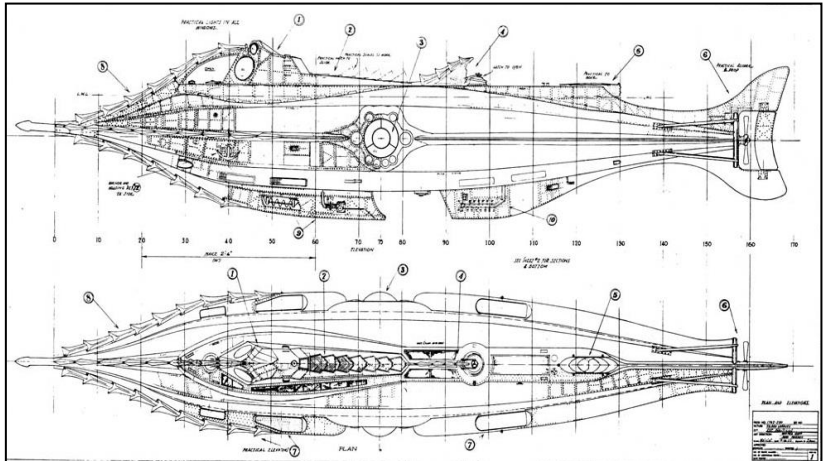
Vztahy pro napětí resp. znaménko v nich je stanoveno podle namáhání SPODNÍHO povrchu řešené desky: Je-li spodní povrch natahován, je znaménko „+“ a je-li spodní povrch stlačován, je znaménko „-“.



## PONORKA NAUTILUS

Ve Verneově románu *Dvacet tisíc mil pod mořem* vystupuje fiktivní postava Kapitána Nemo, který je konstruktérem, kapitánem a vlastníkem supermoderní ponorky *Nautilus*. S touto ponorkou brázdí oceány a s její pomocí se jako první člověk dostal na Jižní pól. Mimo to ještě Kapitán Nemo nakrátko vystupuje v románu *Tajuplný ostrov*, kde jej Verne nechal zemřít.

V případě ponorky *Nautilus* se Verne držel v mezích technické pravděpodobnosti, a proto působí i dnes velmi přesvědčivě. Ponorka byla dlouhá sedmdesát metrů a v nejsilnějším místě široká osm metrů. Měla dvojitý plášť z ocelových plátů a její základní váha činila tisíc pět set tun. Systém nádrží umožňoval ponorce libovolně pod vodou stoupat nebo klesat, a to až do hloubky přes deset tisíc metrů. Ponorka byla řízena směrovým a hloubkovým kormidlem, která ovládal kormidelník z kabiny částečně vyčnívající nad palubu a vybavené dvěma čočkovitými okny zasklenými křišťálovým sklem. Za kabinou byl umístěn velmi silný reflektor.

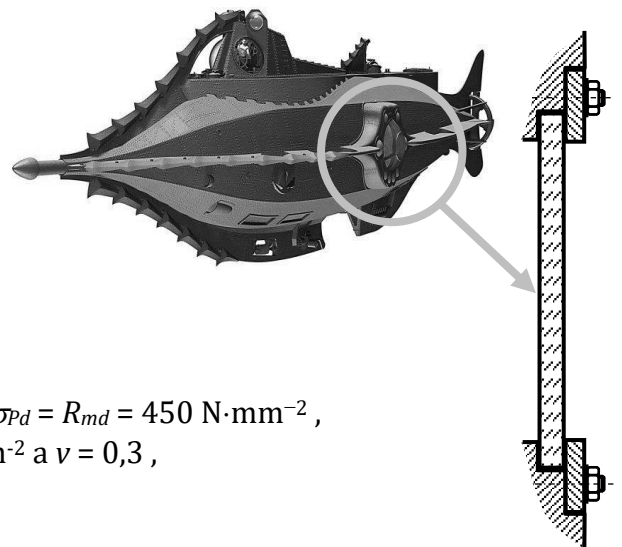


Pohon lodi a dalších zařízení zajišťovala elektřina získávaná ze sodíkových článků. Elektrické ovládání bylo využito i pro dálkové řízení strojovny z kormidelní kabiny. Šroub ponorky byl poháněn obrovskými elektromagnety a měl v průměru šest metrů. Díky němu mohla loď dosáhnout rychlosti až devadesát kilometrů za hodinu. Loď sice měla zařízení na výrobu kyslíku elektrolýzou vody, neměla však žádné zařízení, které by vzduch zbavovalo oxidu uhličitého, a proto bylo nutno ponorku větrat. Delší pobyt pod hladinou mohl tedy být pro posádku osudný. Ponorka nesloužila jen k vědeckovýzkumným účelům, ale též jako hrozná zbraň. Kapitán Nemo zásadně útočil na protivníka obrněnou přídi ponorky, kterou dokázal prorazit boky válečných lodí, a tak je potopit.

([https://cs.wikipedia.org/wiki/Nautilus\\_\(Verne\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Nautilus_(Verne))).

### PŘÍKLAD 3.0

Vypočtete, jakou tloušťku  $h$  by musela mít plochá část skleněného bočního průzoru ponorky *Nautilus*, aby se ponorka mohla bez problémů potopit do hloubky  $H$  pod hladinu moře. Dále vypočtete, jaký bude maximální průhyb desky v jejím středu  $w_{\max}$  při ponoru do maximální hloubky. Materiál průzoru je tvrzené křišťálové sklo. Pro bezpečný provoz je třeba zaručit minimální bezpečnost  $k$ .



#### Dáno:

Požadovaná hloubka ponoru  $H = 10\,000$  m ,

průměr ploché části průzoru  $D = 0,5$  m ,

meze pevnosti v tahu/tlaku  $\sigma_{Pt} = R_{mt} = 300$  N·mm<sup>-2</sup>,  $\sigma_{Pd} = R_{md} = 450$  N·mm<sup>-2</sup> ,

modul pružnosti a Poissonovo číslo  $E = 6,3 \cdot 10^4$  N·mm<sup>-2</sup> a  $\nu = 0,3$  ,

minimální zaručená bezpečnost  $k = 1,5$  ,

průměrná hustota mořské vody  $\rho = 1\,020$  kg·m<sup>-3</sup> .

**Řešení:**

Nejprve na základě hydrostatiky určíme tlak, který bude působit v hloubce  $H = 10\,000$  m:

$$p = \rho \cdot g \cdot H = 1\,020 \cdot 9,81 \cdot 10\,000 = 100,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 100,1 \text{ MPa}.$$

Protože  $D \ll H$  stačí uvažovat konstantní zatížení celé desky  $q_o = p$ .

Výpočtový model je deska bez otvoru zatížená konstantním spojitým tlakem  $q_o$ . Příčné zatížení desky  $Q(x)$ , které dosadíme do pravé strany bude:

$$Q(x) = q_o \cdot \pi \cdot x^2, \text{ kde } x \in \langle 0; D/2 \rangle.$$

Řešíme tedy diferenciální rovnici:

$$\varphi''(x) \cdot x + \varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{x} = -\frac{6 \cdot q_o \cdot \pi}{\pi \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot x^2.$$

Partikulární integrál odhadneme ve tvaru:  $\varphi_p(x) = K \cdot x^3$  a jeho derivace budou:

$$\varphi'_p(x) = 3 \cdot K \cdot x^2 \text{ a } \varphi''_p(x) = 6 \cdot K \cdot x.$$

Neznámou konstantu  $K$  získáme dosazením partikulárního řešení  $\varphi_p(x)$  a jeho derivací do původní diferenciální rovnice, protože i toto partikulární řešení musí rovnici vyhovovat:

$$6 \cdot K \cdot x \cdot x + 3 \cdot K \cdot x^2 - \frac{K \cdot x^3}{x} = -\frac{6 \cdot q_o \cdot \pi}{\pi \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot x^2.$$

Odkud dostáváme:

$$8 \cdot K = -\frac{6 \cdot q_o \cdot \pi}{\pi \cdot E^+ \cdot h^3} \Rightarrow K = -\frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3}.$$

Řešení této diferenciální rovnice můžeme napsat jako:

$$\varphi(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x} - \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot x^3.$$

Konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme z okrajových podmínek pro uložení resp. uspořádání desky:

OP: 1.  $\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$  (nezapomeňte na pravidlo, že nulou se nesmí dělit),

