

# Příloha 1 – Velikost částic

## 1.1 Feretův průměr

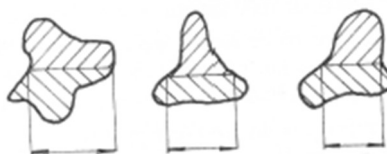
Feretův průměr je ze všech charakteristik principem nejjednodušší – je to prostá vzdálenost dvou tečen, viz. Obrázek P1.1



Obrázek P1.1 Určení Ferretova průměru (1)

## 1.2 Martinův průměr

Martinův průměr měří délku tětiny, která dělí průmět částice na dvě poloviny, viz. Obrázek P1.2.



Obrázek P1.2 Určení Martinova průměru (1)

Oba tyto průměry musejí být provedeny na větším souboru náhodně orientovaných částic, a to navíc v jednom zvoleném směru. (1)

## 1.3 Ekvivalentní velikost částice podle průmětu

Skutečná částice o průmětu  $A$  se nahrazuje kulovou částicí o průměru  $a$ , o stejném průmětu. Platí vztah P1.3-1. (1)

$$D_A = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} \quad (P1.3-1)$$

## 1.4 Ekvivalentní velikost částice podle povrchu

Skutečná částice o povrchu  $S$  se nahrazuje kulovou částicí o průměru  $a$ , o stejném povrchu. Platí vztah P1.4-1. (1)

$$D_S = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (P1.4-1)$$

## 1.5 Ekvivalentní velikost částice podle objemu

Skutečná částice o objemu  $V$  se nahrazuje kulovou částicí o průměru  $a$ , o stejném objemu.

Platí vztah P1.5-1. (1)

$$D_V = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} \quad (P1.5-1)$$

## 1.6 Ekvivalentní částice podle objemu a povrchu.

Skutečná částice se nahrazuje kulovou částicí, u které je poměr objemu a povrchu stejný.

Matematicky vychází z dvou předchozích průměrů. Platí tedy vztahy P1.6-1 až 3.

$$\frac{V}{S} = \frac{\pi a_V^3}{6} = \frac{a_V^3}{6a_S^2} \quad (P1.6-1)$$

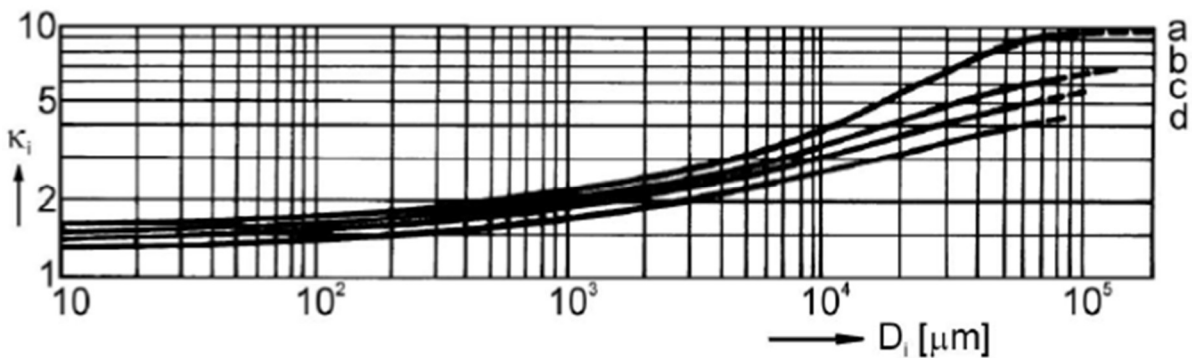
$$\left. \begin{aligned} \frac{V}{S} &= \frac{\pi a_V^3}{6} = \frac{a_V^3}{6a_S^2} \\ \frac{V}{S} &= \frac{a_{VS}}{6} \end{aligned} \right\} a_{VS} = \frac{a_V^3}{a_S^2} \quad (P1.6-2)$$

$$\frac{V}{S} = \frac{a_{VS}}{6} \quad (P1.6-3)$$

Pro popis vrstvy tvořené zrnitými částicemi nepravidelného tvaru, upravuje se rovnice P1.6-3 do tvaru P1.6-4.

