

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

PRAHA 2017

Martina RYCHETSKÁ

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ
OBOR KONSTRUKCE A DOPRAVNÍ STAVBY



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VÝPOČET NAMÁHÁNÍ 3D MODELU MOSTNÍ KONSTRUKCE
METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

Vedoucí práce: RNDr. Jaroslav Novotný, PhD.
Katedra matematiky

leden 2017

Martina RYCHETSKÁ

Čestné prohlášení

Čestně prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a použila pouze zdroje uvedené v seznamu literatury.

V Praze, 3.1.2017

Martina Rychetská

.....

Poděkování

Chtěla bych poděkovat vedoucímu své diplomové práce RNDr. Jaroslavu Novotnému, PhD. za odborné vedení, cenné rady a trpělivost, které mi věnoval při zpracování této práce.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá vývojem programu na výpočet namáhání betonového mostu metodou konečných prvků. Skládá se z několika částí. Začíná teoretickou částí, zabývající se metodou konečných prvků. Další část obsahuje vlastní vývoj programu. Poslední část se věnuje konkrétnímu příkladu výpočtu betonového mostu.

Abstract

This diploma thesis deals with development of a program to calculate the stress of concrete bridge using the finite element method. It consists of several parts. It begins with a theoretical part which deals with the finite element method. Next part contains the description of the program. The last part is engaged in a specific example of numerical computation of a concrete bridge.

Klíčová slova

Betonové mosty, obloukové mosty, metoda konečných prvků (MKP), počítačové programy, Hookův zákon

Key words

Concrete bridges, arch bridges, finite element method, computer programs, Hooke's law

Obsah

1	ÚVOD	1
2	MECHANIKA KONTINUA ELASTICKÉHO TĚLESA	2
2.1	Síly objemové a plošné – vektor napětí	2
2.2	Zavedení tenzoru napětí	3
2.3	Rovnice rovnováhy	4
2.4	Tenzor deformace	4
2.5	Hookův zákon	6
3	FORMULACE ÚLOHY PRUŽNOSTI	7
3.1	Laméovy rovnice	7
3.2	Klasická formulace úlohy pružnosti	8
3.3	Princip virtuálních prací	8
3.4	Sobolevovy prostory (prostory funkcí s konečnou energií)	9
3.5	Slabá formulace úlohy pružnosti	10
4	APROXIMACE ÚLOH PRUŽNOSTI METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ	11
4.1	Diskretizace úlohy metodou konečných prvků	11
4.2	Matice tuhosti, vektor pravých stran a vektor řešení	12
5	IZOPARAMETRICKÉ PRVKY VE 3D - KOSTKA A PĚTISTĚN	18
5.1	Tvarové funkce pro kostku	18
5.2	Tvarové funkce pro pětistěn	19
5.3	Numerická integrace na kostce	20
5.4	Numerická integrace na pětistěnu	21
6	NUMERICKÉ VÝPOČTY MOSTNÍ KONSTRUKCE	24
6.1	Zadání úlohy	24
6.2	Popis generace sítě v GFEMu	24
6.3	Popis zatěžovacích stavů	29
6.4	Postup výpočtu	33
6.5	Výsledky výpočtu pro zadané zatěžovací stavy	33
7	ZÁVĚR	44
8	LITERATURA	45

1 ÚVOD

Tato diplomová práce se zabývá vývojem programu na výpočet namáhání betonového mostu metodou konečných prvků. Nejprve se zaměřuji na teoretickou část úlohy. Věnuji se lineární pružnosti a Hookovu zákonu. Stanovuji klasickou a slabou formulaci úlohy a odvozují matici tuhosti a pravé strany. Vycházím z klasických monografií [4], [7], [8]. V další části se zabývám vývojem samotného programu a algoritmem numerického řešení, viz [1], [2], [5]. V praktické části této práce řeším s pomocí tohoto programu konkrétní úlohu zadanou v rámci konstrukčního projektu, viz [3], [10], [11].

Jedná se o návrh nového železobetonového mostu přes údolí Šmejka na dálnici D1 u Senohrab. Během projektu jsem navrhla obloukový most s horní mostovkou o rozpětí 120 metrů a výšce oblouku 25 metrů. Střednice oblouku má tvar paraboly čtvrtého stupně s rovnicí $y = x^4/3628800 + x^2/168$. Zakřivená střednice zaručuje, že je celá konstrukce oblouku namáhána tlakovou normálovou silou, což je výhodné při použití betonu, který je pevný, ale křehký a má nízkou tahovou únosnost. Při větší tlakové síle má tudíž větší únosnost ohybovou. Navrhla jsem pevnostní třídu betonu C30/37. Uložení v patách oblouku je vetknuté. Šířka oblouku je 8 metrů a jeho výška je lineárně proměnná - ve vrcholu $h = 1,2$ m a v patě $h = 1,8$ m, protože směrem k patám oblouku vzrůstá osová síla. Mostovka je podepřena vzpěrami, které jsou rozděleny tak, aby se nad obloukem vytvořilo 9 polí, jejichž rozpětí se zvětšuje směrem k patám oblouku.

Cílem této diplomové práce je spočítat pomocí mého programu využívajícího metodu konečných prvků napětí v mostní konstrukci při zatížení podle normy.

Numerickou realizaci, prezentaci výsledků i vyhodnocení napětí popisují v poslední kapitole.

2 MECHANIKA KONTINUA ELASTICKÉHO TĚLESA

2.1 Síly objemové a plošné – vektor napětí

Uvažujme deformovatelné spojité těleso. Těleso pro nás bude omezená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (tj. otevřená omezená souvislá podmnožina). Budeme předpokládat, že existuje spojité zobrazení φ

$$\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tak, že těleso přejde po deformaci v těleso $\varphi(\Omega)$. φ budeme uvažovat ve tvaru

$$\varphi(x) = x + u(x),$$

kde u představuje vektor posunutí.

Nechť $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ a existuje $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(\bar{\Omega}))$. Nyní všechny zaváděné veličiny budeme vztahovat k tělesu po deformaci, tj. k $\varphi(\Omega)$. Na objemový element uvnitř *deformovaného tělesa* působí dva druhy sil, a to tzv. *síly objemové* a *síly plošné*.

Síla objemová (přesněji hustota objemové síly) působí na jednotlivé elementy tělesa a je úměrná hmotě v tomto elementu obsažené. Vztáhneme ji na jednotku objemu $\varphi(\Omega)$ a označíme $F^\varphi = (F_1^\varphi, F_2^\varphi, F_3^\varphi)$; je to vektorová funkce a její složky v kartézské soustavě souřadnic budou F_i^φ , $i = 1, 2, 3$. Na objemový element dV bude tedy působit objemová síla

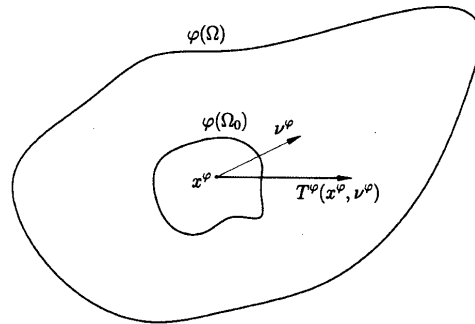
$$\mathbf{F}^\varphi dV,$$

a nebo ve složkovém pojetí

$$F_i^\varphi dV.$$

Příkladem jsou gravitační či odstředivá síla vztážená na jednotku objemu.

Uvažujme nyní na tělese po deformaci $\varphi(\Omega)$ výsledný testovací objem $\varphi(\Omega_0)$. Nechť bod x^φ leží na povrchu této testovací oblasti, ν^φ je jednotková vnější normála k hranici $\varphi(\Omega_0)$ v bodě x^φ . Vektorem napětí v bodě x^φ a ve směru ν^φ budeme rozumět hustotu vnitřních sil $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi, \nu^\varphi) = (T_1^\varphi, T_2^\varphi, T_3^\varphi)$, kterými působí část $\varphi(\Omega) - \varphi(\bar{\Omega}_0)$ na část $\varphi(\bar{\Omega}_0)$ v bodě x^φ a ve směru ν^φ (obr. 1).



Obr. 1: Vektor napětí

Plošná síla, která působí na plošný element dS , je úměrná jeho velikosti, tj. má tvar

$$\mathbf{T}^\varphi dS,$$

kde \mathbf{T}^φ je konečný vektor. Je zřejmé, že \mathbf{T}^φ je plošná síla vztažená na jednotku plochy; nazýváme ji *napětím* a chceme-li vyzvednout její vektorový charakter říkáme jí *vektor napětí*.

Průmět napětí $T(x, \nu)\nu = N(x, \nu)$ vektoru napětí do normály nazýváme *normálovým napětím*. Průmět do tečné roviny k hranici $\overline{\Omega}_0$ nazýváme *smýkovým (tečným) napětím*.

2.2 Zavedení tenzoru napětí

Uvažujeme pevně bod $x^\varphi \in \varphi(\Omega_0)$. Lze ukázat, že vektor $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi, \nu^\varphi)$ v nějakém směru ν^φ je určen svými velikostmi ve směrech souřadných os. Označme proto složky vektoru napětí ve směrech souřadných os

$$\mathbf{T}_j^\varphi(x^\varphi, e_i^\varphi) = \tau_{ij}^\varphi, \quad i, j=1,2,3,$$

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1).$$

Pak platí

$$T_i^\varphi(x^\varphi, \nu^\varphi) = \tau_{ij}^\varphi \nu_j^\varphi, \quad \text{kde } \nu^\varphi = (\nu_1^\varphi, \nu_2^\varphi, \nu_3^\varphi).$$

Dále lze ukázat, že $\tau_{ji}^\varphi = \tau_{ij}^\varphi$ z rovnováhy momentů. Maticí τ_{ij} je pak určen tenzor, který nazveme *Cauchyovým tenzorem napětí*. Vzhledem k definici vektoru napětí je vztažen na těleso po deformaci.

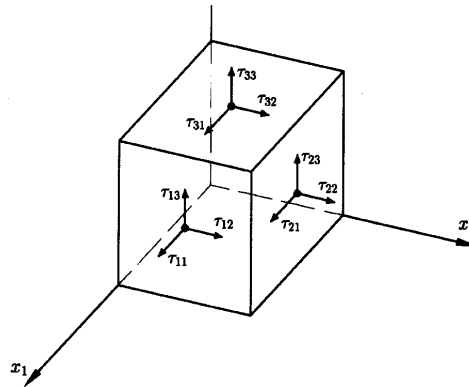
Všimněme si, že v τ_{ij}^φ první index označuje směr normály elementární roviny, na kterou vektor napětí $T^\varphi(x^\varphi, e^\varphi)$ působí, kdežto druhý stanoví, o kterou složku jde (obr. 2). Složky napětí ve směru normály nazýváme napětími normálovými, tečné složky pak napětími smýkovými.

Složky tenzoru napětí jsou definovány

$$\mathbf{T}_j^\varphi(x^\varphi, e_i^\varphi) = \tau_{ij}^\varphi, \quad i, j=1,2,3.$$

Lze ukázat, že platí

$$T_i^\varphi(x^\varphi, \nu^\varphi) = \tau_{ij}^\varphi \nu_j^\varphi, \quad \text{kde } \nu^\varphi = (\nu_1^\varphi, \nu_2^\varphi, \nu_3^\varphi).$$



Obr. 2: Složky tenzoru napětí

2.3 Rovnice rovnováhy

Uvažujeme těleso Ω^φ a v něm myšlený "testovací objem" Ω_0^φ . Předpokládejme, že $\tau_{ij}^\varphi \in C^1(\Omega^\varphi)$. Sestavme na tomto testovacím objemu *bilanci rovnováhy sil*. Tedy součet objemových sil působících na Ω_0^φ a povrchových sil působících na $\partial\Omega_0^\varphi$ musí být roven 0. To je vyjádřeno matematicky

$$\int_{\Omega_0^\varphi} F_i^\varphi dx^\varphi + \int_{\partial\Omega_0^\varphi} T_i^\varphi(x^\varphi, \nu^\varphi) dS^\varphi = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Nahradíme $T_i^\varphi(x^\varphi, \nu^\varphi) = \tau_{ij}^\varphi \nu_j^\varphi$, takže druhý integrál se nám změní na

$$\int_{\partial\Omega_0^\varphi} \tau_{ij}^\varphi \nu_j^\varphi dS^\varphi.$$

Za použití Gaussovy věty převedeme integrál na objemový. Za předpokladu $\tau_{ij}^\varphi \in C^1(\Omega^\varphi)$ můžeme tuto větu použít a dostaneme integrál

$$\int_{\Omega_0^\varphi} \frac{\partial \tau_{ij}^\varphi}{\partial x_j^\varphi} dx^\varphi.$$

Po dosazení do původní rovnice rovnováhy, rovnice přechází na tvar

$$\int_{\Omega_0^\varphi} \left(F_i^\varphi + \frac{\partial \tau_{ij}^\varphi}{\partial x_j^\varphi} \right) dx^\varphi = 0.$$

O funkcích F_i^φ předpokládáme, že jsou spojitě, takže celý integrand je spojitý. Vzhledem k tomu, že těleso Ω^φ bylo zvoleno zcela libovolně, je zřejmé, že se integrál na levé straně rovnice rovná nule tehdy, je-li jeho integrand roven nule také. Dostaneme tak *rovnice rovnováhy elastického tělesa* ve tvaru

$$\left(F_i^\varphi + \frac{\partial \tau_{ij}^\varphi}{\partial x_j^\varphi} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

2.4 Tenzor deformace

Mějme zobrazení $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Označme $\nabla\varphi$ matici Jacobiho $(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j})_{i,j=1}^n$

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

a $\nabla\varphi^T$ matici k ní transponovanou. Pro bod $x \in \bar{\Omega}$ (tj. v tělese před deformací) lze psát

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \nabla\varphi + O(|h|),$$

a tudíž

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)|^2 = h^T \nabla \varphi^T \nabla \varphi h + O(|h|^2).$$

Symetrický tenzor $C = \nabla \varphi^T \nabla \varphi$ nazýváme Cauchy-Greenovým tenzorem deformace. Odpovídající kvadratická forma vyjadřuje délku křivky po deformaci.

Uvažujme křivku γ , necht' je obrazem intervalu I při zobrazení $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (tj. prostor s definovanou velikostí vektoru $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$).

Délka γ je

$$L(\gamma) = \int_I |f'(t)| dt = \int_I (f'_i, f'_i)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Délka γ^φ je

$$L(\gamma^\varphi) = \int_I |(\varphi \circ f)'(t)| dt =$$

(podle věty o derivaci složené funkce)

$$= \int_I \left(\frac{\partial[\varphi_i(f(t))f_j(t)]}{\partial x_j} \frac{\partial[\varphi_i(f(t))f_k(t)]}{\partial x_k} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Speciálně, pro úsečku mezi body x a $x+h$ (tj. $f = id$)

$$dL = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$dL^\varphi = (C_{ij} dx_i dx_j)^{\frac{1}{2}}.$$

Počítejme: máme $\varphi = id + u$, tedy

$$C = \nabla \varphi^T \nabla \varphi = I + \nabla \varphi^T + \nabla \varphi + \nabla \varphi^T \nabla \varphi = I + 2E,$$

a tedy

$$E = \frac{1}{2} (\nabla \varphi + \nabla \varphi^T + \nabla \varphi^T \nabla \varphi),$$

nebo také

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Tento tenzor se nazývá *Greenův-Saint Venantův tenzor deformace* (také *tenzor konečné deformace*).

Zanedbáním kvadratického členu pro malé hodnoty $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ dostaneme *tenzor malých deformací*

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

2.5 Hookův zákon

Tensor deformace je vztažen k tělesu před deformací, takže složky deformace e_{ij} jsou funkcemi souřadnic počáteční, nedeformované polohy tělesa. Tensor napětí je naopak vztažen k tělesu po deformaci a jeho složky τ_{ij} jsou tedy funkcemi koncové polohy tělesa. Hookův zákon vyjadřuje závislost mezi tensorem napětí $\tau_{ij}^{\varphi}(x)$ na tensoru deformace.

Pro jednoosou napjatost a případ lineární pružnosti platí Hookův zákon úměrnosti

$$\tau = Ee,$$

kde E je tzv. Youngův modul pružnosti, τ je napětí a e je relativní prodloužení, $e = \frac{\Delta l}{l}$.

