

Diplomová práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická

Návrh a implementácia Kalmanovho filtru pre spracovanie radarových dát

Design and Implementation of Kalman Filter for Radar
Data Processing

Bc. Adam Beňo

Kybernetika a Robotika - Letecké a kosmické systémy

Vedúci práce: prof. Ing. Vladimír Havlena, CSc.



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Adam Beňo**

Studijní program: **Kybernetika a robotika**
Obor: **Letecké a kosmické systémy**

Název tématu česky: **Návrh a implementace Kalmanova filtru pro zpracování radarových dat**

Název tématu anglicky: **Design and Implementation of Kalman Filter for Radar Data Processing**

Pokyny pro vypracování:

Popište stavové modely letu pro pohyb

- s konstantní rychlostí,
- s konstantním zrychlením,
- s konstantním ryvem (derivací zrychlení)

a odvodte detailně jejich stochastické vlastnosti (kovarianční matice šumu procesu a šumu měření). Vytvořte simulovaná radarová data (Matlab/Python) pro různé stochastické vlastnosti modelů.

Odvodte algoritmy filtrace a predikce stavu na základě Kalmanova filtru pro nekorelované a korelované šумы, implementujte algoritmy (Matlab/Python) a analyzujte jejich činnost pro různé vlastnosti stochastické části modelů.

Odvodte algoritmus detekce přechodu mezi jednotlivými letovými režimy reprezentované výše uvedenými stavovými modely.

Odvodte algoritmus informační fúze a filtrace stavu na základě dat z n různých radarů s rozdílnými stochastickými vlastnostmi. Implementujte algoritmus (Matlab/Python) a analyzujte jejich činnost pro různé vlastnosti stochastické části modelů.

Seznam odborné literatury:

- [1] F. L. Lewis, L. Xie and D. Popa: *Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory*. CRC Press, 2005
- [2] D. Simon: *Optimal state estimation*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2006
- [3] B. P. Gibbs: *Advanced Kalman filtering, least squares and modeling: a practical handbook*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2011

Vedoucí diplomové práce: prof. Ing. Vladimír Havlena, CSc. (K 13135)

Datum zadání diplomové práce: 29. září 2016

Platnost zadání do¹: 28. února 2018



Doc. Ing. Jan Holub, Ph.D.
vedoucí katedry



Prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

Podakovanie / Prehlásenie

Touto formou by som chcel podakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce, ktorým je prof. Ing. Vladimír Havlena, CSc., za mnohé hlboké teoretické vedomosti, rady a čas, ktoré mi poskytol pri konzultáciách. Ďalej by som chcel podakovať zamestnancom firmy ALES a. s., za bohaté praktické skúsenosti a pripomienky, a taktiež za poskytnutie dát a vytvorenie príjemného pracovného prostredia. V neposlednom rade by som chcel podakovať svojim rodičom, ktorí ma podporovali ako psychicky, tak aj materiálne počas môjho štúdia.

Prehlasujem, že som predloženú prácu vypracoval samostatne a že som uviedol všetky použité informačné zdroje v súlade s Metodickým pokynom o dodržiavaní etických princípov pri príprave vysokoškolských záverečných prác.

V Prahe dňa 26. 5. 2017

.....

Abstrakt / Abstract

Táto práca sa zaoberá návrhom a implementáciou Kalmanovho filtru pre spracovanie radarových dát. V práci ukážeme odvodenie rôznych modelov letu s rozličnými modelmi merania pre korelované a nekorelované šumy. Ďalej ukážeme fúziu dát z viacerých radarov a predvedieme ukážku spracovania reálnych dát.

This diploma thesis describes design and implementation of Kalman Filter for radar data processing. In the thesis, we will show the derivation of the different flight models for various measurement models for correlated and uncorrelated noise. Furthermore, we will show a data-fusion for data from multiple radars, and we will demonstrate the processing of real radar data.

Obsah /

1 Úvod	1
1.1 Popis problému	1
1.2 Popis riešenia v jednotlivých kapitolách	1
2 Popis radarov a radarových dát ...	3
2.1 Všeobecné princípy rádiolokátoru	3
2.1.1 Aktívne radary - primárne.....	3
2.1.2 Aktívne radary - sekundárne	4
2.1.3 Pasívne radary	5
2.2 Teória výšok.....	6
2.3 Koordinačné sústavy.....	7
2.3.1 Prevod z lokálnej polárnej sústavy do lokálnej sférickej sústavy.....	7
2.3.2 Prevod z lokálnej sférickej do lokálnej karteziánskej sústavy	9
2.3.3 Prevod z lokálnej karteziánskej do globálnej geocentrickej karteziánskej sústavy	9
2.3.4 Prevod z globálnej geocentrickej karteziánskej sústavy(ECEF) do svetového geodetického systému(WGS)	10
3 Stavový model pohybu lietadla .	12
3.1 Fyzikálny popis pohybu objektu	12
3.2 Zavedenie stavového popisu ...	13
3.2.1 Diskretizácia popisu	14
3.3 Vybrané stavové modely	15
3.3.1 Model letu s nekonštantným zrýchlením	15
3.3.2 Model letu s konštantným zrýchlením	18
3.3.3 Model letu s konštantnou rýchlosťou	19
3.3.4 Porovnanie modelov	20
4 Model merania	22
4.1 Stochastické systémy	22
4.1.1 Základné pojmy	22
4.1.2 Lineárny stochastický systém	23
4.2 Odvodenie kovariančných matíc	24
4.2.1 Kovariačná matica šumu procesu	24
4.2.2 Kovariančná matica šumu merania	25
4.3 Vybrané modely merania	26
4.3.1 Meranie polohy modelu letu s nekonštantným zrýchlením	26
4.3.2 Meranie polohy modelu letu s konštantným zrýchlením.....	27
4.3.3 Meranie polohy modelu letu s konštantnou rýchlosťou	29
5 Kalmanov filter	31
5.1 Popis algoritmu Kalmanovho filtru.....	31
5.1.1 Formulácia problému	31
5.1.2 Kalmanov filter pre nekorelované šумы	32
5.2 Ukážky filtrácií vybraných modelov	34
5.2.1 Filtrácia modelu letu s konštantným zrýchlením	35
5.2.2 Filtrácia modelu letu s konštantnou rýchlosťou ..	37
6 Simulácia radarových dát	39
6.1 Odvodenie simulácie	39
6.2 Simulácia šumu meraného bodu vo vzdialenosti	40
6.3 Simulácia šumu meraného bodu v azimute	41
6.4 Určenie kovariančnej elipsy pre meranie v kartéziánskych súradniciach.	42
6.5 Určenie kovariančnej elipsy pre meranie v polárnych súradniciach	44
6.5.1 Ukážky nastavení rôznych šumových parametrov	47

6.5.2 Simulácia šumu merania modelu letu	49	A.2 Modul 2 - generátor dát modelu merania	82
7 Dátová fúzia	51	A.3 Modul 3 - ML data procesor ..	83
7.1 Dátová fúzia na princípe ML odhadu	51	A.4 Modul 4 - KF data procesor...	84
7.1.1 ML odhad pre šum s Gaussovským pravdepodobnostným rozdelením	51	A.5 Modul 6 - ML odhad dát z meraní v polárnych súradniciach	85
7.2 Ukážka ML odhadu pre meranie v polárnych súradniciach	53	A.6 Modul 5 - ML odhad dát pre šumy v karteziánskych súradniciach	86
7.3 Ukážka ML odhadu pre model merania letu.....	55	A.7 Modul 7 - Spracovanie reálnych dát	87
7.3.1 ML odhad radarov R1 a R2	57	B Asterix správa	88
7.3.2 ML odhad radarov R2 a R3	59		
7.3.3 ML odhad radarov R1 a R3	60		
7.3.4 ML odhad radarov R1, R2 a R3	62		
7.4 Ukážka spracovania Kalmanovým filtrom	64		
7.5 Kombinácia ML odhadu a Kalmanovho filtra.....	66		
7.5.1 ML odhad ako meranie v Kalmanovom filtri	66		
7.5.2 ML odhad odhadov stavov z Kalmanovho filtra	69		
8 Práca s reálnymi radarovými dátami	72		
8.1 Ukážka a spracovanie reálnych dát	73		
8.1.1 Rýchlo manévrujúci cieľ .	75		
8.1.2 Pretínanie rôznych kovariančných priestorov ...	76		
8.1.3 Ukážka vzorkovania meraného letu	77		
9 Záver	78		
Literatúra	79		
A Popis softwareu	81		
A.1 Modul 1 - generátor dát modelu letu	81		

Tabuľky / Obrázky

2.1. Zoznam módov sekundárneho radaru	5	2.1. Primárny radar	3
2.2. Hodnoty parametrov referenčného elipsoidu WGS-84.....	8	2.2. Meranie azimutu	4
3.1. Hodnoty parametrov modelu letu s nekonštantným zrýchlením.	17	2.3. Sekundárny radar	5
3.2. Porovnanie modelov.....	21	2.4. Pasívny radar	6
5.1. Hodnoty počiatočných podmienok modelu letu s nekonštantným zrýchlením.	34	2.5. Chyba polohy na základe výšky ..	7
6.1. Hodnoty parametrov modelu letu s nekonštantným zrýchlením.	40	2.6. Barometrická výška	8
6.2. Hodnoty parametrov modelu letu s nekonštantným zrýchlením.	41	2.7. Geografická a geocentrická zemepisná šírka	10
6.3. Hodnoty parametrov modelu letu s nekonštantným zrýchlením.	43	3.1. Let - rýchlosť, zrýchlenie a ryv	16
6.4.	48	3.2. Vývoj rýchlosti, zrýchlenia a ryvu v čase	17
6.5.	48	3.3. Let - rýchlosť a zrýchlenie	18
6.6. Hodnoty parametrov modelu letu s nekonštantným zrýchlením.	49	3.4. Vývoj rýchlosti a zrýchlenia v čase	19
6.7. Hodnoty parametrov modelu ..	50	3.5. Let - rýchlosť	20
7.1. Hodnoty parametrov modelu merania pre tri simulované radary.....	55	3.6. Vývoj rýchlosti v čase.....	20
7.2. Hodnoty parametrov šumu procesu a šumu merania.	64	3.7. Porovnanie modelov letu.....	21
8.1. Hodnoty parametrov reálnych radarov	73	7.2.	55
		7.3. Dáta s korelovaným šumom z radaru R1.....	56
		7.4. Dáta s korelovaným šumom z radaru R2.....	56
		7.5. Dáta s korelovaným šumom z radaru R3.....	57
		7.6. Dáta s korelovaným šumom z radarov R1 a R2	57
		7.7. ML odhad dát z radarov R1 a R2.....	58
		7.8. Vyobrazenie kovariančných priestorov okolo ML odhadu radarov R1 a R2	58
		7.9. Dáta s korelovaným šumom z radarov R2 a R3	59
		7.10. ML odhad dát z radarov R2 a R3.....	59
		7.11. Vyobrazenie kovariančných priestorov okolo ML odhadu radarov R2 a R3	60
		7.12. Dáta s korelovaným šumom z radarov R1 a R3	60
		7.13. ML odhad dát z radarov R1 a R3.....	61
		7.14. Vyobrazenie kovariančných priestorov okolo ML odhadu radarov R1 a R3	61

7.15.	Dáta s korelovaným šumom z radarov R1, R2 a R3	62
7.16.	ML odhad dát z radarov R1,R2 a R3.....	62
7.17.	Vyobrazenie kovariančných priestorov okolo ML odhadu radarov R1,R2 a R3.....	63
7.18.	Ukážka spracovania dát kalmanovým filtrom pre radar R1.....	64
7.19.	Vyobrazenie vývoja kovariančných elíps radaru R1	65
7.20.	Ukážka spracovania dát kalmanovým filtrom pre radar R2.....	65
7.21.	Vyobrazenie vývoja kovariančných elíps radaru R2	65
7.22.	Diagram kombinácie ML odhadu a Kalmanovho filtra	66
7.23.	Výpočet ML odhadu v kroku n	66
7.24.	Krok Kalmanovho filtra	67
7.25.	Kombinácia ML odhadu a Kalmanovho filtra.....	67
7.26.	Rovnaký čas prichádzajúcich meraní	68
7.27.	Diagram kombinácie Kalmanových filtrov a ich následného ML odhadu	69
7.28.	Kombinácia Kalmanových filtrov a ich následného ML odhadu.....	69
7.29.	Kombinácia Kalmanových filtrov a ich následného ML odhadu.....	70
7.30.	70
8.1.	Implementačná schéma pre prípravu reálnych dát	73
8.2.	Ukážka reálnych dát siedmich letov.....	74
8.3.	Rýchlo manévrujúci cieľ - meas	75
8.4.	Rýchlo manévrujúci cieľ - cov .	75
8.5.	Stíhač ukrajina - detail	75
8.6.	Pretínanie rôznych kovariančných priestorov - meas....	76

8.7.	Pretínanie rôznych kovariančných priestorov - cov	76
8.8.	Pretínanie rôznych kovariančných priestorov - detial ...	76
8.9.	Ukážka vorkovania meraného letu - meas.....	77
8.10.	Ukážka vorkovania meraného letu - cov	77
8.11.	Ukážka vorkovania meraného letu - det.....	77

Kapitola 1

Úvod

V súčasnom svete tvorí letecká preprava jednu z kľúčových úloh v modernej doprave. Historický vývoj, od prvého riadeného letu strojom ťažším ako vzduch bratov Orvillea a Wilbura Wrightovcov, cez rozvoj vojenských lietadiel v 2. svetovej vojne a následnom rozmachu civilnej leteckej dopravy, priniesol jej neustále sa zvyšujúci objem, potrebu starať sa o riadenie, detekciu a bezpečnosť letovej prevádzky. Medzi inými, boli pre tieto účely na počiatku 20. storočia vyvinuté prvé rádiolokátory. Dnešné moderné radarové systémy produkujú rozsiahle množstvá najrôznejších dát. Ako príklad môžeme uviesť, že okrem základných informácií o azimute a diaľke, prinášajú moderné systémy údaje o prepočítanej tlakovej výške či identifikátore lietadla. Systémy, ktoré spracovávajú tieto dáta, preto vyžadujú sofistikované spôsoby triedenia, processingu a ukladania informácií. Práve o jednom z možných spôsobov spracovania dát pojednáva táto práca.

1.1 Popis problému

Rádiolokátor, nazývaný tiež radar, si môžeme zjednodušene predstaviť ako zariadenie s anténou, vysielajúce elektromagnetického žiarenie. Na základe odrazu tohoto žiarenia od lietajúceho objektu, dokáže radar určiť šikmú vzdialenosť daného predmetu od miesta radaru a tiež azimut na ktorom sa tento objekt nachádza. Tieto informácie potom putujú do riadiaceho centra, ďalej na spracovanie.

Tak ako každé meracie zariadenie aj jednotlivé radary vykazujú rôznu presnosť. Jej popis môžeme odvodiť na základe technologických parametrov radaru a tiež na základe fyzikálneho princípu merania v jednotlivých radarových súradniciach. V tejto práci sa budeme zaoberať spôsobom ako získať presnejší odhad merania na základe spájania meraní s rôznymi prenosťami z rozličných rádiolokátorov.

Autor tejto práce by chcel tiež v úvode informovať, že po konzultácii a následnej dohode so svojim vedúcim diplomovej práce, bol bod zadania týkajúci sa algoritmu detekcie prechodu medzi letovými režimami nahradený detailnou analýzou modelu merania pre radarové dáta, popísanou v kapitole 6.

1.2 Popis riešenia v jednotlivých kapitolách

Jedným z moderných prístupov k spracovaniu dát v navigačnej technike, je použitie Kalmanovho filtru, ktorým sa zaoberá táto práca. Kalmanov filter, ktorý realizuje lineárny kvadratický odhad, je algoritmus, ktorý na základe výberu vhodného modelu procesu a modelu merania, zatažených šumom, dokáže odhadnúť zvolené parametre systému.

V 2. kapitole tejto práce uvedieme základný popis radarov a ukážeme rôzne typy výšok používaných v leteckej doprave. Ďalej uvedieme v akých koordinačných sústavách radary pracujú, spôsob prepočtu jednotlivých lokálnych súradníc obohatených o výšku

a ich transformácie do dvoch globalných súradnicových systémov. Taktiež uvedieme príklad protokolu, do ktorého rádiolokátor kóduje získané informácie a odosiela ich. V kapitole číslo tri ukážeme modelovanie pohybu letu, uvedieme odvodenie troch stavových modelov, a to: model pohybu s konštantnou rýchlosťou, s konštantným a nekonštantným zrýchlením. Štvrtá kapitola pojednáva o modeloch merania, ktoré sú tvorené analogicky k modelom z predchádzajúcej kapitoly. V tejto kapitole sú nasimulované zobrazené dáta s rôznymi stochastickými vlastnosťami pre nekorelované šumy. Piata kapitola je venovaná samotnému procesu odvodenia Kalmanovskej filtrácie, ukážka filtrácii pre rôzne hodnoty nastavenia parametrov šumu procesu a šumu merania. V šiestej kapitole ukážeme proces nasimulovania dát z rôznych rádiolokátorových pozícií a rôznych pozícií cieľu, čím zavedieme do systému korelovanosť šumu dát. Siedma kapitola pojednáva o procese dátovej fúzie informácií z rozličných radarov a možné alternatívy dataprocesingu. V kapitole osem ukážeme spojenie kalmanovho filtru a dátovej fúzie na reálnych dátach.

Kapitola 2

Popis radarov a radarových dát

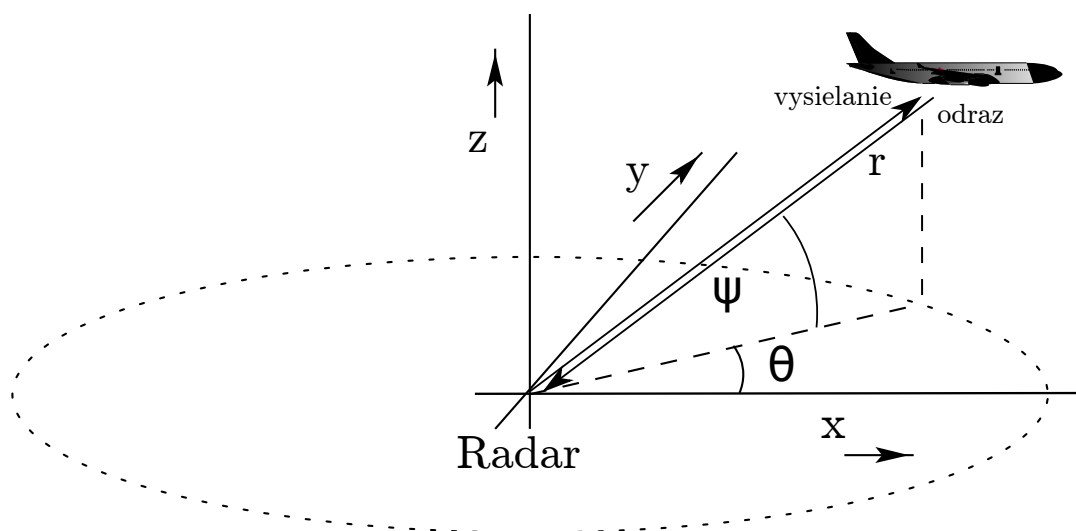
2.1 Všeobecné princípy rádiolokátoru

Rádiolokátor alebo radar, z anglického výrazu "RADio DETECTION AND RANGING"[1], je zariadenie, ako už z názvu vyplýva, ktoré slúži na rádiové určovanie polohy cieľa¹. Ako už bolo v úvode spomenuté, hlavný princíp rádiolokátoru spočíva v práci s elektromagnetickým vlnením, ktoré sa šíri priestorom a ktoré je vyžarované a zachytávané rádiolokačnými anténami. V tejto podkapitole uvedieme základné delenie a popis radarových systémov tak, ako ich najdeme v[1]. Typy rádiolokátorov teda môžu vyzerat nasledovne:

- aktívne radary,
 - primárne - PSR - Primary Surveillance Radar ,
 - sekundárne - SSR - Secondary Surveillance Radar,
- pasívne radary -PSS - Passive Surveillance System,
- dopplerovské systémy - MTI/MTD - Moving Target Indication/Detection.

2.1.1 Aktívne radary - primárne

Primárny radar, patriaci medzi aktívne radary, vysiela sám elektromagnetickú vlnu, ktorá sa šíri od antény radaru do okolitého priestoru, odráža sa od predmetov, tak ako to schematicky môžeme vidieť na obr.2.1,



Obrázok 2.1. Lokálna karteziánska a sférická sústava radaru.

a odrazenú energiu radar prijíma a vyhodnocuje.

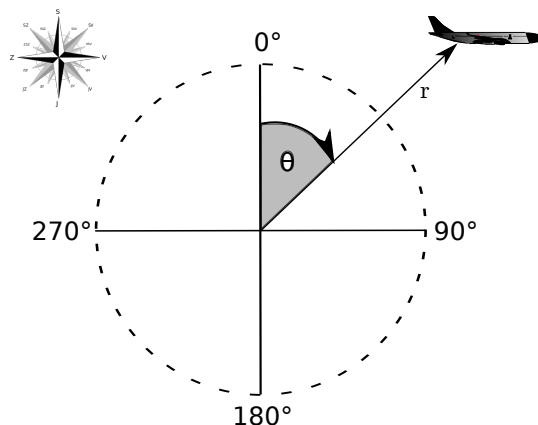
¹ V anglickej literatúre je pre cieľ radaroveho merania zaužívaný termín *target*.

Časovým rozdielom medzi vyslaným a prijatým signálom sa určí vzdialenosť odrazeného predmetu ako

$$r = \frac{t_d c_0}{2},$$

kde r je šikmá vzdialenosť od miesta radaru k cieľu, t_d je čas, za ktorý prejde signál k cieľu a späť a c_0 je rýchlosť svetla rovná približne $3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$. Pomocou smerovej vlastnosti antény sa určí uhol, z ktorého prichádza odrazený signál od cieľa. Problémom pri impulzových radaroch a meraní vzdialenosti je, ako jednoznačne určiť vzdialenosť predmetu, ak cieľ vykazuje silný odraz. Keďže v tejto práci sa viac budeme zaoberať spracovaním už nameraných dát ako takých, na podrobnejší popis danej problematiky odkážeme na druhú kapitolu v [1], prípadne [2].

Určenie azimutu k cieľu sa určuje v závislosti na smerovosti antény. Smerovosť - directivita¹, nazývana aj smerový zisk, je schopnosť antény koncentrovať rádiové vlny do určitého partikulárneho smeru. Uhol, pod ktorým je orientovaná anténa v čase prijatia odrazu signálu, radar dokáže určiť ako azimut alebo eleváciu cieľa. Presnosť uhlového merania je určená smerovosťou antény, ktorá je funkciou rozmerov antény. Geografický azimut cieľa, vzhľadom ku geografickému severu, je uhol, ktorý zvierajú priamka orientovaná na sever a priamka orientovaná od radaru k meranému cieľu, tak ako to naznačuje obr.2.2.



Obrázok 2.2. Meranie azimutu a diaľky.

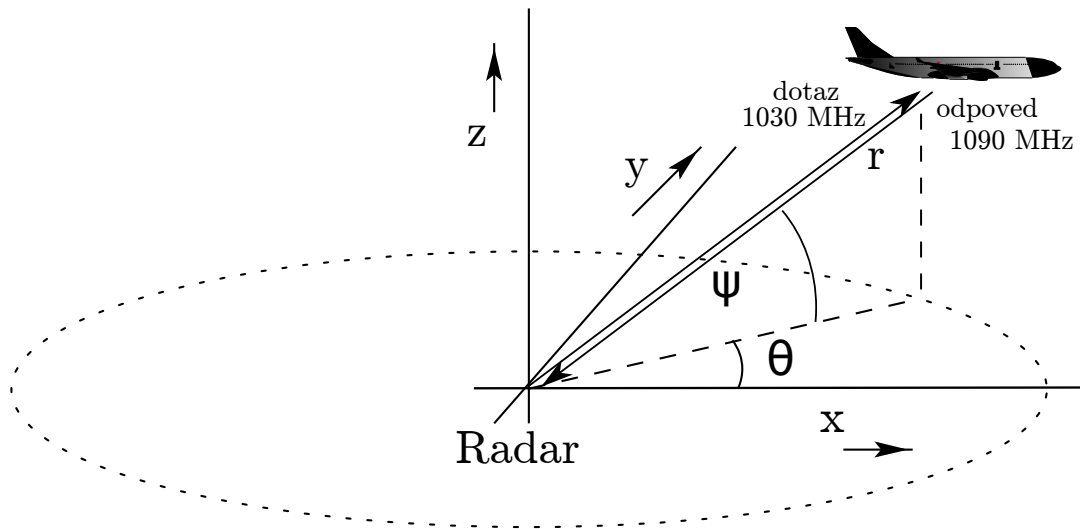
2.1.2 Aktívne radary - sekundárne

Sekundárne rádiolokátory, podobne ako primárne, patria medzi aktívne radary a taktiež generujú a vysielajú elektromagnetickú vlnu. Na rozdiel od primárnych, však vyhodnocovaným signálom nieje fyzikálny odraz pôvodne vyslaného signálu, ale signál z tzv. odpovedača². Ten zachytí signál, vyslaný radarom - dotazovačom³ - a s definovaným oneskorením vyšle dohodnutú odpoveď, spravidla na inej frekvencii, ktorá je potom prijatá dotazovačom a vyhodnotená.

¹ Z anglického *directivity*.

² V angličtine *transponder*.

³ V angličtine *interrogator*.



Obrázok 2.3. Dotaz a následná odpoveď u sekundárneho radaru.

Vzdialenosť odpovedača sa určuje z oneskorenia prijatej odpovede za vyslaným dotazom. Smer objektu je možné vyhodnotiť, podobne ako u primárnych rádiolokátorov, pomocou smerových vlastností antény. Okrem toho môžu byť do dotazu i odpovede zakódované ďalšie informácie z nezávislého zdroja.

Norma *ICAO annex 10* definuje niekoľko formátov dotazov. Jednotlivé formáty dotazov odpovedajú tzv. módom a odpovedač na ne odpovedá správou s dátami požadovanými príslušným módom. Prehľad jednotlivých módom k SSR radarom ukazuje tabuľka 2.1.

mód	vysvetlenie
1	IFF
2	IFF, individuálne kódy
4	IFF, kryptomód
3/A	identifikácia - číslo letu
B	nevyužíva sa (zámeny s A a C)
C	barometrická výška letu
D	nevyužíva sa (zámeny s A a C)
S	adresný mód s prenosom vyžiadaných dát

Tabuľka 2.1. Zoznam módom sekundárneho radaru.

IFF - Identification friend or foe - je elektronický systém na báze rádiových vln, ktorý sa používa na identifikáciu lietadla. Spravidla je tento systém využívaný pre vojenské účely. Módy definujúce vojenské normy sú označované číslami, SSR módy sú civilné a označujú sa písmenom.

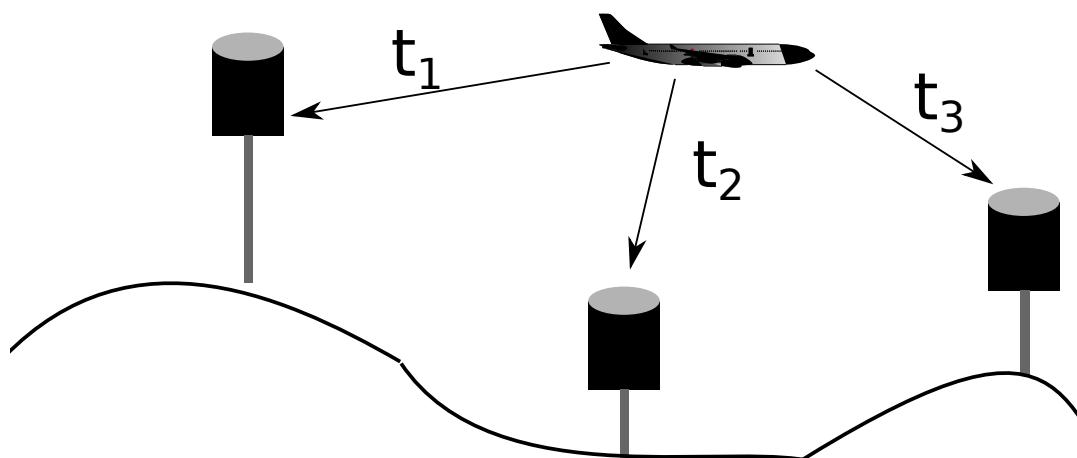
■ 2.1.3 Pasívne radary

Pasívne radary, oproti aktívnym, nevysielaajú vlastnú elektromagnetickú vlnu ale využívajú signály, ktoré sú generované inými objektami. Zdroje týchto vln môžu byť umiestnené priamo na sledovaných objektoch (rádiostanice, mobilné telefóny, vlastný radar...) alebo môžu byť signály generované inými externými zdrojmi, ktoré sa od sledovaného objektu odrážajú (napríklad televízny, rozhlasový alebo GPS signál).

Pasívne radary môžu k určeniu polohy objektu využívať metódu

- časomernú - TDOA - Time Difference of Arrival,
- smeromernú,
- dopplerovskú,

prípadne ich kombinácie. Systémy, využívajúce časomernú metódu sa skladajú z niekoľkých prijímačov, rozmiestnených v dostatočnej vzdialenosti od seba. Každý prijímač meria okamžik príchodu signálu, odrazeného alebo vyslaného zo sledovaného objektu a z rozdielu týchto časov príchodu je možné vypočítať polohu objektu. Tento princíp ukazuje nasledujúci schematický obrázok 2.4.



Obrázok 2.4. Prijímacie moduly časomerného pasívneho radaru.

2.2 Teória výšok

Pre správne určenie polohy lietadla v priestore je dôležité poznať jeho výšku. Keďže základná informácia z rádiolokátora je azimut a šikmá diaľka meraného bodu, informáciu o výške je potrebné získať z doplnkového zdroja a zohľadniť ju pri výpočtoch polohových súradníc. Najčastejšiu informáciu o výške pre sekundárne radary predstavuje informácia z dotazu modu C, ktorý bol spomenutý v predchádzajúcej podkapitole. Táto výška predstavuje takzvanú *barometrickú výšku* a je meraná barometrom na palube lietadla. Určujeme ju z rovnice

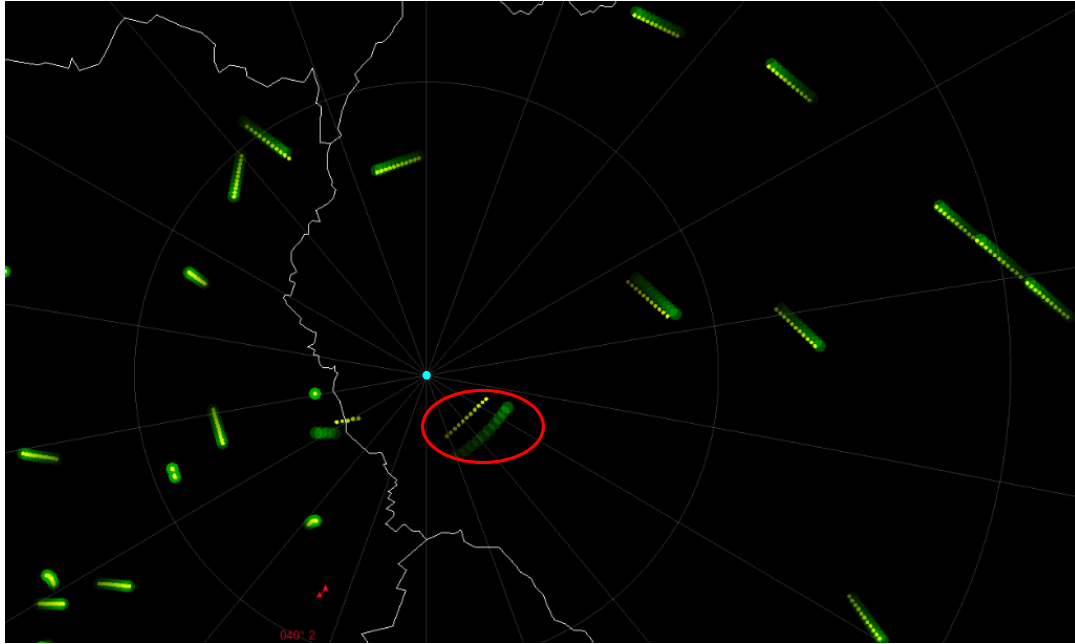
$$H = (18464 + 67t_m) \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right),$$

kde

- H je nadmorská výška lietadla v metroch,
- t_m je stredná teplota masy vzduchu v °C,
- p_0 je tlak vzduchu prepočítaný na hladinu mora v pascaloch,
- p je tlak vzduchu v bode merania v pascaloch.

Nie vždy je však možné túto doplnkovú informáciu získať. Stáva sa to predovšetkým pri vojenských lietadlách, ktoré môžu mať rozkach neposielať niakú informáciu o lietadle. V takomto prípade sa šikmá výška priamo prenáša do stereografickej roviny a s narastajúcou výškou pri radare sa zväčšuje aj chyba priemetu do roviny. Pri ďalekých

cieľoch prejav chyby znižuje. Konkrétnu ilustráciu tejto chyby môžeme vidieť na obrázku nižšie. Pre účely tejto práce, bol do SW, ktorý nemal zavedený prepočet šikmej diaľky do roviny, vzhľadom na barometrickú výšku z modu C, implementovaný tento prepočet zohľadňujúci výšku. Na obrázku nižšie môžeme vidieť ako sa u vyznačeného lietadla približujúceho sa k radaru, zväčšuje rozdiel polohy so započítaním výšky do výpočtu polohy v stereografickej projekcii (žlté body) a bez nej (zelené body). Radar je tyrkysový.



Obrázok 2.5. Ukážka zväčšujúcej sa chyby polohy na základe výšky.

2.3 Koordinačné sústavy

Sekundárne a primárne radary vysielajú dáta v lokálnych koordinačných sústavách. Zobernenný popis vysielania a prevodov týchto dát pre európsky priestor definuje protokol Eurocontrol protokol Asterix, konkrétne ASTERIX Part 5 Category 017 Appendix A. V tejto časti popíšeme konkrétne 4 rôzne transformácie dát z lokálnych do globálnych súradníc. Konkrétne popíšeme tieto transformácie:

- prevod z lokálnej polárnej sústavy s azimutom, vzdialenosťou a tlakovou výškou do lokálnej sférickej sústavy,
- prevod zo sférickej sústavy do lokálnej karteziánskej sústavy,
- prevod z lokálnej karteziánskej do globálnej geocentrickej sústavy -ECEF- na základe modelu WGS84,
- prevod z globálnej geocentrickej sústavy do zemepisných súradníc na základe WGS84.

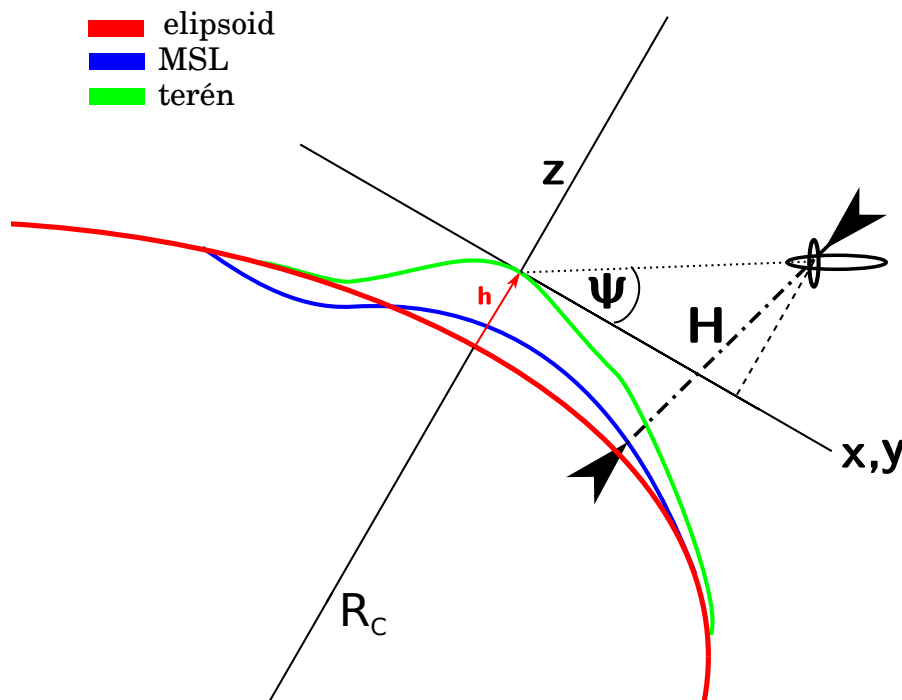
2.3.1 Prevod z lokálnej polárnej sústavy do lokálnej sférickej sústavy

Jedna zo základných informácií ktorú poskytuje sekundárny radar je vysielanie informácií o polohe lietadla v polárnej sústave obohatenej o tlakovú výšku. Zaveďme si preto polárny bod

$$\mathbf{p}_p = \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \\ H \end{bmatrix}$$

kde

- ρ je šikmá diaľka k cieľu,
- θ je azimutálny úhol cieľa vzhľadom k radaru,
- H je výška [m] lietadla nad strednou hladinou mora - MSL¹-, ktorá je získavaná z odpovedača lietadla, vypočítaná na základe barometrického tlaku.



Obrázok 2.6. Barometrická výška.

Pri prevodoch do globálnych koordinačných systémov používajú európske krajiny referenčný elipsoid definovaný štandardom WGS84. Tento elipsoid aproximuje zemský povrch na elipsoid ktorého základné parametre sú:

veličina	značenie	hodnota	jednotka
hlavná poloos	a	6378137.0000000	m
vedľajšia poloos	b	6356752.3142450	m
numerická excentricia	e	0.0818191908426	-

Tabuľka 2.2. Hodnoty parametrov elipsoidu WGS84.

Ďalej definujeme tzv. polomer zakrivenia Zeme R_c^2 , ktorý aproximuje zakrivenie elipsoidu v danom bode \mathbf{P} kružnicou (guľovou plochou) s polomerom krivosti

$$R_c = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2(L))^3}},$$

kde L predstavuje zemepisnú šírku miesta v ktorom chceme daný polomer spočítať.

¹ Z anglického Mean sea level.

² Z anglického Radius of curvature.

