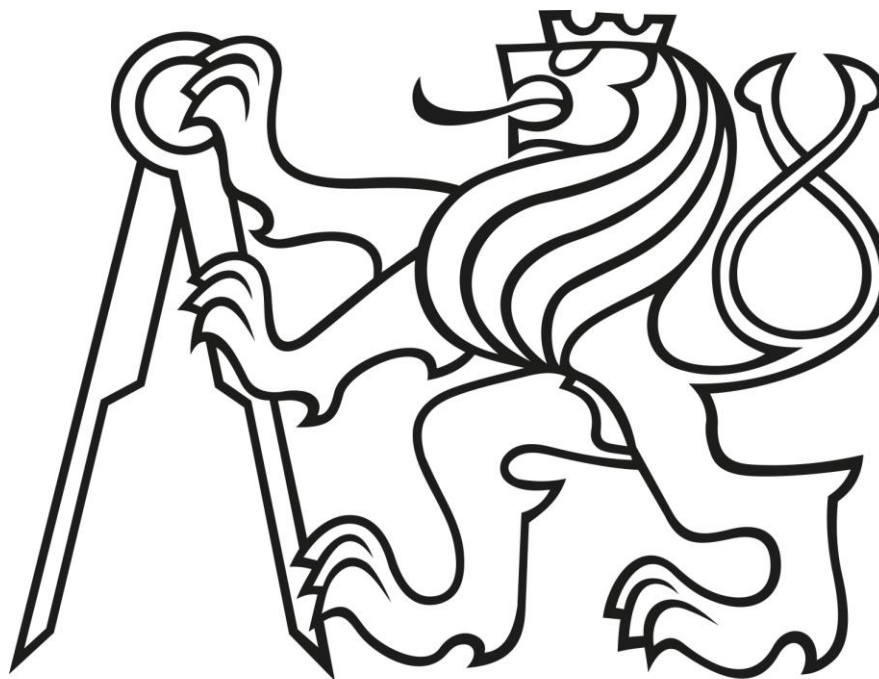


Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kompozity s náhodně orientovanou výztuží

Composites with random reinforcement

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **David** Jméno: **Petr** Osobní číslo: **439070**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Kompozity s náhodně orientovanou výztuží

Název bakalářské práce anglicky:

Composites with Random Reinforcement

Pokyny pro vypracování:

1. Provedte rešerši aplikací náhodně vyztužených kompozitů.
2. Provedte rešerši výpočtů termoelastických charakteristik s kompozitů s náhodně orientovanou výztuží
3. Porovnejte jednotlivé termoelastické charakteristiky pro zadané kompozitní materiály v závislosti na objemovém podílu výztuže

Seznam doporučené literatury:

- [1] Gibson, R. F.: Principles of Composite Material Mechanics Third Edition, CRC Press, Boca Raton, 2012.
- [2] Ehrenstein, G. W.: Polymerní kompozitní materiály, Scientia, Praha, 2009.
- [3] Laš, V.: Mechanika kompozitních materiálů, skripta ZČU Plzeň, Plzeň, 2008.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Bc. Zdeněk Padovec Ph.D., ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **28.04.2017**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2017**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Podpis vedoucí(ho) práce

Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

3/5/2017
Datum převzetí zadání

David
Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Petr David
Název bakalářské práce:	Kompozity s náhodně orientovanou výztuží
Anglický název:	Composites with random reinforcement
Studijní program:	Teoretický základ strojího inženýrství
Obor studia:	Bez oboru
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí bakalářské práce:	Ing. Bc. Zdeněk Padovec Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 51 Počet obrázků: 20 Počet tabulek: 4
Klíčová slova:	Kompozit, laminát, náhodná výztuž, analýza kompozitů s náhodně orientovanou výztuží
Keywords:	Composite, laminate, random reinforcement, analysis of composites with random reinforcement
Abstrakt:	Předmětem této práce je shrnutí obecných informací o kompozitech a kompozitech s náhodně orientovanou výztuží. Dále je provedeno odvození základních vztahů pro výpočet kompozitu s náhodně orientovanou výztuží a na závěr jsou spočítány a porovnány dva kompozity.
Abstract:	The main topic of this thesis is summary of basic information about composites and composites with random reinforcement. Then the derivation of basic equations for calculation of composites with random reinforcement is done. Mechanical properties of two composites are calculated and compared with each other.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím poskytnutých konzultací a literatury uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne:

.....

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval Ing. Bc. Zdeňkovi Padovcovi , Ph.D za čas, který mi věnoval při konzultacích a také za cenné připomínky a rady, které mi pomohly práci zkompletovat.

Obsah

1	Úvod	11
2	Cíle práce.....	12
3	Kompozitní materiály	13
3.1	Obecné charakteristiky	14
3.2	Výztuž	15
3.2.1	Skelná vlákna.....	16
3.2.2	Uhlíková vlákna	16
3.2.3	Aramidová vlákna.....	16
3.3	Matrice	17
4	Kompozity s krátkými vlákny.....	17
5	Použití kompozitů.....	19
5.1	Automobilový průmysl	19
5.2	Letecký průmysl	20
5.3	Sportovní příslušenství.....	22
6	Odvození potřebných vztahů	22
6.1	Směšovací pravidlo.....	22
6.1.1	Modul pružnosti v podélném směru E_L	24
6.1.2	Poissonovo číslo ν_{LT}	25
6.1.3	Příčný modul pružnosti E_T	26
6.1.4	Smykový modul pružnosti G_{LT}	27
6.1.5	Koeficient podélné teplotní roztažnosti α_L	28
6.1.6	Koeficient příčné teplotní roztažnosti α_T	29
6.2	Klasická laminátová teorie	31
6.2.1	Základní rovnice laminátové desky	31
6.3	Výpočet termoelastických charakteristik pro náhodně orientovanou výztuž	38
6.3.1	Odvození $\bar{\alpha}$ pro náhodně orientovanou výztuž.....	38
6.3.2	Výpočet E , G a ν v rovině isotropie.....	40
7	Příklad.....	43
8	Závěr.....	49

Seznam použitých veličin

Označení	Jednotka	Název
A	m^2	plocha kompozitu
A_f	m^2	plocha vlákna
A_m	m^2	plocha matrice
\mathbf{A}	$N \cdot m^{-1}$	matice tahové tuhosti
\mathbf{B}	N	matice vazební tuhosti
\mathbf{D}	$N \cdot m$	matice ohybové tuhosti
E_L	Pa	modul pružnosti v podélném směru L
E_T	Pa	modul pružnosti v příčném směru T
E_f	Pa	modul pružnosti vlákna
E_m	Pa	modul pružnosti matrice
F	N	vnější síla
G_{LT}	Pa	modul pružnosti ve smyku v rovině L, T
G_m	Pa	modul pružnosti ve smyku matrice
G_f	Pa	modul pružnosti ve smyku vlákna
h	m	tloušťka laminátu
h_k	m	tloušťka k -té laminátu
\mathbf{k}		vektor křivosti střední vrstvy laminátu
M	kg	hmotnost kompozitu
M_m	kg	hmotnost matrice
M_f	kg	hmotnost vlákna
n		<i>počet vrstev laminátu</i>
\mathbf{N}	$N \cdot m^{-1}$	matice výsledných sil na jednotku délky
\mathbf{M}	N	matice momentů vztažených na jednotku délky
$O(x_1, x_2, x_3)$		souřadnicový systém x_1, x_2, x_3
$O(L, T, T')$		souřadnicový systém L, T, T'
\mathbf{Q}	Pa	matice mimoosé tuhosti
\mathbf{S}	Pa^{-1}	matice poddajnosti

t	m	tloušťka jedné vrstvy laminátu
\mathbf{T}		transformační matice
ΔT	K	teplotní rozdíl
u, v, w	m	posunutí ve směrech x, y, z
v	m^3	objem kompozitu
v_f	m^3	objem vlákna
v_m	m^3	objem matrice
V_f		objemový podíl vláken
V_m		objemový podíl matrice
w_0	m	průhyb desky (nosníku) ve směru z v libovolném místě
α_L, α_T	K^{-1}	součinitele teplotní roztažnosti ve směrech L, T
$\bar{\alpha}$	K^{-1}	součinitele teplotní roztažnosti v rovině isotropie
$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_{xy}$		zkosy v souřadnicovém systému $O(x, y, z)$
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$		deformace v souřadnicovém systému $O(x, y, z)$
ν_{LT}, ν_{TL}		Poissonova čísla v souřadnicovém systému $O(L, T, T')$
ν		Poissonovo číslo v rovině isotropie
ρ	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	hustota kompozitu
ρ_f	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	hustota vlákna
ρ_m	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	hustota matrice
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Pa	normálové složky napětí v souřadnicovém systému $O(x, y, z)$
$\sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}$	Pa	smykové složky napětí v souřadnicovém systému $O(x, y, z)$
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	Pa	normálové složky napětí v souřadnicovém systému $O(1, 2, 3)$
$\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$	Pa	smykové složky napětí v souřadnicovém systému $O(1, 2, 3)$
$\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$	Pa	normálové složky napětí v směru vláken, kolmo na vlákna a smykové složky napětí
σ		vektor napětí
ψ_x, ψ_y	deg	sklon střední roviny laminátu
ω	deg	pootočení vrstvy laminátu

Seznam obrázků

Obrázek 1: Rozdělení kompozitů [5]	13
Obrázek 2: Mechanismus zatížení a) dlouhého a b) krátkého vlákna [11]	18
Obrázek 3: a) prostorová isotropie b) rovinná isotropie [3]	18
Obrázek 4: Nákladový prostor automobilu vyrobený z kompozitu [10]	19
Obrázek 5: Kryt vačkové hřídele motoru nákladního automobilu firmy MACK [10]	20
Obrázek 6: Karbonová střecha automobilu BMW M6 [12].....	20
Obrázek 7: Kompozitní díly Airbusu A380 [10]	21
Obrázek 8: UL 39 Albi [14].....	21
Obrázek 9: Kompozitní rám jízdního kola Kellys URC 7.0	22
Obrázek 10: Kompozit v systému O(L.T.T') [7].....	23
Obrázek 11: Zatížený kompozit [5]	24
Obrázek 12: Kompozit zatížený smykovým napětím [5].....	27
Obrázek 13: Typy laminátů a jejich značení [5].....	31
Obrázek 14: Zdeformovaná část laminátu [5].....	32
Obrázek 15: Momenty a síly působící na laminát [5].....	35
Obrázek 16: Laminát s n vrstvami [5].....	36
Obrázek 17: Kompozit s pootočeným souřadným systémem [6]	38
Obrázek 18: Dvojvrstva kompozitu [6].....	39
Obrázek 19: Transversálně isotropní kompozit [6]	41
Obrázek 20: Matematický model náhodně vyztužené vrstvy [2]	41
Obrázek 21: Průběhy Youngova modulu E.....	46
Obrázek 22: Průběhy smykového modulu G.....	46
Obrázek 23: Průběhy součinitele teplotní roztažnosti α	47
Obrázek 24: Průběhy Poissonova čísla.....	47

Seznam tabulek

Tabulka 1: Charakteristiky vybraných vláken.....	15
Tabulka 2: Výsledky pro vlákno T600.....	44
Tabulka 3: Výsledky pro skelné vlákno.....	45
Tabulka 4: Kontrola správnosti výsledků.....	48

1 Úvod

Raketový, letecký i vojenský průmysl v historii již několikrát předal lidstvu vynálezy, později dále použitelné v běžném životě. Není tedy náhodou, že právě v těchto odvětvích, ve kterých je z hlediska konstrukčních materiálů kladen velký důraz na nízkou hmotnost, ale naproti tomu například i vysokou tuhost a pevnost, vznikly první kompozitní materiály. Jak tomu také v historii bývá, zpočátku luxusní záležitost progresivních odvětví průmyslu, se čím dál tím více projevuje v každodenním životě. Stačí se podívat ku příkladu na cyklistickou Tour de France. Ze 140 účastníků stejné množství používá jízdní kolo vyrobené z nějaké kombinace vlákna a matrice. Hůlky či jádra lyží z kompozitů jsou již v současné době cenově srovnatelné s jejich materiálově odlišnými protějšky. Samozřejmě nesmíme opomenout průmysl automobilový.

