

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analýza průhybu kompozitních nosníků
Analysis of Composite Beams in Bending

2017

Martin MATUŠŮ

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Matušů** Jméno: **Martin** Osobní číslo: **437228**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Analýza průhybu kompozitních nosníků

Název bakalářské práce anglicky:

Analysis of Composite Beams in Bending

Pokyny pro vypracování:

1. Proveďte rešerši aplikací kompozitních materiálů na nosíkové elementy konstrukcí.
2. Pomocí klasické laminátové teorie porovnejte průhyb symetrického a nesymetrického kompozitního nosníku pro různé kombinace vlákn a matrice.
3. Průhyb vyčíslete v závislosti na objemovém podílu vláken.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Kaw, A. K.: Mechanics of Composite Materials: CRC Press, Boca Raton, 2006.
- [2] Laš, V.: Mechanika kompozitních materiálů, ZČU v Plzni, Plzeň, 2008.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Bc. Zdeněk Padovec Ph.D., ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **28.04.2017** Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2017**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Podpis vedoucí(ho) práce

Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

Podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

3/5/2017
Datum převzetí zadání

Matušů
Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Martin Matušů
Název bakalářské práce:	Analýza průhybu kompozitních nosníků
Anglický název:	Analysis of Composite Beams in Bending
Akademický rok:	2016/2017
Studijní program:	Teoretický základ strojního inženýrství
Obor studia:	Bez oboru
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí bakalářské práce:	Ing. Bc. Zdeněk Padovec, Ph.D.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 68 Počet obrázků: 29 Počet tabulek: 9
Klíčová slova:	Symetrický laminát, asymetrický laminát, ohyb, kompozit, laminátová teorie, napětí, průhyb, deformace.
Keywords:	Symmetric laminate, non-symmetric laminate, bending, composite, lamination theory, stress, deflection, strain.
Abstrakt:	Tato práce je založena na odvození ohybu pro anizotropní materiály, a zvláště na porovnání průhybu symetrického a asymetrického kompozitního nosníku v závislosti na objemovém podílu vláken.
Abstract:	This thesis is based on derivation of bending for anisotropic materials and especially on difference between bending of symmetrical and nonsymmetrical composite beam depending on the volumetric fiber content.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím konzultací s vedoucím bakalářské práce a literatury v přiloženém seznamu.

V Praze dne:

.....

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu Ing. Bc. Zdeňku Padovcovi, Ph.D. za vedení bakalářské práce, důležité rady a cenné připomínky, díky kterým jsem mohl tuto práci sepsat, a v neposlední řadě za čas, který mi věnoval v rámci konzultací.

Další poděkování patří mé přítelkyni, rodině a mým přátelům za podporu během psaní práce a během studia.

Obsah

Seznam použitých veličin.....	8
Seznam obrázků.....	10
Seznam tabulek.....	11
Seznam grafů.....	12
Úvod.....	13
1. Kompozitní materiály.....	14
1.1 Definice kompozitních materiálů.....	14
2. Vláknové kompozity.....	16
2.1 Charakteristika výztuže.....	16
2.1.1 Materiály vláken.....	16
2.1.1.1 Skleněná vlákna.....	17
2.1.1.2 Aramidová vlákna.....	18
2.1.1.3 Uhlíková vlákna.....	18
2.1.1.4 Keramická vlákna.....	19
2.1.1.5 Kovová vlákna.....	19
2.1.1.6 Piezoelektrická keramická vlákna (PZT).....	20
2.1.1.7 Přírodní vlákna.....	20
2.1.1.8 Pavoučí vlákno.....	20
2.1.1.9 Bavlněné vlákno.....	20
2.1.1.10 Bambusová vlákna.....	21
2.2 Charakteristika matrice.....	22
2.2.1 Materiál Matrice.....	22
2.2.1.1 Polymerní matrice.....	22
2.2.1.2 Kovové matrice.....	23
2.2.1.3 Keramické a skleněné matrice.....	23
2.3 Aplikace kompozitů.....	24
2.3.1 Stavebnictví.....	24
2.3.2 Automobilový průmysl.....	24
2.3.3 Letecký průmysl.....	26
3. Směšovací pravidlo.....	27
3.1 Modul pružnosti E_L	28
3.2 Poissonovo číslo μ_{LT}	29
3.3 Modul pružnosti E_T	29
3.4 Smykový modlu pružnosti G_{LT}	30
4. Klasická laminátová teorie.....	32

4.1	Základní rovnice laminátové desky	33
4.2	Maticе tuhosti laminátové desky	37
4.3	Rozdělení způsobů vrstvení laminátů	40
4.3.1	Symetrické lamináty	40
5.	Ohyb kompozitních nosníků.....	41
5.1	Ohyb symetrického laminátu	42
5.2	Ohyb asymetrického nosníku	45
6.	Porovnání průhybu symetrického a asymetrického nosníku	48
6.1	Zadní příkladu	48
6.2	Řešení příkladu pomocí klasické pružnosti a pevnosti	50
6.3	Řešení Youngova modulu pružnosti pomocí klasické laminátové teorie	54
6.4	Porovnání průhybů	60
6.4.1	Porovnání symetrického a asymetrického laminátu.	60
6.4.2	Porovnání materiálových vlastností pro uhlíkové a skelné vlákno.....	62
7.	Závěr	65
8.	Bibliografie	66

Seznam použitých veličin

symbol	jednotka	název
σ	$[Pa]$	napětí
E	$[Pa]$	modul pružnosti
ε	$[-]$	poměrné prodloužení
μ	$[-]$	Poissonovo číslo
G	$[Pa]$	smykový modul pružnosti
M	$[N \cdot m]$	moment
ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$	hustota
v	$[m^3]$	objem
V	$[-]$	objemový podíl
l	$[m]$	délka
A	$[m^2]$	plocha
F	$[N]$	síla
u	$[m]$	posuv v ose x
v	$[m]$	posuv v ose y
w	$[m]$	posuv v ose z
γ	$[-]$	zkosení
ε_m^o	$[-]$	deformace střední plochy
k	$[m^{-1}]$	křivost desky
ψ	$[-]$	sklon střední roviny
Q	$[Pa]$	matice mimoosové tuhosti
C	$[Pa]$	matice tuhosti
h	$[m]$	tloušťka
M	$[N]$	moment na jednotku délky
N	$[N \cdot m^{-1}]$	síla na jednotku délky
A	$[N \cdot m^{-1}]$	matice tahové tuhosti
B	$[N]$	matice vazební tuhosti
D	$[N \cdot m]$	matice ohybové tuhosti
J	$[m^4]$	kvadratický moment průřezu
b	$[m]$	šířka nosníku
T	$[-]$	transformační matice

τ	$[Pa]$	tečné napětí
J		inverzní globální matice
q_o	$[N \cdot m^{-1}]$	spojité zatížení
v	$[m]$	průhyb
R_a, R_b	$[N]$	reakce od podpor
r_a, r_b	$[N \cdot m^{-1}]$	jednotkové síly od podpor
m_o	$[N]$	jednotkový moment od jednotkové síly
U_{celk}	$[N \cdot m]$	celková deformační energie
d_m	$[N \cdot m]$	matice ohybové tuhosti jedné vrstvy
ϕ	$[-]$	natočení vláken

Seznam obrázků

Obr. 1 Rozdělení kompozitů podle druhu výztuže [6].....	14
Obr. 2 Částicový a skeletový kompozitní materiál [27]	14
Obr. 3 Rozdělení kompozitů podle druhu výztuže a počtu vrstev [1].....	15
Obr. 4 Pracovní diagramy zkoušky v tahu různých matic kompozitů v porovnání s diagramem standardního středněmodulového uhlíkového vlákna [6].....	23
Obr. 5 Železobetonové schéma [22].....	24
Obr. 6 Lotus Elite [21]	24
Obr. 7 Lotus Elan [20]	24
Obr. 8 Monocell šasi z uhlíkových vláken McLarenu 570S [17].....	25
Obr. 9 Monocoque karosérii Bugatti Veyron [18].....	25
Obr. 10 Vzestup využití kompozitů v dopravních letadlech Boeing [3].....	26
Obr. 11 Poměr použití materiálů v Boeingu 787 [14].....	26
Obr. 12 Rozložení kompozitu [1].....	28
Obr. 13 Znázornění deformace způsobené napětím na kompozitu [1].....	30
Obr. 14 Symetrický laminát [1].....	32
Obr. 15 Nesymetrický laminát [1]	32
Obr. 16 Deformace laminátu [1]	33
Obr. 17 Znázornění sil a momentů [1]	35
Obr. 18 Nespojitě napětí v laminátu [1].....	36
Obr. 19 Laminát skládající se z n vrstev [1]	37
Obr. 20 Symetrický laminát [1].....	40
Obr. 21 Nosník zatížený momentem [2].....	41
Obr. 22 Průhyb nosníku [2].....	41
Obr. 23 Nosník znázorňující neutrálnou osu a střední plochu [2].....	42
Obr. 24 Symetrický kompozit	48
Obr. 25 Asymetrický kompozit	49
Obr. 26 Schéma příkladu [26]	50
Obr. 27 Reakce od posuvné a pevné vazby [26].....	50
Obr. 28 Místo řezu x [26].....	50
Obr. 29 Umístění jednotkové síly [26]	51

Seznam tabulek

Tab. 1 Složení jednotlivých sklovin skleněných vláken [3]	17
Tab. 2 Porovnání vlastností skleněných vláken jednotlivých sklovin [3]	17
Tab. 3 Anizotropie Aramidových vláken [3]	18
Tab. 4 Porovnání jednotlivých vlastností polymerních vláken v příčném, podélném a smykovém zatížení, Poissonovo číslo a míra anizotropie [3]	18
Tab. 5 Typické vlastnosti keramických vláken [5]	19
Tab. 6 Typické vlastnosti některých kovových vláken [5]	19
Tab. 7 Porovnání mechanických vlastností vláken a kompaktních materiálů [6]	19
Tab. 8 Mechanické vlastnosti přírodních vláken [9]	21
Tab. 9 Srovnání mechanických vlastností materiálů polymerních matric [10]	22

Seznam grafů

Graf A Porovnání symetrického a asymetrického laminátu se shodným složením T600/EP k24	60
Graf B Porovnání symetrického a asymetrického laminátu se shodným složením E-sklovina/EP k24	61
Graf C Porovnání skleněných vláken a uhlíkových vláken symetrického laminátu	62
Graf D Porovnání skleněných vláken a uhlíkových vláken asymetrického laminátu	63
Graf E Porovnání symetrických a asymetrických laminátů s rozdílnou výztuží	64

Úvod

Poptávka po nových produktech a touha člověka po různorodých experimentech jsou jedním z důvodů, proč kompozity existují. Řada odvětví vyžaduje vysoké množství rozdílných materiálů, ale často nelze použít materiály konvenční.

Kompozitní materiály jsou novou generací materiálů stejně jako plasty. Jejich vlastnosti v mnoha ohledech předčí stávající materiály a dávají možnost nepřebornému množství nápadů k následovné realizaci. Největší předností je výrazně nižší hmotnost oproti ostatním homogenním materiálům a při správné výrobě i výrazně vyšší tuhost a pevnost. V případě, že potřebujeme pro daný produkt materiál s přesně danými vlastnostmi, tak si můžeme sestavit kompozit „na míru“, a to díky rozdílným materiálům, sestavení komponentů v určitém pořadí a směru natočení.

Automobilový, letecký, lodní či sportovní průmysl využívá kompozitní materiály ve velkém množství. Automobily a letadla díky lehkosti materiálu dosahují lepších vlastností a posunují lidské možnosti kupředu. Vysoká pevnost a tuhost snižuje spotřebu materiálu a umožňuje snížení celkových rozměrů stroje. Sportovní průmysl využívá nových materiálů k lepším výkonům sportovců, a i vyšší odolnosti proti opotřebení.

Současně s kompozity se musel rozvinout i způsob výpočtů materiálových vlastností. Rozdílný pohled na výpočet tuhosti, deformace a napětí zapříčinil rozvoj dané problematiky v obrovském měřítku. Numerické simulátory a výpočetní programy již v dnešní době výrazně pokročily, a proto jsme schopni tyto materiály navrhnout natolik dobře, že jejich rozvoj stále stoupá a odbyt roste. Vývojem Metody konečných prvků výpočty deformací, průhybů a napětí dostaly i viditelnou podobu.

V této práci je podrobně popsán způsob výpočtu materiálových charakteristik pro nehomogenní materiály, kterými kompozity jsou. Následně je zde vysvětlena metoda výpočtu jak obecně, tak i konkrétně pro více druhů nosníků. Jsou zde porovnány dva druhy složení kompozitních nosníků.

1. Kompozitní materiály

Tato část bude věnována obecnému úvodu do problematiky kompozitních materiálů neboli kompozitů. Budeme se zde zabývat rozřazením kompozitních materiálů, základním rozdělením a druhy materiálů použitých při jejich výrobě.

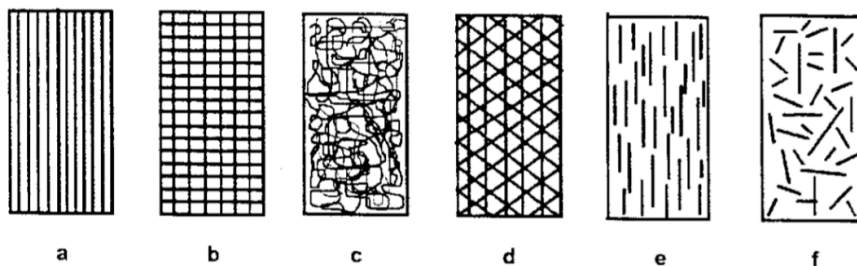
1.1 Definice kompozitních materiálů

Kompozitem se může nazývat soustava dvou a více fyzikálně i mechanicky odlišných složek. Komponenty mají vzájemně odlišné vlastnosti. Jejich spojením dosahujeme jiných (nejen) elastických vlastností od původních materiálů. Kompozit je ve většině případů složen ze spojitě fáze, tzv. matrice a jednou nebo více nespojitých fází tzv. vyztužením (armaturou), které má funkci vyztužovacího materiálu. [4]

Základní dělení kompozitů je podle uspořádání diskontinuální fáze, tedy vyztužení. Dělíme jej na **částicové kompozity**, které jsou vyztuženy částicemi nevláknovitého tvaru (nemají dlouhý rozměr), **vláknové kompozity** a **skeletové kompozity**.

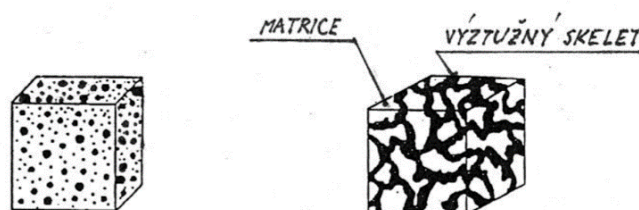
Částice použité pro vyztuž kompozitu, mají lepší vlastnosti než matrice a zlepšují tak vlastnosti celkového materiálu. Mohou zvyšovat odolnost vůči opotřebení, tepelnou vodivost a další vlastnosti. Podílejí se i na mechanickém namáhání soustavy a zlepšují tak mechanické vlastnosti.