Potom pre hodnotu uhlu ψ v sférickej sústave platí:

$$\psi = \arcsin\left(\frac{2R_c(H-h) + H^2 - h^2 - \rho^2}{2\rho(R_c + h)}\right).$$

Týmto teda dostávame zobrazenie

$$(\rho, \theta, H) \rightarrow (\rho, \theta, \psi).$$

■ 2.3.2 Prevod z lokálnej sférickej do lokálnej karteziánskej sústavy

Prevod z lokálnej sférickej do lokálnej karteziánskej sústavy definujeme ako:

$$\begin{aligned}x_L &= \rho \cdot \cos(\psi) \sin(\theta + \Theta), \\y_L &= \rho \cdot \cos(\psi) \cos(\theta + \Theta), \\z_L &= \rho \cdot \sin(\psi),\end{aligned}$$

kde hodnota Θ je azimutálna korekcia nazývaná aj "usevernenie radaru". V tomto prípade je rovina (x,y) tečná rovina k elipsoidu v bode radaru kde y smeruje na sever, os x smeruje v smere radarovej rovnobežky a os "z" je kolmá na rovinu (x,y). Týmto teda dostávame zobrazenie

$$(\rho, \theta, \psi) \rightarrow (x_L, y_L, z_L).$$

■ 2.3.3 Prevod z lokálnej karteziánskej do globálnej geocentrickej karteziánskej sústavy

Pre zjednotenie dát z n radarov v rôznych lokálnych súradniciach je vhodné použiť zjednotené globálne súradnice. Jedným z možných riešení vhodných pre výpočty v Kalmanovom filtri je použiť globálne karteziánske súradnice so stredom v strede Zeme nazývané aj ECEF¹. Na prevod je nutné posunúť stred radarovej sústavy do stredu Zeme pomocou matice translácie a otočenie okolo osí pomocou matice rotácie. Toto môžeme zapísať ako

$$\begin{bmatrix}x_G \\ y_G \\ z_G\end{bmatrix} = \mathbf{S}_R^T \begin{bmatrix}x_L \\ y_L \\ z_L\end{bmatrix} + \mathbf{T}_R$$

kde matica rotácie \mathbf{S}_R je pre daný radar definovaná ako

$$\mathbf{S}_R = \begin{bmatrix}-\sin(G_R) & \cos(G_R) & 0 \\ -\sin(L_R)\cos(G_R) & -\sin(L_R)\sin(G_R) & \cos(L_R) \\ \cos(L_R)\cos(G_R) & \cos(L_R)\sin(G_R) & \sin(L_R)\end{bmatrix}$$

a pre maticu translácie \mathbf{T}_R daného radaru platí

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix}(\eta + h) \cos(L_R) \cos(G_R) \\ (\eta + h) \cos(L_R) \sin(G_R) \\ (\eta(1 - e^2) + h) \sin(L_R)\end{bmatrix}.$$

Ďalej parameter η definujeme ako

$$\eta = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(L_R)}}$$

¹ Z anglického earth-centered, earth-fixed.

a h je výška radaru nad referenčným elipsoidom. Poznamenať tiež, že parametrami L_R^1 a G_R^2 označujeme severnú šírku, respektíve západnú dĺžku daného radaru v súradnicovom systéme WGS 84. Spätná transformácia je potom daná ako

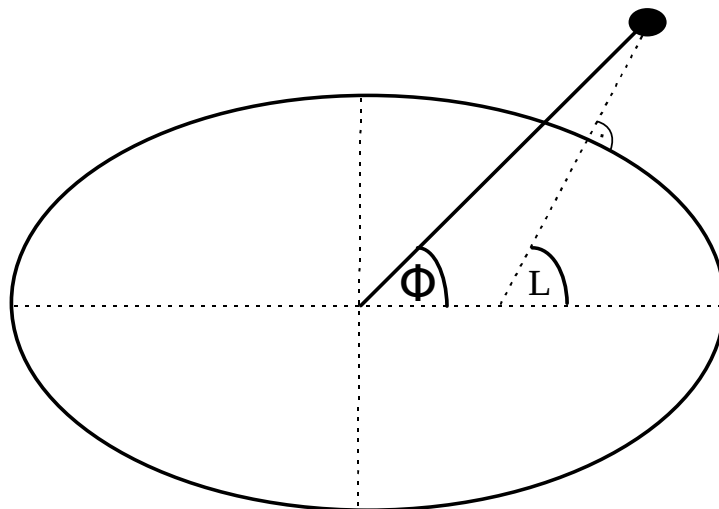
$$\begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix} = \mathbf{S}_R \left[\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} - \mathbf{T}_R \right].$$

Týmto teda dostávame zobrazenie

$$(x_L, y_L, z_L) \rightarrow (x_G, y_G, z_G).$$

■ 2.3.4 Prevod z globálnej geocentrickej karteziánskej sústavy(ECEF) do svetového geodetického systému(WGS)

Poslednou transformáciou ktorou sa budeme v tejto kapitole zaoberať je prevod z globálnej geocentrickej karteziánskej sústavy do zemepisných súradníc na základe svetového geodetického systému WGS84³. Tento geodetický štandard bol vydaný ministerstvom obrany Spojených štátov amerických v roku 1984 a bol prijatý mnohými štátmi a organizáciami sveta (NATO, GPS...).



Obrázok 2.7. Znázornenie rozdielu geografickej a geocentrickej zemepisnej šírky .

Pri prevode budeme používať geocentrickú, značenie Φ , a geografickú(geodetickú), značenie L , zemepisnú šírku. Rozdiel oboch uhlov je znázornený na obrázku 2.2. Pre zemepisnú dĺžku budeme používať značenie G , a pre prevodný vzťah vzhľadom k ECEF môžeme priamo písať

$$G = \arctan\left(\frac{Y_G}{X_G}\right).$$

Na základe trigonometrických vzťahov platí pre geocentrickú zemepisnú šírku

$$\Phi = \arctan\left(\frac{Z_G}{\sqrt{X_G^2 + Y_G^2}}\right). \quad (1)$$

Túto súradnicú môžeme pre bod na zemskom povrchu vyjadriť ako

$$\Phi = \arctan(1 - e^2 \tan(L))$$

¹ Z anglického latitude.

² Z anglického longitude.

³ Z anglického World Geodetic System

eventuálne v geografickej súradnici

$$L = \arctan \left(\frac{1}{1 - e^2} \tan(\Phi) \right).$$

Ak chceme zistiť hodnoty uhlu súradnice nad zemským povrchom, potom sa výška H nad elipsoidom premietne do výpočtu nasledovne

$$L = \arctan \left(\frac{1 + H/\eta}{1 - e^2 + H/\eta} \tan(\Phi) \right).$$

kde parameter η bol definovaný na základe polohy radaru v predchádzajúcom odseku. Nakoniec pre priamy výpočet bez použitia uhlu Φ , s využitím vzťahu (1), dostávame

$$L = \arctan \left(\frac{1 + H/\eta}{1 - e^2 + H/\eta} \frac{Z_G}{\sqrt{X_G^2 + Y_G^2}} \right).$$

Inverzný prevod zo zemepisných súradníc do geocentrických je možné napísať ako

$$\begin{aligned} x_G &= (\eta + H) \cos(L) \cos(G), \\ y_G &= (\eta + H) \cos(L) \sin(G), \\ z_G &= (\eta(1 - e^2) + H) \sin(L), \end{aligned}$$

kde η je tento krát definovaná zemepisnou šírkou bodu (poloha lietadla) ako

$$\eta = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(L)}}.$$

Kapitola 3

Stavový model pohybu lietadla

Pri odvodení a popise Kalmanovho filtru pre spracovanie radarových dát budeme vychádzať zo zavadenia formálneho lineárneho systému. Pre tento systém navrhne tri modely parametrov a dva modely merania. Modely letu popisujú dva najčastejšie pohyby lietadla a to

- let s konštantnou rýchlosťou,
- let s konštantným zrýchlením.

Pre účely simulácie pridáme ešte jeden model pohybu a to:

- let s lineárnou zmenou zrýchlenia teda s konštantným ryvom.

3.1 Fyzikálny popis pohybu objektu

Pohyb telesa s nekonštantným zrýchlením, v 3 rozmernom priestore, za predpokladu existencie tretej nenulovej derivácie, môžeme popísať nasledujúcimi vzťahmi ¹.

$$\begin{aligned}x(t) &\approx x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}\dddot{x}(t_0)(t - t_0)^3 \\y(t) &\approx y(t_0) + \dot{y}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{y}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}\dddot{y}(t_0)(t - t_0)^3 \\z(t) &\approx z(t_0) + \dot{z}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{z}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}\dddot{z}(t_0)(t - t_0)^3 \\ \dot{x}(t) &\approx \dot{x}(t_0) + \ddot{x}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\dddot{x}(t_0)(t - t_0)^2 \\ \dot{y}(t) &\approx \dot{y}(t_0) + \ddot{y}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\dddot{y}(t_0)(t - t_0)^2 \\ \dot{z}(t) &\approx \dot{z}(t_0) + \ddot{z}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\dddot{z}(t_0)(t - t_0)^2\end{aligned}\tag{1}$$
$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &\approx \ddot{x}(t_0) + \dddot{x}(t_0)(t - t_0) \\ \ddot{y}(t) &\approx \ddot{y}(t_0) + \dddot{y}(t_0)(t - t_0) \\ \ddot{z}(t) &\approx \ddot{z}(t_0) + \dddot{z}(t_0)(t - t_0) \\ \dddot{x}(t) &\approx \dddot{x}(t_0) \\ \dddot{y}(t) &\approx \dddot{y}(t_0) \\ \dddot{z}(t) &\approx \dddot{z}(t_0)\end{aligned}$$

¹ Poznamenajme, že pri použití Taylorovho rozvoja sme zanedbali vyššie rády derivácií, preto je namiesto rovná sa použitý znak aproximácie \approx .

3.2 Zavedenie stavového popisu

Popis pohybu v predchádzajúcej kapitole môžeme využiť k zavedeniu stavového popisu MIMO (Multiple-input multiple-output) systému. Tento systém popisuje väzbu derivácie stavovej premennej na vstup alebo stav systému a bude mať tvar

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{p}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

a ďalej rovnica popisujúca vzťah vektoru výstupu systému so stavovým vektorom a vektorom vstupov

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{p}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Ak sa pre účely ukážky odvodenia obmedzíme na jednorozmerný prípad systému, potom stavový vektor \mathbf{p} zavedieme ako jednodimenzionálny vektor derivácií dráhy

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{bmatrix},$$

kde k je stupeň derivácie, ktorú aproximujeme bielm šumom. Poznamenajme, že toto vyjadrenie nie je fyzikálne úplne rigorózne, ale v inžinierskej praxi a literatúre je často používané a teda sme zvolili zhodné pomenovanie.

Väčšina radarových systémov funguje na báze vysielania, prijímania a analýzy signálu. Každé meranie sa teda vykonáva v predom definovanom diskretizovanom čase. Zaoberajme sa teda diskretizáciou predchádzajúceho popisu. Vychádzajme z empirického poznatku[3], že čím vyššiu deriváciu dráhy pozorujeme, tým viac sa táto derivácia blíži k nekorelovanému náhodnému procesu s nulovou strednou hodnotou. Dostatočne vysokú deriváciu teda môžeme aproximovať bielym šumom s konštantnou spektrálnou hustotou C .

Prevedme teraz tento zápis do inej maticovej formy, ktorá bude viac vhodná pre účely odvodenia. Poznamenajme, že v nasledujúcom vzťahu vynechávame vplyv známych deterministických účinkov, ktoré sú vyjadrené v matici riadiacich vstupov $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Namiesto toho predpokladajme, účinok neznámeho vstupu vyjadreného k -tou deriváciou systému a maticu \mathbf{G} , ktorá aplikuje tento efekt na stavový vektor, a teda

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{p}(t) + \mathbf{g}(t)$$

kde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x^{(k)}(t) \quad (2)$$

potom dostávame

$$\begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \\ x^{(k)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(k-2)}(t) \\ x^{(k-1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x^{(k)}(t) \quad (3)$$

Všeobecné riešenie tejto sústavy diferenciálnych rovníc (3) môžeme vyjadriť v tvare (odvodenie môžeme nájsť v [4])

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{p}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t - \tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau \quad (4)$$

kde $\mathbf{\Phi}(t)$ je dana diferenciálnou rovnicou

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{F}\mathbf{\Phi}(t), \quad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I} \quad (5)$$

ktorej riešenie je maticová exponenciála definovaná ako

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{F}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}^k \frac{t^k}{k!}. \quad (6)$$

Výpočet tejto maticovej exponenciály môžeme ľahko uskutočniť použitím Laplaceovej transformácie

$$s\mathcal{L}\{\mathbf{\Phi}(t)\} - \mathbf{I} = \mathbf{F}\mathcal{L}\{\mathbf{\Phi}(t)\} \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathcal{L}\{\mathbf{\Phi}(t)\} = \mathbf{I}, \quad (7)$$

kde $\mathbf{\Phi}(t)$ je ¹ dané vzťahom

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\}. \quad (8)$$

Aplikáciou rovnosti na maticu \mathbf{F} z rovnice(2) pre jednorozmerný systém s deriváciou rádu $k = 3$ potom môžeme písať

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(t) &= \mathcal{L}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\begin{array}{ccc} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right\}^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\begin{array}{ccc} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{array}\right]^{-1}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{array}\right]\right\} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■ 3.2.1 Diskretizácia popisu

Venujme sa teraz diskretizácii rovnice predchádzajúceho vzťahu. Nahradme spojité čas t diskretnou postupnosťou

$$t = t_k = kT \quad \text{a} \quad t_0 = t_{k-1}$$

potom pre diskretný model v jednotlivých časových vzorkách dostávame

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{p}(k) + \mathbf{q}(k)$$

kde matica \mathbf{A} v diskretnom čase je rovná $\mathbf{\Phi}(T)$ a \mathbf{q} predstavuje náhodný proces v diskretnom čase, s nulovou strednou hodnotou, nekorelovaný v jednotlivých časoch, a s kovariačnou maticou \mathbf{Q} popis ktorej bude vysvetlený nižšie.

¹ Poznamenajme, že $\mathbf{\Phi}(t)$ v tomto prípade niako nesúvisí s uhlom geocentrickeho polomeru R_G , ktorý je v predchádzajúcej kapitole značený totožne ako Φ . Dôvodom je ponechanie obvyklého značenia z literatúry v oboch prípadoch.

3.3 Vybrané stavové modely

Poznamenajme, že v leteckých radarových systémoch, môžeme dostávať informácie o polohe 2D súradnice v stereografickej projekcii alebo o 3D polohe určenej azimutom, rádiusom a výškou nad referenčným bodom. Preto, vychádzajúc z týchto rovníc a obecného maticového zápisu modelu, ukážeme niekoľko rôznych variánt modelov letu. Zavedme teda stavový vektor $\mathbf{p} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z} \ \ddot{\ddot{x}} \ \ddot{\ddot{y}} \ \ddot{\ddot{z}}]^T$, pre ktorý potom môžeme formálne zapísať obecný lineárny systém

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(k)$$

kde matica \mathbf{A} predstavuje tzv. prechodovú maticu modelu, a taktiež poznamenajme, že v tejto časti zanedbávame vplyv náhodnej zložky \mathbf{q} ktorý bude popísaný v ďalšej časti. Po rozpísaní do zložiek teda dostávame

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} \\ \ddot{\ddot{y}} \\ \ddot{\ddot{z}} \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & \frac{1}{6}T^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} \\ \ddot{\ddot{y}} \\ \ddot{\ddot{z}} \end{bmatrix} (k)$$

Táto maticová rovnica predstavuje diskretný zápis sústavy rovníc (1) zo strany 12 kde každý riadok predstavuje popis jednej stavovej veličiny. Konkrétne

- $x(k)$ - suradnica x v čase k ,
- $y(k)$ - suradnica y v čase k ,
- $z(k)$ - suradnica z v čase k ,
- $\dot{x}(k)$ - rýchlosť v smere osi x v čase k ,
- $\dot{y}(k)$ - rýchlosť v smere osi y v čase k ,
- $\dot{z}(k)$ - rýchlosť v smere osi z v čase k ,
- $\ddot{x}(k)$ - zrýchlenie v smere osi x v čase k ,
- $\ddot{y}(k)$ - zrýchlenie v smere osi y v čase k ,
- $\ddot{z}(k)$ - zrýchlenie v smere osi z v čase k ,
- $\ddot{\ddot{x}}(k)$ - ryv v smere osi x v čase k ,
- $\ddot{\ddot{y}}(k)$ - ryv v smere osi y v čase k ,
- $\ddot{\ddot{z}}(k)$ - ryv v smere osi z v čase k .

3.3.1 Model letu s nekoštantným zrýchlením

Pri modele letu s nekoštantným zrýchlením budeme pri výpočte novej polohy brať do úvahy zložky rýchlosti, zrýchlenia aj ryvu¹. Ryv je veličina, ktorá je definovaná ako derivácia zrýchlenia podľa času, teda

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} \quad [\text{ms}^{-3}],$$

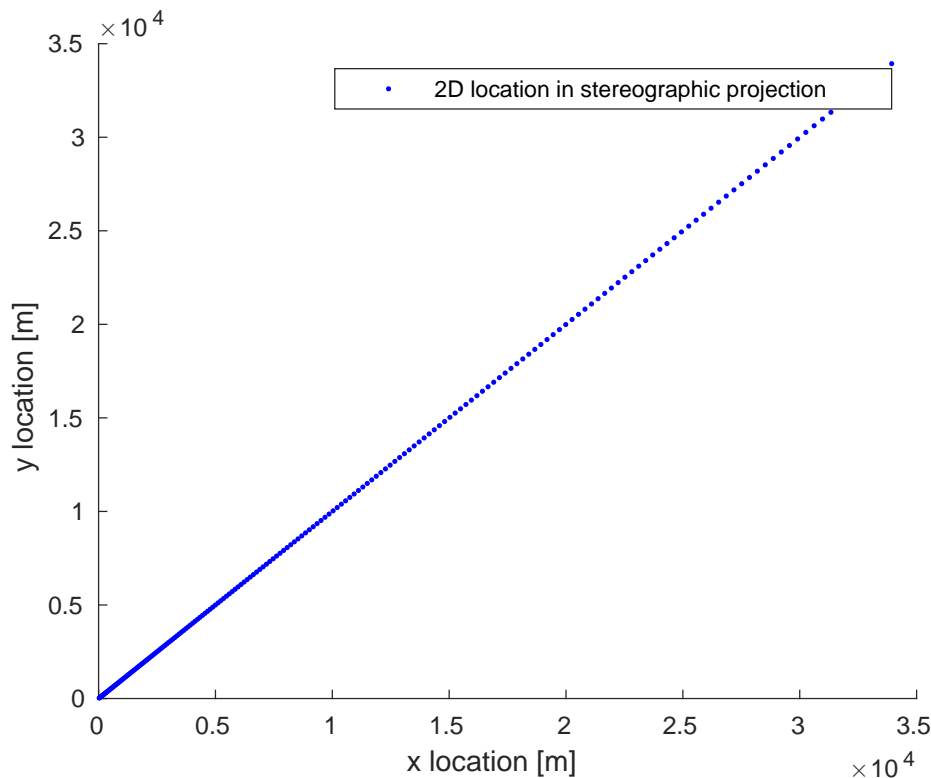
¹ Obvykle sa značí \mathbf{j} , podľa anglického slova jerk (cukat, trhať sebou).

kde \mathbf{a} , \mathbf{v} a \mathbf{x} sú vektory zrýchlenia, rýchlosti a polohy. Z druhého Newtonovho zákona vyplýva, že je to zmena pôsobenia sily na teleso. V leteckom svete toto môžeme interpretovať napríklad náhlym zvýšením výkonu motorou pri lete lietadla alebo rakety. Poznamenajme tiež, že tento model nieje úplne bežný pri využití v leteckých systémoch a je zaradený viac pre účely simulácie.

Ak sa obmedzíme na stereografickú projekciu, do ktorej niekedy radary premietajú informáciu o 2D polohe lietadla, potom pre stavovú maticu \mathbf{A} a prislúchajúci stavový vektor \mathbf{p} platí

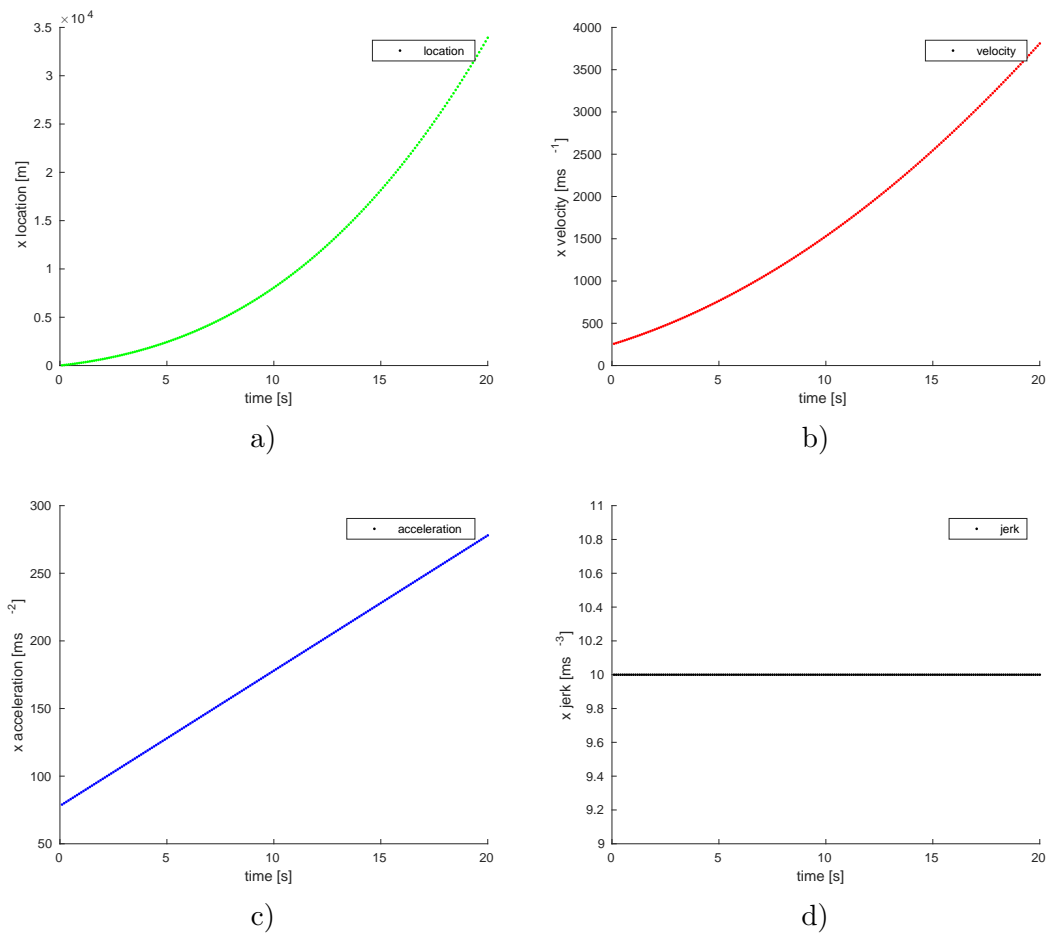
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & \frac{1}{6}T^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & T & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & T & 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} (k).$$

Vyobrazenie priebehu modelu letu v stereografickej projekcii môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 3.1. Modely priamočiareho letu so započítanými zložkami rýchlosti, zrýchlenia a ryvu.

Priebeh jednotlivých zložiek z ktorých bola počítaná aktuálna poloha letu je zobrazená v grafoch 3.2.



Obrázok 3.2. Zobrazenie priebehu: a) pozície, b) rýchlosti, c) zrýchlenia a d) ryvu. Hodnoty počiatkových podmienok modelu sú nasledovné

veličina	hodnota	jednotka
počet iterácií	100	—
T	0.1	s
poloha	0	m
rýchlosť	250	ms^{-1}
zrýchlenie	78	ms^{-2}
ryv	10	ms^{-3}

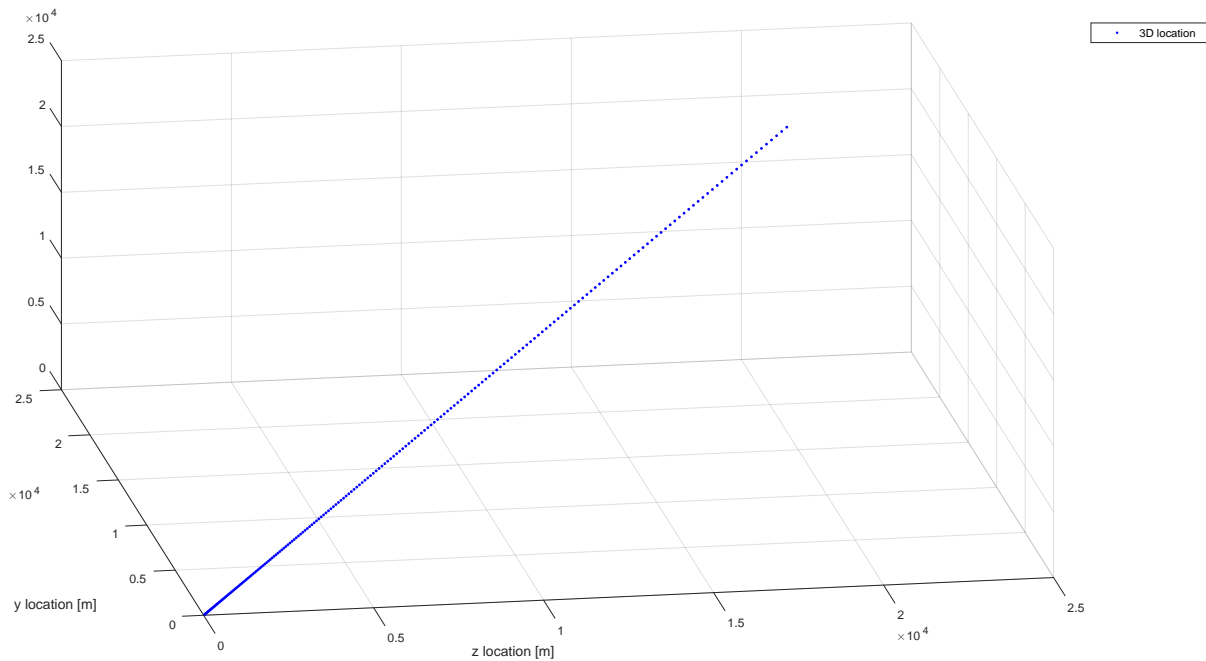
Tabuľka 3.1. Hodnoty počiatkových podmienok modelu letu s nekonštantným zrýchlením.

3.3.2 Model letu s konštantným zrýchlením

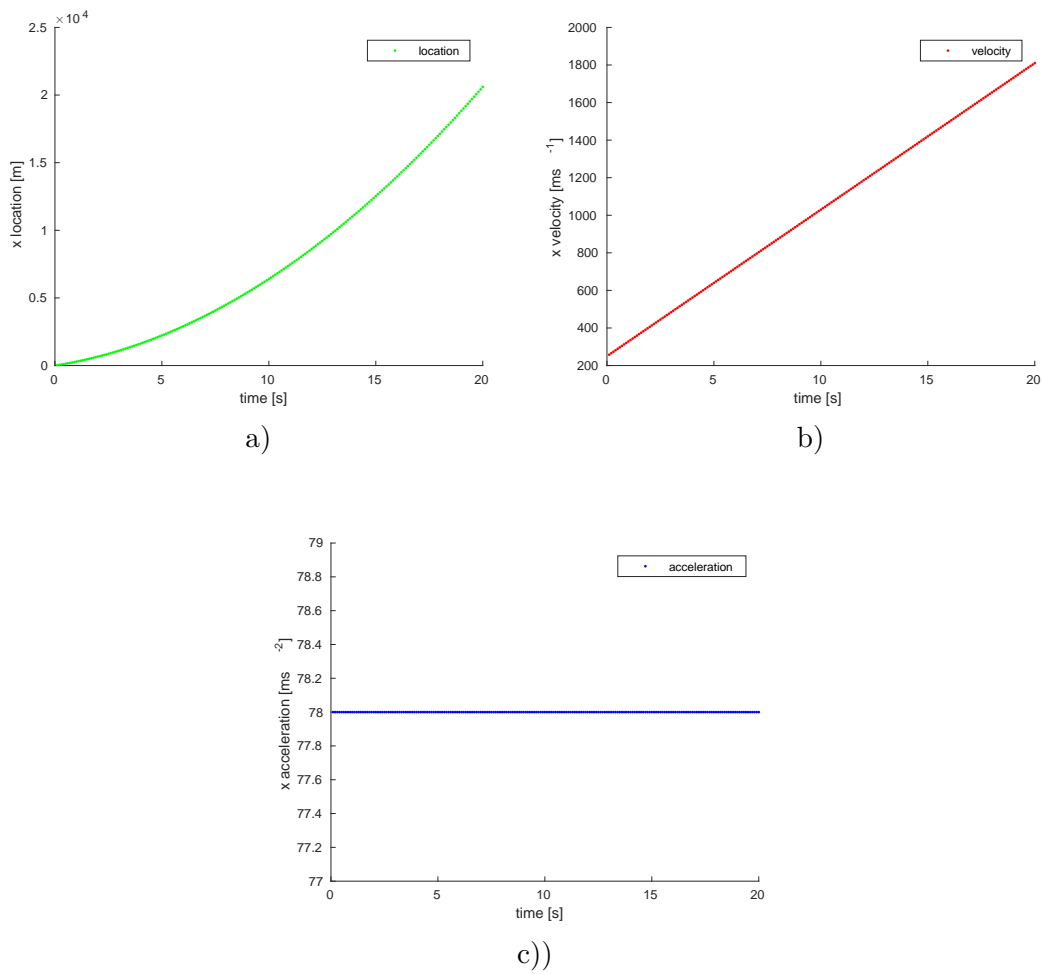
Pri lete s konštantným zrýchlením sa, v ideálnom prípade nemení sila ktorá pôsobí na lietadlo, a teda do novej polohy započítavame len zložku rýchlosti a zrýchlenia. V trojrozmernom prípade si túto situáciu môžeme namodelovať systémom kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} (k).$$

Zobrazenie v troj rozmernom priestore



Obrázok 3.3. Modely priamočiareho letu so započítanými zložkami rýchlosti a zrýchlenia.



Obrázok 3.4. Zobrazenie priebehu: a) pozície, b) rýchlosti a c) zrýchlenia .

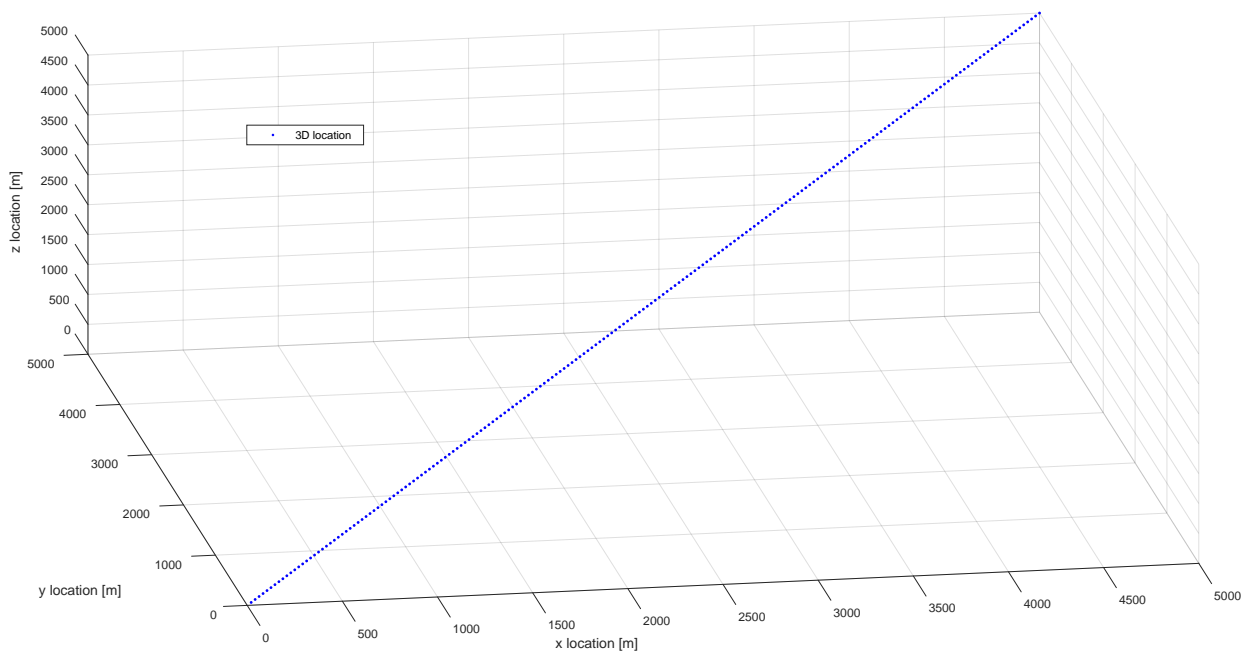
Počiatkové podmienky modelu letu sú totožné s hodnotami predchádzajúceho modelu z tabulky 3.1 bez započítania ryvu.

3.3.3 Model letu s konštantnou rýchlosťou

Model letu s konštantnou rýchlosťou je najčastejšie sa vyskytujúci typ letu v osobnej leteckej doprave. Stavová matica a vektor pre takýto model letu vyzerá nasledovne

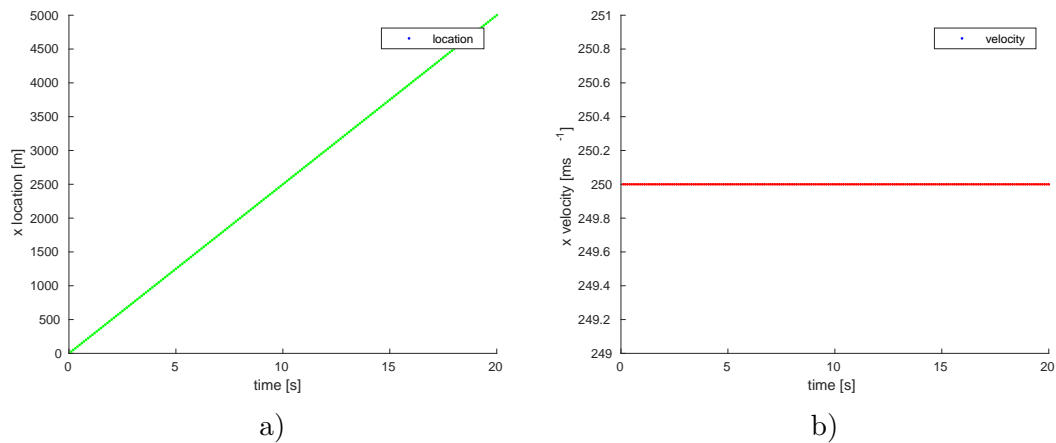
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} (k).$$

Zobrazenie priamočiareho letu s konštantnou rýchlosťou v 3D priestore



Obrázok 3.5. Zobrazenie v lete s konštantnou rýchlosťou v 3D priestore.

a priebeh vývoja jednotlivých zložiek v čase.



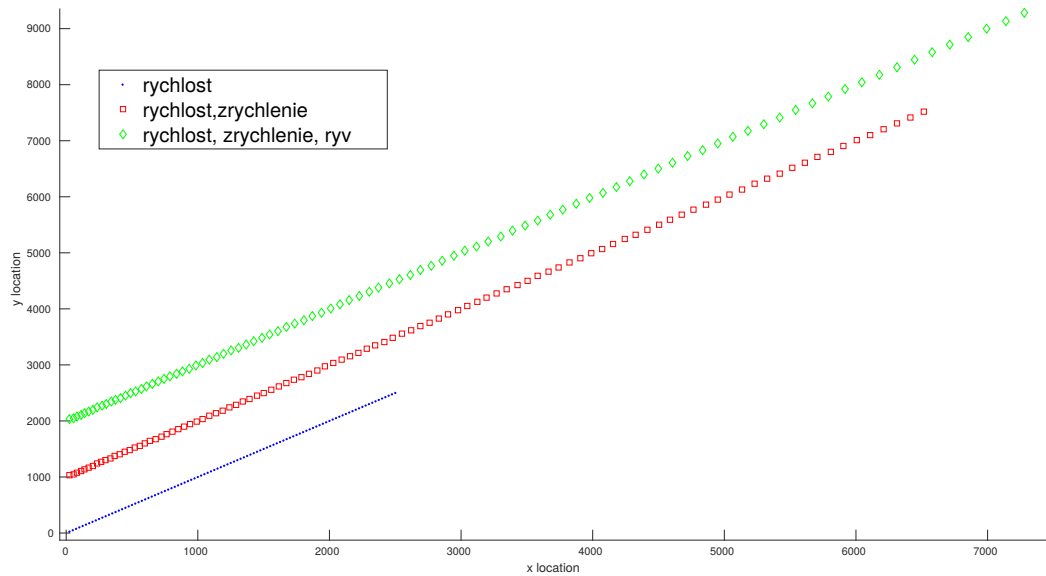
Obrázok 3.6. Zobrazenie priebehu: a) pozície a b) rýchlosti .

3.3.4 Porovnanie modelov

V nasledujúcom obrázku môžeme porovnať simuláciu priamočiareho letu lietadla pri postupnom započítavaní jednotlivých zložiek rýchlosti, zrýchlenia a ryvu pri výpočte polohy. Každá vyššia započítaná derivácia polohy posunie let lietadla o niekoľko jednotiek ďalej. Parametre modelu letu sú totožné s predchádzajúcimi modelmi z tabuľky 3.1.

veličina	hodnota	jednotka
počet iterácií	100	—
Δt	0.1	s
rýchlosť	250	ms^{-1}
zrýchlenie	78	ms^{-2}
ryv	10	ms^{-3}

Tabuľka 3.2. Hodnoty parametrov modelov letu.



Obrázok 3.7. Modely priamočiareho letu s postupne započítavanými zložkami rýchlosti, zrýchlenia a ryvu.

Kapitola 4

Model merania

4.1 Stochastické systémy

Pri popise leteckých systémov, a obecné akéhokoľvek merania, je meranie a modelovanie letu vždy zatažené chybou merania. Tieto chyby môžeme rozdeliť na

- náhodné,
- systematické.

Pre potreby našich úvah môžeme systematické chyby pokladať za nulové. Na elimináciu náhodných chýb zavedieme ich popis priamo do modelu letu a modelu merania a budeme ich nazývať **šumom merania** a **šumom porcesu**. Zavedieme si niekoľko definícií z teórie pravdepodobnosti a štatistiky, ktoré budeme používať pri popise.

4.1.1 Základné pojmy

Definícia 4.1. *Náhodnou veličinou* (vzhľadom k javovému poľu \mathcal{A}) chápeme zobrazenie $X : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty)$ pre ktoré je množina $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ javom v \mathcal{A} pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

Zjednodušene môžeme povedať, že náhodná veličina je funkcia, ktorá zobrazí elementárne javy ω z priestoru javov Ω na reálne čísla.

Definícia 4.2. *Náhodný vektor.* Usporiadanú n -ticu náhodných veličín X_1, \dots, X_n nazývame n -rozmerný náhodný vektor. Značíme

$$\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n].$$

Definícia 4.3. *Náhodný (stochastický) proces* nazývame zobrazenie, ktoré každej hodnote $t \in T$ (kde t je väčšinou čas), priradí náhodnú veličinu $X(t)$. Analógiou v diskkrétnej oblasti je náhodná postupnosť.

Definícia 4.4. *Realizácia náhodného procesu* rozumieme konkrétne pozorovanie náhodného procesu.

Definícia 4.5. *Kovariancia.* Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{X} = [X, Y]^T$, kovarianciou dvoch veličín potom rozumieme

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))].$$

Kovariancia je teda štatistická miera závislosti medzi dvoma náhodnými veličinami.

Definícia 4.6. *Kovariančná matica.* Nech \mathbf{X} a \mathbf{Y} sú náhodné vektory, označme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_X &= E[\mathbf{X}], \\ \boldsymbol{\mu}_Y &= E[\mathbf{Y}],\end{aligned}$$

potom kovariačné matice definujeme ako

$$\mathbf{P}_{XX} = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \mu_X)(\mathbf{X} - \mu_X)^T],$$

$$\mathbf{P}_{XY} = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \mu_X)(\mathbf{Y} - \mu_Y)^T],$$

$$\mathbf{P}_{YY} = \mathbf{E}[(\mathbf{Y} - \mu_Y)(\mathbf{Y} - \mu_Y)^T].$$

Definícia 4.7. *Korelácia.* Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{X} = [X, Y]^T$, potom *Pearsonov korelačný koeficient*, za predpokladu, že stredné hodnoty $\mathbf{E}(X^2)$, $\mathbf{E}(Y^2)$ sú konečné, definujeme ako

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

kde σ_X a σ_Y sú smerodajné odchýlky daných veličín.