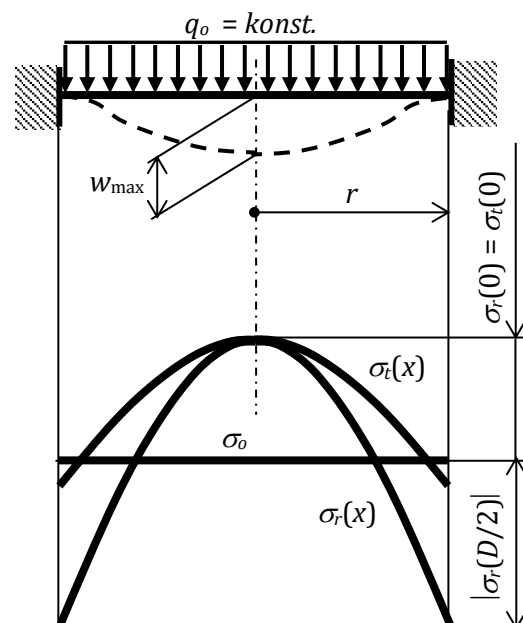
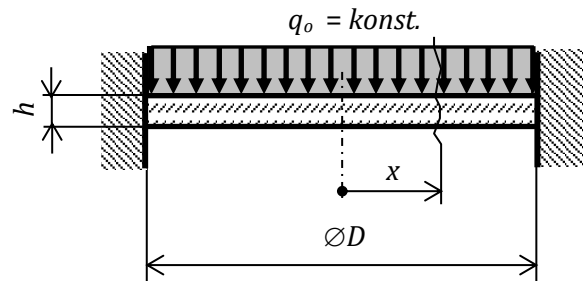
$$2. \varphi(D/2) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot \frac{D}{2} - \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 \Rightarrow C_1 = \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2.$$

Úplné řešení diferenciální rovnice pro úhel natočení zadané tenké kruhové desky pak je:

$$\varphi(x) = \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \left[ \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot x - x^3 \right].$$

Pro výpočet deformací a následně napětí musíme stanovit funkce:

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \left[ \left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2 \right] \quad \text{a} \quad \varphi'(x) = \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \left[ \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 3 \cdot x^2 \right]$$





a tyto funkce dosadíme do vztahů pro radiální a tečnou deformaci tenké kruhové desky:

$$\varepsilon_r(x) = \frac{h}{2} \cdot \varphi'(x) = \frac{3 \cdot q_o}{8 \cdot E^+ \cdot h^2} \cdot \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - 3 \cdot x^2 \right],$$

$$\varepsilon_t(x) = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{3 \cdot q_o}{8 \cdot E^+ \cdot h^2} \cdot \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - x^2 \right].$$

Následně vypočtené deformace dosadíme do rozšířeného Hookova zákona:

$$\sigma_r(x) = E^+ \cdot [\varepsilon_r(x) + \nu \cdot \varepsilon_t(x)] = \frac{3 \cdot q_o}{8 \cdot h^2} \cdot \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cdot (1 + \nu) - x^2 \cdot (3 + \nu) \right],$$

$$\sigma_t(x) = E^+ \cdot [\varepsilon_t(x) + \nu \cdot \varepsilon_r(x)] = \frac{3 \cdot q_o}{8 \cdot h^2} \cdot \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cdot (1 + \nu) - x^2 \cdot (1 + 3 \cdot \nu) \right].$$

Potřebnou tloušťku desky  $h_D$  určíme pomocí pevnostní podmínky. Protože v desce vzniká pouze rovinná napjatost a uprostřed desky jsou obě napětí kladná, resp. na vnějším okraji jsou obě napětí záporná, stačí použít hypotézu  $\sigma_{MAX}$ .

Mezní hodnoty jsou:  $\sigma_{Dt} = \frac{\sigma_{Pt}}{k}$  a  $\sigma_{Dd} = \frac{\sigma_{Pd}}{k}$ .

Uprostřed desky (tah):

$$\sigma_{red}^{\sigma_{MAX}} = \sigma_{max} = \sigma_t(0) = \sigma_r(0) = \frac{3 \cdot q_o}{8 \cdot h^2} \cdot \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cdot (1 + \nu) \right].$$

Pevnostní podmínka bude:

$$\frac{3 \cdot q_o}{8 \cdot h^2} \cdot \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cdot (1 + \nu) \right] = \frac{\sigma_{Pt}}{k} \Rightarrow h_{Dt} = \sqrt{\frac{3 \cdot q_o \cdot k}{8 \cdot \sigma_{Pt}} \cdot \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cdot (1 + \nu) \right]}.$$

Na kraji desky (tlak):

$$\sigma_{red}^{\sigma_{MAX}} = |\sigma_{min}| = |\sigma_r(r)| = \left| -\frac{3 \cdot q_o \cdot D^2}{16 \cdot h^2} \right| = \frac{3 \cdot q_o \cdot D^2}{16 \cdot h^2}.$$

Pevnostní podmínka bude:

$$\frac{3 \cdot q_o \cdot D^2}{16 \cdot h^2} = \frac{\sigma_{Pd}}{k} \Rightarrow h_{Dd} = \sqrt{\frac{3 \cdot q_o \cdot k \cdot D^2}{16 \cdot \sigma_{Pd}}}.$$

Dosazením číselných hodnot dostáváme:

$$\left. \begin{aligned} h_{Dt} &= \sqrt{\frac{3 \cdot 100,1 \cdot 1,5}{8 \cdot 300} \cdot \left[ \left( \frac{500}{2} \right)^2 \cdot (1 + 0,3) \right]} = 123,5 \text{ mm} \\ h_{Dd} &= \sqrt{\frac{3 \cdot 100,1 \cdot 1,5 \cdot 500^2}{16 \cdot 450}} = 125,1 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_D = \max(h_{Dt}; h_{Dd}) = h_{Dd} = 125,1 \text{ mm}.$$

Maximální průhyb desky  $w_{\max}$  určíme z průhybové plochy, kterou získáme integrací funkce  $\varphi(x)$ :

$$w(x) = -\int \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cdot x - x^3 \right] \cdot dx + C_3 = \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \left( \frac{x^4}{4} - \frac{D^2 \cdot x^2}{8} \right) + C_3 .$$

Integrační konstantu  $C_3$  určíme z podmínky pro uložení desky – vetknutí na jejím kraji:

$$w(D/2) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \left( \frac{D^4}{64} - \frac{D^2 \cdot D^2}{32} \right) + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \frac{D^4}{64} .$$

A tedy:

$$w(x) = \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \left( \frac{x^4}{4} - \frac{D^2 \cdot x^2}{8} + \frac{D^4}{64} \right) \text{ resp. } w_{\max} = w(0) = C_3 = \frac{3 \cdot q_o}{4 \cdot E^+ \cdot h^3} \cdot \frac{D^4}{64} .$$

Dosazením číselných hodnot dostáváme:

$$w_{\max} = \frac{3 \cdot 100,1}{4 \cdot \frac{6,3 \cdot 10^4}{1-0,3^2} \cdot 125,1^3} \cdot \frac{500^4}{64} = 0,55 \text{ mm} .$$

### PŘÍKLAD 3.1 (JEDNODUCHÁ DESKA):

**Dáno:**  $r$ ;  $h$  ( $h \ll r$ );  $m$ ;  $E$  a  $\nu$ .

**Určit:** Diferenciální rovnici popisující chování zadané desky a  $\sigma_r(x)$  a  $\sigma_t(x)$ .

**Řešení:**

Jedná se o desku bez otvoru zatíženou jen momentem  $m$ , na kterou tedy nepůsobí žádné příčné zatížení ( $Q(x) = 0$ ), a proto bude pravá strana diferenciální rovnice rovna 0:

$$\varphi''(x) \cdot x + \varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{x} = 0 ,$$

což odpovídá základní rovnici silnostěnných nádob a řešení tedy stanovíme stejně jako u nádob, tedy bez partikulární části ve tvaru:

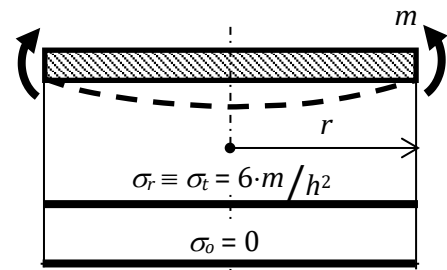
$$\varphi(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x} .$$

Z matematického pohledu musí být  $C_2 = 0$ , protože pro  $x = 0$  by výraz  $C_2/x$  neměl smysl.

Průběh funkce  $\varphi(x)$  tedy bude jen lineární funkcí souřadnice  $x$ . Tím se zjednoduší vztahy pro napětí vyjádřené pomocí vztahů pro deformace a rozšířeného Hookova zákona:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(x) = \frac{h}{2} \cdot \varphi'(x) = \frac{h}{2} \cdot C_1 & \Rightarrow \sigma_r(x) = E^+ \cdot [\varepsilon_r(x) + \nu \cdot \varepsilon_t(x)] = E^+ \cdot \frac{h}{2} \cdot C_1 \cdot (1 + \nu) \\ \varepsilon_t(x) = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{h}{2} \cdot C_1 & \Rightarrow \sigma_t(x) = E^+ \cdot [\varepsilon_t(x) + \nu \cdot \varepsilon_r(x)] = E^+ \cdot \frac{h}{2} \cdot C_1 \cdot (1 + \nu) \end{aligned}$$

Znamená to tedy, že oba průběhy budou totožné a jejich velikost určíme z okrajové podmínky, kdy na vnějším okraji musí být radiální napětí  $\sigma_r$  vyvolané pouze ohybovým momentem  $m$ . Protože moment způsobuje „natahování“ spodního vlákna, budeme radiální napětí uvažovat kladné:







$$\sigma_r(r) = + \frac{m}{W_{or}} = + \frac{m}{\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h^2} = + \frac{6 \cdot m}{h^2} .$$

Hledané průběhy napětí v této tenké kruhové desce jsou:

$$\sigma_r(x) = + \frac{6 \cdot m}{h^2} \quad \text{a} \quad \sigma_t(x) = + \frac{6 \cdot m}{h^2} .$$

**Poznámka:**

Pokud bychom dál chtěli řešit funkci  $\varphi(x)$ , museli bychom stanovit konstantu  $C_1$ .