Vláknové kompozity jsou tvořeny, jak už název napovídá, vlákny (délkový rozměr je mnohonásobně větší než příčný). Rozdělení vláknových kompozitů spočívá v počtu vrstev a délce vláken. Dělí se tedy na **dlouhovláknové** a **krátkovláknové** a podle vrstev na **jednovrstvé** a **vícevrstvé** kompozity. [1]



Obr. 1 Rozdělení kompozitů podle druhu vyztuže a) jednosměrně uspořádaný, b) dvouose orientovaný, c) nahodile orientovaný, d) s víceosou vyztuží, e) kompozit s krátkými vlákny, f) kompozit s krátkými vlákny nahodilé orientace [6]

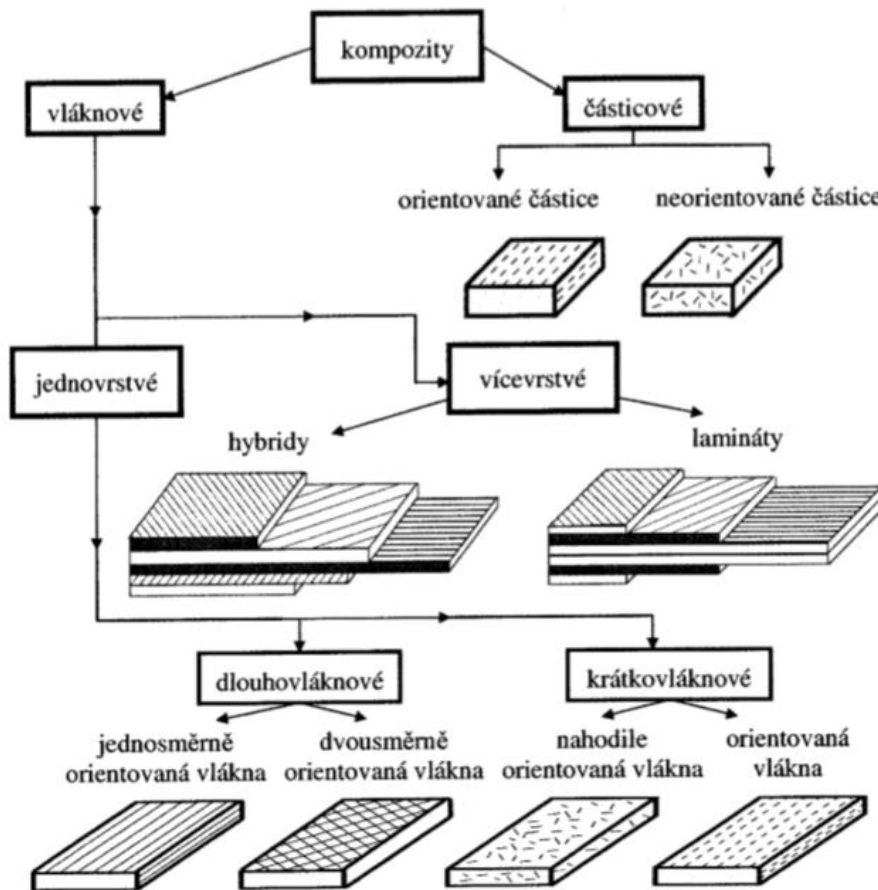
Dalším druhem kompozitního materiálu, který je tvořen matricí prostoupenou nosným elementem tzv. skeletem se nazývá **skeletový kompozitní materiál**. [27]



Obr. 2 Částicový a skeletový kompozitní materiál [27]

Kompozitní materiály jsou variabilní, protože jejich fyzikální vlastnosti je možné upravit podle potřeby dané soustavy. Tvorba kompozitů podle požadovaných vlastností je umožněna díky přizpůsobení počtu vláken v matrici a jejich orientaci. Následně je možné tvořit soustavy jednotlivých kompozitních desek, které se nazývají laminy. Soustavy více vrstevnatých kompozitů se dělí na lamináty a hybridní lamináty. [1]

Lamináty jsou tvořeny deskami, které mají shodný materiál matrice a vláken vůči sobě. **Hybridní lamináty** mají rozdílné materiály matric a vláken v jednotlivých vrstvách. [1]



Obr. 3 Rozdělení kompozitů podle druhu výztuže a počtu vrstev [1]

Kompozity jsou heterogenní materiály, ale pro výpočty mechanických vlastností se předpokládá, že na úrovni makrostruktury je materiál homogenní, ale není izotropní (je tedy anizotropní). Anizotropním materiálem rozumíme materiál, který má závislé elastické vlastnosti na směru zatížení. [4]

Jedním z hlavních důvodů pro tvorbu kompozitů je jejich nízká hmotnost. Kompozity ve srovnání s tradičními materiály (ocel, hliník atd.) jsou lehčí a vlastnosti mohou být srovnatelné při vhodném uspořádání lamin.

2. Vláknové kompozity

Vlákno je definováno jako element z určitého materiálu, u kterého značně převyšuje podélný rozměr nad příčným.

2.1 Charakteristika výztuže

Vlákna jsou vždy mnohem pevnější samostatně, tedy v tzv. kompaktní podobě. Paradoxem vláken je, že jejich pevnost roste při zmenšení jejich průřezu. Orientací vláken se dosahuje pevnosti ve směrech, které konstrukce požaduje. [3; 6]

Vlákna musí splňovat následující podmínky:

- Mez pevnosti vlákna musí být vyšší než mez pevnosti matrice.

$$\sigma_{fp} > \sigma_{mP} \quad (2.1)$$

- Modul pružnosti vlákna musí být vyšší než modul pružnosti matrice.

$$E_f > E_m \quad (2.2)$$

- Tažnost matrice musí být vyšší než tažnost vlákna, aby matrice neztratila integritu dříve než vlákno.

$$\varepsilon_{mP} > \varepsilon_{fp} \quad (2.3)$$

σ_{fp} , příp. σ_{mP} - pevnost vlákna, příp. matrice

E_f , příp. E_m - modul pružnosti vlákna, příp. matrice

ε_{fp} , příp. ε_{mP} - tažnost (mezní prodloužení) vlákna, příp. matrice [3]

2.1.1 Materiály vláken

Volba vláken závisí na charakteru a materiálu matrice, např. polymerní matrice se nevyztužují vlákny s vyšší hustotou. Došlo by tak ke snížení měrného modulu pružnosti a měrné pevnosti v tahu. Pro kovové matrice nejsou vhodná vlákna s malou tepelnou vodivostí, stejně tak pro keramické matrice. [6]

Vlákna proto rozdělujeme na vlákna pro polymerní matrice (skleněná, polymerní a uhlíková) a vlákna pro keramické a kovové matrice (uhlíková, keramická a kovová). [6]

2.1.1.1 Skleněná vlákna

Jsou vyráběna ze směsi oxidů Si, Al, Ca, B, Mg, jsou izotropní. Modul pružnosti v tahu dosahuje třetiny modulu pružnosti oceli. Pevnost v tahu je mnohem vyšší než u oceli (v kompaktní formě). [3; 6]

Skleněná vlákna se dále rozdělují na:

E-skloviny, které jsou dobře elektricky vodivé (90 % trhu). S-skloviny (R-skloviny pro Evropu a v Japonsku T-skloviny), které mají vyšší obsah SiO₂, MgO a Al₂O₃. C-skloviny, které mají vyšší odolnost proti kyselinám a obecně proti chemicky agresivním látkám. Používá se například pro desky tištěných obvodů v kosmonautice. A AR-skleněná vlákna, která jsou bezalkalická. [3]

Sklovina	E	R nebo S	C	ECR	AR
Složení (%)					
SiO ₂	54	60	60 ÷ 65	54 ÷ 62	62
Al ₂ O ₃	14 ÷ 15	25	2 ÷ 6	12 ÷ 13	-
CaO	-	14	14	21	5 ÷ 9
MgO	20 ÷ 24	3	1 ÷ 3	4,5	1 ÷ 4
B ₂ O ₃	6 ÷ 9	< 1	2 ÷ 7	< 0,1	< 0,5
K ₂ O	< 1	< 1	8	0,6	17
Na ₂ O	-	-	-	-	12 ÷ 15

Tab. 1 Složení jednotlivých sklovin skleněných vláken [3]

Sklovina	E	R nebo S	C	ECR	AR
Hustota (g•cm ⁻³)	2,6	2,53	2,52	2,72	2,68
Mez pevnosti v tahu (N•mm ⁻²)	3 400	4 400	2 400	3 440	3 000
E-modul pružnosti (N•mm ⁻²)	73 000	86 000	70 000	73 000	73 000
Poměrné prodloužení při přetržení (%)	< 4,8	< 4,6	< 4,8	< 4,8	< 4,4
Součinitel teplotní roztažnosti (K ⁻¹)	5•10 ⁻⁶	4•10 ⁻⁶	6,3•10 ⁻⁶	5,9•10 ⁻⁶	6,5•10 ⁻⁶
Teplota měknutí (°C)	850	980	750	880	770

Tab. 2 Porovnání vlastností skleněných vláken jednotlivých sklovin [3]

2.1.1.2 Aramidová vlákna

Jsou aromatická jádra benzenu spojena pomocí vodíkových můstků a amidových skupin (aromatické polyamidy). Patří mezi nejlehčí vlákna. Mají silně anizotropní vlastnosti. [3]

Aramidová vlákna neboli Kevlar byl poprvé představen v 60. letech minulého století. Vyrábí se dvě provedení: **HM** (High moduls s označením Kevlar 49) má vyšší modul pružnosti a **LM** (Low moduls s označením Kevlar 29), který velice dobře tlumí vibrace. Právě tato vlastnost umožňuje tvorbu neprůstřelných vest a pancéřů. Nevýhodou jest jeho houževnatost a náchylnost na vlhkost prostředí. Obrábění aramidových laminátů je poměrně obtížné. [3]

Vlastnosti	Ve směru vláken ()		Kolmo na vlákno (⊥)	
	Tah	Tlak	Tah	Tlak
E -modul pružnosti ($N \cdot mm^{-2}$)	80 000	80 000	6 500	5 100
Pevnost ($N \cdot mm^{-2}$)	1 800	230	8	53
Tažnost (%)	2,2	0,5	0,16	1,4
Příčné smrštění	0,3	0,3	0,025	0,02
Součinitel teplotní roztažnosti (K^{-1})		$-2 \cdot 10^{-6}$		$70 \cdot 10^{-6}$
Vodivost ($S \cdot m^{-1}$)		$2 \cdot 10^{-13}$		-

Tab. 3 Anizotropie Aramidových vláken [3]

2.1.1.3 Uhlíková vlákna

Uhlíková vlákna, která patří mezi nejpevnější a cenově nejdražší. Mají výborné mechanické vlastnosti, vysokou stálost při zvýšení teploty, nízkou hmotnost, mimořádně vysokou korozní odolnost vysokou odolnost proti dlouhodobému dynamickému namáhání. Jejich využití stále stoupá. Uhlíková vlákna se dále rozdělují na: **HS** vysokopevnostní vlákna (High Strength), **HM** vysokomodulová vlákna (High Modulus), **HMS** uhlíková vlákna vysokou tuhostí a vysokým modulem (High Moduls and Strain) a **IM** středně modulová a pevnostní (Intermediate Modulus). Mezi další vlastnosti patří dobrá elektrická vodivost a chemická odolnost vůči kyselinám, alkáliím a rozpouštědlům. [3; 10]

Vlákno	$E_{ }$ ($kN \cdot mm^{-2}$)	E_{\perp} ($kN \cdot mm^{-2}$)	$G_{ \perp}$ ($kN \cdot mm^{-2}$)	$\nu_{ \perp}$	$E_{ } / E_{\perp}$
E -sklo	73	73	30	0,25	1
Aramidové vysokomodulové vlákno (HM)	133	5,4	12	0,38	24,6
Uhlíkové vlákno standartní typ (HT)	240	15	10	0,28	16
Uhlíkové vlákno vysokomodulové (HM)	500	5,7	8	0,36	88

Tab. 4 Porovnání jednotlivých vlastností polymerních vláken v příčném, podélném a smykovém zatížení, Poissonovo číslo a míra anizotropie [3]

2.1.1.4 Keramická vlákna

Nejčastějšími zástupci jsou Al_2O_3 , SiC, Si_3N_4 . [6] Hlavní vlastností je její vysoká teplotní odolnost a zachování vlastností až nad 1200 °C. Rozdíl mezi **oxidovými** ($\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{SiO}_2$) a **neoxidovými** (SiC) je tloušťka vláken. Neoxidová vlákna mohou mít ultrajemnou mikrostrukturu a některé druhy vydrží teplotu až 1700°C. [7]

Tato vlákna se především využívají jako výztuž kovů a keramiky. Mají extrémní odolnost vůči prostředí, vysokou tuhost a pevnost. [5]

Druh	Objemová hmotnost [g cm ⁻³]	Tahová pevnost [GPa]	Modul pružnosti [GPa]	Průměr [μm]	Teplotní stabilita [°C]
Al_2O_3 (safír)	3,15 až 4,0	2,07 až 2,8	172 až 470	25	800
ZrO_2	4,84	2,07	344	60	1000
Uhlík (grafit)	1,6 až 2,0	1,7 až 3,4	220 až 690	58 až 76	
BN	1,90	1,38 až 2,4	90 až 315	66 až 70	2500
B_4C	2,3 až 2,5	2,07 až 2,42	276 až 480	100	2500

Tab. 5 Typické vlastnosti keramických vláken [5]

2.1.1.5 Kovová vlákna

Jsou tvořena z vysokotavitelných kovů W, Mo. Mohou vyztužovat polymerní, keramickou a kovovou matici. [5; 6]

Druh	Objemová hmotnost [g cm ⁻³]	Pevnost v tahu [GPa]	Modul pružnosti [GPa]	Průměr [μm]
W	19,4	1,0 až 4,0	353 až 424	13
Mo	10,2	2,41	358	25
Ocel	7,74	2,8 až 4,14	200	13
Be	1,83	1,27	240 až 315	127
Al	2,66	0,6	73	
Ti slitiny	4,51	0,55 až 2,2	118	
Ni (Rene 41)	8,2	2,3	220	

Tab. 6 Typické vlastnosti některých kovových vláken [5]

Srovnání jednotlivých materiálů vláken:

Materiál	Modul pružnosti [GPa]	Pevnost v tahu [MPa]
Skleněné vlákno typu E	76	2500
Sklovina E	76	100
Uhlíkové vlákno	250 až 800	2000 až 6000
Polykrystalický grafit	10	20
Keramické vlákno SiC	400	3900
SiC monolitický	410	500
Polyetylenové vlákno	80 až 120	3000
Lineární polyetylén	0,4	26

Tab. 7 Porovnání mechanických vlastností vláken a kompaktních materiálů [6]

2.1.1.6 Piezoelektrická keramická vlákna (PZT)

Tato vlákna jsou tvořena z oxidů titanu, olova a zirkonia ($\text{PbZrO}_3 \cdot \text{PbTiO}$). Piezoelektrický materiál se chová specificky. Při mechanickém namáhání vytváří elektrický náboj a v elektrickém poli mění své rozměry. Tato vlákna jsou dobře ohebná.

PZT vlákna se používají jako aktuátor (díl měnící svůj tvar). Například pro výrobu sportovního náčiní. Rám tenisové rakety z PZT vláken je schopen při odpálení akumulovat elektrickou energii vyvolanou deformacemi v rukojeti a zpětně se zpožděním vytvořit deformace, které tlumí vibrace rakety. Taktéž zvyšuje sílu úderu o 15 %. [8]

U vojenských letadel se využívají pro změnu tvaru nosných ploch. PZT jsou umístěny na křídlech. U vrtulníků se dá díky nim snižovat hlučnost rotoru. [8]

2.1.1.7 Přírodní vlákna

Mezi přírodní vlákna patří různé druhy vláken, která disponují nízkou hustotou a jsou šetrná k životnímu prostředí. Nevýhodou je jejich citlivost na okolní vlhkosti a odolnost vůči teplotnímu zatížení do 200°C . Jednou z největších nevýhod je možnost změn, které jsou vyvolávány biologickým napadením, právě kvůli organickému charakteru vláken. [3]

2.1.1.8 Pavoučí vlákno

Pavoučí vlákno je lehké a zároveň velmi pevné. V přírodě se dá jeho pevnost přirovnat ke zvířecím šlachám. Co se týče možnosti pohlcovat energii od zatížení je mnohdy i lepší nežli vlákna **aramidová** (syntetická). Možnosti získání vláken od samotných pavouků je prakticky nemožné. Pavouci se navzájem požírají a nejsou schopni vyprodukovat velké množství vláken, která by nasýtily průmysl. Kanadská firma *Genzyme Transgenic Corporation* získala vzácnou bílkovinu z kozího mléka klonovaných kůzlat, z této bílkoviny lze vyrábět tzv. „kozy pavučina“, kterou nazývají BioSteel. Tato látka by byla vhodná pro sítě, které zachycují stíhačky na letadlových lodích a tvorbě neprůstřelných vest. Lidské tělo na BioSteel reaguje velmi dobře a v budoucnu by mohlo být použito pro náhradu šlach a vazů. [10]

2.1.1.9 Bavlněné vlákno

Za zmínku stojí právě proto, že v dobách minulých bylo vynaloženo velké množství sil k nalezení náhrady za nedostatek plechu k výrobě karosérií pro automobil. Díky vědcům z NDR byl vyroben materiál s bavlněnými vlákny a fenolové pryskyřice známý jako Duroplast (byl použit pro výrobu vozu Trabant 601). [10]

Podle katalogu firmy Ganter Griff *Material Characteristics of Duroplast and Technopolymer* [23] je Duroplast při vyšších teplotách nestabilní a ani nelze udělat větší množství barevných provedení. Z toho důvodu byl nejspíše nahrazen konkurencí lepších a kvalitnějších materiálů.