Definícia 4.8. *Korelačná funkcia* dvoch signálov $x(t)$, $y(t)$ je definovaná ako

$$R_{x,y}(t, t + \tau) = \mathbf{E}[x(t) \cdot y(t + \tau)].$$

Definícia 4.9. *Autokorelačná funkcia* signálov $x(t)$ je definovaná ako

$$R_{x,x}(t, t + \tau) = \mathbf{E}[x(t) \cdot x(t + \tau)].$$

Definícia 4.10. *Kovariančná funkcia* dvoch signálov $x(t)$, $y(t)$, za predpokladu konštantných μ_X a μ_Y , je definovaná ako

$$K_{x,y}(t, t + \tau) = \mathbf{E}[(x(t) - \mu_X)(y(t + \tau) - \mu_Y)].$$

Definícia 4.11. *Autokovariančná funkcia* signálu $x(t)$ je definovaná ako

$$K_{x,x}(t, t + \tau) = \mathbf{E}[(x(t) - \mu_X)(x(t + \tau) - \mu_X)].$$

■ 4.1.2 Lineárny stochastický systém

V kapitole 2.1 sme zavedli lineárny deterministický diskretný stavový systém, v ktorom sme neuvažovali náhodnú zložku. Zavedme teda *Lineárny stochastický systém*, pri popise ktorého využijeme zavedené definície, teda dostávame stavové rovnice

$$\mathbf{p}(k + 1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(k) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(k) + \mathbf{q}(k)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{p}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$$

kde $\mathbf{q}(k)$ a $\mathbf{w}(k)$ sú nekorelované stacionárne náhodné postupnosti, s nulovými strednými hodnotami, už vyššie nazvané šum procesu a šum merania.

4.2 Odvodenie kovariančných matíc

V tejto časti ukážeme príklad odvodenia kovariačných matíc šumu merania a šumu procesu pre jednotlivé modely letu. Kvôli prehľadnosti je výpočet predvedený pre jednoduchý model a analogickým spôsobom boli počítane aj kovariančné matice pre všetky modely uvedené nižšie.

4.2.1 Kovariačná matica šumu procesu

Kovariačnú maticu šumu procesu diskrétného systému môžeme obecné určiť ako¹

$$\mathbf{Q} = \mathbb{E}[\mathbf{q}(t)\mathbf{q}^T(t)] = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau} \mathbf{G} e^{\mathbf{F}\tau^T} d\tau$$

kde pre systém popísaný

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{p}(k)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} (k)$$

môžeme na základe vyššie spomenutého poznatku, že dostatočne vysokú deriváciu dráhy môžeme aproximovať bielym šumom, potom

$$\dot{\mathbf{p}}(k) = \mathbf{F}\mathbf{p}(k) + \mathbf{q}(k)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} (k) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} (k) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{f}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} (k)$$

z toho teda

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a pre maticovú exponenciálu $e^{\mathbf{F}t}$ podľa odvodenia z rovnice (8), potom môžeme písať

$$e^{\mathbf{F}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\} =$$

¹ Poznamenajme, že T bez kurzívy je operátor transponovania matice a T s kurzívou je vzorkovacia perióda diskretizovaného systému.

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{\mathbf{F}t}$$

Kovariančnú maticu \mathbf{Q} teda vypočítame

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \int_0^{T_k} e^{\mathbf{F}\tau} \mathbf{G} e^{\mathbf{F}\tau T} d\tau = \\ &= \int_0^{T_k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_0^{T_k} \begin{bmatrix} t^2 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & t \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T_k^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T_k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}T_k^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}T_k^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T_k^2 \\ \frac{1}{2}T_k^2 & 0 & 0 & T_k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T_k^2 & 0 & 0 & T_k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}T_k^2 & 0 & 0 & T_k \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \end{aligned}$$

4.2.2 Kovariančná matica šumu merania

Základná štruktúra modelu merania polohy sa odvíja od vzťahu pre výstup lineárneho systému

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{p}(k) + \mathbf{w}(k),$$

$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{bmatrix} (k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} (k),$$

kde vektor \mathbf{p} ma rozmer z modelu letu, maticu \mathbf{H} skladáme na základe veličín ktore nám poskytujú meranie, \mathbf{w} je vektorový náhodný proces nazývaný diskretný šum merania, a \mathbf{q}_ϵ je diskretný šum procesu. Index epsilon ϵ pri \mathbf{q} , a tiež pri hornej medzi integrálu značí zmenu času T o dobu výpočtu pri regulačných systémoch (podrobný popis v[5]). Kovariančnú maticu diskretného šumu merania potom môžeme vypočítať ako (odvodenie v[5])

$$\mathbf{R} = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{H} \mathbf{q}_\epsilon(k) + \mathbf{w}(k) \right) \left(\mathbf{H} \mathbf{q}_\epsilon(k) + \mathbf{w}(k) \right)^T \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\epsilon T} \mathbf{H} e^{\mathbf{F}(\epsilon T - \tau)} \mathbf{G} e^{\mathbf{F}(\epsilon T - \tau)^T} \mathbf{H}^T d\tau + \mathbf{R}' = \\
&= \int_0^{\epsilon T} \mathbf{H} e^{\mathbf{F}\tau} \mathbf{G} e^{\mathbf{F}\tau^T} \mathbf{H}^T d\tau + \mathbf{R}',
\end{aligned}$$

kde \mathbf{R}' je označenie pre kovariančnú maticu diskretného šumu merania $\mathbf{w}(k)$ a predpokladáme, že je to diskrétny biely šum nekorelovaný so šumom procesu. Taktiež predpokladáme nekorelovanosť jednotlivých zložiek $\mathbf{w}(k)$, teda \mathbf{R}' bude diagonálna matica s rozptylmi jednotlivých zložiek. Potom, s využitím predchádzajúcich výpočtov, môžeme písať

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \int_0^{T\epsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & t \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau + \begin{bmatrix} \sigma_{w,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{w,y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{w,z}^2 \end{bmatrix} = \\
&= \int_0^{\epsilon T} \begin{bmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} d\tau + \begin{bmatrix} \sigma_{w,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{w,y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{w,z}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\epsilon T^3 + \sigma_{w,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\epsilon T + \sigma_{w,y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\epsilon T + \sigma_{w,z}^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

V nasledujúcich častiach uvedieme modely merania polohy pre jednotlivé, vyššie uvedené stavové modely, a taktiež konkrétne spočítané kovariančné matice šumu procesu, ktorých odvodenie bolo prezentované vyššie.

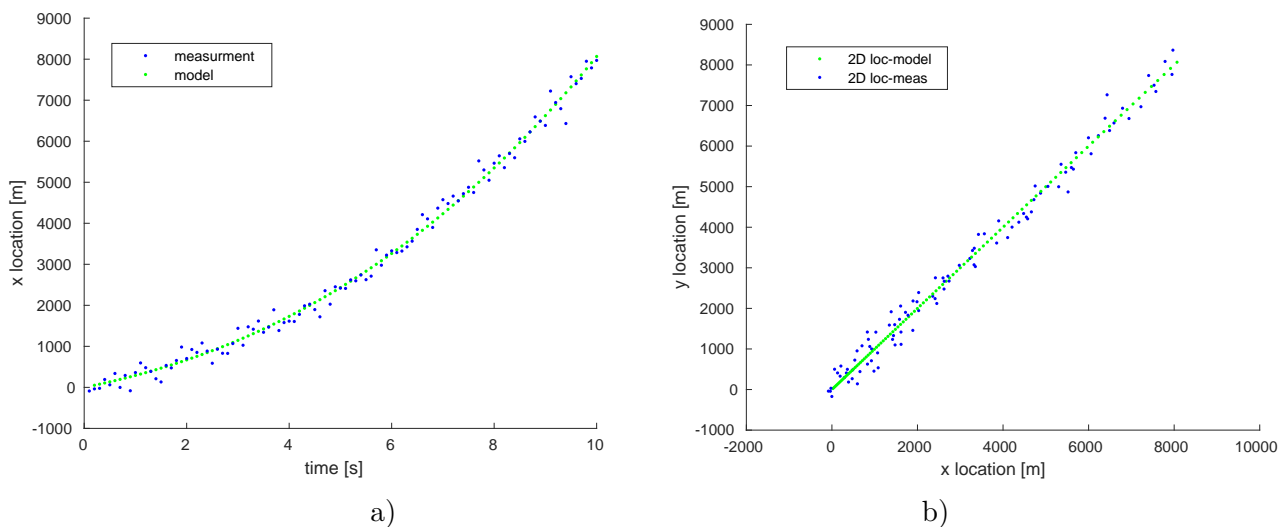
4.3 Vybrané modely merania

4.3.1 Meranie polohy modelu letu s nekonštantným zrýchlením

Pre meranie polohy letu s nekonštantným zrýchlením môžeme zaviesť nasledovný model

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} (k).$$

Na základe tohoto modelu môžeme simulovať meranie pripočítaním náhodnej zložky s patričným rozptylom. Takúto simuláciu s náhodnou zložkou so smerodatnou odchylkou $\sigma_{w,x} = \sigma_{w,y} = 200$ môžeme vidieť na grafoch v obrázku 4.1. V ľavo je zobrazenie priebehu simulácie merania v ose X závislej na čase, totožne so zobrazením v ose Y, a v pravo zobrazenie v 2D rovine.



Obrázok 4.1. a) Zobrazenie v ose X b) zobrazenie v 2D rovine.

Tvar kovariančnej matice diskrétno šumu procesu \mathbf{Q} je v tomto prípade

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{252}T^7 & 0 & \frac{1}{72}T^6 & 0 & \frac{1}{30}T^5 & 0 & \frac{1}{24}T^4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{252}T^7 & 0 & \frac{1}{72}T^6 & 0 & \frac{1}{30}T^5 & 0 & \frac{1}{24}T^4 \\ \frac{1}{72}T^6 & 0 & \frac{1}{20}T^5 & 0 & \frac{1}{8}T^4 & 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{72}T^6 & 0 & \frac{1}{20}T^5 & 0 & \frac{1}{8}T^4 & 0 & \frac{1}{6}T^3 \\ \frac{1}{30}T^5 & 0 & \frac{1}{8}T^4 & 0 & \frac{1}{3}T^3 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30}T^5 & 0 & \frac{1}{8}T^4 & 0 & \frac{1}{3}T^3 & 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{24}T^4 & 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & T & 0 \\ 0 & \frac{1}{24}T^4 & 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & T \end{bmatrix}$$

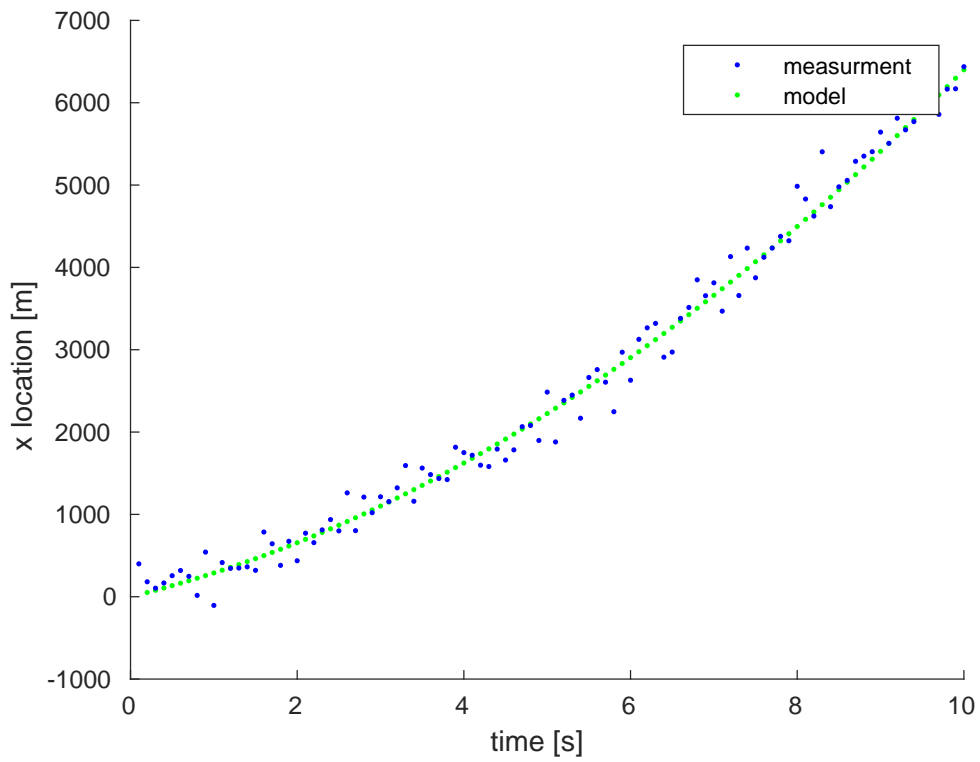
a kovariančná matica diskrétno šumu merania

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{252}T^7 + \sigma_{w,x}^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{252}T^7 + \sigma_{w,y}^2 \end{bmatrix}$$

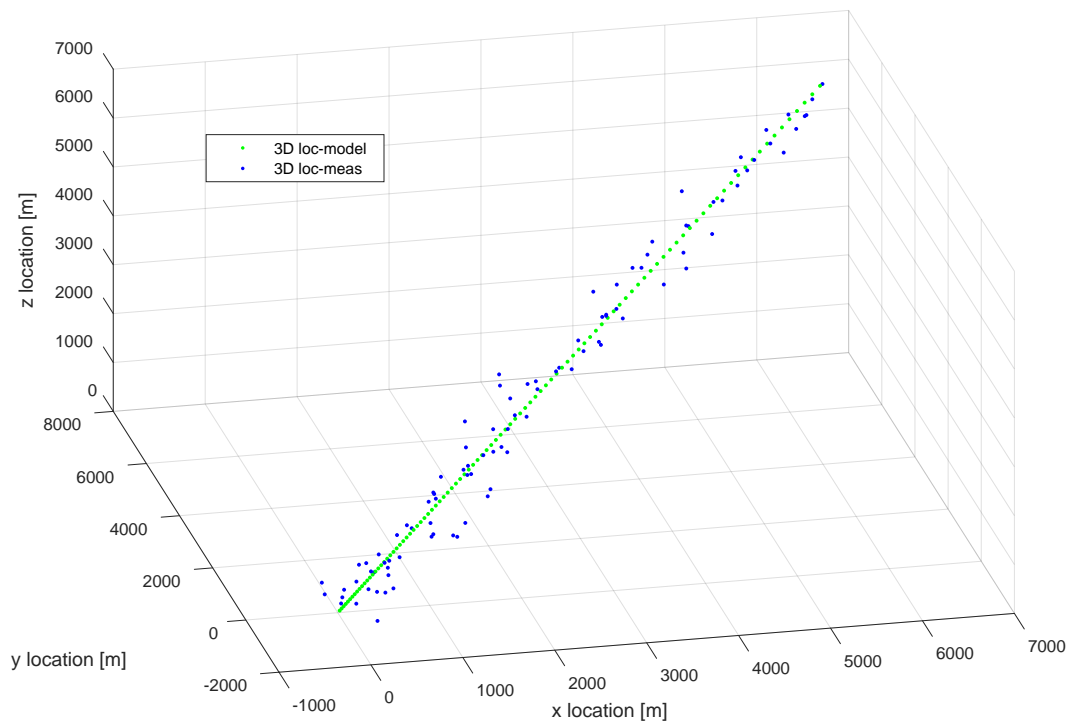
4.3.2 Meranie polohy modelu letu s konštantným zrýchlením

Obdobnú maticu merania polohy s rozdielom, že tento krát prebieha meranie v 3 osiach, môžeme zapísať nasledovne

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} (k)$$



Obrázok 4.2. Zobrazenie v rovine x.



Obrázok 4.3. Zobrazenie v 3D priestore.

Kovariančné matice pre 3 rozmerný konštantne zrýchlený model.

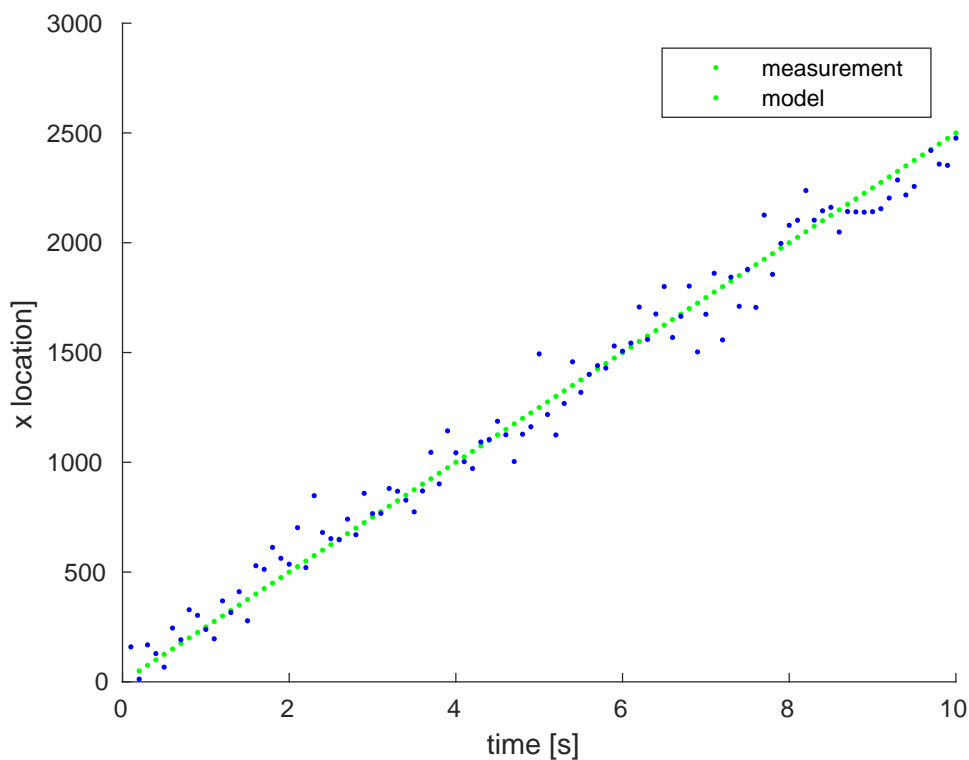
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T^5 & 0 & 0 & \frac{1}{8}T^4 & 0 & 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}T^5 & 0 & 0 & \frac{1}{8}T^4 & 0 & 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20}T^5 & 0 & 0 & \frac{1}{8}T^4 & 0 & 0 & \frac{1}{6}T^3 \\ \frac{1}{8}T^4 & 0 & 0 & \frac{1}{3}T^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}T^4 & 0 & 0 & \frac{1}{3}T^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}T^4 & 0 & 0 & \frac{1}{3}T^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{6}T^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}T^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T^5 + \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}T^5 + \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20}T^5 + \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

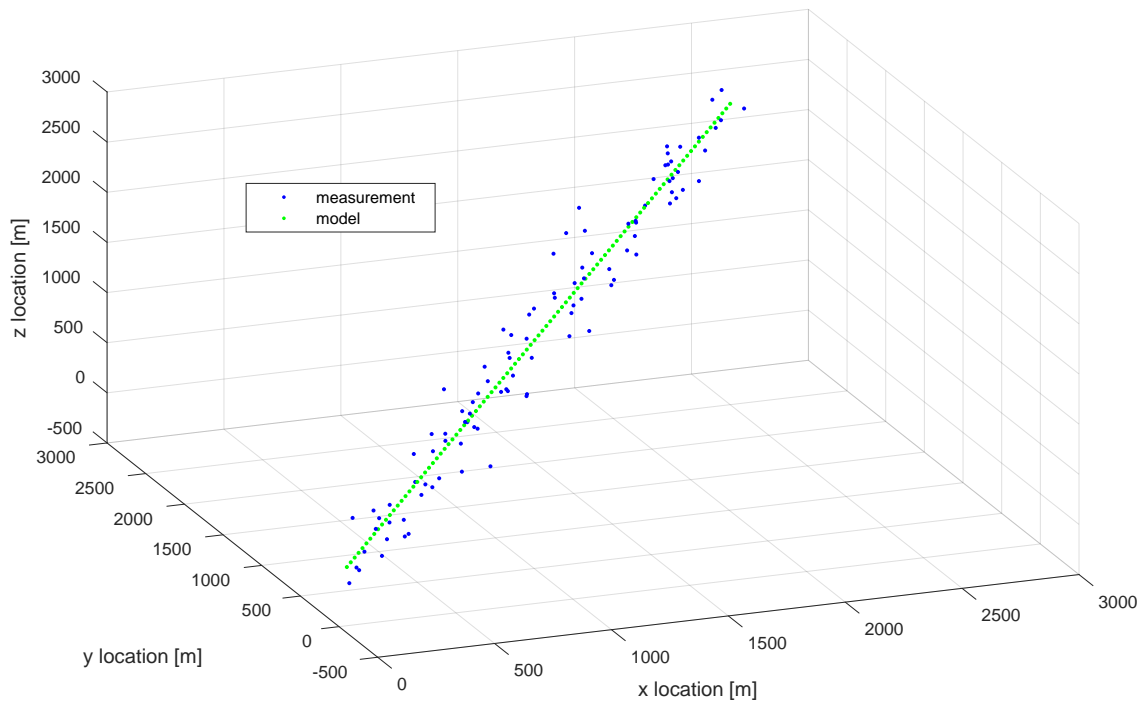
4.3.3 Meranie polohy modelu letu s konštantnou rýchlosťou

Posledným systémom, ktorý uvidíme, je model merania s konštantnou rýchlosťou, ktorého maticový zápis je

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} (k)$$



Obrázok 4.4. Zobrazenie v rovine X priestore.



Obrázok 4.5. Zobrazenie v 3D priestore.

s patričnými kovariančnými maticami

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}T^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}T^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 + \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}T^3 + \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}T^3 + \sigma_z^2 \end{bmatrix}.$$

Kapitola 5

Kalmanov filter

V tejto kapitole popíšeme a ukážeme odhad stavov pomocou algoritmu Kalmanovho filtru. Tento algoritmu bol prvý krát popísaný Rudolfom Kalmanom¹ v roku 1960 v článku s názvom *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Filter poskytuje najlepší odhad stavov systému v zmysle minimálnej strednej kvadratickej chyby, na základe modelu vývoja systému a znalosti jeho šumu.

5.1 Popis algoritmu Kalmanovho filtru

Nasledujúce odvodenie je prevzaté z učebnice *Moderní teorie řízení* [5].

5.1.1 Formulácia problému

Pripomeňme, že pre stavový model systému s nekorelovanými diskretnými šumami sme zaviedli popis

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(k) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(k) + \mathbf{q}(k) \quad (1)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{p}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k). \quad (2)$$

so známou kovariančnou maticou

$$E \left\{ \begin{bmatrix} q(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(k) & w(k) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

V tomto prípade uvažujeme nekorelovanosť šumu, takže pre prvky mimo hlavnej diagonály platí $\mathbf{S} = 0$. Ďalej zavedme nasledujúce pojmy:

- **apriórny** odhad stavu $\mathbf{p}(k)$ je odhad využívajúci dáta do času $(k-1)$, ale neberúc v úvahu dáta $\mathbf{z}(k)$, takto podmienenú strednú hodnotu tohoto stavu budeme značiť

$$\hat{\mathbf{p}}(k|(k-1)),$$

kde prvý index k označuje aktuálny čas a druhý $(k-1)$ predstavuje posledný čas merania ktoré bolo použité k určeniu odhadu. Obdobným spôsobom budeme značiť kovariančnú maticu chyby odhadu

$$\mathbf{P}(k|(k-1))$$

- **aposteriórny** (zahrňujúci meranie $\mathbf{z}(k)$) odhad stavu $\hat{\mathbf{p}}(k|k)$ získame aktualizáciou apriórneho odhadu po zmeraní hodnoty výstupu $\mathbf{z}(k)$ a analogicky označujeme príslušnú aposteriórnu kovariančnú maticu chyby odhadu $\mathbf{P}(k|k)$.

Naším cieľom bude odovdiť algoritmus generujúci postupnosť lineárnych odhadov stavu

$$\hat{\mathbf{p}}(k|k)$$

¹ Rudolf Emil Kalman(1930) - maďarsko-americký matematik a jeden zo zakladateľov modernej teórie riadenia.

a kovariančných matíc chýb odhadu

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbb{E}\left\{(\mathbf{p}(k) - \hat{\mathbf{p}}(k))(\mathbf{p}(k) - \hat{\mathbf{p}}(k))^T\right\},$$

pričom odhad stavu $\hat{\mathbf{p}}(k)$ v každom kroku minimalizuje kritérium

$$J_{LMS}(k) = \text{tr } \mathbf{P}(k).$$

Ďalej budeme chcieť, na základe aposteriorného odhadu stavu $\hat{\mathbf{p}}(k|k)$ a kovariančnej matice chyby odhadu $\mathbf{P}(k|k)$ v čase k , nájsť apriorne hodnoty týchto veličín v čase $(k+1)$ teda $\hat{\mathbf{p}}(k+1|k)$ a $\mathbf{P}(k+1|k)$.

■ 5.1.2 Kalmanov filter pre nekorelované šumy

V tejto časti podrobne odvodíme Kalmanov filter realizujúci LMS odhad stavu ¹pre nekorelovaný šum procesu a merania. Uvažujme lineárny stochastický systém popísaný stavovou rovnicou prechodu (1) a výstupnou rovnicou (2) zo strany 31. Apriorný odhad stavu $\hat{\mathbf{p}}(k)$ na základe dát $\mathcal{D}_{t-1} = \{\mathbf{u}(0), \mathbf{z}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1), \mathbf{z}(k-1)\}$ nechú popísané prvými dvoma momentmi

$$\mathbb{E}\{\mathbf{p}(k)|\mathcal{D}_{t-1}\} = \hat{\mathbf{p}}(k|k-1)$$

a

$$\mathbb{E}\left\{(\mathbf{p}(k) - \hat{\mathbf{p}}(k|k-1))(\mathbf{p}(k) - \hat{\mathbf{p}}(k|k-1))^T | \mathcal{D}_{t-1}\right\} = \mathbf{P}(k|k-1)$$

Zdôraznime ešte raz, že ide o podmienené stredné hodnoty. Na základe merania $\mathbf{z}(k)$ daného výstupnou rovnicou (2), chceme nájsť odhad $\hat{\mathbf{p}}(k|k)$ minimalizujúci kritérium.

$$J_{LMS}(k) = \text{tr } \mathbf{P}(k|k).$$

Potom je tento odhad daný (pre $\mathbf{P}_{zz} > 0$)

$$\hat{\mathbf{p}}(k|k) = \hat{\mathbf{p}}(k|k-1) + \mathbf{P}_{pz}(k|k-1)\mathbf{P}_{zz}^{-1}(k|k-1)(\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1))$$

kde

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{H}\hat{\mathbf{p}}(k|k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

je stredná hodnota merania $\mathbf{z}(k)$ a $\mathbf{P}_{pz}(k|k-1)$ a $\mathbf{P}_{zz}(k|k-1)$ sú kovariančné matice

$$\mathbf{P}_{pz}(k|k-1) = \mathbb{E}\left\{(\mathbf{p}(k) - \hat{\mathbf{p}}(k|k-1))(\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1))^T | \mathcal{D}_{t-1}\right\}$$

a

$$\mathbf{P}_{zz}(k|k-1) = \mathbb{E}\left\{(\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1))(\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1))^T | \mathcal{D}_{t-1}\right\}.$$

Na základe rovnice (2) sú ich hodnoty

$$\mathbf{P}_{pz}(k|k-1) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T$$

a

$$\mathbf{P}_{zz}(k|k-1) = \mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}. \quad (3)$$

¹ LMS-linear mean squares, odhad minimalizujúci strednú kvadratickú chybu

Pritom predpokladajme $\mathbf{P}_{zz}(k|k-1) > 0$ pre všetky k . Označme dalej **chybu predikcie** výstupu $\mathbf{z}(k)$ ako

$$\epsilon(k|k-1) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k|k-1). \quad (4)$$

Potom pre odhad $\hat{\mathbf{p}}(k|k)$ dostávame

$$\hat{\mathbf{p}}(k|k) = \hat{\mathbf{p}}(k|k-1) + \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}\epsilon(k|k-1) \quad (5)$$

Definujme teda **Kalmanovo zosilnenie** dátového kroku

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}, \quad (6),$$

potom mozme rovniciu (5) zjednodušiť na

$$\hat{\mathbf{p}}(k|k) = \hat{\mathbf{p}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\epsilon(k|k-1).$$

Kovariančnú maticu chyby odhadu môžeme napísať

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{P}_{pz}(k|k-1)\mathbf{P}_{zz}^{-1}(k|k-1)\mathbf{P}_{pz}(k|k-1),$$

potom po dosadení

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^k[\mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^k + \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1),$$

ak dosadíme Kalmanovo zosilnenie potom vzťah prejde do

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1),$$

a nakoniec

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}]\mathbf{P}(k|k-1). \quad (7)$$

K opätovnému výpočtu apriórnej hodnoty odhadu $\mathbf{x}(k+1)$ použijeme stavovú rovnicu prechodu (1) s aplikáciou operátora strednej hodnoty

$$\hat{\mathbf{p}}(k+1|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k). \quad (8)$$

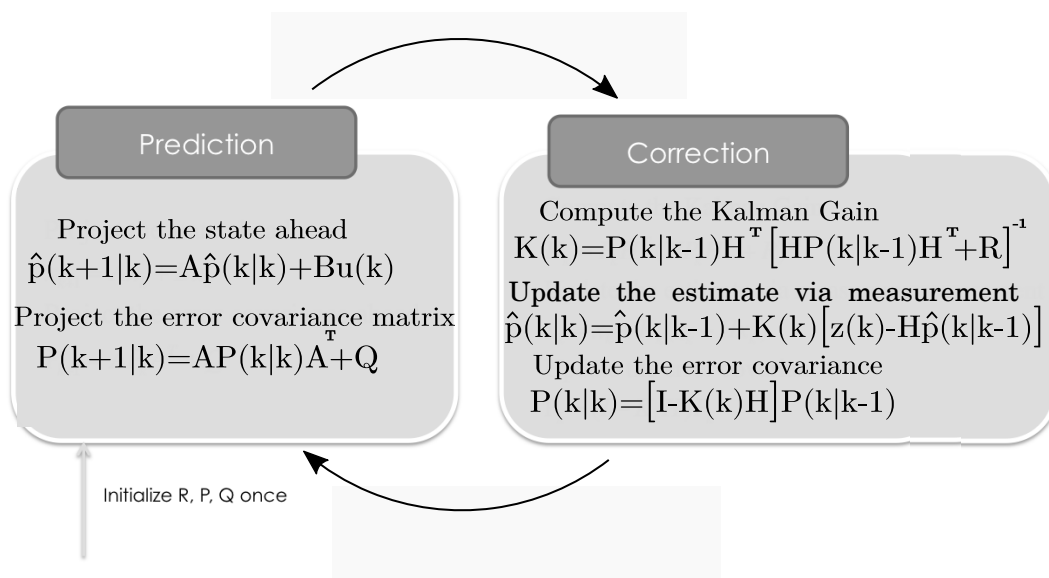
Pre chybu odhadu stavu dostanme odčítaním rovníc (1) a (8)

$$\tilde{\mathbf{p}}(k+1|k) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}}(k|k) + \mathbf{q}(k),$$

a potom

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (9)$$

Rovnice (8) a (9) predstavujú tzv. predikčný(časový) krok algoritmu a rovnice (4), (6) a (7) predstavujú tzv. dátový(filtračný) krok algoritmu. Kroky môžeme kvôli prehľadnosti rozdeliť do nasledujúceho obrázku.



Obrázok 5.1. Rozdelenie rovníc algoritmu Kalmanovho filtru na dátovú a predikčnú časť.

5.2 Ukážky filtrácií vybraných modelov

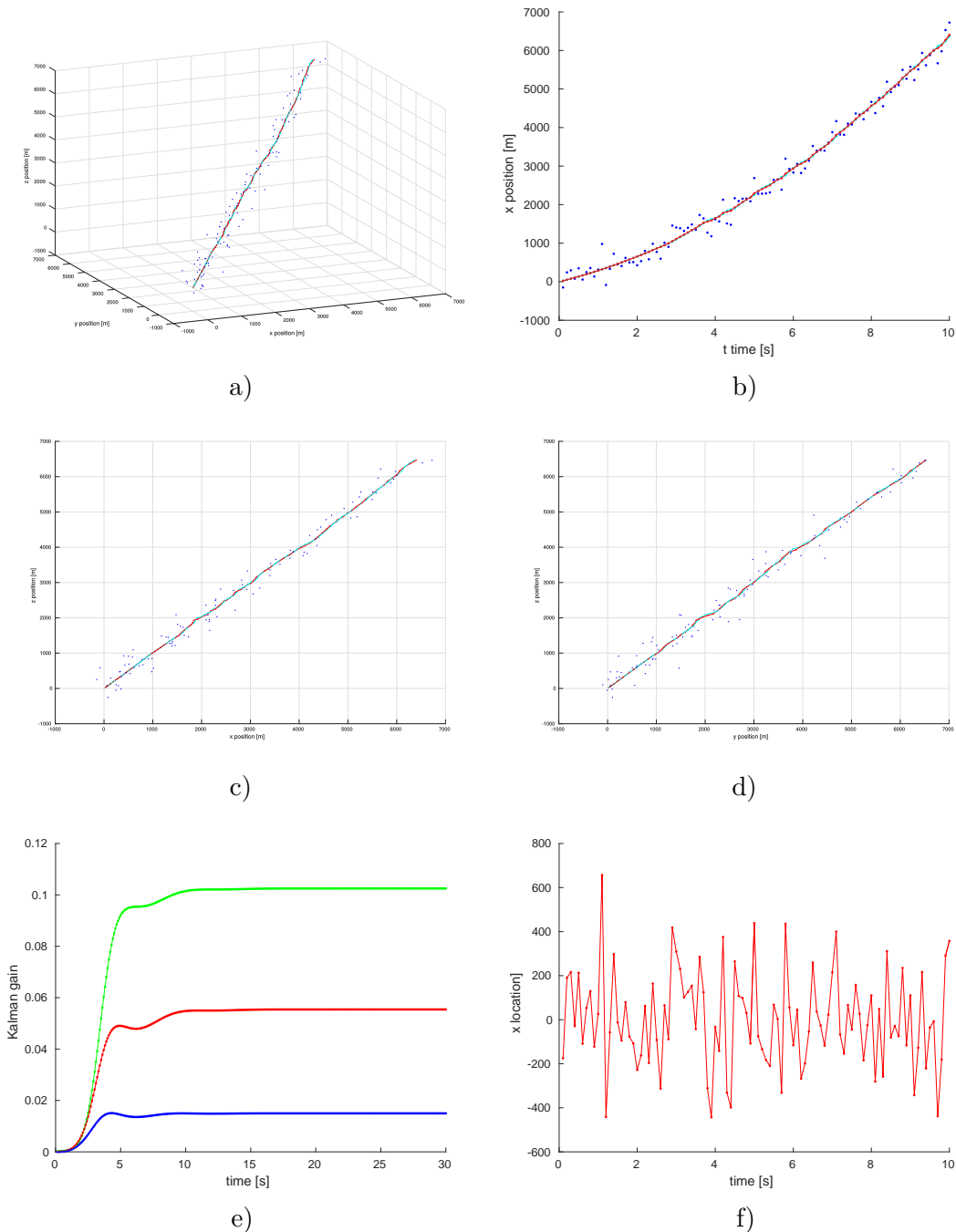
V nasledujúcej časti predvedieme filtráciu dát pre niekoľko rôznych modelov a rôzne nastavenia parametrov Kalmanovho filtru. Kvôli prehľadnosti boli obrázky usporiadané do tematických matíc pre rovnaké hodnoty parametrov. Obrázky sú síce malé, ale pretože sú použité vektorové formáty obrázkov a grafov, je možné ľubovoľné priblíženie dokumentu. Pre potreby tejto časti boli vybraté 2 rozdielne parametre a to sigma P (procesu) $\sigma_P = 1, \sigma_P = 10$ a $\sigma_P = 200$ a smerodatná odchylka merania $\sigma_M = 200$. V prílohe sú potom ukázané a vyskúšané hodnoty $\sigma_P = 1, \sigma_P = 10, \sigma_P = 200$ a $\sigma_P = 400$.

veľičina	hodnota	jednotka
počet iterácií	100	–
Δt	0.1	s
poloha	0	m
rýchlosť	250	ms^{-1}
zrýchlenie	78	ms^{-2}
ryv	10	ms^{-3}
σ_P	1	
σ_P	10	
σ_P	200	
σ_P	400	
σ_M	200	

Tabuľka 5.1. Hodnoty počiatočných podmienok modelovaného letu.

5.2.1 Filtrácia modelu letu s konštantným zrýchlením

5.2.1.1 Ukážka pre parameter $\sigma_P = 10$ a $\sigma_M = 200$.



Obrázok 5.2. Zobrazenie priebehu:

- a) filtrácia v 3D rovine,
- c) pohľad v rovine xz,
- e) Kalmanovo zosilnenie,

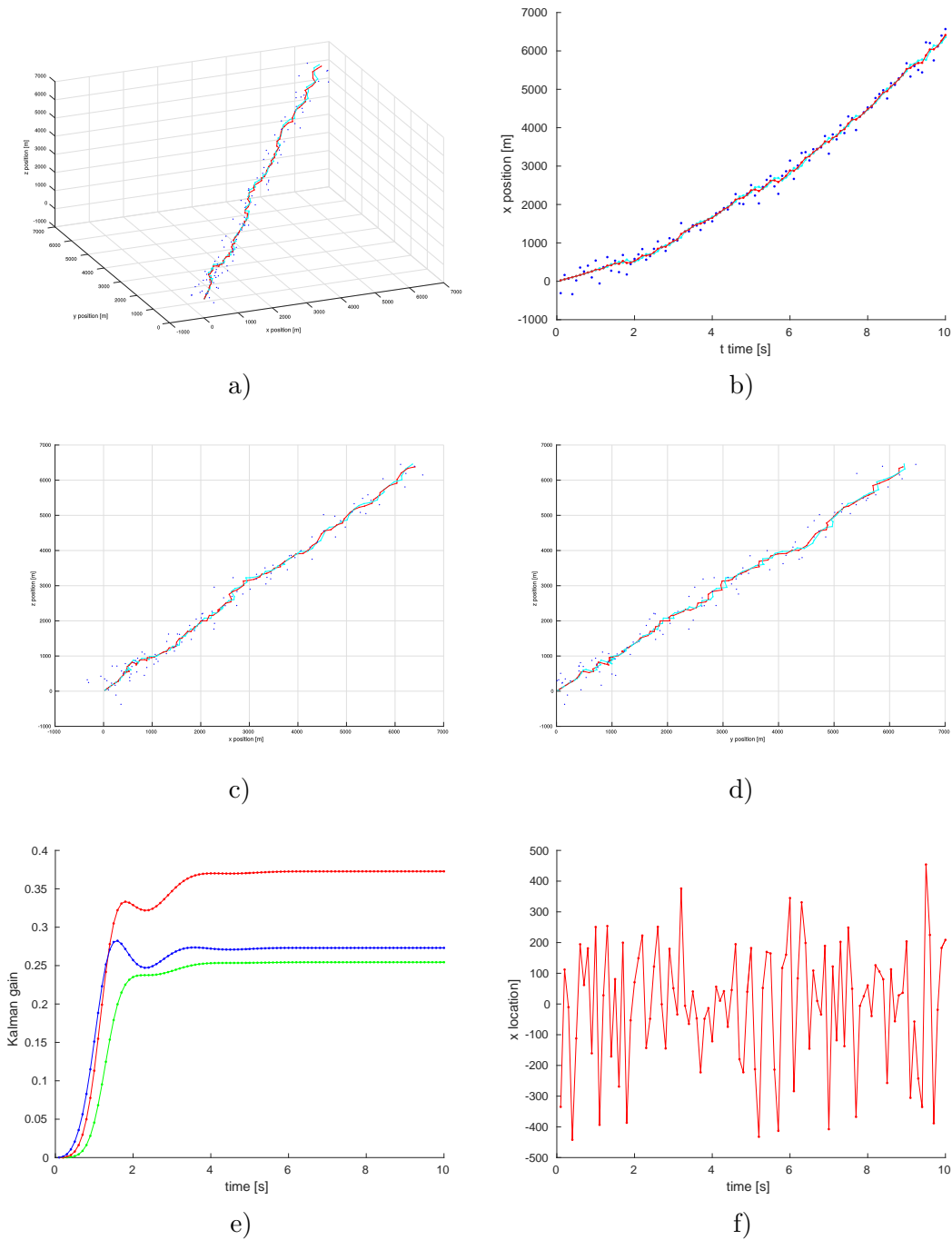
- b) závislosť pozície x na čase,
- d) pohľad v rovine yz,
- f) chyba predikcie.