Skutečné chování elastických materiálů si mnohem více přiblížíme, zobecníme-li Hookův zákon na případy trojrozměrné. Předpokládejme, že v bodě $x \in \Omega$ existuje lineární vztah mezi tensory napětí a malé deformace

$$\tau_{ij}(x) = C_{ijkl}(x)e_{kl}(x).$$

Ze symetrie tenzorů τ_{ij} a e_{ij} plynou podmínky

$$C_{ijkl} = C_{jikl}; \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}.$$

Z energetických úvah plynou také vztahy

$$C_{ijkl} = C_{klij}.$$

Celkem tedy existuje nejvýše 21 nezávislých konstant C_{ijkl} charakterizující obecný materiál v bodě x .

Jestliže konstanty $C_{ijkl}(x)$ nezávisí na bodě $x \in \Omega$, pak materiál tělesa se nazývá *homogenní*. Jestliže konstanty $C_{ijkl}(x)$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic, pak materiál tělesa se nazývá *izotropní* v bodě x . V opačném případě se materiál tělesa nazývá *anizotropní* v bodě x .

Pro homogenní izotropní materiál lze mezi koeficienty vyznačit pouze dva. A to λ, μ , tzv. *Laméovy koeficienty*. Pak lze *zobecněný Hookův zákon* psát jako

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk}(x)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(x).$$

V technické praxi se místo Laméových koeficientů λ, μ používá častěji Youngův modul pružnosti E a Poissonova konstanta ν . Laméovy koeficienty pomocí veličin E, ν vypočteme jako

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Při uvažování teplotní napjatosti dostaneme Hookův zákon ve tvaru

$$\tau_{ij} = \lambda(e_{kk}(x) - 3\alpha(x)T(x))\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij}(x) - \alpha(x)T(x)\delta_{ij}),$$

kde α je koeficient teplotní roztažnosti a T je přírůstek teploty.

3 FORMULACE ÚLOHY PRUŽNOSTI

3.1 Laméovy rovnice

Předpokládejme, že platí zobecněný Hookův zákon pro izotropní materiál, kde $\lambda \in C^1(\bar{\Omega})$, $\mu \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$. Dále nechť posunutí $u_i \in C^1(\Omega)$ a na oblasti Ω jsou splněny rovnice rovnováhy při $F_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2, 3$.

Dosadíme-li do rovnice rovnováhy ze zobecněného Hookova zákona, dostaneme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda e_{kk} \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + F_i = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda e_{kk}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Tyto rovnice se nazývají *obecné Laméovy rovnice*.

Speciálně pro λ, μ konstantní dostaneme

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_j} e_{kk} + \mu \Delta u_i + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + F_i = 0,$$

a po úpravě

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \Delta u_i + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

což jsou tzv. *Laméovy rovnice*, které platí pro homogenní a izotropní materiál.

Laméovy rovnice můžeme pak rozepsat jako

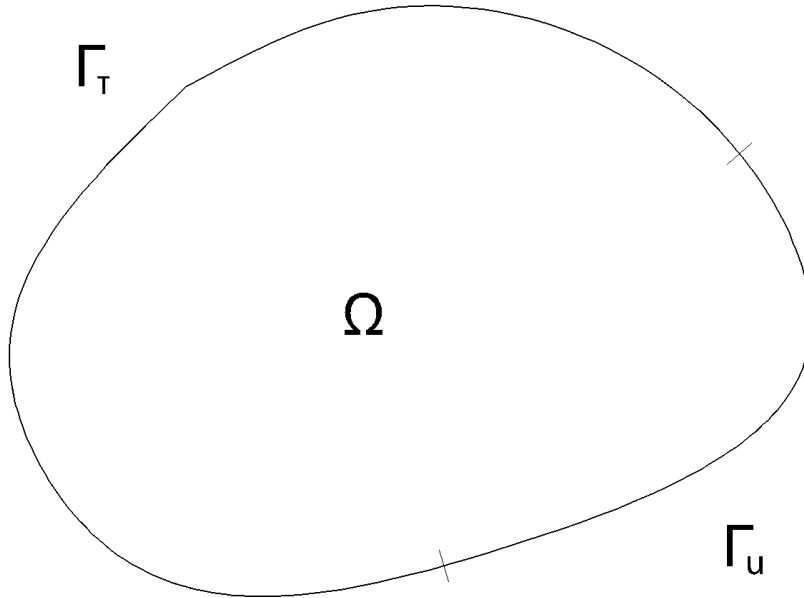
$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + F_1 &= 0, \\ (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + F_2 &= 0, \\ (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + F_3 &= 0. \end{aligned}$$

3.2 Klasická formulace úlohy pružnosti

Předpokládejme, že $\lambda, \mu \in C^1(\bar{\Omega})$, $u_i \in C^2(\Omega)$ a necht' hranice Γ oblasti Ω je jednou spojitě diferencovatelná. Uvažujme obecné Laméovy rovnice (1), kde $F_i \in C^1(\Omega)$.

Necht' jsou dány takové množiny Γ_τ, Γ_u disjunktní a otevřené v množině Γ (viz obr. 3),

$$\Gamma = \Gamma_\tau \cup \Gamma_u = \partial\Omega.$$



Obr. 3: Oblast Ω

Hledáme složky $u_i \in C^{(1)}(\Omega \cup \Gamma_\tau) \cap C(\Omega \cup \Gamma_u) \cap C^{(2)}(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$, které splňují rovnice (1), na množině Γ_τ splňují podmínku

$$\tau_{ij}(x)\nu_j(x) = T_i(x), \quad x \in \Gamma_\tau. \quad (2)$$

a na množině Γ_u podmínku

$$u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_u, \quad (3)$$

přičemž $T_i \in C(\Gamma_\tau)$, $f_i \in C(\Gamma_u)$, $i = 1, 2, 3$.

3.3 Princip virtuálních prací

Uvažujme úlohu klasické teorie pružnosti, kdy na části hranice Γ_u jsou dána posunutí f (tj. $u = f$) a na zbývajících částech Γ_τ jsou dány povrchové síly \mathbf{T}^φ , tj. $\tau_{ij}^\varphi \nu_j^\varphi = T_i^\varphi$.

Staticky přípustným polem napětí nazveme tenzorovou funkci $\tau^\varphi(x)$, $\tau_{ij}^\varphi = \tau_{ji}^\varphi$ splňující na Ω^φ rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{ij}^\varphi}{\partial x_j^\varphi} + F_i^\varphi = 0,$$

a na části hranice Γ_τ^φ okrajové podmínky

$$\tau_{ij}^\varphi \nu_j^\varphi = T_{0i}^\varphi.$$

Geometricky přípustným polem posunutí nazveme vektorovou funkci Θ^φ na Ω^φ , splňující na části hranice Γ_u^φ okrajovou podmínku

$$\Theta_i^\varphi = 0.$$

Princip virtuálních prací

Nechť $\tau^\varphi(x)$ je staticky přípustné pole napětí a $\Theta^\varphi(x)$ geometricky přípustné pole posunutí, přičemž tato pole jsou vzájemně nezávislá (tj. $\tau^\varphi(x)$ není vázáno na $\Theta^\varphi(x)$ Hookovým zákonem). Při označení $e_{ij}^\varphi(\Theta) = \frac{1}{2}(\frac{\partial \Theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_i})$ platí

$$\int_{\Omega} \tau_{ij}^\varphi(x) e_{ij}^\varphi(\Theta) = \int_{\Omega} F_i \Theta_i dx + \int_{\Gamma_\tau} T_{0i} \Theta_i dS.$$

Poznámka: Rovnice vyjadřuje, že virtuální práce vnitřních sil (levá strana) se rovná virtuální práci vnějších sil, tj. práci objemových a povrchových sil (pravá strana).

3.4 Sobolevovy prostory (prostory funkcí s konečnou energií)

Uvažujeme Sobolevův prostor $W^{1,2}(\Omega)$, potom $u \in L^2(\Omega)$ a všechny zobecněné derivace $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Skalární součin je definován jako

$$(u, v)_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega,$$

a norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}},$$

dále

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega), u = 0 \text{ na } \partial\Omega \text{ ve smyslu stop}\}.$$

3.5 Slabá formulace úlohy pružnosti

Nechť hranice Γ je rozdělena na takové disjunktní části Γ_τ, Γ_u , že

$$\Gamma = \Gamma_\tau \cup \Gamma_u.$$

Zavedme prostory

$$[W^{1,2}(\Omega)]^3 = \left\{ u \in [L^2(\Omega)]^3, \text{ derivace ve smyslu distribucí } \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \right\}$$

a

$$V = \left\{ u \in [W^{1,2}(\Omega)]^3, u_i = 0 \text{ na } \Gamma_u \text{ ve smyslu stop} \right\}.$$

Prostor V nazýváme *prostorem testovacích funkcí*. Nechť objemové síly $\mathbf{F} \in [L^2(\Omega)]^3$ a povrchové síly $\mathbf{T} \in [L^2(\Omega)]^3$ na Γ_τ . Nechť funkce $u_0 \in W$ zadává posunutí na Γ_u svými stopami.

Slabé řešení:

Funkce $u \in W$ se nazývá *slabé (zobecněné) řešení* okrajové úlohy pružnosti, jestliže platí:

1. $u - u_0 \in V$,
2. $\int_\Omega (\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + 2\mu e_{ij}(u) e_{ij}(v)) dx = \int_\Omega F_i v_i dx + \int_{\Gamma_\tau} T_{0i} v_i dS, \quad \forall v \in V.$

Důležitou roli v důkazu existence slabého řešení má tzv. *Kornova nerovnost*. Uvedme speciální případ Kornovy nerovnosti pro nulové okrajové podmínky:

Věta (Kornova nerovnost)

Nechť Ω je oblast v prostoru \mathbb{R}^3 a nechť $u \in [W_0^{1,2}(\Omega)]^3$.

Pak platí

$$\int_\Omega e_{ij}(v) e_{ij}(v) dx \geq \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx.$$

Užitím Kornovy nerovnosti je možno dokázat následující důležitou větu:

Věta (O existenci a jednoznačnosti slabého řešení)

Nechť $u_0 \in W$, $\mathbf{F} \in [L_2(\Omega)]^3$, $\mathbf{T} \in [L_2(\Gamma_\tau)]^3$ a nechť platí $\Gamma_u \neq \emptyset$. Nechť existuje takové číslo $\mu_0 > 0$, že

$$\mu(x) \geq \mu_0, \lambda(x) \geq 0 \quad \text{pro všechna } x \in \bar{\Omega}.$$

Pak existuje právě jedno slabé řešení okrajové úlohy pružnosti a platí pro něj spojitá závislost

$$\|u\|_W \leq c (\|u_0\|_W + \|F\|_{[L_2(\Omega)]^3} + \|T\|_{[L_2(\Gamma_\tau)]^3}).$$

4 APROXIMACE ÚLOH PRUŽNOSTI METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

4.1 Diskretizace úlohy metodou konečných prvků

Na oblasti Ω uvažujeme naši úlohu

$$\int_{\Omega} \tau_{ij}(u) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} F_i v_i dy + \int_{\Gamma_{\tau}} T_{0i} v_i dS, \quad \forall v \in V. \quad (4)$$

Předpokládáme, že funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ je jediným (slabým) řešením úlohy (4). Pro úlohu (4) máme $V = W_2^1(\Omega)$ a

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \tau_{ij}(u) e_{ij}(v) dx,$$
$$F(v) = \int_{\Omega} F_i v_i dy + \int_{\Gamma_{\tau}} T_{0i} v_i dS.$$

Slabé řešení je dáno rovností

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega).$$

Popíšeme diskretizaci okrajové úlohy (4) Galerkinovou metodou. Sestrojíme prostor V^h funkcí spojitých na Ω . Sestrojíme systém báзовých funkcí v_1, v_2, \dots, v_N ($\dim V_h = N$).

Přibližné Galerkinovo řešení úlohy (4) v prostoru V^h je taková po částech lineární funkce $u_h \in V^h$, která splňuje rovnost

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad v_h \in V^h.$$

Tedy hledáme

$$u_h = \sum_{j=1}^N U_j v_j,$$

aby platilo

$$a\left(\sum_{i=1}^N U_j v_j, v_i\right) = F(v_i),$$

t.j.

$$\sum_{i=1}^N U_j a(v_j, v_i) = F(v_i),$$

odkud potom dostaneme symetrickou pozitivně definitní matici $\mathbf{K} = a(v_j, v_i)$, tedy dostaneme soustavu lineárních rovnic pro neznámé U_j s pravou stranou \mathbf{F}

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}.$$

4.2 Matice tuhosti, vektor pravých stran a vektor řešení

Uvažujeme elastostatický případ lineárně elastického izotropního tělesa. Pro odvozování matice tuhosti uvažujeme Hookův zákon, ve kterém vystupuje Cauchyův tenzor napětí τ_{ij} definovaný pomocí tenzoru deformace e_{ij} a Lamého koeficientů λ a μ .

Hledané φ tedy musí splňovat rovnici:

$$\int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\lambda e_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(u) \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} d\Omega, \quad (5)$$

kde pro tenzor deformace platí:

$$\begin{aligned} e_{kk} &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \\ e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ e_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ e_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

a po dosazení do Hookova zákona dostaneme:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \\ \tau_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Jestliže nyní hledáme řešení u jako lineární kombinaci tvarových funkcí a jednotlivých koeficientů těchto tvarových funkcí, které jsou zároveň hledanými neznámými, pak po rozepsání do jednotlivých složek máme:

$$u_x = \sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} N_i, \quad (6)$$

$$u_y = \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} N_i, \quad (7)$$

$$u_z = \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} N_i, \quad (8)$$

kde L_N je počet uzlů pro posuvy na jednotlivém prvku. Dalším krokem je odvození slabé formulace pro levou stranu rovnice (5)

$$\int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} d\Omega,$$

$$\begin{aligned} \text{pro } i = 1 & \int_{\Omega} \left(\tau_{xx} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega, \\ i = 2 & \int_{\Omega} \left(\tau_{xy} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega, \\ i = 3 & \int_{\Omega} \left(\tau_{xz} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega, \end{aligned}$$

odkud dosazením do pravé strany rovnice (5) dostaneme:

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[\lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] \frac{\partial N_j}{\partial x} + \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial N_j}{\partial y} + \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} d\Omega,$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial N_j}{\partial x} + \left[\lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \frac{\partial N_j}{\partial y} + \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} d\Omega,$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial N_j}{\partial x} + \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial N_j}{\partial y} \right. \\ \left. + \left[\lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} d\Omega.$$

Po dosazení lineárních kombinací tvarových funkcí (6, 7, 8) obdržíme:

$$\int_{\Omega} \left[\lambda \left(\sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + 2\mu \sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \left(\sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \mu \left(\sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] d\Omega, \\ \int_{\Omega} \left[\mu \left(\sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + 2\mu \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \right. \\ \left. + \mu \left(\sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] d\Omega, \\ \int_{\Omega} \left[\mu \left(\sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) + 2\mu \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega.$$

Záměnou sumace a integrace získáme soustavu v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega \\
& + \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \\
& + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \\
& + \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega \\
& + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{L_N} u_{xi} \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega \\
& + \sum_{i=1}^{L_N} u_{yi} \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega \\
& + \sum_{i=1}^{L_N} u_{zi} \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega.
\end{aligned}$$

a jestliže označíme:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega, \\
B_{ij} &= \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega, \\
C_{ij} &= \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega, \\
D_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega, \\
E_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega, \\
F_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega, \\
D_{ji} &= \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega, \\
E_{ji} &= \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega, \\
F_{ji} &= \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega,
\end{aligned}$$

můžeme matici tuhosti napsat v přehledném tvaru:

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}, & D_{ij}, & E_{ij} \\ D_{ji}, & B_{ij}, & F_{ij} \\ E_{ji}, & F_{ji}, & C_{ij} \end{bmatrix}.$$

Vektor pravých stran: Z pravé strany rovnice (5) po dosazení obdržíme

$$F_j = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_x N_j d\Omega \\ \int_{\Omega} f_y N_j d\Omega \\ \int_{\Omega} f_z N_j d\Omega \end{bmatrix},$$

kde f_x, f_y, f_z jsou složky vnějších objemových sil.