2.1.1.10 Bambusová vlákna

Bambusová vlákna mají příznivé mechanické vlastnosti. Jejich největší výhodou je velmi rychlá výroba. Bambus vyrostе za den 7 až 130 cm, a díky tomu lze masově testovat a zdokonalovat. Východní Asie se zaměřuje právě na využití bambusových vláken, hlavně Japonsko a Čína. Potenciál bambusových vláken je vysoký, např. lano o průměru 5 cm unese 4 tuny. [10]

druh přírodního vlákna	rozměr v (μm)	mez pevnosti v tahu (MPa)	modul pružnosti E (GPa)
Bambusová vlákna	15-30	550	36
Jutová vlákna	10-50	580	22
Kokosové vlákno	10-20	250	5,5
Rýžové vlákno	5-15	100	6
Přírodní hedvábí	15	400	13
Pavoučí vlákno	4	1750	12,7

Tab. 8 Mechanické vlastnosti přírodních vláken [9]

2.2 Charakteristika matrice

Matrice je spojitá část kompozitu, která je protkaná nespojitou částí (vlákny, nebo částicemi) dohromady tvořící kompozit. Úkolem matrice je přenos sil a geometrická stálost kompozitu za požadovaných vlastností. Zajišťuje geometrickou polohu vláken a ochranu vláken před okolím. [3; 6]

2.2.1 Materiál Matrice

Materiál použitý pro matici závisí na typu vláken druhu využití a způsobu namáhání daného kompozitu. Některé z matic jsou v následující kapitole shrnuty.

2.2.1.1 Polymerní matrice

Moderní kompozity jsou tvořeny maticí z termoplastů anebo reaktoplastů (termosety), dohromady tvořící skupinu polymerů. [3]

Do skupiny reaktoplastů patří pryskyřice na bázi nenasycených polyesterů **UP**, vinylesterů **VE** a epoxidů **EP**. Z reaktoplastů se ve strojírenství nejvíc uplatnily epoxidové pryskyřice, které mají dobré mechanické vlastnosti a jsou snadno zpracovatelné. Dalším hojně využívaným reaktoplastem jsou fenolické pryskyřice, které se používají v dopravě a stavebnictví, kvůli nehořlavosti. Reaktoplasty jsou obecně málo tepelně odolné a neekologické. [10]

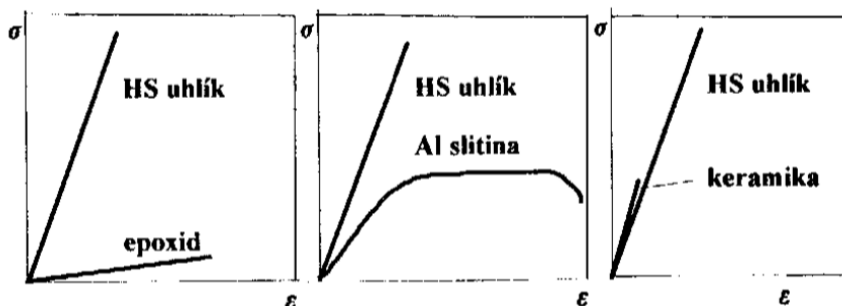
Termoplasty jsou na rozdíl od reaktoplastů tepelně odolnější, houževnatější a lépe recyklovatelné. Mezi termoplasty řadíme polypropylen **PP**, polyamid **PA**, polyfenylsulfid **PPS** a polyetherketon **PEEK**. [3; 10]

Jedním z nejdůležitějších rozdílů je recyklovatelnost termoplastů. Termoplasty mají schopnost při zahřátí opakovaně měknout a při ochlazení tuhnout do jiného tvaru, než byl tvar předešlý. U reaktoplastů tato situace nemůže nastat. Po jednom vytvrzení je jejich tvar neměnný a recyklovatelnost nepřipadá v úvahu. [6]

	reaktoplasty	termoplasty		
	Epoxidová pryskyřice	Polypropylen	Polyfenylsulfid	Polyetherketon
Pevnost v tahu	●	●	●●	●
Modul pružnosti v tahu	●●	■	●	●
Tažnost	■	●●	●●	●●
Rázová houževnatost	●	●●	■	●
Max. teplota při provozu [°C]	130	100	200	250
●● velmi vysoký/á; ● vysoký/á; ■ střední				

Tab. 9 Srovnání mechanických vlastností materiálů polymerních matic [10]

Materiál matrice by měl mít několika násobně větší poměrné prodloužení než výztuž kompozitu. Pokud je matrice tvořena polymerem nebo kovem, tak je tato podmínka splněna. Keramické a skleněné matrice mají poměrné prodloužení srovnatelné nebo i menší než výztuž, a proto je výsledný kompozit křehčí. [6]



Obr. 4 Pracovní diagramy zkoušky v tahu různých matric kompozitů v porovnání s diagramem standardního středněmodulového uhlíkového vlákna [6]

2.2.1.2 Kovové matrice

Mají vůči polymerním matricím několik výhod. Mezi výhody patří např. teplotní vodivost, elektrická vodivost, vyšší smyková pevnost, tvárnost, nehořlavost, odolnost obrusu, možnost povlakování, spojování, tvarování, vyšší tepelnou odolnost, odolnost vůči vlhkému prostředí a erozi i povrchovému poškození. Naopak pevnost a tuhost za normálních teplot je nižší než u polymerních kompozitů. Výrobní náklady jsou podstatně vyšší. [5]

Nejpoužívanějšími materiály kovových matric jsou hliník a jeho slitiny (zejména pro nízkou cenu), vyztužené zejména borovými vlákny, uhlíkovými, křemíkokarbidovými, anebo safírovými vlákny. [5]

Kromě hliníkových matric se vyskytují na trhu i matrice ze slitin titanu a super slitin, které jsou vyztuženy vlákny bóru, karbidu křemíku nebo beryllia. Titanové kompozity poskytují vyšší odolnost vůči teplotním podmínkám (1000 až 1200°C, proti hliníkovým 500 až 600°C), zejména s vlákny SiC, které jsou velmi dobře tepelně odolné, až natolik, že na ně změna teploty nemá prakticky žádný vliv. Nevýhodou titanových kompozitů je jejich horentní cena. [5]

2.2.1.3 Keramické a skleněné matrice

Keramika se obecně využívá pro oblasti náročné na vysokou pracovní teplotu, vysokou pevnost a místa, kde je materiál náchylný k oxidaci. Keramika má velice nízkou hustotu. Největší nevýhodou keramiky je její křehkost. [5]

Nejčastější druhy keramických matric použité pro výrobu kompozitů jsou oxidy, nitridy nebo karbidy hliníku, křemíku, hořčíku či různé variace prvků. Konkrétními příklady jsou Al_2O_3 , ZrO_2 , ThO_2 , sklo, mulit, aluminiumfosfát a grafit. Vlákna vhodná pro keramické/skleněné matrice jsou kovová a ve většině případů jsou z molybdenu, wolframu, oceli, niobu a dalších. [5]

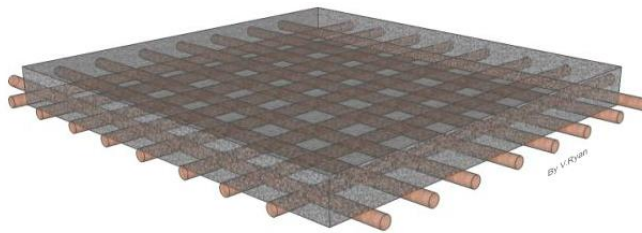
2.3 Aplikace kompozitů

Kompozitní materiály nacházejí uplatnění ve všech odvětvích průmyslu. Strojírenství využívá kompozity hlavně kvůli variabilitě a možnosti modifikace laminátů pro potřebnou výdrž v daném směru zatížení. Kompozity nacházejí uplatnění v automobilovém průmyslu, letectví, ve stavebnictví a v mnoha dalších segmentech průmyslu. Ve sportu se využívá kompozitů hlavně kvůli jejich hmotnosti, a to například pro výrobu vesel, konstrukcí plachetnic, rámců kol, vidlic a sedlových tyčí.

2.3.1 Stavebnictví

Pokud mluvíme o stavebním materiálu (stavivu) tak mezi nejznámější kompozity patří železobeton, který se skládá z železných svařených prutů protkaných čerstvou betonovou maticí. [12]

Tento materiál se využívá ke stavbě mostů, vysokých budov, pilířů, armádních bunkrů a mnoho dalšího. Z železobetonu se mohou vyrábět desky, nosníky a obecně jakékoliv tvary.

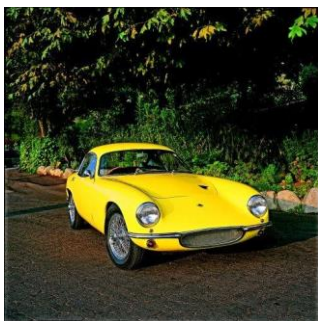


Obr. 5 Železobetonové schéma [22]

2.3.2 Automobilový průmysl

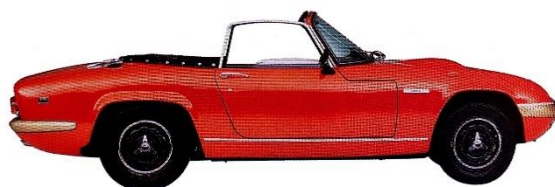
Automobilový průmysl využívá velkou řadu kompozitních materiálů pro stavbu karoserie, interiéru, a dokonce i hnacího ústrojí.

Firma Lotus byla jedna z prvních, která použila kombinaci plastu a skleněných vláken pro výrobu svých vozů. Prvním byl model Elite (1957), který měl karoserii kompletně z laminátu. Dalším byl Lotus Elan, který byl více komerčně úspěšný a patří mezi nejcharakternější auta značky Lotus. Jeho největší výhodou byla velice nízká hmotnost 688kg. To je možné hlavně díky lehké karoserii z kompozitu. [19; 20]



Obr. 6 Lotus Elite [21]

Lotus Elan 1971



Obr. 7 Lotus Elan [20]

Hnací hřídel automobilu pro vozidla s pohonem zadních kol je ve většině případů vyrobena z oceli. V případě, že se jedná o vůz závodní, může být vyrobena i z hliníku, který je lehčí než ocel, ale v tom nejlepším případě je vyrobena z uhlíkových vláken. [11]

Carbon fiber driveshaft neboli hnací hřídel z uhlíkových vláken disponuje hned několika výhodami vůči oceli. Uhlíková vlákna nešíří vibrace, ale rozvádí je do jednotlivých vláken. S tím souvisí i hluk, který se značně sníží. Snižuje se hmotnost vozidla. Hnací hřídel z uhlíkových vláken má mnohem větší pevnost v krutu, tudíž vydrží mnohem větší krouticí moment, a tedy zvyšuje tah automobilu. Další výhoda, která stojí za zmínku, je že v případě poruchy se vlákna v hnací hřídeli pouze rozdělí a nerozletí se částičky do stran jako u běžného kovu. [11]

Kompozitní lamináty umožňují odlehčit konstrukci a díky tomu zvýšit výkon vozidla. Výrobci automobilů jako např. McLaren, Alfa Romeo, Ferrari, Bugatti, Paganni a mnoho dalších využívají ke stavbě svých vozů lamináty z uhlíkových vláken. Díky tomu se snižuje čas akcelerace, zvyšuje rychlost a zlepšují se celkové vlastnosti automobilu. [16]

McLaren 570S má karoserii vyrobenou kompletně z kompozitních materiálů a dosahuje díky tomu k mnohem většímu poměru výkonu a hmotnosti. MonoCell takto nazývají šasi modelu McLaren 570S, které je vyrobeno pouze z laminátu s karbonovými vlákny a váží pouhých 75 kg. [16; 17]



Obr. 8 Monocell šasi z uhlíkových vláken McLarenu 570S [17]

Speciálním případem je i Bugatti Veyron jehož karosérie je takzvaný „monocoque“, což je celistvá část karoserie tvořená jedním dílem, který je vytvořený právě z uhlíkových vláken. [18]

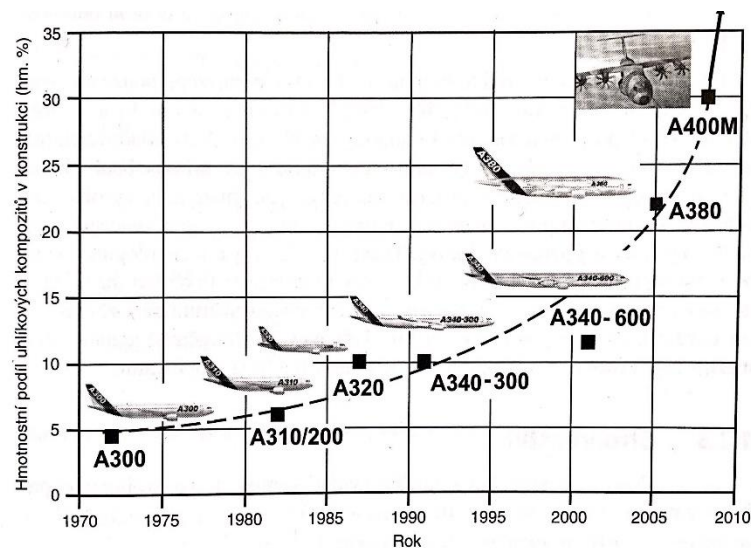


Obr. 9 Monocoque karosérii Bugatti Veyron [18]

2.3.3 Letecký průmysl

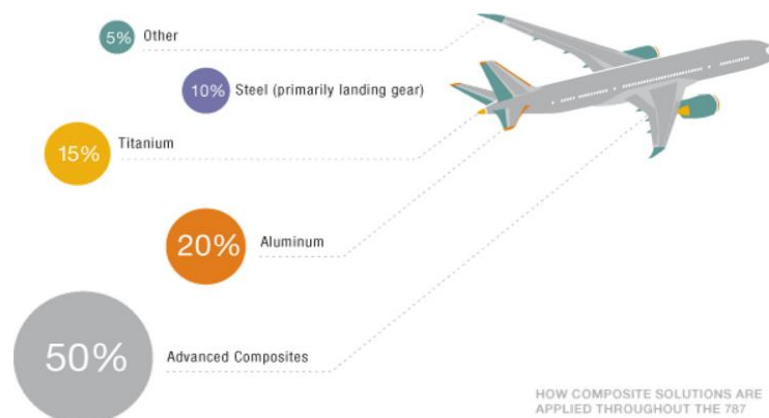
V leteckém průmyslu se spotřeba kompozitních materiálů neustále navyšuje. Hlavně díky úspoře hmotnosti a mimo jiné i díky korozní odolnosti. Úspora hmotnosti je poměrně značná, v některých případech může dosahovat až 20 %. Nevýhodou jsou vysoké náklady. Z kompozitních materiálů se na letadlech vyrábí trup, křídla, ocasní křídlo a vrtule pro vrtulová letadla. [3]

Vzestup kompozitů v dopravních letadlech je od začátku 70. let velice významný. Vývoj kompozitních materiálů se díky letectví a kosmickým programům posunuje stále dál - viz Obr. 10.



Obr. 10 Vzestup využití kompozitů v dopravních letadlech Boeing [3]

V posledním modelu společnosti Boeing jménem 787 přezdívaný Dreamliner bylo pro stavbu použito 50 % kompozitních materiálů pro konstrukci i interiér letadla. Letadlo je díky tomu lehčí a podle výrobce má mnohem lepší spotřebu a delší dolet, což otevírá možnosti delších letových časů a tras. [13; 14; 15]



Obr. 11 Poměr použití materiálů v Boeingu 787 [14]

3. Směšovací pravidlo

Celá kapitola číslo 3. je čerpána ze zdroje [1].

U ortotropního materiálu („Druh anizotropie vyznačující se třemi vzájemně kolmými rovinami symetrie“ [3]) potřebujeme znát k výpočtu vztahu mezi deformací a napětím čtyři elastické konstanty E_L, E_T, μ_{LT} a G_{LT} .

E_L - modul pružnosti v podélném směru L

E_T - modul pružnosti v příčném směru T

μ_{LT} - Poissonovo číslo v rovině L, T

G_{LT} - modul pružnosti ve smyku v rovině L, T

V případě, že je těleso zatíženo i termoelasticky, je třeba znát i koeficienty teplotní roztažnosti v jednotlivých směrech L a T .