Proto je potřeba kompozitům, jakožto materiálu s rozmanitými vlastnostmi a různými kombinacemi výztuže a matrice, dobře rozumět, aby splňovaly úkol, pro který jsou navrženy. V této práci se budeme konkrétně věnovat situaci, ve které jsou vlákna v matrici rozmístěna náhodně. Před tím, než bude vyšetřeno náhodné rozmístění výztuže v kompozitu, se budeme věnovat kompozitům obecně.

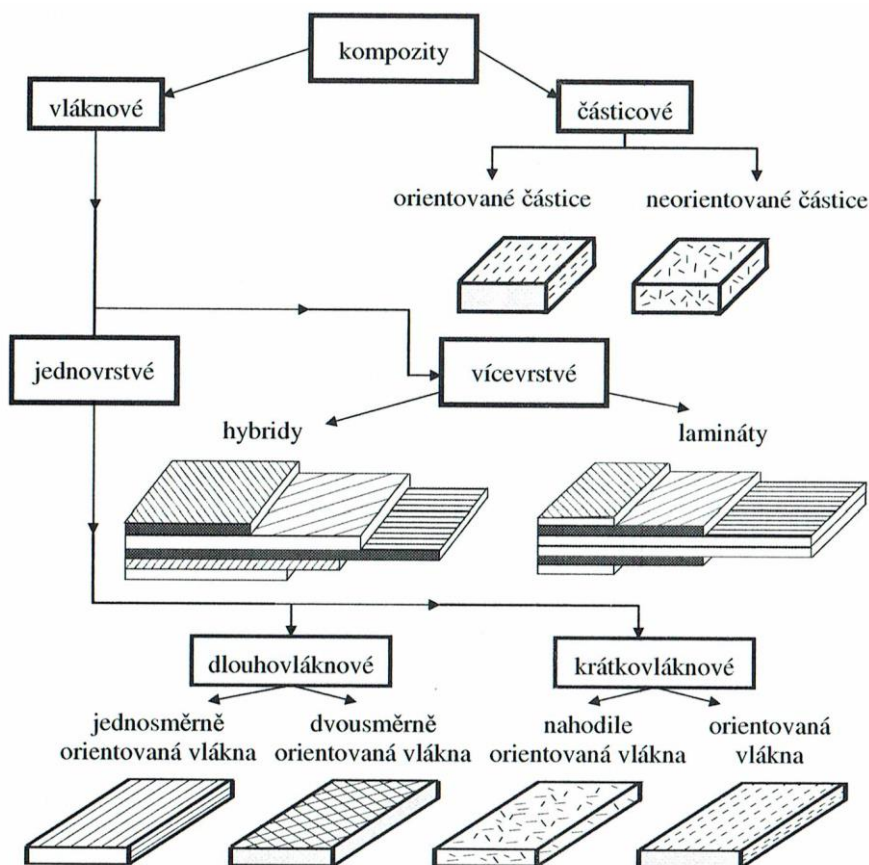
2 Cíle práce

Přestože jsou kompozity fenoménem poslední doby, co se perspektivních materiálů týče, alespoň v české literatuře toho bylo poměrně málo sepsáno na kompozity s náhodně orientovanou výztuží. Cílem této práce je tedy sepsání obecných charakteristik těchto kompozitů a následné odvození vztahů, na jejichž základě je možno dimenzovat součásti. Na závěr bude provedeno porovnání elastických vlastností dvou typů vláken náhodně rozmístěných v matici.

3 Kompozitní materiály

Kompozitní materiály, jak bylo dříve naznačeno, jsou složeny ze dvou nebo více chemicky odlišných složek (fází). Podle této logiky je tedy kompozitem téměř každý dnes používaný materiál, jelikož málokdy se setkáme s chemicky čistým materiálem. Tvrdší, tužší a pevnější nespojitá složka se nazývá výztuž, spojitá a obvykle poddajnější složka, která zastává funkci pojiva výztuže, se nazývá se matrice. [1, 2]

Vlastnosti kompozitů jsou dány vlastnostmi svých materiálových složek, jejich objemovým podílem a geometrií vyztužení vzhledem k celému systému. Jedno z rozdělení kompozitů je tedy na základě geometrie. Základní rozdělení je na kompozity vláknové a částicové dle obrázku 1. Zvláště zajímavé jsou kompozity vícevrstvé – takzvané lamináty. U nich lze dosáhnout i náročnějších požadavků na mechanické vlastnosti. [2, 9]



Obrázek 1: Rozdělení kompozitů [5]

Mezi další výhody laminátů patří [2]:

- velká pružnost při deformaci
- vysoká pevnost a tuhost, jenž lze přizpůsobit směru a druhu zatížení
- přizpůsobivost téměř každému tvaru
- vysoká odolnost proti stárnutí a korozi
- značná odolnost vůči dynamickému namáhání při vysokém mechanickém tlumení

Mezi nevýhody bychom mohli zařadit [2]:

- neobvyklé chování materiálu, což znamená, že nelze jednoduše vyšetřovat kompozit jako celek pouhým sečtením přispívajících složek
- lokální poškození je obtížné odhalit a opravit
- obtížné nedestruktivní zkoušení materiálu
- vysoké náklady při dimenzování náročných konstrukcí

3.1 Obecné charakteristiky

O tom, jak bude výsledný kompozit tuhý a pevný rozhodují především vlastnosti vyztužující. Materiál vláken, jejich délka, tloušťka a orientace v součásti výrazným způsobem ovlivňují výsledné vlastnosti kompozitu. Jelikož vlákna a matrice mají výrazně odlišné mechanické vlastnosti, dochází na rozhraní mezi fázemi k lokálním složitým stavům napjatosti. [2]

Pro naše potřeby budou stačit vlastnosti kompozitu jako celku. Jednotlivé vrstvy slouží jako základní výpočetní jednotky, je-li potřeba, tyto samostatné laminy se následně skládají do laminátů. Tyto vrstvy jsou ploché a jsou vzájemně spojeny pojivem. Jsou-li materiály v každé vrstvě stejné, mluvíme o laminátech. Existují však aplikace, ve kterých jsou jednotlivé vrstvy vyrobeny z materiálů odlišných, například jedna vrstva je vyztužena skelnými vlákny, zatímco druhá vlákny uhlíkovými. V takovém případě hovoříme o laminátech hybridních. Pojiva mezi jednotlivými vrstvami jsou pokládána za nekonečně tenká a odolná proti smyku, to znamená, že jsou zcela schopny přenést deformace jednotlivých vrstev na vrstvu následující. Tím je při namáhání v rovině laminátu zaručena stejná deformace všech vrstev. Zároveň jsme na základě těchto předpokladů schopni sestavit matematický model pro analýzu kompozitů. [2, 5]

3.2 Výztuž

Jak již bylo zmíněno výše, kompozit může být vyztužen buď vlákny, nebo částicemi. Vlákna mají své délkové rozměry několikanásobně vyšší než částice. Z toho plyne, že vlákna jsou především užívána tam, kde je potřeba přenést nějaké mechanické zatížení. Naproti tomu částice mohou mít tvar koule, krychle, kvádrů, popřípadě jiného polygonu. Také se v jisté míře podílejí na přenášení zatížení, nikoliv však v takovém měřítku, jako vlákna. Částice najdou využití tam, kde je potřeba například upravit elektrickou, či tepelnou vodivost, zvýšit odolnost proti opotřebení, snížit, či zvýšit koeficient tření apod. [5, 7]

Pevnost vláken roste se zmenšujícím se průřezem, protože přirozené defekty struktury jsou u vláken malých průměru také malé, a navíc příznivě orientované svým delším rozměrem ve směru osy vlákna. Pevnost vlákna závisí také na jeho délce. Části vzniklé porušením vlákna při tahovém namáhání mají větší pevnost než vlákno původní, protože k prvnímu lomu došlo z největšího defektu vlákna. Většina vyráběných vláken má kruhový průřez o průměru od 5 do 20 μm . Menší průměry se nepoužívají z technologických důvodů, protože produkty s velmi tenkými vlákny se obtížně prosycují matricemi. [7]

Vláken vyráběných pro kompozity je hned několik, ku příkladu skleněná, uhlíková, polymerní, keramická, ale také například kovová. Využit se ale můžou i přírodní materiály jako například bavlna, celulóza, či azbest. V následující tabulce jsou některé mechanické vlastnosti vybraných vláken. [7]

	E_t	σ_{Pt}	ρ	σ_{Pt} / ρ	$\varepsilon_{f,krit}$
	GPa	MPa	10^3 kgm^{-3}	MPa / kgm^{-3}	%
Sklo - E	72,4	3500	2,54	1,38	2,5
Sklo - S	85,5	4600	2,48	1,85	2,5
Grafit - E	390	2100	1,9	1,1	0,7
Grafit - S	240	2500	1,9	1,3	0,7
Bor	385	2800	2,63	1,1	0,8
W	414	4200	19,3	0,22	
Aramid Kevlar 49	130	2800	1,5	1,87	2,5
Azbest	160	3100	2,56	1,21	1,9
SiC	250	2200	2,6	0,85	0,9
Polyethylen PE Spektra	172	3000	0,97	3,09	1,7
Ocel	210	340-2500	7,8	0,0440-0,321	

Tabulka 1: Charakteristiky vybraných vláken [7]

3.2.1 Skelná vlákna

Tato vlákna se vyrábí tažením z taveniny připravené v pecích. Vlákno je následně ochlazováno a opatřeno ochrannou vrstvou, která brání vlákno před oxidací a rovněž zvyšuje adhezi a smáčivost organickými matricemi. Skelné vlákno se používá ve dvou základních modifikacích, a to typu S, které se vyznačuje vysokou pevností a typu E, jenž je zase vysoce tuhé, sklo typu E bude později porovnáno s vláknem uhlíkovým typu T600. Jednotlivá vlákna mají přibližně průměr 10 μm . Se zvyšující se vlhkostí se skelným vláknům snižuje pevnost a rovněž mají nízkou odolnost vůči otěru. Naproti tomu jsou levná, dobře zpracovatelná a mají nízkou elektrickou vodivost. [1, 2, 4, 7]

3.2.2 Uhlíková vlákna

Tato vlákna v současné době patří mezi nejpoužívanější výtzuže vůbec. To je dáno především tím, že mají jeden z nejlepších poměrů pevnost a tuhost ku měrné hmotnosti. Většinou se vyrábí pyrolýzou polyakrylonitrilových vláken PAN. Ta jsou nejprve zahřáta a protahována, aby se získala vhodná orientace molekul. Následuje stabilizace v oxidující atmosféře při teplotě 220 až 230 $^{\circ}\text{C}$ po dobu 10 hod. Potom se pokračuje grafitizací v inertní atmosféře při 1000 – 1500 $^{\circ}\text{C}$ a dalším protahováním. Dalším technologickým krokem je grafitizace v inertní atmosféře za teplot 2500 – 3000 $^{\circ}\text{C}$ pod napětím. Následné přidání kyslíkových atomů na povrch umožňuje lepší přilnavost dalších látek a zhrubnutí povrchu pro lepší mechanické spojení s matricí. Tato vlákna mají vysokou pevnost, malou objemovou hmotnost, vysokou chemickou odolnost, ale například i neměnnost vlastností až do teplot 2000 $^{\circ}\text{C}$ (pro srovnání většina ostatních vláken své vlastnosti ztrácí již při 800 $^{\circ}\text{C}$). [1, 2, 4, 7]

V porovnání s jinými vlákny mají výrazně menší modul pružnosti v kolmém směru k ose vlákna, a také mají menší tažnost než například vlákna skelná. [7]

