



---

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**  
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Analýza vlivu obvodově proměnné tloušťky na napjatost a deformaci  
tlakované trubice

**Effect of annularly variable thickness on stress and strain field in  
pressurized tube**

Diplomová práce

Studijní program: Strojní inženýrství

Studijní obor: Biomechanika a lékařské přístroje

Vedoucí práce: doc. Ing. Lukáš Horný Ph.D..

**Hana Podolníková**

---

**Praha 2016**

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Podolniková** Jméno: **Hana** Osobní číslo: **382303**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Strojní inženýrství**  
Studijní obor: **Biomechanika a lékařské přístroje**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Analýza vlivu obvodově proměnné tloušťky na napjatost a deformaci tlakované trubice**

Název diplomové práce anglicky:

**Effect of annularly variable thickness on stress and strain field in pressurized tube**

Pokyny pro vypracování:

- (1) Zformulujte motivaci pro úlohu pružnosti popisující napjatost a deformaci v tlakované trubici nekonstantní tloušťky
- (2) Analyzujte tuto úlohu v oblasti lineární pružnosti
- (3) Zhodnoťte vliv nelinearity na napjatost a deformaci trubice nekonstantní tloušťky
- (4) Doporučený rozsah práce: 50 stran textu 20 stran grafických prezentací

Seznam doporučené literatury:

- (1) Holzapfel GA (2000) Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. John Wiley & Sons, Chichester
- (2) Křupka V, Schneider P (1986) Stavba chemických zařízení I., Skořepiny tlakových nádob a nádrží, VUT Brno
- (3) Šubrt L (1981) Teorie desek a skořepin. Skriptum, fakulty strojní ČVUT v Praze
- (4) Ondráček E, Vrbka J, Janíček P (2002) Mechanika těles: Pružnost a pevnost II. skriptum fakulty strojního inženýrství VUT v Brně

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**doc. Ing. Lukáš Horný, Ph.D.**

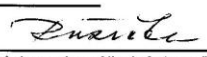
Jméno a pracoviště konzultanta(ky) diplomové práce:


Datum zadání diplomové práce: **06.04.2016**

Termín odevzdání diplomové práce: **12.08.2016**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

  
Podpis vedoucí(ho) práce

  
Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


  
Podpis děkana(ky)

*Neodevzdá-li student bakalářskou nebo diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodní a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání bakalářské nebo diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat bakalářskou nebo diplomovou práci podruhé*

*Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.*

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

21. 4. 2016  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta(ky)

## Anotační list

Jméno autora:	Hana Podolníková
Název DP:	Analýza vlivu obvodově proměnné tloušťky na napjatost a deformaci tlakované trubice
Anglický název:	Effect of annularly variable thickness on stress and strain field in pressurized tube
Rok:	2016
Studijní program:	Strojní inženýrství
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Vedoucí:	doc. Ing. Lukáš Horný Ph.D.
Bibliografické údaje:	počet stran 72 počet obrázků 76 počet tabulek 9 počet příloh 0
Klíčová slova:	excentricita, teorie skořepin, napětí, deformace, metoda konečných prvků
Keywords:	eccentricity, theory of shells, stress, strain, finite element method

**Anotace:** Tato diplomová práce se zabývá vlivem obvodově proměnné tloušťky tlakované trubice na její napjatost a deformaci. V práci jsou odvozeny analytické rovnice popisující problematiku v oblasti lineární mechaniky kontinua. Poté práce představuje výsledky numerických simulací tenkostěnných excentrických trubic, jejichž cílem je zhodnotit vliv geometrie na jejich napjatost a deformaci.

**Abstract:** This diploma thesis deals with an influence of variable thickness of the pressurised thin-walled tube on the stress and strain field. In the thesis analytical equations describing the issue in region of linear mechanics of continuum are derivated. The text then introduces results of the numerical simulations of thin-walled excentric tubes, whose aim is to assess the impact of geometry on its stress and strain field.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Zdroje, ze kterých jsem čerpala, jsou v závěru práce uvedeny v seznamu použité literatury.