$$a_{VS} = \frac{6V}{S} = \frac{D}{\kappa} \quad (P1.6-4)$$

Hodnota součinitele  $\kappa$  závisí na frakčním rozměru  $D$  a druhu zrnitého materiálu. Jako příklad lze uvést závislost  $D$  na  $\kappa$  pro křemen (a), pyrit (b), sfalerit (c) a galenit (d).



Obrázek P1.3 Hodnoty součinitele  $\kappa$  (2)

## 1.7 Ekvivalentní velikost částice podle pádové rychlosti

Skutečná částice se nahrazuje takovou kulovou částicí o stejné hustotě  $\rho$ , která v daném prostředí sedimentuje se stejnou pádovou rychlostí  $u$ . Jde o aerodynamickou velikost částice, jejím zvláštním případem je ekvivalentní velikost částice podle Stokesova zákona. Která platí pro oblast Reynoldsových čísel menších než 2. Pro pádovou rychlost platí vztah P1.7-1.

$$u = \frac{l}{t} = \sqrt{\frac{4 D(\rho_s - \rho)g}{3 C_D \rho}} \quad (P1.7-1)$$

Pádová rychlost se vyskytuje jak ve výrazu pro bezrozměrný součinitel odporu  $c_D$  P1.7-2, tak v Reynoldsově čísle P1.7-3.

$$c_D = \frac{4 D(\rho_s - \rho)g}{3 u^2 \rho} \quad (P1.7-2)$$

$$Re = \frac{uD\rho}{\mu} \quad (P1.7-3)$$

Úpravou těchto dvou vztahů lze získat poměr bezrozměrného součinitele odporu a Reynoldsova čísla.

$$\frac{c_D}{Re} = \frac{4 D(\rho_s - \rho)g}{3 u^2 \rho} \frac{\mu}{uD\rho} = \frac{4(\rho_s - \rho)g\mu}{3 u^3 \rho^2} \quad (P1.7-4)$$

Z mezních hodnot Reynoldsových čísel lze určit hraniční hodnoty poměru  $c_D/Re$  a určit oblast hodnot Reynoldsových čísel. Hraniční hodnoty jsou uvedeny v tabulce Tabulka P1.1.

Oblast	Hodnoty $\frac{c_D}{Re}$	Hodnoty Re pro obtékání kulové částice
Stokesova oblast	$\frac{c_D}{Re} > 6$ (P1.7-5)	$Re \leq 2$ (P1.7-6)
Přechodová oblast	$8,8 \cdot 10^{-4} < \frac{c_D}{Re} < 6$ (P1.7-7)	$2 < Re < 500$ (P1.7-8)
Newtonova oblast	$1,47 \cdot 10^{-6} < \frac{c_D}{Re} < 8,8 \cdot 10^{-4}$ (P1.7-9)	$500 < Re < 3 \cdot 10^5$ (P1.7-10)

Tabulka P1.1 Hraniční hodnoty poměru  $c_D/Re$

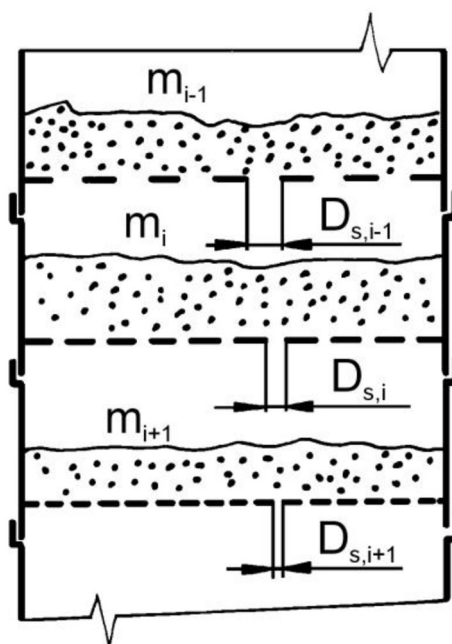
Průměr částice se odvodí úpravou známých vztahů pro usazovací rychlost kulové částice. V Tabulka P1.2 jsou uvedeny vztahy pro výpočet usazovací rychlosti a z nich odvozené vztahy pro výpočet průměru kulové částice.