Legenda:

- a) b) c) d) **predikcia**, **filtrácia**, **meranie**,
- e) **pozícia**, **rýchlosť**, **zrýchlenie**.

- f) **chyba predikcie v ose x**,

5.2.1.2 Ukážka pre parameter $\sigma_P = 200$ a $\sigma_M = 200$.



Obrázok 5.3. Zobrazenie priebehu:

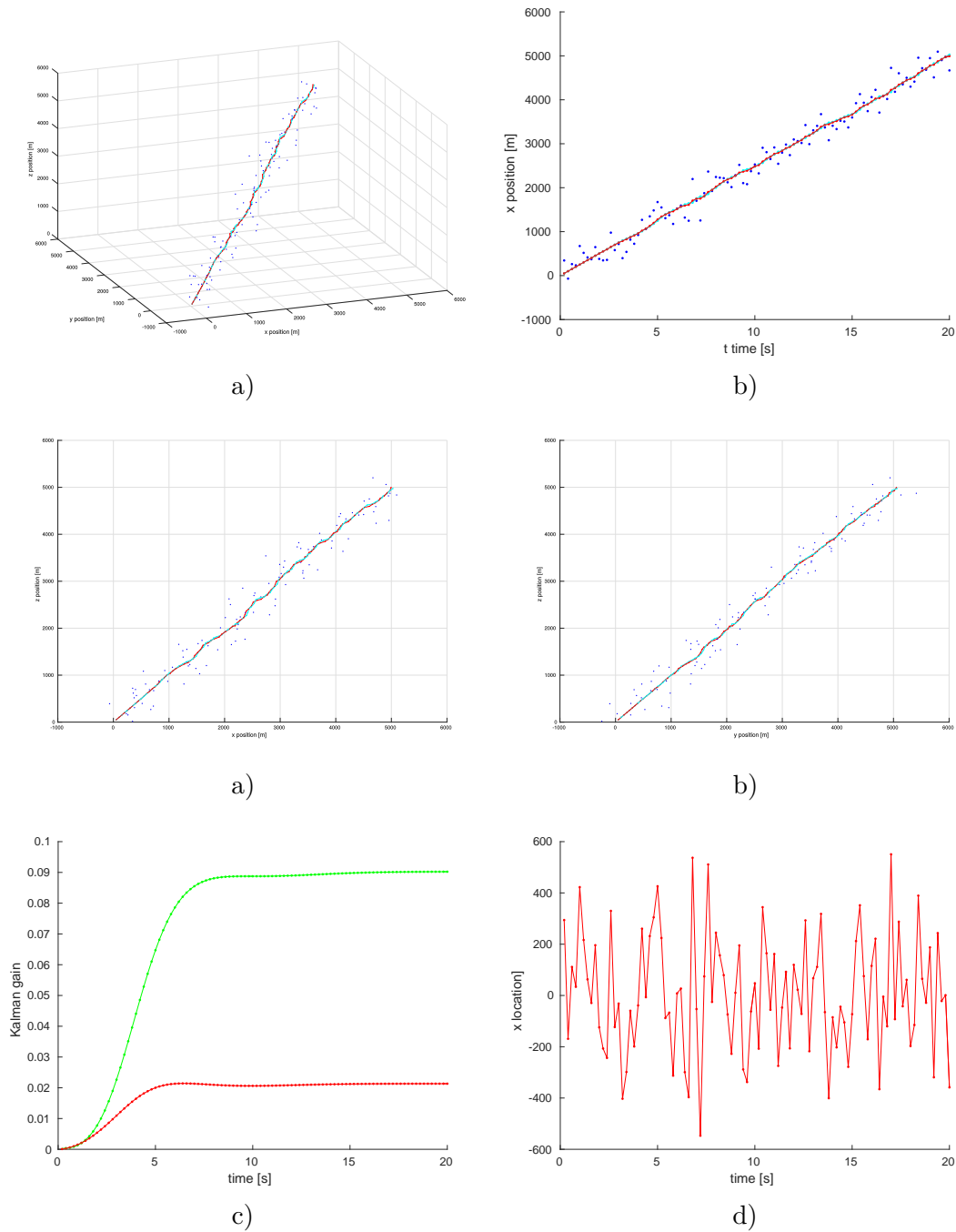
- a) filtrácia v 3D rovine,
- b) závislosť pozície x na čase,
- c) pohľad v rovine xz,
- d) pohľad v rovine yz,
- e) Kalmanovo zosilnenie,
- f) chyba predikcie.

Legenda:

- a)b)c)d) predikcia, filtrácia, meranie,
- e) pozícia, rýchlosť, zrýchlenie.
- f) chyba predikcie v ose x,

5.2.2 Filtrácia modelu letu s konštantnou rýchlosťou

5.2.2.1 Ukážka pre parameter $\sigma_P = 10$ a $\sigma_M = 200$.



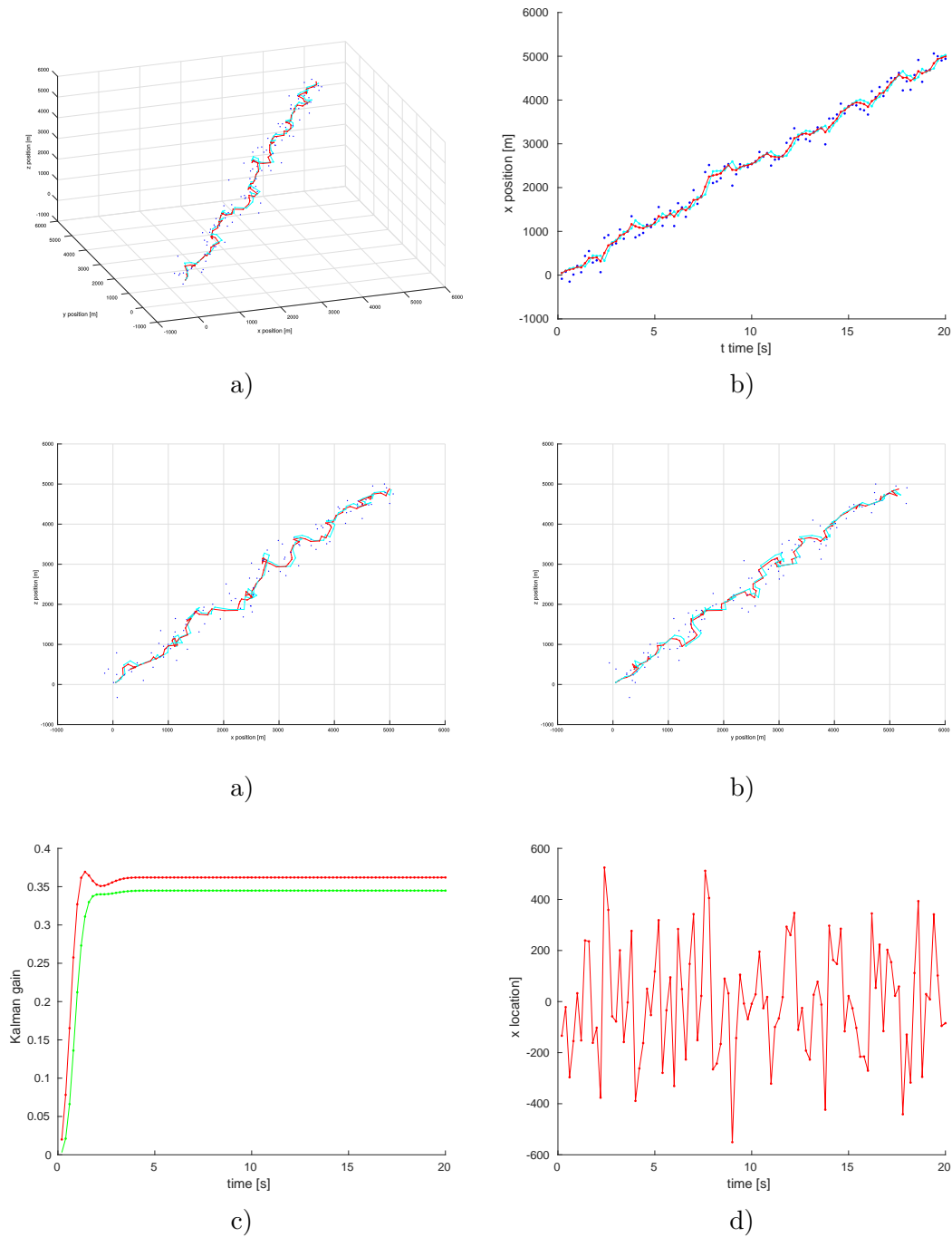
Obrázok 5.4. Zobrazenie priebehu:

- a) filtrácia v 3D rovine,
- b) závislosť pozície x na čase,
- c) pohľad v rovine xz,
- d) pohľad v rovine yz,
- e) Kalmanovo zosilnenie,
- f) chyba predikcie.

Legenda:

- a) b) c) d) predikcia, filtrácia, meranie,
- e) pozícia, rýchlosť.
- f) chyba predikcie v ose x,

5.2.2.2 Ukážka pre parameter $\sigma_P = 200$ a $\sigma_M = 200$.



Obrázok 5.5. Zobrazenie priebehu:

- a) filtrácia v 3D rovine,
- b) závislosť pozície x na čase,
- c) pohľad v rovine xz,
- d) pohľad v rovine yz,
- e) Kalmanovo zosilnenie,
- f) chyba predikcie.

Legenda:

- a)b)c)d) predikcia, filtrácia, meranie,
- e) pozícia, rýchlosť.
- f) chyba predikcie v ose x,

Kapitola 6

Simulácia radarových dát

V tejto kapitole predvedieme nasimulovanie šumu radarových dát na základe fyzikálnych predpokladov merania. Rozdiel v simulácii z predchádzajúcich kapitol spočíva v tom, že šum merania je pridaný do meraných veličín z radaru, teda do azimutu a vzdialenosti, tak ako sa to deje v realnom prípade. Hodnoty budú následne prepočítane do karteziánskej sústavy čo sa nám prejaví v kovariančnej matici šumu merania.

6.1 Odvodenie simulácie

Pre simuláciu dát použijeme nasledujúci postup:

- predpokladanú strednú hodnotu v karteziánskych súradniciach s obecným stredom prevedieme do lokálnej karteziánskej sústavy so počiatkom v bode radaru,
- stredná hodnota je potom prevedená do lokálnej polárnej sústavy s azimutom a vzdialenosťou,
- v tejto fáze je k dátam pridaný šum so zvolenými parametrami,
- nakoniec sú dáta spätne transformované do karteziánskej sústavy s obecným stredom.

Označme polohu radaru a polohu meraného bodu s obecným stredom vektormi

$$\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix},$$

respektíve

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Pre súradnicu merania so stredom v bode radaru platí

$$\mathbf{p}_L = \mathbf{p} - \mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix}.$$

Ďalej prevedme novú radarovú súradnicu do polárnej sústavy¹

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right),$$

² teda získavame nový vektor v polárnych súradniciach

$$\mathbf{p}_P = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}.$$

V tejto fáze je do súradníc pridaný šum merania teda získaváme bod merania

$$\mathbf{p}_M = \begin{bmatrix} r_M \\ \theta_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \end{bmatrix},$$

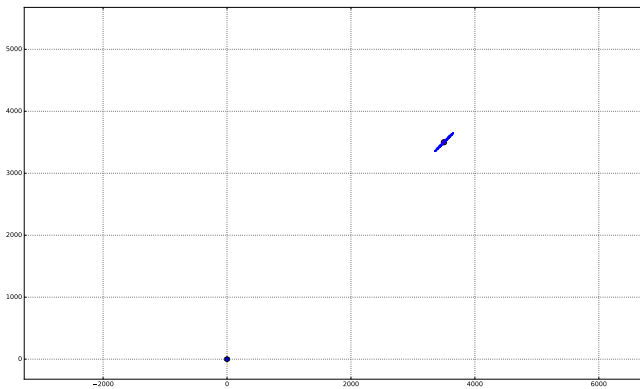
kde $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

¹ Pre zjednodušenie budeme uvažovať dvojdimenzionalny priestor - rovinu radaru.

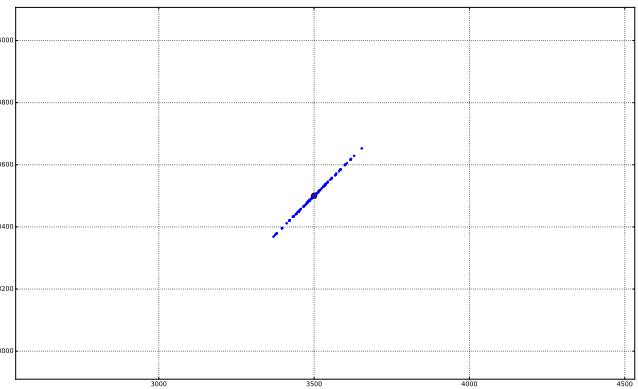
² Poznamenajme, že v simulačnom programe vytvorenom pre účely tejto práce, je implementovaná funkcia atan2(), ktorá rieši problém neurčitosti kvadrantu pri použití tangensu na výpočet azimutu.

6.2 Simulácia šumu meraného bodu vo vzdialenosti

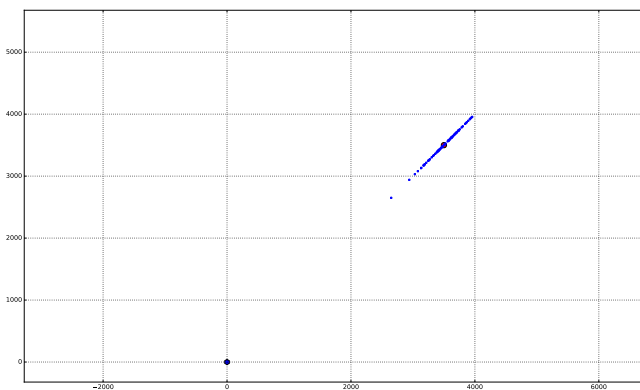
Analogicky uvádzame ukážku merania vzdialenosti bodu pri odizolovaní chyby merania v azimute. Toto meranie nám do systému nevnáša nelinearitu.



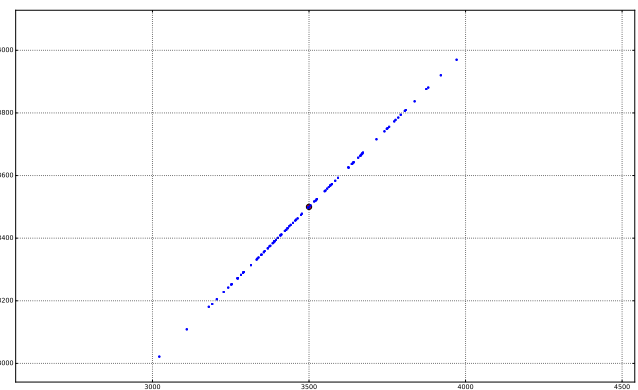
a) Radar a meraný bod.



b) Meraný bod - zoom.



c) Radar a meraný bod.



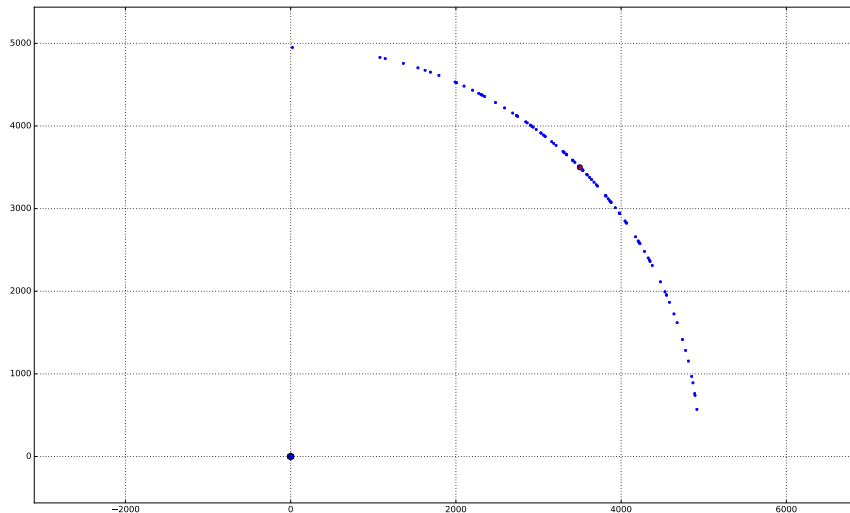
d) Meraný bod - zoom.

veličina	hodnota	jednotka
počet bodov	200	—
poloha radaru	[0,0]	m
poloha meraného bodu	[3500,3500]	m
σ_θ	0	m
obr. a) b) σ_r	100	rad
obr. c) d) σ_r	300	rad

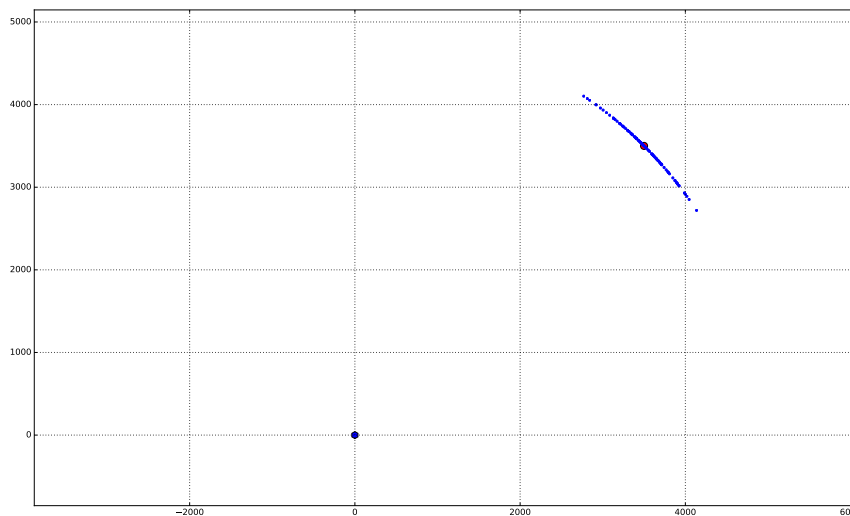
Tabuľka 6.1. Hodnoty parametrov šumu vo vzdialenosti.

6.3 Simulácia šumu meraného bodu v azimute

Na nasledujúcich obrázkoch si môžeme vidieť príklady simulácie pridania šumu do súradnice azimutu pre nižšie uvedené hodnoty smerodatnej odchýlky. Stojí za pozornosť si povšimnúť, že pri zvažovaní úhlu smerodatnej odchýlky, zavádzame do systému nelinearitu ktorú popíšeme nižšie pri určovaní kovariančnej elipsy strednej hodnoty.



a)



b)

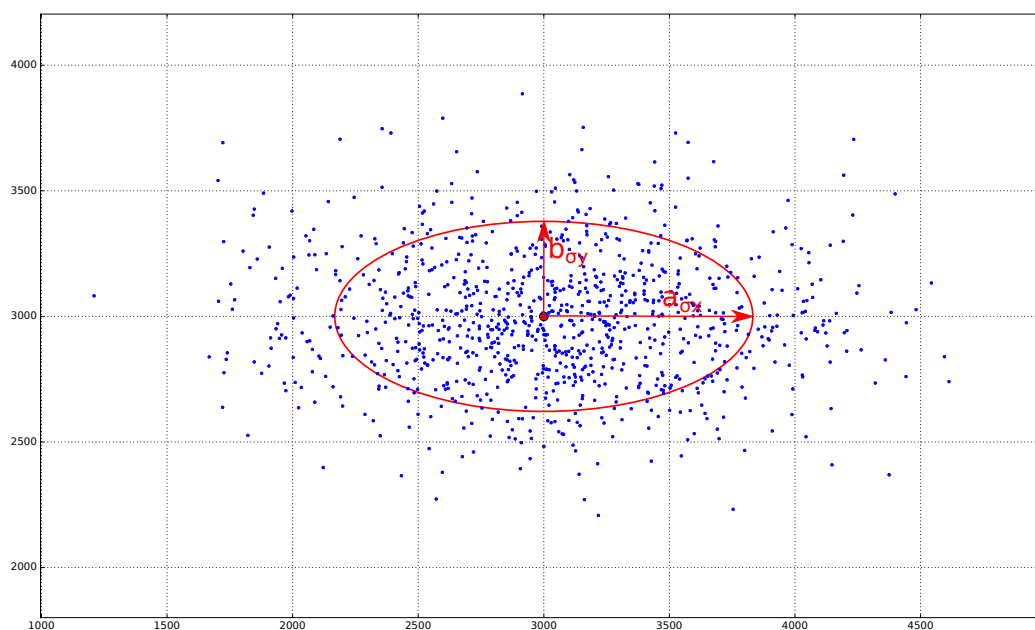
veličina	hodnota	jednotka
počet bodov	200	—
poloha radaru	[0,0]	m
poloha meraného bodu	[3500,3500]	m
σ_r	0	m
obr. a) σ_θ	0.3	rad
obr. b) σ_θ	0.1	rad

Tabuľka 6.2. Hodnoty parametrov šumu v azimute.

6.4 Určenie kovariančnej elipsy pre meranie v kartéziánskych súradniciach.

V mnohých praktických aplikáciách sa využíva určenie pravdepodobného priestoru okolo strednej hodnoty. V dvojdimenzionálnom priestore s Gaussovým rozdelením pravdepodobnosti bude tento priestor ohraničený elipsou (v 3D elipsoidom).¹ V tejto podsekcii si ukážeme výpočet veľkostí hlavnej a vedľajšej poloosi kovariančnej elipsy a jej zobrazenie. Taktiež si ukážeme ako sa tieto elipsy menia vzhľadom na polohu radaru a jeho presnosť, a tiež vzhľadom na polohu meraného bodu voči radaru.

Zaoberajme sa najiskôr prípadom keď je šum merania nekorelovaný, to znamená, že hlavná a vedľajšia poloos elipsy sú rovnobežné s osou x , respektive s osou y tak ako to môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku 6.1.



Obrázok 6.1.

V obecnom prípade môžeme rovnicu elipsy vyjadriť ako

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1,$$

kde a a b sú dĺžky hlavnej a vedľajšej poloosi a bod so súradnicami x_0 a y_0 je počiatok súradnicovej sústavy, čo budeme ďalej v texte uvažovať pri prevode z lokálnej radarovej sústavy do obcej roviny. Za predpokladu že stred uvažovanej elipsy sa nachádza v strede kartéziánskej sústavy môžeme ramená elipsy definovať za pomoci smerodatných odchýliek v smere jednotlivých osí ako

$$\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2 = s, \quad (1)$$

kde s definuje rozsah elipsy a môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu. Podstatné v našom prípade je, ako určiť s tak, aby konečný rozsah elipsy predstavoval nami zvolený interval

¹ V anglickej literatúre nazývaná - error ellipse alebo confidence ellipse.

(priestor) spoľahlivosti (napríklad 95% priestor spoľahlivosti korešponduje s číslom $s = 5.991$).

Uvedené dvojdimenzionálne dáta boli nasimulované tak aby spĺňali Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti s nulovou kovarianciou. To znamená, že aj jednotlivé zložky v x -ovej a y -súradnici majú tiež toto rozdelenie. Z toho vyplýva, že ľavá strana rovnice (1) v skutočnosti reprezentuje súčet druhých mocnín nezávisle normálne rozdelených dátových vzoriek. Pri dostatočnom množstve Gaussovských dát bude súčet druhých mocnín v súlade s tzv. χ^2 (čit. chí kvadrát) rozdelením. Toto je definované pomocou tzv. stupňa voľnosti, ktorý reprezentuje počet neznámych premenných. V našom konkrétnom dvoj dimenzionálnom priestore máme dve neznáme, a teda dva stupne voľnosti. Z toho dôvodu môžeme ľahko získať pravdepodobnosť, že vyššie uvedený súčet, teda s je rovné hodnote spočítanej z χ^2 pravdepodobnosti. V skutočnosti, pretože sa zaujímate o interval spoľahlivosti, budeme hľadať pravdepodobnosť, že s je menšie alebo rovné hodnote ktorú získame použitím χ^2 distribučnej funkcie.¹ Túto hodnotu môžeme získať použitím tabuliek alebo pomocou SW funkcií, ktoré sú implementované v jednotlivých programovacích jazykoch. Ako príklad si môžeme ukázať výpočet veľkosi hlavnej a vedľajšej poloosi z obrázku 6.1. Hodnoty smerodatných odchýliek v tomto prípade sú

$$\sigma_x = 550, \sigma_y = 250.$$

Ďalej budeme požadovať nájdenie veľkostí poloosi, ktoré ohraničujú elipsu 95%-ného intervalu spoľahlivosti. Tento môžeme vyjadriť pomocou nerovnice

$$P(s < 5.991) = 1 - 0.05 = 0.95 \quad (2).$$

DF	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838

Tabuľka 6.3.

Číslo 5.991 sme získali z tabuľky 6.3, kde prvý stĺpec označuje počet stupňov voľnosti a prvý riadok označuje jednotlivé kvantily. Z rovnice (1) potom dostávame, že pre veľkosť hlavnej a vedľajšej poloosi platí

$$a_{\sigma_x} = \sigma_x \cdot \sqrt{s},$$

$$b_{\sigma_y} = \sigma_y \cdot \sqrt{s}.$$

Ak by sme požadovali 68% interval spoľahlivosti, čo predstavuje zhruba jednu smerodatnú odchýlku, potom nerovnosť (2) prejde do tvaru²

$$P(s < 2.2788) = 1 - 0.32 = 0.68 \quad (3).$$

Pre konkrétne hodnoty poloosí teda dostávame

$$a_{\sigma_x} = \sigma_x \cdot \sqrt{s} = 550 \cdot \sqrt{2.2788} = 830.26,$$

$$b_{\sigma_y} = \sigma_y \cdot \sqrt{s} = 250 \cdot \sqrt{2.2788} = 377.39.$$

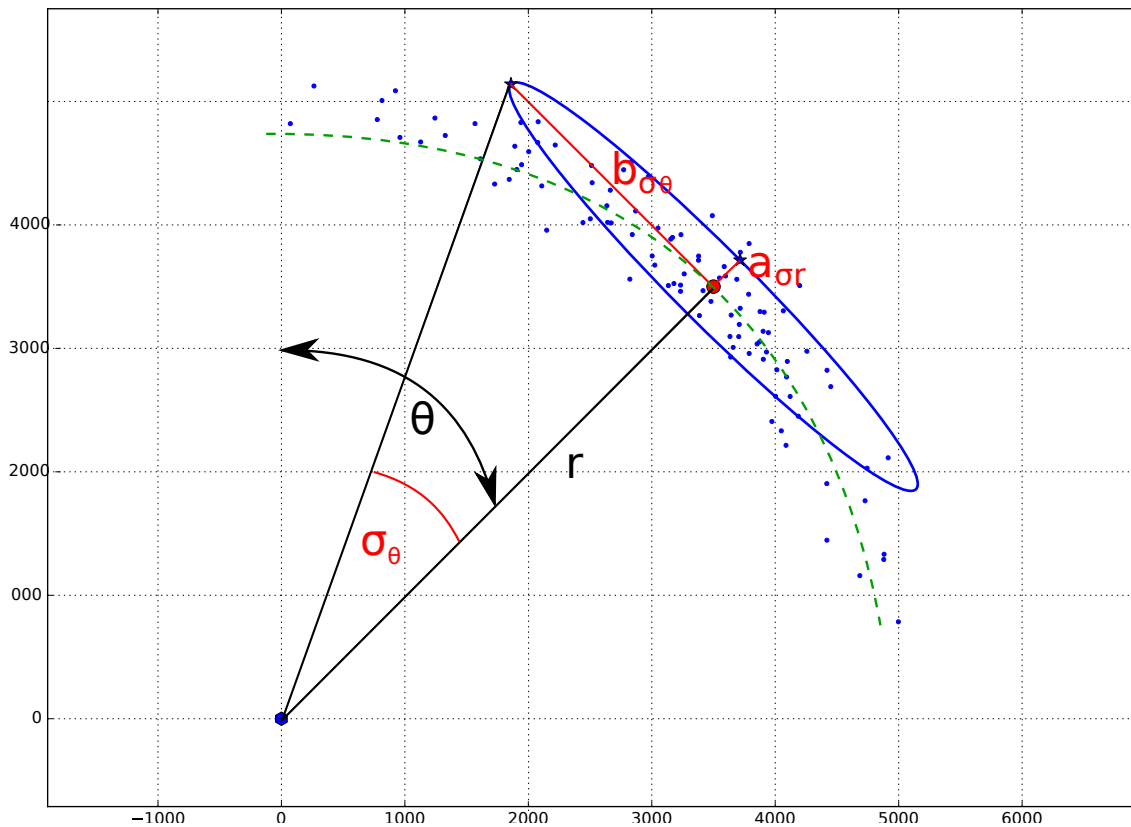
¹ V angličtine Cumulative Chi-Square Distribution Function, CDF.

² Hodnota kvantilu 0.32 v tomto prípade nieje uvedená v tabuľke, ale získali sme ju z knižnice SciPy implementovanú v jazyku Python.

Vyobrazenie elipsy s takýmito veľkosťami poloosí môžeme vidieť na obrázku 6.1. Dôsledok zvolených hodnôt ilustruje aj fakt, že počet náhodne vygenerovaných bodov, vo vnútri zvolenej elipsy, je 676, čo sa približuje k 68%-tám z 1000 vygenerovaných bodov. Táto hodnota samozrejme nieje úplne presná, ale podľa centrálnej limitnej vety bude stredná hodnota počtu bodov vo vnútri zvoleného intervalu konvergovať k nami zvolenej hodnote so zvyšujúcim sa počtom opakovaní náhodných vzoriek dát.

6.5 Určenie kovariančnej elipsy pre meranie v polárnych súradniciach

V týchto prípadoch budeme uvažovať meranie zatažené chybou v azimute ako aj vo vzdialenosti. Na obrázku 6.2 môžeme vidieť simuláciu radaru (modrý hexagon) a strednú hodnotu meraneho bodu (červený krížok).



Obrázok 6.2.

Toto meranie je popísané kovariančnou maticou v polárnych súradniciach

$$\mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200^2 & 0 \\ 0 & 0.3^2 \end{bmatrix}.$$

Zaoberajme sa teraz výpočtom pravdepodobnostného rozloženia okolo danej strednej hodnoty. Hodnotu smerodatnej odchýlky vo vzdialenosti σ_r môžeme priamo použiť ako hodnotu z ktorej budeme počítať veľkosť hlavnej poloosi. Avšak hodnotu smerodatnej odchýlky v azimute je potrebné transformovať do dĺžkovej mieri. Ako môžeme vidieť na obrázku vyššie, poloos b_{σ_θ} predstavuje jednu stranu v pravohulom trojuholníku, ktorý vytvára uhol smerodatnej odchýlky v azimute σ_θ . Táto poloos je zároveň dotyčnica

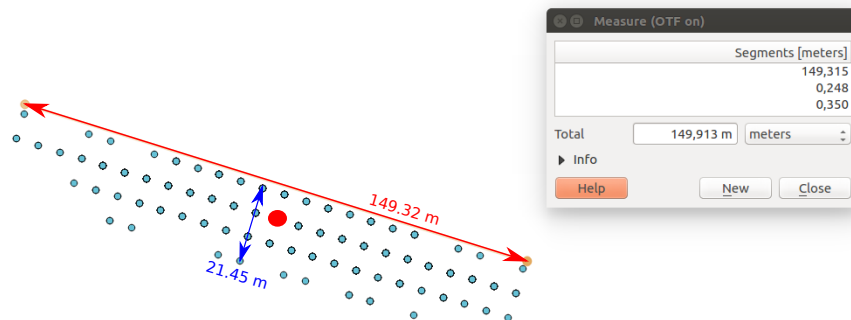
v danom bode, teda je kolmá na fiktívnu kružnicu (zelená kružnica na obr.6.2), ktorú vytvára meranie o polomere r . Veľkosť daného ramena $b_{\sigma\theta}$ určíme ako

$$b_{\sigma\theta} = r \cdot \tan(\sigma_\theta).$$

Kovariančná matica teda prejde do tvaru

$$R_P = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & (r \cdot \tan(\sigma_\theta))^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200^2 & 0 \\ 0 & (4949.74 \cdot \tan(0.3))^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200^2 & 0 \\ 0 & (1531.13)^2 \end{bmatrix}.$$

Vypočítaná hodnota $b_{\sigma\theta}$ však predstavuje linearizovanú hodnotu v bode merania. So zväčšujúc sa hodnotou smerodatnej odchylky azimutu σ_θ sa bude presnosť kovariančnej elipsy znižovať. V praxi sa však nestretávame s tak výrazným odchylením sa, čo ilustruje obrázok 6.3.



Obrázok 6.3.

Na ňom môžeme vidieť vyobrazenie reálne nameraných bodov z radaru Veľký Bučen na juhu Slovenska, tak ako ich zachytí radar z fixného transpondéru, ktorý je umiestnený na vrchu Kráľova Hoľa v Nízkyh Tatrách. Fixný transpondér je zariadenie so známou polohou, ktoré obsahuje sekundárny odpovedáč a používa sa na vyhodnocovanie presnosti radarov.

Všimnime si že elipsa, ktorú sme dostali nemá osi rovnobežné s osami karteziánskej sústavy v ktorej sme napríklad modelovali let v kapitole tri. Táto skutočnosť ukazuje, že dáta ktoré máme vyobrazené na obrázku 6.2, sú v karteziánskej sústave korelované a teda ich kovariančná matica bude mať nenulové prvky mimo hlavnej diagonály. Pootočenie tejto elipsy voči x-ovej osi v karteziánskej sústave môžeme vyjadriť ako

$$\mathbf{R}_K = \mathbf{R}_R \mathbf{R}_P \mathbf{R}'_R$$

kde R_R predstavuje tzv. maticu rotácie vyjadrenú ako¹

$$\mathbf{R}_R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

¹ Uhol α v tomto prípade predstavuje prepočítaný azimut v zmysle, že I. a IV. kvadrant, teda horná polovina súradnicovej sústavy pokrýva rozsah uhlu 0 až 180° ($< 0, \pi$) a dolná polovina, kvadranty II a III, pokrýva rozsah uhlov 0 až -180° ($(0, -\pi)$).

potom výsledná kovariančná matica má tvar

$$R_K = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & (r \cdot \tan(\sigma_\theta))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} =$$

Po vyčíslení s vyššie uvedenými hodnotami a uhlom $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ dostávame

$$R_K = \begin{bmatrix} 1192185.68 & -1152185.68 \\ -1152185.68 & 1192185.68 \end{bmatrix}.$$

Ukážme teraz opačný prípad, a to, ako z kovariančnej matice pre korelovaný šum určíme dĺžky poloosí elipsy a uhol sklonu hlavnej poloosi voči osi x. V našom prípade za hlavnú poloos pokladáme rameno, ktorého dĺžka odpovedá smerodatnej odchýlke vo vzdialenosti značenej σ_r . Pre určenie veľkosti poloosí elipsy je potrebné nájsť tzv. **vlastné čísla** a **vlastné vektory** kovariančnej matice R_K . Uvedme teda definície daných pojmov, ktoré môžeme nájsť napr. v [6].

Definícia 6.1. *Vlastné číslo, vlastný vektor.* - Nech \mathbf{A} je štvorcová matica typu (n, n) reálnych alebo komplexných čísel. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ sa nazýva *vlastné číslo* matice \mathbf{A} , ak existuje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{(n,1)}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, taký, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. Vektor \mathbf{x} , ktorý spĺňa uvedenú rovnosť, sa nazýva *vlastný vektor* matice \mathbf{A} príslušný vlastnému číslu λ .

Dôsledok 6.1. Z rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ plynie, že $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Pretože z definície musí platiť $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, je treba, aby sústava mala nenulové riešenie, teda musí platiť $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

Samotnú techniku výpočtú je možné nájsť v už vyššie spomenutej knihe [6], prípadne použiť software. Uvedme teraz hodnoty vlastných čísel a vlastných vektorov matice R_K , ktoré sú

$$\lambda_1 = 40000.0, \quad \lambda_2 = 2344371.4,$$

ktorým odpovedajú vlastné vektory

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.70710678 \\ 0.70710678 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.70710678 \\ -0.70710678 \end{bmatrix}.$$

Všimnime si, že odmocniny z vlastných čísel

$$\sqrt{\lambda_1} = 200, \quad \sqrt{\lambda_2} = 1531.13,$$

predstavujú nami zvolené hodnoty smerodatnej odchylky vo vzdialenosti σ_r a lineari-zovanú hodnotu smerodatnej odchýlky v azimute $r \cdot \tan(\sigma_\theta)$. Aby sme získali poloosí odpovedajúce pravdepodobnostnému priestoru, je opäť potrebné použiť hodnotu odpovedajúcu n -%-tnému priestoru, ktorej výpočet sme uvideli v predošlej sekcii. V prípade 68% sme dostali číslo 2.2788 teda dĺžky ramien elipsy budú

$$a_{\sigma_r} = \sqrt{2.778\lambda_1} = 333.3$$

$$b_{\sigma_\theta} = \sqrt{2.778\lambda_2} = 2551.9$$

Sklon osi a_{σ_r} voči x-ovej osi ďalej môžeme vypočítať ako

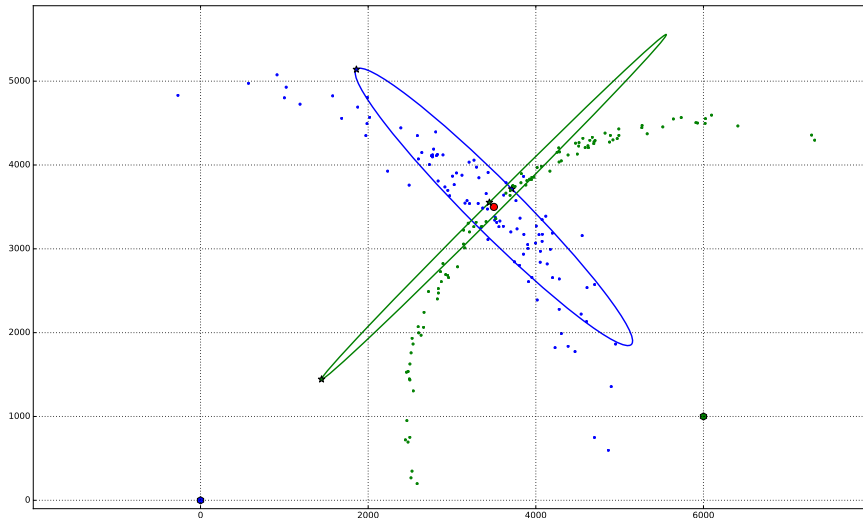
$$\alpha = \arctan \frac{\mathbf{v}_2(y)}{\mathbf{v}_2(x)} = 0.7854 = 45^\circ,$$

čo ako vidíme na obrázku 6.2, odpovedá súradnici [3500,3500] v karteziánskej sustave.