3.2.3 Aramidová vlákna

Jde o organické vlákno s vysokou pevností a malou měrnou hmotností. Vlákno se vyrábí tak, že polymer rozpuštěný v koncentrované kyselině sírové je vytlačován tryskami do studené vody, kde je propírán a následně sušen na cívkách. Aramidové vlákno je hydrofobické a musí být před impregnací vysušeno. Aramidová vlákna jsou známa pod obchodním názvem Kevlar, který má několik druhů, jenž se od sebe liší jak chemickou strukturou, tak mechanickými vlastnostmi. Nejznámějšími představiteli aramidových vláken jsou Kevlar 29 resp. Kevlar 49 pro letecké aplikace. Mezi další typy se řadí například Kevlar 119, který vykazuje vysokou tažnost a odolnost proti únavě. Nebo například Kevlar 29, který má dobré tlumivé schopnosti, a to nezávisle na použité matrici, či orientaci vláken, což se využije především k balistickým účelům na konstrukci neprůstřelných helem, či vest. [4, 7, 9]

3.3 Matrice

Hlavním úkolem matrice je spojení jednotlivých vláken, či částic v kompaktní celek. Také přenáší zatížení mezi vlákny, vytváří vnější funkční povrch součásti a mimo jiné i estetický vzhled. V neposlední řadě zajišťuje ochranu výztuže před povrchovým poškozením, které by vedlo ke značné ztrátě pevnosti výsledného produktu. Zásadním požadavkem na matici je dobrá adheze k použité výztuži. Pro lepší adhezi vlákna a matrice se používají různé druhy apretací. [1, 2]

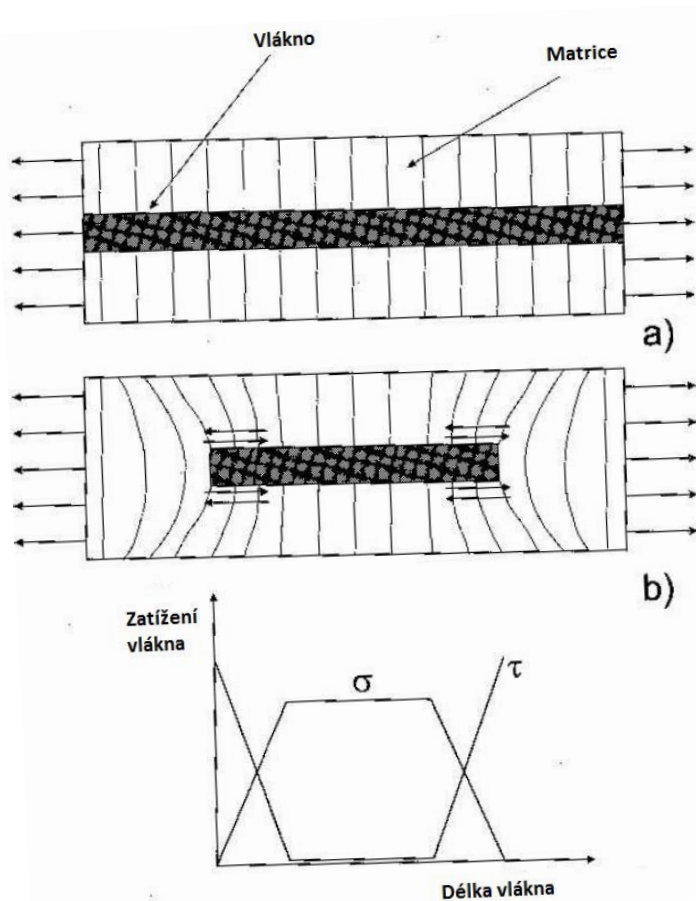
Mezi nejčastěji používané matrice patří polymerní matrice. Ty se rozdělují na reaktoplasty a termoplasty. [7]

Reaktoplasty zůstávají v tuhé fázi i při zvyšující se teplotě, i díky tomu mají dobrou odolnost vůči creepu a vyšším teplotám. Viskozita termosetů ve formě taveniny je nižší než viskozita termoplastů. Proto je zpracování termosetů jednodušší, což se projevuje například tím, že lépe smáčejí a prosycují vlákna než termoplasty. Další výhodou ve zpracování mají termosety vůči termoplastům v tom, že jejich zpracování probíhá při podstatně nižších teplotách, než je tomu v případě termoplastů. Jsou tedy v tomto ohledu energeticky a tím tedy i ekonomicky příznivější. Jedny z nejpoužívanějších reaktoplastů jsou epoxidové pryskyřice. Ty mají výbornou odolnost vůči únavě a tečení, dobrou chemickou odolnost a malé smrštění při vytvrzování. [1, 7]

Termoplasty jsou za běžných podmínek po vytvrzení tuhé, nicméně při překročení kritické teploty měknou a případně i tečou. Po snížení teploty opět tuhnou. Mezi nevýhody by se dala zařadit vyšší viskozita, kvůli které se při výrobě mohou tvořit v kompozitu defekty v podobě bublin, či vůbec nesmočených částí vláken. Před tím se lze bránit impregnací vláken, čímž ale pochopitelně rostou náklady. Nicméně mají vysokou tažnost, což je jedno z hlavních kritérií při volbě matrice. Termoplasty jsou používány především u částicových kompozitů, či kompozitů s krátkými vlákny. [1, 7]

4 Kompozity s krátkými vlákny

Zatímco kompozity s dlouhými orientovanými vlákny použijeme tam, kde známe předpokládané zatížení, kompozity s krátkými nahodile orientovanými vlákny použijeme tam, kde hlavní zatížení není od prvního pohledu zřejmé. Volbou krátkých vláken se také snižují výrobní náklady. Přenos zatížení krátkými vlákny se výrazně liší mechanismem přenosu zatížení od dlouhých vláken, což je patrné z obrázku 2.

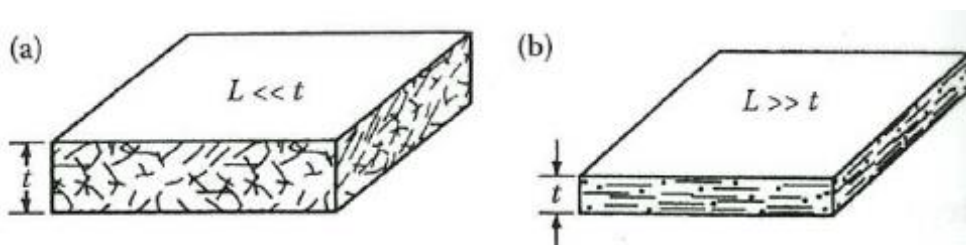


Obrázek 2: Mechanismus zatížení a) dlouhého a b) krátkého vlákna [11]

Je vidět, že kraje krátkého vlákna se na přenesení zatížení nepodílí v plném rozsahu. Aby vlákno mohlo přenést maximální zatížení, na které je dimenzováno, musí mít minimální délku rovnou L_c , což se nazývá kritická délka vlákna.

Vlákno tedy přenáší zatížení jen v určité vzdálenosti od jeho konců, kde převažují smykové efekty. Kritická délka vlákna je závislá na materiálu vlákna, poměru délky k průměru, ale také na konkrétní kombinaci materiálů vlákno-matrice.

Kompozity s náhodně orientovanou výztuží se dále dají rozdělit na kompozity s 3D isotropií (prostorovou), a na kompozity s 2D (rovinnou) isotropií, jak je vidět na obrázku.



Obrázek 3: a) prostorová isotropie b) rovinná isotropie [3]

Jak plyne z obrázku 3, prostorovou isotropie dosáhneme, pokud je délka vlákna L výrazně menší než tloušťka kompozitu t . V opačném případě, tedy pokud délka vlákna výrazně převažuje nad tloušťkou kompozitu, hovoříme o kompozitu s rovinnou isotropií. [3]

5 Použití kompozitů

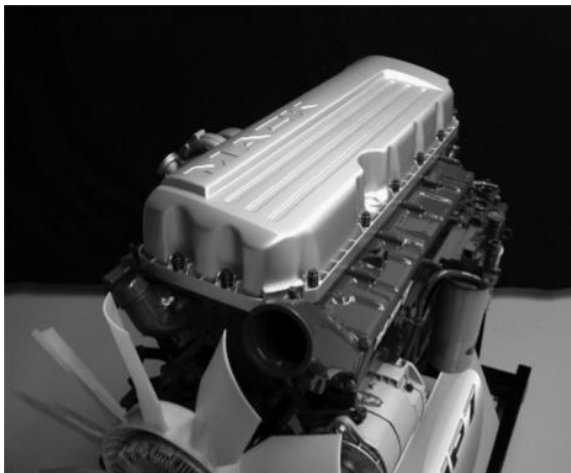
5.1 Automobilový průmysl

Vláknové kompozity se v automobilovém průmyslu používají především na součásti karoserie a podvozku. U vnějších částí karoserie, jako například u kapoty či vnější části dveří, se klade důraz na vyšší tuhost a odolnost vůči rázům kompozitu, jelikož jsou tyto části namáhány například odletujícími kamínky od vozovky a jak je známo, pokud dojde k porušení integrity kompozitové součásti, je tato vada neopravitelná. Kompozit pro tyto součásti je vyrobený metodou SMC (Sheet Molding Compund), což je v podstatě tlakové lití. Jako vlákno bývá používáno E-Sklo délky zhruba 25 mm. Tato vlákna jsou náhodně rozptýlena do polyesteru, či vinyl esteru. U součástí, kde je také požadavek na vzhled se pak používá speciální flexibilní matrice, která lze různými dokončovacími procesy vzhledově vylepšit. [10]



Obrázek 4: Nákladový prostor automobilu vyrobený z kompozitu [10]

Je také snaha použít kompozity přímo v částech pohonu, a to zejména motoru samotném, což by výrazně pomohlo ulehčit od hmotnosti automobilu, nicméně vysoké únavové a především tepelné zatížení těchto součástí zatím ponechává tuto záležitost v oblasti vývoje. Příkladem použití kompozitu na motoru je tedy zatím pouze ve formách krytů, jako třeba kryt vačkové hřídele motoru nákladního automobilu firmy MACK (viz Obr. 5). [10]



Obrázek 5: Kryt vačkové hřídele motoru nákladního automobilu firmy MACK [10]

Kromě E-Skla se v automobilovém průmyslu můžeme setkat s uhlíkovými vlákny, ale to v mnohem menší míře než se skelnými. To je dáno především značně vyšší cenou uhlíkových vláken, a tak se s nimi setkáme pouze u dražších modelů aut, nebo vyloženě modelů sportovních. Příkladem může být střecha automobilu BMW M6 (viz Obr. 6), která je vyráběna metodou RTM – Resin Transfer Molding, což je vstřikování pryskyřice do přípravku. Takto vyrobený střešní panel má sice dvakrát větší tloušťku, než srovnatelný ocelový plát, ale je o 5,5 kg lehčí, což mimo jiné snižuje těžiště automobilu, a tedy zlepšuje jízdní vlastnosti například v zatáčkách. [10]



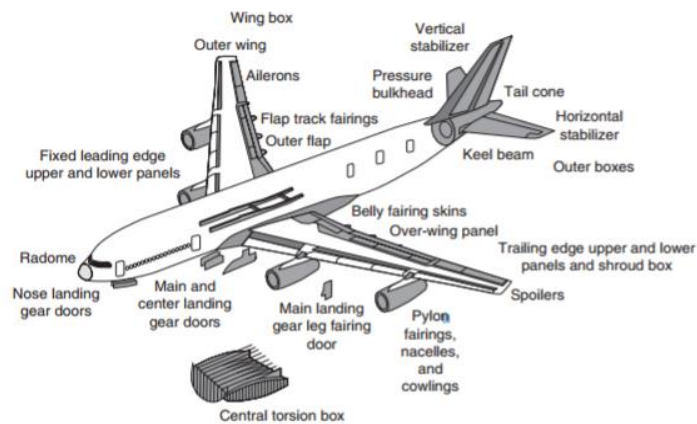
Obrázek 6: Karbonová střecha automobilu BMW M6 [12]