Oblast	Vztah pro usazovací rychlost	Vztah pro výpočet průměru kulové částice
Stokesova oblast	$u = \frac{D^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu}$ (P1.7-11)	$D = 3 \sqrt{\frac{2u\mu}{(\rho_s - \rho)g}}$ (P1.7-12)
Přechodová oblast	$u = 0,153 \frac{D^{1,14}(\rho_s - \rho)^{0,71} g^{0,71}}{\rho^{0,29} \mu^{0,43}}$ (P1.7-13)	$D = 5,19 \frac{u^{0,877} \rho^{0,254} \mu^{0,377}}{(\rho_s - \rho)^{0,623} g^{0,623}}$ (P1.7-14)
Newtonova oblast	$u = 1,74 \sqrt{\frac{D(\rho_s - \rho)g}{\rho}}$ (P1.7-15)	$D = 0,33 \frac{u^2 \rho}{(\rho_s - \rho)g}$ (P1.7-16)

Tabulka P1.2 Vztahy pro výpočet usazovací rychlosti

## 1.8 Síťová velikost částice

Pomocí síťové analýzy zjišťujeme zrnitost hrubších práškových materiálů. Jedná se o nejjednodušší a také nejrozšířenější metodu. Zrnitost vyjadřuje interval velikosti částic ve frakci, které prošly sítím s oky velikosti  $D_{s,i-1}$  a byly zadrženy sítím s oky velikosti  $D_{s,i}$ . Vyjadřuje se zlomkem  $D_{s,i-1}/D_{s,i}$ , tedy zrnitost 2/1 vyjadřuje frakci zrn, které prošly sítím s oky 2mm a byly zadrženy sítím s oky 1mm. Princip síťové analýzy je zobrazen na Obrázek P1.4 Síťová analýza.



Obrázek P1.4 Síťová analýza (2)

Frakce a výjimečně i celé soubory dle síťové analýzy dělíme na monodisperzní a polydisperzní. Pro monodisperzní frakce platí vztah P1.8-1.

$$\frac{D_{s,i-1}}{D_{s,i}} \leq 2 \quad (P1.8-1)$$

Pro polydisperzní frakce platí vztah P1.8-2.

$$\frac{D_{s,i-1}}{D_{s,i}} \geq 2 \quad (P1.8-2)$$

Střední velikost částic ve frakcích vypočítáme aritmetickým, nebo geometrickým průměrem z velikosti ok sít. Pro střední velikost částic v monodisperzních frakcích a posledních frakcí síťové analýzy, kde  $D_{s,i} = 0$ , platí vztah P1.8-3.

$$D_{s,i} = \frac{D_{s,i-1} + D_{s,i}}{2} \quad (P1.8-3)$$

Pro střední velikost částic v polydisperzních frakcích platí vztah P1.8-4.