Při výrobě jednosměrového kompozitu jsou známy jednotlivé hodnoty materiálových charakteristik, a to následující:

M, M_f, M_m - hmotnost kompozitu, vlákna a matrice

ρ, ρ_f, ρ_m - hustota kompozitu, vlákna a matrice

v, v_f, v_m - objem kompozitu, vlákna a matrice

Součet hmotností složek dává celkovou hmotnost, tedy součet hmotnosti vláken a hmotnosti matrice

$$M = M_f + M_m. \quad (3.1)$$

Neboli za použití hustoty a objemu

$$\rho v = \rho_f v_f + \rho_m v_m. \quad (3.2)$$

Podíl vláken:

$$V_f = \frac{v_f}{v} \quad \text{objemový podíl vláken v kompozitu,}$$

$$V_m = \frac{v_m}{v} \quad \text{objemový podíl matrice v kompozitu.}$$

Součet objemových podílů dává dohromady celý objem a platí

$$V_f + V_m = 1. \quad (3.3)$$

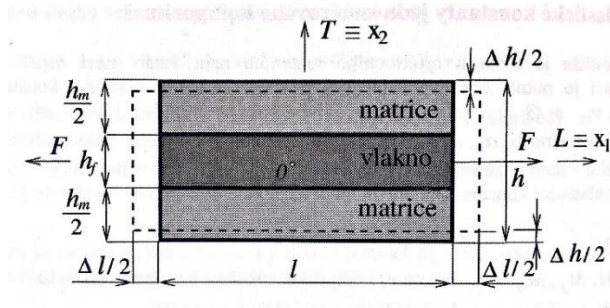
Hustota kompozitu je

$$\rho = V_f \rho_f + V_m \rho_m = V_f \rho_f + (1 - V_f) \rho_m. \quad (3.4)$$

3.1 Modul pružnosti E_L

Uvažujme kompozit v souřadnicovém systému $O(L, T)$ na Obr. 12. Kompozit je složen z matrice s jedním vláknem a je zatížen v podélném směru L silou F . Předpokladem je, že se matrice i vlákno prodlouží ve směru L stejně.

$$\Delta l = \Delta l_f = \Delta l_m \quad (3.5)$$



Obr. 12 Rozložení kompozitu [1]

Potom platí

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{L_f} = \varepsilon_{L_m} \quad (3.6)$$

Pro další výpočty označíme:

E_m, E_f - modul pružnosti matrice a vlákna

A, A_f, A_m - plocha kompozitu, vlákna a matrice kolmé k podélnému směru L

Pomocí délky l můžeme vyjádřit

$$V_f = \frac{v_f}{v} = \frac{A_f l}{A l} = \frac{A_f}{A} \quad \text{analogicky pro matrici } V_m = \frac{A_m}{A} \quad (3.7)$$

Napětí v tahu pro vlákno a matrici

$$\sigma_{L_f} = E_f \varepsilon_{L_f}, \quad \sigma_{L_m} = E_m \varepsilon_{L_m} \quad (3.8)$$

Tahová síla je dána vztahem

$$F = A_f \sigma_{L_f} + A_m \sigma_{L_m} \quad (3.9)$$

Tahové napětí v kompozitu

$$\sigma_L = \frac{F}{A} = V_f \sigma_{L_f} + V_m \sigma_{L_m} = (V_f E_f + V_m E_m) \varepsilon_L \quad (3.10)$$

Z rovnice (3.10) vyplývá, že modul pružnosti v tahu pro podélný směr L je

$$E_L = \frac{\sigma_L}{\varepsilon_L} = V_f E_f + V_m E_m = V_f E_f + (1 - V_f) E_m. \quad (3.11)$$

Za předpokladu, že $E_f \gg E_m$, je možno výraz (3.11) výrazně zjednodušit.

Dostaneme

$$E_L = V_f E_f. \quad (3.12)$$

3.2 Poissonovo číslo μ_{LT}

Příčná poměrná deformace vlákna a matrice

$$\varepsilon_{Tf} = -\mu_f \varepsilon_L, \quad \varepsilon_{Tm} = -\mu_m \varepsilon_L, \quad (3.13)$$

kde μ_f , μ_m jsou Poissonova čísla vlákna a matrice.

Změna délky v příčném směru (tloušťky) kompozitu

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m = h_f \varepsilon_{Tf} + h_m \varepsilon_{Tm}, \quad (3.14)$$

kde h_f , h_m jsou tloušťky vlákna a matrice.

Pomocí šířky kompozitu b jsme schopni vyjádřit objemový podíl vláken a matric

$$V_f = \frac{v_f}{v} = \frac{h_f b l}{h b l} = \frac{h_f}{h} \text{ a také } V_m = \frac{h_m}{h}. \quad (3.15)$$

Potom poměrná deformace kompozitu v příčném směru T je

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta h}{h} = V_f \varepsilon_{Tf} + V_m \varepsilon_{Tm} = -(V_f \mu_f + V_m \mu_m) \varepsilon_L. \quad (3.16)$$

Poissonovo číslo je tedy

$$\mu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = V_f \mu_f + V_m \mu_m = V_f \mu_f + (1 - V_f) \mu_m. \quad (3.17)$$

3.3 Modul pružnosti E_T

V dalším případě uvažujeme, že kompozit je zatěžován v příčném směru T silou F .

Z důvodu, že $A_f = A_m$ (průřez vlákna a matrice v příčném směru je stejný), tak platí pro napětí, že

$$\sigma_T = \sigma_{Tf} = \sigma_{Tm}. \quad (3.18)$$

Poměrné příčné prodloužení vlákna a matrice

$$\varepsilon_{Tf} = \frac{\sigma_T}{E_f}, \quad \varepsilon_{Tm} = \frac{\sigma_T}{E_m}. \quad (3.19)$$

Změna tloušťky

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m = h_f \varepsilon_{Tf} + h_m \varepsilon_{Tm} . \quad (3.20)$$

Poměrné příčné prodloužení

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta h}{h} = V_f \varepsilon_{Tf} + V_m \varepsilon_{Tm} = \left(\frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \right) \sigma_T . \quad (3.21)$$

Příčný modul pružnosti E_T kompozitu je definován

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\varepsilon_T}{\sigma_T} \rightarrow E_T = \frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m} = \frac{E_m}{V_m + V_f \frac{E_m}{E_f}} = \frac{E_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f} \right)} \quad (3.22)$$

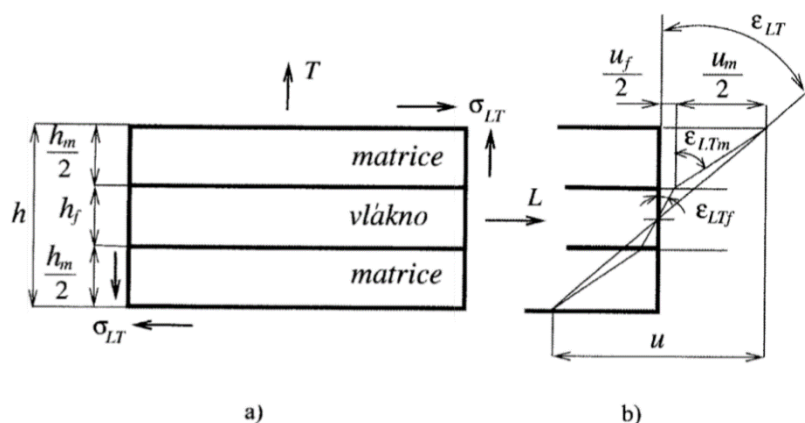
V případě, že je $E_f \gg E_m$, poté

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f} . \quad (3.23)$$

3.4 Smykový modulu pružnosti G_{LT}

Na obrázku číslo 13a) je vyobrazen kompozit zatížený smykovým napětím σ_{LT} . Zatížením σ_{LT} dojde k deformaci kompozitního materiálu znázorněno na 13b). Základním předpokladem pro další kroky je, že smyková napětí jsou stejná v matici i ve vláknech.

$$\sigma_{LT} = \sigma_{LTf} = \sigma_{LTm} \quad (3.24)$$



Obr. 13 Znáornění deformace způsobené napětím na kompozitu [1]

Zkosení (úhly natočení) matrice a vlákna jsou

$$\varepsilon_{LTm} = \frac{\sigma_{LTm}}{G_m} , \quad \varepsilon_{LTf} = \frac{\sigma_{LTf}}{G_f} , \quad (3.25)$$

G_f a G_m jsou smykové moduly pružnosti vlákna a matrice.

Posunutí kompozitu v horní ploše ve směru L je

$$u = u_f = u_m, \quad (3.26)$$

kde $u_f = h_f \varepsilon_{LTf}$, $u_m = h_m \varepsilon_{LTm}$.

Z čehož vyplývá

$$u = h_f \varepsilon_{LTf} + h_m \varepsilon_{LTm} = \left[\frac{h_f}{G_f} + \frac{h_m}{G_m} \right] \sigma_{LT}. \quad (3.27)$$

Úhel natočení kompozitu je

$$\varepsilon_{LT} = \frac{u}{h} = \left[\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \right] \sigma_{LT}. \quad (3.28)$$

Poté

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{\varepsilon_{LT}}{\sigma_{LT}}, \quad \frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m}. \quad (3.29)$$

Smykový modul má tvar

$$G_{LT} = \frac{G_f G_m}{V_m G_f + V_f G_m} = \frac{G_m}{V_m + V_f \frac{G_m}{G_f}}, \quad (3.30)$$

nebo

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{G_m}{G_f} \right)}. \quad (3.31)$$

V případě, že je $G_f \gg G_m$, poté platí následující vztah

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f}. \quad (3.32)$$

Pokud nejsou smykové moduly stanoveny experimentálně, je možné je přibližně vyšetřit na základě znalosti modulu pružnosti v tahu a Poissonova čísla jako u izotropních materiálů. Používá se zde

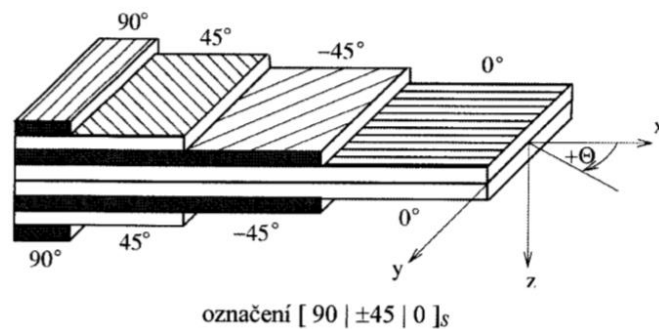
$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \mu_f)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \mu_m)}. \quad (3.33)$$

4. Klasická laminátová teorie

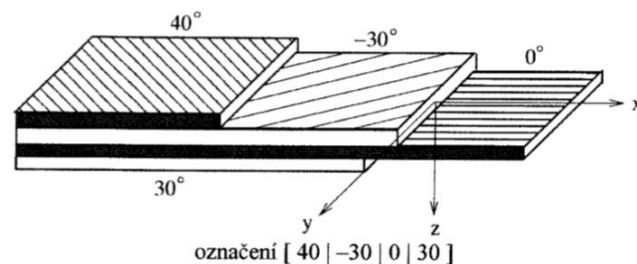
Jak je popsáno v [1], jednou z největších výhod kompozitů je jejich variabilita. Požadované vlastnosti v různých směrech lze získat výběrem nepřeborného množství matic a vláken. U jednosměrného kompozitu se vlastnosti odvíjejí od směru zatížení. Vlastnosti jednosměrného kompozitu jsou výrazně lepší ve směru vláken a o poznání horší ve směru kolmém na vlákna. Jednosměrné kompozity se v praxi používají velice zřídka, a proto se vytvářejí lamináty.

Lamináty jsou tvořeny dvěma nebo více spojenými vrstvami, které jsou upraveny podle požadovaných vlastností dané konstrukce.

Příklad konstrukce symetrického laminátu $[90|\pm 45|0]_s$ (rovinou symetrie xy) je Obr. 14 a nesymetrického laminátu $[40|-30|0|30]$ -viz Obr.15.



Obr. 14 Symetrický laminát [1]



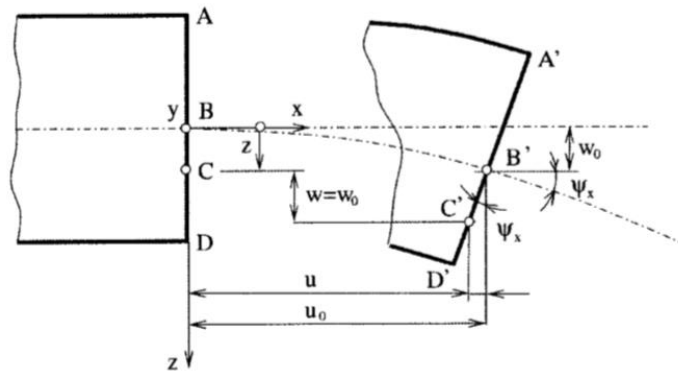
Obr. 15 Nesymetrický laminát [1]

4.1 Základní rovnice laminátové desky

Pro následující výpočty budeme uvažovat tenkou desku.

Předpokládáme, že:

- všechny laminy jsou ortotropní a kvazihomogenní.
- tloušťka jednotlivých lamin je vůči délce a šířce mnohem menší
- jednotlivá posunutí ve všech třech směrech jsou velmi malá
- laminy jsou spojeny dokonale, nekonečně tenké, a proto jsou jednotlivá posunutí spojitá
- posunutí po tloušťce (v příčném směru) je lineární
- tloušťka laminátu je velmi malá vůči ostatním rozměrům, tudíž je možno uvažovat tento stav napjatosti za rovinný z čehož platí $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$
- příčná zkosení $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} \cong 0$, a proto zůstanou kolmice ke středové ploše kolmé i po deformaci a budou přímkové.
- lze zanedbat přetvoření v příčném směru, protože normálová vzdálenost od středové roviny zůstává konstantní $\varepsilon_{zz} \cong 0$
- závislosti mezi deformacemi a jednotlivými složkami napětí budou lineární



Obr. 16 Deformace laminátu [1]

Obr. 16 popisuje část laminátu v rovině xz . Hrana AD v nezdeformovaném stavu je přímá a kolmá ke střední ploše. Po prodělání deformace setrvá strana AD přímá a kolmá ke střední ploše. Vlivem deformací se na střední rovině v bodě B ve směrech os x , y , z vytvářejí posuvy u_o , v_o , w_o . Pro posuv bodu C ve směru osy x platí

$$u = u_o - z\psi_x, \quad (4.1)$$

kde ψ_x je sklon střední roviny laminátu.

Platí

$$\psi_x = \frac{\partial w_o}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Pro složku posuvu ve směru osy y lze psát analogicky

$$v = v_o - z\psi_y, \quad (4.3)$$

kde

$$\psi_y = \frac{\partial w_o}{\partial y} \quad (4.4)$$

Deformace po tloušťce zanedbáváme, a proto platí

$$w = w_o. \quad (4.5)$$

Rovnice (4.1) až (4.5) lze zapsat jako pole posuvů ve tvaru

$$\begin{aligned} u &= u_o - z\psi_x = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \\ v &= v_o - z\psi_y = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$w = w_o$$

Z derivací posuvů plyne pole deformací

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}, \quad (4.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y}. \quad (4.9)$$

Rovnice (4.7) až (4.9) je možné zapsat do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

kde deformace střední plochy ε^o_{xx} , ε^o_{yy} , γ^o_{xy} jsou

$$\varepsilon^o_m = \begin{bmatrix} \varepsilon^o_{xx} \\ \varepsilon^o_{yy} \\ \gamma^o_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

a křivosti desky jsou

$$k = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Napětí v libovolné (k -té) vrstvě pro mimo osou laminu je

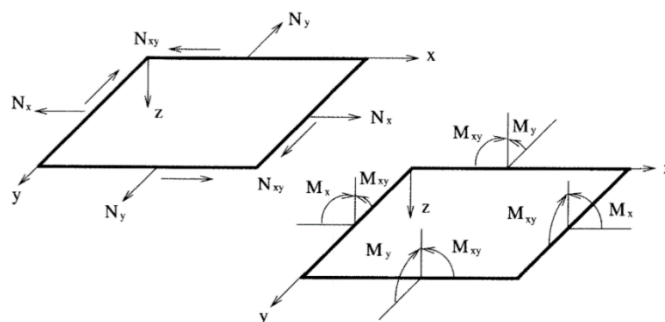
$$\sigma' = Q \varepsilon' \quad (4.13)$$

kde Q je matice mimoosové tuhosti.