V Praze dne 19.8.2016

Hana Podolníková

## Poděkování

Ráda bych poděkovala panu doc. Ing. Lukáši Hornému Ph.D. za cenné rady a čas, který mi věnoval nejen při vypracování této práce. V neposlední řadě bych poděkovala své rodině a svým nejbližším za podporu během celého studia.

# Obsah

<b>Použité značení</b>	<b>3</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>5</b>
1.1 Cíle práce .....	5
<b>2 Průmyslové aplikace</b>	<b>6</b>
2.1 Potrubní systémy.....	6
2.1.1 Výroba trubek.....	6
2.1.2 Vliv koroze .....	8
2.2 Tlakové nádoby.....	9
<b>3 Biomechanická aplikace</b>	<b>10</b>
3.1 Cévní systém.....	10
3.2 Srdečnice (Aorta).....	11
3.2.1 Geometrie a rozměry aorty .....	11
3.2.2 Cévní onemocnění.....	15
3.3 Tloušťka stěny abdominální aorty v závislosti na obvodové souřadnici .....	17
3.4 Numerické simulace cévních onemocnění.....	19
<b>4 Lineární mechanika kontinua</b>	<b>21</b>
4.1 Obecné rovnice lineární mechaniky kontinua.....	21
4.2 Skořepiny .....	22
4.2.1 Namáhání skořepin a vnitřní silové účinky .....	23
4.2.2 Závislost mezi napětím a vnitřními silovými účinky .....	24
4.3 Teorie obecných skořepin.....	26
4.3.1 Matematická teorie .....	26
4.4 Skořepinová teorie – excentrická válcová trubice .....	36
<b>5 Nelineární mechanika kontinua</b>	<b>40</b>
5.1 Kinematika konečných deformací .....	40
5.2 Tenzor napětí .....	42
5.3 Konstitutivní modelování – hyperelastická .....	43
<b>6 Simulace pomocí metody konečných prvků</b>	<b>45</b>
6.1 Software Abaqus.....	45
6.2 Model excentrické trubice .....	45
6.3 Výsledky simulací.....	49

6.3.1	Lineární analýza .....	49
6.3.2	Vliv excentricity na obvodové napětí.....	56
6.3.3	Vliv excentricity na smykové napětí .....	57
6.3.4	Ověření platnosti Laplaceovy rovnice.....	58
6.3.5	Změna geometrie.....	60
6.3.6	Nelineární analýza.....	62
6.3.7	Ověření Laplaceovy rovnice nelineární analýzy .....	67
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>68</b>
<b>8</b>	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>70</b>

## Použité značení

$A$	plocha Lamého konstanta	[mm <sup>2</sup> ]
$\alpha$	přirozená křivočará souřadnice	
$B$	Lamého konstanta	
$\mathbf{b}$	levý Cauchův-Greenův tenzor deformace	
$\beta$	přirozená křivočará souřadnice	
$\mathbf{C}$	pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace	
$C_{ijkl}$	tenzor elastických konstant	
$D$	vnější průměr	[mm]
$d$	vnitřní průměr	[mm]
$DN$	světlost trubek	[mm]
$\delta_{ij}$	Kroneckerovo delta	
$\mathbf{E}$	Green-Lagrangeův tenzor deformace	
$E$	Youngův modul pružnosti	[MPa]
$e$	excentricita	[mm]
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	pravoúhlé kartézské bázevé vektory	
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	deformace ve směru os x, y, z	[-]
$\boldsymbol{\varepsilon}_I$	první invariant tenzoru malých deformací	
$\varepsilon_1$	poměrné prodloužení ve směru přirozené souřadnice	[-]
$\varepsilon_1^z, \varepsilon_2^z$	deformace v ekvidistantní rovině	[-]
$\mathbf{F}$	deformační gradient	
$\mathbf{f}$	silový vektor	
$\mathbf{G}$	objemová intenzita vnějších sil	[Nm <sup>-3</sup> ]
$\gamma_{12}$	zkos	[-]
$\gamma_{12}^z$	zkos v ekvidistantní rovině	[-]
$h, t$	tloušťka stěny trubice	[mm]
$h_0$	tloušťka stěny koncentrické trubice	[mm]
$I_1, I_2, I_3$	hlavní invarianty tenzoru $\mathbf{C}$	
$J$	Jacobián	
$K$	gaussova křivost	
$L, l$	délka trubice	[mm]
$\lambda$	materiálový parametr streč (poměrná změna délek)	[-]
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	hlavní streče (protažení)	[-]
$M_1, M_2$	ohybové momenty působící na jednotkovou délku oblouku	[N]
$M_{12}, M_{21}$	kroucí momenty	[Nm]
$\nu$	Poissonovo číslo	