Vektor hledaných řešení bude mít tvar

$$U_i = \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{zi} \end{bmatrix}.$$

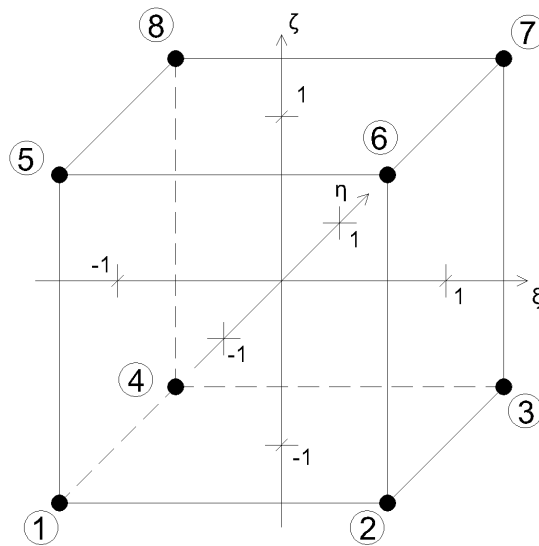
V každém časovém kroku tedy hledáme řešení soustavy

$$K_{ij}U_i = F_j.$$

5 IZOPARAMETRICKÉ PRVKY VE 3D - KOSTKA A PĚTISTĚN

5.1 Tvarové funkce pro kostku

Síť konečných prvků 3D mostní konstrukce je tvořena převážně osmiuzlovými izoparametrickými kostkami, jen v patě oblouku bylo nutno kvůli geometrii použít několik šestiuzlových izoparametrických pětistěnů. Jsou podrobně popsány např. v pracích I. Babušky a B. Szabo[1], K.J. Batheho [2] a T.J.R. Hughese [5]. Popišme nejprve izoparametrickou kostku, viz obr. 4.



Obr. 4 : *Izoparametrická osmiuzlová kostka*

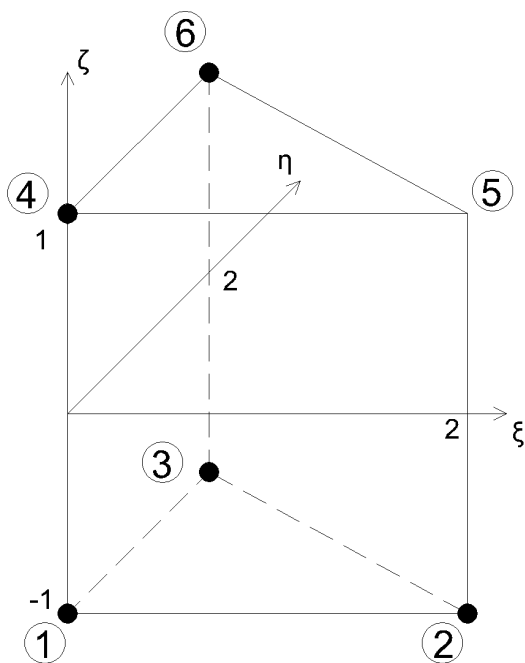
Referenčnímu prvku je v lokálních souřadnicích ξ , η a ζ přiřazeno osm trilineárních tvarových funkcí:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 0.125 * (1. - \xi) * (1. - \eta) * (1. - \zeta) \\
 N_2 &= 0.125 * (1. + \xi) * (1. - \eta) * (1. - \zeta) \\
 N_3 &= 0.125 * (1. + \xi) * (1. + \eta) * (1. - \zeta) \\
 N_4 &= 0.125 * (1. - \xi) * (1. + \eta) * (1. - \zeta) \\
 N_5 &= 0.125 * (1. - \xi) * (1. - \eta) * (1. + \zeta) \\
 N_6 &= 0.125 * (1. + \xi) * (1. - \eta) * (1. + \zeta) \\
 N_7 &= 0.125 * (1. + \xi) * (1. + \eta) * (1. + \zeta) \\
 N_8 &= 0.125 * (1. - \xi) * (1. + \eta) * (1. + \zeta).
 \end{aligned}$$

Tyto funkce nabývají vždy v jednom z vrcholů hodnotu 1, zatímco v ostatních třech vrcholech jsou nulové. Jejich tvar je patrný z grafického vyjádření na obrázku 4.

5.2 Tvarové funkce pro pětistěn

Podobně se konstruuji tvarové funkce pro pětistěn, viz obr. 5.



Obr. 5 : *Izoparametrický šestiuzlový pětistěn*

Referenčnímu prvku je v lokálních souřadnicích ξ , η a ζ přiřazeno šest trilineárních tvarových funkcí:

$$N_1 = 0.25 * (2. - \xi. - \eta) * (1. - \zeta)$$

$$N_2 = 0.25 * \xi * (1. - \zeta)$$

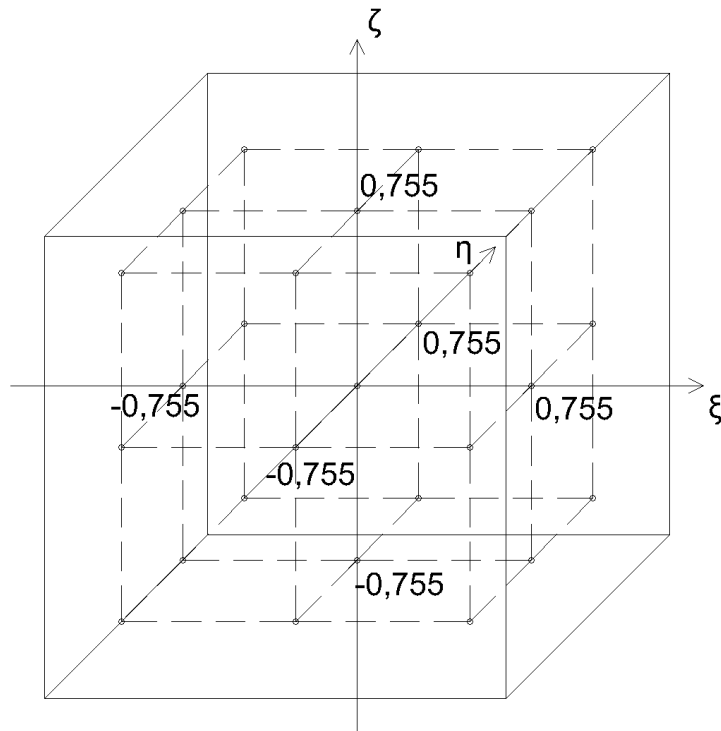
$$N_3 = 0.25 * \eta * (1. - \zeta)$$

$$N_4 = 0.25 * (2. - \xi - \eta) * (1. + \zeta)$$

$$N_5 = 0.25 * \xi * (1. + \zeta)$$

$$N_6 = 0.25 * \eta * (1. + \zeta).$$

5.3 Numerická integrace na kostce



Obr. 6 : Souřadnice bodů Gaussovy integrace

K výpočtu matice tuhosti na kostce byla použita Gaussova integrace řádu 3. Na jeden prvek připadá celkem 27 Gaussových bodů. Jejich souřadnice jsou patrné z obrázku 6. Váhy pro každou souřadnici potřebné pro integraci jsou v tabulce 1.

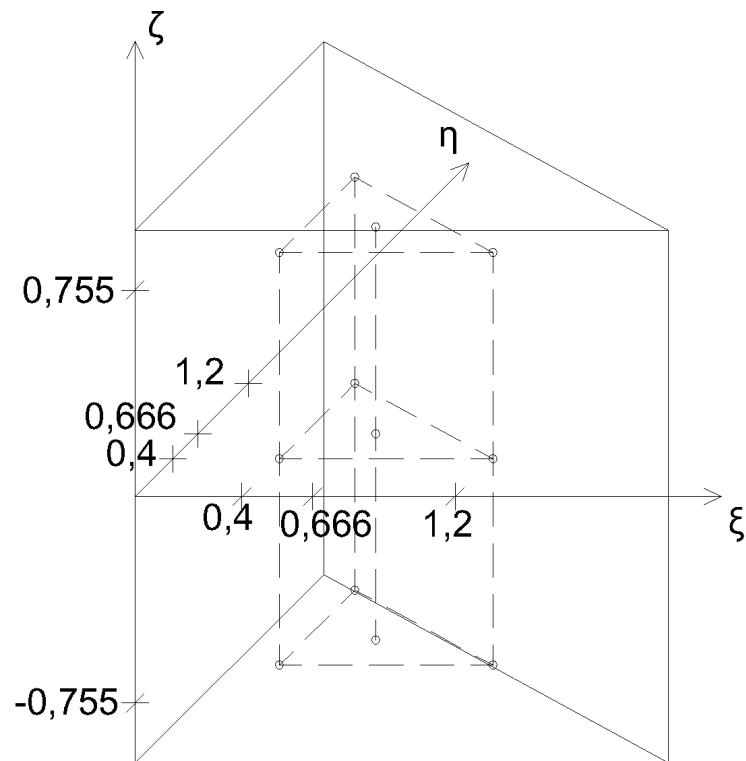
ξ	w
0,755	0,5555
0.	0,8888
0,755	0,5555

Tabulka 1: Váhy pro Gaussovu numerickou integraci řádu 3

Váhy v jednotlivých bodech dostaneme jako součin vah v x-ovém, y-ovém a z-ovém směru

$$\int_{\Omega_{ref}} h(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{ig=1}^3 \sum_{jg=1}^3 \sum_{kg=1}^3 w_{ig} * w_{jg} * w_{kg} * h(\xi_{ig}, \eta_{jg}, \zeta_{kg}).$$

5.4 Numerická integrace na pětistěnu

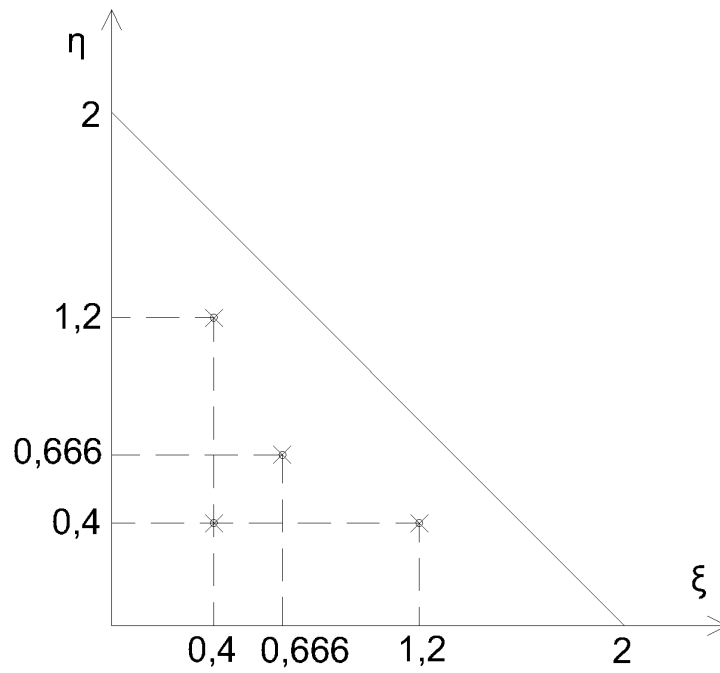


Obr. 7 : Souřadnice bodů numerické integrace

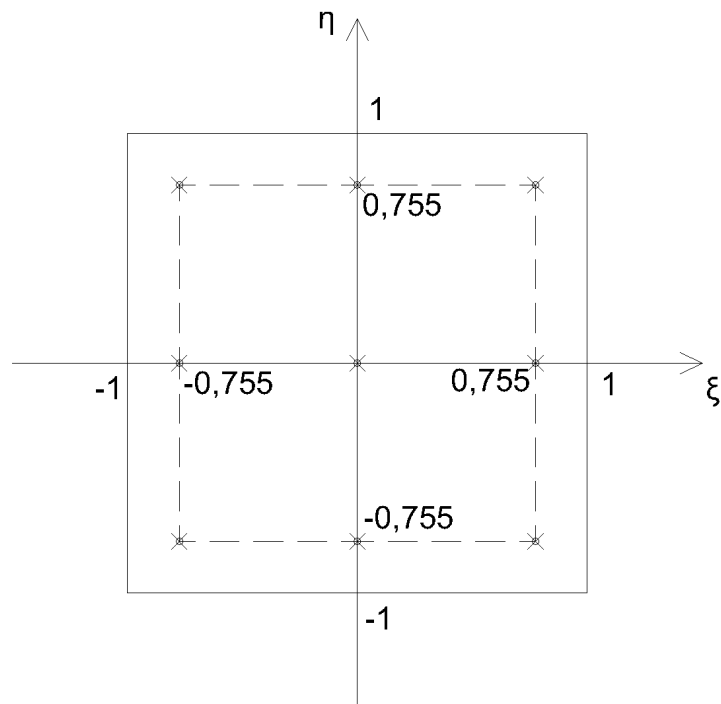
K výpočtu matice tuhosti na pětistěnu použijeme Gaussovu integraci řádu 3 na čtverci, viz obr. 9, na trojúhelníku pak speciální integraci ze 4 bodů, viz obr. 8. Na jeden prvek připadá celkem 12 Gaussových bodů. Váhy potřebné pro integraci na trojúhelníku jsou v tabulce 2.

ξ	η	w
0,4	0,4	1.041666666666
0,4	1,2	1.041666666666
1,2	0,4	1.041666666666
0,666	0,666	-1.125

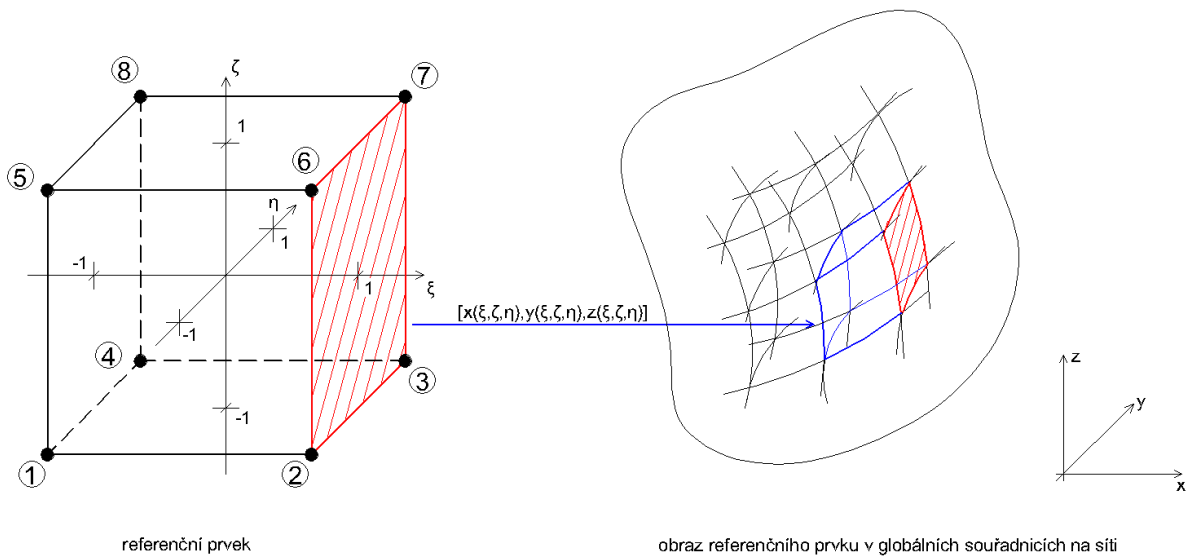
Tabulka 2: Váhy pro Gaussovu numerickou integraci ze 4 bodů na trojúhelníku



Obr. 8 : Souřadnice bodů numerické integrace na trojúhelníku



Obr. 9 : Souřadnice bodů numerické integrace na čtverci



Obr. 10 : Zobrazení referenčního prvku na prvek v síti

Popisovaný referenční prvek (kostka nebo pětistěn) se zobrazí pomocí izoparametrického zobrazení z lokálních souřadnic ξ, η, ζ do globálních souřadnic x, y, z na skutečných prvek síti - viz obr. 10. Pomocí věty o derivaci inverzní funkce pak můžeme určit derivace tvarových funkcí podle globálních proměnných x, y .