5.2 Letecký průmysl

Hlavním důvodem použití kompozitů v letectví je snižování hmotnosti celkové konstrukce, což má mimo jiné za následek úsporu paliva, a také zvýšení nosnosti letadla. Další výhodou nad hliníkovými a titanovými díly je například zvýšení odolnosti vůči únavě a korozi, což následně snižuje údržbu. Například vrtulníky operující poblíž oceánského pobřeží vyžadují opravy zkorodovaných dílů každých 18 měsíců, zatímco vrtulníky vybavené díly z kompozitů tuto konkrétní údržbu vůbec nevyžadují, což někdy může cenově vyvážit jejich dražší výrobu a pořizovací náklady. [10]

První výrobce, který se ve větší míře odhodlal k použití kompozitních materiálů na konstrukci svých strojů, byl Airbus se svým modelem A310, který byl představen v roce 1987. Komponenty vyrobené z kompozitu zaujímaly zhruba 10 % z celkové hmotnosti letadla. Mimo

jiné bylo z kompozitu vyrobeno celé ocasní vertikální křídlo, které bylo zhruba o 400 kg lehčí než jeho hliníkový předchůdce. Model A380 představený v roce 2006 byl již z 25 % složen z kompozitních částí. Na obrázku 7 jsou šedou barvou vyznačené kompozitní díly Airbusu A380. [10]



Obrázek 7: Kompozitní díly Airbusu A380 [10]

Až 50 % podílem na hmotnosti konstrukce přispívají kompozity u Boeingu 787 Dreamliner. Kromě snížené hmotnosti letadla přispívají kompozity ke zvýšení pružnosti konstrukce. Spolu se sníženou hmotností souvisí i výrazná spotřeba paliva, která je oproti staršímu modelu 767 až o 20 % nižší. [10]

Pokud je třeba celá konstrukce letadla vyrobena z kompozitu a z kovu je tak pouze pohonná jednotka, může se celková hmotnost letounu dostat až na pouhých 320 kg jako tomu je u ultralehké stíhačky UL 39 Albi (viz Obr. 8), které bylo vyvíjeno v rámci diplomových a dizertačních prací Ústavem letadlové techniky Fakulty strojní ČVUT, a následně vyrobeno firmami La Composite a Jihlavan Airplanes [13].



Obrázek 8: UL 39 Albi [14]

5.3 Sportovní příslušenství

Kompozitní materiály pomalu nahrazují klasické materiály i ve sportovním odvětví. Kromě snižování hmotnosti se k hlavním kladům přidává ku příkladu možnost zpracovat téměř libovolný tvar dílu, a to zejména u náhodně orientovaných vláken v kompozitu. Další výhodou je schopnost dobře tlumit vibrace, což se využije například u tenisových raket, lyží, a především u rámu jízdních kol. [10]



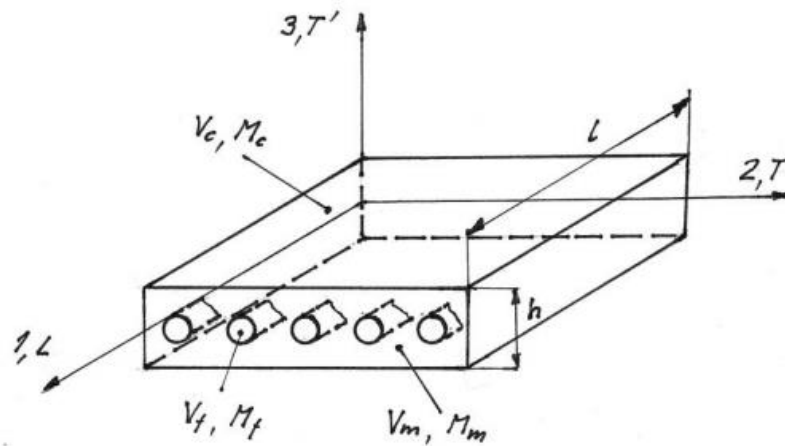
Obrázek 9: Kompozitní rám jízdního kola Kellys URC 7.0

6 Odvození potřebných vztahů

6.1 Směšovací pravidlo

Vlastnosti kompozitů závisí na materiálových charakteristikách jeho komponent a jejich podílu na celkovém objemu výsledného kompozitu. Dále jsou závislé na geometrii uspořádání vláken. Směšovací pravidlo určuje výsledné mechanické vlastnosti na základě znalosti charakteristik jednotlivých složek. V těchto výpočtech budeme vycházet z idealizovaného výpočtového modelu kompozitního materiálu. [5]

Zpočátku se budeme zabývat dlouhovlákným jednosměrným kompozitem. Pokud chceme vyšetřovat vztahy mezi napětím a deformací takového kompozitu, je nutno znát čtyři elastické konstanty E_L , E_T , ν_{LT} a G_{LT} . V úlohách, kde se bude uvažovat změna teploty přibudou ještě koeficienty teplotní roztažnosti α_T , α_L . [5]



Obrázek 10: Kompozit v systému $O(L, T, T')$ [7]

Jak plyne z obrázku výše, budeme laminát vyšetřovat v souřadném systému $O(L, T, T')$, neboli v systému, kde osa L je v podélném směru, osa T v prvním příčném směru a osa T' v druhém příčném směru. [5]

Dále označme:

M, M_f, M_m - hmotnost kompozitu, vlákna, matrice

ρ, ρ_f, ρ_m - hustota kompozitu, vlákna, matrice

v, v_f, v_m - objem kompozitu, vlákna, matrice

Pro hmotnost můžeme psát:

$$M = M_f + M_m. \quad (1.1)$$

Neboli

$$\rho v = \rho_f v_f + \rho_m v_m. \quad (1.2)$$

Potom

$V_f = \frac{v_f}{v}$ je objemový podíl vláken,

$V_m = \frac{v_m}{v}$ je analogicky objemový podíl matrice.

Když sečteme oba objemové podíly, dostaneme

$$V_f + V_m = 1. \quad (1.3)$$

Hustota výsledného kompozitu je tedy

$$\rho = V_f \rho_f + V_m \rho_m. \quad (1.4)$$

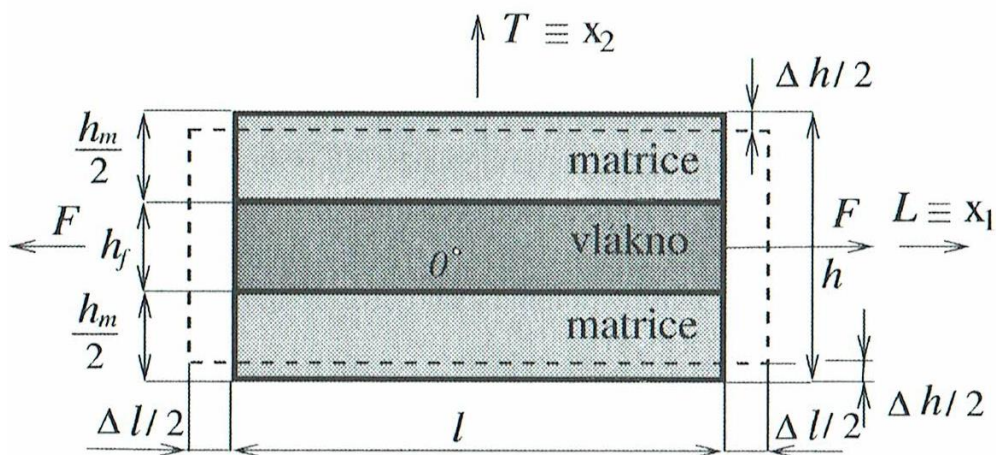
Rovnice (1.4) se nazývá směšovací pravidlem pro stanovení hustoty kompozitu. Tento vztah lze ještě rozšířit na obecně i složek následovně [5]

$$\rho = V_f \rho_f + V_m \rho_m = \sum_i \rho_i v_i. \quad (1.5)$$

6.1.1 Modul pružnosti v podélném směru E_L

Uvažujme nyní stejný kompozit ale nyní už jen v souřadném systému $O(L, T)$.

Kompozit bude zatížen silou F v podélném směru. Dále budeme předpokládat, že prodloužení Δl bude pro matrici stejné jako pro vlákna. [5]



Obrázek 11: Zatížený kompozit [5]

Potom platí

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{L_f} = \varepsilon_{L_m}. \quad (1.6)$$

Dále označíme

E_f, E_m - modul pružnosti vlákna a matrice

A, A_f, A_m - plocha kompozitu, vlákna a matrice v kolmém směru na L.

Když označíme l jako délku kompozitu, můžeme psát

$$V_f = \frac{v_f}{v} = \frac{A_f l}{Al} = \frac{A_f}{A} \quad \text{a také} \quad V_m = \frac{A_m}{A}. \quad (1.7)$$

Napětí v tahu ve vlákne a matrici jsou z Hookova zákona rovna

$$\sigma_{Lf} = E_f \varepsilon_{Lf}, \quad \sigma_{Lm} = E_m \varepsilon_{Lm}. \quad (1.8)$$

Tahová síla je pak

$$F = A_f \sigma_{Lf} + A_m \sigma_{Lm}. \quad (1.9)$$

Napětí v kompozitu je

$$\sigma_L = \frac{F}{A} = V_f \sigma_{Lf} + V_m \sigma_{Lm} = (V_f E_f + V_m E_m) \varepsilon_L. \quad (1.10)$$

Pokud předchozí výraz (1.10) vydělíme ε_L , dostáváme

$$E_L = \frac{\sigma_L}{\varepsilon_L} = \frac{F}{A} = V_f \sigma_{Lf} + V_m \sigma_{Lm} = V_f E_f + (1 - V_f) E_m. \quad (1.11)$$

Pokud je podélný modul pružnosti vlákna výrazně vyšší než modul pružnosti matrice, můžeme psát [5]

$$E_L = V_f E_f. \quad (1.12)$$

6.1.2 Poissonovo číslo ν_{LT}

Příčné deformace vlákna a matrice jsou

$$\varepsilon_{Tf} = -\nu_f \varepsilon_L, \quad \varepsilon_{Tm} = -\nu_m \varepsilon_L, \quad (1.13)$$

kde ν_f, ν_m jsou Poissonova čísla vlákna a matrice.

Změna tloušťky kompozitu je

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m = h_f \varepsilon_{Tf} + h_m \varepsilon_{Tm}, \quad (1.14)$$

kde h_f, h_m jsou tloušťky vlákna a matrice.