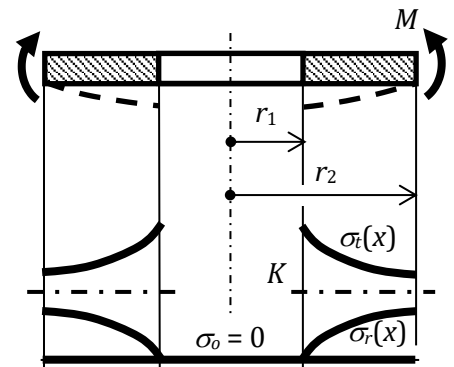
### PŘÍKLAD 3.2 (JEDNODUCHÁ DESKA):

**Dáno:**  $r_1$ ;  $r_2$ ;  $h$  ( $h \ll r_{1,2}$ );  $M$ ;  $E$  a  $\nu$ .

**Určit:**  $\sigma_r(x)$  a  $\sigma_t(x)$ .

**Řešení:**

Deska s otvorem uprostřed je zatížena jen momentem  $M$  a nepůsobí na ní žádné příčné zatížení  $Q(x) = 0$ . Proto bude pravá strana diferenciální rovnice rovna 0, což odpovídá základní rovnici silnostěnných nádob, a proto k řešení použijeme vztahy:



$$\sigma_r(x) = K - \frac{C}{x^2} \quad \text{a} \quad \sigma_t(x) = K + \frac{C}{x^2} .$$

Znamená to tedy, že oba průběhy budou polytropy, které budou mít osu v hodnotě konstanty  $K$ . Pro výpočet konstant  $K$  a  $C$  využijeme vztahy platné pro silnostěnné nádoby pouze s tím, že okrajové podmínky sestavíme přímo z ohybových momentů  $M_{r_1} = 0$  a  $M_{r_2} = +M$ :

$$\sigma_r(r_1) = \frac{M_{r_1}}{W_{or_1}} = \frac{0}{\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot h^2} = 0 \quad \text{a} \quad \sigma_r(r_2) = \frac{M_{r_2}}{W_{or_2}} = \frac{+M}{\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot h^2} = + \frac{3 \cdot M}{\pi \cdot r_2 \cdot h^2} .$$

Konstanty  $K$  a  $C$  v tomto případě budou:

$$K = \frac{3 \cdot M}{\pi \cdot r_2 \cdot h^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad C = \frac{3 \cdot M}{\pi \cdot r_2 \cdot h^2} \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} .$$

Zbývající okrajové hodnoty tečných napětí  $\sigma_t(r_1)$  a  $\sigma_t(r_2)$  tedy budou:

$$\sigma_t(r_1) = 2 \cdot \frac{3 \cdot M}{\pi \cdot r_2 \cdot h^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2 \cdot K \quad \text{a} \quad \sigma_t(r_2) = \frac{3 \cdot M}{\pi \cdot r_2 \cdot h^2} \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2 \cdot K - \sigma_r(r_2) .$$

Nejnamáhanějším místem této desky bude spodní strana vnitřního otvoru uprostřed desky, kde bude redukované napětí podle teorie  $\tau_{MAX}$ :

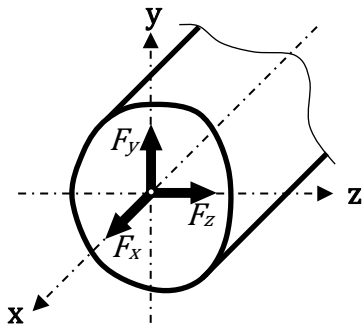
$$\sigma_{red.}^{\tau_{MAX}} = \sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1) = 2 \cdot \frac{3 \cdot M}{\pi \cdot r_2 \cdot h^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - 0 = \frac{6 \cdot M}{\pi \cdot h^2} \cdot \frac{r_2}{r_2^2 - r_1^2} = 2 \cdot K .$$

**Poznámka:**

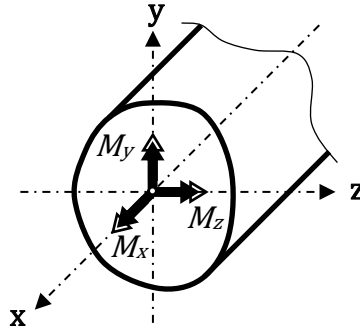
Maximální redukované napětí je rovno právě dvojnásobku konstanty  $K$ .

## 4. ZÁKLADY TEORIE KOMBINOVANÉHO NAMÁHÁNÍ

Vnitřní účinky působící na těleso (prut) rozdělíme na silové a momentové:



SÍLY:  $F_x, F_y, F_z$

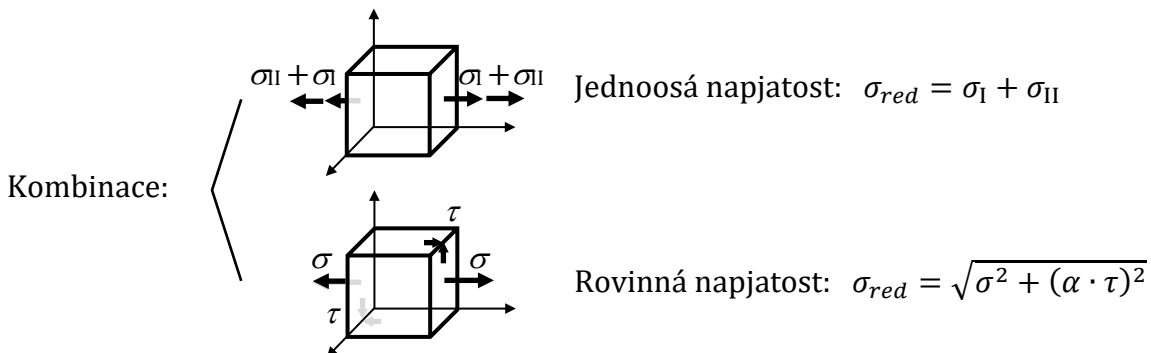


MOMENTY:  $M_x, M_y, M_z$

Obvykle značíme:  $F_x = N$  ;  $F_y = T_y$  ;  $F_z = T_z$  ;  $M_x = M_K$  ;  $M_y = M_{oy}$  a  $M_z = M_{oz}$ .

Normálová napětí  $\sigma$  vznikají působením  $N, M_{oy}$  a  $M_{oz}$ .

Smyková napětí  $\tau$  vznikají působením  $T_y, T_z$  a  $M_K$ .



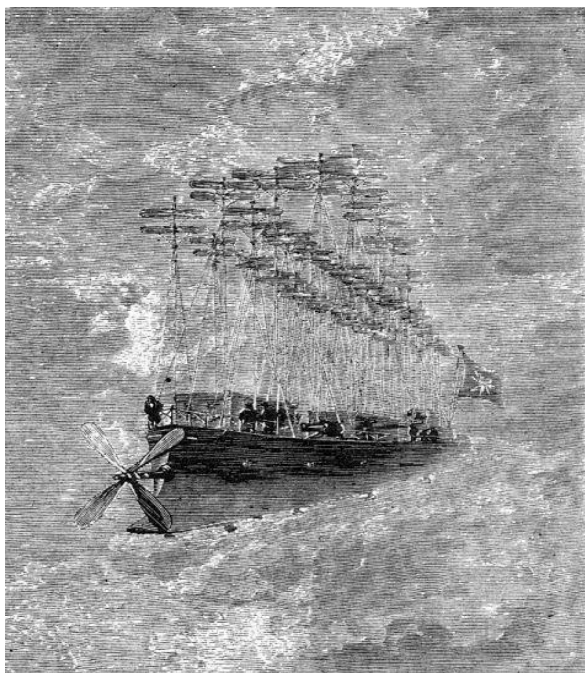
### Schéma vzniku typů napjatosti při kombinovaném namáhání

	Tah/tlak 	Ohyb 	Smyk (krut) 	Smyk (pos. síla) 
Tah/tlak 	 jednoosá napjatost	 jednoosá napjatost	 rovinná napjatost	 rovinná napjatost
Ohyb 		 jednoosá napjatost	 rovinná napjatost	 rovinná napjatost
Smyk (krut) 			 rovinná napjatost	 rovinná napjatost
Smyk (pos. síla) 				 rovinná napjatost



## LOĎ ALBATROS

**Robur Dobyvatel** je dobrodružný vědeckofantastický román z cyklu *Podivuhodné cesty*, který vyšel v roce 1886 v originálním názvu *Robur le Conquérant*. Záhadný inženýr Robur se na začátku



příběhu vnutí na zasedání filadelfského leteckého klubu. Zatímco členové vedou diskuzi o konstrukci říditelných vzducholodí, Robur představí své vznášedlo těžší než vzduch, které je ve všech ohledech lepší než vzducholod'. Krátce na to Robur unese předsedu klubu a zapisovatele na palubu své lodi Albatros a hodlá s nimi uskutečnit během tří týdnů dobrodružnou cestu kolem světa a předvést jim přednosti své lodi.