Integrál přes prvek Ω_e se převede podle věty o substituci na integrál přes referenční prvek Ω_{ref}

$$\int_{\Omega_e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega_{ref}} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))| d\xi d\eta d\zeta$$

Integrál po povrchu Γ_e se převede na integrál přes čtverec (případně trojúhelník) Γ_{ref} , na kterém je hranice parametrizována podle vzorce

$$\int_{\Gamma_e} g(x, y, z) dS = \int_{\langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle} g(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), z(\varphi, \psi)) |J(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), z(\varphi, \psi))| d\varphi d\psi.$$

6 NUMERICKÉ VÝPOČTY MOSTNÍ KONSTRUKCE

6.1 Zadání úlohy

Jedná se o návrh nového železobetonového mostu přes údolí Šmejka na dálnici D1 u Senohrab. Během projektu jsem navrhla obloukový most s horní mostovkou o rozpětí 120 metrů a výšce oblouku 25 metrů. Rozměry profilu mostovky jsou na obr. 11, rozměry celého mostu na obr. 12.

Střednice oblouku má tvar paraboly čtvrtého stupně s rovnicí

$$y = x^4/3628800 + x^2/168,$$

viz Bechyně[3]. Zakřivená střednice zaručuje, že je celá konstrukce oblouku namáhaná tlakovou normálovou silou, což je výhodné při použití betonu, který je pevný, ale křehký a má nízkou tahovou únosnost. Při větší tlakové síle má tudíž větší únosnost ohybovou. Navrhla jsem pevnostní třídu betonu C30/37. Uložení v patách oblouku je vetknuté. Šířka oblouku je 8 metrů a jeho výška je lineárně proměnná - ve vrcholu $h = 1,2$ m a v patě $h = 1,8$ m, protože směrem k patám oblouku vzrůstá osová síla. Mostovka je podepřená vzpěrami, které jsou rozděleny tak, aby se nad obloukem vytvořilo 9 polí, jejichž rozpětí se zvětšuje směrem k patám oblouku.

V rámci konstrukčního projektu jsem navrhla hlavní podélnou výztuž v patě oblouku 25 mm po 150 mm při obou površích oblouku, ve čtvrtině rozpětí oblouku (tam se předpokládá maximální napětí u obloukových mostů) 16 mm po 150 mm a ve vrcholu oblouku 14 mm po 150 mm. Posoudila jsem ji interakčními diagramy na vnitřní síly, které spočítal program Scia Engineer.

Cílem této diplomové práce je zjistit, zda tato výztuž vyhoví při stejném zatížení i pro vnitřní síly vypočítané pomocí mého programu využívajícího metodu konečných prvků ve 3D.

6.2 Popis generace sítě v GFEMu

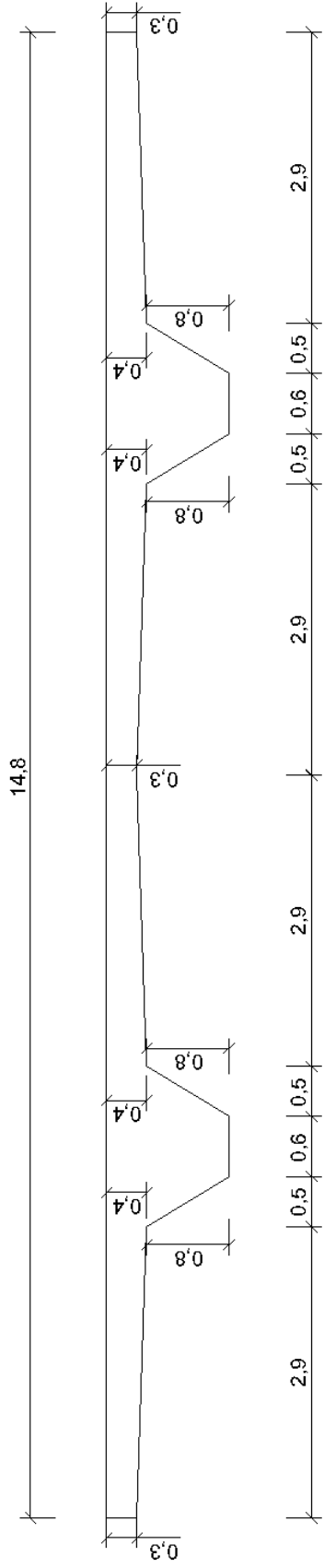
S pomocí generátoru sítě GFEM byla vytvořena 3D síť zadané mostní konstrukce, skládající se z převážně osmiuzlových kostek a několika šestiuzlových pětistěnů. Pětistěny bylo nutno použít kvůli geometrii v patě oblouku.

Nejprve bylo potřeba zjistit jednotlivé souřadnice bodů oblouku. Navržena byla rovnice střednice oblouku a výška průřezu, lineárně se zvětšující směrem k patám oblouku. Z toho lze vypočítat rovnice horní i spodní hrany oblouku. Jednotlivé souřadnice jsme zjistili pomocí jednoduchých programů v jazyku pascal po půl metrech ve směru osy x a v oblastech vzpěr po 0,25 m. Propojením linií vznikla síť prvků se čtyřmi prvky po výšce oblouku. Poté byly vytvořeny hrany mostovky promítnutím linie oblouku do roviny. Síť mostovky byla opět rozdělena na čtyři prvky po její výšce. Vzpěry byly rozdělené tak, aby výška jednoho prvku byla přibližně půl metru. Mostovka byla prodloužena na obě strany až k mostním opěrám a byly k ní přidány pilíře.

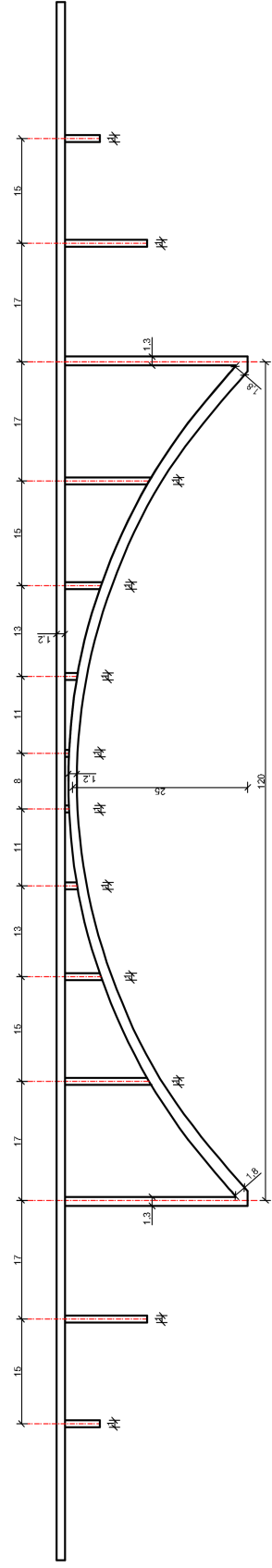
Z rovinných profilů byly vytažením do třetího rozměru sestaveny segmenty mostovky a také oblouk s pilíři, viz obr. 13 a 14.

Vzhledem k symetrické geometrii mostu byla vytvořena nejprve síť poloviny mostu, která byla pak odzrcadlena a spojena s původní částí. Vzniklá síť celého mostu je na obr. 15. Vzhledem k nesymetrickému zatížení bylo nutné provést výpočet na celé konstrukci mostu.

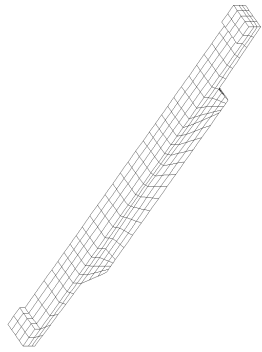
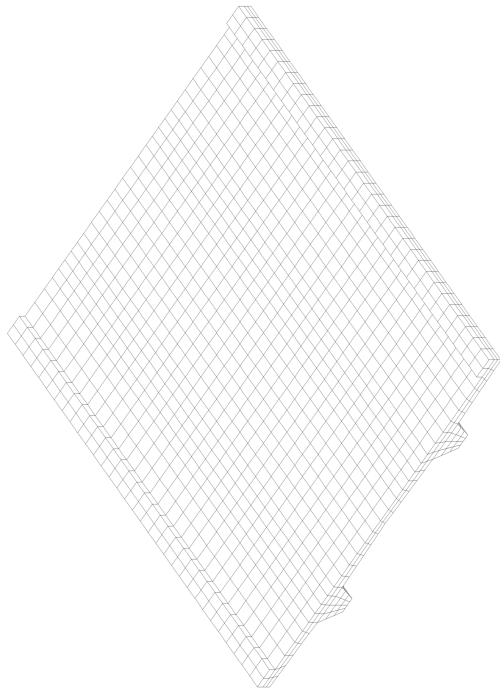
Síť má 75 456 prvků a 107 392 uzlů. Protože v každém uzlu máme 3 neznámá posunutí, musíme v každém zatěžovacím stavu řešit soustavu lineárních rovnic s řídkou maticí o 322 176 neznámých.



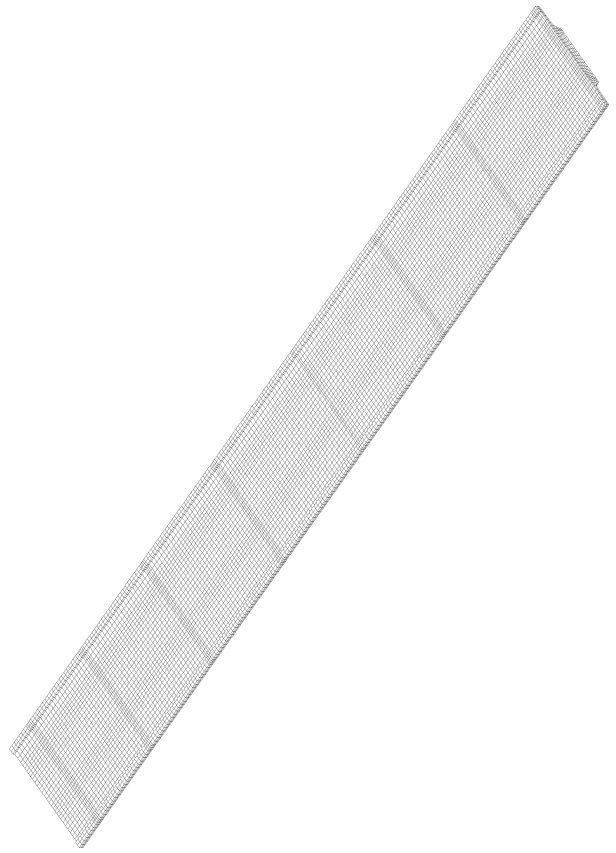
Obr. 11 : Rozměry profilu mostovky



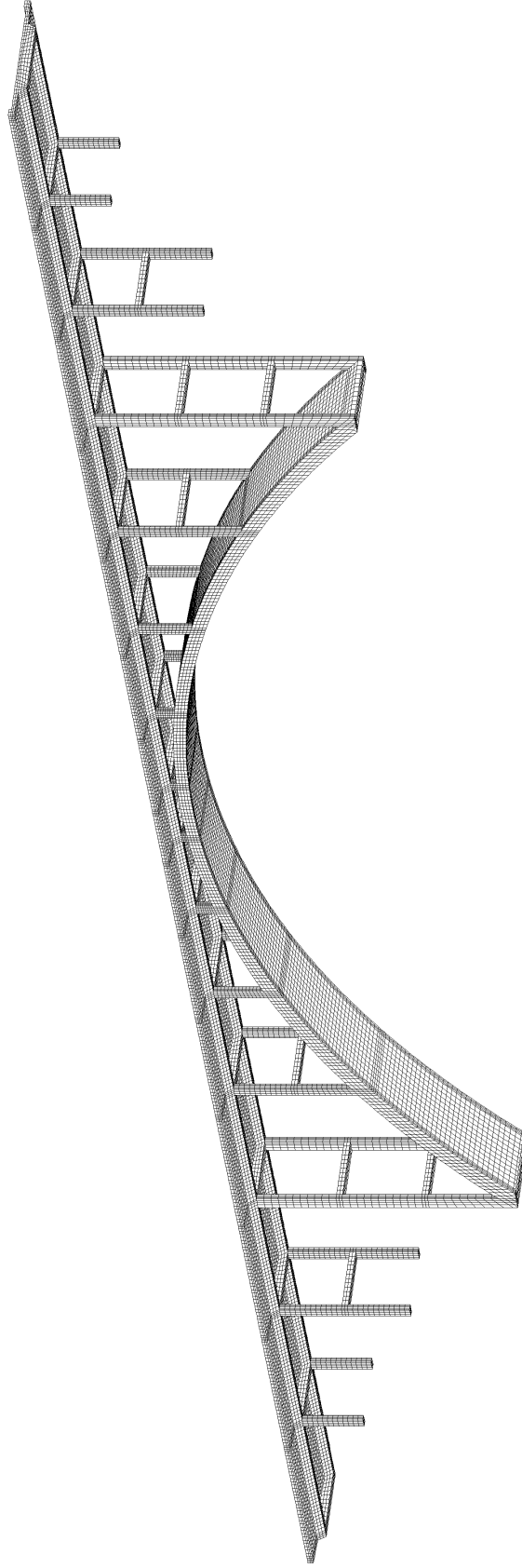
Obr. 12 : Rozměry mostu



Obr. 13 : Segment mostu nad pilířem a segment mostu mezi pilíři



Obr. 14 : Síť poloviny mostovky a poloviny oblouku s pilíři

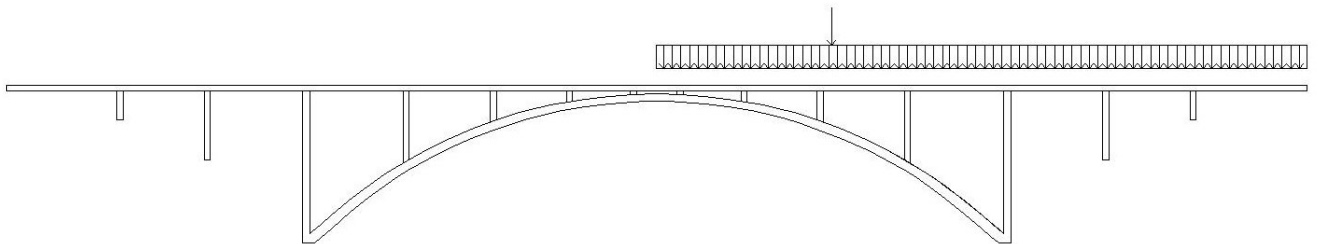


Obr. 15 : Síť celého mostu má 75 456 proků a 107 392 uzlů

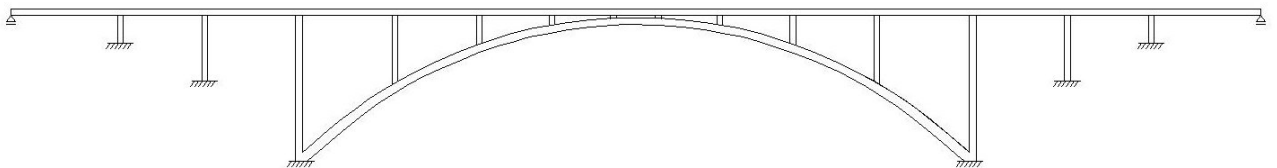
6.3 Popis zatěžovacích stavů

Zadání fyzikálních dat

Pro výpočet metodou konečných prvků se používají dvě materiálové konstanty λ a μ , které se vypočítají z Youngova modulu pružnosti a Poissonova čísla. Pro navržený materiál beton C30/37 je $E = 32 \text{ GPa}$ a $\nu = 0,2$. Další materiálové hodnoty jsou potřeba při výpočtu zatížení konstrukce. Pro výpočet zatížení vlastní tíhou potřebujeme objemovou hmotnost materiálu $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ a při výpočtu zatížení od teploty potřebujeme znát teplotní součinitel délkové roztažnosti $\alpha = 12 * 10^{-6}$.



Obr. 16 : *Schéma zatížení mostní konstrukce*



Obr. 17 : *Schéma uložení mostní konstrukce*

Schéma zatížení mostní konstrukce je na obr. 16, schéma uložení je na obr. 17.

Zatížení

Pro návrh konstrukce bylo zpracováno zatížení na mezním stavu únosnosti

STÁLÉ - Vlastní tíha konstrukce 25 kN/m³

PROMĚNNÉ - Zatížení od dopravy LM1

Zatížení je rozděleno na šířce mostovky 13,25 m do čtyř třímetrových pruhů se zbytkem 1,25 m podle obrázku 18.