Pokud zavedeme šířku kompozitu jako b , můžeme pomocí ní vyjádřit objemový podíl vláken a matric podobně jako v rovnici (1.7) následovně

$$V_f = \frac{v_f}{v} = \frac{h_f b l}{h b l} = \frac{h_f}{h} \quad \text{a analogicky} \quad V_m = \frac{h_m}{h}. \quad (1.15)$$

Deformace kompozitu v příčném směru bude tedy

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta h}{h} = V_f \varepsilon_{Tf} + V_m \varepsilon_{Tm} = -(V_f V_f + V_m V_m) \varepsilon_L. \quad (1.16)$$

Vydělíme-li celou rovnici ε_L , dostáváme Poissonovo číslo ν_{LT} rovno [5]

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = V_f V_f + V_m V_m = V_f V_f + (1 - V_f) V_m. \quad (1.17)$$

6.1.3 Příčný modul pružnosti E_T

Pro zjištění příčného modulu budeme uvažovat zatížení silou F ve směru osy T . Jelikož je ve směru kolmém na tuto osu plocha vlákna a matrice stejná, můžeme psát

$$\sigma_T = \sigma_{Tf} = \sigma_{Tm}. \quad (1.18)$$

Příčné deformace vlákna a matrice jsou

$$\varepsilon_{Tf} = \frac{\sigma_T}{E_f}, \quad \varepsilon_{Tm} = \frac{\sigma_T}{E_m}. \quad (1.19)$$

Změna tloušťky je tedy

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m = h_f \varepsilon_{Tf} + h_m \varepsilon_{Tm}. \quad (1.20)$$

Příčná deformace je

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta h}{h} = V_f \varepsilon_{Tf} + V_m \varepsilon_{Tm} = \left(\frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \right) \sigma_T. \quad (1.21)$$

Příčný modul pružnosti E_T kompozitu je definován jako

$$E_T = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_T} \Rightarrow E_T = \frac{\sigma_T}{\left(\frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \right) \sigma_T} = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} = \frac{E_m}{V_m + V_f \frac{E_m}{E_f}}. \quad (1.22)$$

Nebo

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f} \right)}. \quad (1.23)$$

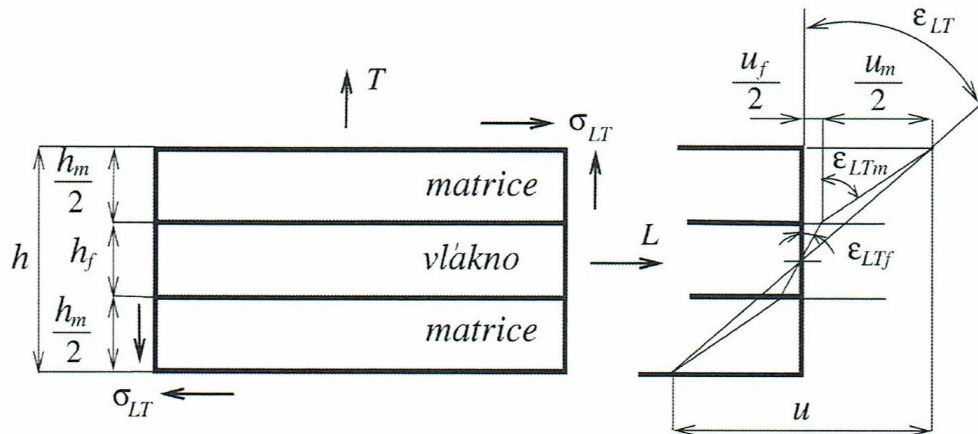
Pokud, podobně jako v rovnici (1.11), platí $E_f \gg E_m$, poté můžeme rovnou psát upravený vztah [5]

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f}. \quad (1.24)$$

6.1.4 Smykový modul pružnosti G_{LT}

Pro vyšetření smykového modulu podrobíme kompozit smykovému zatížení σ_{LT} .

Budeme také uvažovat, že smyková napětí ve vlákne a matrici jsou stejná.



Obrázek 12: Kompozit zatížený smykovým napětím [5]

Zkosení vlákna a matrice jsou

$$\varepsilon_{LTf} = \frac{\sigma_{LTf}}{G_f}, \quad \varepsilon_{LTm} = \frac{\sigma_{LTm}}{G_m}. \quad (1.25)$$

G_m a G_f značí smykové moduly pružnosti matrice a vlákna.

Posunutí kompozitu v podélném směru v horní ploše je

$$u = u_f + u_m, \quad (1.26)$$

kde $u_f = h_f \varepsilon_{LTf}$, $u_m = h_m \varepsilon_{LTm}$.

Předchozí vztah můžeme rozepsat na tvar

$$u = h_f \varepsilon_{LTf} + h_m \varepsilon_{LTm} = \left(\frac{h_f}{G_f} + \frac{h_m}{G_m} \right) \sigma_{LT}. \quad (1.27)$$

Úhel zkosení kompozitu je

$$\varepsilon_{LT} = \frac{u}{h} = \left(\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \right) \sigma_{LT} . \quad (1.28)$$

Smykový modul vyjádříme jako

$$G_{LT} = \frac{\sigma_{LT}}{\varepsilon_{LT}} = \left(\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \right)^{-1} , \quad (1.29)$$

což po rozepsání je

$$G_{LT} = \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f} = \frac{G_m}{V_m + V_f \frac{G_m}{G_f}} , \quad (1.30)$$

nebo

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{G_m}{G_f} \right)} . \quad (1.30)$$

Pokud podobně jako v předchozích případech budeme předpokládat $G_f \gg G_m$, můžeme psát

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f} . \quad (1.31)$$

Smykové moduly G_m a G_f můžeme s určitou přesností vypočítat i bez experimentu, za předpokladu, že známe moduly pružnosti v tahu a odpovídající Poissonova čísla, podobně jako se to dělá v klasické pružnosti a pevnosti. Tyto vztahy pak mají tvar [5]

$$G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} , \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} . \quad (1.32)$$

6.1.5 Koeficient podélné teplotní roztažnosti α_L

Označme rozdíl okamžité a počáteční teploty $\Delta T = T - T_0$. Pro prodloužení v podélném směru platí

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_{Lm} . \quad (1.33)$$

Pouze podélná napětí, jenž vyvolají rozdílné koeficienty α_{Lf} a α_{Lm} , jsou nenulová. Platí

$$\varepsilon_{Lf} = \frac{\sigma_{Lf}}{E_f} + \alpha_f \Delta T , \quad \varepsilon_{Lm} = \frac{\sigma_{Lm}}{E_m} + \alpha_m \Delta T . \quad (1.34)$$

Vyjádříme napětí

$$\sigma_{L_f} = E_f (\varepsilon_L - \alpha_f \Delta T), \quad \sigma_{L_m} = E_m (\varepsilon_L - \alpha_m \Delta T). \quad (1.35)$$

Výsledná tahová síla potom bude

$$F = \sigma_{L_f} A_f + \sigma_{L_m} A_m. \quad (1.36)$$

Protože předpokládáme nijak neuchycenou laminu, musí být výsledná síla $F = 0$. Z předchozích rovnic můžeme psát

$$\begin{aligned} \sigma_{L_f} V_f + \sigma_{L_m} V_m &= 0, \\ E_f V_f (\varepsilon_L - \alpha_f \Delta T) + E_m V_m (\varepsilon_L - \alpha_m \Delta T) &= 0, \\ (E_f V_f + E_m V_m) \varepsilon_L &= (\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m) \Delta T. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Výsledný koeficient roztažnosti ve směru L dostaneme podílem ε_L a ΔT následujícím způsobem

$$\alpha_L = \frac{\varepsilon_L}{\Delta T}. \quad (1.38)$$

Po vyjádření tohoto poměru z (1.37) získáváme [5]

$$\alpha_L = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m (1 - V_f)}{E_f V_f + E_m (1 - V_f)}. \quad (1.39)$$

6.1.6 Koeficient příčné teplotní roztažnosti α_T

Příčné deformace vlákna a matrice jsou dány vztahy

$$\varepsilon_{T_f} = -\frac{V_f}{E_f} \sigma_{L_f} + \alpha_f \Delta T, \quad \varepsilon_{T_m} = -\frac{V_m}{E_m} \sigma_{L_m} + \alpha_m \Delta T. \quad (1.40)$$

Dosadíme za σ_{L_f} , respektive za σ_{L_m} ze vztahu (1.35). Vyjde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{T_f} &= -v_f (\varepsilon_L - \alpha_f \Delta T) + \alpha_f \Delta T, \\ \varepsilon_{T_m} &= -v_m (\varepsilon_L - \alpha_m \Delta T) + \alpha_m \Delta T. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Změna tloušťky je

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m = h_f \varepsilon_{T_f} + h_m \varepsilon_{T_m}. \quad (1.42)$$

Zúžení ve směru T potom je

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta h}{h} = V_f \varepsilon_{Tf} + V_m \varepsilon_{Tm} . \quad (1.43)$$

Po úpravě a dosazení (1.41) do (1.43) dostáváme

$$\varepsilon_T = -(V_f v_f + V_m v_m) \varepsilon_L + (V_f \alpha_f v_f + V_m \alpha_f v_m) \Delta T + (V_f \alpha_f + V_m \alpha_m) \Delta T , \quad (1.44)$$

kde vyskytující se ε_L je z dříve zjištěných vztahů

$$\varepsilon_L = \alpha_L \Delta T = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} \Delta T .$$

Dosazením ε_L do rovnice (1.44) a po následných úpravách obdržíme

$$\varepsilon_T = \left[\frac{V_f V_m (v_m E_f - v_f E_m) (\alpha_m - \alpha_f)}{V_f E_f + V_m E_m} + V_f \alpha_f + V_m \alpha_m \right] \Delta T . \quad (1.45)$$

Koeficient příčné teplotní roztažnosti je definovaný jako

$$\alpha_T = \frac{\varepsilon_T}{\Delta T} , \quad (1.46)$$

který po dosazení z rovnice (1.45) vypadá takto

$$\alpha_T = \frac{v_m E_f - v_f E_m}{\frac{E_f}{V_m} + \frac{E_m}{V_f}} (\alpha_m - \alpha_f) + V_f \alpha_f + V_m \alpha_m , \quad (1.47)$$

nebo

$$\alpha_T = \frac{v_m E_f - v_f E_m}{\frac{E_f}{(1-V_f)} + \frac{E_m}{V_f}} (\alpha_m - \alpha_f) + V_f \alpha_f + (1-V_f) \alpha_m . \quad (1.48)$$

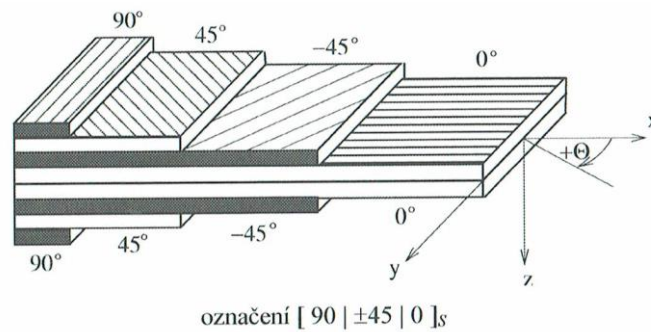
Vztahy odvozené v této kapitole lze pomocí transformačních vztahů přepočítat ze systému

$O(L, T, T')$ do jakéhokoli směru pootočeném o určitý úhel. [5]

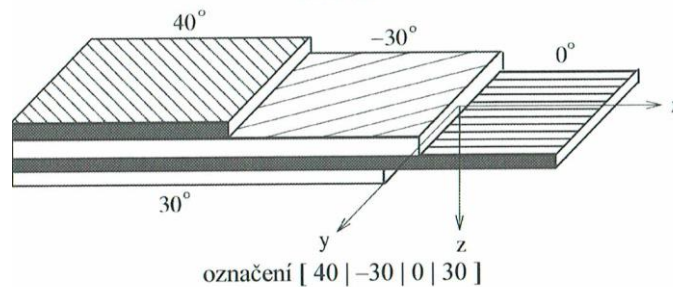
6.2 Klasická laminátová teorie

Z předchozích odstavců je patrné, že ve vláknovém kompozitu s vyztužením v jednom směru jsou dány vlastnosti v podélném směru především vlastnostmi vláken a naproti tomu ve směru podélném jsou dány především vlastnostmi matrice. Ty jsou zpravidla výrazně horší než vlastnosti výtzuže, a proto je využití jednosměrového kompozitu velmi omezené. Proto se skládají jednotlivé vrstvy na sebe a vytvářejí se tak lamináty. Vrstev může být několik a bývají vůči sobě pootočené o určitý úhel. Lamináty se také dělí na symetrické uspořádání vrstev a nesymetrické. [5]

Na následujícím obrázku jsou dva lamináty a jejich označení.