$\bar{N}_1$	normálová síla na plochu elementu	[N]
$N_1, N_2$	normálová síla působící na jednotkovou délku oblouku	[N/mm]
$n$	normálový vektor	
$\mu$	materiálový parametr	
$\mathbf{P}$	nominální tenzor napětí	
$P, P_b, P_{bi}$	tlak	[MPa]
$p$	Lagrangeův multiplikátor	
$\mathbf{R}$	ortogonální tenzor rotace	
R,T,Z	osy válcového souřadnicového systému	
$R_{\min}, R_{\max}$	minimální a maximální poloměr křivosti	[mm]
$R_1, R_2$	hlavní poloměry křivosti	[mm]
	vnitřní a vnější průměr válce	[mm]
$\mathbf{r}$	radiusvektor	
$S_{12}, S_{21}$	smykové síly působící na jednotkovou délku oblouku	[N/mm]
$s, s_1, s_2$	délka elementu	[mm]
$\sigma_{ij}$	Cauchyho tenzor napětí	[MPa]
$\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$	radiální, obvodové a axiální napětí	[MPa]
$\sigma_{rt}, \sigma_{rz}, \sigma_{tz}$	smyková napětí	[MPa]
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	normálová napětí	[MPa]
$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	smyková napětí	[MPa]
$\mathbf{t}$	vektor intenzity plošných sil	
$\mathbf{U}$	pravý tenzor protažení	
$\ln(\mathbf{U})$	logaritmický tenzor deformace	[-]
$\ln(\mathbf{U}_r), \ln(\mathbf{U}_t),$ $\ln(\mathbf{U}_z), \ln(\mathbf{U}_{rt}),$	radiální, obvodový, axiální a smykový logaritmický tenzor deformace	[-]
$u$	posuv ve směru osy $x$	
$v$	posuv ve směru osy $y$	
$\mathbf{v}$	levý tenzor protažení	
$Q_1, Q_2$	příčné posouvající síly	[N/mm]
$W$	hustota deformační energie	[J/m <sup>3</sup> ]
$w$	posuv ve směru osy $z$	
$\mathbf{X}$	polohový vektor v počáteční konfiguraci	
$\mathbf{x}$	polohový vektor ve zdeformované konfiguraci	

# 1 Úvod

Životní úroveň lidstva doznala v posledních letech nebývalého rozmachu. Týká se to i technického rozvoje. Ten je závislý na mnoha faktorech, jedním z nich je doprava surovin a energií. Vzhledem k tomu, že se řada zdrojů vyskytuje v kapalném či plynném stavu a je nutné zajistit jejich přepravu na velké vzdálenosti, nabízí se jako ekonomicky výhodné využití potrubního systému.

Vezměme v úvahu například zásobování pitnou vodou, která je pro život člověka nepostradatelná a jejíž spotřeba a cena neustále roste. Dalším příkladem jsou produktovody v ropném, chemickém průmyslu a v dalších odvětvích. V těchto produktovodech je pro dopravu využívána přeměna mezi tlakovou a kinetickou energií. Pro uchovávání tekutin se používají tlakové nádoby.

Uvedená zařízení jsou ohrožena vadami a nepřesnostmi při výrobě. Podléhají opotřebení a korozi, což může vyústit v mezní stav. Je nutné zaručit jejich bezpečný provoz. Pokud nebudeme uvažovat chyby zaviněné lidským faktorem, pak je nutné zaměřit se na vlastnosti materiálu a na technologické provedení konstrukcí.