$$D_{s,i} = \sqrt{D_{s,i-1} \cdot D_{s,i}} \quad (P1.8-4)$$

## 1.9 Frakční složení polydisperzních materiálů

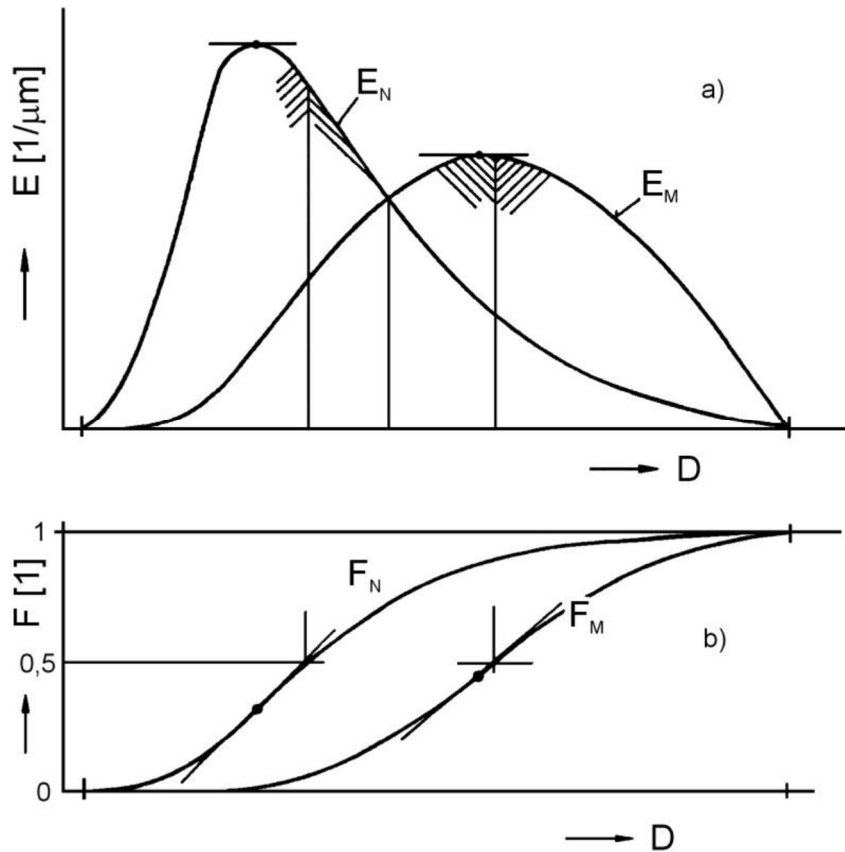
U polydisperzním materiálů, tedy materiálů obsahující částice různých velikostí, je třeba uvádět frakční (granulometrické) složení směsi. Granulometrické složení lze charakterizovat pomocí distribučních funkcí a to buď diferenciální  $E(D)$ , nebo funkcí integrální. Diferenciální funkce vyjadřuje četnost výskytu částic daného průměru ve směsi. Integrální funkce udává podíl částic o průměru menším, než  $D$ . Mezi funkcemi platí vztahy P1.9-1 a 2.

$$E = \frac{dF}{dD} \quad (P1.9-1)$$

$$F = \int_0^D E dD = \int_{D_{min}}^D E dD \quad (P1.9-2)$$

Ve starší české literatuře bývá graf distribuční diferenciální funkce označen jako křivka četnosti. Graf integrální distribuční funkce naopak jako křivka propadů, ke které bývá uváděna i obrácená, křivka zbytků.

Distribuce se dělí podle způsobu jejich určení, zpravidla to bývá distribuce založená na počtu nebo na hmotnosti. Porovnání obou je na Obrázek P1.5



Obrázek P1.5 Porovnání distribucí částic (2)

Pomocí těchto distribucí lze definovat střední rozměry částic. Střední aritmetický rozměr dle počtu  $D_{N,1}$ , pro který platí rovnice P1.9-3.

$$D_{N,1} = \frac{\sum N_i D_i}{N} = \int_{D_{min}}^{D_{max}} D E_N dD \quad (P1.9-3)$$