Obr. 5.1



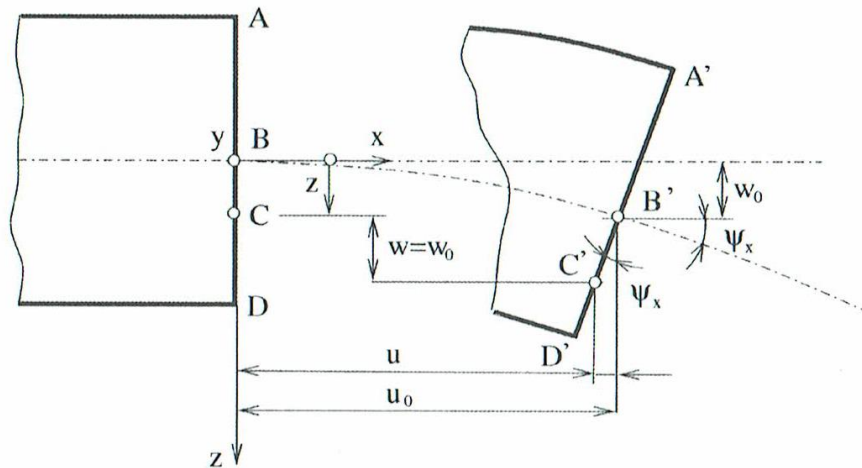
Obrázek 13: Typy laminátů a jejich značení [5]

6.2.1 Základní rovnice laminátové desky

Jako v ostatních úlohách pružnosti a pevnosti ještě před samotným řešením zavedeme několik zjednodušujících předpokladů, které nám umožní sestavit potřebné fyzikální rovnice. Předpoklady jsou následující [5]

- každá lamina je ortotropní a kvazihomogenní
- tloušťka laminy je ve srovnání se šířkou a délkou velmi malá
- spoj mezi laminami je dokonalý a nekonečně tenký
- posunutí se v příčném směru (ve směru tloušťky) mění lineárně
- jelikož je tloušťka laminátu velmi malá oproti ostatním rozměrům, můžeme uvažovat rovinný stav napjatosti, platí tedy $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$

- příčná zkosení $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} \doteq 0$, a proto zůstanou kolmé vrstvy ke středové ploše i po deformaci kolmé a zůstanou přímkové
- normálová vzdálenost od středové roviny zůstává konstantní, a proto zanedbáme přetvoření v příčném směru $\varepsilon_{zz} \doteq 0$
- závislost mezi napětími a deformací je lineární



Obrázek 14: Zdeformovaná část laminátu [5]

Jak je patrné z obrázku, vlivem deformace vznikají na střední rovině v bodě B posuvy u_0, v_0, w_0 , ve směrech os x, y, z . Pro posuv bodu C ve směru osy x můžeme psát

$$u = u_0 - z\psi_x, \quad (2.1)$$

kde ψ_x značí sklon střední roviny od vodorovné polohy.

Platí

$$\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Podobně můžeme psát pro směr y

$$v = v_0 - z\psi_y, \quad (2.3)$$

kde analogicky

$$\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Pokud zanedbáme deformaci po tloušťce, platí

$$w = w_0 . \quad (2.5)$$

Předchozí rovnice lze zapsat jako pole posuvů

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z\psi_x = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} , \\ v &= v_0 - z\psi_y = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} , \\ w &= w_0 . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Z tohoto pole posuvů získáme derivací pole deformací

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} , \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} , \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} . \quad (2.9)$$

Rovnice (2.7) až (2.9) prepíšeme do tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} , \quad (2.10)$$

kde deformace střední plochy jsou

$$\varepsilon_m^\circ = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} , \quad (2.11)$$

a křivosti

$$k = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} . \quad (2.12)$$

Napětí v libovolné vrstvě můžeme vyjádřit pomocí vztahu pro mimoosově namáhanou laminu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} , \quad (2.13)$$

nebo

$$\sigma' = Q \cdot \varepsilon' , \quad (2.14)$$

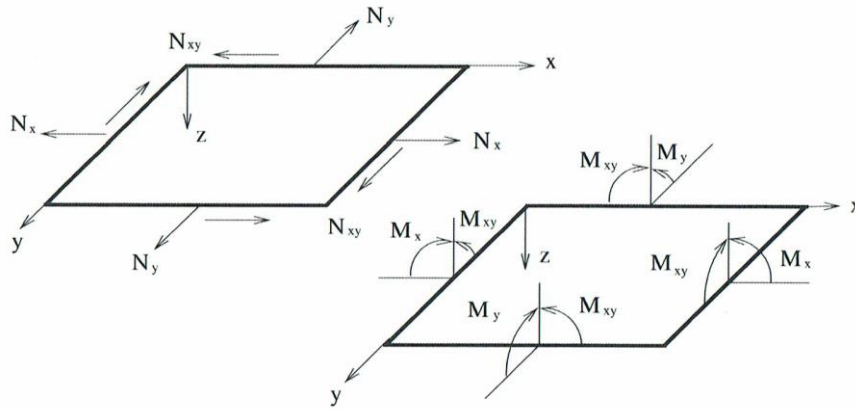
kde Q značí matici mimoosové tuhosti.

Dosazením vztahu (2.10) do (2.14) získáme výraz, kterým je možno spočítat napětí v k -té vrstvě

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} . \quad (2.15)$$

Při vyšetřování laminátu je výhodné pracovat se systémem ekvivalentních sil a momentů rozložených do souřadného systému, ve kterém pracujeme. Z takových sil a momentů je následně jednodušší získat potřebné deformace. Zavedeme značení sil a momentů

působících na příčný průřez k-té vrstvy tloušťky $h_k - h_{k-1}$ dle následujícího obrázku (Obr.15)



Obrázek 15: Momenty a síly působící na laminát [5]

Síly spočítáme následujícím způsobem

$$N_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} dz, \quad N_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} dz. \quad (2.16)$$

Podobně platí pro momenty

$$M_{xx} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} z dz, \quad M_{yy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} z dz, \quad M_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} z dz. \quad (2.17)$$

Vztahy (2.16) a (2.17) vyjadřují síly, respektive momenty vztažené na jednotku délky. Síly mají tedy rozměr $[N \cdot m^{-1}]$ a momenty $[N]$.

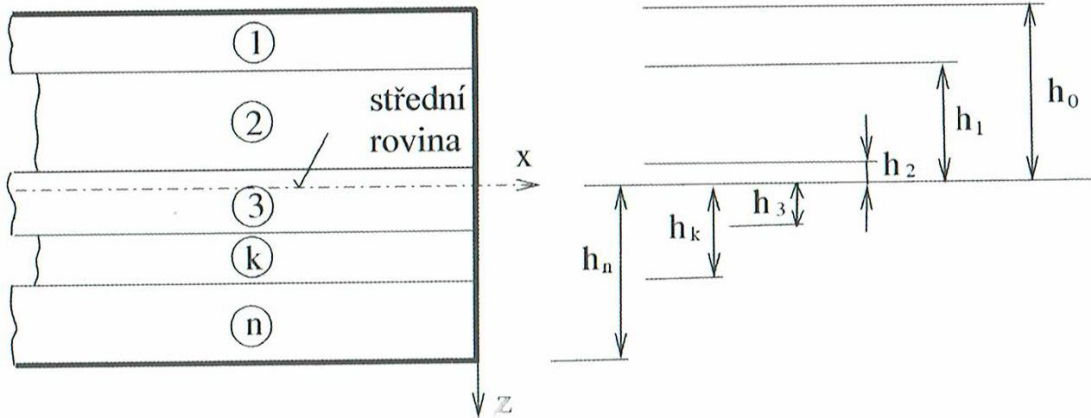
Vzhledem k tomu, že jednotlivé vrstvy mají obecně různé tuhosti, bude se napětí měnit na hranicích vrstev měnit nespojitě. Výsledné síly a momenty, které působí na průřez laminátu, tak získáme součtem účinků od všech n vrstev. Síly poté budou vypadat následujícím způsobem

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad (2.18)$$

a momenty

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.19)$$

Na základě těchto rovnic můžeme postupně sestavit konstitutivní vztah laminátu složeného z n vrstev (viz obrázek 16).



Obrázek 16: Laminát s n vrstvami [5]

Po dosazení (2.15) do (2.18) a (2.19) získáme následující závislost mezi deformací a vnějšími silovými účinky [5]

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z dz \right\},$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} z dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right\} \quad (2.20)$$

Jelikož je matice Q pro každou vrstvu konstantní, můžeme předchozí vztahy zapsat do přehlednější formy [5]

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Po provedení sumace a integrace získáme

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

kde jednotlivé prvky značí

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}),$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (2.23)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3).$$

Vztahy (2.22) můžeme spojit do jednoho ve tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

zjednodušeně

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^\circ \\ \dots \\ k \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

kde **A** je matice tahové tuhosti,

B je matice vazební tuhosti,

D je matice ohybové tuhosti [5].

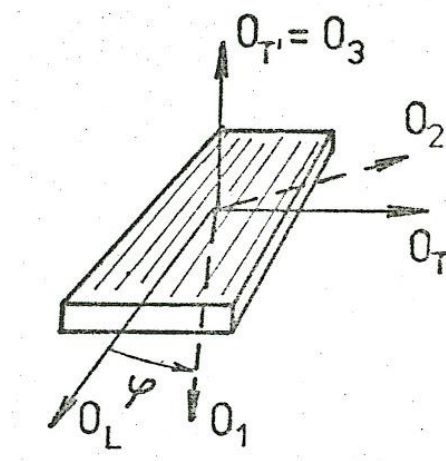
6.3 Výpočet termoelastických charakteristik pro náhodně orientovanou výztuž

6.3.1 Odvození $\bar{\alpha}$ pro náhodně orientovanou výztuž

Je-li jednosměrně vyztužená monovrstva vystavena pouze změně teploty a nepůsobí na ní tedy jiný druh zatížení, pak platí [6]

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T. \quad (3.1)$$

Koeficient teplotní roztažnosti je tenzor druhého řádu, o složkách α_L , α_T a α_T . Když tyto složky chceme počítat v pootočeném souřadném systému dle obrázku (Obr.17), můžeme psát [6]



Obrázek 17: Kompozit s pootočeným souřadným systémem [6]

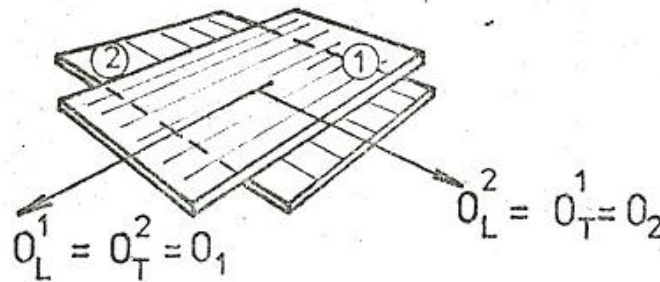
$$\alpha_{11} = \alpha_L \cos^2 \varphi + \alpha_T \sin^2 \varphi , \quad (3.2)$$

$$\alpha_{22} = \alpha_L \cos^2 \varphi + \alpha_T \sin^2 \varphi$$

$$\alpha_{12} = (\alpha_T - \alpha_L) \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\alpha_3 = \alpha_T \dots$$

Z transformačních vztahů (1.50) vyplývá, že pokud $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, pak je $\alpha_{12} = 0$ a materiál dilatuje v rovině LT isotropně, neboť pro jakýkoliv úhel φ platí $\alpha_{11} = \alpha_{22}$. Této skutečnosti využijeme při stanovení $\bar{\alpha}$ vrstvy kompozitu vyztužené náhodně orientovanou výztuží. Náhodnou výztuž zde budeme aproximovat tak, že budeme na sebe skládat a postupně natáčet jednotlivé dvojrstvy dokud nezastoupíme všechny směry. Každá dvojrstva bude mít navenek stejné koeficienty roztažnosti ve směru vláken svých jednotlivých monovrstev. Jak již bylo poznamenáno výše, to znamená, že bude dilatovat isotropně, stejně jako výsledný kompozit složený z těchto dvojrstev. Stačí spočítat koeficient teplotní roztažnosti dvojrstvy dle obrázku (Obr. 18). [6]



Obrázek 18: Dvojrstva kompozitu [6]

Pro tuhosti monovrstvy 1 a 2 platí

$$\begin{aligned} C_{11}^1 &= C_{22}^2 ; C_{11}^2 = C_{22}^1 ; C_{12}^1 = C_{12}^2 \\ C_{16}^1 &= C_{16}^2 = C_{26}^1 = C_{26}^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde

$$C_{11}^1 = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} ; C_{12}^1 = \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} ; C_{22}^1 = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} ; C_{66}^1 = G_{LT} . \quad (3.4)$$

Pro koeficient roztažnosti platí

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^1 &= \alpha_{22}^2 = \alpha_L, \\ \alpha_{11}^2 &= \alpha_{22}^1 = \alpha_T, \\ \alpha_{12}^1 &= \alpha_{12}^2 = 0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Při ohřevu o $\Delta T = 1K$ se v monovrstvě vyvolá napětí způsobené rozdílnými koeficienty roztažnosti. Označíme koeficienty roztažnosti dvojevrstvy $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$, pak platí [6]

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(r)} &= C_{11}^{(r)}(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1^{(r)}) + C_{12}^{(r)}(\bar{\alpha}_1 - \alpha_2^{(r)}), \\ \sigma_{22}^{(r)} &= C_{12}^{(r)}(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1^{(r)}) + C_{22}^{(r)}(\bar{\alpha}_2 - \alpha_2^{(r)}), \\ \sigma_{12}^{(r)} &= 0,\end{aligned}\tag{3.6}$$

kde r je označení monovrstvy ($r = 1, 2$).