Roburův *Albatros* bylo letadlo poháněné elektřinou, které vypadalo jako námořní loď. Postaveno bylo ze speciálního lehkého, ale tvrzeného lisovaného papíru, který byl tvrdší než ocel. Mělo třicet metrů dlouhou a čtyři metry širokou palubu se zábradlím. Na zádi v poslední kajutě byla kabina inženýra Robura, jídelna a také zasklená kabina pro kormidelníka. Letadlo se vznášelo na principu helikoptéry, jejíž vznik v knize Verne vlastně předpověděl. Svislých vrtulových rotorů měl *Albatros* celkem sedmatřicet, patnáct vpředu,

patnáct po stranách a sedm vyšších uprostřed. Každý rotor měl dvě protiběžné vrtule, což zajišťovalo stabilitu lodi, která by se jinak otáčela kolem své osy. Všechny vrtule poháněly elektromotory napájené elektřinou z bateriových článků. Maximální letová rychlost *Albatrosu* byla 200 km/hod. Posádka lodi Albatros byla jen šestičlenná.

([https://cs.wikipedia.org/wiki/Robur\\_Dobyvatel](https://cs.wikipedia.org/wiki/Robur_Dobyvatel))

## Příklad 4.0

Stanovte za použití hypotézy  $\tau_{MAX}$  (Tresca) potřebné průměry hlavních hřídelů vertikálních vrtulí lodi Albatros zjednodušeně namáhaných kombinací tahu a krutu, které musí zaručit její bezpečný let.

### Dáno:

Hmotnost lodi včetně baterií a elektromotorů  $m_L = 25\,000$  kg,

hmotnost zbraní, munice a zásob na palubě  $m_Z = 11\,000$  kg,

hmotnost posádky  $m_P = 500$  kg,

počet rotorů  $n = 37$ ,

materiál rotorů je dural s mezí kluzu  $\sigma_K = 80$  N·mm<sup>-2</sup>,

bezpečnost rotorů vůči mezi kluzu  $k_K = 2,0$ .

### Řešení:

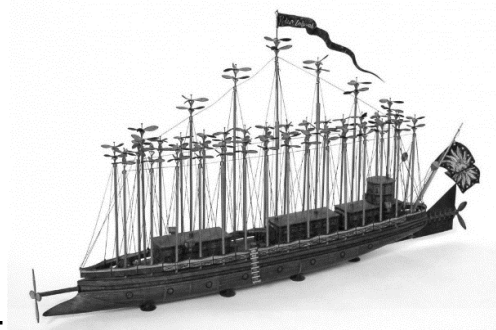
Celková hmotnost, kterou musí rotory „udržet“ ve vzduchu je:

$$m_C = m_L + m_Z + m_P = 36\,500 \text{ kg.}$$

Tah každého vrtulového hřídele tak musí být:

$$F_T = \frac{m_C \cdot g}{n} = \frac{36\,500 \cdot 9,81}{37} \approx 9\,700 \text{ N.}$$

Krouticí moment elektromotorů působící na každý vrtulový hřídel je  $M_K = 50$  N·m.



Na hlavní vrtulové hřídele bude ve zjednodušeném modelu současně působit:

**a) Normálové napětí**  
konstantní v celém průřezu

$$\sigma = \frac{F_T}{A} = \frac{4 \cdot F_T}{\pi \cdot d^2}$$

**b) Smykové napětí**  
maximální na povrchu hřídelů

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot d^3}$$

Pevnostní podmínka podle hypotézy  $\tau_{MAX}$  (Tresca) má tvar:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + (2 \cdot \tau)^2} = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot F_T}{\pi \cdot d^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot d^3}\right)^2} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_K}{k_K}$$

Protože v rovnici jsou členy  $d^2$  a  $d^3$ , resp.  $d^4$  a  $d^6$  existují dva možné přístupy řešení:

### 1. Pomocí bi-kubické rovnice:

$$\left(\frac{\sigma_K}{k_K}\right)^2 \cdot d^6 - \left(\frac{4 \cdot F_T}{\pi}\right)^2 \cdot d^4 - \left(2 \cdot \frac{16 \cdot M_K}{\pi}\right)^2 = 0$$

Po dosazení zadaných hodnot bude:

$$\left(\frac{80}{2}\right)^2 \cdot d^6 - \left(\frac{4 \cdot 9\,700}{\pi}\right)^2 \cdot d^4 - \left(2 \cdot \frac{16 \cdot 50\,000}{\pi}\right)^2 = 0$$

Tato rovnice má jeden reálný kořen  $d_D = 24,56$  mm a zbývající jsou komplexně sdružené.

### 2. Pomocí postupného řešení:

- nejprve vyřešíme pouze samostatný tah:

$$\sigma = \frac{F_T}{A} = \frac{4 \cdot F_T}{\pi \cdot d^2} \leq \frac{\sigma_K}{k_K} \Rightarrow d_{D-tah} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 9\,700 \cdot 2,0}{\pi \cdot 80}} \approx 17,57 \text{ mm}$$

- poté vyřešíme pouze samostatný krut (dle hypotézy  $\tau_{MAX}$ , kdy  $\alpha = 2$ ):

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot d^3} \leq \frac{\sigma_K}{2 \cdot k_K} \Rightarrow d_{D-krut} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 50\,000 \cdot 2 \cdot 2,0}{\pi \cdot 80}} \approx 23,35 \text{ mm}$$

- dále volíme:  $d_I > \max(d_{D-tah}; d_{D-krut}) = \max(17,57; 23,35) = 25$  mm.

- pro zvolené  $d_I = 25$  mm provedeme pevnostní kontrolu:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 9\,700}{\pi \cdot 25^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{16 \cdot 50\,000}{\pi \cdot 25^3}\right)^2} = 38,11 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} \leq \frac{80}{2,0} = 40 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Navržený rozměr  $d_I$  vyhovuje pevnostní podmínce, a proto  $d_D = d_I = 25$  mm.

#### Poznámky:

Je vidět, že tento výsledek je ve shodě s předchozím řešením bi-kubické rovnice.

Pokud bychom zvolili „jen“  $d_I = 24$  mm, vyšlo by redukované napětí:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 9\,700}{\pi \cdot 24^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{16 \cdot 50\,000}{\pi \cdot 24^3}\right)^2} = 42,63 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} > \frac{80}{2,0} = 40 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Pevnostní podmínka by tak nebyla splněna a výpočet bychom museli opakovat pro nově navržené  $d_{II} > d_I$ .



## PŘÍKLAD 4.1 (EXCENTRICKÝ TLAK):

**Dáno:**  $\sigma_{Dt} = 150 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ ,  $\sigma_{Dd} = 200 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ ,  $a = 20 \text{ mm}$ ;  $F = 10\,000 \text{ N}$ .

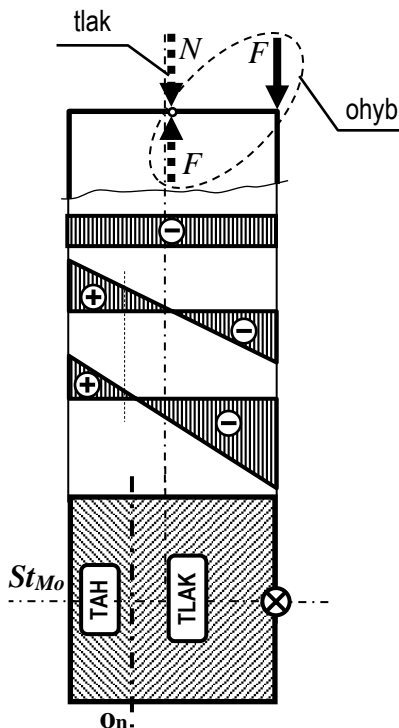
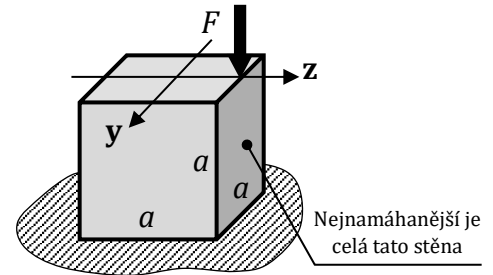
**Určit:**  $k$  (bezpečnost vzhledem k dovoleným hodnotám).