Obr. 18 : *Schéma zatížení*

Zatěžovaná plocha 1	rovnoměrné zatížení	9 kN/m ²
Zatěžovaná plocha 2	rovnoměrné zatížení	6 kN/m ²
Zatěžovaná plocha 3	rovnoměrné zatížení	3 kN/m ²
Zatěžovaná plocha 4	rovnoměrné zatížení	3 kN/m ²
Zbytková plocha	rovnoměrné zatížení	3kN/m ²

Zatížení působí na jedné polovině konstrukce, protože pro obloukové konstrukce tak vychází větší namáhání. Síť konečných prvků bylo nutno přizpůsobit tak, aby byly vždy zatíženy celé stěny prvků, viz obr. 19.

Zatěžovaná plocha 1 - bodové síly	2x 300 kN po 1,2 m
Zatěžovaná plocha 2 - bodové síly	2x 200 kN po 1,2 m
Zatěžovaná plocha 3 - bodové síly	2x 100 kN po 1,2 m

Bodové síly od náprav působí v jedné čtvrtině oblouku. Síť konečných prvků bylo třeba přizpůsobit tak, aby bodové síly působily vždy v uzlu některého prvku, viz. obr. 20.

Zatížení vlastní vahou, povrchovou silou na polovině mostovky i bodovými silami od náprav jsem též počítala s koeficientem 1.35, jak stanoví norma.

Dále bylo třeba na základě zatížení vytvořit vstupní soubory popisující objemové síly (zatížení vlastní vahou), povrchové síly na polovině mostovky i na celé mostovce a bodové síly, představující zatížení od náprav.

Zatížení od teploty

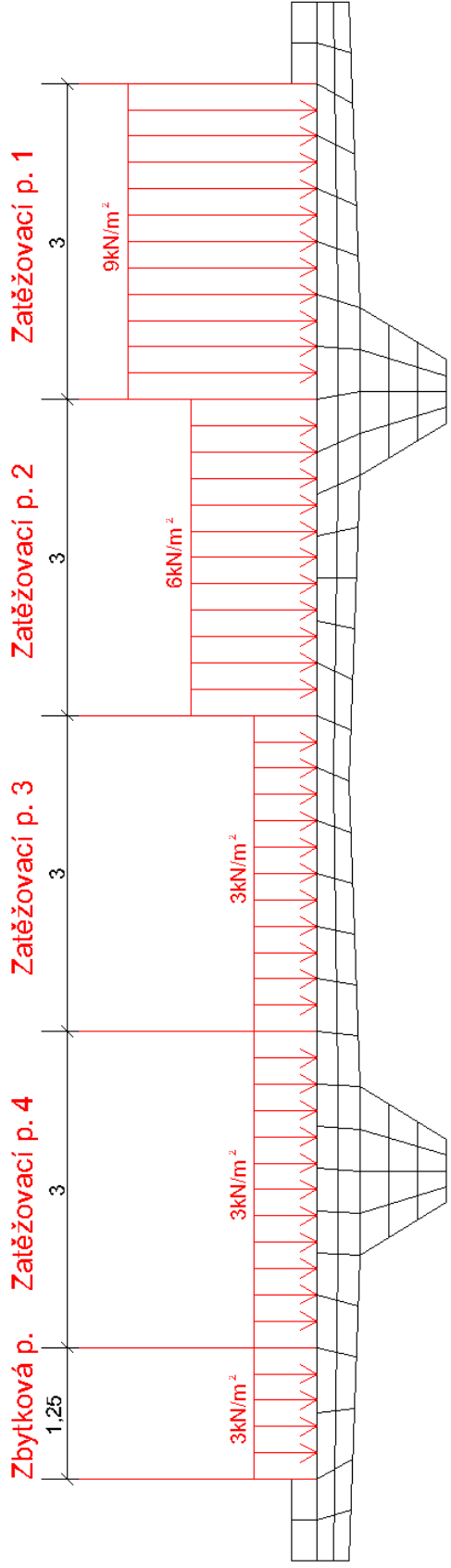
Lineární nekonstantní teplota - horní povrch konstrukce $+10^{\circ}\text{C}$
- dolní povrch konstrukce -5°C

Výpočet lineárních teplot

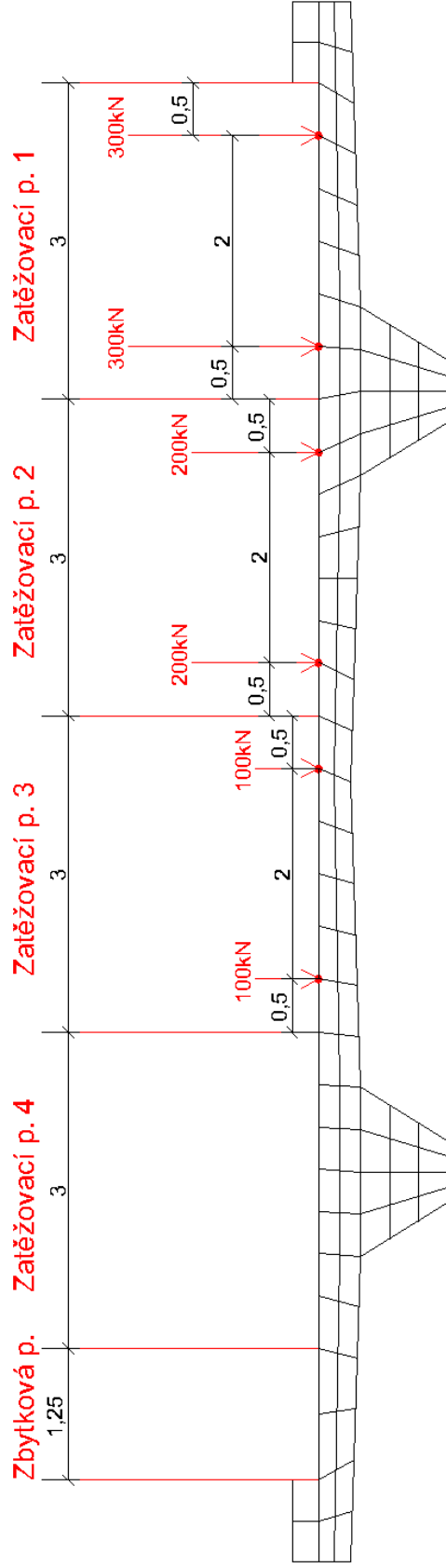
Pro výpočet napětí od zatížení teplotou bylo třeba zjistit, jaká je teplota v jednotlivých bodech konstrukce. Teplota je lineárně proměnlivá po výšce celé konstrukce. Napsala jsem proto jednoduchý program, který ze souboru souřadnic jednotlivých bodů vybere ypsilonovou souřadnici a podle ní vypočte teplotu, kterou přiřadí danému bodu.

Okrajové podmínky

Na základě daného uložení byl také vytvořen soubor, popisující okrajové podmínky pod pilíři (vetknutí, předepsány všechny 3 složky posunutí) a "vedení ve směru", kdy je umožněno volné posunutí mostu ve směru osy mostovky ("válečky"), jsou předepsány jen 2 složky posunutí, jedna zůstává volná). Tento soubor obsahuje čísla proměnných, v nichž jsou předepsány nulové posuvy.



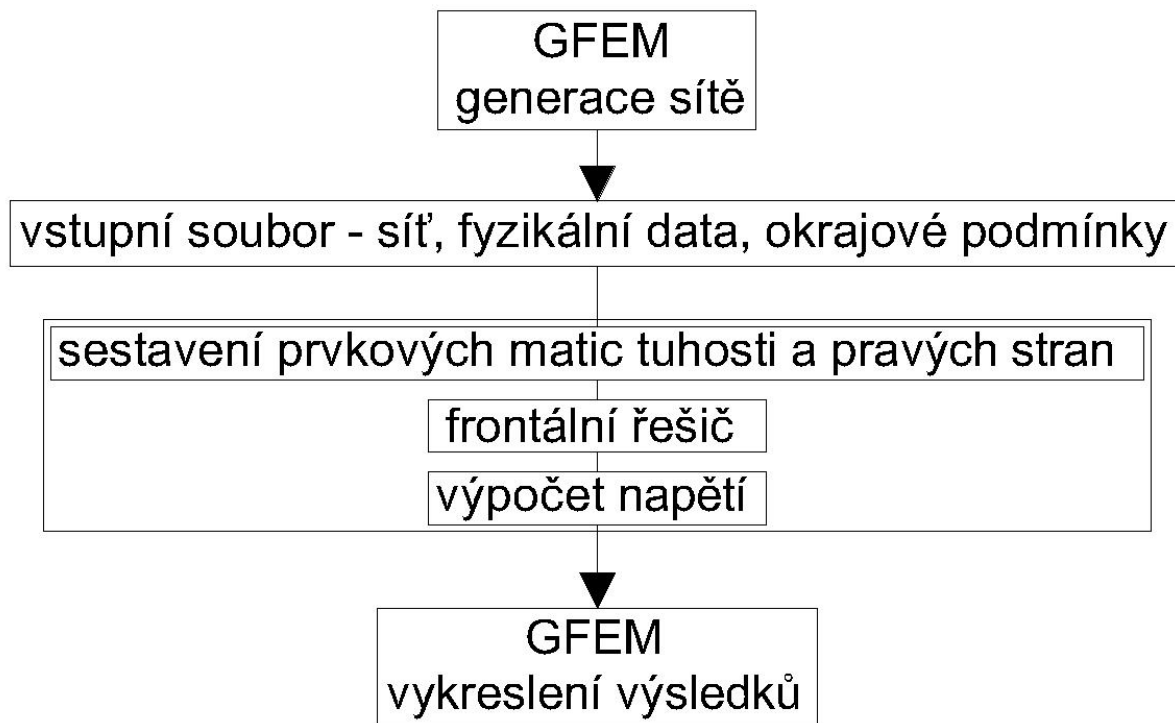
Obr. 19: Schéma povrchového zatížení společně se sítí konečných prvků na řezu mostovky



Obr. 20: Schéma zatížení bodovými silami od náprav společně se sítí konečných prvků na řezu mostovky

6.4 Postup výpočtu

Postup výpočtu je ilustrován na schématu na obr. 21.



Obr. 21 : Schéma postupu výpočtu

6.5 Výsledky výpočtu pro zadané zatěžovací stavy

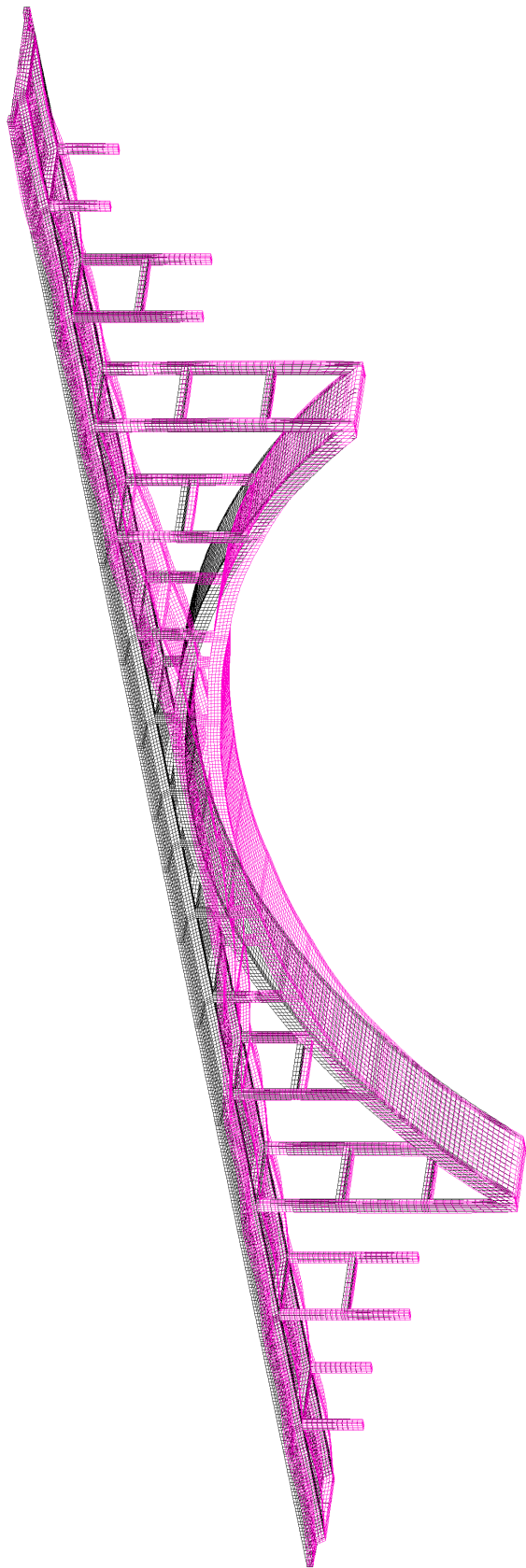
Koeficienty a kombinace zatížení byly realizovány podle norem ČSN EN 1990 a ČSN EN 1991-1. Výpočet byl proveden pro tyto zatěžovací stavy

1. Zatížení mostní konstrukce pouze vlastní vahou
2. Zatížení mostovky pouze povrchovou silou po celé délce
3. Zatížení mostovky pouze povrchovou silou po na polovině délky
4. Zatížení mostovky pouze bodovou silou od náprav
5. Celkové zatížení vlastní vahou, povrchovou silou na polovině délky mostovky a bodovou silou od náprav

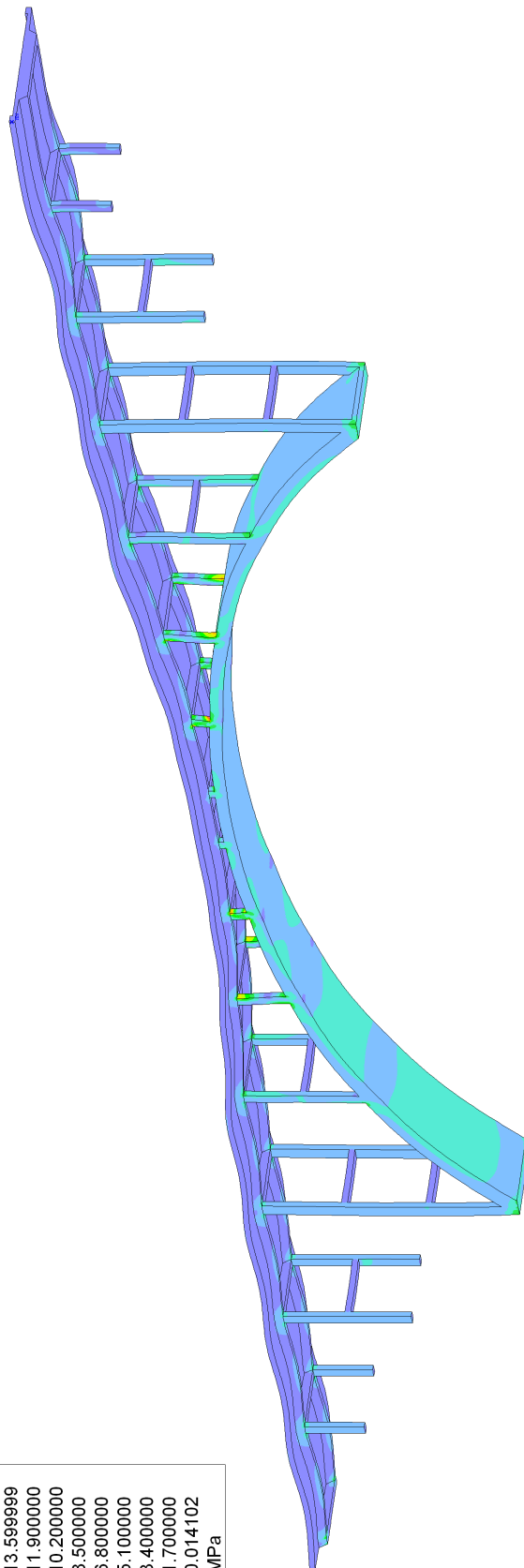
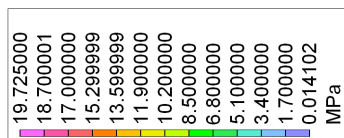
6. Celkovém zatížení vlastní vahou, povrchovou silou na polovině délky mostovky a bodovou silou od náprav s koeficienty podle normy
7. Zatížení mostní konstrukce pouze od lineárních teplot
8. Celkové zatížení vlastní vahou, povrchovou silou na polovině délky mostovky, bodovou silou od náprav a lineárních teplot
9. Celkovém zatížení vlastní vahou, povrchovou silou na polovině délky mostovky, bodovou silou od náprav a s lineárními teplotami s koeficienty podle normy

Sestavení matic tuhosti a pravých stran pro jednotlivé zatěžovací stavy bylo provedeno mým programem. Poté jsem využila frontálního řešiče, viz [6], který mi poskytl vedoucí práce, k vyřešení vzniklé soustavy lineárních rovnic. Poté následoval výpočet napětí v uzlech sítě podle Hookova zákona.