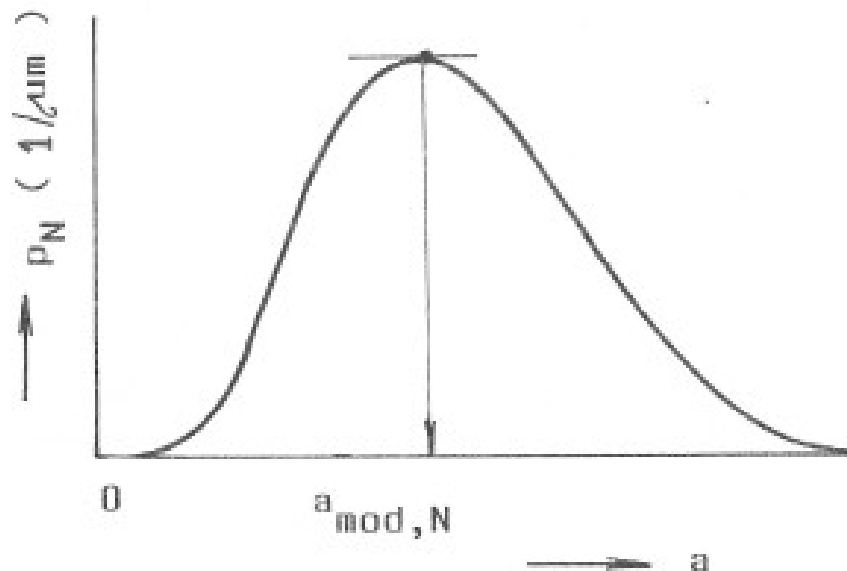
Pro střední objemový rozměr dle počtu  $D_{N,3}$  platí rovnice P1.9-4.

$$D_{N,3}^3 = \frac{\sum N_i D_i^3}{N} = \int_{D_{min}}^{D_{max}} D^3 E_N dD \quad (P1.9-4)$$

Pro střední objemový rozměr dle hmotnosti  $D_{m,3}$  platí rovnice P1.9-5.

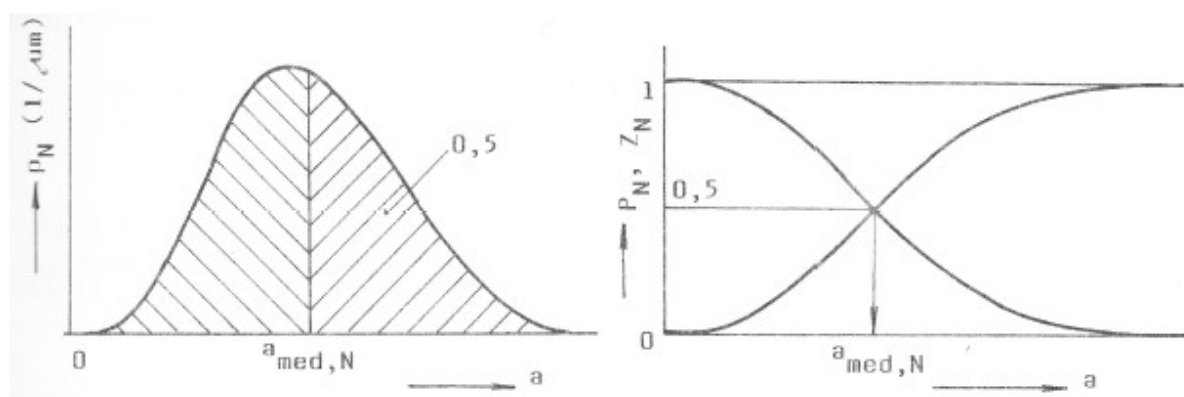
$$D_{m,3}^3 = \frac{\sum m_i D_i^3}{m} = \int_{D_{min}}^{D_{max}} D^3 E_M dD \quad (P1.9-5)$$

Dále se u souboru určuje modus – velikost částice, která se vyskytuje s největší četností. Modus odpovídá vrcholu křivky četnosti. Pokud má křivka více vrcholů, nazýváme rozložení vícemodální. Modus souboru je naznačen na Obrázek P1.6.