**Řešení:**

### 1. NAMÁHÁNÍ TLAKEM:

$$N = F = 10\,000 \text{ N}$$

$$\sigma_t = -\frac{N}{A} = -\frac{F}{a^2} = -\frac{10\,000}{20^2} = -25 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$$



### 2. NAMÁHÁNÍ OHYBEM (zde vzhledem k ose y):

$$M_{oy} = F \cdot a/2 = 10\,000 \cdot 20/2 = 1 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$\sigma_o \text{ max/min} = \pm M_{oy}/W_{oy} = \pm 6 \cdot M_{oy}/a^3 = \pm 75 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$$

### 3. REDUKOVANÉ NAPĚTÍ:

$$\sigma_{red} = \begin{cases} \text{(tlak): } |\sigma_t + \sigma_o| = |-25 - 75| = 100 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} \\ \text{(tah): } \sigma_t - \sigma_o = -25 - (-75) = +50 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} \end{cases}$$

### 4. PEVNOSTNÍ KONTROLA:

$$\text{Tah: } k_t = \sigma_{Dt}/\sigma_{red}(\text{tah}) = 150/50 = 3,0$$

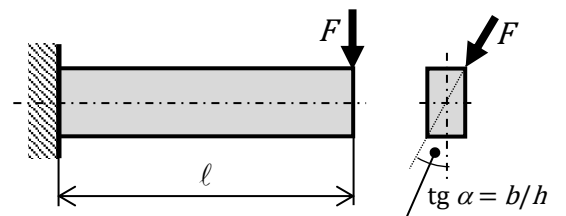
$$\text{Tlak: } k_d = \sigma_{Dd}/\sigma_{red}(\text{tlak}) = 200/100 = 2,0$$

$$k = \min(k_t; k_d) = 2,0$$

## PŘÍKLAD 4.2 (ŠIKMÝ OHYB):

**Dáno:**  $\sigma_D = 120 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ ,  
 $\ell = 0,6 \text{ m}$ ,  $b = 30 \text{ mm}$ ;  $h = 60 \text{ mm}$ ;  $F = 2\,000 \text{ N}$ .

**Určit:** -  $\sigma_{red}$  (a provést pevnostní kontrolu).  
-  $v_F$ ,  $w_F$ , resp.  $d_F$  (deformace volného konce).



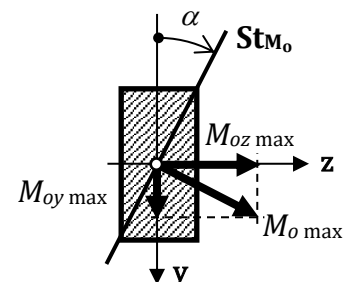
**Řešení:**

### Pevnostní kontrola nosníku při šikmém ohybu:

Vektor ohybového momentu  $M_{o \text{ max}} = F \cdot \ell$  působící kolmo ke stopě ohybového momentu  $\mathbf{St}_m$ , rozložíme na složky ve směrech hlavních centrálních os průřezu ( $y$  a  $z$ ):

#### 1. OHYB K OSE $y$ :

$$M_{oy \text{ max}} = M_{o \text{ max}} \cdot \sin \alpha = 0,446 \cdot F \cdot \ell ,$$



## 2. OHYB K OSE z:

$$M_{oz \max} = M_{o \max} \cdot \cos \alpha = 0,895 \cdot F \cdot \ell .$$

## 3. GEOMETRIE PROFILU (vztah mezi stopou ohybového momentu a neutrální osou)

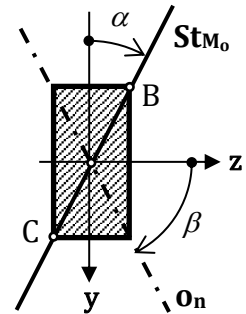
Nejprve pomocí úhlu  $\alpha$  stopy ohybového momentu  $St_{M_o}$  určíme polohu neutrální osy  $o_n$ .

$$\tan \alpha = b/h \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \beta = (J_z/J_y) \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

$$\tan \alpha = b/h = 30/60 = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 26,5^\circ ,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \cdot h^3}{b^3 \cdot h} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{60}{30}\right)^2 \cdot 0,5 = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 63,5^\circ .$$

Z výsledku je patrné, že neutrální osa  $o_n$  je tvořena druhou úhlopříčkou obdélníkového průřezu a nejnamáhanějšími tudíž budou vrcholy obdélníka ležící na stopě ohybového momentu  $St_{M_o}$  (body B a C).



## 4. REDUKOVANÉ NAPĚTÍ:

V bodě B jsou obě složky napětí kladné:

$$\sigma_{red}^B = \sigma_{oy \max} + \sigma_{oz \max} = \frac{M_{oy}}{W_{oy}} + \frac{M_{oz}}{W_{oz}} = \frac{0,446 \cdot F \cdot \ell}{\frac{1}{6} \cdot b^2 \cdot h} + \frac{0,895 \cdot F \cdot \ell}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2} .$$

V bodě C jsou obě složky napětí záporné:

$$\sigma_{red}^C = \left| \sigma_{oy \min} + \sigma_{oz \min} \right| = \left| -\frac{M_{oy}}{W_{oy}} - \frac{M_{oz}}{W_{oz}} \right| = \left| -\frac{0,446 \cdot F \cdot \ell}{\frac{1}{6} \cdot b^2 \cdot h} - \frac{0,895 \cdot F \cdot \ell}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2} \right| .$$

## 5. PEVNOSTNÍ KONTROLA:

Výsledné redukované napětí bude tedy v obou bodech stejné:

$$\sigma_{red}^B = \sigma_{red}^C = \frac{0,446 \cdot 2\,000 \cdot 600}{\frac{1}{6} \cdot 30^2 \cdot 60} + \frac{0,895 \cdot 2\,000 \cdot 600}{\frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 60^2} = 119,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} .$$

Výsledná pevnostní podmínka bude mít tvar:

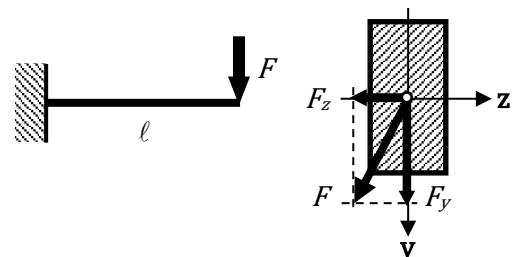
$$\sigma_{red}^B = \sigma_{red}^C = 119,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} < 120 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} = \sigma_D .$$

Pevnostní podmínka je splněna – nosník namáhaný šikmým ohybem pevnostně vyhovuje.

## Deformace konce nosníku při šikmém ohybu:

Deformace budeme řešit samostatně ve směru osy  $y$  ( $v_F$ ) a samostatně ve směru osy  $z$  ( $w_F$ ).

Pro vetknutý nosník délky  $\ell$  zatížený na volném konci osamělou silou  $F$  využijeme známé vztahy:



## 1. DEFORMACE K OSE z:

$$v_F = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_y \cdot \ell^3}{E \cdot J_z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot \ell^3}{E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\,000 \cdot \cos 26,5^\circ \cdot 600^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{30 \cdot 60^3}{12}} = 1,14 \text{ mm} ,$$



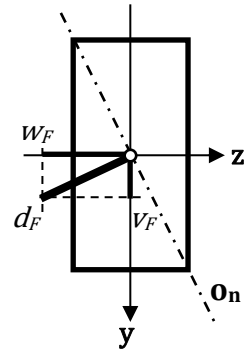
## 2. DEFORMACE K OSE z:

$$w_F = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_z \cdot \ell^3}{E \cdot J_y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot \ell^3}{E \cdot \frac{b^3 \cdot h}{12}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\,000 \cdot \sin 26,5^\circ \cdot 600^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{30^3 \cdot 60}{12}} = 2,27 \text{ mm}.$$

## 3. VÝSLEDNÁ DEFORMACE:

Výslednou deformaci  $d_F$  určíme pomocí Pythagorovy věty:

$$d_F = \sqrt{v_F^2 + w_F^2} = \sqrt{1,14^2 + 2,27^2} = 2,57 \text{ mm}.$$



## PŘÍKLAD 4.3 (OHYB A KRUT):

**Dáno:**  $\sigma_D = 200 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  $F = 1\,000 \text{ N}$ ,  $a = 500 \text{ mm}$ ,  
 $\ell = 1\,000 \text{ mm}$ .