Předkládaná diplomová práce poskytuje parametrickou studii vlivu obvodově proměnné tloušťky tlakové nádoby na její napjatost a deformaci. Zdokumentování tohoto jevu je důležité nejen pro průmyslové konstrukce, ale také může přinášet zajímavé poznatky pro biomechanické aplikace.

S tímto jevem se lze setkat v biomechanice cév. Nerovnoměrnost tlouštěk stěn je přirozený anatomický jev, ale může být také způsobena onemocněním jako je např. ateroskleróza či aneurysma.

## 1.1 Cíle práce

Na počátku této práce jsme si stanovili následující cíle:

- 1) *Zformulovat motivaci pro úlohu pružnosti popisující napjatost a deformaci v tlakované trubici nekonstantní tloušťky*
- 2) *Analyzovat úlohu v oblasti lineární pružnosti*
- 3) *Zhodnotit vliv nelinearity na napjatost a deformaci trubice nekonstantní tloušťky*

Práce je rozdělena do dvou oddílů. V první části je pojednáváno o oblastech, ve kterých by studie mohla mít přínos. Několik kapitol je vyhrazeno pro teoretické poznatky z oblasti mechaniky kontinua, které jsou důležité pro porozumění nastolenému problému.

Druhá část se týká parametrické studie vlivu obvodově proměnné tloušťky na napjatost a deformaci trubice. Studie je provedena pomocí metody konečných prvků (MKP) v programu Abaqus. Simulace jsou vyhodnoceny v oblasti lineární a nelineární pružnosti. Parametrem simulace je tloušťka stěny trubice.

Závěrečná stať se věnuje vyhodnocení výsledků a je zde provedena diskuze nad splněním vytčených cílů.

## 2 Průmyslové aplikace

V následující kapitole je zmíněno několik případů, kdy se v technické praxi setkáváme s nekonstantní tloušťkou stěn tlakových trubíc.

### 2.1 Potrubní systémy

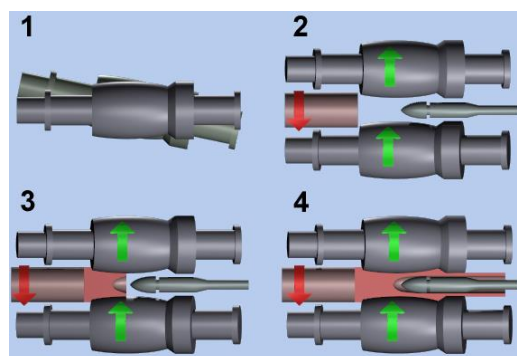
Potrubí je technické zařízení, které je vytvořeno těsným spojením trubek. Pomocí potrubí jsou přepravovány kapaliny a plyny, často na dlouhé vzdálenosti v různých prostředích. Podle umístění produktovodů dochází i k jejich rozdílnému zatěžování. Například potrubí, která se nacházejí na pevnině, jsou zejména namáhána vnitřním přetlakem, zatímco potrubí, která jsou provozována v hlubokých vodách, jsou namáhána jak vnitřním, tak zejména vnějším tlakem. Důležité charakteristiky pro návrh potrubí jsou: pracovní tlak, jmenovitá světlost a pracovní stupeň (teplota pracovního media). Potrubní systémy lze dělit podle několika kritérií, např. dle umístění, spoje jednotlivých dílců, druhu izolace, typu přepravované látky, atd. V dnešní době existuje mnoho druhů materiálů, ze kterých se potrubí vyrábí (plasty, litina, ocel, barevné kovy).

#### 2.1.1 Výroba trubek

Geometrická a rozměrová přesnost trubek je závislá na metodě jejich výroby. V současnosti se nejvíce uplatňuje výroba trubek válcováním a svařováním.