Použitím vztahů (4.10) a (4.13) obdržíme rovnici pro určení napětí v k -té vrstvě laminu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o_{xx} \\ \varepsilon^o_{yy} \\ \gamma^o_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

V případě odvozování závislosti mezi vnějším zatížením laminátu a jeho deformací je vhodné pracovat s ekvivalentním systémem sil a momentů. Zavedme vztah pro výsledné síly a momenty působící na příčný průřez k -té vrstvy tloušťky $h_k - h_{k-1}$ na Obr. 17



Obr. 17 Znárodnění sil a momentů [1]

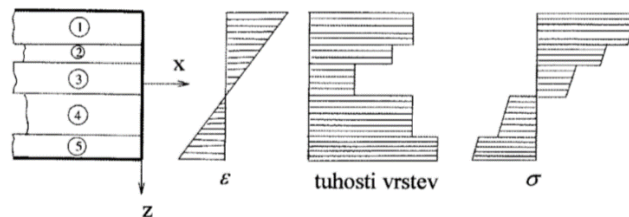
Pro výslednice sil platí

$$N_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} dz, N_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} dz, N_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} dz. \quad (4.15)$$

Analogicky pro momenty platí

$$M_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} z dz, M_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} z dz, M_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} z dz. \quad (4.16)$$

Jednotky výslednice sil N_x, N_y, N_{xy} jsou $[\text{Nm}^{-1}]$, tj. síla připadající na jednotku pásu a M_x, M_y, M_{xy} $[\text{N}]$, tj. moment připadající na jednotku délky.



Obr. 18 Nespojité napětí v laminátu [1]

Vzhledem k faktu, že napětí po tloušťce laminátu se mění nespojitě (vyplývá z Obr. 18), je třeba výsledné síly a momenty v průřezu laminátu vyšetřit jako součet účinků od všech vrstev n . Potom pro síly je možné psát

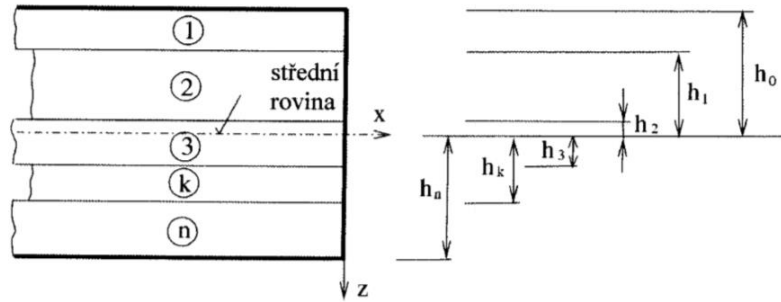
$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (4.17)$$

a pro momenty

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz. \quad (4.18)$$

4.2 Matice tuhosti laminátové desky

V kapitole 4.1 jsme si odvodili vztahy pro sestavení závislosti sil, momentů, deformací a křivosti. Po sestavení matice tuhosti dosadíme do rovnic (4.17) a (4.18) rovnice (4.14) za použití vztahů (4.11) a (4.12) pro deformaci střední plochy a křivosti desky. Sjednocením následujících rovnic obdržíme tyto vztahy



Obr. 19 Laminát skládající se z n vrstev [1]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z dz \right\}, \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} z dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Matice mimoosových tuhostí \mathbf{Q} je v každé vrstvě konstantní, je možno výraz (4.19) upravit do tvaru

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \\ \sum_{k=1}^n Q_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ze vztahu (4.20) vyplývá, že násobení integrálů s prvky matice tuhosti \mathbf{Q}_k jednotlivých vrstev a pro sumaci po celé tloušťce laminátu vzniknou výrazy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o_{xx} \\ \varepsilon^o_{yy} \\ \gamma^o_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o_{xx} \\ \varepsilon^o_{yy} \\ \gamma^o_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{15} \\ D_{21} & D_{21} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

kde se prvky jednotlivých matic určí pomocí výrazů

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad (4.22a)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (4.22b)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3). \quad (4.22c)$$

Výrazy (4.21) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o_{xx} \\ \varepsilon^o_{yy} \\ \gamma^o_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

nebo

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o_m \\ \dots \\ k \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

kde A je matice tahové tuhosti,
 B je matice vazební tuhosti,
 D je matice ohybové tuhosti.

Rovnice (4.24) vyjadřuje síly a momenty v závislosti na deformacích ve střední rovině a na křivosti. Matice, která tvoří vazbu mezi těmito veličinami, se nazývá *globální matice tuhosti*. Matice A spojuje složky sil s deformacemi ve střední rovině. Matice D váže složky momentů s křivostmi plochy. Matice vazební tuhosti B vytváří závislost mezi momenty a složkami deformace ve střední rovině a zároveň složky vektorů vnitřních sil se složkami křivosti plochy. Z toho vyplývá, že smykové a normálové složky sil působící ve střední rovině vyvolávají nejen přetvoření ve střední rovině, ale i zkroucení střední plochy a ohyb. Složky ohybu následně způsobí zkroucení ve střední rovině laminátu. Jelikož matice A a D mají všechny prvky nenulové, existuje také vazba mezi normálovými silami N_x, N_y a smykovou deformací γ_{xy}^o a současně mezi ohybovými momenty M_x, M_y a zkroucením k_{xy} .

4.3 Rozdělení způsobů vrstvení laminátů

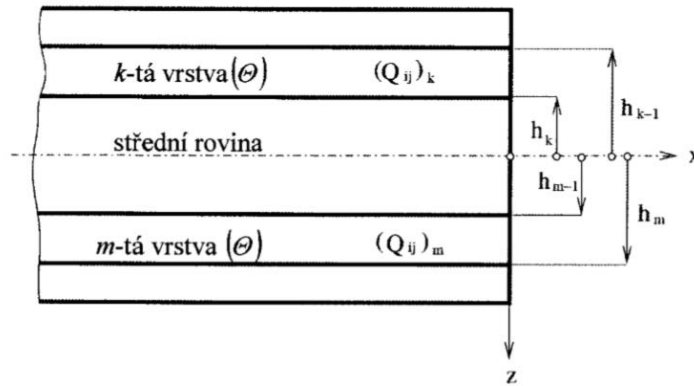
V předchozí části bylo několikrát zmíněno, že vhodným způsobem navrstvení jednotlivých vrstev laminátu lze docílit požadovaných vlastností kompozitu. Důležité je též dosáhnout toho, aby některé prvky v matici tuhosti (4.23) byly nulové. Zvláště se jedná o ty, které způsobují dodatečná namáhání materiálu, která se nevyskytují u izotropního materiálu. Tomu se dá pomoci skládáním jednotlivých vrstev pod různými úhly se stejnými mechanickými vlastnostmi a v požadovaném pořadí zabránit.

4.3.1 Symetrické lamináty

Při namáhání laminátu je pro zjednodušení vhodné odstranit vazbu mezi tahem a krutem a tahem a ohybem. Docílí se toho tak, že matice vazbové tuhosti \mathbf{B} bude mít všechny prvky rovné nule. To znamená, že platí

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) = 0. \quad (4.25)$$

Libovolný prvek matice vazbové tuhosti \mathbf{B} bude roven právě tehdy, když ke každému příspěvku laminy nad střední vrstvou bude existovat příspěvek od laminy stejných vlastností a orientace ve stejné vzdálenosti pod střední plochou - viz Obr. 20. Potom musí platit



Obr. 20 Symetrický laminát [1]

$$(Q_{ij})_k = (Q_{ij})_m, \quad |-h_{k-1}| = h_m, \quad |-h_k| = h_{m-1} \dots \quad (4.26)$$

V případě, že každé vrstvě nad střední rovinou odpovídá identická vrstva pod střední rovinou, můžeme mluvit o *symetrickém laminátu*. Globální matice tuhosti má potom tvar následující

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

5. Ohyb kompozitních nosníků

Dle [2] budeme postupovat při výpočtu ohybu symetrického a asymetrického laminátu. Anizotropii kompozitních materiálů musíme transformovat na izotropii pro možnost výpočtu reakcí materiálu na vnější zatížení. Napětí v nosníku je popsáno vztahem

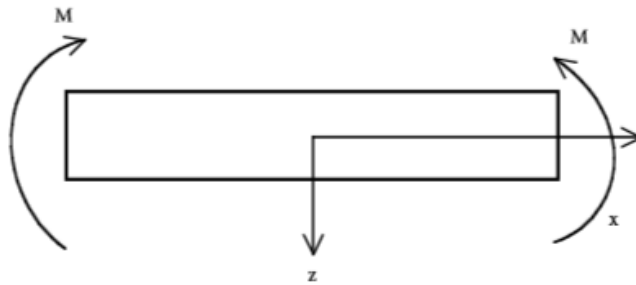
$$\sigma = \frac{Mz}{J}, \quad (5.1)$$

kde σ je napětí,

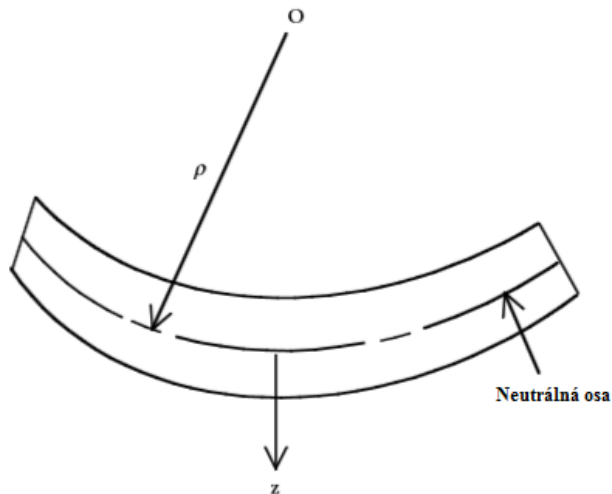
M je moment působící na nosník,

z je vzdálenost od neutrálné osy,

J je kvadratický moment průřezu nosníku.



Obr. 21 Nosník zatížený momentem [2]



Obr. 22 Průhyb nosníku [2]

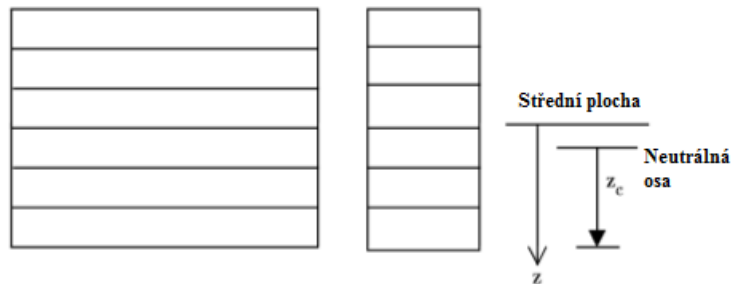
Průhyb kompozitního nosníku je dán vztahem

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = -M, \quad (5.2)$$

kde E je Youngův modul pružnosti

a $\frac{d^2 w}{dx^2}$ je definována jako křivost

$$k_x = -\frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (5.3)$$



Obr. 23 Nosník znázorňující neutrálnou osu a střední plochu [2]

Spojením vztahů (5.2) a (5.3) vznikne

$$EJk_x = M. \quad (5.4)$$

Vztah (5.4) platí pro izotropní materiál.

5.1 Ohyb symetrického laminátu

Budeme předpokládat, že se jedná o symetrický laminát, který má obdélníkový průřez. Protože laminát je symetrický, síly a momenty nejsou svázány přes matici vazbové tuhosti \mathbf{B} (viz. kapitola 4.3.1) a vztahu (4.27). Díky tomu můžeme psát, že pro momenty platí

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

nebo v inverzním tvaru pro výpočet křivosti

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = [D]^{-1} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Pokud ohybový moment působí pouze v ose x , platí

$$M_y = 0, M_{xy} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = [D]^{-1} \begin{bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

pro jednotlivé křivosti platí

$$k_x = D_{11}^* M_x, \quad (5.8a)$$

$$k_y = D_{12}^* M_x, \quad (5.8b)$$

$$k_{xy} = D_{16}^* M_x, \quad (5.8c)$$

kde D_{ij}^* jsou prvky inverzní matice D , jejíž prvky jsou popsány v rovnici (4.22c).

Křivost je definována vztahem (4.12), prvky vektoru křivosti

$$\begin{aligned} k_x &= -\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}, \\ k_y &= -\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}, \\ k_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Průhyb v ose z w_o není nezávislý na ose y , ale pokud máme úzký nosník, kde se poměr šířky ku délce blíží nule, můžeme říci, že průhyb w_o se odehrává pouze v ose x , tedy platí, že $w_o = w_o(x)$. V tom případě můžeme psát

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} = D_{11}^* M_x. \quad (5.10)$$

Úpravou vztahu (5.2) získáme zápis obdobný pro izotropní nosník

$$\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} = -\frac{M_x b}{E_x J_z}, \quad (5.11)$$

kde

b je šířka nosníku,

E_x Youngův modul pružnosti v ose x ,

J_z kvadratický moment průřezu k osám x - y .

Z rovnic (5.8a) a (5.11) plyne

$$E_x = \frac{12}{h^3 D_{11}^*}, \quad (5.12)$$

a pro kvadratický moment průřezu a moment

$$J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad (5.13)$$

$$M = M_x b. \quad (5.14)$$

Zjištění deformací plyne ze vztahu (4.10)

Hlavní deformace lze transformovat na lokální deformace v každé vrstvě

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_k = [R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k. \quad (5.16)$$

Kde matice R je

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

a matice T je

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Za předpokladu, že $E_i > 0$, $G_{ij} > 0$, $i, j=1,2,3$, platí pro napětí v daném místě a vrstvě

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_k. \quad (5.19)$$

Hlavní napětí v každé desce je následně popsáno vztahem

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k. \quad (5.20)$$

5.2 Ohyb asymetrického nosníku

V případě asymetrických nosníků, nejsou síly a momenty působící na laminát odděleny. Vztah je popsán rovnicí (4.23). Tedy v symbolickém zápisu

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^o \\ \dots \\ k \end{bmatrix},$$

inverzní zápis

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m^o \\ \dots \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix}.$$

Zavedeme matici J 6x6, která je inverzní globální matici tuhosti, a tedy

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix}^{-1} = [J], \quad (5.21)$$

rozepsání inverzního zápisu (4.23) je

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Pokud se jedná o ohyb pouze v ose x , poté M_x je jediný nenulový člen v matici zatížení, z čehož vyplývá

$$\varepsilon_{xx}^o = J_{14} M_x \quad (5.23a)$$

$$\varepsilon_{yy}^o = J_{24} M_x \quad (5.23b)$$

$$\gamma_{xy}^o = J_{34} M_x \quad (5.23c)$$

$$k_x = J_{44} M_x \quad (5.23d)$$

$$k_y = J_{54} M_y \quad (5.23e)$$

$$k_{xy} = J_{64} M_{xy} \quad (5.23f)$$

Rozložení deformace je popsáno rovnicí (4.10) a jednotlivé prvky jsou

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^o + zk_x, \quad (5.24a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^o + zk_y, \quad (5.24b)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^o + zk_{xy}. \quad (5.24c)$$

Protože je nosník asymetrický, neutrálná osa se neshoduje se střední rovinou. Umístění neutrálné osy z_n se nachází v místě kde $\varepsilon_{xx} = 0$. Z rovnice (5.24a) tudíž vyplývá

$$0 = \varepsilon_x^o + z_n k_x \quad (5.25)$$

a po dosazení vztahu (5.23a) a (5.23d)

$$0 = J_{14} M_x + z_n J_{44} M_x, \quad (5.26)$$

po úpravě dostaneme kýženou polohu neutrálné osy z_n

$$z_n = -\frac{J_{14}}{J_{44}}. \quad (5.27)$$

Ze vztahu (4.12) vyplývá, že průhyb w_o je závislý na y . V případě, že uvažujeme úzký nosník, tak poměr šířky a délky se blíží k nule, potom můžeme uvažovat, že platí $w_o = w_o(x)$. Můžeme psát

$$k_x = \frac{d^2 w_o}{dx^2} = -J_{44} M_x, \quad (5.28)$$

a dále platí

$$\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} = -\frac{M_x b}{E_x J}, \quad (5.29)$$

kde b je šířka,
 E_x je Youngův modul pružnosti v ose x ,
 J je kvadratický moment průřezu roviny x - y .

z rovnic (5.26) a (5.27) dostaneme vztah

$$E_x = \frac{12}{h^3 J_{44}}. \quad (5.30)$$

Dále víme, že

$$J = \frac{bh^3}{12}$$

$$M = M_x b.$$

Pro zjištění deformací použijeme vztah (4.10),

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^o + zk_x \quad (5.31a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^o + zk_y \quad (5.31b)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^o + zk_{xy} \quad (5.31c)$$

Hlavní deformace mohou být převedeny do lokálních deformací pomocí transformačních matic (5.17) a (5.18) pro každou vrstvu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_k = [R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k \quad (5.32)$$

Napětí v daném místě lze nalézt pomocí vztahu

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_k \quad (5.33)$$

Hlavní napětí vypočítáme ze vztahu (5.32) a použitím inverzního vztahu (5.18)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k \quad (5.34)$$

6. Porovnání průhybu symetrického a asymetrického nosníku

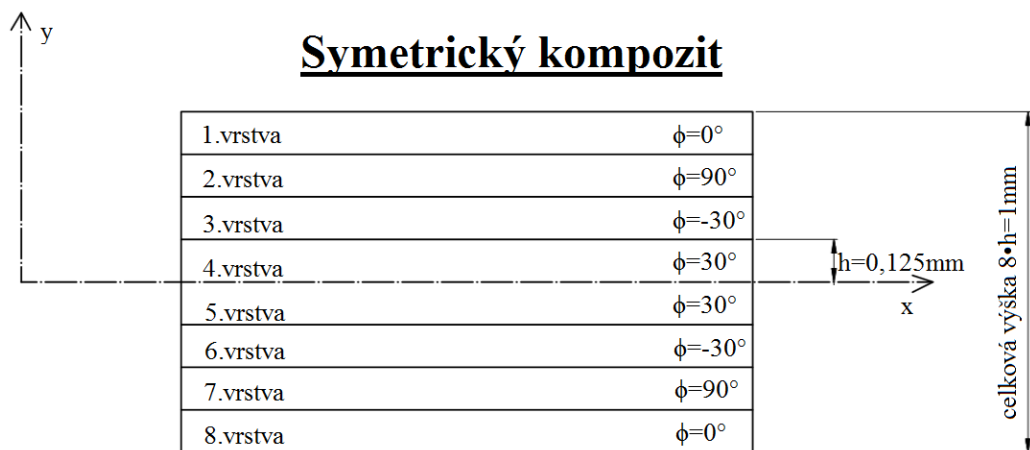
Tato kapitola je věnována samotnému problému celé práce. Jsou zde porovnány dva lamináty symetrické a dva nesymetrické. Hlavním cílem je vytvořit závislost mezi objemovým podílem a průhybem nosníku při stálém zatížení.