Obě monovrstvy jsou totožné, a tedy platí $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}$. Z podmínky rovnováhy do směru O_1 dostaneme

$$E_L(\bar{\alpha} - \alpha_L) + \nu_{LT}E_T(\bar{\alpha} - \alpha_T) + \nu_{LT}E_T(\bar{\alpha} - \alpha_L) + E_T(\bar{\alpha} - \alpha_T) = 0.\tag{3.7}$$

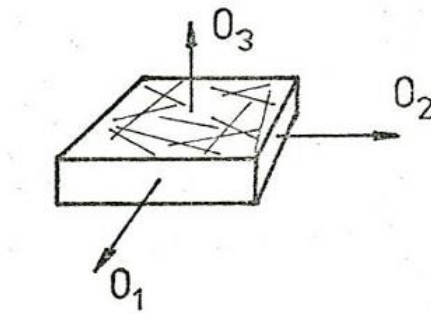
Po úpravě dostaneme

$$\bar{\alpha} = \alpha_T + \frac{(\alpha_L - \alpha_T)(E_L + \nu_{LT}E_T)}{E_L + E_T(1 + 2\nu_{LT})},\tag{3.8}$$

což je výsledný vztah pro určení koeficientu teplotní roztažnosti kompozitu s náhodně orientovanou výztuží. [6]

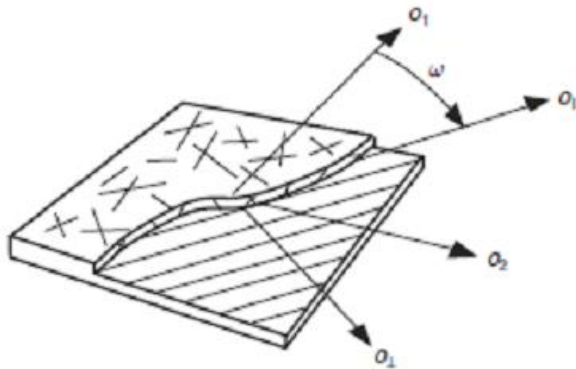
6.3.2 Výpočet E, G a ν v rovině isotropie

Jak již bylo zmíněno dříve, vrstva kompozitu s náhodně orientovanou výztuží se vzhledem k počtu vláken a jejich uspořádání chová téměř isotrope. To však neplatí ve směru kolmém na takovou vrstvu, kde jsou elastické vlastnosti odlišné. Na obrázku 19 tento směr představuje osa O_3 . Takovému uspořádání se říká transversálně isotropní kontinuum a v našem případě bude mít rovinu isotropie O_1O_2 . [3]



Obrázek 19: Transversálně isotropní kompozit [6]

Kompozit s náhodně orientovanou výztuží aproximujeme tak, že postupně skládáme jednosměrné vrstvy na sebe, jenž jsou orientované od 0° do 180° (viz Obr. 20).



Obrázek 20: Matematický model náhodně vyztužené vrstvy [2]

Vlastnosti celé vrstvy se pak spočítají jako průměrné fiktivní vlastnosti od všech jednosměrných vrstev. Každá z vrstev má svoji matici redukované tuhosti \mathbf{Q} . Orientace všech vrstev se počítá pomocí přepočtu transformačních matic. Průměrná matice tuhosti pro vrstvu kompozitu je pak

$$[\mathbf{Q}^{random}] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{Q}] [\mathbf{T}]^{-T} d\omega, \quad (3.9)$$

kde prvky matice \mathbf{Q} jsou

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}, \quad Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}, \quad (3.10)$$

$$Q_{66}^I = G_{LT}.$$

Transformační matice má následující podobu

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \omega & \sin^2 \omega & 2 \cos \omega \sin \omega \\ \sin^2 \omega & \cos^2 \omega & -2 \cos \omega \sin \omega \\ -\cos \omega \sin \omega & \cos \omega \sin \omega & \cos^2 \omega - \sin^2 \omega \end{bmatrix} . \quad (3.11)$$

Po integraci (3.9) budou jednotlivé prvky matice $\mathbf{Q}^{\text{random}}$ vypadat

$$\begin{aligned} Q_{11}^{\text{random}} &= \frac{3}{8}(Q_{11} + Q_{22}) + \frac{1}{4}(Q_{12} + Q_{66}) , \\ Q_{12}^{\text{random}} &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + \frac{3}{4}Q_{12} , \\ Q_{66}^{\text{random}} &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) + \frac{1}{2}Q_{66} , \\ Q_{16}^{\text{random}} &= Q_{26}^{\text{random}} = 0 . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dosazením vztahů (3.10) do (3.12) a po následném vyjádření dostaneme

$$\begin{aligned} E &= \frac{(E_L + E_T)^2 + 4G_{LT}(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})[E_L + E_T(1 + 2\nu_{LT})] - (2\nu_{LT}E_T)^2}{(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})[3E_L + E_T(3 + 2\nu_{LT}) + 4G_{LT}(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})]} , \\ G &= \frac{E_L + E_T(1 - 2\nu_{LT}) + 4G_{LT}(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})}{8(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})} , \\ \nu &= \frac{E_L + E_T(1 + 6\nu_{LT}) - 4G_{LT}(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})}{3E_L + E_T(3 + 2\nu_{LT}) + 4G_{LT}(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tyto rovnice splňují podmínku isotropie, jenž můžeme zapsat například pomocí Poissonova čísla [3]

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu) . \quad (3.14)$$

7 Příklad

Zadání :

Vyřešte a graficky zpracujte závislosti termoelastických charakteristik zadaných vláken na objemovém podílu v kompozitu s náhodnou orientací výztuže. Jako matrice bude použita epoxidová pryskyřice a jako výztuž budou použita skelná vlákna a vlákna T600.

Řešení:

Řešení bylo provedeno v programu Microsoft Excel za pomoci speciálně naprogramovaného sešitu pro analýzu laminátů [15]. Tento sešit obsahoval odvozené vztahy (1.12), (1.17), (1.23), (1.30), (1.39) a (1.48), jejichž výsledky byly podkladem pro vypočítání vlastností kompozitu s náhodně orientovanou výztuží pomocí vztahů (3.13).

Vlastnosti byly počítány od nulového do 80 % podílu vláken v matrici.

Výsledky pro vlákno T600:

T600				
V_f				
[%]	E [MPa]	G [MPa]	ν	α [K ⁻¹]
0	4 500	1600	0,4	1,10E-04
4	7 438	2745,324171	0,354716382	5,70193E-05
8	10 519	3912,322315	0,344344205	3,87784E-05
12	13 624	5085,661438	0,339462504	2,91598E-05
16	16 743	6263,985126	0,336483866	2,31531E-05
20	19 875	7447,377231	0,334376169	1,9018E-05
24	23 020	8636,330158	0,332723726	1,59818E-05
28	26 178	9831,571692	0,331322399	1,36473E-05
32	29 352	11034,04479	0,330056161	1,17884E-05
36	32 543	12244,93746	0,328849985	1,02669E-05
40	35 756	13465,74371	0,327648662	8,99314E-06
44	38 992	14698,35704	0,326405738	7,9063E-06
48	42 257	15945,20778	0,325076622	6,96352E-06
52	45 557	17209,46579	0,323613201	6,13356E-06
56	48 900	18495,34592	0,321958414	5,39302E-06
60	52 296	19808,58164	0,320039459	4,72385E-06
64	55 760	21157,18563	0,317757926	4,11174E-06
68	59 312	22552,72351	0,314974007	3,54504E-06
72	62 984	24012,55793	0,311479313	3,01395E-06
76	66 822	25564,05475	0,306946708	2,50994E-06
80	70 903	27253,10292	0,300830314	2,02523E-06

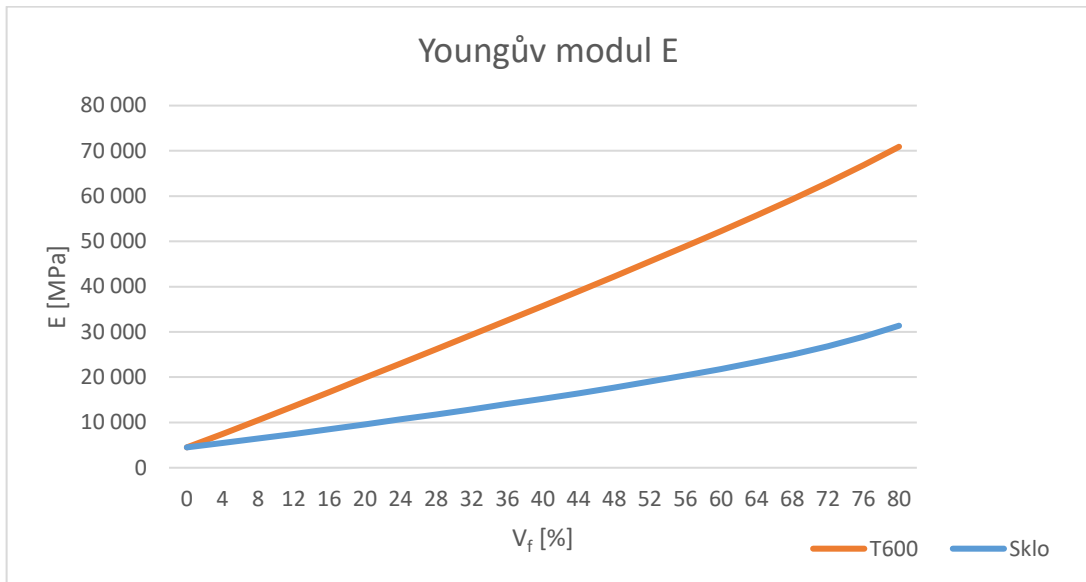
Tabulka 2: Výsledky pro vlákno T600

Výsledky pro skelné vlákno:

Sklo	V_f				
	[%]	E [MPa]	G [MPa]	ν	
				α [K ⁻¹]	
0		4 500	1600	0,4	1,10E-04
4		5 440	1979,888293	0,373741709	8,99214E-05
8		6 447	2368,736288	0,360768582	7,539E-05
12		7 480	2764,455597	0,352900955	6,46022E-05
16		8 532	3166,037372	0,347476221	5,6316E-05
20		9 602	3573,552834	0,343411017	4,97596E-05
24		10 688	3987,513974	0,340173517	4,44421E-05
28		11 793	4408,718548	0,337467862	4,00392E-05
32		12 919	4838,225968	0,335113298	3,6329E-05
36		14 069	5277,387079	0,332990406	3,31545E-05
40		15 248	5727,910144	0,331014339	3,04016E-05
44		16 460	6191,964161	0,329120168	2,7985E-05
48		17 712	6672,331058	0,327254082	2,58396E-05
52		19 013	7172,629099	0,325367476	2,39141E-05
56		20 374	7697,645953	0,323412372	2,21673E-05
60		21 812	8253,847608	0,321337173	2,05652E-05
64		23 348	8850,180488	0,319081911	1,90783E-05
68		25 013	9499,383815	0,316572027	1,768E-05
72		26 853	10220,23509	0,313709182	1,6345E-05
76		28 937	11041,60629	0,310356457	1,50466E-05
80		31 378	12010,29846	0,306312554	1,37547E-05