**Určit:**  $\varnothing d_D$  (dovolený - vyhovující - průměr hřídele).

**Řešení:**

### 1. NAMÁHÁNÍ OHYBEM:

Největší ohybový moment nastává v místě vetknutí hřídele:

$M_{o \max} = F \cdot \ell$  a maximální ohybové napětí vzniká v horním a dolním vlákně průřezu:

$$\sigma_{o \max} = \frac{M_{o \max}}{W_o} = \frac{32 \cdot F \cdot \ell}{\pi \cdot d^3}.$$

### 2. NAMÁHÁNÍ KRUTEM:

Krouticí moment je konstantní po celé délce hřídele  $M_{K \max} = F \cdot a$  a maximální smykové napětí vzniká na celém vnějším povrchu průřezu:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K \max}}{W_K} = \frac{16 \cdot F \cdot a}{\pi \cdot d^3}.$$

### 3. REDUKOVANÉ NAPĚTÍ:

Předpokládáme, že se jedná o houževnatý materiál, a proto použijeme teorie platné pro houževnatý materiál -  $\tau_{\max}$  a energetickou:

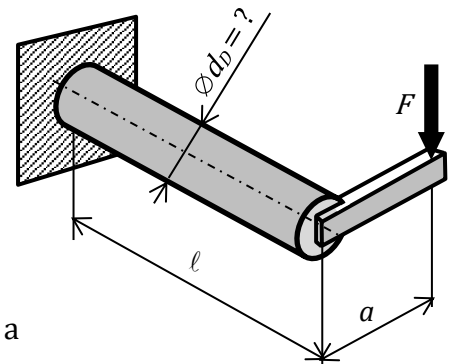
$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{o \max}^2 + (\alpha \cdot \tau_{\max})^2} = \sqrt{\left(\frac{F \cdot \ell}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}}\right)^2 + \left(\alpha \cdot \frac{F \cdot a}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}}\right)^2} \leq \sigma_D.$$

### 4. PEVNOSTNÍ PODMÍNKA:

Nyní již vypočteme hledaný rozměr:

$$d_D \geq \sqrt[3]{\frac{F}{\pi \cdot \sigma_D} \cdot \sqrt{(32 \cdot \ell)^2 + (\alpha \cdot 16 \cdot a)^2}}.$$

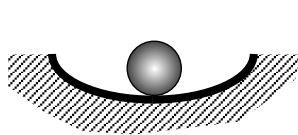
$$d_D \geq \sqrt[3]{\frac{1\,000}{\pi \cdot 200} \cdot \sqrt{(32 \cdot 1\,000)^2 + (\alpha \cdot 16 \cdot 500)^2}} = \begin{cases} [Tresca \alpha = 2] & = 38,5 \text{ mm} \\ [energetická \alpha = \sqrt{3}] & = 38,1 \text{ mm} \end{cases}.$$



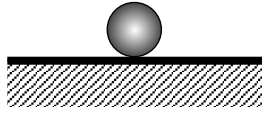
## 5. ZÁKLADY TEORIE STABILITY TENKÝCH PŘÍMÝCH PRUTŮ

### STABILITA:

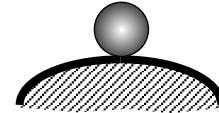
Existují obecně 3 stavy rovnováhy, které lze jednoduše zobrazit pomocí kuličky na ploše.



rovnováha stabilní  
kulička se vrátí po vychýlení  
do původní polohy



rovnováha indiferentní  
kulička zůstane po vychýlení  
v nové poloze

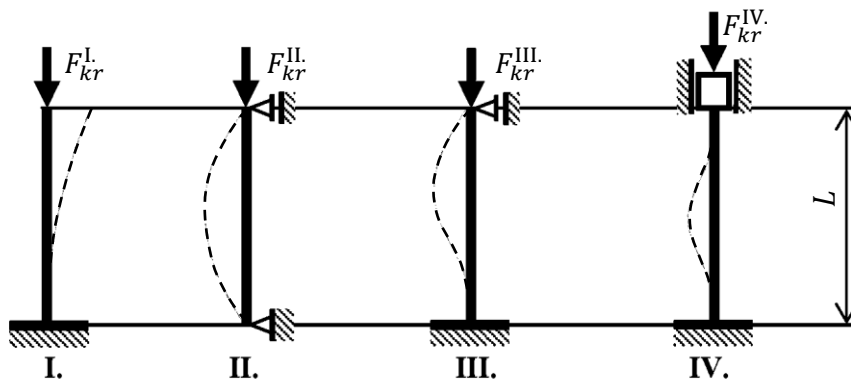


rovnováha labilní  
kulička se po vychýlení  
bude dále pohybovat

Výpočty vycházejí z nalezení indiferentního stavu rovnováhy pro tenké přímé tlačené pruty.

### VZPĚRA – PRUŽNÝ VZPĚR:

Je ideálně rovný prut, vyrobený z ideálního materiálu, ideálně uložený a zatížen ideální silou působící v jeho ose. Na základě těchto předpokladů definoval švýcarský fyzik a matematik Leonard Euler čtyři základní případy vzpěry lišící se způsobem uložení vzpěry.



Všechny čtyři základní případy popsal Euler jedním univerzálním vztahem:

$$F_{kr}^i = n_i \cdot \frac{\pi^2 \cdot J_{min}}{L^2},$$

kde  $i = I, II, III$  a  $IV$  a hodnoty  $n_i$  jsou:

$$n_I = \frac{1}{4} \quad n_{II} = 1 \quad n_{III} \approx 2 \quad n_{IV} = 4$$

Platnost tohoto vztahu je omezena platností Hookova zákona - ideální lineární materiál (kritické napětí musí být menší než je mez úměrnosti použitého materiálu vzpěry  $\sigma_{kr} < \sigma_u$ ).

### BEZPEČNOST:

Je třeba si uvědomit, že ztrátě stability nepředchází žádná „výrazná“ deformace a děj je velice náhlý a rychlý a může způsobit nejen kolaps samotné vzpěry, ale i dalších souvisejících částí celé konstrukce. Z těchto důvodů se obvykle volí bezpečnost při vzpěru  $k > 3$ .

### NEPRUŽNÝ VZPĚR:

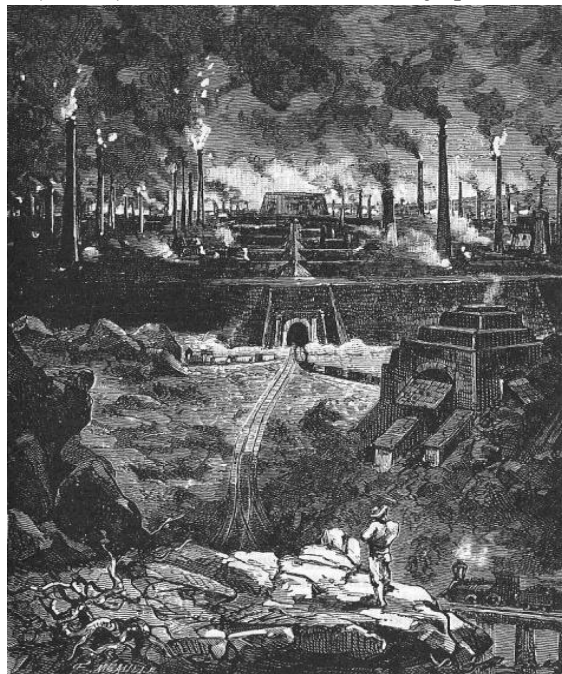
Pokud by neplatil již Hookův zákon (kritické napětí bude větší než je mez úměrnosti použitého materiálu vzpěry  $\sigma_{kr} > \sigma_u$ ) bude výpočet složitější a existuje několik přístupů. Nejjednodušší je přístup Tetmajerův, který lze použít pro „krátké, resp. silné“ pruty namáhané na tlak.





## OCELOVÉ MĚSTO

Román *Les Cinq Cents Millions de la Bégum* je další Verneův vědeckofantastický román z cyklu *Podivuhodné cesty*, vydaný poprvé v roce 1879. V českém překladu je vydáván jako **Ocelové město**. Mírumilovný francouzský lékař Dr. Sarrasin zdědí veliké bohatství po příbuzné indické kněžně a z těchto peněz buduje své ideální město. Objeví se však ještě jeden dědic – německý profesor Schultze, který nedaleko Sarrasinova města vybuduje svoje **Ocelové město**, které je v podstatě gigantickou továrnou vyrábějící tu nejlepší ocel, děla a různé další zbraně. Dr. Sarrasin má syna Oktáva, který myslí jen na zábavu, ale je naštěstí ovlivňován svým mnohem moudřejším přítelem Marcellem, který se snaží odhalit plány Ocelového města. Když se mu stále nedaří proniknout do tajemství ničivé zbraně, kterou pravděpodobně profesor Schultze proti Sarrasinovu městu chystá, vyprovokuje s profesorem Schultzem hádku. Náhle však profesor přestane komunikovat se světem a postupně se díky jeho absolutní kontrole nad *Ocelovým městem* zastaví výroba v celé této gigantické továrně na zbraně. Marcel s Oktávem se vydají do města, aby zjistili, jestli nehrozí ještě nějaké nebezpečí. Tam najdou již mrtvého profesora Schultze v jeho tajné pracovně, kde byl udušen a zmrazen po výbuchu granátu naplněného oxidem uhličitým, právě ve chvíli, kdy podepisoval rozkaz k totálnímu zničení a vyhlazení města Dr. Sarrasina.



([https://cs.wikipedia.org/wiki/Ocelov%C3%A9\\_m%C4%B9sto](https://cs.wikipedia.org/wiki/Ocelov%C3%A9_m%C4%B9sto))

## Příklad 5.0

Stanovte dovolené zatížení, které mohou přenášet sloupy podepírající střechu v továrně v Ocelovém městě. Budeme předpokládat, že sloupy jsou vyrobeny z tvárné litiny dle současné normy EN 1563 (EN-GJL-350-7,  $E = 1,3 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$  a  $R_{p01} = 250 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ).