V praxi je opäť potrebné ošetriť, ktorý uhol počítaný z vlastných vektorov, odpovedá nami zvolenému uhlu s ktorým pracujeme. V simulačných programoch, vytvorených pre účely tejto práce, boli pre ošetrenie medzi prechodmi cez kvadranty použitá funkcia `atan2()` a tiež funkcia `azimToDeg()` na prepočet azimutu do uhlu v danom kvadrante voči x-ovej osi.

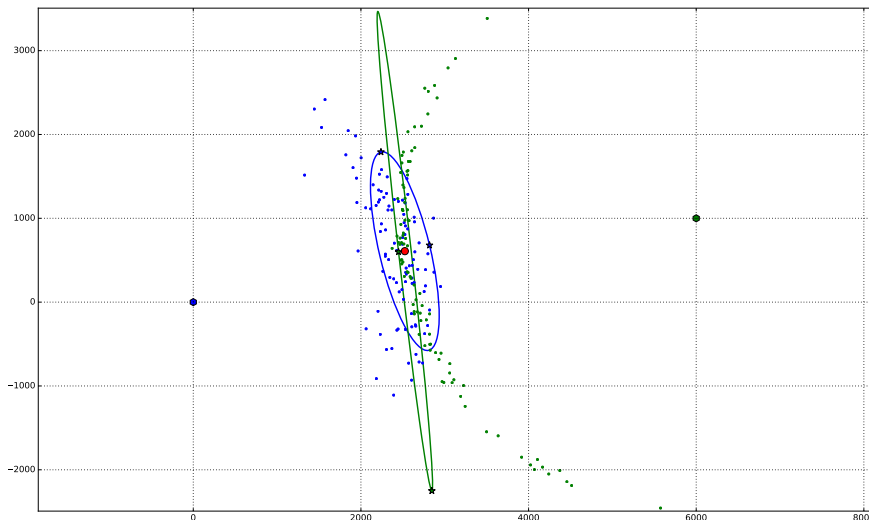
6.5.1 Ukážky nastavení rôznych šumových parametrov

Nasledujúce obrázky ukazujú vyobrazenie šumových vlastnosti pre rôzne pozície radaru voči meranému bodu, ako aj pre rôzne hodnoty nastavenia presnosti v jednotlivých polárnych súradniciach. Ďalej môžeme vidieť kovariančnú elipsu a v tabuľke popis koľko percent šumových bodov by mala obsahovať. Taktiež je pri každom obrázku uvedená kovariančná matica šumu z jednotlivých radarov.



Obrázok 6.4. Poloha strednej hodnoty [3500,3500]

$$R1_K = \begin{bmatrix} 72935.1 & -137229.7 \\ -137229.7 & 611790.60 \end{bmatrix} \quad R2_K = \begin{bmatrix} 17340.0 & -130845.5 \\ -130845.5 & 1156174.7 \end{bmatrix}$$

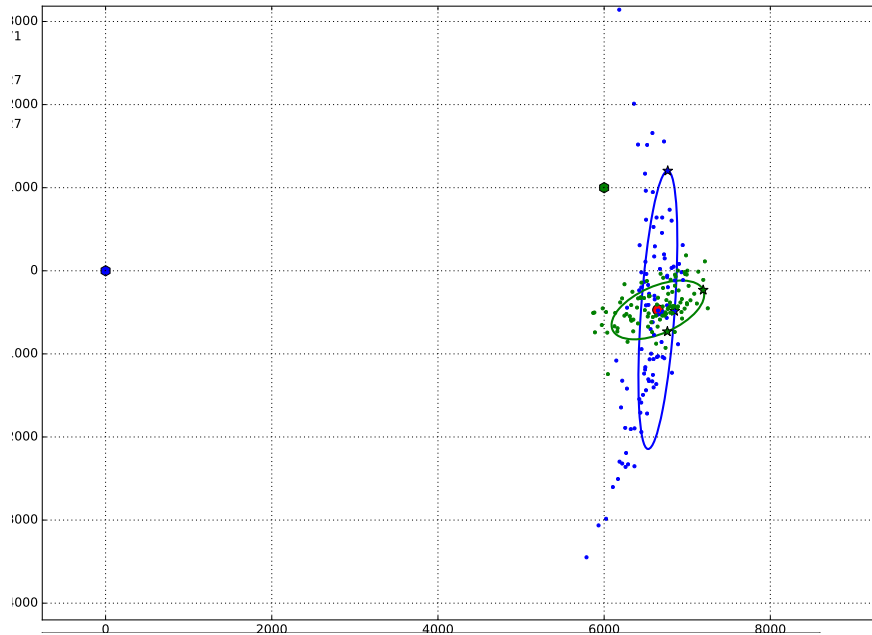


Obrázok 6.5. Poloha strednej hodnoty [2523,608]

$$R1_K = \begin{bmatrix} 1192189.2 & -1152189.2 \\ -1152189.2 & 1192189.2 \end{bmatrix} \quad R2_K = \begin{bmatrix} 1866540.0 & 1864040.0 \\ 1864040.0 & 1866540.0 \end{bmatrix}$$

	R1		R2	
počet bodov šumu	200	—	200	—
poloha radaru	[0,0]	m	[6000,1000]	m
počet percent	68.27	%	68.27	%
σ_r	200	m	50	m
σ_θ	0.3	rad	0.5	rad

Tabuľka 6.4. Hodnoty parametrov šumu radarov pre obrázky 6.4 a 6.5.



Obrázok 6.6. Poloha strednej hodnoty [6646,-471]

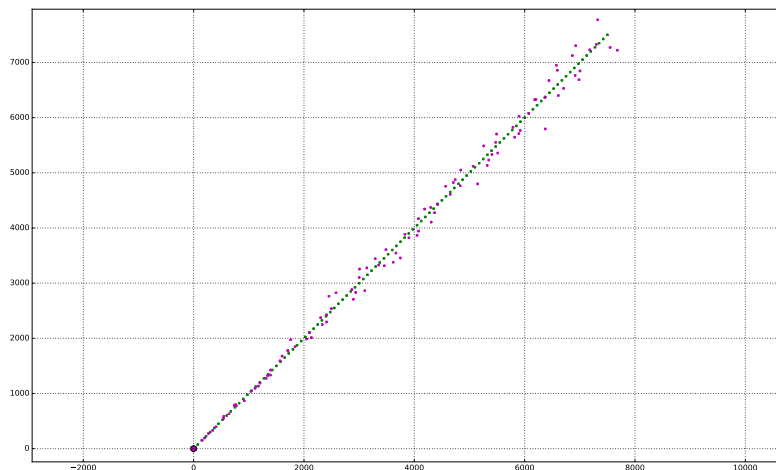
$$R1_K = \begin{bmatrix} 33790.9 & 280969.3 \\ 280969.2 & 3977548.2 \end{bmatrix} \quad R2_K = \begin{bmatrix} 197949.8 & -143108.8 \\ -143108.9 & 460633.3 \end{bmatrix}$$

	R1		R2	
počet bodov šumu	200	—	200	—
poloha radaru	[0,0]	m	[6000,1000]	m
počet percent	67.27	%	69.27	%
σ_r	134	m	185	m
σ_θ	0.17	rad	0.24	rad

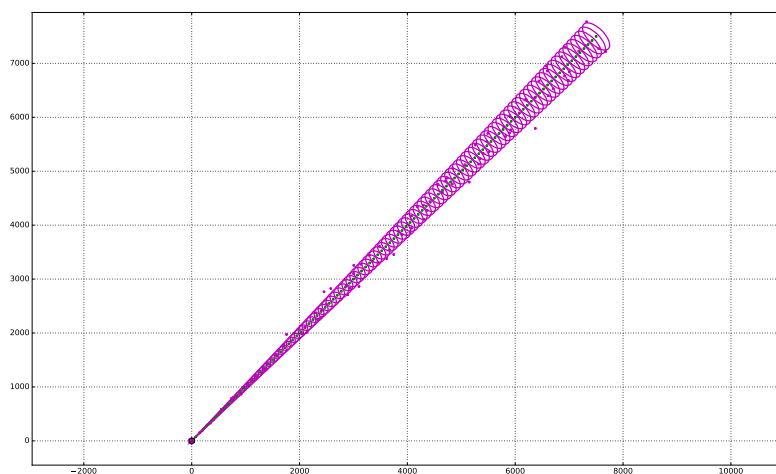
Tabuľka 6.5. Hodnoty parametrov šumu radarov pre obrázok 6.6.

6.5.2 Simulácia šumu merania modelu letu

Ukážka simulácie šumu radarových dát v azimute pre rôzne polohy voči radaru. Pri skúmaní obrázkov môžeme vidieť závislosť šumu na vzdialenosti a polohe radaru od modelovaného letu. Pri každom každej sérii parametrov môžeme vidieť vyobrazené dáta ako aj pravdepodobnostný priestor.



Obrázok 6.7.

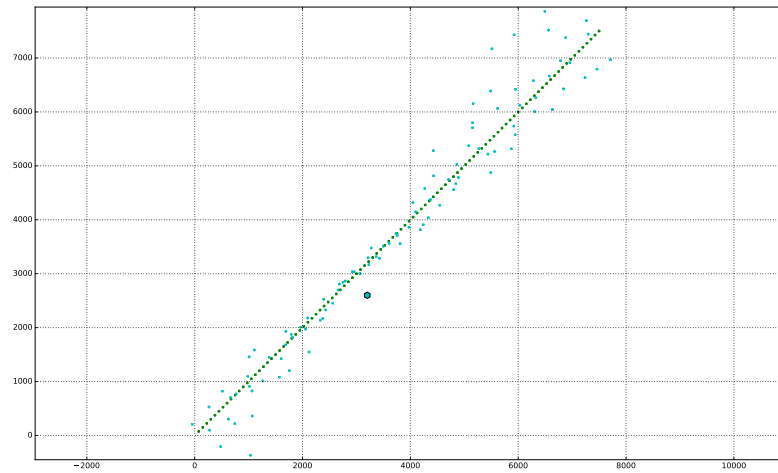


Obrázok 6.8.

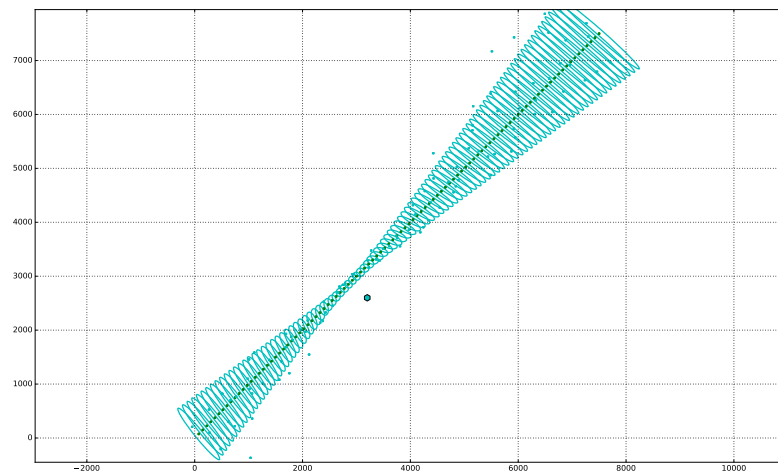
veličina	hodnota	jednotka
počet bodov modelu	100	—
počet bodov šumu	100	—
poloha radaru	[0,0]	m
rýchlosť modelu v_x	250	m
rýchlosť modelu v_y	250	m
σ_r	100	m
σ_θ	0.02	rad
počet percent	68	%

Tabuľka 6.6. Hodnoty parametrov modelu a šumu pre obrázky 6.8 a 6.9.

Na nasledujúcej dvojici obrázkov si môžeme všimnúť ako sa mení natočenie eliptického priestoru podľa simulovaného preletu lietadla okolo radaru.



Obrázok 6.9.



Obrázok 6.10.

veličina	hodnota	jednotka
počet bodov modelu	100	—
počet bodov šumu	100	—
poloha radaru	[3200,2600]	m
rýchlosť modelu v_x	250	m
rýchlosť modelu v_y	250	m
σ_r	50	m
σ_θ	0.1	rad
počet percent	68	%

Tabuľka 6.7. Hodnoty parametrov modelu a šumu.

Kapitola 7

Dátová fúzia

V moderných radarových systémoch je potrebné pracovať s dátami z mnohých radarov súčasne. Aby bolo možné pracovať s rodielnymi dátami s rôznymi stochastickými vlastnosťami je potrebné tieto dáta zlučovať na princípe dátovej fúzie. V tejto kapitole si ukážeme dva rozdielne prístupy zlučovania dát. Obidve možnosti sú založené na princípoch metódy maximálnej vierohodnosti (MLE)¹ a predvedieme ich simulácie.

7.1 Dátová fúzia na princípe ML odhadu

Použitie metódy **maximálnej vierohodnosti** je vhodné v situáciách, kedy nemáme žiadnu apriornu znalosť o odhadovanej **deterministickej** veličine \mathbf{p} , ale máme predstavu o závislosti meranej veličiny \mathbf{z} na tejto odhadovanej deterministickej veličine \mathbf{p} . Táto závislosť je popísaná podmienenou hustotou pravdepodobnosti $p(\mathbf{z}|\mathbf{p})$. Pre dané meranie \mathbf{z} môžeme túto podmienenú hustotu pravdepodobnosti interpretovať ako funkciu odhadovanej veličiny \mathbf{p} ,

$$l(\mathbf{p}|\mathbf{z}) = p(\mathbf{z}|\mathbf{p}),$$

ktorú nazývame **vierohodnostná funkcia**. Maximálne vierohodný odhad $\hat{\mathbf{p}}_{ML}(\mathbf{z})$ je definovaný ako hodnota \mathbf{p} , ktoré maximalizuje vierohodnosť pre pozorované dáta

$$\hat{\mathbf{p}}_{ML}(\mathbf{z}) = \arg \max_{\mathbf{p}} l(\mathbf{p}|\mathbf{z}).$$

Pretože hustoty pravdepodobnosti majú často tvar exponenciálnej funkcie a funkcia $\ln(\cdot)$ je monotónne rastúca, je v mnohých prípadoch výhodné maximalizovať logaritmus vierohodnostnej funkcie. Ak je táto logaritmická vierohodnostná funkcia diferencovateľná, dostávame nutnú podmienku maxima v tvare takzvanej **vierohodnostnej rovnice**

$$\left. \frac{\partial \ln l(\mathbf{p}|\mathbf{z})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}_{ML}} = 0.$$

Pretože \mathbf{p} je považované za deterministickejšiu veličinu, nemá v tejto súvislosti zmysel hovoriť o opačne podmienenej hustote pravdepodobnosti $p(\mathbf{p}|\mathbf{z})$, s ktorou pracuje Bayesovský odhad.

7.1.1 ML odhad pre šum s Gaussovským pravdepodobnostným rozdelením

Uvažujme model merania neznámej veličiny \mathbf{p} zataženej normálne rozdeleným šumom

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{p} + \mathbf{e},$$

kde $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$, teda

$$p_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) = (2\pi)^{-n_z/2} |\mathbf{R}|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}}.$$

¹ Z anglického Maximum Likelihood Estimation.

Pretože veličina \mathbf{z} vznikla (pre danú hodnotu \mathbf{p}) lineárnou transformáciou veličiny \mathbf{e} jednotkovou transformačnou maticou

$$\mathbf{z} = \mathbf{Ie} + \mathbf{Hp}$$

bude podmienená hustota pravdepodobnosti

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{p}) = p_e(\mathbf{z} - \mathbf{Hp})$$

a vierohodnosť funkcia \mathbf{p} pre dané \mathbf{z} potom bude daná

$$l(\mathbf{p}|\mathbf{z}) = p_e(\mathbf{z} - \mathbf{Hp}) = (2\pi)^{-n_z/2} |\mathbf{R}|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{Hp})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{Hp})}.$$

Logaritmus vierohodnostnej funkcie bude

$$\ln l(\mathbf{p}|\mathbf{z}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{Hp})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{Hp}) - \frac{n_z}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{R}|.$$

Odtiaľ dostávame vierohodnostnú rovnicu

$$\frac{\partial \ln l(\mathbf{p}|\mathbf{z})}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{Hp}) = 0.$$

Pre normálne rozdelenie šumu teda

$$\hat{\mathbf{p}}_{ML} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z} \quad (1)$$

Všimnime si, že zatiaľ čo kvadratické kritéria používané pre MS¹ odhad váhujú priamo **chyby odhadu parametrov**

$$J_{MS} = E\{(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_{MS})^T (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_{MS})\},$$

aplikácia metódy maximálnej vierohodnosti vedie v prípade Gausovského šumu merania na maximalizáciu vierohodnostnej funkcie, čo je ekvivalentné minimalizácii kvadratického kritéria

$$J_{ML} = E\{(\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{p}}_{ML})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{p}}_{ML})\}.$$

Metóda maximálnej vierohodnosti teda minimalizuje **vážený súčet štvorcov chýb predikcie výstupu** (reziduí)

$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{p}}_{ML})$$

a ako váhovú maticu používa maticu presnosti \mathbf{R}^{-1} .

Vyšetríme opäť základné vlastnosti odhadu metódou maximálnej vierohodnosti. Odhad (1) je nevychýlený, keďže (pripomeňme, že odhadujeme deterministickú veličinu \mathbf{p})

$$\begin{aligned} E\{\hat{\mathbf{p}}_{ML}|\mathbf{p}\} &= E\{(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}|\mathbf{p}\} = \\ &= E\{(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Hp} + \mathbf{e})|\mathbf{p}\} = \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Hp} = \\ &= \mathbf{p} \end{aligned}$$

Kovariančná matica chyby odhadu je

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{p}}_{ML}} &= E\{(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_{ML})(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_{ML})^T \mathbf{z}|\mathbf{p}\} = \\ &= E\{(\mathbf{p} - (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Hp} + \mathbf{e})) \times (\mathbf{p} - (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Hp} + \mathbf{e}))^T |\mathbf{p}\} = \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T|\mathbf{p}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \end{aligned}$$

a teda

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{p}}_{ML}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1}. \quad (2)$$

Pomocou zavedenej kovariančnej matice chyby ML odhadu (2) môžeme upraviť vzťah pre odhad (1) na tvar

$$\hat{\mathbf{p}}_{ML} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{p}}_{ML}} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}.$$

¹ Z anglického Mean squared error.

7.2 Ukážka ML odhadu pre meranie v polárnych súradniciach

V tomto prípade budeme opäť uvažovať kovariančné matice s nenulovými mimo-diagonálnymi prvkami. Majme teda opäť vektory merania tento krát popísané v polárnych súradniciach pre každý radar, v obecných pravouhlych a s príslušnými kovariančnými maticami

$$\mathbf{z}_{1P} = \begin{bmatrix} z_{r1} \\ z_{\theta1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4461.9 \\ 1.413 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{z}_{1K} = \begin{bmatrix} 4406.5 \\ 701.6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_{2P} = \begin{bmatrix} z_{r2} \\ z_{\theta2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1971.9 \\ 5.455 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{z}_{2K} = \begin{bmatrix} 4548.1 \\ 2334.3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{1P} = \begin{bmatrix} \sigma_{r1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300^2 & 0 \\ 0 & 0.3^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{2P} = \begin{bmatrix} \sigma_{r2}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150^2 & 0 \\ 0 & 0.4^2 \end{bmatrix}.$$

Ich linearizovaný tvar potom bude

$$\mathbf{R}_{1PL} = \begin{bmatrix} \sigma_{r1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{r1}^2 & 0 \\ 0 & (r_1 \cdot \tan(\sigma_{\theta1}))^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300^2 & 0 \\ 0 & 1383.4^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{2PL} = \begin{bmatrix} \sigma_{r2}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{r2}^2 & 0 \\ 0 & (r_2 \cdot \tan(\sigma_{\theta2}))^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150^2 & 0 \\ 0 & 945.3^2 \end{bmatrix},$$

ďalej použijeme maticu rotácie a dostávame

$$\mathbf{R}_{1K} = \mathbf{R}_R(\alpha_1) \mathbf{R}_{1PL} \mathbf{R}_R(\alpha_1)^T = \begin{bmatrix} 454949.4 & -729627.5 \\ -729627.5 & 1548712.6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{2K} = \mathbf{R}_R(\alpha_2) \mathbf{R}_{2PL} \mathbf{R}_R(\alpha_2)^T = \begin{bmatrix} 196942.7 & 348772.3 \\ 348772.3 & 719818.4 \end{bmatrix}.$$

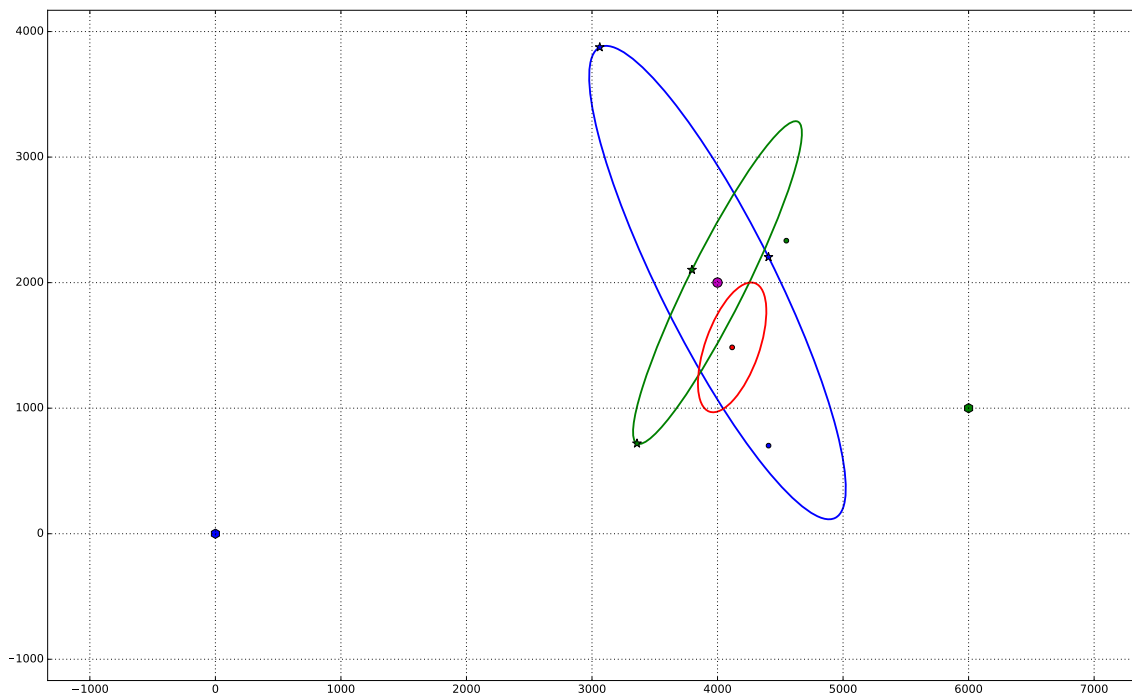
Opäť aplikujme estimátor a pre kovarianciu chyby odhadu dostávame

$$\mathbf{P}_{\hat{p}_{ML}} = [\mathbf{R}_{1K}^{-1} + \mathbf{R}_{2K}^{-1}]^{-1} = \begin{bmatrix} 32294.0 & 34029.5 \\ 34029.5 & 116312.0 \end{bmatrix},$$

a samotný odhad

$$\hat{\mathbf{p}}_{ML} = \mathbf{P}_{\hat{p}_{ML}} \cdot [\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{z}_1 + \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{z}_2] = \begin{bmatrix} 4116.4 \\ 1484.2 \end{bmatrix}.$$

Vyobrazenie nameraných dát aj s ML odhadu môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku 7.2.

**Obrázok 7.1.**

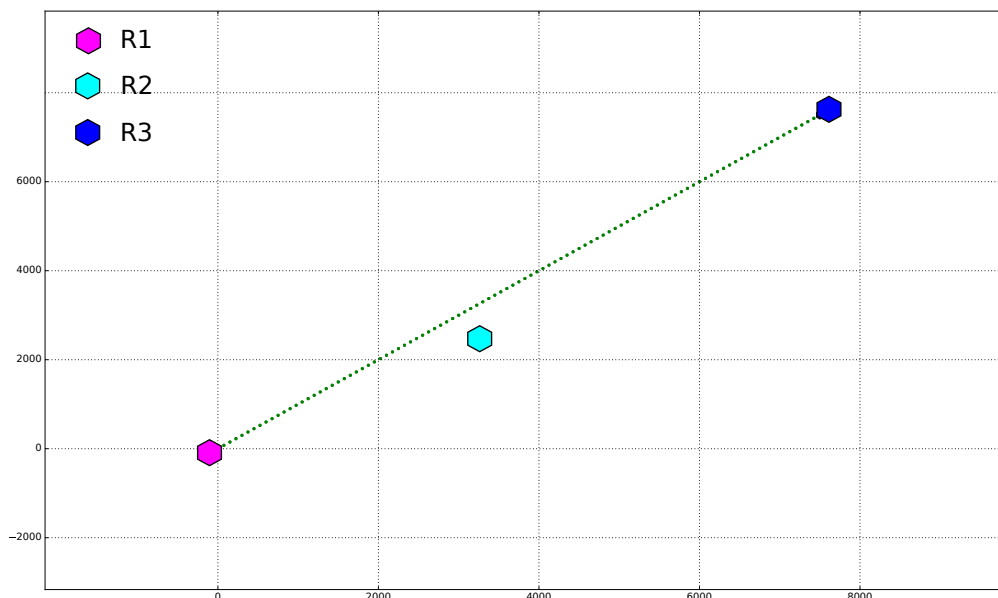
Poznamenajme, že vyobrazené kovariančné elipsy sú so stredom v strednej hodnote z ktorej bolo nasimulované meranie. Samotný ML odhad sa ale týka kovariančných elíps okolo meraných bodov, ktoré momentálne nie sú zobrazené.

7.3 Ukážka ML odhadu pre model merania letu

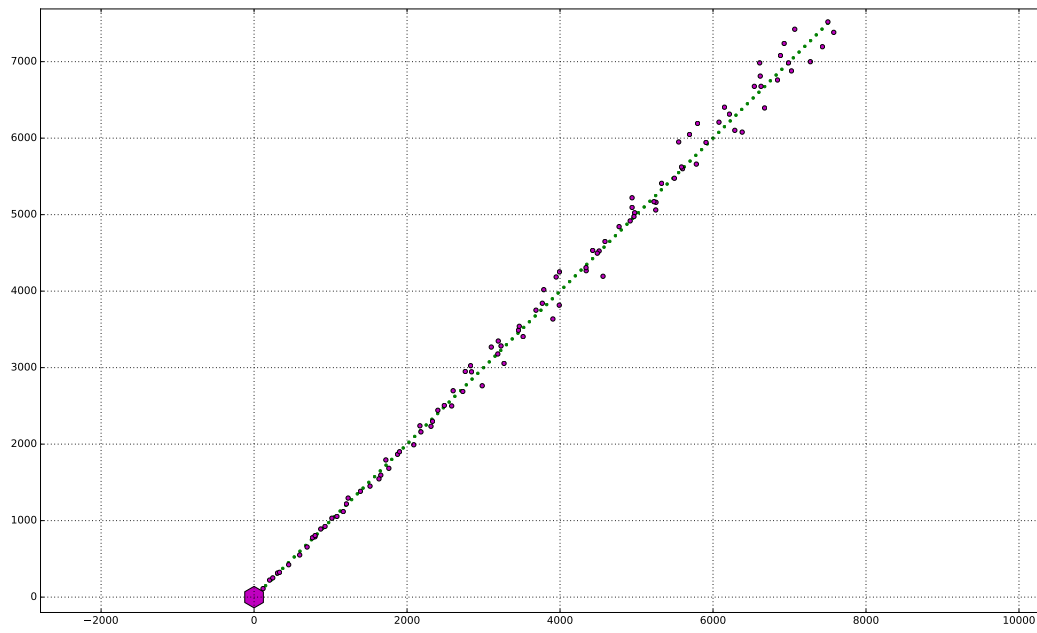
V nasledujúcich podsekciiach si predvedieme ako sa ML odhad zobrazí pri spajaní rôznych dát z rôznych radarov a ako toto spojenie vyzerá v rozličných fázach letu. Na prvom obrázku sú vyobrazené dáta z oboch radarov a ich vzájomné polohy, na druhom je samotný ML odhad. Tretí obrázok vyobrazuje kovariančný priestor okolo jednotlivých bodov. Základne postavenie a parametre radarov sú vyobrazené na obrázku 7.3 a v tabuľke 7.1. Nasimulované dáta z radarov vyobrazené jednotlivo môžeme vidieť na obrázkoch 7.3, 7.4, 7.5.

veličina	Radar 1	Radar 2	Radar 3	jednotka
farba	fialová	tyrkysová	tmavomodrá	-
počet bodov modelu	100	100	100	—
počet bodov merania	100	100	100	—
poloha radaru	[0,0]	[3200,2600]	[7500,7500]	m
σ_r	100	50	250	m
σ_θ	0.02	0.1	0.06	rad
počet percent	68	68	68	%

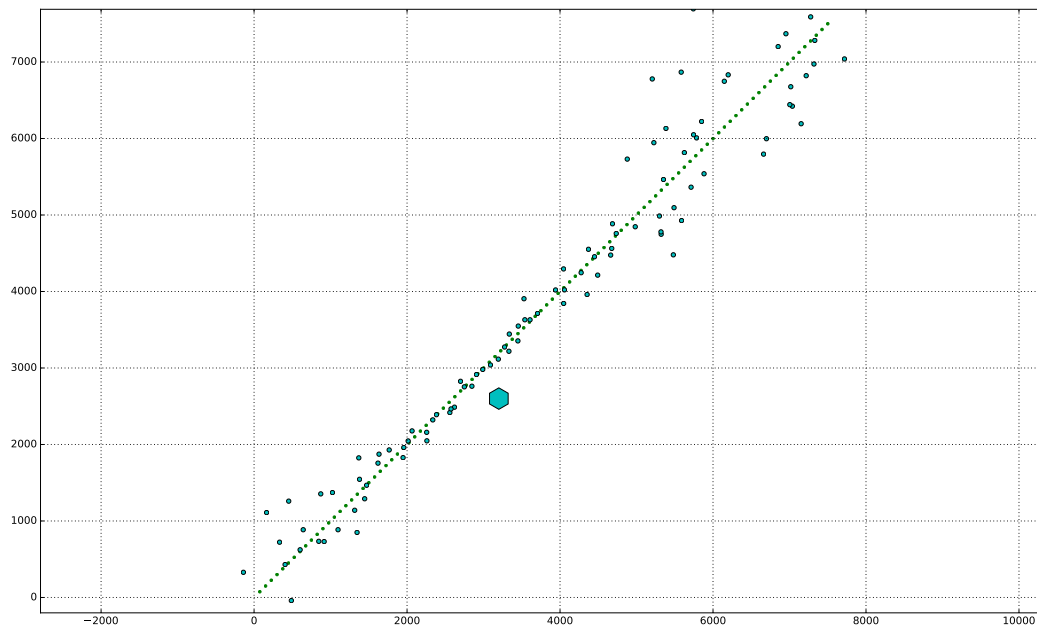
Tabuľka 7.1. Hodnoty parametrov modelu merania pre tri simulované radary.



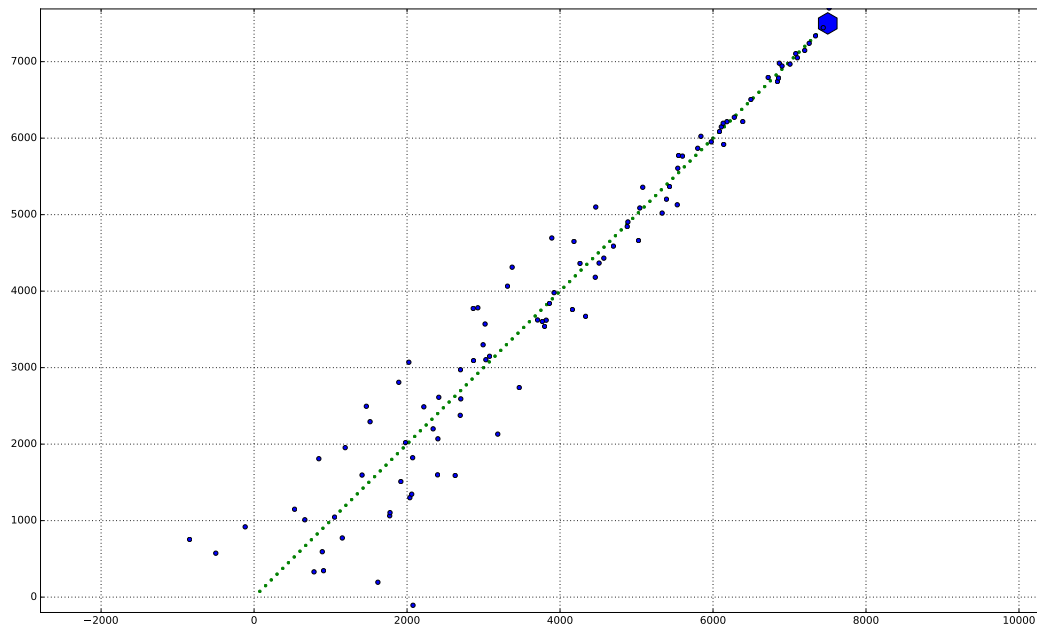
Obrázok 7.2. Polohy radarov ktoré sú použité k ML odhadu.



Obrázok 7.3. Dáta s korelovaným šumom z radaru R1.



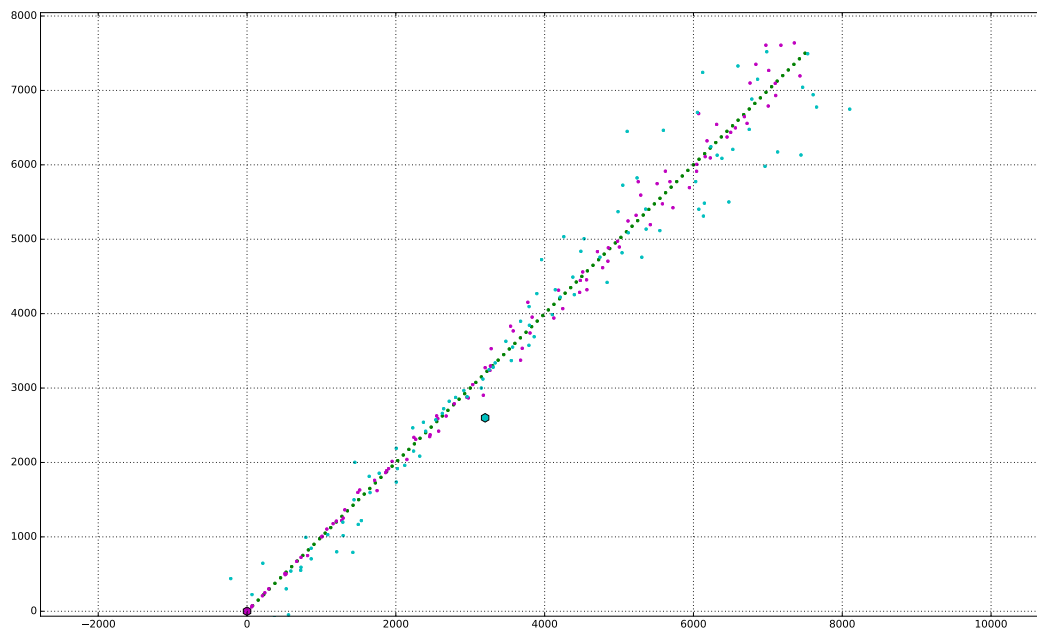
Obrázok 7.4. Dáta s korelovaným šumom z radaru R2.



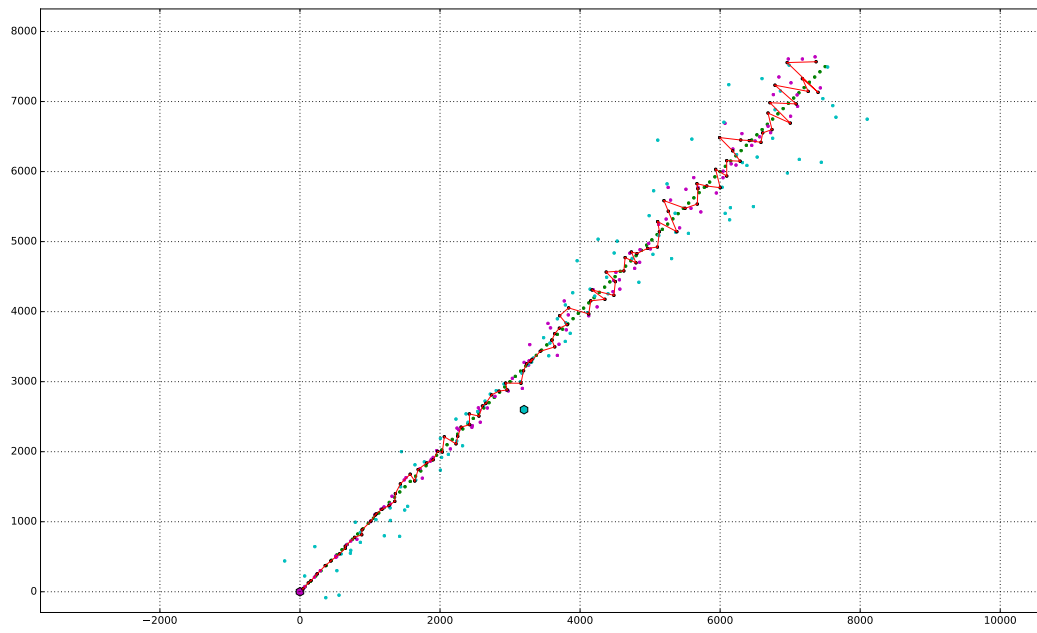
Obrázok 7.5. Dáta s korelovaným šumom z radaru R3.

7.3.1 ML odhad radarov R1 a R2

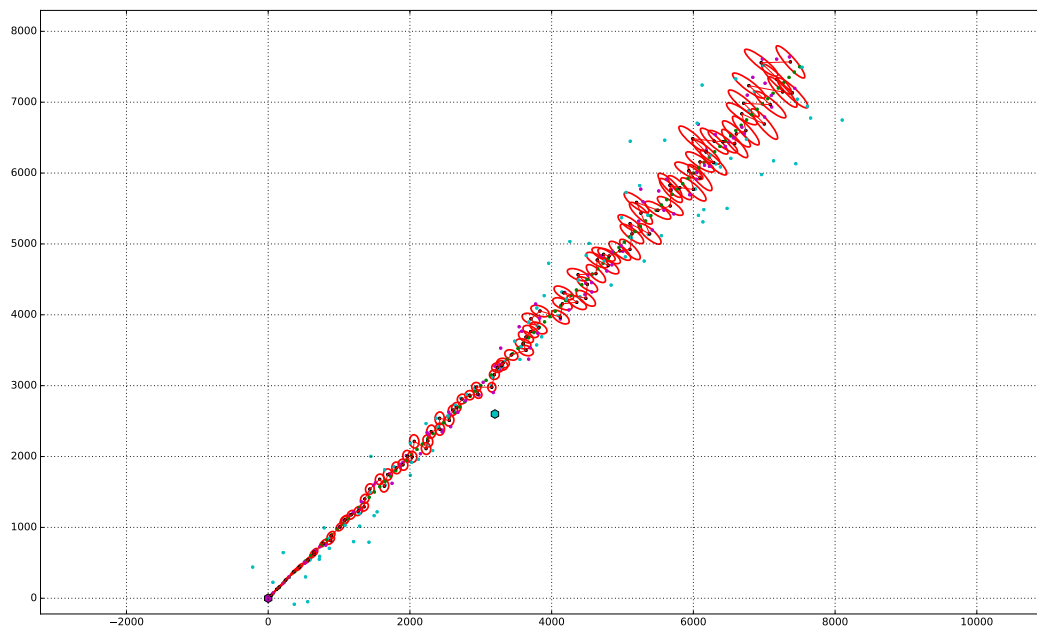
Tento príklad ukazuje, že napresnejší odhad sa nachádza v prvej tretine letu a ďalej naberajú oba radary chybu v azimute.