Obrázek P1.6 Modus souboru částic (1)

Nutné je uvést také medián souboru – velikost částice, která pólí soubor, tedy 50% počtu částic je větších a 50% je menších. Pro medián platí  $F = 0,5$  a analogicky, že se v tomto bodě protíná křivka propadů a zbytků. Medián souboru je naznačen na.



Obrázek P1.7 Medián souboru částic (1)

## 1.10 Analytické vyjádření křivek zrnitosti

K popisu diferenciálních a integrálních křivek se používají dvouparametrové aproximační funkce. K jejich stanovení se využívá matematické statistiky. Nejčastěji se užívají, normální rozdělení, logaritmicke-normální rozdělení a rozdělení RRSB.

## 1.11 Normální rozdělení velikosti částic

Normální rozdělení částic vychází z Gaussova vztahu 1.11-1.

$$E(D) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(D - \overline{D}_{N,1})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right] \quad (1.11-1)$$

Tento vztah obsahuje střední aritmetický průměr podle počtu  $D_{N,1}$  a směrodatnou odchylku  $\sigma$ , pro kterou platí vztah P1.11-2.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (D - \overline{D}_{N,1})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (D - \overline{D}_{N,1})^2 N_i}{N}} \quad (P1.11-2)$$

Pro normální rozdělení velikosti částic lze tedy zakreslit Gaussovu křivku. V praxi se toto rozdělení vyskytuje velmi zřídka, proto se takřka nevyužívá. Další nevýhodnou vlastností Gaussovy křivky jsou její meze, které limitně směřují k nekonečnu, oblast užití se musí omezit směrodatnými odchylkami.

## 1.12 Logaritmicko-normální rozdělení velikosti částic

V praxi se u většiny souborů vyskytuje převaha částic větších rozměrů a distribuční křivka je nesymetrická. Logaritmicko-normální rozdělení je založené na normálním rozdělení, s tím rozdílem, že jsou parametry nahrazeny jejich přirozenými logaritmy. Vztah P1.11-2 tedy přejde ve vztah P1.12-1.

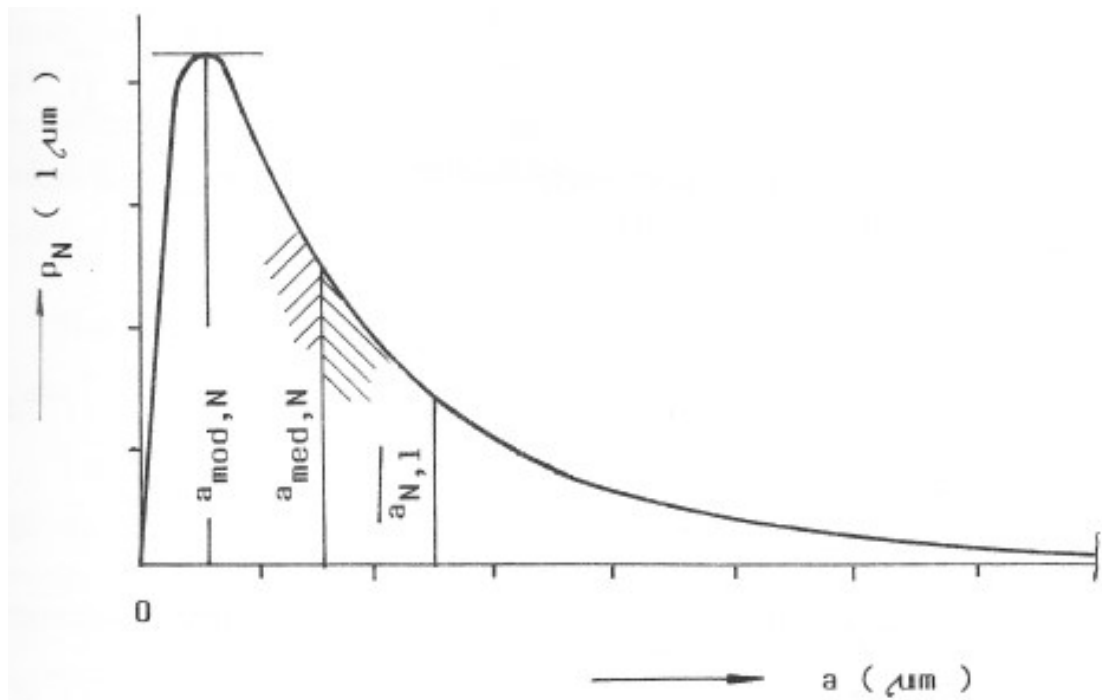
$$\frac{\ln E(D)}{d(\ln D)} = \frac{1}{\ln \sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln D - \overline{\ln D}_{N,1})^2}{2 \cdot \ln^2 \sigma_g}\right] \quad (P1.12-1)$$