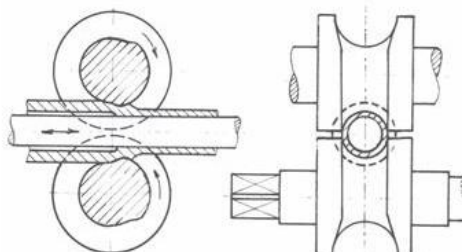
Válcováním se vyrábí trubky bezešvé, které jsou schopny odolávat vyšším pracovním tlakům. Svařováním se vyrábí trubky se švy, které se uplatňují zejména v technických oblastech, kde nedochází k jejich velkému mechanickému namáhání.

Výroba **bezešvých trubek válcováním** je rozdělena do tří kroků. Nejprve je nutné vyrobit dutý válcový předvalek, u něhož je kladen důraz na soustřednost vnitřního a vnějšího válce. Otvor se vyrábí na válcovacích stolicích s mimoběžnými osami viz Obr. 2.1. Válcovací stolice mají stejný směr otáčení, čímž dochází ke šroubovému posuvu předvalku. Působením jednosměrného stlačení materiálu vzniká v ose předvalku velké tahové napětí, které porušuje materiál a vede ke vzniku trhliny. Protahovacím trnem se vyhladí vnitřní dutina potřebného průměru[1].



Obr. 2.1 Výroba válcového předvalku [4]

Druhým krokem při výrobě bezešvých trubek je válcování předvalku. Na Obr. 2.2 vidíme schéma poutnické stolice. Během tváření dochází k odvalování válců, jejichž pracovní vzdálenost je menší, než vstupní průměr předvalku. Vývalek je nasazen na trn a osově se posouvá. Během této operace dochází k redukci vnitřního i vnějšího průměru trubky a k jejímu prodloužení.



Obr. 2.2 Poutnická stolice [1]

Podle počtu válcovacích stolic, směru otáčení a vzájemné polohy jejich os se rozlišují další způsoby válcování. Ilustrativně zmiňme např. Asselovu či Discherovu metodu válcování. Princip výroby trubek i u těchto metod zůstává stejný. Válcování předvalků může probíhat jak za studena, tak za tepla[1].

Posledním krokem při výrobě trubek je jejich kalibrace a chlazení.

Hodnoty tolerancí tloušťek stěn bezešvých ocelových trubek lze nalézt v normě ČSN EN 10216-1[2]. Pro ilustraci jsou v Tab. 2.1 tyto hodnoty uvedeny, jedná se o procentuální toleranci tloušťky stěny. Poměr  $h/D$  označuje poměr tloušťky ku vnějšímu průměru trubky.

Tab. 2.1 Hodnoty tolerancí tloušťek stěn bezešvých trubek dle ČSN EN 10216-1 [2]

Mezní úchytky tloušťky stěny trubky	
Do DN 200 včetně	±12.5% (nebo ±0.4mm)
Nad DN 200 tolerance dle hodnoty podílu $h/D$	
Do 0.025 včetně	±20%
Od 0.025 do 0.05 včetně	±15%
Od 0.05 do 0.1 včetně	±12.5%
Od 0.1 a více	±10%

Pro výrobu **přesných bezešvých trubek**, které mají přesnou tloušťku stěn a průměr, se využívá technologie tažení za studena.

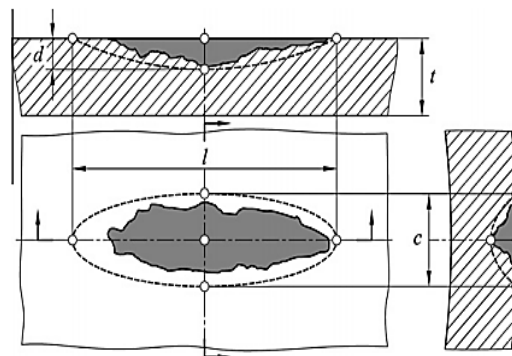
Druhou metodou výroby trubek, ekonomicky výhodnější, je svařování. Materiálem pro tuto technologii je pásová ocel, jejíž okraje jsou vzájemně svařené. Svar může být proveden několika způsoby, například tavným svařováním, odporovým svařováním, spojitým svařováním v plynové peci metodou na tupo či tlakovým svařováním. Také při této metodě dochází k nepřesnostem, které jsou zohledněny normou ČSN EN 10217- 1 [3].