Obrázok 7.6. Dáta s korelovaným šumom z radarov R1 a R2.



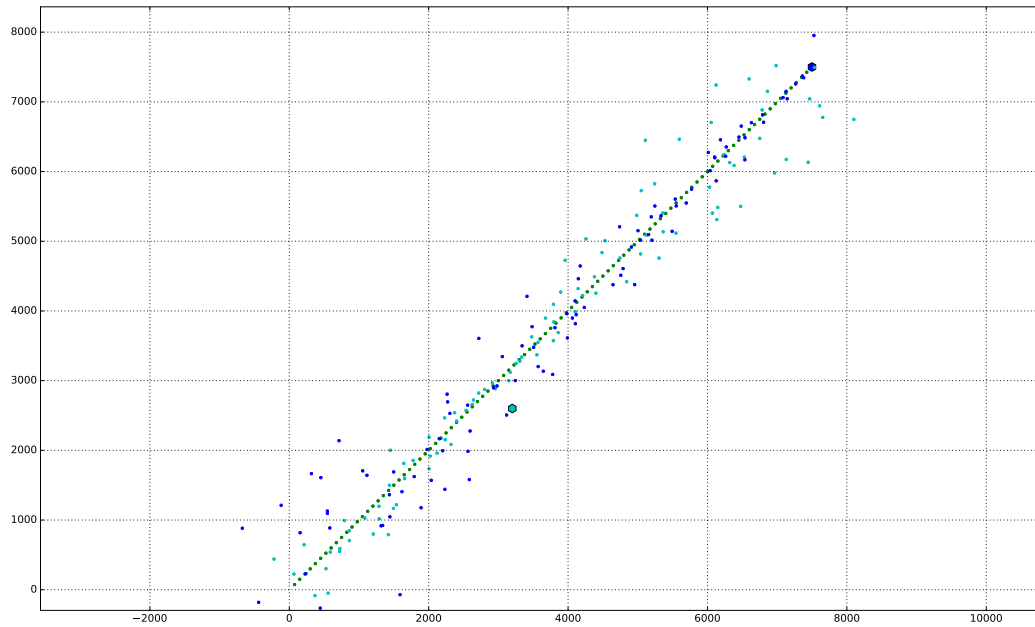
Obrázok 7.7. ML odhad dát z radarov R1 a R2.



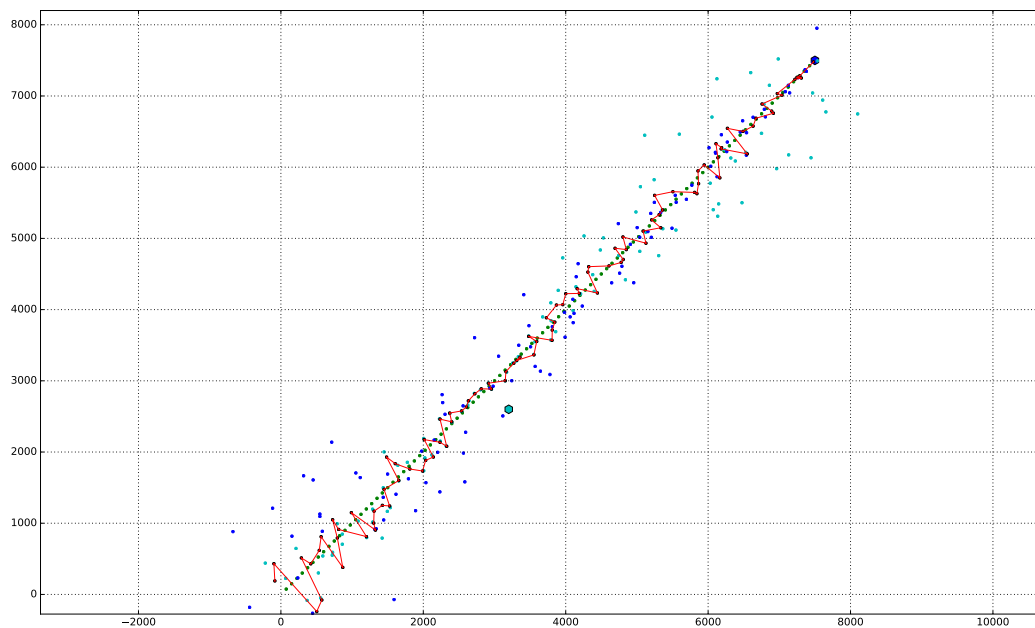
Obrázok 7.8. Vyobrazenie kovariančných priestorov okolo ML odhadu radarov R1 a R2.

7.3.2 ML odhad radarov R2 a R3

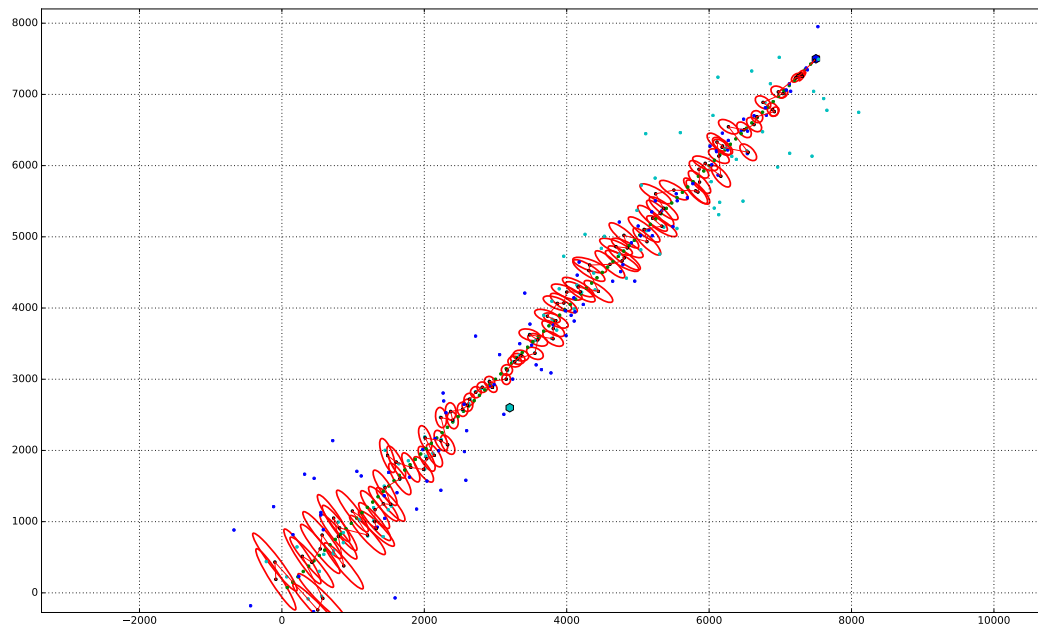
V tomto prípade je najpresnejší odhad okolo radaru R2.



Obrázok 7.9. Dáta s korelovaným šumom z radarov R2 a R3.



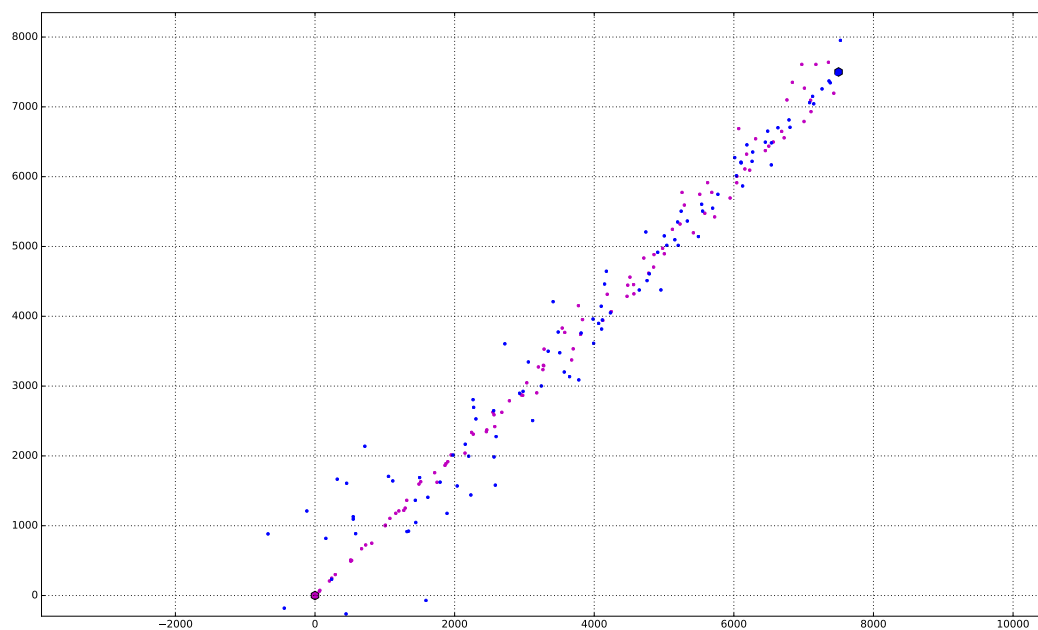
Obrázok 7.10. ML odhad dát z radarov R2 a R3.



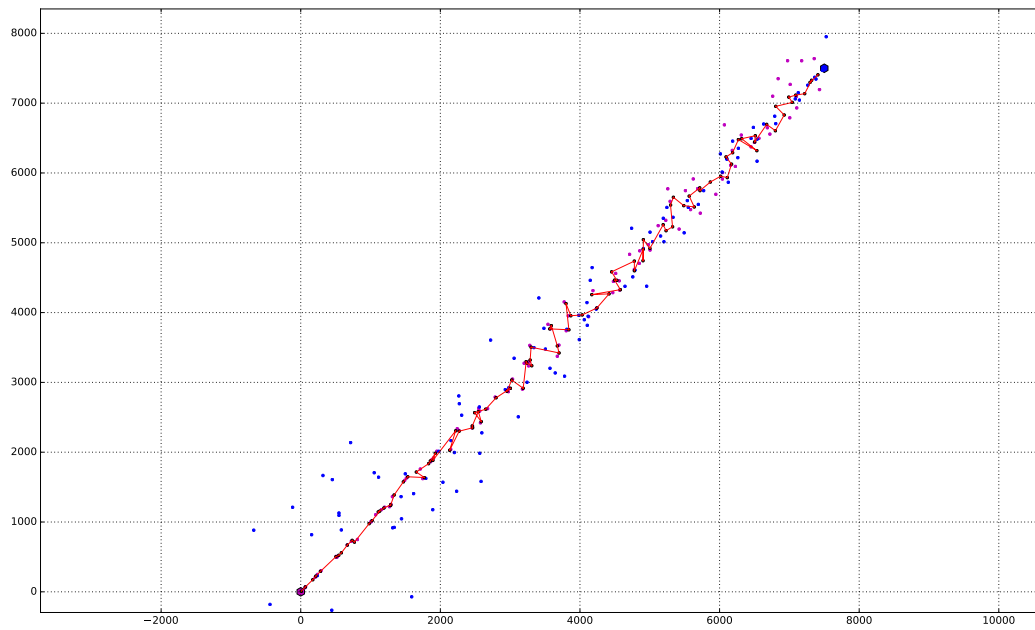
Obrázok 7.11. Vyobrazenie kovariančných priestorov okolo ML odhadu radarov R2 a R3.

7.3.3 ML odhad radarov R1 a R3

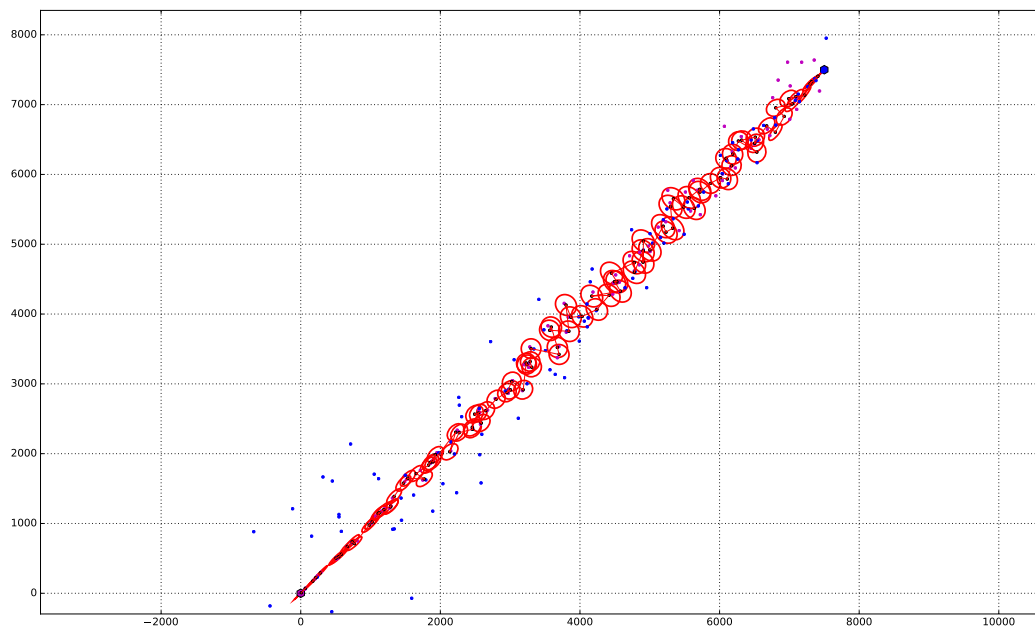
Radary R1 a R3 sú rámci modelu letu umiestnené oproti sebe. Ich odhad je teda v strede letu najnepresnejší.



Obrázok 7.12. Dáta s korelovaným šumom z radarov R1 a R3.



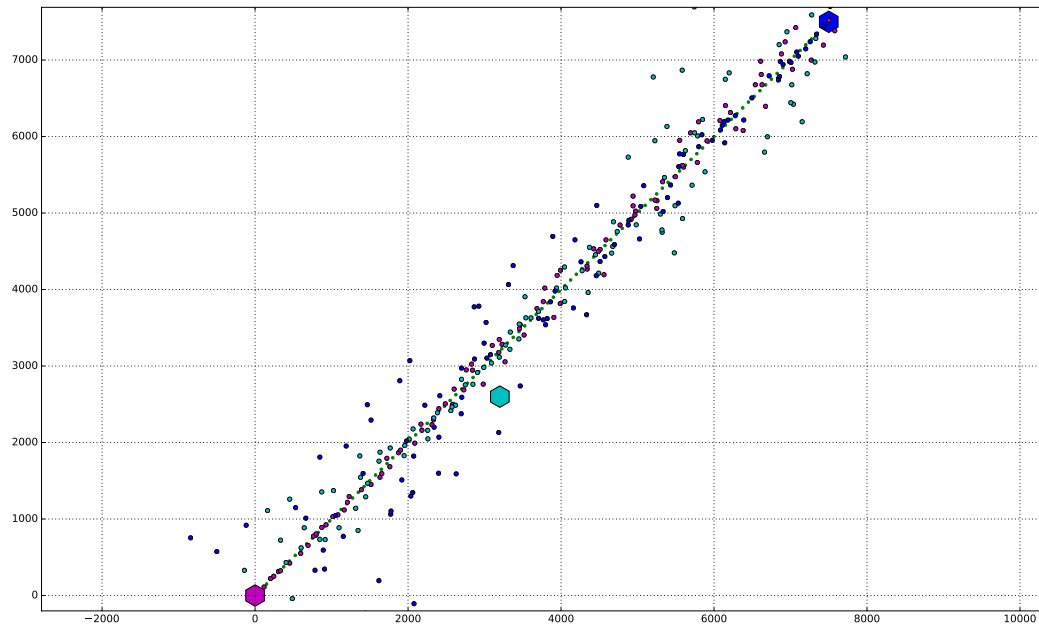
Obrázok 7.13. ML odhad dát z radarov R1 a R3.



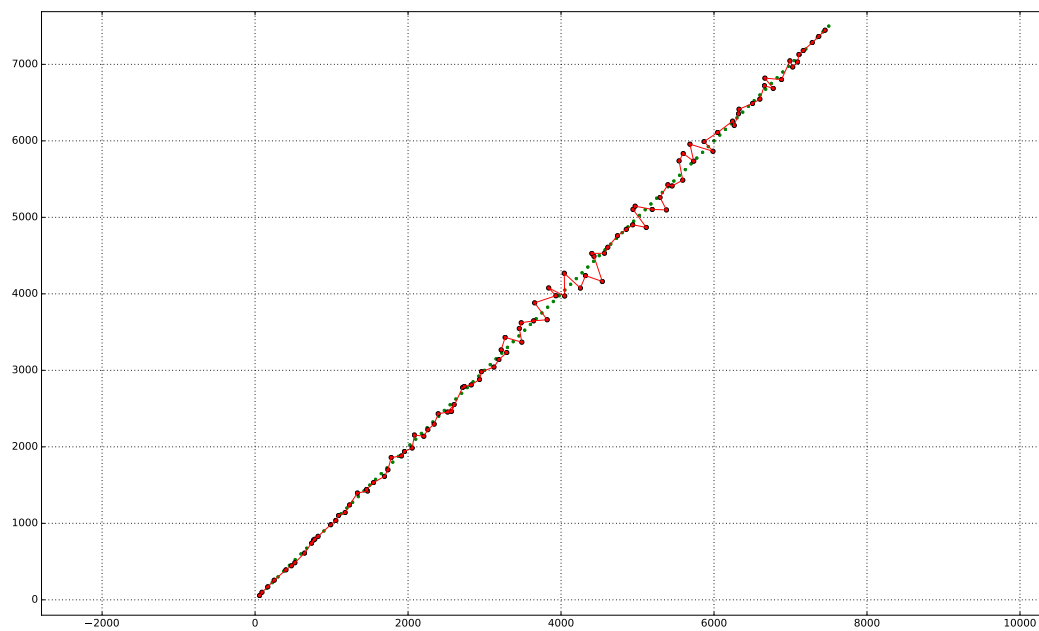
Obrázok 7.14. Vyobrazenie kovariančných priestorov okolo ML odhadu radarov R1 a R3.

7.3.4 ML odhad radarov R1, R2 a R3

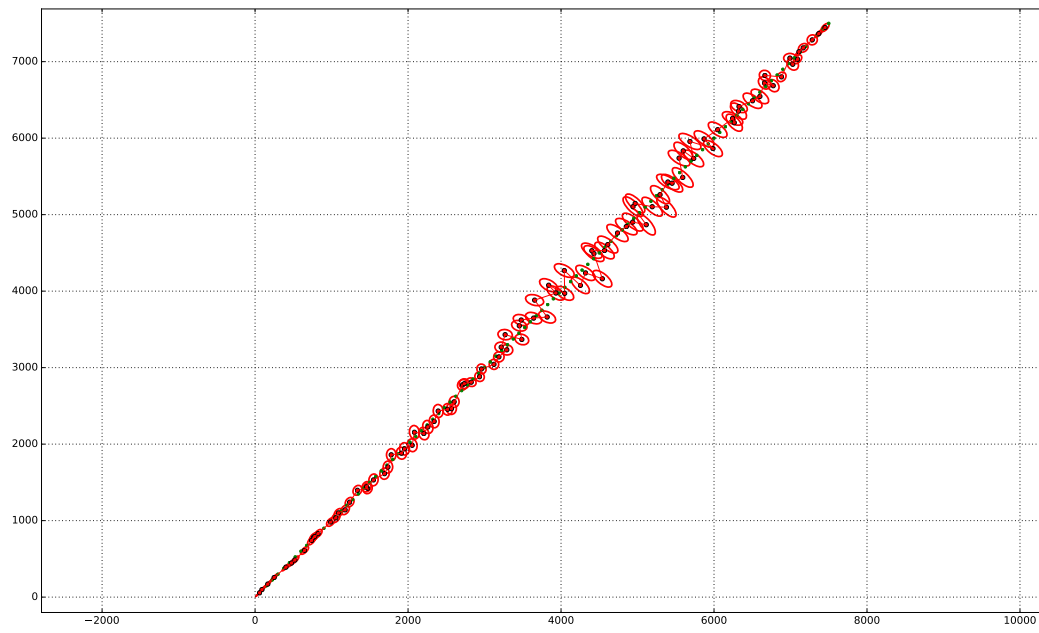
Ako posledný odhad v tejto podkapitole uvidíme zlúčenie všetkých predchádzajúcich radarov.



Obrázok 7.15. Dáta s korelovaným šumom z radarov R1, R2 a R3.



Obrázok 7.16. ML odhad dát z radarov R1,R2 a R3.



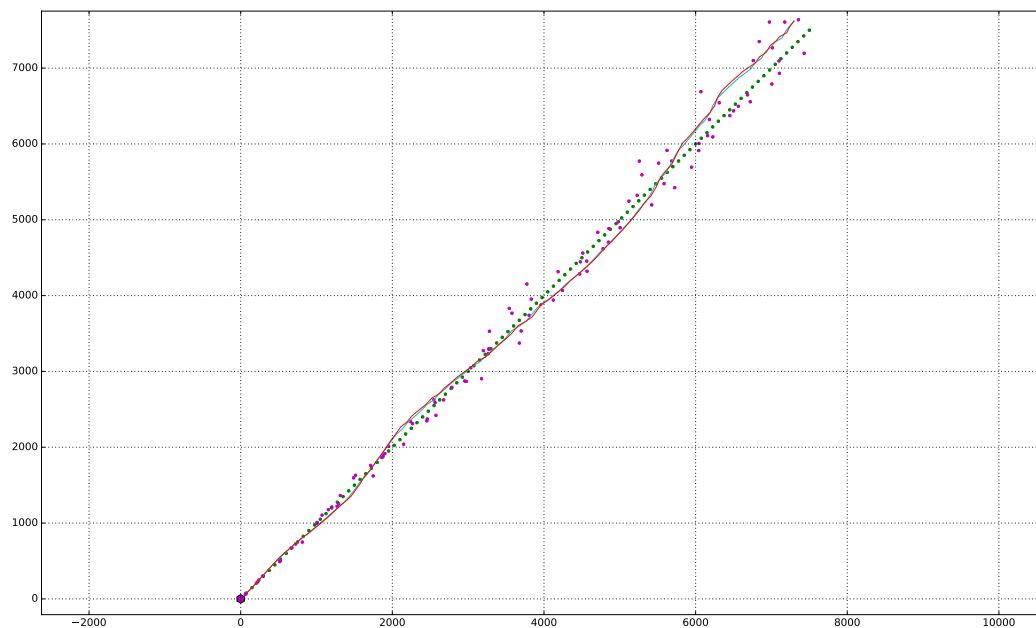
Obrázok 7.17. Vyobrazenie kovariančných priestorov okolo ML odhadu radarov R1,R2 a R3.

7.4 Ukážka spracovania Kalmanovým filtrom

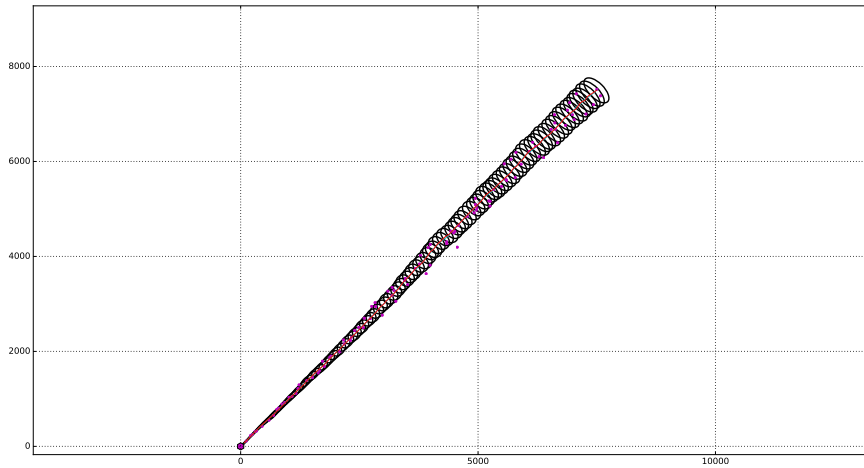
V nasledujúcej sekcii ukážeme spracovanie dát Kalmanovým filtrom, ktorý ma implementovanú ako kovariančnú maticu šumu merania dynamicky v každom kroku sa meniacu kovariančnú maticu pre korelované šumy výpočet ktorej bol ukázaný v kapitole 6.

veličina	Radar 1	Radar 2	Radar 3	jednotka
počet bodov modelu	100	100	100	—
počet bodov merania	100	100	100	—
poloha radaru	[0,0]	[3200,2600]	[7500,7500]	m
šum merania σ_r	100	50	250	m
šum merania σ_θ	0.02	0.1	0.06	rad
šum procesu σ_x	75	125	110	m
šum procesu σ_y	75	125	110	m

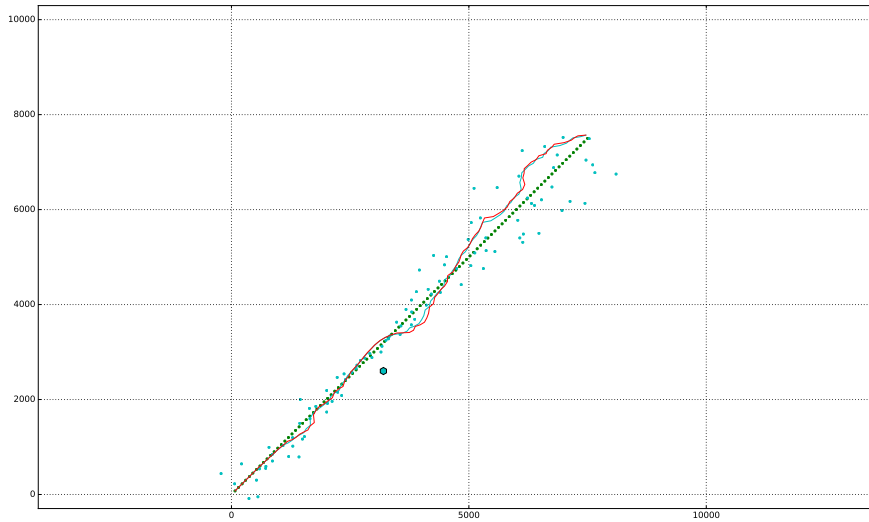
Tabuľka 7.2. Hodnoty šumu procesu a šumu merania.



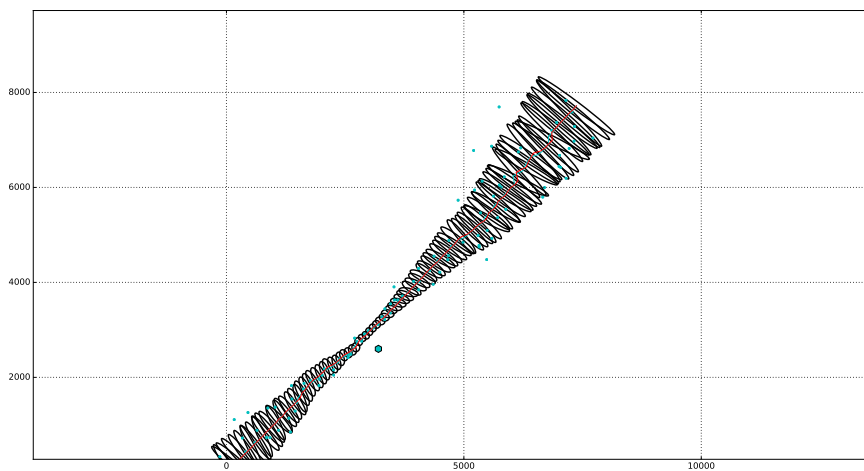
Obrázok 7.18. Ukážka spracovania dát kalmanovým filtrom pre radar R1.



Obrázok 7.19. Vyobrazenie vývoja kovariančných elíps radaru R1.



Obrázok 7.20. Ukážka spracovania dát kalmanovým filtrom pre radar R2.



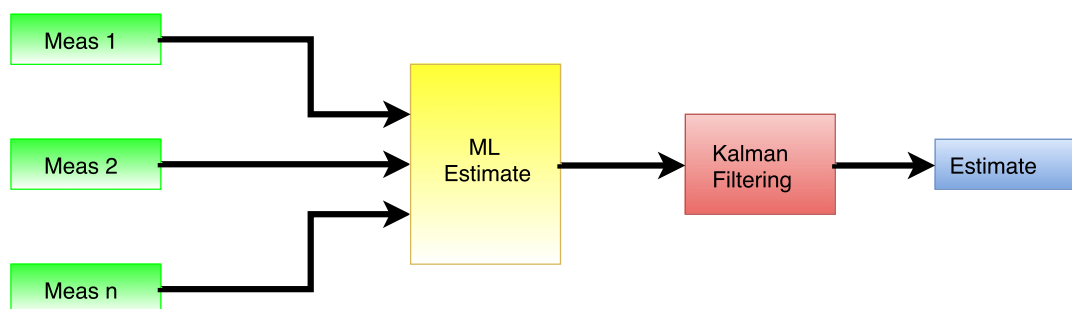
Obrázok 7.21. Vyobrazenie vývoja kovariančných elíps radaru R2.

7.5 Kombinácia ML odhadu a Kalmanovho filtra

V nasledujúcej kapitole ukážeme dva možné spôsoby kombinácie spracovania dát z prechádzajúcich kapitol. Spomenieme ich výhody a nevýhody, a tiež možnosti nasadenia v reálnej prevádzke.

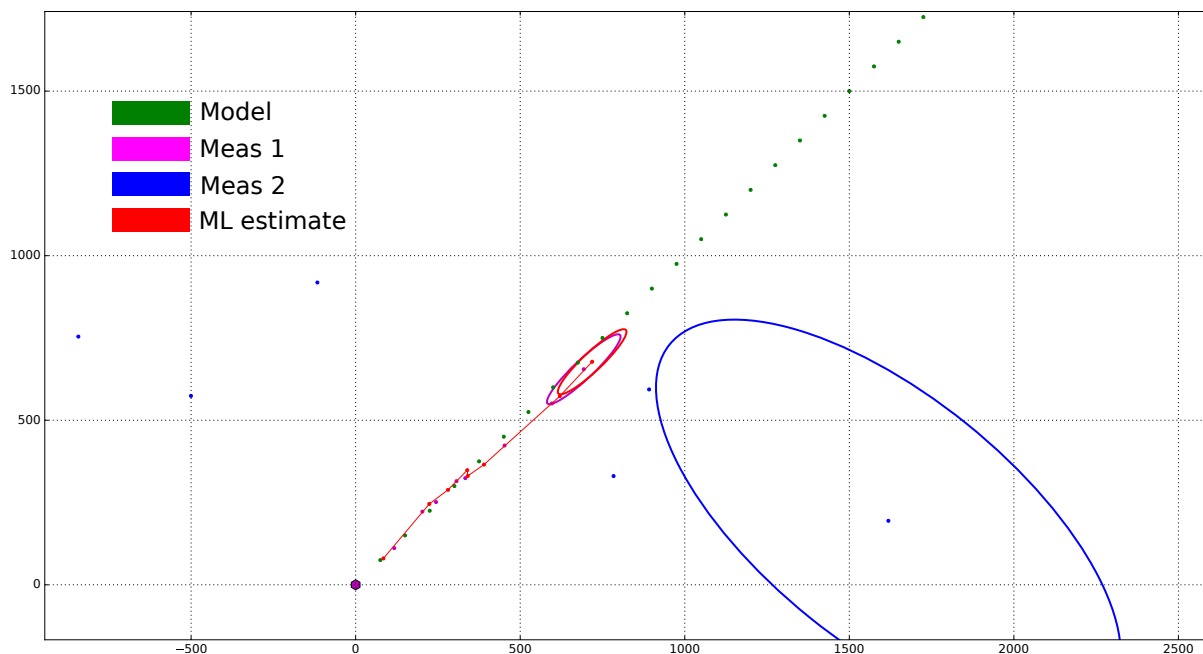
7.5.1 ML odhad ako meranie v Kalmanovom filtri

Prvú možnú alternatívu popisuje obrázok 7.22.



Obrázok 7.22. Diagram kombinácie ML odhadu a Kalmanovho filtra.

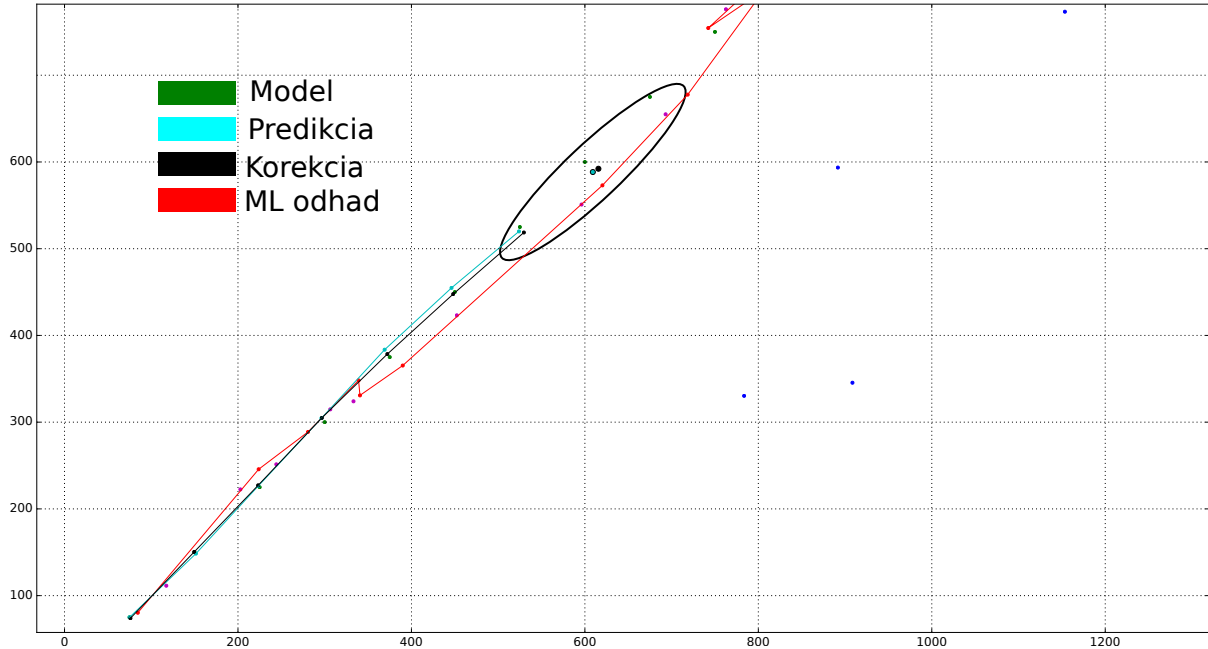
Na ňom môžeme vidieť ako do ML odhadu vstupujú vektory merania \mathbf{z}_1 až \mathbf{z}_n , s príslušnými kovariančnými maticami \mathbf{R}_1 až \mathbf{R}_n , na základe ktorých sú počítané kovariančné elipsy, tak ako to bolo ukázané v kapitole 6.4. Na nasledujúcom obrázku je vyobrazený sled prvých n meraní z dvoch radarov (modré a fialové body). V poslednom aktuálnom meraní sú zobrazené aj príslušné kovariančné elipsy okolo merania a ich následný ML odhad označený červenou farbou. Môžeme si všimnúť, že keďže je fialový radar pomerne blízko aktuálnej polohy letu, naproti tomu modrý radar (nie je zobrazený na obr. 7.23) je postavený na opačnú stranu modelu letu, potom sa aj veľkosti ich kovariančných elíps znčne líšia, a v tomto prípade sa ML odhad blíži k hodnote fialového merania.



Obrázok 7.23. Výpočet ML odhadu v kroku n .

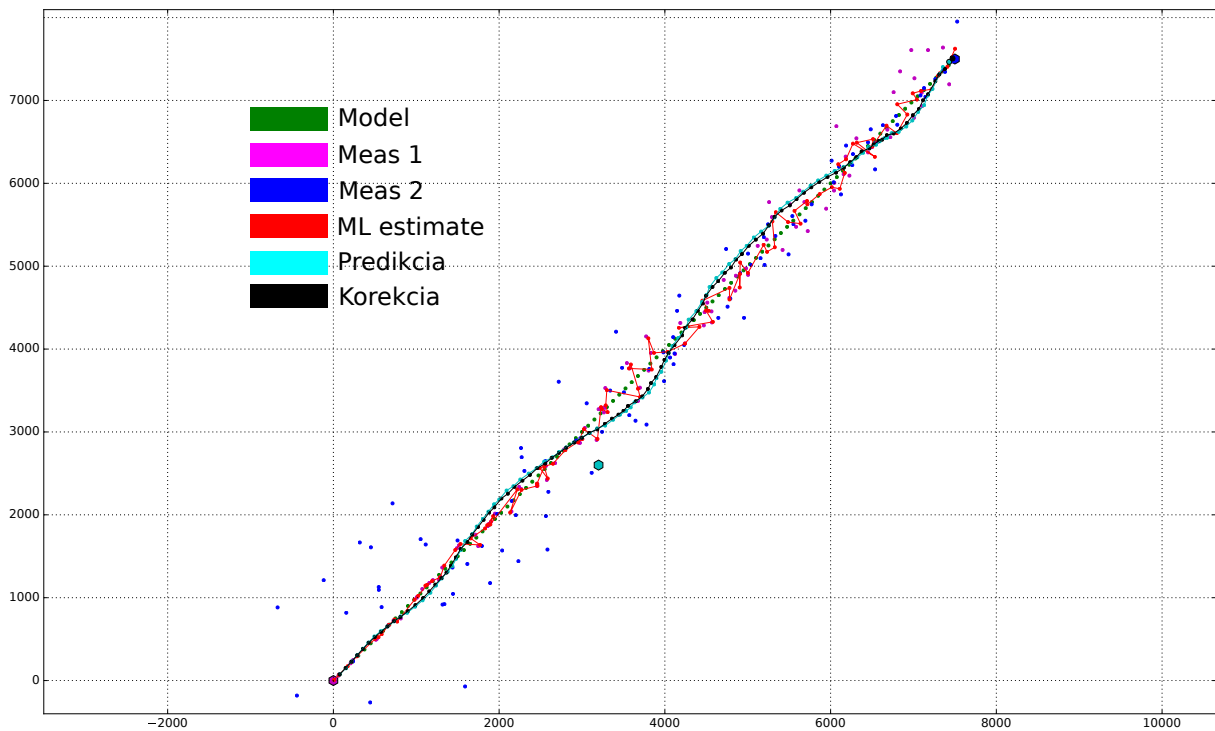
V ďalšom kroku nám odhadnutá hodnota vstupuje ako meranie do algoritmu Kalmanovho filtra. Na obrázku 7.24 môžeme vidieť predikčný a korekčný krok filtrácie a taktiež

kovariančnú elipsu chyby odhadu stavu. V tomto prípade, z dôvodu väčšej prehľadnosti, bol na všetky dáta najskôr aplikovaný ML odhad a potom spustený proces filtrácie. V reálnom prípade sa tento krok deje súčasne, teda ML odhad z aktuálne nameraných dát vstupuje do aktuálneho kroku Kalmanovho filtra.