6.1 Zadání příkladu

Je dán nosník o délce 0,1 m a šířce 5mm. Laminát je složen z osmi vrstev o tloušťce 0,125mm. Nosník je zatížen konstantním spojitým zatížením $q_0 = 200 \text{ N/m}$.

Materiálem matrice je epoxidová pryskyřice s hustotou $\rho_m = 1200 \text{ kgm}^{-3}$, modulem pružnosti v tahu $E_m = 4500 \text{ MPa}$, modulem pružnosti ve smyku $G_m = 1600 \text{ MPa}$ a Poissonovým číslem $\mu_m = 0,4$ (EP k24 je přesné označení typu matrice).

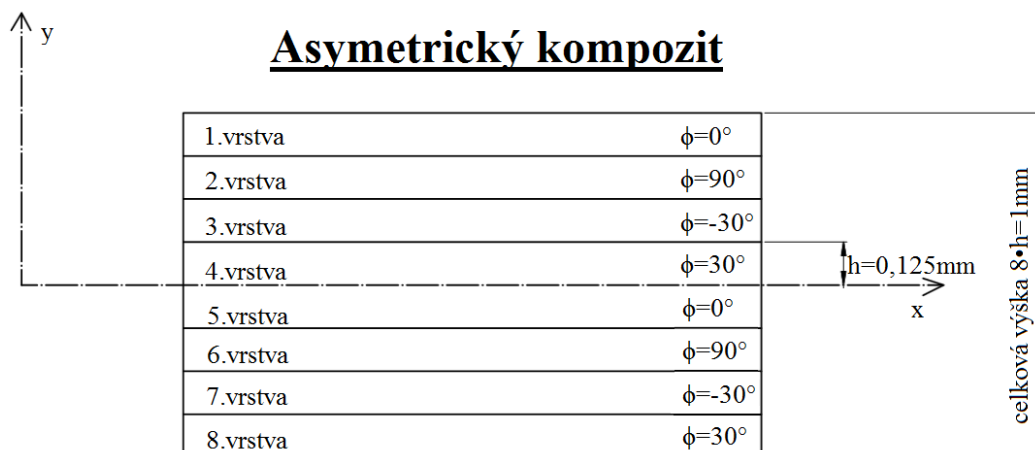
- 1) Jedná se o symetrický laminát se složením vrstev $[0|90|-30|30]_s$



Obr. 24 Symetrický kompozit

- a. Skleněná vlákna (sklovina typu E) s hustotou $\rho_f = 2600 \text{ kgm}^{-3}$, podélným modulem pružnosti v tahu $E_{fl} = 74\,000 \text{ MPa}$, příčným modulem pružnosti v tahu $E_{ft} = 74\,000 \text{ MPa}$, modulem pružnosti ve smyku $G_f = 30\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovým číslem $\mu_f = 0,25$.
- b. Uhlíková vlákna typu T600 (vysokopevnostní vlákna vyráběna firmou Thomy) s hustotou $\rho_f = 1750 \text{ kgm}^{-3}$, podélným modulem pružnosti v tahu $E_{fl} = 230\,000 \text{ MPa}$, příčným modulem pružnosti v tahu $E_{ft} = 15\,000 \text{ MPa}$, modulem pružnosti ve smyku $G_f = 50\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovým číslem $\mu_f = 0,3$.

- 2) Jedná se o asymetrický laminát se složením vrstev [0|90|-30|30|0|90|-30|30]



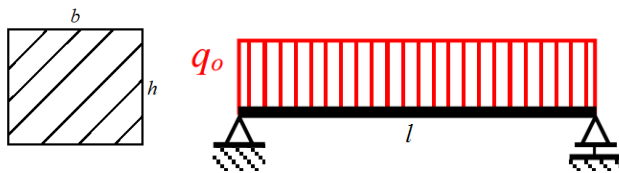
Obr. 25 Asymetrický kompozit

- a. Skleněná vlákna (sklovina typu E) s hustotou $\rho_f = 2600 \text{ kgm}^{-3}$, podélným modulem pružnosti v tahu $E_{fL} = 74\,000 \text{ MPa}$, příčným modulem pružnosti v tahu $E_{fT} = 74\,000 \text{ MPa}$, modulem pružnosti ve smyku $G_f = 30\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovým číslem $\mu_f = 0,25$.
- b. Uhlíková vlákna typu T600 (vysokopevnostní vlákna vyráběna firmou Thomy) s hustotou $\rho_f = 1750 \text{ kgm}^{-3}$, podélným modulem pružnosti v tahu $E_{fL} = 230\,000 \text{ MPa}$, příčným modulem pružnosti v tahu $E_{fT} = 15\,000 \text{ MPa}$, modulem pružnosti ve smyku $G_f = 50\,000 \text{ MPa}$ a Poissonovým číslem $\mu_f = 0,3$.

6.2 Řešení příkladu pomocí klasické pružnosti a pevnosti

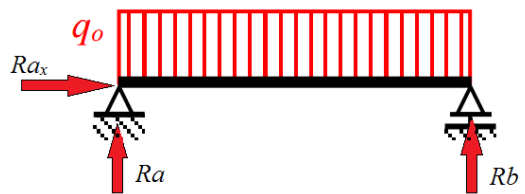
Dáno: q_0, b, h, l, J_z, E

Určit máme maximální průhyb v .



Obr. 26 Schéma příkladu [26]

Reakce od podpor R_a, R_b a R_{a_x} .

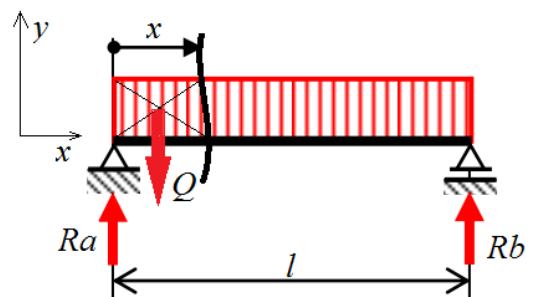


Obr. 27 Reakce od posuvné a pevné vazby [26]

Rovnovážné rovnice pro daný nosník:

$$\begin{aligned} x: \sum_{i=1}^n F_i &= 0 \\ y: \sum_{j=1}^m F_j &= 0 \\ M_B: \sum_{k=1}^p M_k &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Z obrázku je patrné, že síla R_{a_x} je rovna 0.



Obr. 28 Místo řezu x [26]

Pro sílu Q platí

$$Q(x) = q_0 x, \quad (6.2)$$

a rovnovážné rovnice

$$y: Ra + Rb - Q = 0, \quad (6.3a)$$

$$M_B: Ra \cdot l - Q(x) \cdot \frac{l}{2} = 0. \quad (6.3b)$$

Po úpravě rovnic (6.3a) a (6.3b) dospějeme k

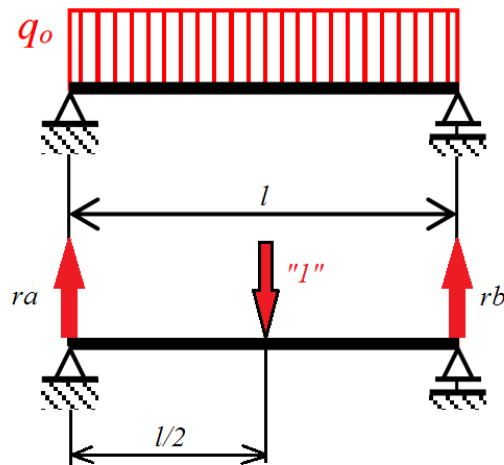
$$Ra = Rb = \frac{q_0 l}{2}. \quad (6.4)$$

Momentová rovnice v místě řezu je

$$M_o(x) = \frac{q_0 l}{2} x - \frac{q_0 x^2}{2}. \quad (6.5)$$

Ze symetrie víme, že průhyb v_{\max} je v $v(l/2)$. Výpočet provedeme pomocí Mohrova integrálu.

Umístíme jednotkovou sílu v místě určení průhybu.



Obr. 29 Umístění jednotkové síly [26]

Jednotková síla vyvolává jednotkové reakce v podporách. Musíme tedy vytvořit rovnovážné rovnice pro daný nosník, kde figurují reakce a jednotková síla

$$y: ra + rb - "1" = 0, \quad (6.6a)$$

$$M_B: ra \cdot l - "1" \cdot \frac{l}{2} = 0. \quad (6.6b)$$

Z rovnovážných rovnic vyplývá, že

$$ra = rb = \frac{1}{2}. \quad (6.7)$$

Jednotkový moment od jednotkové síly v daném místě pro první interval $\langle 0; \frac{l}{2} \rangle$ je dán

$$m_o^1(x) = \frac{1}{2} \cdot x, \quad (6.8)$$

a pro interval $\langle \frac{l}{2}; l \rangle$

$$m_o^2(x) = \frac{1}{2} \cdot x - 1 \cdot (x - \frac{l}{2}) = \frac{1}{2}(l - x). \quad (6.9)$$

Odvození Mohrova integrálu je převzato z [24].

Mohrův integrál plyne z Castiglianovy věty

$$v_j = \frac{\partial U_{celková}}{\partial F_j}. \quad (6.10)$$

Kde $U_{celková}$ je celková deformační energie. Pro výpočet průhybu je nutno využít vztah pro deformační energii při ohybu, která je dána vztahem

$$U_{celková} = \frac{1}{2EJ_z} \int_{(l)} M_o^2(x) dx \quad (6.11)$$

Dosazení vztahu (6.9) do vztahu (6.8) dostáváme vztah

$$v_j = \int_{(l)} \frac{M_o(x)}{EJ_z(x)} \cdot \frac{\partial M_o(x)}{\partial F_j} dx, \quad (6.12)$$

kde

$$\frac{\partial M_o(x)}{\partial F_j} = m_o^{(j)}(x). \quad (6.13)$$

Tedy $m_o^{(j)}(x)$ je definováno jako jednotkový moment od posouvající se síly F_j

$$v_j = \int_{(l)} \frac{M_o(x)}{EJ_z(x)} \cdot m_o^{(j)} dx, \quad (6.14)$$

a pokud je $EJ_z = konst.$, tak platí

$$v_j = \frac{1}{EJ_z} \int_{(l)} M_o(x) \cdot m_o^{(j)} dx. \quad (6.15)$$

Použitím vztahu (6.15) a dosazením rovnic (6.5), (6.8) a (6.9) získáme integrál ve tvaru

$$v = \frac{1}{EJ_z} \left[\int_0^{l/2} M_o(x) \cdot m_o^1(x) dx + \int_{l/2}^l M_o(x) \cdot m_o^2(x) dx \right], \quad (6.16)$$

$$v = \frac{1}{EJ_z} \left[\int_0^{l/2} \left(\frac{q_o l}{2} x - \frac{q_o x^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot x dx + \int_{l/2}^l \left(\frac{q_o l}{2} x - \frac{q_o x^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} (l-x) dx \right]. \quad (6.17)$$

Po integraci

$$v = \frac{1}{EJ_z} \left\{ \left[\frac{q_o l}{4} \cdot \frac{x^3}{3} - q_o \cdot \frac{x^4}{16} \right]_0^{l/2} + \left[\frac{1}{4} \left(q_o l^2 \frac{x^2}{2} - 2q_o l \frac{x^3}{3} + q_o \frac{x^4}{4} \right) \right]_{l/2}^l \right\}. \quad (6.18)$$

Následně po dosazení mezí a algebraických úpravách dospějeme ke vztahu

$$v = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_o l^4}{E \cdot J_z}. \quad (6.19)$$

J_z pro daný průřez je dán vztahem (5.13).

6.3 Řešení Youngova modulu pružnosti pomocí klasické laminátové teorie

V následující kapitole byl použit program LamiEx [25], ve kterém byl ověřen daný příklad, a byly spočítány potřebné koeficienty.

Pro nalezení modulu pružnosti E musíme nejprve zjistit jednotlivé moduly pružnosti v jednotlivých směrech. Pro ilustraci číselně vypočítáme vrstvu číslo 4 symetrického nosníku s vlákny T600 při objemovém podílu vláken $V_f = 49\%$.

Pro vlákna T600 platí:

$$\begin{aligned}\rho_f &= 1750 \text{ kgm}^{-3} \\ E_{fl} &= 230\,000 \text{ MPa} \\ E_{fr} &= 15\,000 \text{ MPa} \\ G_f &= 50\,000 \text{ MPa} \\ \mu_f &= 0,3\end{aligned}$$

Pro epoxidovou matici:

$$\begin{aligned}\rho_m &= 1200 \text{ kgm}^{-3} \\ E_m &= 4500 \text{ MPa} \\ G_m &= 1600 \text{ MPa} \\ \mu_m &= 0,4\end{aligned}$$

Výpočet podélného modulu pružnosti spočteme pomocí vztahu (3.11)

$$E_L = V_f E_f + (1 - V_f) E_m .$$

Po dosazení získáme

$$E_L = 0,49 \cdot 230\,000 + (1 - 0,49) \cdot 4\,500 = 114\,995 \text{ MPa} .$$

Pro výpočet příčného modulu pružnosti E_T použijeme vztah (3.17)

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f} \right)} .$$

Dosadíme jednotlivé veličiny do (3.17)

$$E_T = \frac{4\,500}{1 - 0,49 \left(1 - \frac{4\,500}{15\,000} \right)} = 6\,849 \text{ MPa}.$$

Dále vypočteme Poissonovo číslo μ_{LT} ze vztahu (3.17)

$$\mu_{LT} = V_f \mu_f + (1 - V_f) \mu_m.$$

Po dosazení

$$\mu_{LT} = 0,49 \cdot 0,3 + (1 - 0,49) \cdot 0,4 = 0,351.$$

Smykový modul pružnosti G_{LT} získáme ze vztahu (3.32)

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{G_m}{G_f} \right)}.$$

Po dosazení

$$G_{LT} = \frac{1\,600}{1 - 0,49 \cdot \left(1 - \frac{1\,600}{50\,000} \right)} = 3\,043,7 \text{ MPa}.$$

Následně pro výpočet potřebujeme spočítat jednotlivé členy matice tuhosti **C**. Jednotlivé členy matice tuhosti jsou detailně popsány v [1]

$$C_{11} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \mu_{LT}^2}, \quad (6.20a)$$

$$C_{22} = \frac{E_T}{E_L} C_{11}, \quad (6.20b)$$

$$C_{12} = \mu_{LT} C_{22}, \quad (6.20c)$$

$$C_{66} = G_{LT}. \quad (6.20d)$$

Následně dosadíme do vztahů (6.20a) až (6.20d) a sestavíme matici \mathbf{C} , která je symetrická

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 115\,845 & 2\,421,9 & 0 \\ 2\,421,9 & 6899,9 & 0 \\ 0 & 0 & 3043,7 \end{bmatrix}.$$

Matici mimoosové tuhosti \mathbf{Q} transformujeme pro daný úhel natočení, a to $\phi = 30^\circ$ pomocí transformační matice \mathbf{T} a její inverze \mathbf{T}^{-1} kde $c = \cos \phi$ a $s = \sin \phi$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2s \cdot c \\ s^2 & c^2 & -2s \cdot c \\ -s \cdot c & s \cdot c & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2s \cdot c \\ s^2 & c^2 & 2s \cdot c \\ s \cdot c & -s \cdot c & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (6.24)$$

Výsledná matice \mathbf{Q} , která je stejně jako matice \mathbf{C} symetrická, je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 68785 & 22\,246 & 35\,032,6 \\ 22\,246 & 14\,312,5 & 12\,142 \\ 35\,032,6 & 12\,142 & 22\,867,4 \end{bmatrix}.$$

Výpočet Matice **D** vyplývá ze vztahu (4.22c)

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3).$$

Pro výšku h jednotlivých vrstev postupujeme dle Obr.19 (z kapitoly 4.2).