## 2.1.2 Vliv koroze

Jednou z hlavních příčin, proč dochází u ocelových a litinových potrubí k haváriím, je koroze. Nejčastějším typem je bodová, důlková či plošná koroze, která napadá vnitřní i vnější průměr potrubí. V oblastech napadených korozi dochází k zeslabování stěn, a to vede v těchto místech ke koncentraci napětí.

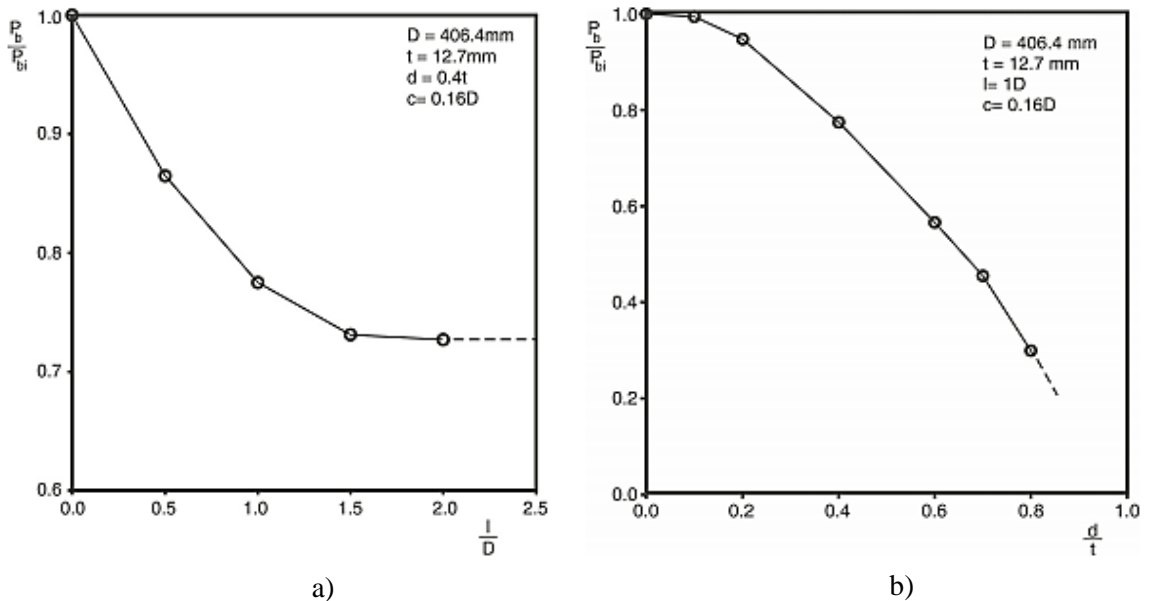
Problematikou koroze na potrubích se ve velké míře zabývají společnosti, které jsou zaměřené na těžbu nerostných surovin (např. ropa, plyn). Porušení stěn potrubí vlivem koroze by znamenalo ohrožení lidských životů, znečištění životního prostředí a velké finanční ztráty. Z důvodu prevence havárií vzniklo například doporučení od americké asociace strojních inženýrů ASME B31G z roku 1991 [6], které se zabývá vlivem koroze na pevnost materiálu potrubí a poskytuje návod, jak korozi vyhodnocovat a předcházet tak haváriím. Podle [6] jsou však pro některé aplikace kritéria posouzení rizika havárie dle ASME B31G příliš přísná.

Parametrickou studií vlivu hloubky a geometrie koroze na pevnost potrubí se zabývá článek [7]. Cílem výzkumu bylo zjistit, jak se mění napětí a deformace v závislosti na geometrii defektu, který byl modelován na vnější straně potrubí (Obr. 2.3). Potrubí bylo zatěžováno vnitřním tlakem. Byla provedena MKP analýza, jejíž správnost byla potvrzena experimentem. Autoři došli k závěru, že únosnost materiálu ovlivňuje hloubka koroze, více než poměr délky a šířky korozního defektu. Nutno ale podotknout, že oba tyto parametry ovlivňují napětí a deformaci, které v potrubí vzniká.