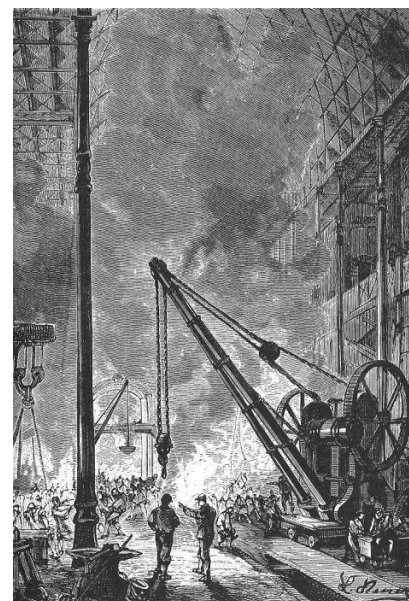
### Dáno:

Mez pevnosti v tlaku materiálu sloupů  $\sigma_{pd} = R_{md} = 1080 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  
mez úměrnosti materiálu sloupů  $\sigma_u = R_u = 200 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  
modul pružnosti materiálu sloupů  $E = 1,3 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  
průměr sloupů  $d = 350 \text{ mm}$ ,  
délka sloupů  $L = 15 \text{ m}$ ,  
požadovaná bezpečnost konstrukce  $k = 3,5$ .

### Řešení:

Při výpočtu budeme předpokládat zjednodušený model sloupu s konstantním průřezem po celé jeho délce. V případě uložení použijeme dva modely:

1. model odpovídající **IV. případu** vzpěru dle Eulera
2. model odpovídající **III. případu** vzpěru dle Eulera



První model předpokládá absolutně tuhý základ – podlahu na spodní straně sloupu a také pevné vetknutí do druhého základu – střechy (za předpokladu značné tuhosti konstrukce střechy).

Druhý model předpokládá také absolutně tuhý základ – podlahu na spodní straně sloupu a na druhé straně kloubové uložení do druhého základu – střechy (za předpokladu malé tuhosti konstrukce střechy).

Skutečný výsledný stav bude někde uprostřed těchto dvou limitních hodnot (střecha není ani absolutně tuhá ani absolutně poddajná, aby vůbec nebránila natočení horního konce sloupu).

**Štíhlost řešeného sloupu bude:**

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{L}{\sqrt{\frac{J_{min}}{A}}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}}} = 4 \cdot \frac{L}{d} = 4 \cdot \frac{15\,000}{280} = 80,0.$$

#### IV. případ vzpěru

a) kontrola použitelnosti Eulerova vztahu:

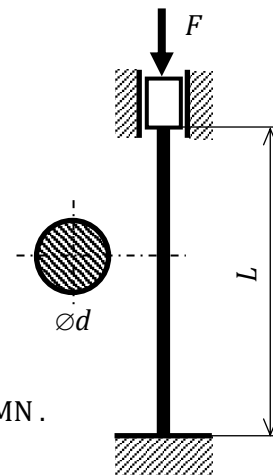
$$\lambda_{mez.}^{IV.} = \sqrt{4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \sqrt{4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 1,3 \cdot 10^5}{200}} = 160,2.$$

$\lambda > \lambda_{mez.}$  → výpočet podle Eulera.

b) výpočet dle Eulera:

$$F_{kr}^{IV.} = 4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{L^2} = 4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 1,3 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 280^4}{64}}{15\,000^2} = 6\,882\,126 \text{ N} \approx 6,9 \text{ MN}.$$

$$F_D = \frac{F_{kr}}{k} = \frac{6\,882\,126}{3,5} = 1\,966\,322 \text{ N} \approx 2,0 \text{ MN}.$$



#### III. případ vzpěru

a) kontrola použitelnosti Eulerova vztahu:

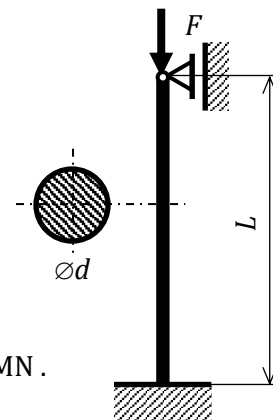
$$\lambda_{mez.}^{III.} = \sqrt{2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 1,3 \cdot 10^5}{200}} = 113,3.$$

$\lambda > \lambda_{mez.}$  → výpočet podle Eulera.

b) výpočet dle Eulera:

$$F_{kr}^{III.} = 2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{L^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 1,3 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 280^4}{64}}{15\,000^2} = 3\,441\,063 \text{ N} \approx 3,4 \text{ MN}.$$

$$F_D = \frac{F_{kr}}{k} = \frac{3\,441\,063}{3,5} = 983\,161 \text{ N} \approx 1,0 \text{ MN}.$$



Dovolená síla přípustná na řešený sloup je v rozmezí 1÷2 MN, což odpovídá hmotnosti střechy cca 102÷204 tun na jeden sloup.



## Příklad 5.1 (STABILITA TÁHLA LOKOMOTIVY KE DVĚMA OSÁM)

**Dáno:**  $E = 1,9 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  $\sigma_u = 380 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  
 $\ell = 1\,900 \text{ mm}$ ,  $k = 4$  (rozměry viz obrázky).

**Určit:**  $F_D$  (dovolenou tlakovou sílu, kterou může táhlo přenášet při dodržení zadané bezpečnosti).

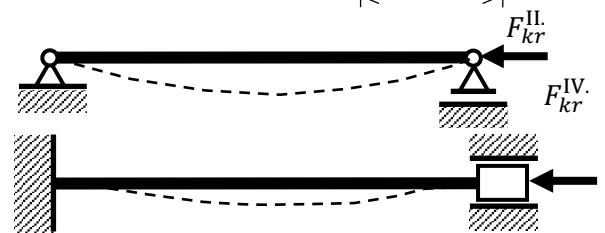
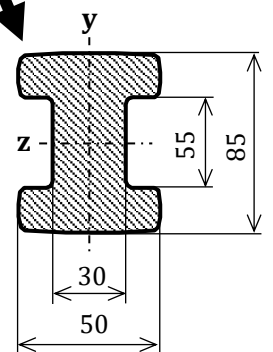
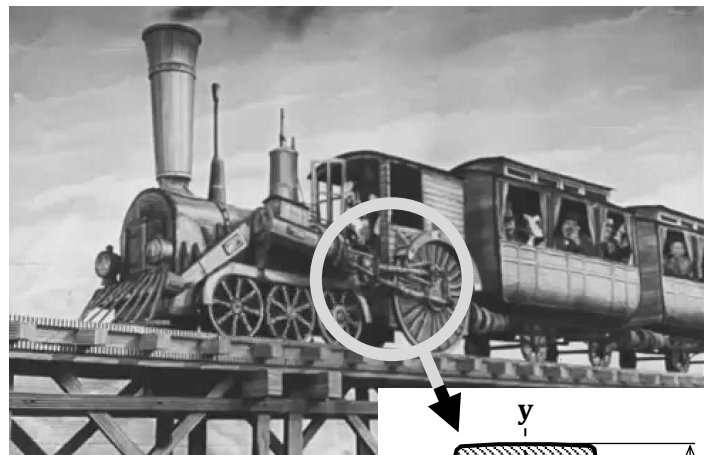
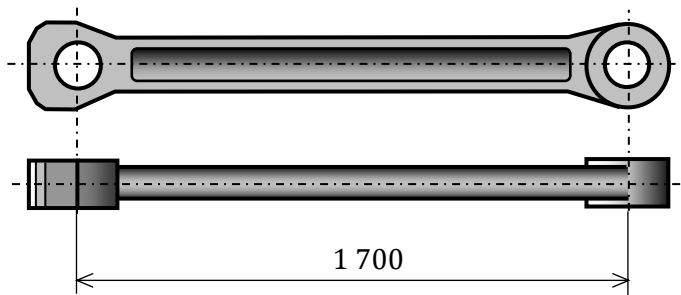
**Řešení:**

Vzhledem ke konstrukci táhla a jeho uchycení ke kolům existují reálně dva mechanismy ztráty stability, a to jak k ose  $y$ , tak také k ose  $z$ . Proto je nejprve nutné číselně vypočítat oba kvadratické momenty průřezu:

$$J_z = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 55^3 + 2 \cdot \left( \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 15^3 + 50 \cdot 15 \cdot 35^2 \right) = 2\,281\,562,5 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{12} \cdot 55 \cdot 30^3 + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 50^3 = 436\,250 \text{ mm}^4$$

Velikost plochy příčného průřezu táhla je:  $A = 55 \cdot 30 + 2 \cdot (15 \cdot 50) = 3\,150 \text{ mm}^2$