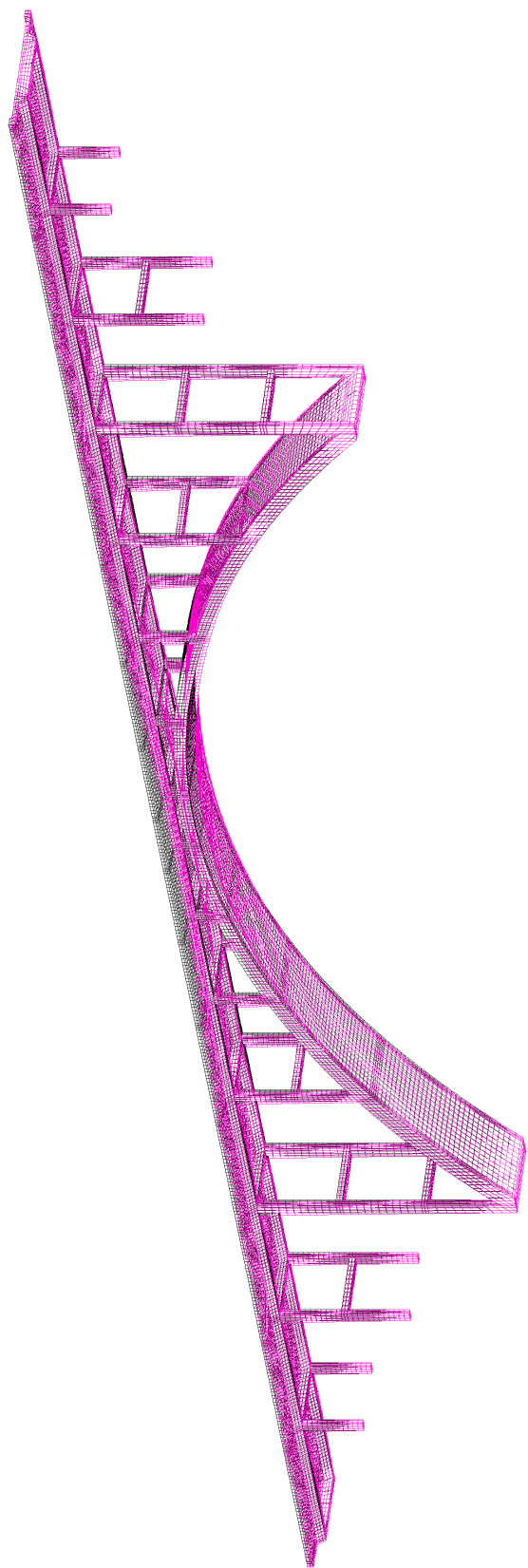
Nakonec jsem zobrazila výsledky jednotlivých zatěžovacích stavů v programu GFEM. Zobrazena je konstrukce po deformaci a napětí podle hypotézy HMM, viz obr. 22-39.



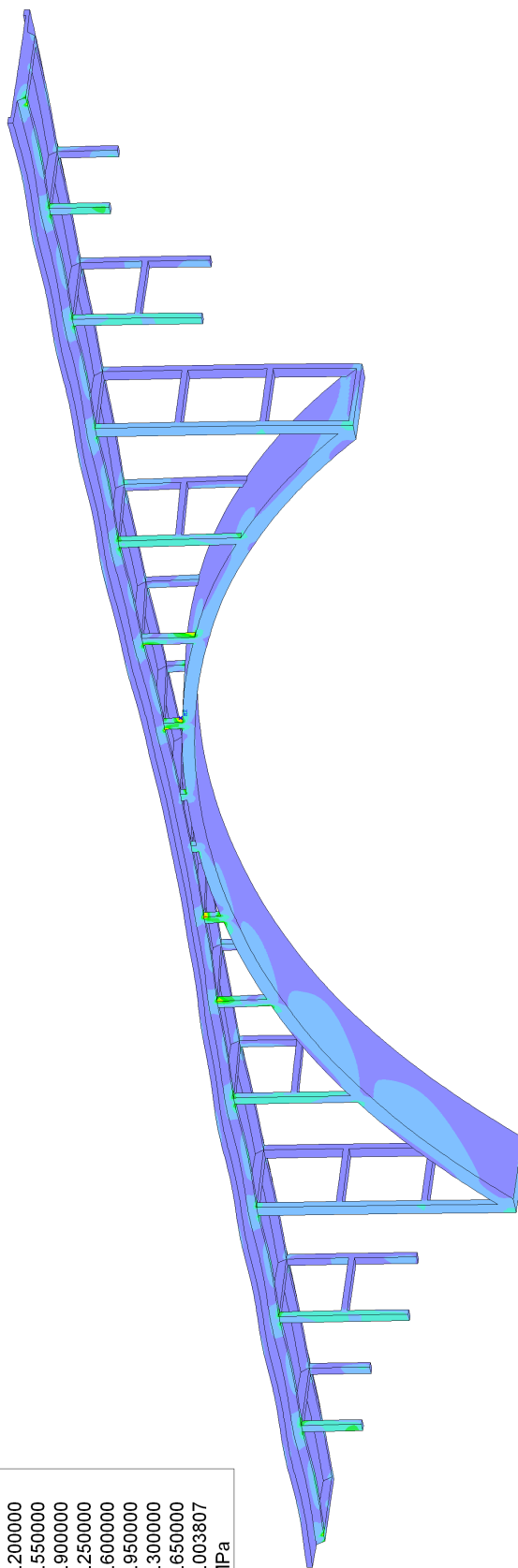
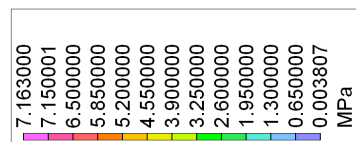
Obr. 22 : Deformace mostní konstrukce při zatížení pouze vlastní vahou



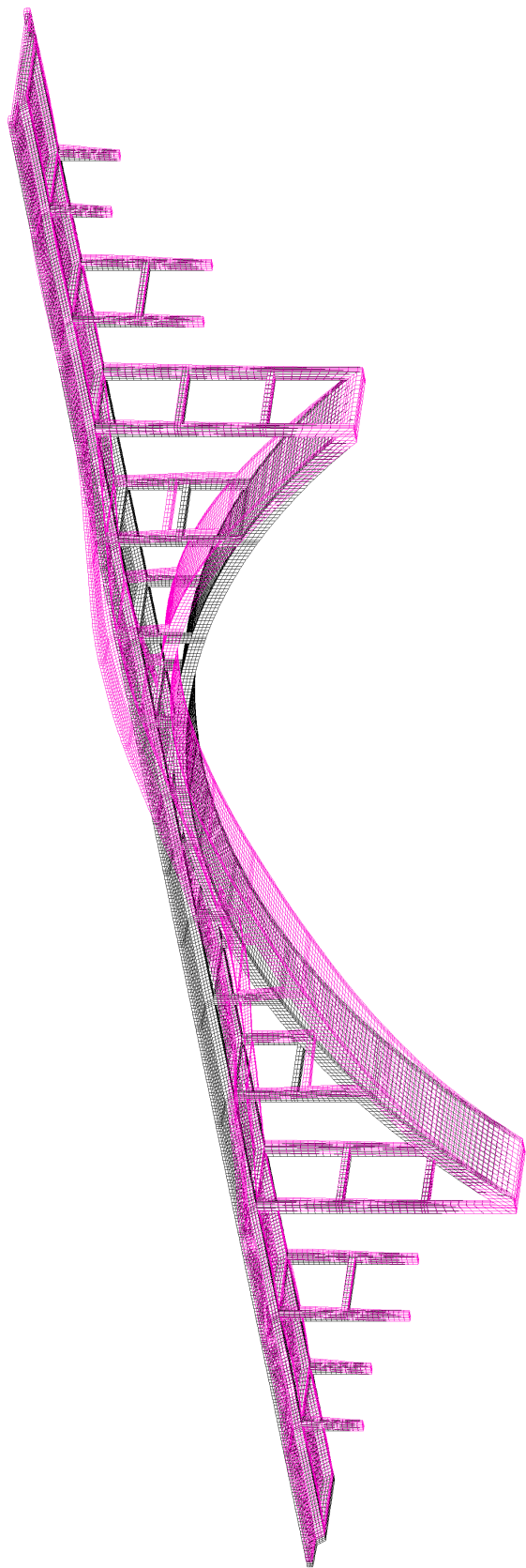
Obr. 23 : Napětí σ_{hmh} v mostní konstrukci při zatížení pouze vlastní vahou



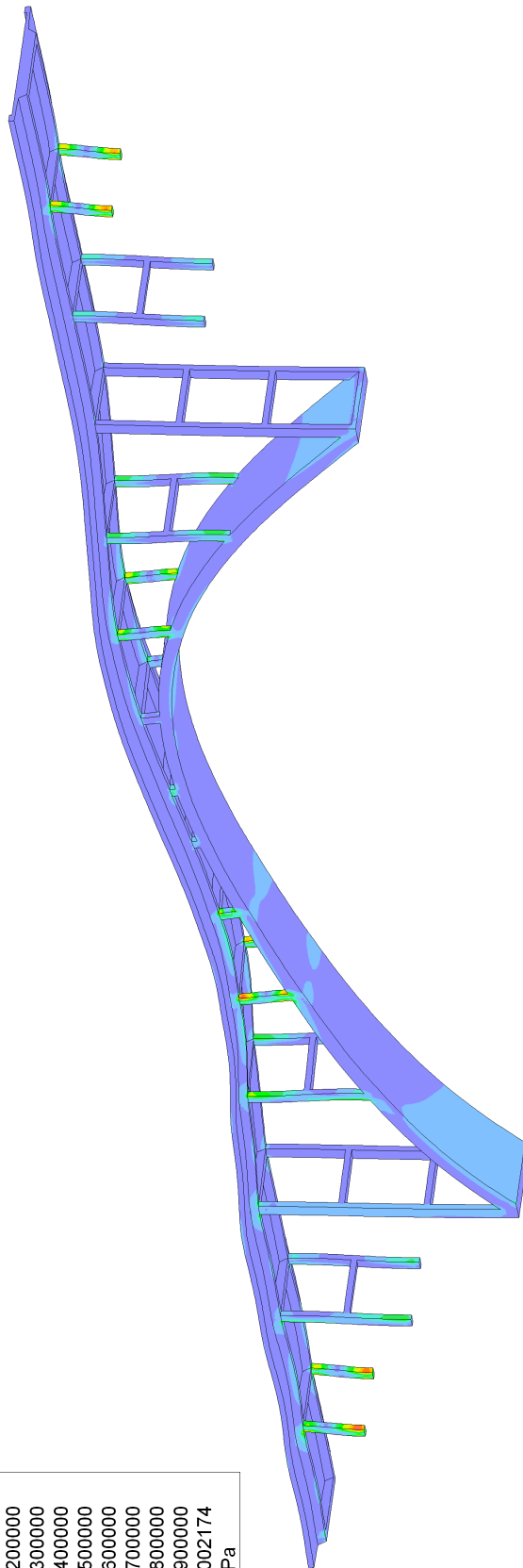
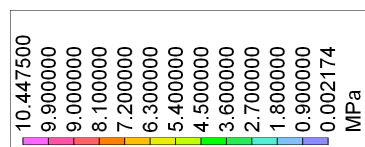
Obr. 24 : Deformace mostní konstrukce při zatížení pouze povrchovou silou po celé délce mostovky



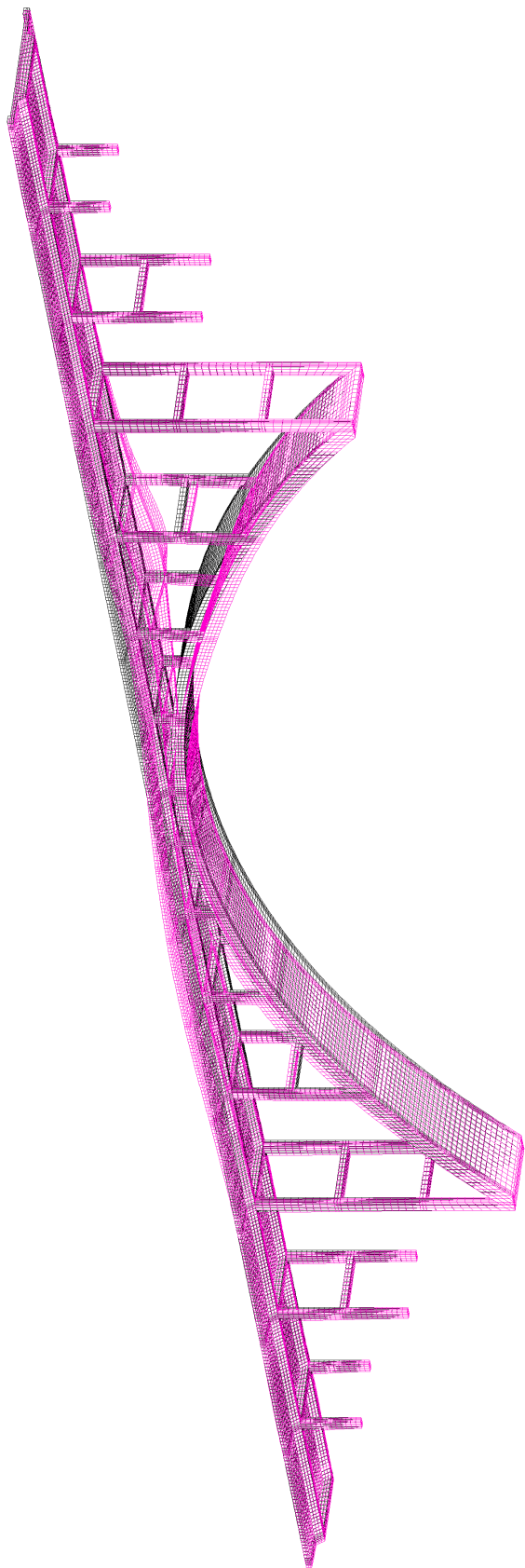
Obr. 25 : Napětí $\sigma_{h_{mh}}$ v mostní konstrukci při zatížení pouze povrchovou silou po celé délce mostovky