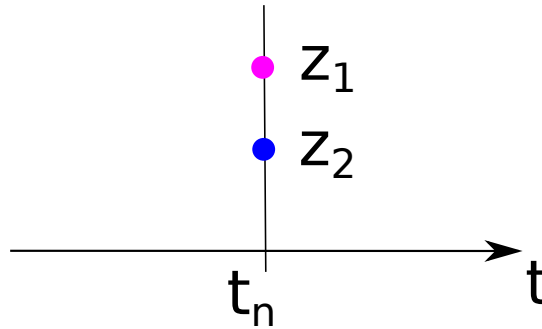
Obrázok 7.24. Krok Kalmanovho filtra.

Na nasledujúcom obrázku môžeme vidieť aplikáciu celého procesu na celý let. Výsledná hodnota v tomto prípade predstavuje predikčný a korekčný odhad ktorý určil Kalmanov filter zo zvoleného modelu letu a z ML odhadu nasimulovaných meraní.



Obrázok 7.25. Aplikácia popísaného algoritmu na celý let.

Poznamenanajme, že pri tomto spôsobe fúzie dát je potrebná synchronizácia merania, obr. 7.26, teda dáta, ktoré spracovávame ML odhadom, by mali mať rozumne rovnakú hodnotu času, v ktorom boli namerané.

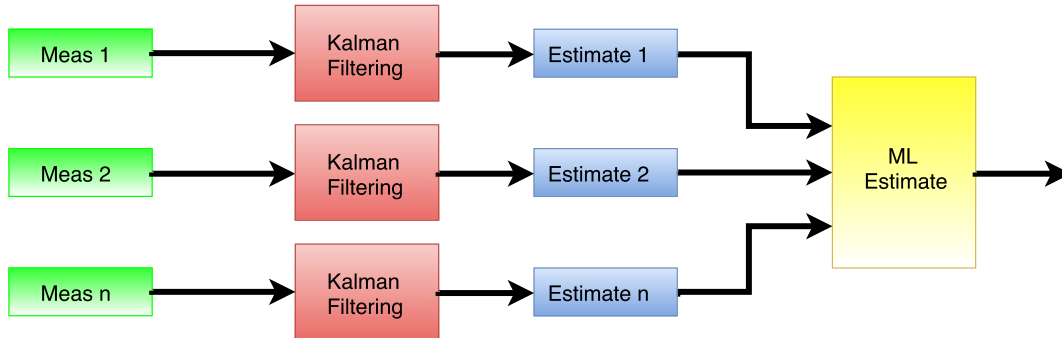


Obrázok 7.26. Rovnaký čas prichádzajúcich meraní.

Táto vlastnosť je dôležitá obzvlášť pri dátach meraných z radarov, keďže pohyb lietadla je dynamický systém a iná časová hodnota merania, spravidla predstavuje aj inú hodnotu nameranej polohy. Z tohoto dôvodu nám táto metóda neprináša optimálne riešenie pri spracovávaní radarových dát z pohľadu reálnej prevádzky. Keďže rôzne radary majú rozdielnu periódu otáčania sa, a aj pri rovnakej perióde sa nestáva, že by boli dva radary zapnuté v rovnaký čas, zriedkakedy nastáva jav, že by dve polohové informácie merania spoločného letu, boli merané v rovnakom čase. Preto je pri reálnych dátach výhodnejšie použiť druhý typ spracovania, ktorý popíšeme v nasledujúcej podkapitole.

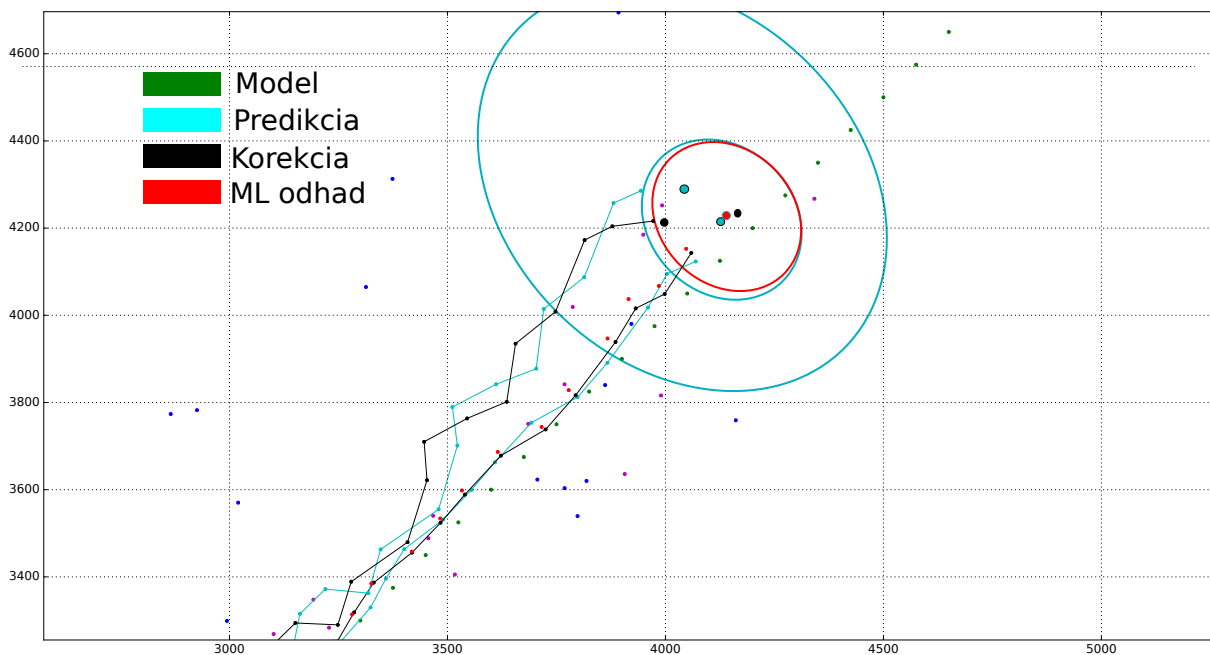
7.5.2 ML odhad odhadov stavov z Kalmanovho filtra

Opačný prípad, než v predchádzajúcej kapitole, predstavuje aplikácia n Kalmanových filtrov pre n zdrojov merania, v našom prípade pre n radarov. Ako je možné vidieť z obrázku 7.27,



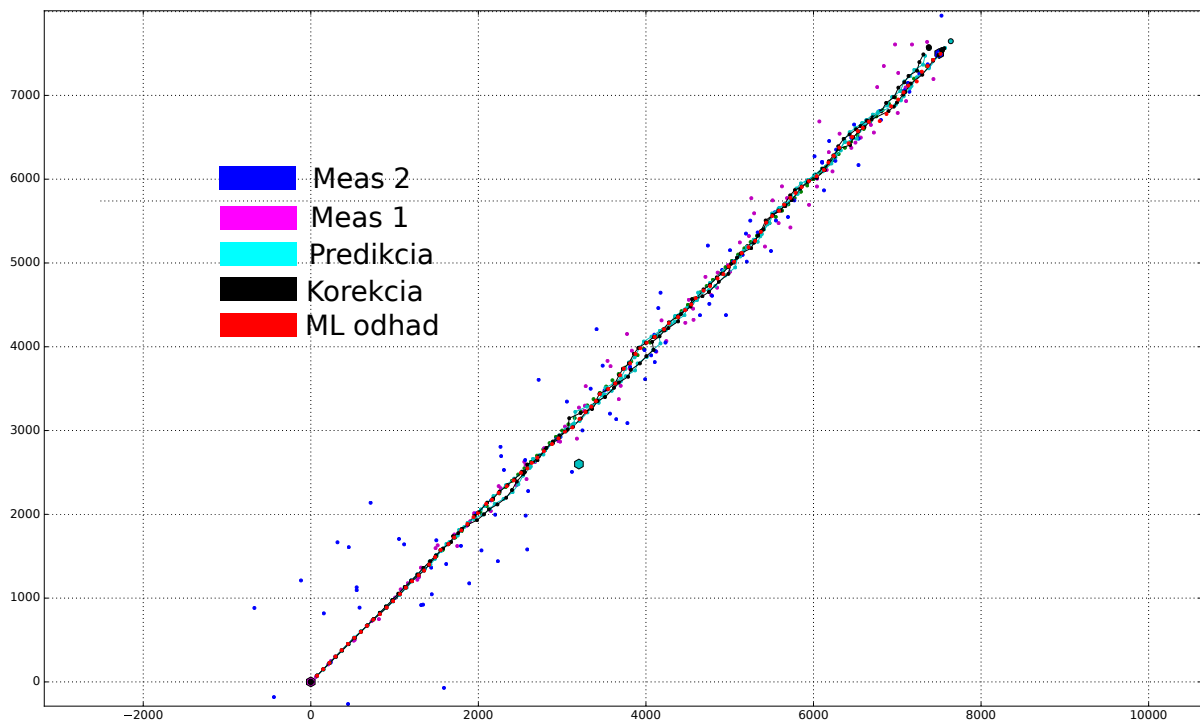
Obrázok 7.27. Bloková schéma kombinácie odhadov stavu z Kalmanových filtrov a ich následného ML odhadu.

v tomto prípade sa zakladá niekoľko Kalmanových filtrov, ktoré bežia súbežne, každý pre svoj zdroj meraných dát ale so spoločným modelom letu. Na obrázku 7.28



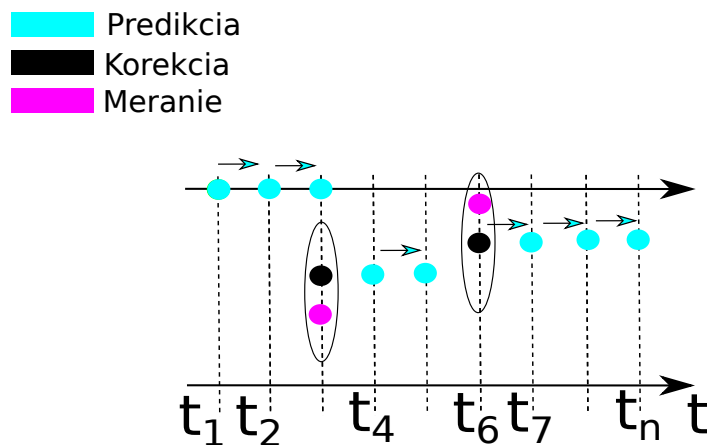
Obrázok 7.28. Kombinácia odhadov stavu z Kalmanových filtrov a ich následného ML odhadu.

môžeme vidieť súbeh dvoch Kalmanových filtrov, predikčný aj korekčný odhad. Oba behy filtrácie sú naznačené rovnakou farbou, ale je vybratá časť, kde je jasne rozlíšiteľný každý beh. Ďalej môžeme vidieť kovariančné elipsy chyby predikcie a červenou farbou je vyobrazený konečný ML odhad oboch Kalmanovských predikcií. Nakoniec si môžeme pozrieť aplikáciu popísaného algoritmu na celý let. Poznamenajme, že ako pri prechádzajúcom tak aj pri aktuálnom spôsobe fúzie dát používame rovnaké merané dáta. Vidíme, že odhad na obr. 7.29 podstatne lepšie sleduje danú trajektóriu.



Obrázok 7.29. Kombinácia Kalmanových filtrov a ich následného ML odhadu.

Hlavná výhoda aplikácie tohoto spôsobu fúzovania dát, v radarovej terminológii zvaný tiež *lokálny tracking*, spočíva v možnosti asynchrónneho prijímania nameraných dát. Z podstaty Kalmanovskej filtrácie vyplýva, že na základe modelu je možné navrhnúť v podstate ľubovoľný čas predikčného a korekčného kroku, tak aby nám prijímanie a vysielanie výstupu (či už predikcie alebo korekcie) zapadalo do nami zvoleného konceptu. Túto skutočnosť si môžeme ilustrovať na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 7.30. .

Na ňom vidíme predom nadefinovaný predikčný krok. Toto býva častá požiadavka v leteckom softwari, kde je od programu sledujúceho let požadované, aby dokázal

určiť predikciu letu lietadla na nasledujúce dve sekundy. Otáčka radaru, ktorý dany let sleduje, ale môže mať periódu vyššiu než dve sekundy, prípadne sa v danej otáčke nemusí podariť lietadlo vôbec zachytiť. V takomto prípade Kalmanov filter naďalej integruje predikciu pohybu podľa zvoleného modelu, a v momente, keď je meranie zachytené, vykoná sa korekčný krok na základe ktorého sa ďalej vykonáva predikcia.

Kapitola 8

Práca s reálnymi radarovými dátami

Autor tejto diplomovej práce sa popri jej písaní zhruba rok zaoberal vývojom softwaru pre spracovanie reálnych radarových dát. V tejto časti by sme okrem iného chceli uviesť zopár hlavných postrehov nadobudnutých pri tejto činnosti.

Hlavným rozdielom medzi tvorením modelov a práce v reálnej dátovej prevádzke je množstvo dielčej predprípravnej práce ktorú je potrebné vykonať nad dátami. Ako príklad uveďme, že dáta v radarovej sieti majú zadaný svoj sieťový protokol, ktorý definuje ako má vyzeráť packet na fyzickej úrovni. V európskom (a pomaly aj vo svetovom) priestore je najčastejšie používaný ASTERIX¹ štandard, definovaný európskou organizáciou pre bezpečnosť leteckej premávky-EUROCONTROL, ktorý okrem iného definuje protokol s desiatkami rôznych kategórií do ktorých dáta radary transformujú. Na spracovateľskej strane je potrebné tieto dáta roztriediť najskôr po fyzickej stránke, pretože mnoho krát posielajú radary obsahovo totožné tzv. backup dáta, ktoré je potrebné vyčleniť na zálohovanie aby nedošlo k redundantným výpočtom. Ďalej je potrebné dáta rozkódovať za pomoci už spomínaného protokolu ASTERIX, roztriediť ich po obsahovej stránke a až následne začať procesovanie.

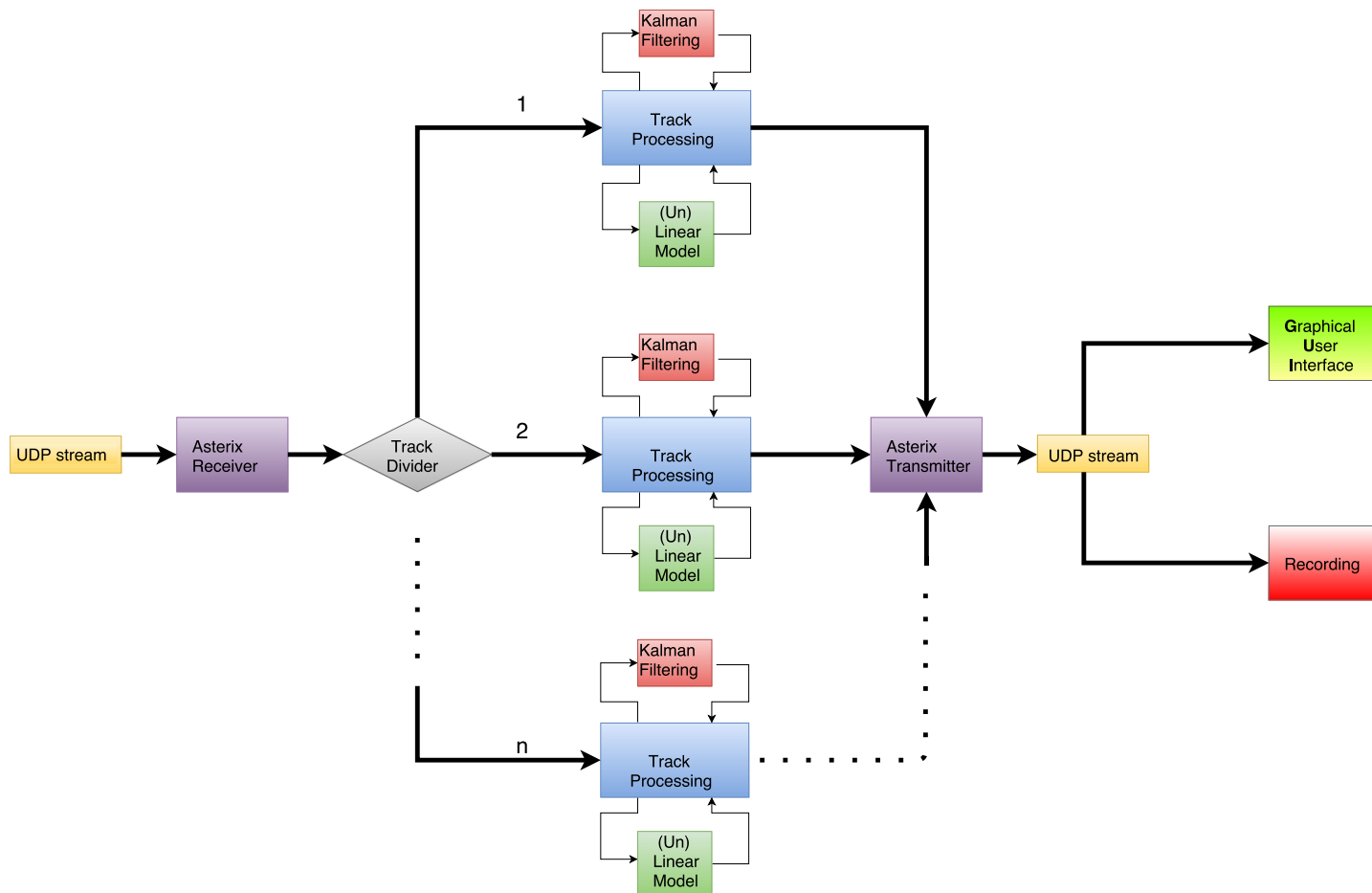
Ďalším rozdielom je kvalita prichádzajúcich dát ako takých. Túto by sme mohli rozdeliť do dvoch úrovní. Prvú zahrňujú dáta pri prvotnom spracovaní. Asi je pochopiteľné, že firma, ktorá sa venuje spracovaniu radarových dát na najnižšej úrovni, zahrňujúc napríklad implementáciu radarovej rovnice a spracovanie prichádzajúcich rádiových vln, dokáže svoje systémy optimalizovať oveľa lepšie než spracovateľ, ktorý má k dispozícii už nejakým spôsobom procesované dáta a nemá prístup k samotnému radaru. Druhá kategória prichádzajúcich dát zahrňuje obsahovú kvalitu. V priemyselnej prevádzke je úplne bežným javom, že dáta ktoré prichádzajú často krát neobsahujú úplnú informáciu, ktorá je deklarovaná, alebo dáta neprídu vôbec. Napríklad, autor tejto práce, sa pri vývoji v priemysle stretol s nasledovným problémom. Pri implementácii Kalmanovho filtru je potrebné pomerne presne poznať čas kedy bolo meranie vykonané, aby toto mohlo byť v procese spracovania priradené k odpovedajúcej hodnote modelu. Obzvlášť je táto informácia dôležitá, ak v každom jednotlivom kroku využívame predikciu nasledujúceho kroku, napríklad pri určení budúcej polohy lietadla. Pri práci s reálnymi dátami sa často stávalo, že prichádzajúce dáta polohy neobsahovali čas merania, potrebný k priradeniu v spracovaní. Toto potom muselo byť ošetrované buď dodatočným pridávaním času priatia informácie či inými technikami na získanie danej informácie.

Ako tretie môžeme uviesť možnosť hĺbky implementácie danej teoretickej znalosti. Pri písaní tejto práce, prečítal autor niekoľko vedeckých článkov z webu IEEE Xplore Digital Library, ktoré sa venovali spracovaniu radarových a všeobecne šumových dát. Mnohé z nich obsahovali prekvapivo zaujímavé zistenia a súvislosti, avšak pri premyslení implementácie danej odvodennej techniky, sme prilšli na to, že nemáme dostatok informácií s ktorými autor v texte pracoval, alebo by boli tieto výpočty natolko zložité, že pozitívny efekt, ktorý by priniesli, by neodpovedal vynaloženému úsiliu zapracovania do systému.

¹ Odvodené z anglických slov All Purpose Structured Eurocontrol Surveillance Information Exchange.

8.1 Ukážka a spracovanie reálnych dát

Pri príprave dát do spracovania v tomto texte bol implementovaný algoritmus vyobrazený na obrázku 8.1.

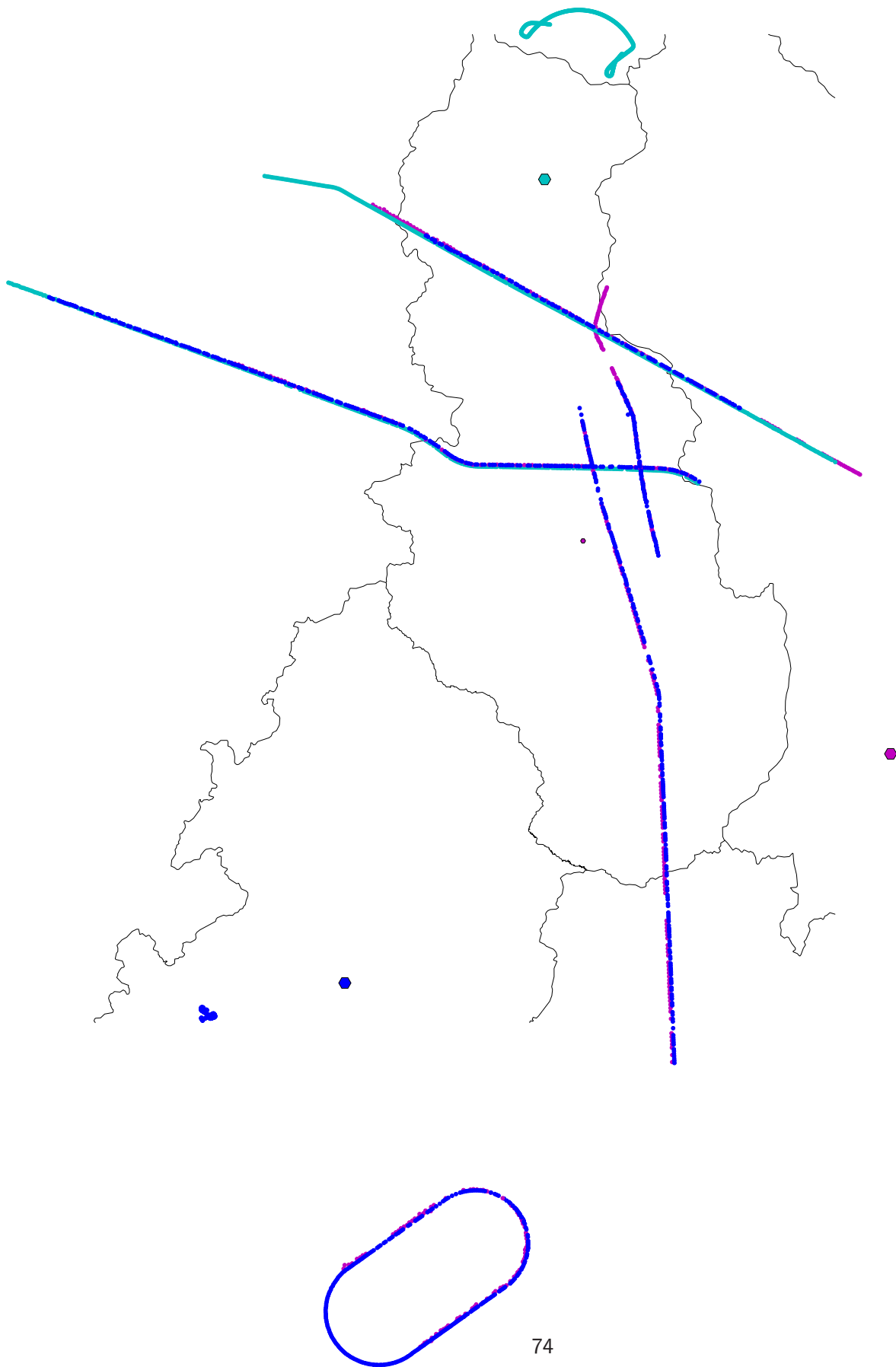


Obrázok 8.1. Zjednodušená implementačná schéma pre prípravu reálnych dát.

Na mape 8.2 môžeme vidieť sedem vyobrazených rálnych letov a zároveň tri radarov z ktorých boli tieto lety monitorované. Tabuľka 8.1 ukazuje parametre týchto radarov v danom čase merania.

veličina	Radar 1	Radar 2	Radar 3	jednotka
názov	Mošnik	Buchtův kopec	Koris-hegy	-
farba	tyrkysová	tmavo modrá	fialová	-
poloha radaru Latitude	48.79621389	49.65964167	47.29415556	°
poloha radaru Longitude	21.54087778	16.13339444	17.75358056	°
poloha radaru Altitude	949	845	768	m.n.m
šum merania σ_r	100	200	100	m
šum merania σ_θ	0.01	0.01	0.01	rad

Tabuľka 8.1. Hodnoty parametrov reálnych radarov.

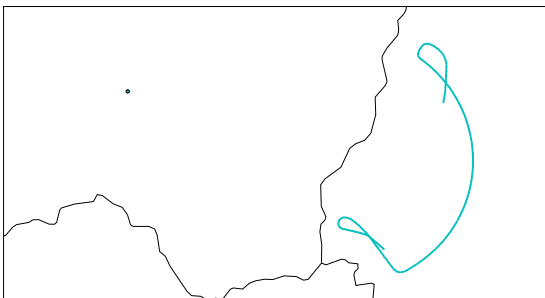


Obrázok 8.2. Ukážka reálnych dát siedmich letov.

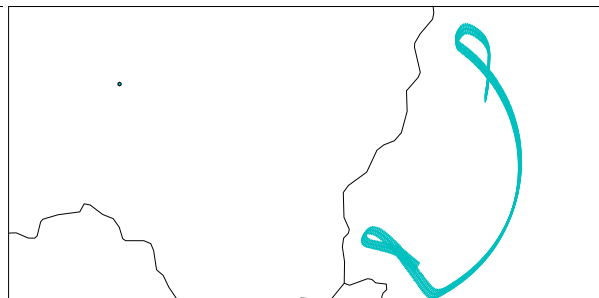
Všimnime si, že radary boli vyberané obzvlášť podľa umiestnenia ich polôh v priestore. Cieľom tohto je ukázať, ako sa odvodená teória v predchádzajúcich kapitolách, premietne v praxi do zmeny kovariančných matíc a tým aj do zmeny priestorov kovariančných elíps.

■ 8.1.1 Rýchlo manévrujúci cieľ

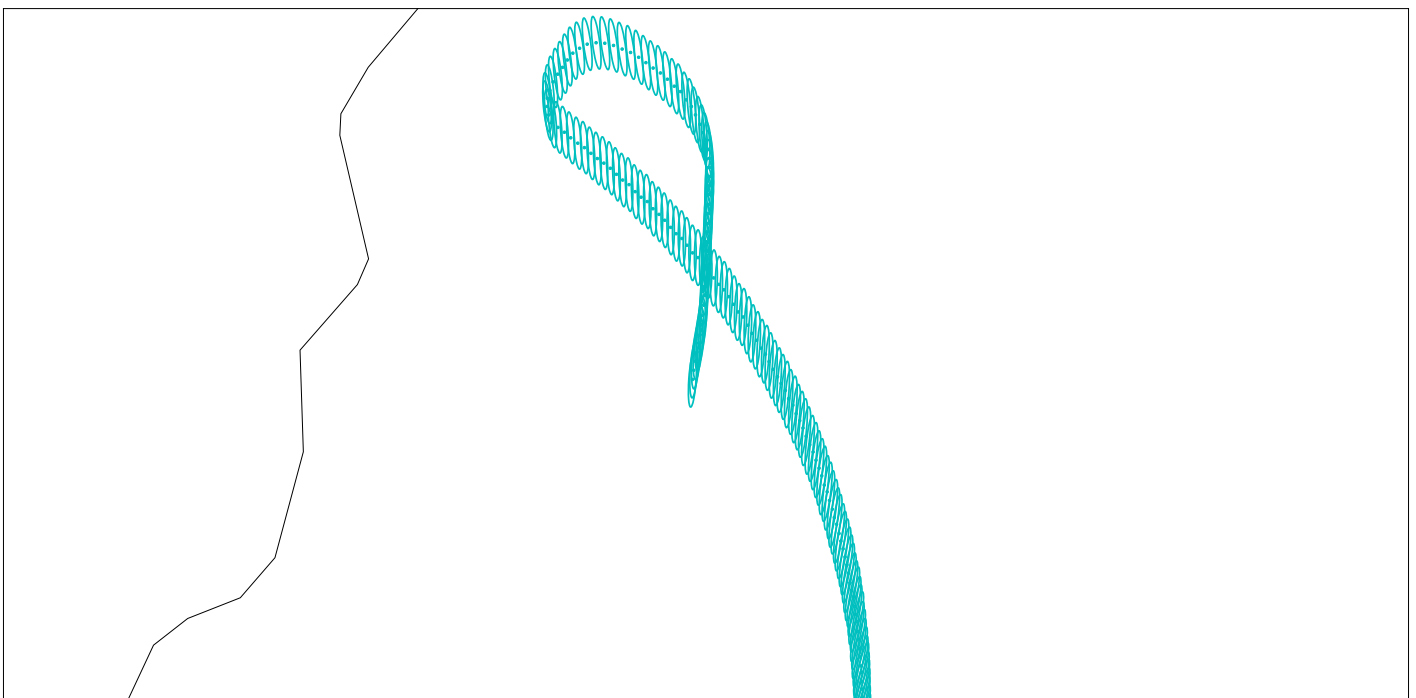
Na tejto sérii obrázkov môžeme vidieť vyobrazenie radaru a rýchlo manévrujúceho cieľa - stíhača. Keďže je pomerne blízko radaru, na priloženom detaile je pekne vidno ako sa mení zväčšuje, zmenšuje a natáča kovariančná elipsa vzhľadom na polhu radaru a jeho cieľa - podobne ako sme to simulovali v kapitole 6.



Obrázok 8.3. Meranie - rýchlo manévrujúci cieľ - Ukrajina.



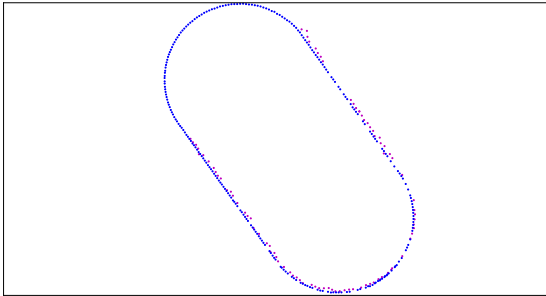
Obrázok 8.4. Kovariančná elipsa - rýchlo manévrujúci cieľ - Ukrajina.



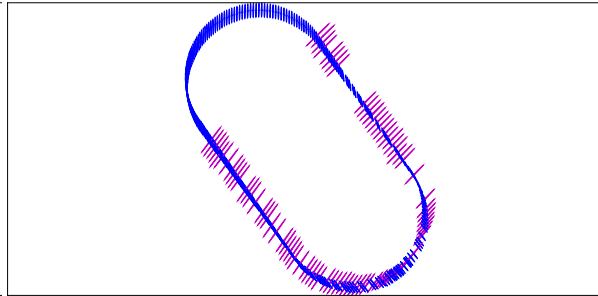
Obrázok 8.5. Stíhač ukrajina - detail.

8.1.2 Pretínanie rôznych kovariančných priestorov

Tento let ukazuje ako rôzne radary, postavené na rozličných miestach krajiny, sledujú ten istý cieľ. Na obrázku 8.8

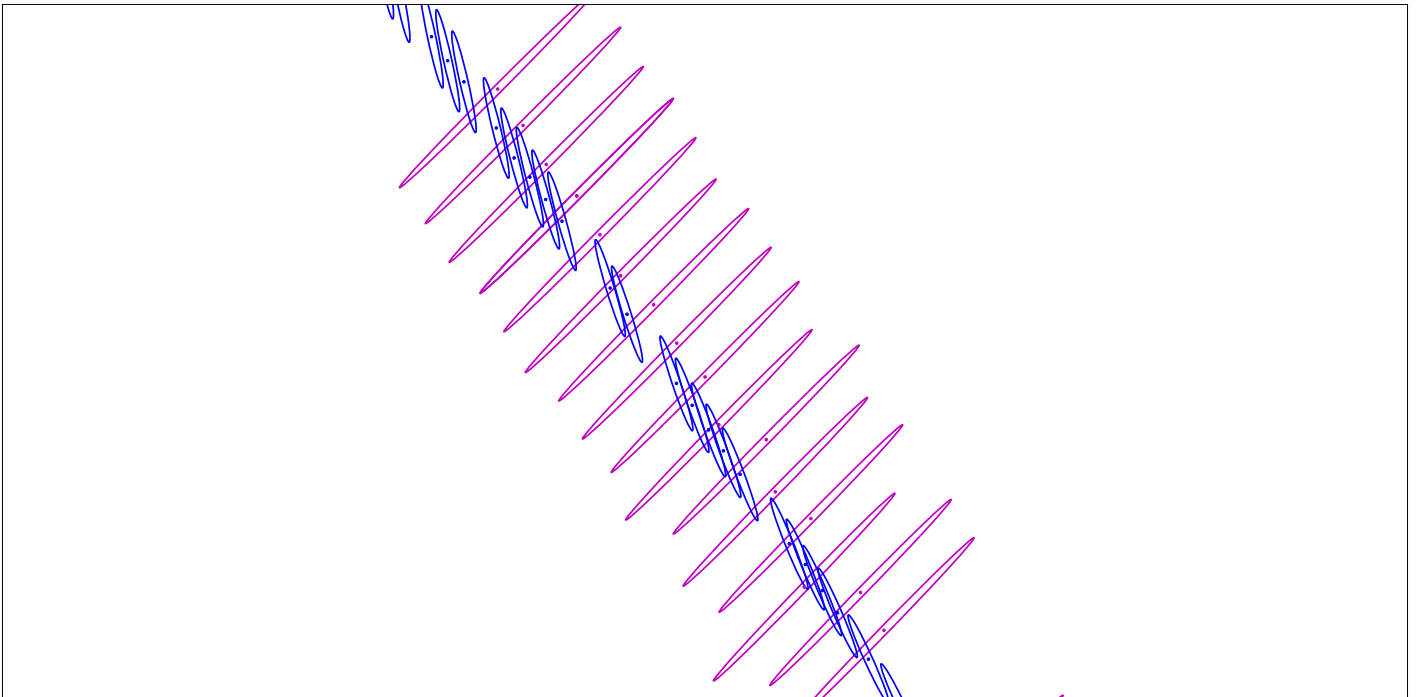


Obrázok 8.6. Pretínanie rôznych kovariančných priestorov - meranie.



Obrázok 8.7. Pretínanie rôznych kovariančných priestorov - kov. priestor.

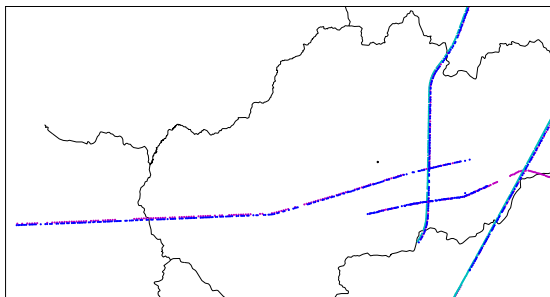
vidíme ako sa kovariančne elipsy pretínajú v rôznych miestach. Toto môže slúžiť ako príprava k použitiu ML odhadu alebo k aplikácii Kalmanovho filtra.



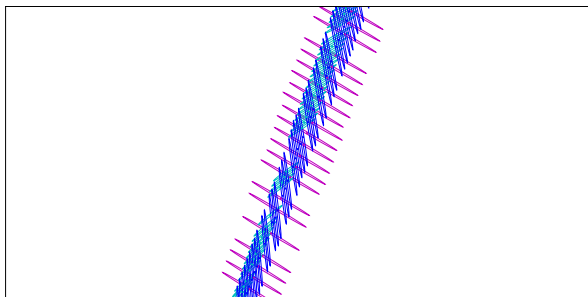
Obrázok 8.8. Pretínanie rôznych kovariančných priestorov - detail.

8.1.3 Ukážka vzorkovania meraného letu

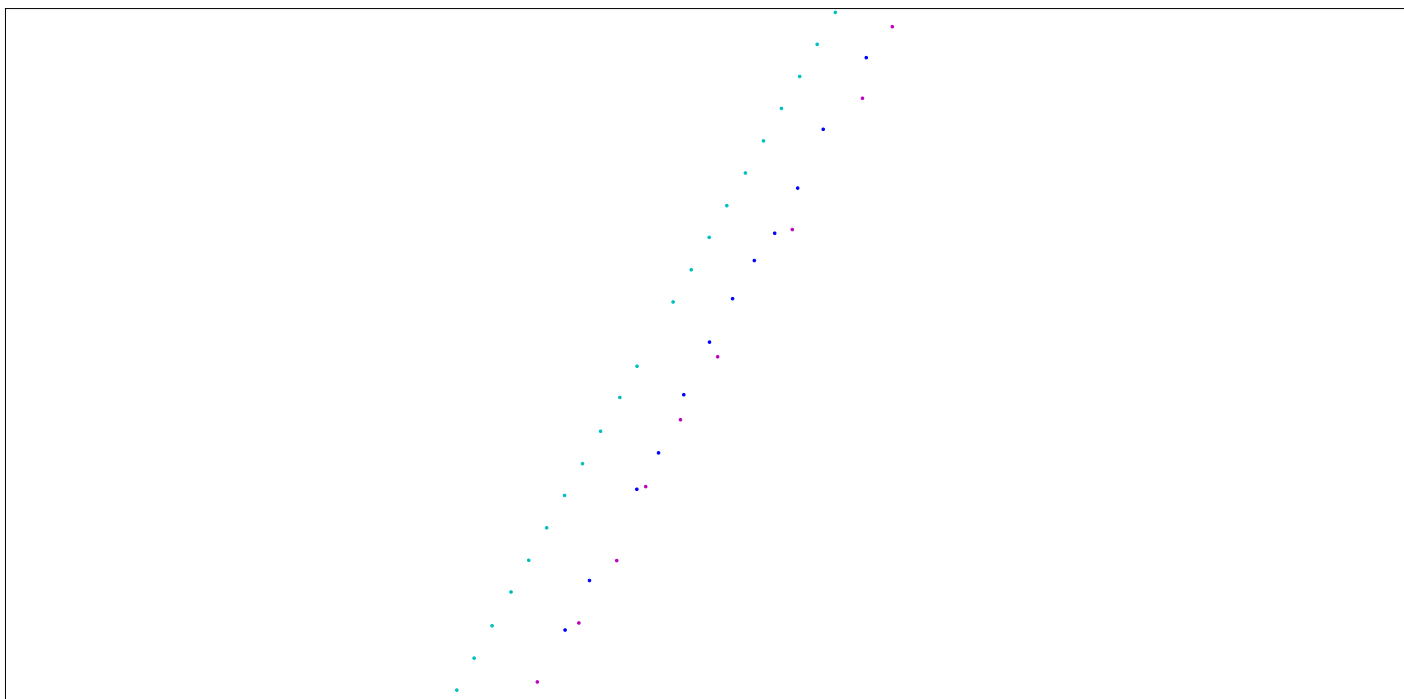
Pri detailnejšom priblížení a skúmaní obrázku 8.11 vidíme demonštráciu faktu spomínaného v závere kapitoly 7 a na začiatku kapitoly 8. Teda skutočnosti, že v reálnej radarovej prevádzke dochádza k zmiešavaniu dát s rozličným vzorkovaním. Taktiež na obrázku môžeme vidieť občasné výpadky merania z modrého, tyrkysového aj fialového radaru. V tejto súvislosti vyvstáva otázka, o ktorej sme diskutovali v kapitole 7.6.2. Teda, že vhodným spôsobom spracovania takýchto dát môže byť použitie, v tomto prípade troch Kalmanových filtrov a ich následný ML odhad.