Směrodatná odchylka přešla v tomto vztahu na směrodatnou odchylku geometrickou, pro její logaritmus platí analogicky vztah P1.12-2.

$$\ln \sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\ln D - \overline{\ln D}_{N,1})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\ln D - \overline{\ln D}_{N,1})^2 N_i}{N}} \quad (P1.12-2)$$

Průběh logaritmicko-normálního rozdělení je znázorněn na Obrázek P1.8.





Obrázek P1.8 Průběh logaritmicko-normálního rozdělení souboru částic (1)

### 1.13 Rozdělení velikosti částic dle Rosina, Rammlera, Sperlinga a Benneta

Tento vztah byl odvozen pro vyjádření zrnitosti prachů vzniklých mechanickými operacemi, používá se převážně pro rozdělení velikosti částic dle hmotnosti. Pro rozložení platí jednoduchý vztah P1.13-1.

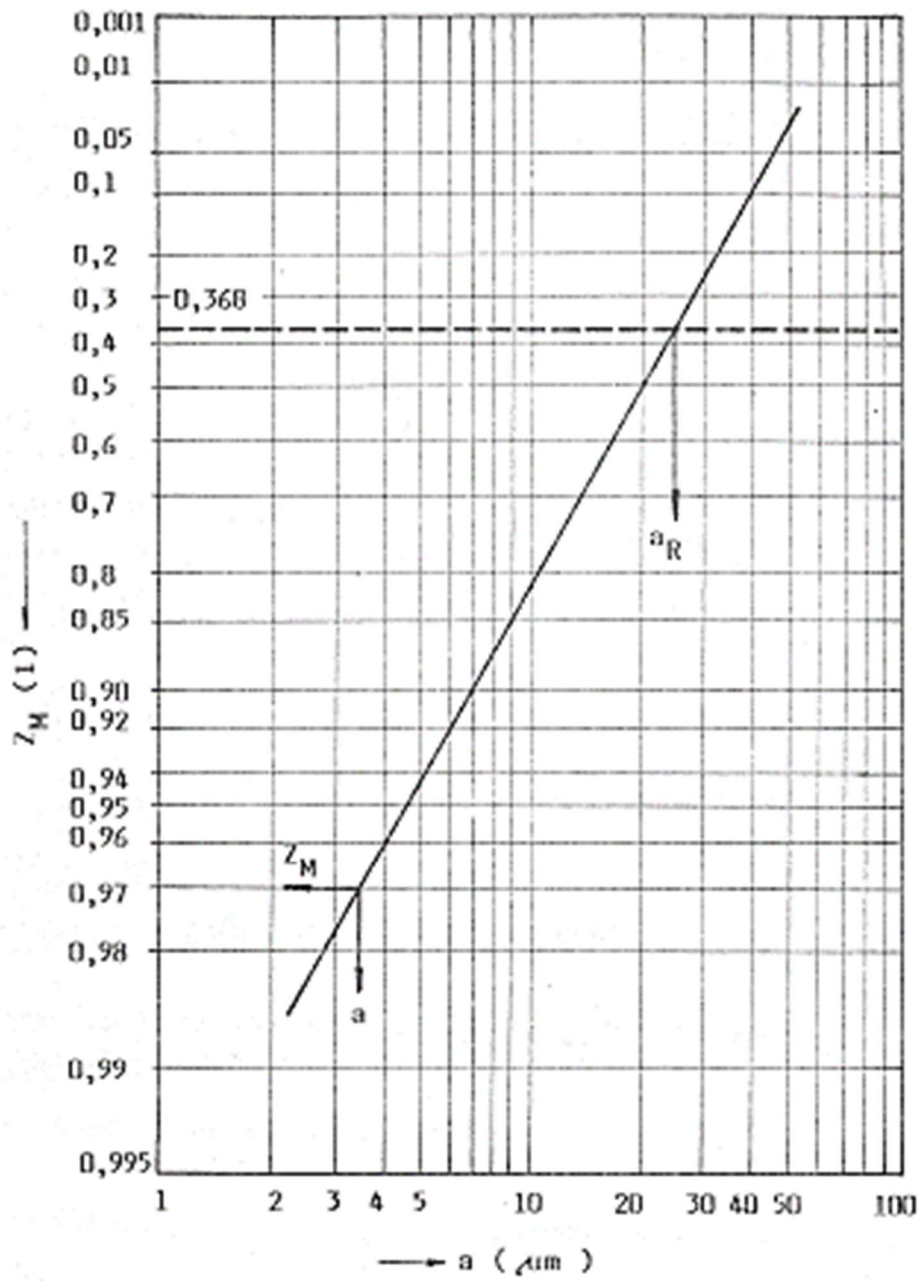
$$1 - F = \exp \left[ - \left( \frac{D}{\bar{D}} \right)^n \right] \quad (P1.13-1)$$