Zde si musíme zavést matici \mathbf{d}_m , pro kterou platí

$$D = \sum_{m=1}^l d_m. \quad (6.25)$$

Pro čtvrtou vrstvu natočenou pod úhlem $\phi = 30^\circ$ platí matice \mathbf{d}_4

$$d_4 = \begin{bmatrix} 44,8 & 14,5 & 22,8 \\ 14,5 & 9,3 & 7,9 \\ 22,8 & 7,9 & 14,9 \end{bmatrix}.$$

Pro sestavení matice **D** je zapotřebí provést celý výpočet pro každou vrstvu. Vytvořit dílčí matice \mathbf{d}_m a postupovat dle vztahu (6.25).

Matice **D** pro zadaný laminát vypadá následovně

$$D = \begin{bmatrix} 6\,468,3 & 408,3 & -273,7 \\ 408,3 & 3\,347,5 & -94,9 \\ -273,7 & -94,9 & 460,14 \end{bmatrix}.$$

V případě, že sestavíme matici **D**, vytvoříme inverzní matici **D'**

$$D' = \begin{bmatrix} 1,595 \cdot 10^{-4} & -1,687 \cdot 10^{-5} & 9,141 \cdot 10^{-5} \\ -1,687 \cdot 10^{-5} & 3,03 \cdot 10^{-4} & 5,228 \cdot 10^{-5} \\ 9,141 \cdot 10^{-5} & 5,228 \cdot 10^{-5} & 2,238 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Výpočtem \mathbf{D}' získáme možnost spočítat modul pružnosti ve směru ohybu, a to je E_x z rovnice (5.12).

Pro daný laminát T600 a $V_f = 49\%$ je

$$E_x = \frac{12}{h^3 D_{11}^*} = \frac{12}{1^3 \cdot 1,595 \cdot 10^{-4}} = 75\,219,5 \text{ MPa}.$$

Dosazením do vztahu (6.19) získáme průhyb pro dané materiálové složení

$$v = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_o l^4}{E_x \cdot J_z} = \frac{5}{384} \cdot \frac{0,2 \cdot 100^4}{75\,219,5 \cdot \frac{5 \cdot 1^3}{12}} = 8,309 \text{ mm}.$$

Obdobně spočteme E_x pro asymetrický nosník o stejných parametrech pro čtvrtou vrstvu, kde matice tuhosti \mathbf{C} a matice mimoosé tuhosti \mathbf{Q} jsou pro asymetrický nosník shodné se symetrickým.

Spočteme globální matici tuhosti

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix},$$

kteřá pro konkrétní asymetricky složený kompozit má číselný tvar následující

$$\begin{bmatrix} 6,51 \cdot 10^4 & 1,23 \cdot 10^4 & 0 & -1,24 \cdot 10^3 & 1,24 \cdot 10^3 & 1,09 \cdot 10^3 \\ 1,23 \cdot 10^4 & 3,78 \cdot 10^4 & 0 & 1,24 \cdot 10^3 & -1,24 \cdot 10^3 & 3,79 \cdot 10^2 \\ 0 & 0 & 1,30 \cdot 10^4 & 1,09 \cdot 10^3 & 3,79 \cdot 10^2 & 1,24 \cdot 10^3 \\ -1,24 \cdot 10^3 & 1,24 \cdot 10^3 & 1,09 \cdot 10^3 & 5,85 \cdot 10^3 & 1,03 \cdot 10^3 & 2,74 \cdot 10^2 \\ 1,24 \cdot 10^3 & -1,24 \cdot 10^3 & 3,79 \cdot 10^2 & 1,03 \cdot 10^3 & 2,73 \cdot 10^3 & 9,49 \cdot 10^1 \\ 1,09 \cdot 10^3 & 3,79 \cdot 10^2 & 1,24 \cdot 10^3 & 2,74 \cdot 10^2 & 9,49 \cdot 10^1 & 1,08 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

a inverzní globální matici tuhosti tedy \mathbf{J} podle kapitoly 5.2, (5.22)

$$J = \begin{bmatrix} 1,72 \cdot 10^{-5} & -6,12 \cdot 10^{-6} & 1,42 \cdot 10^{-6} & 7,82 \cdot 10^{-6} & -1,31 \cdot 10^{-5} & -1,78 \cdot 10^{-5} \\ -6,12 \cdot 10^{-6} & 2,95 \cdot 10^{-5} & 7,18 \cdot 10^{-7} & -1,11 \cdot 10^{-5} & 2,04 \cdot 10^{-5} & -3,96 \cdot 10^{-6} \\ 1,42 \cdot 10^{-6} & 7,18 \cdot 10^{-7} & 8,77 \cdot 10^{-5} & -1,07 \cdot 10^{-5} & -5,02 \cdot 10^{-6} & -9,92 \cdot 10^{-5} \\ 7,82 \cdot 10^{-6} & -1,11 \cdot 10^{-5} & -1,07 \cdot 10^{-5} & 1,92 \cdot 10^{-4} & -7,84 \cdot 10^{-5} & -3,36 \cdot 10^{-5} \\ -1,31 \cdot 10^{-5} & 2,04 \cdot 10^{-5} & -5,02 \cdot 10^{-6} & -7,84 \cdot 10^{-5} & 4,12 \cdot 10^{-4} & -4,43 \cdot 10^{-6} \\ -1,78 \cdot 10^{-5} & -3,96 \cdot 10^{-6} & -9,92 \cdot 10^{-5} & -3,36 \cdot 10^{-5} & -4,43 \cdot 10^{-6} & 1,07 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Podle vztahu (5.30), kde J_{44} je prvkem matice \mathbf{J} , vypočítáme E_x

$$E_x = \frac{12}{h^3 J_{44}} = \frac{12}{1^3 \cdot 1,923 \cdot 10^{-4}} = 62\,391,4 \text{ MPa},$$

a průhyb

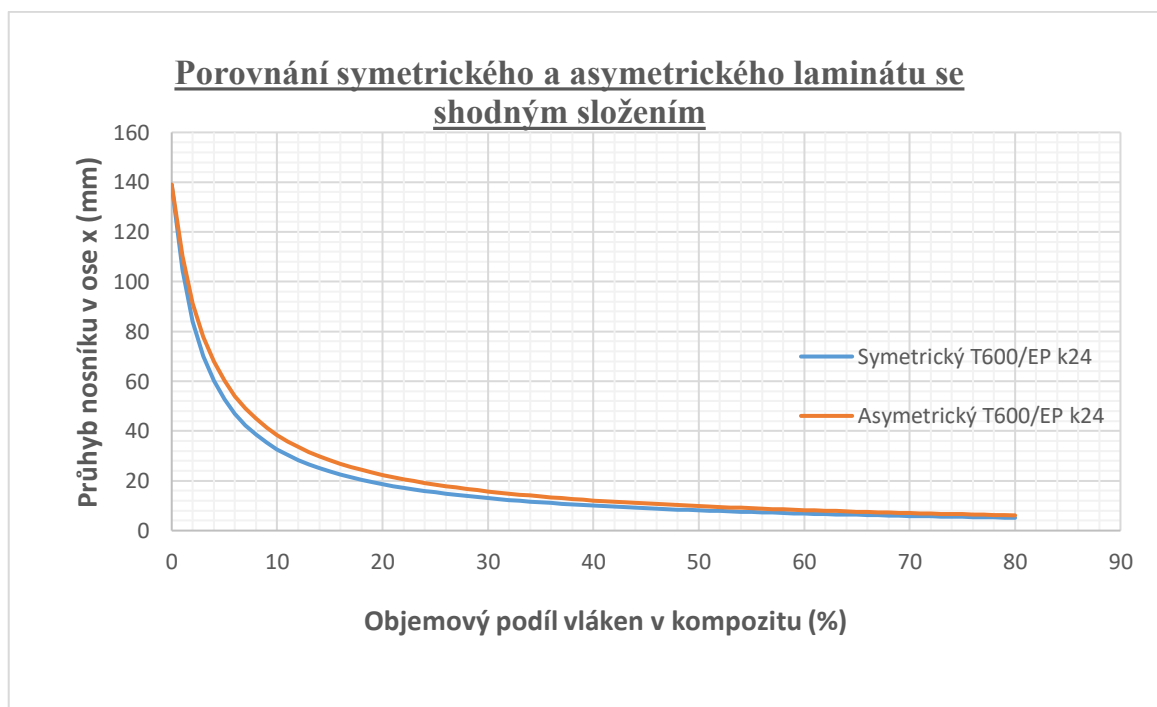
$$v = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_o l^4}{E_x \cdot J_z} = \frac{5}{384} \cdot \frac{0,2 \cdot 100^4}{62\,391,4 \cdot \frac{5 \cdot 1^3}{12}} = 10,02 \text{ mm}.$$

6.4 Porovnání průhybů

V této kapitole je shrnut rozdíl mezi symetrickým a asymetrickým rozložením vrstev. K výpočtu byl využit program LamiEx [25] a programu Microsoft Excel®, ve kterém jsem zpracoval grafické zobrazení.

6.4.1 Porovnání symetrického a asymetrického laminátu

Porovnání laminátů se stejným materiálovým složením, tedy uhlíkovým vláknem typu T600 od firmy Thomy a matricí z epoxidové pryskyřice EP k24.

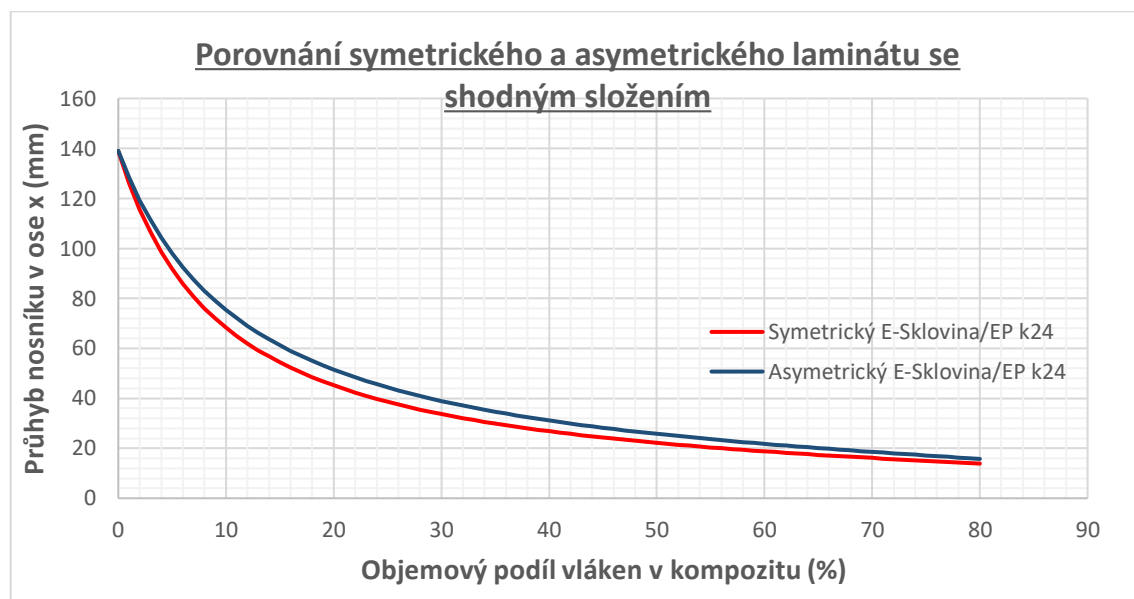


Graf A Porovnání symetrického a asymetrického laminátu se shodným složením T600/EP k24

Na první pohled je patrné, že asymetrický laminát je výrazně poddajnější. V rozmezí malého podílu vláken V_f od 3 % do 20 % je rozdíl nejvíce patrný. V oblasti 50 % až 80 % se funkce začínají ztotožňovat. Poddajnost symetrického kompozitu je výrazně nižší hlavně při malém objemovém podílu vláken V_f . Rozdíl průhybů při stejném objemovém podílu vláken V_f je maximální právě při 3 % a to $v = 7,66\text{mm}$. Od 50 % do 80 % objemového podílu se rozdíl průhybů pohybuje v rozmezí 2mm až 1 mm.

Maximální průhyb nosníků je 139mm, který je pro oba nosníky totožný. Minimální průhyb nosníků je při maximálním objemovém podílu vláken V_f .

V dalším grafickém zobrazení se budeme zabývat porovnáním laminátů se stejným materiálovým složením, a to se skleněným vláknem neboli E-sklovinou a matricí z epoxidové pryskyřice EP k24.



Graf B Porovnání symetrického a asymetrického laminátu se shodným složením E-sklovina/EP k24

Jak je patrné již z prvního **Grafu A** tak symetrický laminát je výrazně méně poddajný.

Maximální rozdíl průhybů se nachází v rozmezí 5 % až 30 % objemového podílu vláken V_f . Konkrétně je maximální rozdíl poddajnosti při objemovém podílu vláken $V_f = 10\%$, kde je průhyb roven $v = 7,1$ mm. Maximální průhyb je shodný s **Grafem A** a tedy 139mm. Minimální průhyb je 15,27 mm pro nosník asymetrický a 13,88 mm pro nosník symetrický, a to při objemovém podílu vláken $V_f = 80\%$.

Hlavní rozdíl mezi symetrickým a asymetrickým složením vrstev tkví v matici vazební tuhosti **B**, která tvoří závislost mezi vnějšími zatíženími, a tedy mezi momenty a silami.

Asymetrické složení má všechny prvky globální matice tuhosti nenulové, a proto po roznásobení vztahu (4.24)

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & : & B \\ \dots & : & \dots \\ B & : & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^o \\ \dots \\ k \end{bmatrix},$$

získáme rovnici pro silové a momentové zatížení v maticovém tvaru

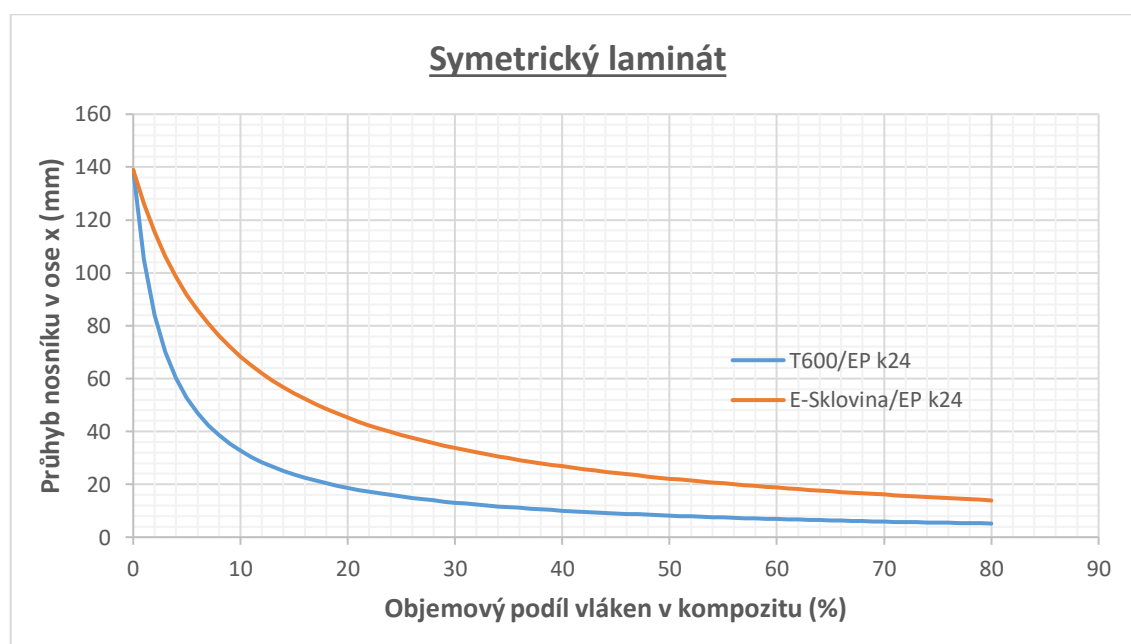
$$\begin{aligned} N &= A \cdot \varepsilon_m^o + B \cdot k \\ M &= B \cdot \varepsilon_m^o + D \cdot k \end{aligned} \quad (6.26)$$

Matice **B** vytváří závislost mezi deformacemi a křivostmi, z čehož plynou horší ohybové vlastnosti. Znamená to, že normálové a smykové síly působící ve střední rovině způsobí nejen přetvoření ve střední rovině, ale také ohyb a zkrut střední plochy. [1]

V případě symetrického laminátu, jak je již popsáno ve stati 4.3.1. se matice vazební tuhosti **B** rovná 0 a globální matice má pak tvar (4.27). Z toho důvodu jsou symetrické kompozitní nosníky tužší nežli asymetrické.