Obrázok 8.9. Ukážka vzorkovania meraného letu - meranie.



Obrázok 8.10. Ukážka vzorkovania meraného letu - kov. priestor.



Obrázok 8.11. Ukážka vzorkovania meraného letu - detail.

Kapitola 9

Záver

Táto záverečná diplomová práca mala za cieľ navrhnúť a implementovať jeden z možných spôsobov riešenia spracovania dát z multiradarových systémov. Ako základ pre dátový processing sme vybrali algoritmus Kalmanovho filtru a jeho možné varianty implementácie.

Druhá kapitola tejto práce pojednáva o všeobecných princípoch radarov, načrtáva ich základne delenie podľa funkcionality a pojednáva o probléme šikmej diaľky, ktorý je ukázaný na reálnych dátach. Ďalej je spomenuté jedno z riešení tohoto problému na základe doplnenia súradníc o barometrickú výšku a sú ukázané prepočty do svetových súradnicových systémov. V tretej kapitole zavádzame pojem stavu a stavového systému. Ukázali sme ako je možné modelovať trasu pohybu lietadla na základe započítaného stupňa derivácie dráhy (rýchlosť, zrýchlenie, ryv...). Pre tieto účely bol vytvorený SW v jazyku Python s názvom **Modul 1** - generátor dát modelu letu, ktorý je detailnejšie popísaný v prílohe A. Štvrtá kapitola zavádza pojem modelu merania tak ako je používaný v Kalmanovom filtri. Definujeme tu základné pojmy z pravdepodobnosti a štatistiky a na ich základe sme odvodili kovariančné matice pre nekorelované šумы merania navrhnutých modelov. V piatej kapitole sme zadefinovali pojem Kalmanovho filtru, v ktorom sme použili stavové modely a modely merania tak ako boli odovdené v prechádzajúcich kapitolách. Ukazujeme tu základný beh filtrácie v 2D a 3D priestore pre rozličné hodnoty šumu merania a šumu procesu, a tiež časový priebeh premených (Kalmanov zisk, chyba predikcie...) v algoritme filtrácie. Algoritmus je možné predviesť v SW **Modul 4**. Šiesta kapitola pojednáva o fyzikálne verenejšom napodobení šumovosti dát radaru. Zavádzame chyby do azimutu a diaľky a tieto sa následne prejavujú ako korelované šумы v karteziánskej sústave. Pre tieto účely bol naprogramovaný SW s názvom **Modul 2** - generátor dát modelu merania, v ktorom je možné nasimulovať chyby v azimute a diaľke pre jednotlivé radary. Taktiež v tejto kapitole ukazujeme výpočet kovariančného priestoru elipsy okolo meraného bodu. Toto je možné detailne interaktívne skúmať a zobrazovať v SW **Module 6**. V siedmej kapitole zavádzame pojem odhadu maximálnej vierohodnosti a ukazujeme ML odhad z nasimulovaných dát merania z prechádzajúcich kapitol. ML odhad je možné skúmať v simulačných programoch **Modul 3** - ML data procesor, taktiež už v spomínanom Module 6 a ML odhad pre nekorelované šумы v **Module 5**. V záverečnej kapitole osem, hodnotíme a popisujeme prácu s reálnymi dátami, popisujeme implementačné problémy a prinášame ukážku spracovania takýchto dát v **Module 7**.

V závere dodávame, že algoritmus Kalmanovej filtrácie sa ukazuje byť vhodným prostriedkom na spracovanie radarových dát, hlavne pri spojení s kovariančnou maticou pre korelované šумы. Jeho výhoda primárne spočíva v možnosti rôznych variácií používaných modelov letu a možnosti predikovať odhad dráhy letu lietadla v rôznych časoch, čo je obvyklá požiadavka v leteckom priemysle.



Literatúra

- [1] P. Bezoušek and P. Šedivý. *Radarová technika*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004.
- [2] Mark A. Richards. *Fundamentals of Radar Signal Processing*. McGraw Hill Professional, New York, 2014.
- [3] Vejražka Hrdina, Pánek. *Radiové určování polohy*. Česká technika - nakladatelství ČVUT, 1995.
- [4] L.A. Zadeh and C.A. Desoer. *Linear system theory: the state space approach*. McGraw-Hill series in system science. McGraw-Hill, 1963.
- [5] V. Havlena and J. Štecha. *Moderní teorie řízení*. Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2000.
- [6] Petr Olšák. *Úvod do algebry, zejména lineární*. nakladatelství ČVUT, Praha, 2009.

Príloha A

Popis softwareu

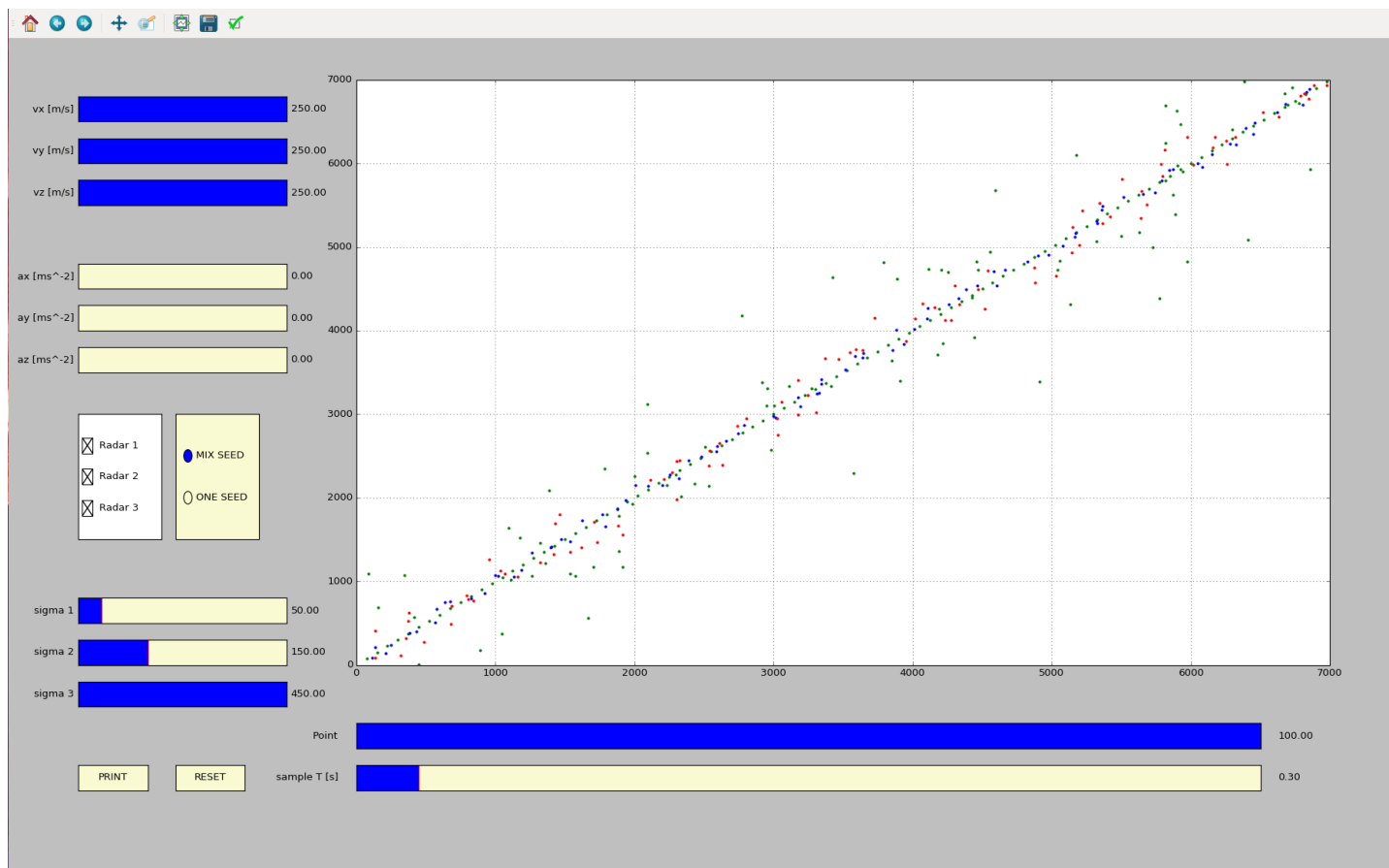
V prílohe prikladáme popis jednotlivých programov, ktoré boli naprogramované v jazyku PYTHON a boli vytvorené pre účely tejto práce.

A.1 Modul 1 - generátor dát modelu letu

Tento programový modul má za úlohu generovať dáta modelu letu ako aj dáta merania so šumom pridaným v karteziánskej sústave. Na ľavej strane môžeme vidieť hodnoty nastavovania pre

- rýchlosť v smere x,y,z,
- zrýchlenie v smere x,y,z,
- smerodajné odchylky šumu merania v smere pre 3 rôzne merania.

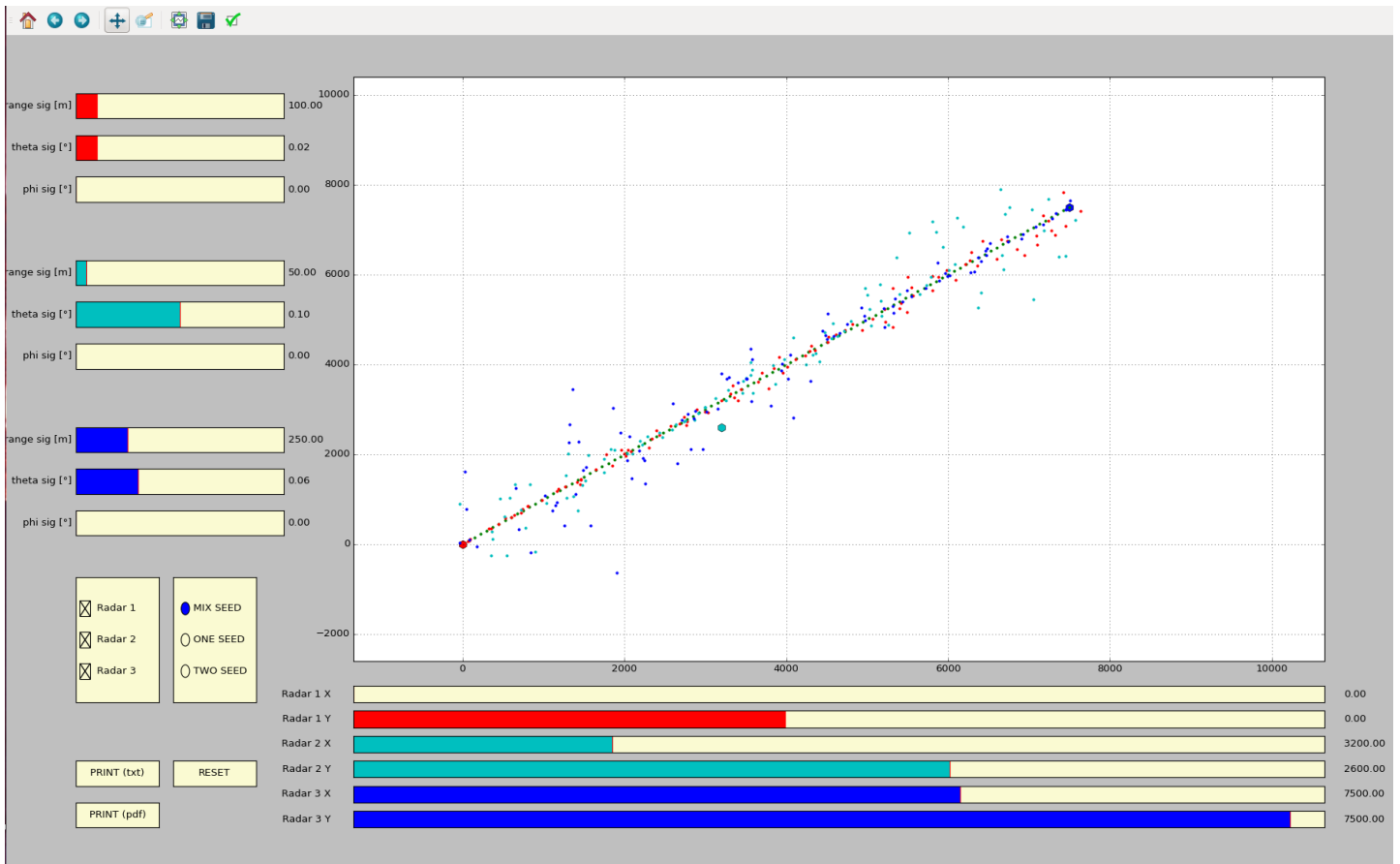
Taktiež je možné nastaviť vzorkovaciu periódu a počet vzoriek modelu. Tlačidko print uloží tieto hodnoty do .csv súboru.



Obrázok A.1.

A.2 Modul 2 - generátor dát modelu merania

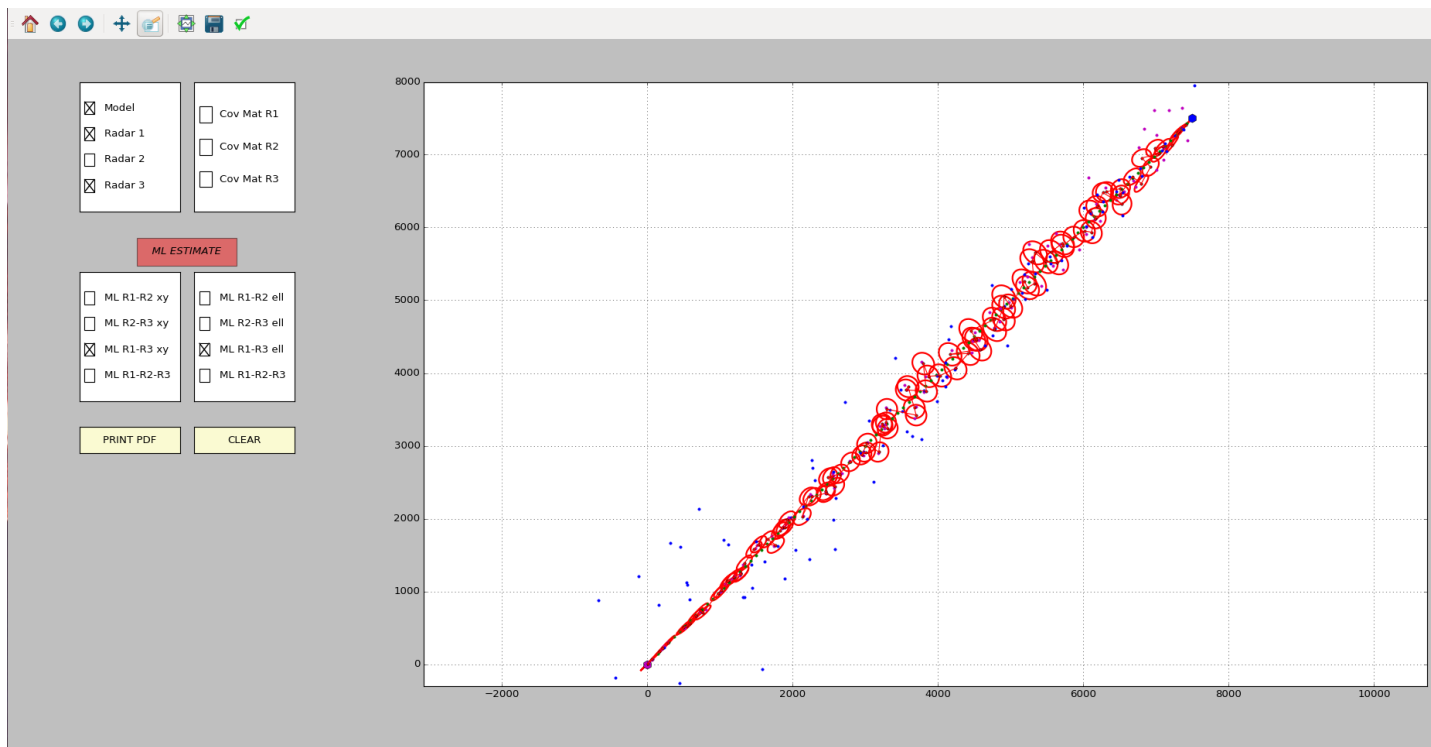
Tento programový modul má za úlohu generovať dáta merania z jednotlivých radarov na základe dát modelu letu vytvorenom v Module 1. Program načíta .csv súbor a na základe polôh radaru a ich šumových parametrov vo sférickej sústave vygeneruje simuláciu meraných dát radaru. V dolnej časti obrazovky je možné nastavovať pozície x a y jednotlivých radarov. V ľavej časti je možné nastavovať hodnoty šumu merania pre každý radar. Tlačidlo print opäť uloží tieto dáta do .csv súboru.



Obrázok A.2.

A.3 Modul 3 - ML data procesor

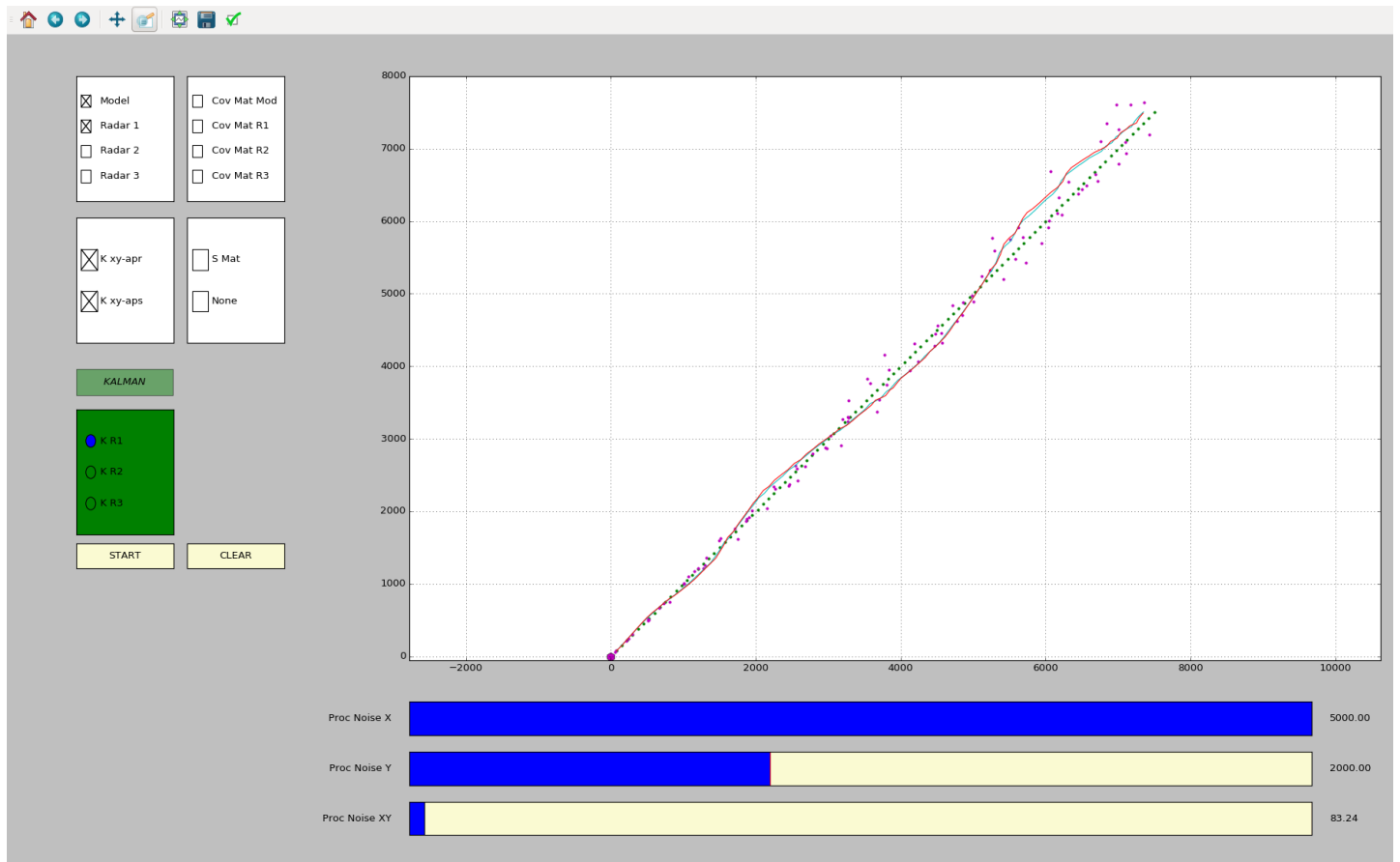
Programový modul Modul 3 ma za úlohu načítať vygenerované radarové dáta Modulom 2 a vykonať ich ML odhad pre všetky kombinácie radarov. Tieto kombinácie je možné zobrazíť zaškrtnutím požadovaných políčok na ľavej strane obrazovky. Taktiež je možné zobrazíť kovariančné elipsy pre jednotlivé dáta. Zvolenú kombináciu je možné vytlačiť ako obrázok do pdf súboru. K dispozícii je tiež tlačidko na mazanie obrazovky.



Obrázok A.3.

A.4 Modul 4 - KF data procesor

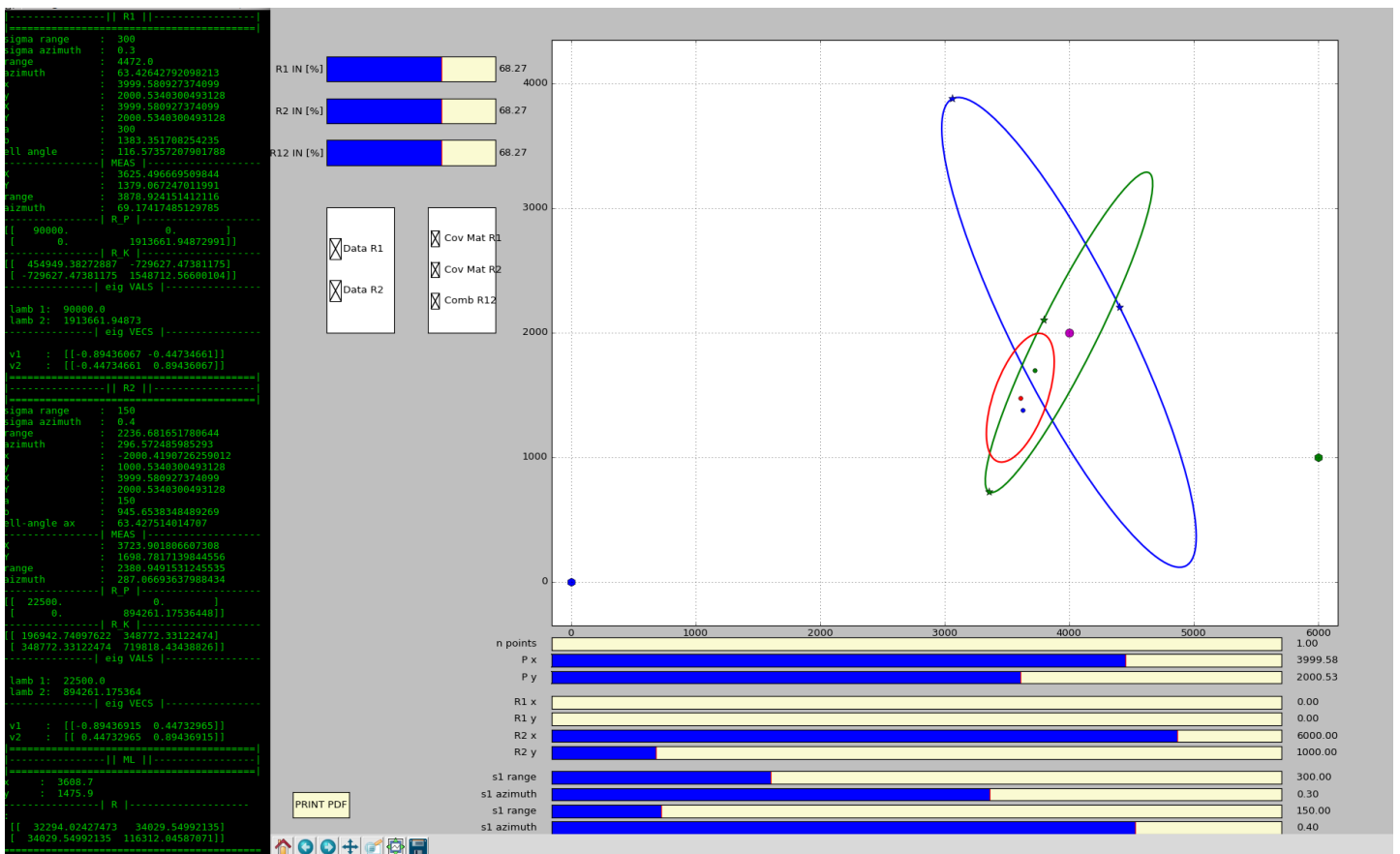
Programový modul Modul 4 ma za úlohu načítať vygenerované radarové dáta Modulom 2 a vykonať ich Kalmanovskú filtráciu pre zvolený výber radaru. Výber filtrácie radaru je možné vybrať v ľavej časti obrazovky. Taktiež je možné zobrazit kovariančné elipsy pre jednotlivé dáta, zobrazit vývoj kovariančnej matice S a samotný korekčný a predikčný krok. Je tiež možné interaktívne ovládať veľkosť šumu procesu. K dispozícii je tiež tlačidlo na mazanie obrazovky.



Obrázok A.4.

A.5 Modul 6 - ML odhad dát z meraní v polárnych súradniciach

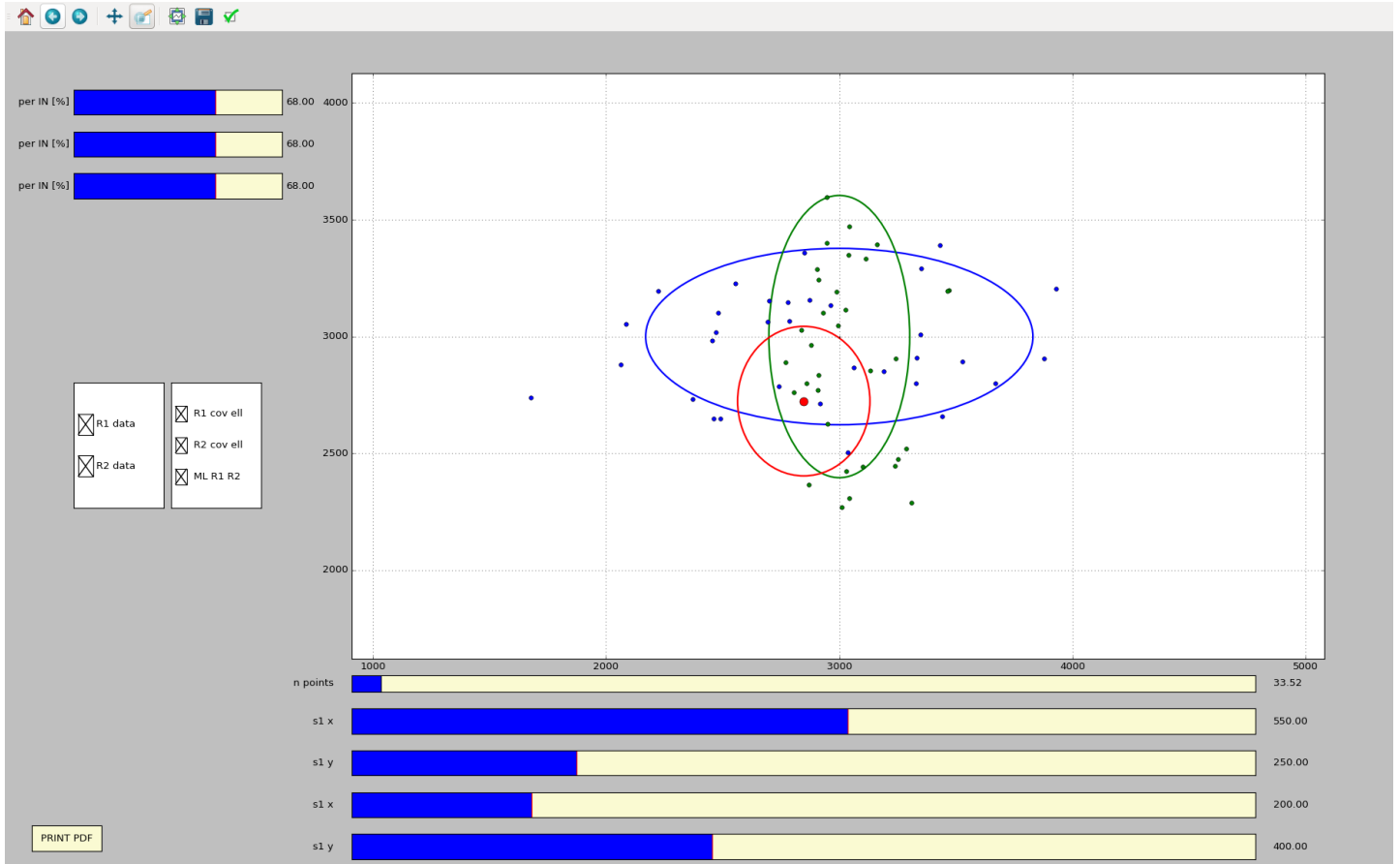
Aplikácia Modul 6 umožňuje interaktívne umiestniť dva radary na plochu a tiež umiestniť strednú hodnotu bodu, ktorý merajú. Na základe hodnôt šumu merania, ktorý je nastaviteľný v dolnej strane obrazovky, sa interaktívne počíta ML odhad z prvého nasimulovaného meraného dáta z každého radaru. Pre ilustráciu je možné zvoliť viacero vygenerovaných meraných bodov. Taktiež je možné meniť veľkosť kovariančných elíps podľa toho koľko percent meraných bodov chceme mať vo vnútri. V ľavej časti obrázku je možné vidieť výpis aktuálne spočítaných parametrov v konzole. Poznamenajme, že v prípade programu Modul 6 aj Modul 5 sú vyobrazené kovariančné elipsy so strednom z strednej hodnoty z ktorej bolo nasimulované meranie. Samotný ML odhad sa ale týka kovariančných elíps okolo meraných bodov.



Obrázok A.5.

A.6 Modul 5 - ML odhad dát pre šumy v karteziánskych súradniciach

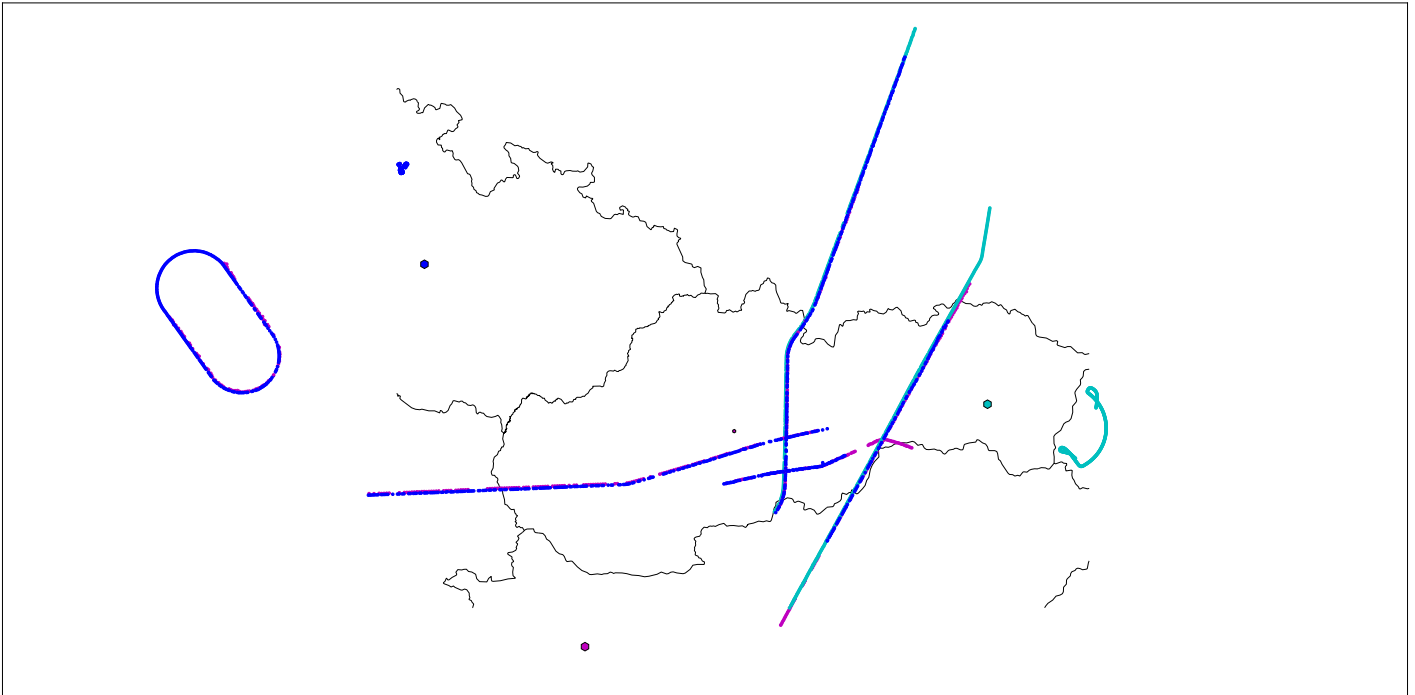
Aplikácia Modul 5 je obdoba programu Modul 6, ale šum je do dát pridávaný v karteziánskych súradniciach.



Obrázok A.6.

A.7 Modul 7 - Spracovanie reálnych dát

Pre spracovanie reálnych dát bol vytvorený program v jazyku Python 2, na základe frameworku Matplotlib-Basemap. Pre konverziu dát z radarových do svetových súradníc boli naprogramované výpočty odvodené v kapitole 2. Trieda, vykonávajúca tieto výpočty vzhľadom na parametre referenčného elipsoidu WGS84, sa nazýva *RealRadar*. Túto triedu používa na prepočty dát vyobrazovací modul *display real data*, ktorý používa aj ďalšie moduly pre načítanie reálnych dát z .csv súborov. Ďalej boli dáta z WGS alebo ECEF formátu prekonvertované do stereografickej projekcie so stredom, ktorý zobrazuje malý fialový bod v strede mapy slovenska.



Obrázok A.7.

Príloha B

Asterix správa

Ukážka reálnych dát zakódovaných v protokole Asterix. Tieto boli dekodované pomocou voľne dostupného softwaru, napísanom v jazyku Python, ktorý vyvinula chorvátska služba letovej prevádzky - Croatia Control Ltd. . Dátový packet prichádzajúci po sieti má v hexadecimálnom vyčíslení tvar,

```
asterix_packet=[ 0x30, 0x00, 0x30, 0xfd, 0xf7, 0x02, 0x19, 0xc9, 0x35,  
                 0x6d, 0x4d, 0xa0, 0xc5, 0xaf, 0xf1, 0xe0, 0x02, 0x00,  
                 0x05, 0x28, 0x3c, 0x66, 0x0c, 0x10, 0xc2, 0x36, 0xd4,  
                 0x18, 0x20, 0x01, 0xc0, 0x78, 0x00, 0x31, 0xbc, 0x00,  
                 0x00, 0x40, 0x0d, 0xeb, 0x07, 0xb9, 0x58, 0x2e, 0x41,  
                 0x00, 0x20, 0xf5 ].
```

Rozkódovanie do jednotlivých zložiek protokolu potom vyzerá nasledovne.

```
Asterix record: 1  
Len: 45  
CRC: C150ED0E  
Timestamp: 1495284131351 (2017-05-20 14:42:11.351000)  
Category: 48 (Transmission of Monoroadar Data)  
Item: I010 (Data Source Identifier)  
      SAC (System Area Code): 25  
      SIC (System Identification Code): 201  
Item: I230 (Comm capability)  
      STAT (STAT): 0  
      SI (SI/II Transponder Capability): 0 SI-Code Capable  
      ARC (Altitude reporting capability): 1 25ft resolution  
      spare (spare bit set to 0): 0  
      ModeSSSC (ModeS Specific Service Capability): 1 Yes  
      BDS37 (BDS 1,0 bits 37/40): 5  
      BDS16 (BDS 1,0 bit 16): 1  
      COM (COM): 1  
      AIC (Aircraft identification capability): 1 Yes  
Item: I140 (Time Of Day)  
      ToD (Time Of Day): 27354.6015625  
Item: I040 (Measured Position in Polar Coordinates)  
      THETA (THETA): 340.13671875  
      RHO (RHO): 197.68359375  
Item: I170 (Track Status)  
      RAD (RAD): 2 SSR/ModeS Track  
      FX (FX): 0 End of Data Item  
      CDM (CDM): 0 Maintaining  
      TRE (TRE): 0 Track still alive  
      CNF (CNF): 0 Confirmed Track  
      spare (spare bits set to 0): 0  
      SUP (SUP): 0 Track from cluster network - NO  
      MAH (MAH): 0 No horizontal man. sensed
```



```

    GH0 (GH0): 0 True target track
    TCC (TCC): 0 Radar plane
    DOU (DOU): 0 Normal confidence
Item: ts ()1495284131351
Item: len ()45
Item: IO20 (Target Report Descriptor)
    RAB (RAB): 0 Report from aircraft transponder
    RDP (RDP): 0 Report from RDP Chain 1
    FX (FX): 0 End of Data Item
    SPI (SPI): 0 Absence of SPI
    TYP (TYP): 5 Single ModeS Roll-Call
    SIM (SIM): 0 Actual target report
Item: crc ()C150ED0E
Item: I161 (Track Number)
    Tn (Track Number): 3563
Item: IO70 (Mode-3/A Code)
    Mode3A (Mode-3/A reply code): 1000
    spare (spare bit set to 0): 0
    L (L): 0 Mode-3/A code as derived from the reply of the
        transponder
    G (G): 0 Default
    V (V): 0 Code validated
Item: I240 (Aircraft Identification)
    TId (Characters 1-8 (coded on 6 bits each) defining target
        identification): DLH65A
Item: I220 (Aircraft Address)
    ACAddr (AircraftAddress): 3C660C
Item: IO90 (Flight Level)
    FL (FlightLevel): 330.0
    G (G): 0 Default
    V (V): 0 Code validated
Item: I250 (Mode S Comm B data)
    MODE_STATUS (Status of MCP/FCU Mode Bits): 0
    MCP_ALT_STATUS (MCP Altitude Status): 1
    res (Reserved): 0
    APP (APPROACH Mode): 0 Not active
    TARGET_ALT_SOURCE (Target ALT source): 0 Unknown
    TARGET_ALT_STATUS (Status of Target ALT source bits): 0 No source
        information provided
    FMS_ALT (FMS Selected Altitude): 0.0
    BP_STATUS (Barometric Pressure Status): 1
    ALT_HOLD (ALT HOLD Mode): 0 Not active
    BP (Barometric Pressure): 227.0
    FMS_ALT_STATUS (FMS Altitude Status): 0
    MCP_ALT (MCP/FCU Selected Altitude): 33008.0
    VNAV (VNAV Mode): 0 Not active
Item: I200 (Calculated Track Velocity in Polar Coordinates)
    CGS (Calculated groundspeed): 434.94
    CHdg (Calculated heading): 124.002685547

```