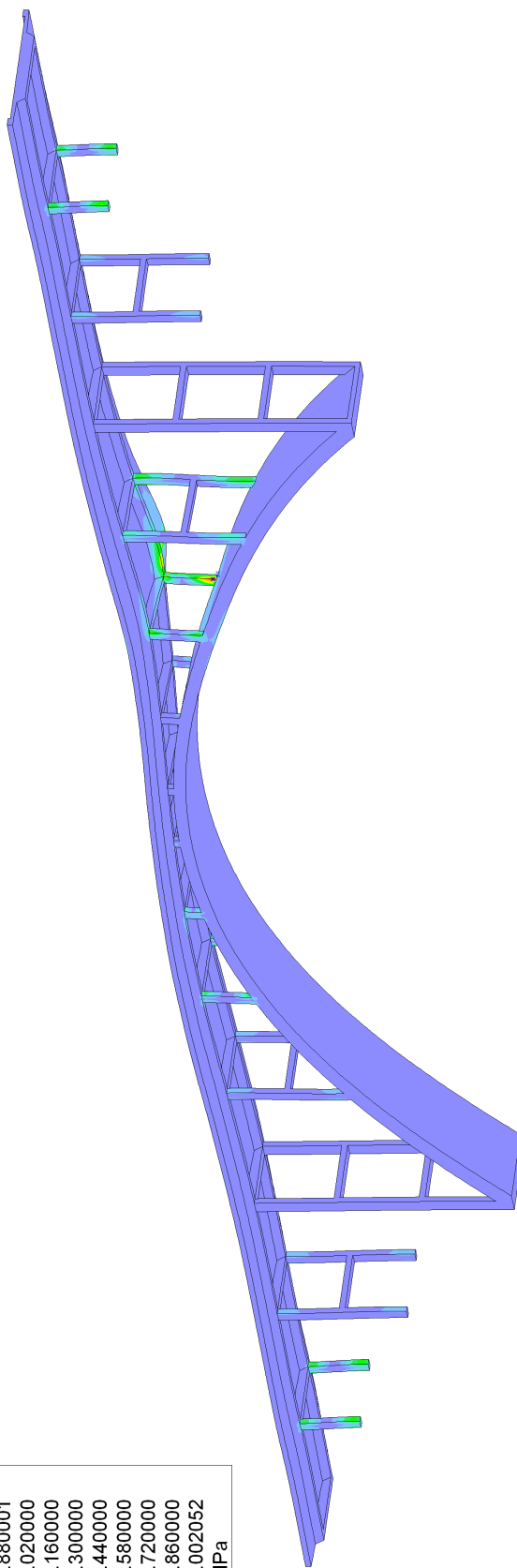
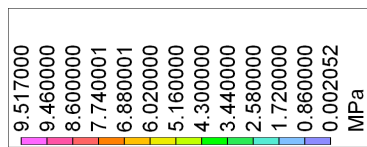
Obr. 26 : Deformace mostní konstrukce při zatížení pouze povrchovou silou jen na poloviční délce mostovky



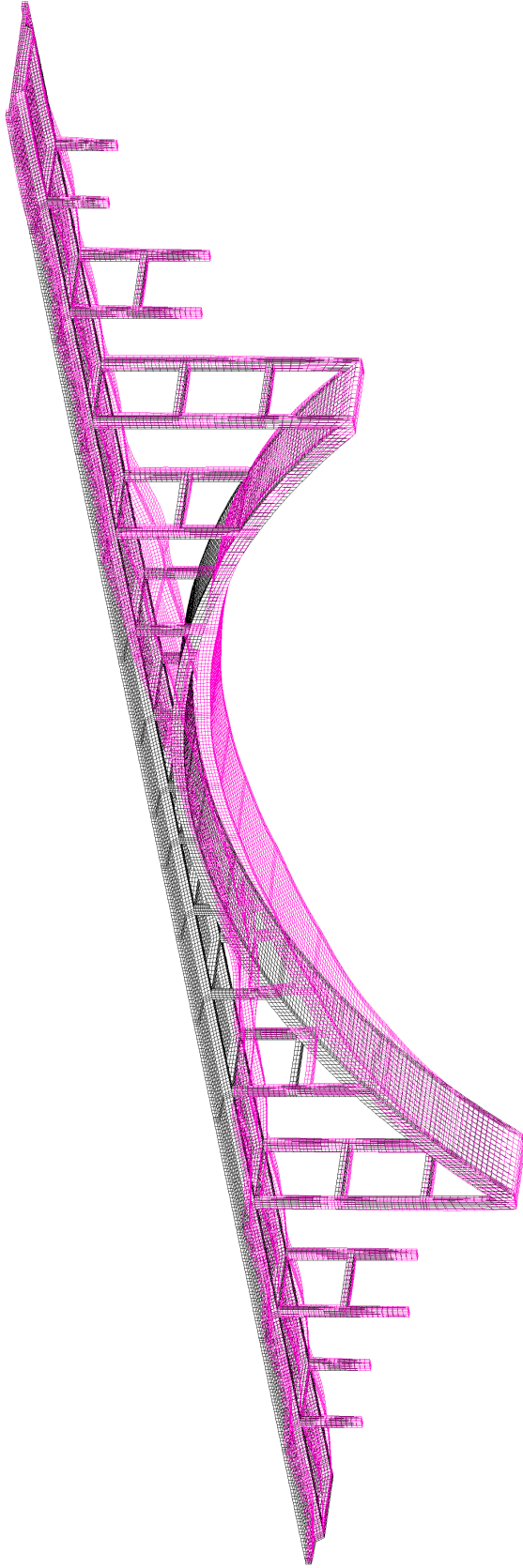
Obr. 27 : Napětí $\sigma_{1\max}$ v mostní konstrukci při zatížení pouze povrchovou silou jen na poloviční délce mostovky



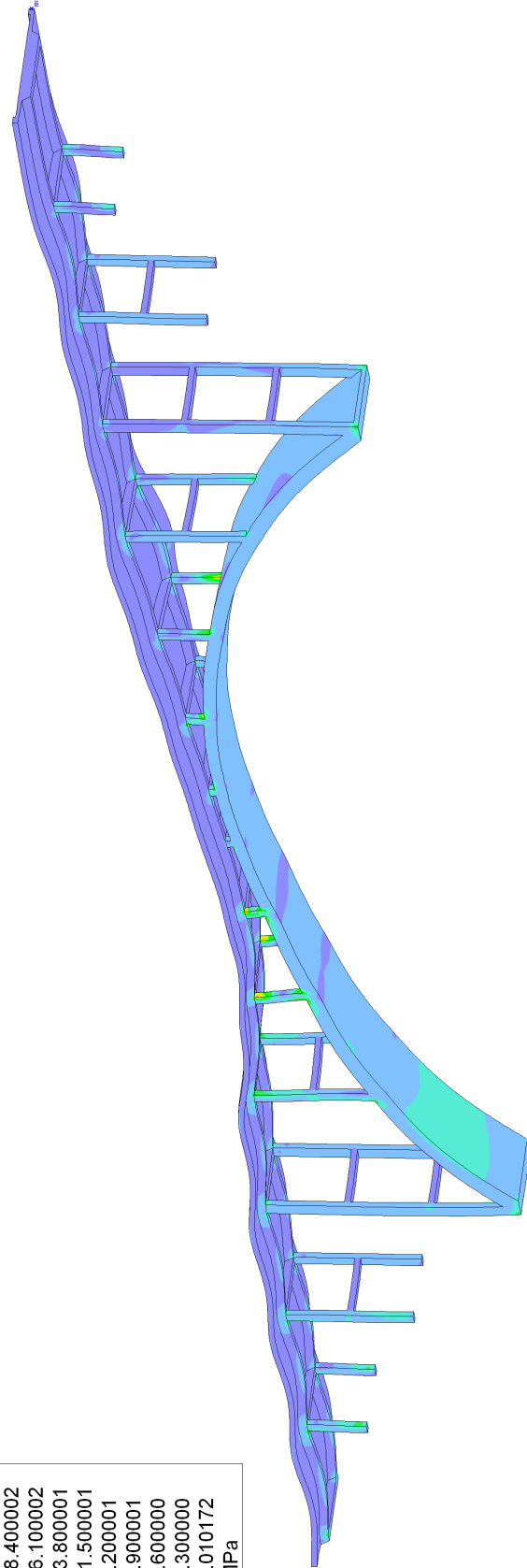
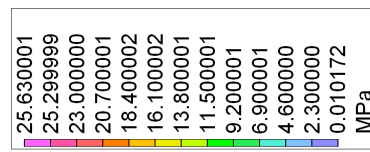
Obr. 28 : Deformace mostní konstrukce při zatížení mostovky pouze bodovou silou od náprav



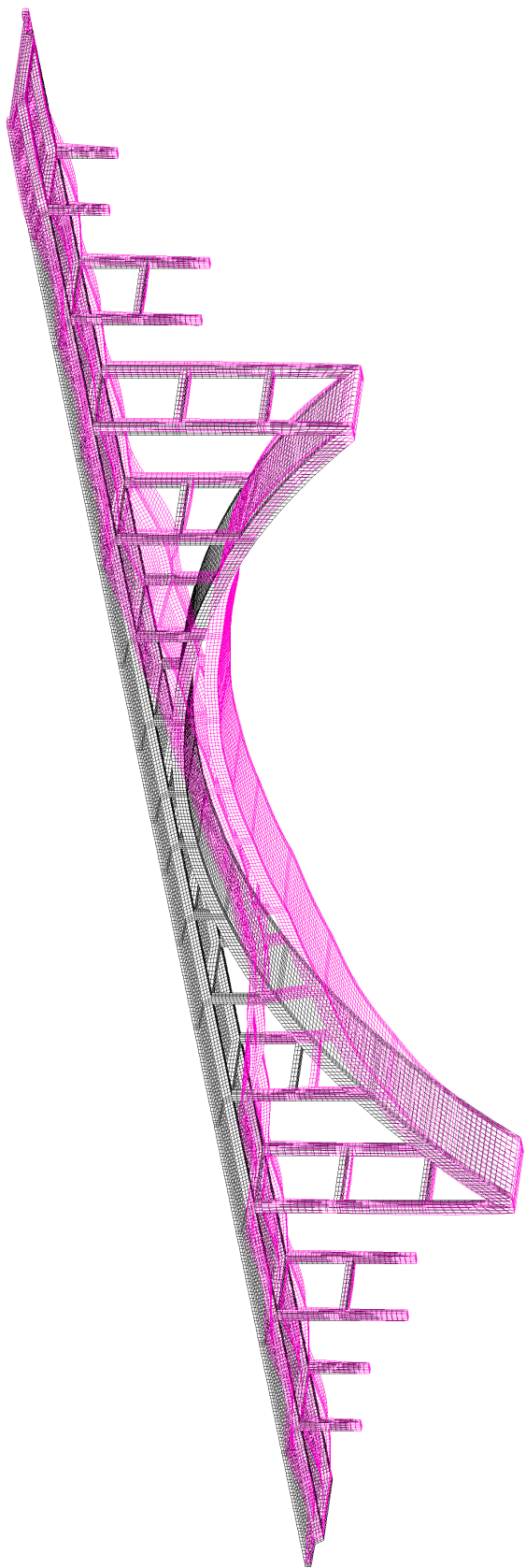
Obr. 29 : Napětí σ_{hmh} v mostní konstrukci při zatížení mostovky pouze bodovou silou od náprav



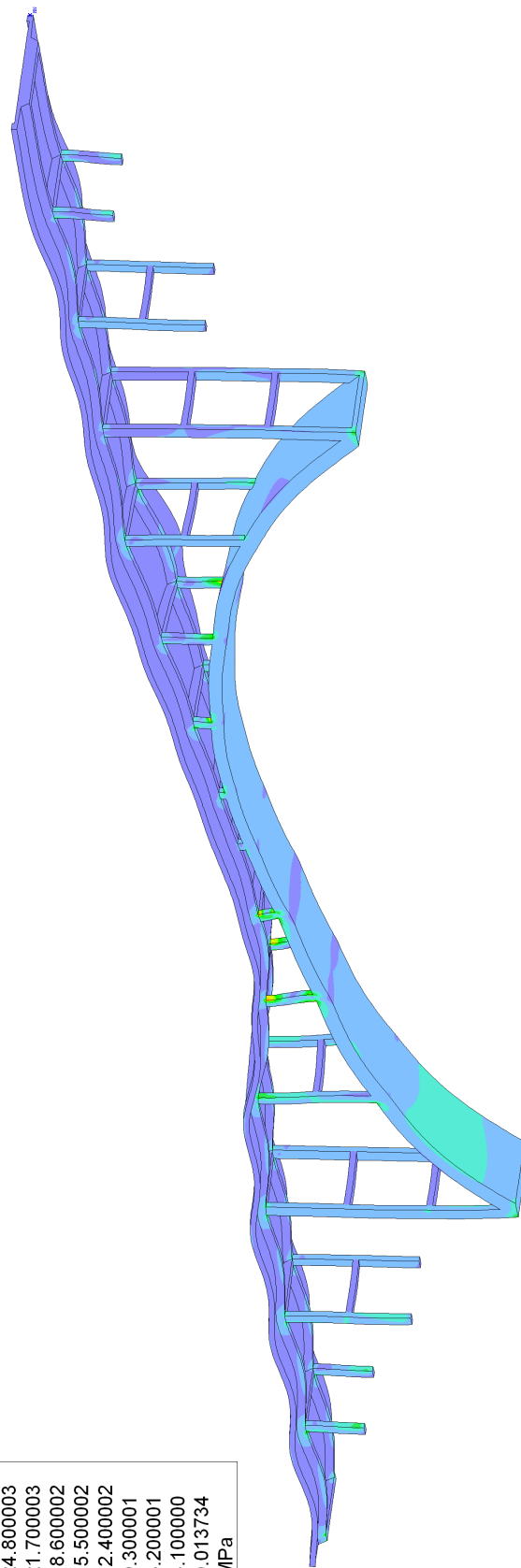
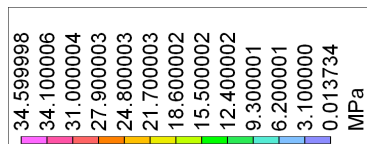
Obr. 30 : Deformace mostní konstrukce při zatížení vlastní vahou, povrchovou silou na polovině mostovky a bodovou silou



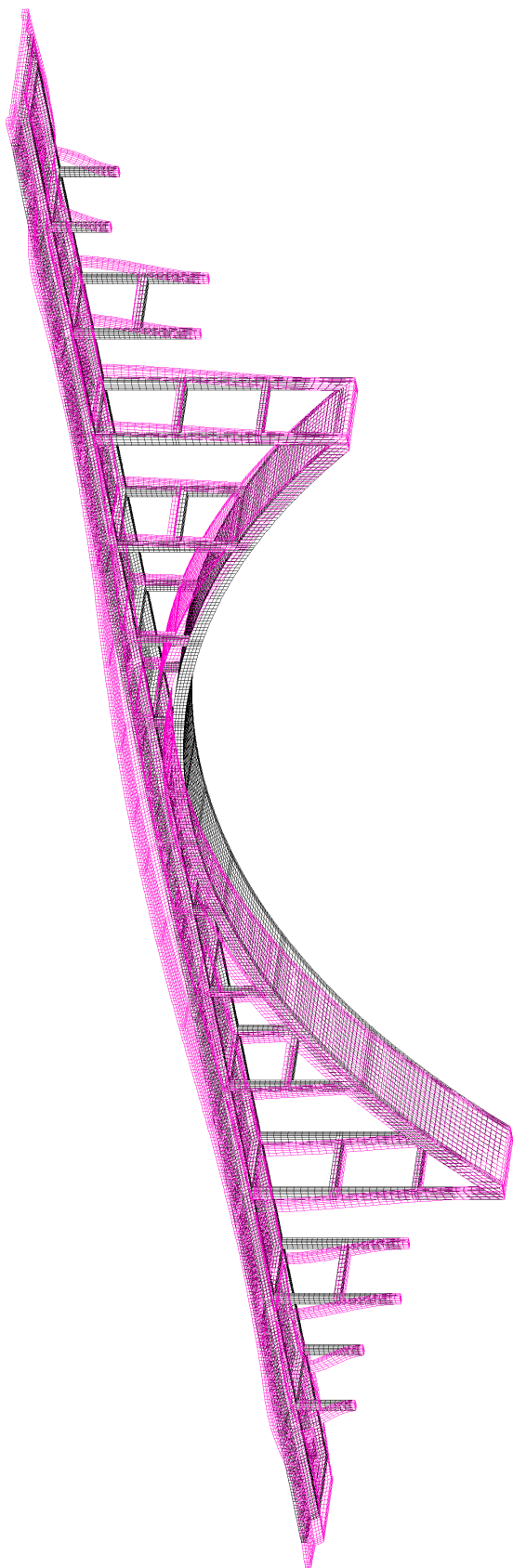
Obr. 31 : Napětí σ_{hmb} v mostní konstrukci při zatížení vlastní vahou, povrchovou silou na polovině mostovky a bodovou silou