6.4.2 Porovnání materiálových vlastností pro uhlíkové a skelné vlákno

V tomto grafu je zobrazen rozdíl mezi uhlíkovým a skleněným vláknem při symetrickém složení laminátu. Jedná se o závislost ν (průhybu) a V_f (objemového podílu vláken).



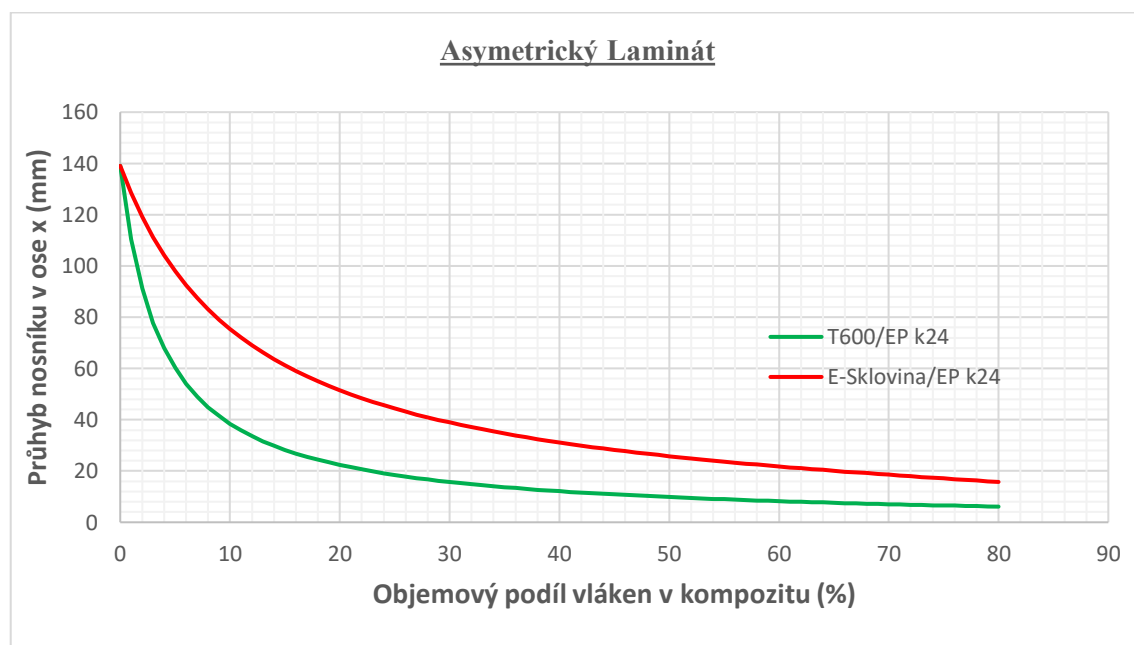
Graf C Porovnání skleněných vláken a uhlíkových vláken symetrického laminátu

V **Grafu C** je na první pohled vidět, že poddajnost skleněného vlákna vůči uhlíkovému je výrazně vyšší. Značný nárůst tuhosti u uhlíkového vlákna začíná při několika málo procentech V_f (objemového podílu vláken). Již na 5 % V_f se výrazně liší průhyb obou nosníků, a to o celých 39mm kde se nachází maximální rozdíl průhybů.

Nelze říci, že funkce jsou ekvidistanty. Uhlíkové vlákno má výrazný vzestup tuhosti, naopak skleněné vlákno má vzestup pozvolnější nežli vlákno uhlíkové. Při maximálním V_f , tedy 80 % je modul pružnosti E_x pro symetrický nosník s uhlíkovými vlákny 2,7krát vyšší než pro skleněné vlákno.

Nejzřetelnější rozdíl poddajnosti se nachází mezi 5 až 50 %, kde se průhyb pro nosník s uhlíkovými vlákny pohybuje mezi 50 až 8 mm. Pro nosník se skleněnými vlákny se průhyb pohybuje mezi 92 a 22 mm.

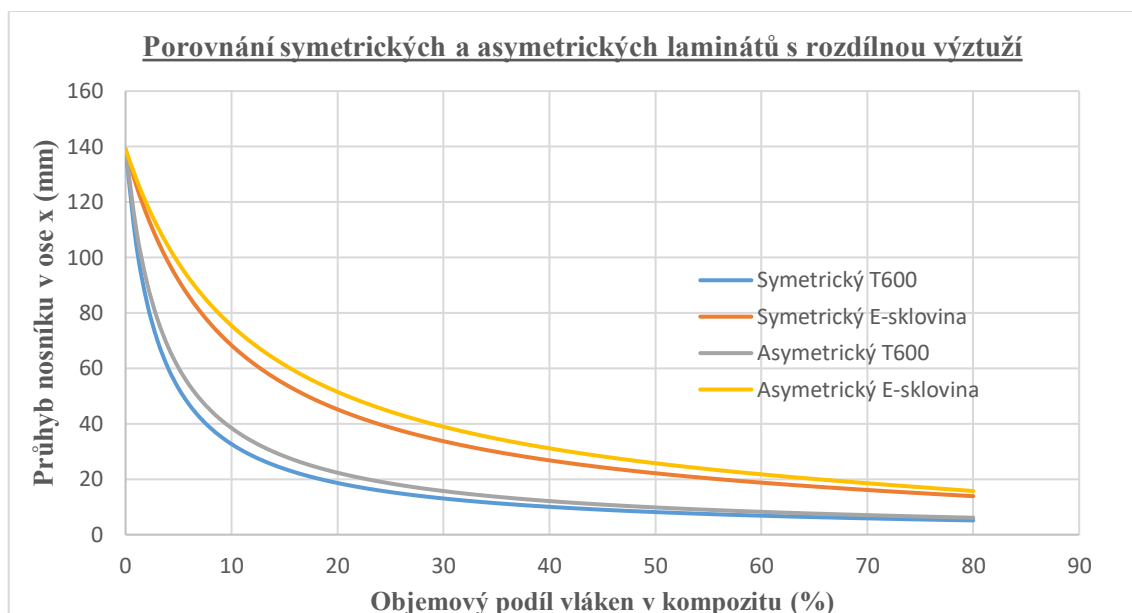
Smyslem tohoto grafu je porovnání materiálových vlastností skloviny a uhlíkového vlákna při asymetrickém složení laminátu. Jedná se o závislost v (průhybu) a V_f (objemového podílu vláken).



Graf D Porovnání skleněných vláken a uhlíkových vláken asymetrického laminátu

V tomto grafu porovnááme asymetricky složené lamináty s totožnou matricí, ale rozdílnými vlákny. Na první pohled se **Graf D** a **Graf C** nijak výrazně neliší. Z toho důvodu je zde zkonstruován **Graf E**, který detailně rozřazuje jednotlivé lamináty.

Maximální rozdíl průhybů obou nosníků nastává při 7% objemovém podílu vláken a má hodnotu 38,5mm. Průhyb nosníku s uhlíkovými vlákny se asymptoticky blíží k hranici 5mm a u nosníku se skleněnými vlákny k hranici okolo 15mm, ale stále klesá.



Graf E Porovnání symetrických a asymetrických laminátů s rozdílnou výztuží

Hlavní rozdíl mezi skleněnými a uhlíkovými vlákny je anizotropie. Skleněná vlákna jsou ve všech směrech homogenní a jsou izotropní, tedy snášejí stejné zatížení ve všech směrech stejně. Uhlíková vlákna, konkrétně T600, jsou vysoce anizotropní, z čehož vyplývá, že v podélném směru výrazně méně poddajná nežli vlákna skleněná.

7. Závěr

Po provedení rešerše bylo zjištěno, že nepoužívanějšími matricemi jsou matrice polymerní. Nepřeberné množství vláken konstruktérům dává nadmíru velký počet možností pro realizaci svých nápadů. Výhoda přírodních vláken je značná. Využití jakýchkoliv přírodních produktů obecně zvyšuje popularitu výrobku.

Kompozity jsou využívány prakticky ve všech odvětvích, ať už pro svoje mechanické, materiálové a hmotnostní vlastnosti, tak i pro svůj vzhled. Uhlíková vlákna se stala ikonou motosportu. V mnoha případech se kompozity pro svůj vzhled ani neopatřují nátěrem. Obliba kompozitů stoupá.

V této práci je uveden způsob výpočtu modulu pružnosti pro kompozitní nosník, a to ve směru příčném i podélném. Kompletně je zde zaveden pojem „*klasická laminátová teorie*“. V této práci je postupně odvozena globální matice tuhosti a sestaven postup pro výpočet ohybu symetrického a asymetrického nosníku.

Poslední část je věnována výpočtu konkrétního nosníku. Výsledkem výpočtu je pochopení důležitosti složení jednotlivých lamin. V případě skládání lamin je nutno skládat laminy symetricky. Zamezí se tak tvorbě vazby mezi momenty a silami globální matice tuhosti. Nosník je tak méně poddajný a tedy pevnější. Rozdíl průhybů je výrazný a rozhodně není zanedbatelný.

Vzhledem k vypočteným hodnotám můžeme říci, že uhlíková vlákna jsou obecně tužší. Na rozdíl od skleněných vláken nejsou izotropní, a proto by v ostatních směrech byl průhyb rozdílný.

8. Bibliografie

- [1] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. 2., přeprac. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 978-80-7043-689-9.
- [2] KAW, Autar. *Mechanics of composite materials*. 2nd ed. Boca Raton, FL: Taylor, 2006. Mechanical engineering series (Boca Raton, Fla.), v. 29. ISBN 08-493-1343-0.
- [3] EHRENSTEIN, Gottfried W. *Polymerní kompozitní materiály*. V ČR 1. vyd. Praha: Scientia, 2009. ISBN 978-80-86960-29-6.
- [4] PETRTÝL, Miroslav. *Mechanika kompozitních těles*. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1991. ISBN 80-01-00639-5.
- [5] BAREŠ, Richard. *Kompozitní materiály*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1988. ISBN L17-B3-IV-31/72231. L17-B3-IV-31/72231.
- [6] MACEK, Karel a Petr ZUNA. *Nauka o materiálu*. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 8001025438.
- [7] BANSAL, Narottam P. *Handbook of ceramic composites*. 1. vydání. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2005. ISBN 978-1-4020-8133-0.
- [8] KOŘÍNEK, Zdeněk. *Kompozity*. *Kompozity* [online]. Praha: Webnode, 2016 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: https://drive.google.com/file/d/0B8vQSuH1vI_vV115RHg1SIFPNW8/view?usp=sharing
- [9] VASILJEV, Valery V. a Evgeny V. MOROZOV. *Advanced mechanics of composite materials*. 1st ed. Amsterdam: Elsevier, 2007. ISBN 9780080453729.
- [10] MRÁZ, Petr a Jaroslav TALÁCKO. *Konstrukce strojů s kompozitními materiály*. Vyd. 1. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 8001035409.
- [11] MATTHIAS, Brian. *Choosing a Driveshaft for Your Mustang – Carbon Fiber or Aluminum?*. *American Muscle* [online]. Malvern, Pennsylvania: AMERICANMUSCLE.COM, c2003-2017 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: <http://www.americanmuscle.com/carbon-fiber-vs-aluminum-driveshafts.html>
- [12] SVOBODA, Luboš. *Stavební hmoty*. 2. přeprac. a dopl. vyd. Bratislava: Jaga, 2007. ISBN 9788080760571.
- [13] MAFRA, A. S. *Boeingy 787 Dreamliner nesmí do vzduchu, jsou poruchové*. MAFRA, A. S. *LIDOVKY.cz* [online]. Praha: LIDOVKY.C, ČTK, 2013 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: http://byznys.lidovky.cz/boeingy-787-dreamliner-nesmi-do-vzduchu-jsou-poruchove-pfg-/doprava.aspx?c=A130117_081735_in-doprava_mct

- [14] FRAGA, Jeff. BOEING 787 FROM THE GROUND UP: COMPOSITES IN THE AIRFRAME AND PRIMARY STRUCTURE. *BOEING: AERO Magazine, Boeing Commercial Airplanes* [online]. Washington D. C., USA: The Boeing Company, 2008 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: http://www.boeing.com/commercial/aeromagazine/articles/qtr_4_06/AERO_Q406_article4.pdf
- [15] *Boeing 787: Boeing* [online]. Chicago, Illinois, USA: BOEING, c1995-2017 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: <http://www.boeing.com/commercial/787/>
- [16] GUPTA, Nikhil a Steven ZELTMANN. The Carbon-Fiber Future: It's About More Than Speed (Op-Ed). *LIVESCIENCE* [online]. New York University: New York University, 2016 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: <http://www.livescience.com/53995-carbon-fiber-may-finally-be-coming-to-cars-everywhere.html>
- [17] McLaren 570S. *McLaren* [online]. Woking, United Kingdom: McLaren Automotive Limited, 2016 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: <http://cars.mclaren.com/sports-series/570s>
- [18] Bugatti Veyron Technology. *Bugatti* [online]. Dorlisheim, Molsheim, France: Bugatti Automobiles S.A.S., 2017 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: <http://www.bugatti.com/veyron/technology/>
- [19] WILLSON, Quentin. a David SELBY. *The ultimate classic car book*. 1st American ed. New York: DK Publishing, 1995. ISBN 07-894-0159-2.
- [20] NICHOLLS, Richard. *Superautomobily: [více než 300 nejvýkonnějších automobilů]*. 1. české vyd. Praha: Svojtka, 2003. ISBN 80-723-7683-7.
- [21] LACHANCE, David. 1957-'62 Lotus Elite: The charmed life of a blue-chip British bantamweight. In: *Hemmings: The World's Largest Collector Car Marketplace* [online]. Charlotte, North Carolina: American City Business Journals, 2007 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: <https://www.hemmings.com/magazine/hmn/2007/02/1957--62-Lotus-Elite/1410626.html>
- [22] RYAN, V. COMPOSITE MATERIALS - REINFORCED CONCRETE. In: *Technology Student* [online]. Buffalo: Buffalo Public School, 2010 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: <http://www.technologystudent.com/joints/reinforc1.html>
- [23] Material characteristics of Duroplast and Technopolymer. *Ganter Griff* [online]. Furtwangen, Deutschland: Otto Ganter GmbH & Co. KG, 2017 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: https://www.ganter-griff.de/uploads/tx_rldownloadlist/characteristics_of_duroplast_-_technopolymer.pdf
- [24] MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost I*. Vyd. 3. Praha: ČVUT, 2009. ISBN 9788001042243.
- [25] LamiEX v. 3.0: Program pro výpočet zatížení a pevnosti laminátů podle klasické laminační teorie. *Tom Mares's webpage* [online]. 2006 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: <http://drone.fsid.cvut.cz/mcmfolder/laminator.xls>
- [26] ŘEZNÍČEK, Jan. Pružnost a Pevnost I: Podklady pro přednášky. *Stránky podpory výuky pružnosti a pevnosti na FS ČVUT v Praze* [online]. v Praze: Fakulta Strojní ČVUT v Praze, 2017 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: http://pruznost.unas.cz/PP_I_16_17.pdf

- [27] VRBKA, Jan. MECHANIKA KOMPOZITŮ. *Vysoké učení technické v Brně* [online]. Brno: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně, 2008 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=83340