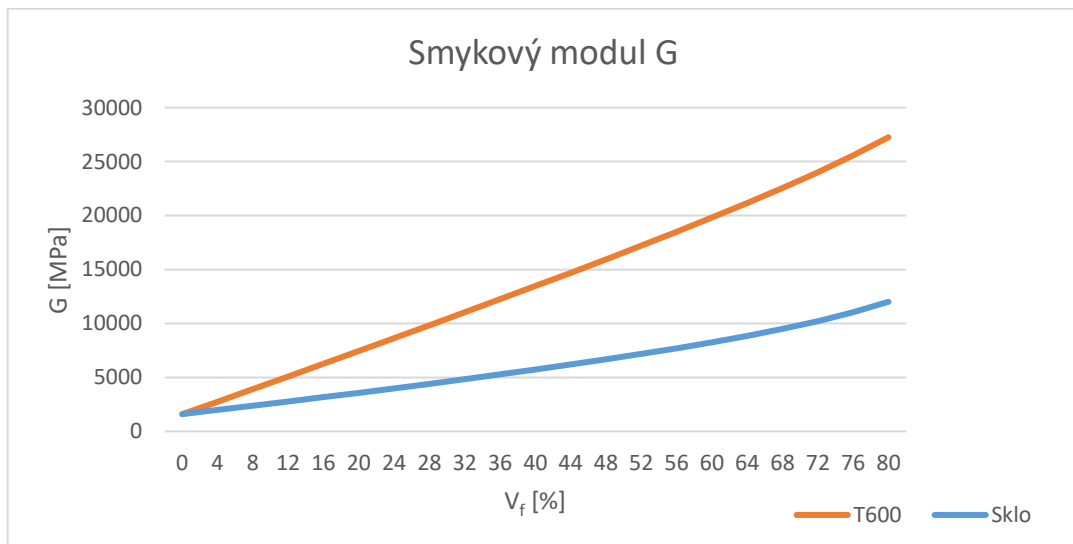
Tabulka 3: Výsledky pro skelné vlákno

Porovnání modulu pružnosti E:



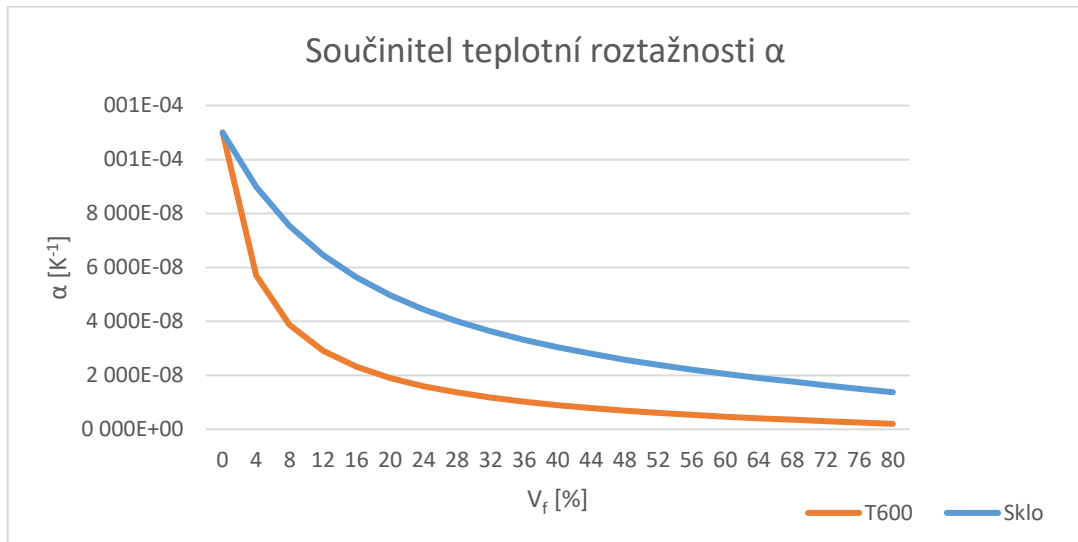
Obrázek 21: Průběhy Youngova modulu E

Porovnání smykového modulu G:



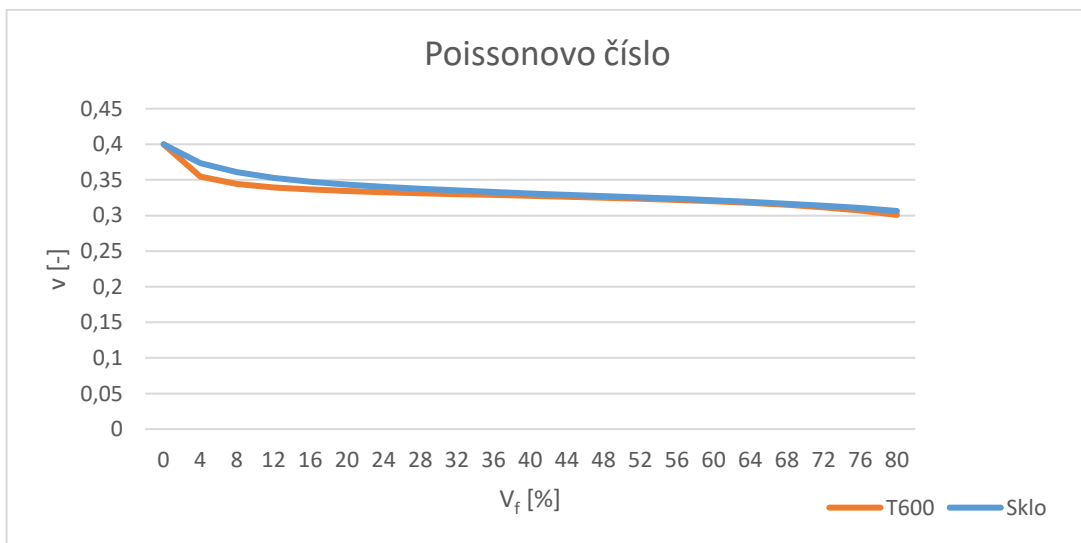
Obrázek 22: Průběhy smykového modulu G

Porovnání součinitele teplotní roztažnosti α :



Obrázek 23: Průběhy součinitele teplotní roztažnosti α

Porovnání Poissonova čísla ν :



Obrázek 24: Průběhy Poissonova čísla

Jako kontrola správnosti výsledků byl použit již dříve zmíněný vztah (3.14), kterým bylo ověřeno Poissonovo číslo v spočítané pomocí vztahu (3.13) pro vlákno T600.

V_f [%]	v (vztah 3.13)	$v_{\text{kontrolní}}$ (vztah 3.14)
0	0,4	0,4
4	0,354716382	0,354716382
8	0,344344205	0,344344205
12	0,339462504	0,339462504
16	0,336483866	0,336483866
20	0,334376169	0,334376169
24	0,332723726	0,332723726
28	0,331322399	0,331322399
32	0,330056161	0,330056161
36	0,328849985	0,328849985
40	0,327648662	0,327648662
44	0,326405738	0,326405738
48	0,325076622	0,325076622
52	0,323613201	0,323613201
56	0,321958414	0,321958414
60	0,320039459	0,320039459
64	0,317757926	0,317757926
68	0,314974007	0,314974007
72	0,311479313	0,311479313
76	0,306946708	0,306946708
80	0,300830314	0,300830314

Tabulka 4: Kontrola správnosti výsledků

Z výsledků je patrné, že vztah pro isotropii funguje.

8 Závěr

V této práci byly shrnuty obecné charakteristiky kompozitních materiálů, podrobněji pak kompozitů s náhodně orientovanou výztuží. Dále byla provedena rešerše aplikací kompozitů.

Jako stěžejním bodem práce pak byla analýza kompozitů z matematického hlediska. Kromě odvození základních vztahů pro elastické charakteristiky v podélných a příčných směrech byly dále odvozeny vztahy pro termoelastické charakteristiky pro kompozity s náhodně orientovanou výztuží.

Analýza vláken T600 a skelných vláken pak ukázala, že kompozit s náhodnou výztuží vyrobený z vláken T600 bude mít již při objemovém podílu 16 % téměř dvojnásobně velký Youngův modul pružnosti. Podobně je tomu tak u smykového modulu.

Poissonovo číslo má skelné vlákno zhruba do 8 % objemového podílu hladší průběh, než je tomu u vlákna T600, což znamená, že vlákno T600 má u nižších objemových podílů výraznější nepoměr mezi modulem pružnosti v tahu a modulem pružnosti ve smyku, než jak je tomu u vlákna skelného. Nicméně zhruba od 20 % V_f jsou křivky téměř totožné.

Součinitel teplotní roztažnosti pak klesá výrazně rychleji u vlákna T600 než u vlákna skelného a dostává se na jeho polovinu již po téměř 10 %. Tento výraznější rozdíl přestává být patrný od V_f přibližně 50 % a obě křivky klesají s podobnou směrnici a je mezi nimi téměř konstantní rozdíl okolo $1,5E-05$.

Použitá literatura

- [1] JANOVEC, Jiří, Jiří CEJP a Josef STEIDL. *Perspektivní materiály*. Vyd. 3., přeprac. V Praze: České vysoké učení technické, 2008. ISBN 9788001041673.
- [2] EHRENSTEIN, Gottfried W. *Polymerní kompozitní materiály*. V ČR 1. vyd. Praha: Scientia, 2009. ISBN 9788086960296.
- [3] GIBSON, Ronald F. *Principles of composite material mechanics*. 3rd ed. Boca Raton, Fla.: Taylor & Francis, c2012. ISBN 9781439850053.
- [4] MRÁZ, Petr a Jaroslav TALÁCKO. *Konstrukce strojů s kompozitními materiály*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 8001035409.
- [5] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů. 2., přeprac. vyd.* V Plzni: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 9788070436899.
- [6] Kabelka, J.: Termoelastické charakteristiky polymerního kompozitu s výztuží ve formě rohože, Výzkumná zpráva Z935/85, Ústav termomechaniky, ČSAV, 1985.
- [7] VRBKA, Jan. *Mechanika kompozitů*. In: Vysoké učení technické v Brně [online]. Brno: Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, 2008 [cit. 2016-06-03]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=83340
- [8] TARASKO, John. Boeing 787: A Matter of Materials: Special Report: Anatomy of a Supply Chain. In: *Industry week* [online]. John Tarasko, 2007 [cit. 2017-05-27]. Dostupné z: <http://www.industryweek.com/companies-amp-executives/boeing-787-matter-materials-special-report-anatomy-supply-chain>
- [9] BAREŠ, Richard. *Kompozitní materiály*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988.
- [10] MALLICK, P. K. *Fiber-reinforced composites: materials, manufacturing, and design*. 3rd ed., [expanded and rev. ed.]. Boca Raton, FL: CRC Press, c2008. ISBN 9780849342059.
- [11] BARBERO, E. J. *Introduction to Composite Material Design Second Edition*, CRC Press Boca Raton, 2011.
- [12] AUTOR NEUVEDEN. gmotors.co.uk [online]. [cit. 31.5.2017]. Dostupný na WWW: <http://www.gmotors.co.uk/news/bmw-m6-gran-coupe-revealed-video/bmw-m6-gran-coupe-carbon-fibre-roof-jg/>
- [13] KUBOVCIÁK, Martin. UL-39 ALBI: Ultralehký letoun s netradičním pohonem [online]. [cit. 2017-05-31]. Dostupné z: <http://www.skyleader.aero/ul-39-albi/>

[14] Aktuality: Unikátní ultralehký letoun UL-39 Albi. Aktuality Fakulty strojní ČVUT v Praze [online]. 2017, 2017 [cit. 2017-05-31]. Dostupné z: <https://www.fs.cvut.cz/aktuality/230-212/unikatni-ultralehky-letounu-ul-39-albi/>

[15] POUL Robin. LamiEx v 3.0. Program pro výpočet zatížení a pevnosti laminátů podle klasické laminátové teorie. *Tom Mares's webpage* [online]. 2006 [cit. 2017-06-01] Dostupné z: <http://drone.fsid.cvut.cz/mcmfolder/laminator.xls>