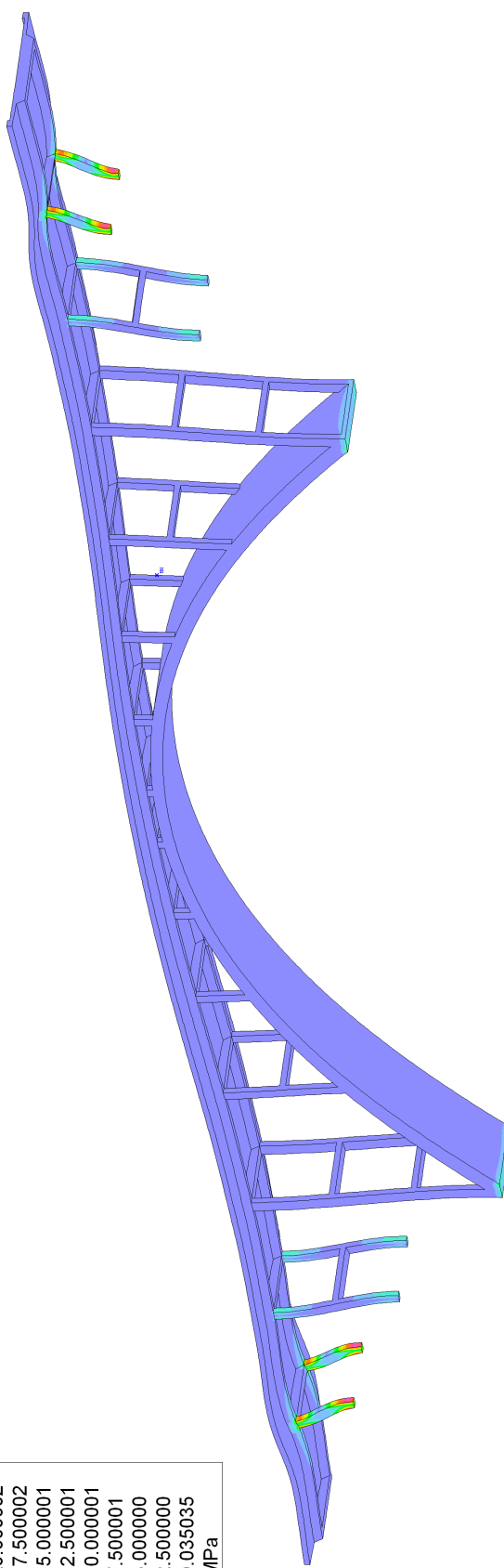
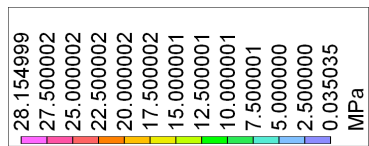
Obr. 32 : Deformace mostní konstrukce při celkovém zatížení s koeficientem 1.35 podle normy



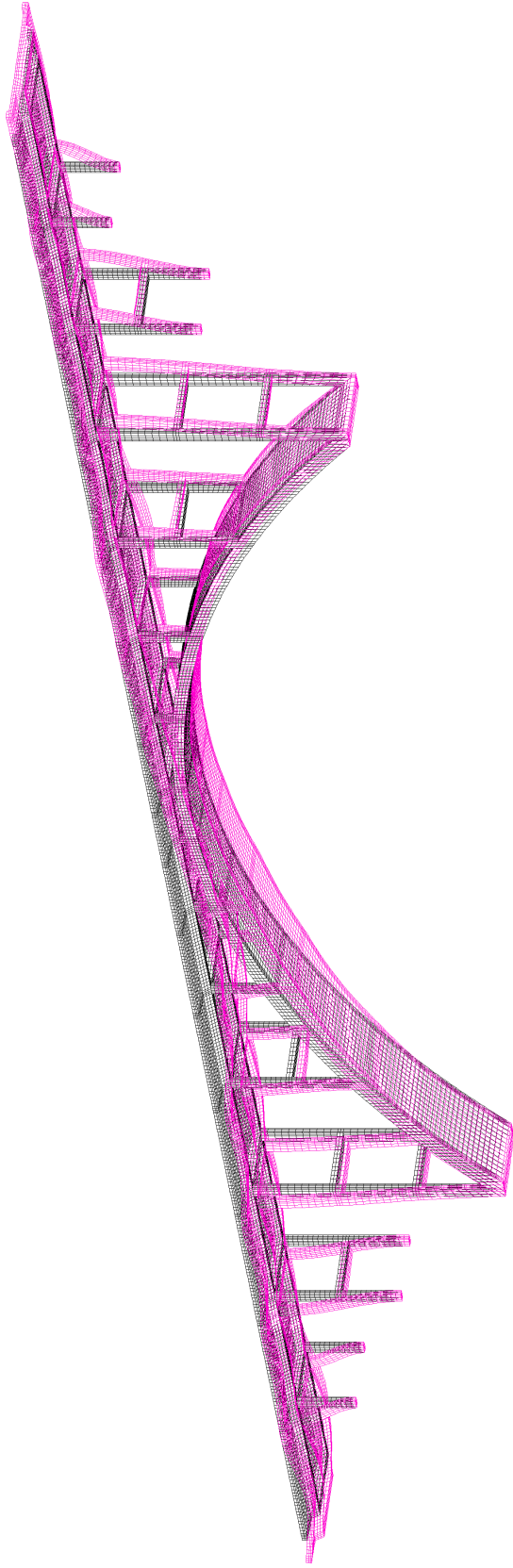
Obr. 33 : Napětí σ_{hmh} v mostní konstrukci při celkovém zatížení s koeficientem 1.35 podle normy



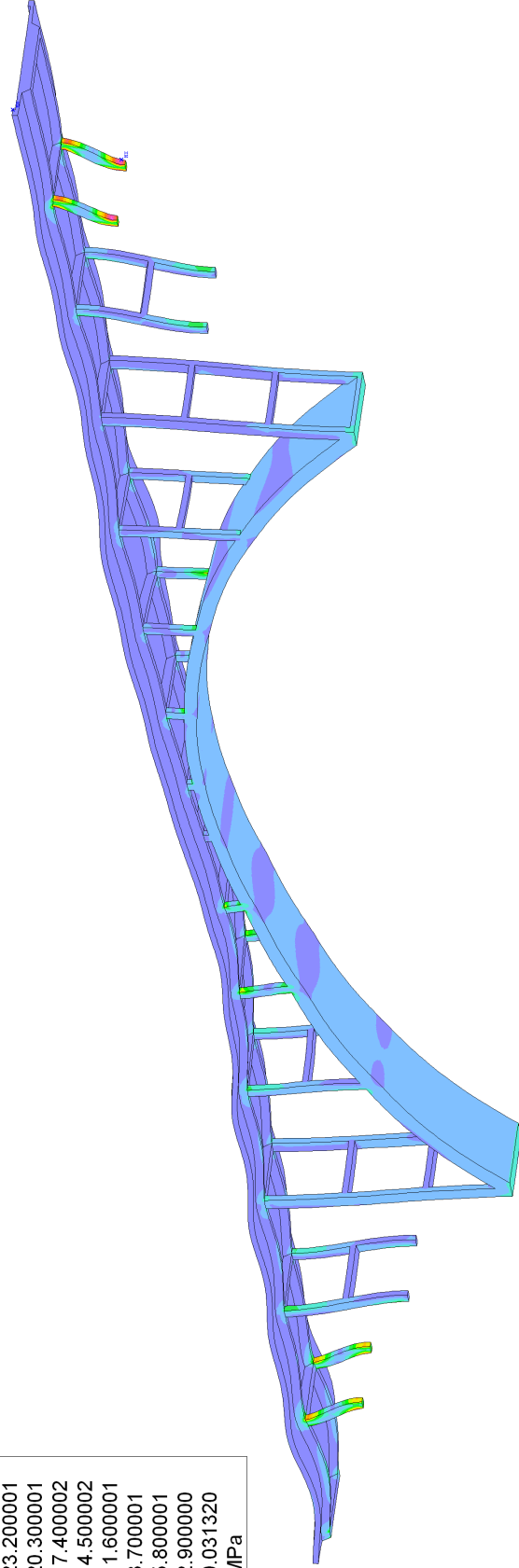
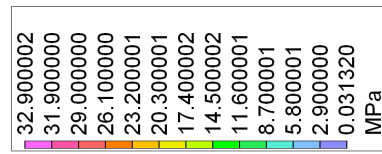
Obr. 34 : Deformace mostní konstrukce při zatížení pouze od lineárního rozložení teplot



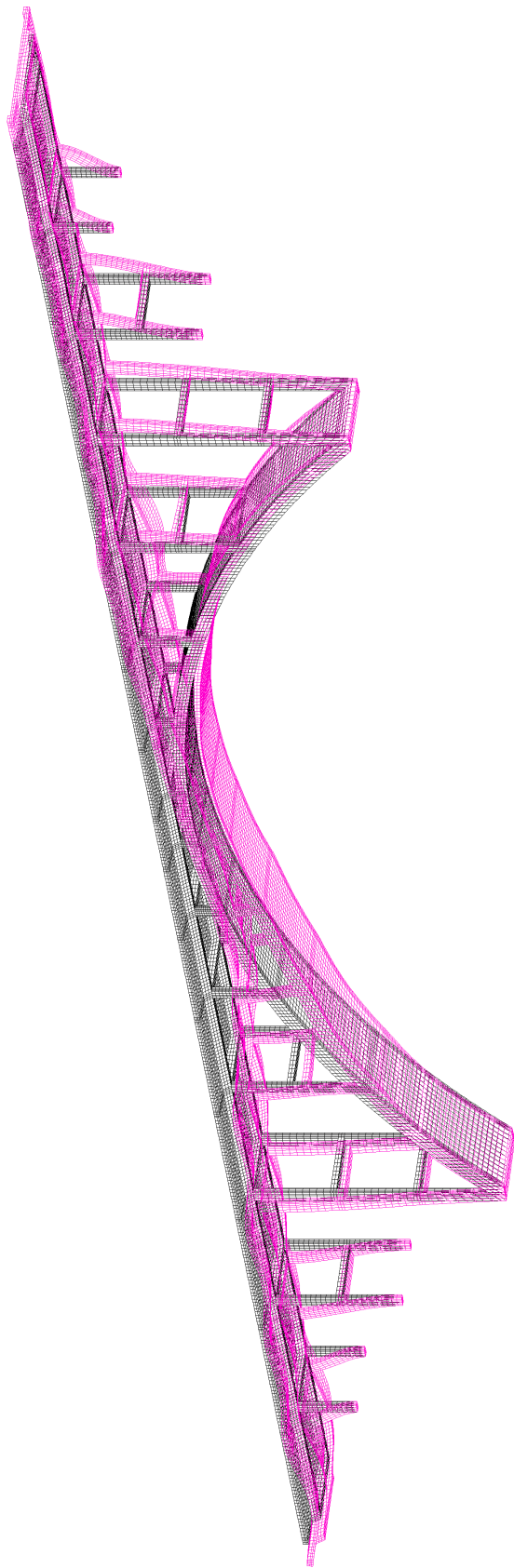
Obr. 35 : Napětí $\sigma_{h_{mh}}$ v mostní konstrukci při zatížení pouze od lineárního rozložení teplot



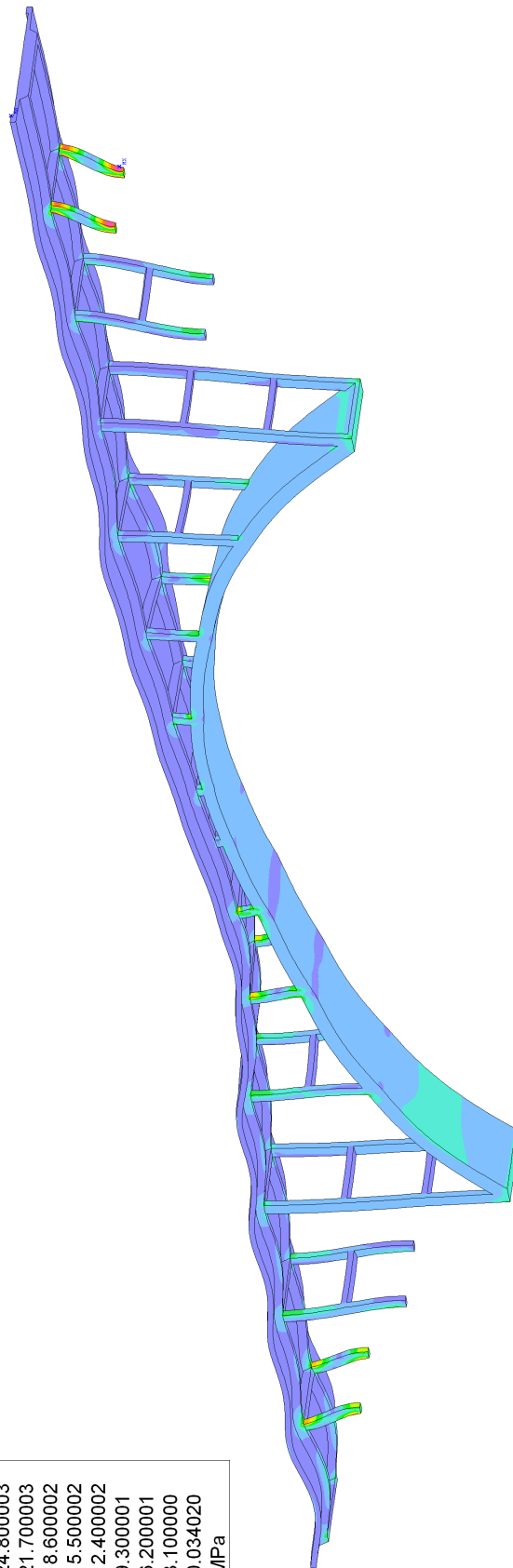
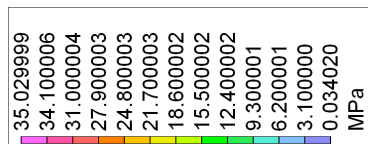
Obr. 36 : Deformace mostní konstrukce při celkovém zatížení včetně teplot



Obr. 37 : Napětí $\sigma_{h_{mh}}$ v mostní konstrukci při celkovém zatížení včetně teplot



Obr. 38 : Deformace mostní konstrukce při celkovém zatížení s koeficientem 1.35 podle normy včetně teplot



Obr. 39 : Napětí $\sigma_{h_{mh}}$ v mostní konstrukci při celkovém zatížení s koeficientem 1.35 podle normy včetně teplot

7 ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo vytvořit program založený na metodě konečných prvků ve 3D, s jehož pomocí lze vypočítat napětí v konstrukci betonového mostu.

Vlastním přínosem mé práce je program v jazyce pascal schopný vypočítat namáhání konstrukcí modelovaných jako úloha lineární pružnosti ve 3D.

Byly provedeny výpočty několika zatěžovacích stavů podle norem ČSN EN 1990 a ČSN EN 1991-1. Výsledky byly zobrazeny ve formě deformací mostní konstrukce a izochar napětí podle hypotézy HMM v konstrukci.

Maximální napětí v konstrukci i s bezpečnostními koeficienty podle normy vychází mimo oblouk v rohu jednoho z pilířů a činí 35 MPa. Napětí uvnitř oblouku nepřekračuje 20 MPa, mez kluzu použitého betonu C30/37 je 30 MPa. Vyšší napětí v rozích pilířů povede lokálně k plastické deformaci, na oblouk by to však nemělo mít žádný vliv.

Z výsledků vyplývá, že jsem správně navrhla konstrukci oblouku betonového mostu.

Dosažené výsledky jsem přednesla na konferenci Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků 2016 v Brně, viz [9].

Práce byla podpořena grantem SGS ČVUT SGS16/004/OHK1/1T/11 "Výpočty mostních a tunelových konstrukcí metodou konečných prvků."

8 LITERATURA

- [1] Babuška, I. – Szabo, B.: *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [2] Bathe, K.-J.: *Finite element procedures*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [3] Bechyně, S.: *Betonové mosty obloukové : mosty pro zvláštní účely*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1962.
- [4] Brdička, M.: *Mechanika kontinua*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1959.
- [5] Hughes, T.J.R.: *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [6] Irons, B. M., 1970. *A frontal solution scheme for finite element analysis*. Int. J. Numer. Methods Eng. 2(1970), 5–32
- [7] Nečas, J. – Hlaváček, I.: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1983.
- [8] Rektorys, K.: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, Academia, Praha, 1999.
- [9] Rychetská, M., Novotný, J.: *Výpočty mostních konstrukcí metodou konečných prvků*, In: Sborník konference Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků 2016, Brno, 24.11.2016.
- [10] Šafář, R. a kol.: *Betonové mosty 1: přednášky*, Praha, České vysoké učení technické, 2010.
- [11] Šafář, R. a kol.: *Betonové mosty 2: přednášky*, Praha, České vysoké učení technické, 2014.