Pro použití Eulerova vztahu musí být oba tvary v oblasti pružného vzpěru. O tom lze rozhodnout pomocí štíhlosti prutu  $\lambda$ . Jejich velikosti k ose  $z$  resp. ose  $y$  jsou:

$$\lambda_z = \frac{\ell}{i_z} = \frac{\ell}{\sqrt{\frac{J_z}{A}}} = \frac{1900}{\sqrt{\frac{2\,281\,562}{3150}}} = 70,4 \quad \text{a} \quad \lambda_y = \frac{\ell}{i_y} = \frac{\ell}{\sqrt{\frac{J_y}{A}}} = \frac{1900}{\sqrt{\frac{436\,250}{3150}}} = 161,4 .$$

Má-li být vzpěra v elastickém stavu, musí být její štíhlost větší nebo rovna mezní štíhlosti:

$$\lambda_{mez}^{II} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 1,9 \cdot 10^5}{380}} \approx 70,2 \quad \text{a} \quad \lambda_{mez}^{IV} = \sqrt{4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \sqrt{4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 1,9 \cdot 10^5}{380}} \approx 140,5 .$$

Protože v obou případech vychází  $\lambda > \lambda_{mez}$ , vypočteme hledanou sílu pomocí Eulerova vztahu:

$$\text{k ose } z: \quad F_{Dz} = \frac{1}{k_{\min}} \cdot F_{kr}^{II} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{\ell^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 \cdot 1,9 \cdot 10^5 \cdot 2\,281\,562}{1900^2} = 296\,291 \text{ N} .$$

$$\text{k ose } y: \quad F_{Dy} = \frac{1}{k_{\min}} \cdot F_{kr}^{IV} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J_y}{\ell^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 1,9 \cdot 10^5 \cdot 436\,250}{1900^2} = 226\,611 \text{ N} .$$

A protože nás zajímá nejnepříznivější stav, bude dovolená síla minimem z obou řešení:

$$F_D = \min(F_{Dz}; F_{Dy}) = \min(296,3; 226,6) \text{ kN} = 226,6 \text{ kN} .$$

## Příklad 5.2 (STABILITA PŘÍMÉHO PRUTU KE DVĚMA OSÁM)

**Dáno:**  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  $\sigma_u = 260 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  
 $\ell = 0,7 \text{ m}$ ,  $\varnothing d = 30 \text{ mm}$ ,  $k = 3,5$ .

**Určit:**  $F_D$  (dovolenou tlakovou sílu při dodržení zadané bezpečnosti).

**Řešení:**

Nejprve popíšeme geometrii prutu (vzpěry) pomocí osového kvadratického momentu průřezu, plochy průřezu a poloměru setrvačnosti průřezu:

$$J_{\min} = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \quad \text{a} \quad A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \quad \Rightarrow \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{64} \cdot d^4}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2}} = \frac{d}{4}.$$

Štíhlost řešeného prutu bude:

$$\lambda = \frac{\ell}{i_{\min}} = \frac{4 \cdot \ell}{d} = \frac{4 \cdot 700}{30} = 93,3.$$

Mezní štíhlost pro I. případ vzpěry je:

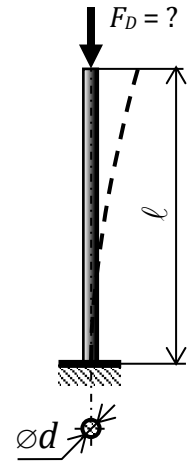
$$\lambda_{mez.}^I = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} = 50,9.$$

Protože  $\lambda > \lambda_{mez}$  provedeme další výpočet podle Eulerova vztahu:

$$F_{kr1}^I = n \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{\ell^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\ell^2} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{256 \cdot \ell^2} = \frac{\pi^3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 30^4}{256 \cdot 700^2} = 42\,045 \text{ N}.$$

Hledaná dovolená síla bude:

$$F_D \leq \frac{F_{kr1}^I}{k} = \frac{42\,045}{3,5} = 12\,013 \text{ N} \approx 12 \text{ kN}.$$



## Příklad 5.3 (DIMENZOVÁNÍ VZPĚRY):

**Dáno:**  $\sigma_u = 240 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ,  $\ell = 1,5 \text{ m}$ ,  $F = 100 \text{ kN}$ ,  $k = 3,5$ .

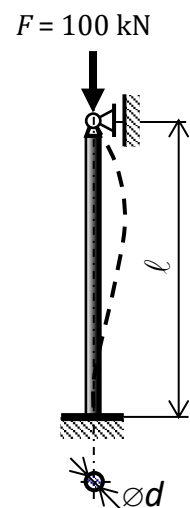
**Určit:**  $\varnothing d$  (potřebný průměr tyče pro III. případ vzpěry).

**Řešení:**

### 1. POPIS GEOMETRIE ŘEŠENÉ VZPĚRY:

Nejprve si všechny geometrické charakteristiky průřezu prutu ( $J_{\min}$ ,  $A$  a  $i_{\min}$ ) vyjádříme jako funkce hledaného rozměru  $d$ :

$$J_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0,0491 \cdot d^4 \quad , \quad A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \approx 0,7854 \cdot d^2 \quad \text{a} \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \frac{d}{4}.$$





Štíhlost prutu pro známou délku bude záviset pouze na neznámém průměru  $d$ :

$$\lambda = \frac{\ell}{i_{\min}} = \frac{4 \cdot \ell}{d} = \frac{4 \cdot 1500}{d} = \frac{6000}{d}.$$

Mezní štíhlost je pouze funkcí materiálu a způsobu uložení vzpěry (případ vzpěru):

$$\lambda_{mez.}^{III.} = \sqrt{n \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{240}} = 131,4.$$

## 2. NÁVRH PODLE EULEROVA VZTAHU PRO III. PŘÍPAD VZPĚRU

$$F_{kr.}^{III.} = 2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{\ell^2} = k \cdot F \quad \Rightarrow \quad J_{\min} = \frac{k \cdot F \cdot \ell^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot E} = \frac{3,5 \cdot 100000 \cdot 1500^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 189\,977 \text{ mm}^4.$$

Protože ale současně víme, že musí platit:

$$J_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0,0491 \cdot d^4,$$

dostáváme rozměr:

$$d_E = \sqrt[4]{\frac{189977}{0,0491}} = 44,35 \text{ mm}.$$

## 3. KONTROLA PLATNOSTI EULEROVA VZTAHU

Kontrolu platnosti Eulerova vztahu můžeme provést dvěma způsoby:

- 1) Považujeme-li za primární podmínku splnění platnosti Hookova zákona, provedeme kontrolu v napětích – srovnáme skutečné kritické napětí s mezí úměrnosti materiálu:

$$\sigma_{kr.}^E = \frac{k \cdot F}{A_E} = \frac{3,5 \cdot 100000}{0,7854 \cdot d_E^2} = \frac{3,5 \cdot 100000}{0,7854 \cdot 44,35^2} = 226,5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} < 240 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} = \sigma_u.$$

- 2) Druhou možností je použít kritérium odvozené z kritéria napětí, které však bude srovnávat geometrii prutu s mezní geometrií pomocí štíhlostí:

$$\lambda_E = \frac{6000}{d_E} = \frac{6000}{44,35} \approx 135,3 > 131,4 = \lambda_{mez.}$$

Protože  $\sigma_E < \sigma_u$ , resp.  $\lambda_E > \lambda_{mez}$  bylo použití Eulerova vztahu pro pružný rozsah při dimenzování vzpěry správné a získaný výsledek  $\varnothing d = d_E = 44,35 \text{ mm}$  je konečný a není třeba provádět přepočty např. podle Tetmajerova vztahu.

## SEZNAM POUŽITÉ A DOPORUČENÉ LITERATURY

- [1] MICHALEC, Jiří, a kol.: *Pružnost a pevnost I*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1995 a 1998
- [2] MICHALEC, Jiří, a kol.: *Pružnost a pevnost II*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1994 a 2000
- [3] VALENTA, František, a kol.: *Pružnost a pevnost III*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1995 a 2002
- [4] REIF, Pavel, VALENTA, František, HÁJEK, Emanuel: *Pružnost a pevnost I*, SNTL, Praha 1986
- [5] ŘEZNÍČEK, Jan: *Vybrané statě z pružnosti a pevnosti*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1999
- [6] ŘEZNÍČKOVI, Jan a Jitka: *Pružnost a pevnost v technické praxi I*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2005
- [7] ŘEZNÍČKOVI, Jan a Jitka: *Pružnost a pevnost v technické praxi II*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2007
- [8] ŘEZNÍČKOVI, Jan a Jitka: *Pružnost a pevnost v technické praxi III*, Vydavatelství ČVUT, Praha 2008
- [9] HÁJEK, Emanuel, a kol.: *Pružnost a pevnost*, SNTL, Praha 1981
- [10] HÖSCHL, Cyril: *Pružnost a pevnost ve strojnictví*, SNTL, Praha 1971
- [11] TREBUŇA, František, ŠIMČÁK, František, JURICA, Vladimír: *Príklady a úlohy z pružnosti a pevnosti I*, Viena, Košice 2000
- [12] МАЛИНИН, Николай, Николаевич: *Кто есть кто в сопротивлении материалов*, Издательство МГТУ. Москва/Moskva 2000