Vztah P1.13-1 obsahuje střední rozměr  $\bar{D}$  a index polydisperzity  $n$ . Tento vztah lze linearizovat do vztahu P1.13-2.

$$\ln(-\ln(1 - F)) = n \ln D - n \ln \bar{D} \quad (P1.13-2)$$

Odtud vyplývá

$$1 - F = \frac{1}{e} = 0,368 \rightarrow F = 0,632 \quad (P1.13-3)$$



Obrázek P1.9 Průběh rozdělení velikosti souboru částic dle RRSB (1)

## Seznam obrázků

Obrázek P1.1 Určení Ferretova průměru (1) .....	1
Obrázek P1.2 Určení Martinova průměru (1).....	1
Obrázek P1.3 Hodnoty součinitele $\kappa$ (2) .....	2
Obrázek P1.4 Sítová analýza (2).....	4
Obrázek P1.5 Porovnání distribucí částic (2) .....	6
Obrázek P1.6 Modus souboru částic (1).....	7
Obrázek P1.7 Medián souboru částic (1).....	7
Obrázek P1.8 Průběh logaritmicko-normálního rozdělení souboru částic (1).....	9
Obrázek P1.9 Průběh rozdělení velikosti souboru částic dle RRSB (1).....	10

## Seznam tabulek

Tabulka P1.1 Hraniční hodnoty poměru $cD/Re$ .....	3
Tabulka P1.2 Vztahy pro výpočet usazovací rychlosti.....	4

## Bibliografie

1. Hemerka, Jiří. *Odlučování tuhých částic*. Praha : ČVUT, 1994.
2. Prof. Ing. Tomáš Jirout, Ph.D. *Distribuce velikosti částic*. [Online] 2013. [Citace: 19. listopad 2016.] [https://moodle.fs.cvut.cz/pluginfile.php/1851/mod\\_resource/content/4/pro1-2013-jirout-velikost-cz.pdf](https://moodle.fs.cvut.cz/pluginfile.php/1851/mod_resource/content/4/pro1-2013-jirout-velikost-cz.pdf).