Obr. 2.3 Model korozního defektu [7]

Podobnou tematikou se ve svých pracích zabývali také další autoři. V článku [6] byla provedena obdobná studie s jiným druhem materiálu. Na Obr. 2.4 je vidět závislost tlakového zatížení ( $P_b$  odpovídá maximálnímu zatížení korodované trubky,  $P_{bi}$  představuje maximální tlak nekorodované trubky) na délce ( $l$ ) a hloubce ( $D$ ) korozního defektu. Hodnota  $t$  představuje tloušťku stěny trubky a  $d$  její vnější průměr.



Obr. 2.4 a) Vliv délky korozního defektu na maximální zatěžovací tlak [6]  
 b) Vliv hloubky korozního defektu na maximální zatěžovací tlak [6]

Ve článku [6] byla provedena parametrická studie závislosti vlivu geometrie koroze na únosnost materiálu. Autoři v této práci zohlednili i vliv ovality trubic a oblast, kde se vřiči koroze nachází. Trubice zde byla zatížena vnějším přetlakem a hledaná hodnota napětí odpovídala hodnotě, při které docházelo ke ztrátě stability stěny trubice.

## 2.2 Tlakové nádoby

Další oblastí, kde se objevuje problematika nerovnoměrného rozložení tloušťky stěny podél obvodu, je výroba tlakových nádob [8]. Jejich konstrukce, výroba a následné zkoušky jsou zahrnuté v příslušných normách (EN 13 445, ČSN 690010). Obecně se vyrábí tlakové nádoby bezešvé, nebo svařované. Během výroby a konstrukce se vždy vyskytne určité množství vad, jejichž přípustnost je daná právě zmiňovanými normami.

Během výroby nádob může nastat situace, při které dojde k lokálnímu porušení jejich stěn např. vlivem záluvů, zavalenin, otlaků apod[8]. Tyto poruchy musí být odstraněny, jelikož představují koncentrátoři napětí. Nejčastěji se tyto vady vybrušují, čímž opět dochází k místnímu zeslabení stěny. Evropská norma CEN/TC 54/WGDN 105, rev. 6. uvádí postup, jak tyto vady hodnotit [8].

Stejně jako u potrubních systémů, o kterých bylo pojednáno výše i u tlakových nádob dochází ke korozi, a to jak vlivem okolního prostředí, tak i vlivem media, které se v lahvích přepravuje.

## 3 Biomechanická aplikace

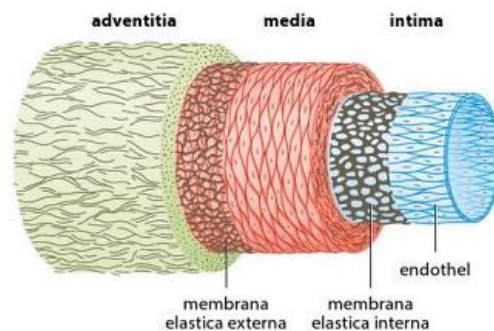
V biomechanice cév se setkáváme s nerovnoměrným rozložením tkáně po obvodu trubic. Tato kapitola poskytuje základní informace o anatomii tepen a jejich funkci. Pozornost je zde věnovaná zejména aortě.

### 3.1 Cévní systém

Funkcí cévního systému je zprostředkovávat dopravu živin, plynů, hormonů a odpadních látek prostřednictvím krve mezi tkáněmi. Cévy lze rozdělit na tepny, žíly a vlásečnice[10].

#### Tepny (Arterie)

Tepny jsou cévy, které vedou krev od srdce. Anatomicky jsou uloženy hlouběji v těle. Mají pevné a pružné stěny, které jsou přizpůsobené pulzovým nárazům krve. Stěna tepny je tvořena třemi vrstvami (Obr. 3.1): tunica intima, tunica media a tunica adventitia [9,10].



Obr. 3.1 Stavba tepny [9]

**Tunica intima [9]** je vnitřní vrstva tepen, která je složena z jedné vrstvy plochých endotelových buněk. Endotelové buňky tvoří nesmáčivý a netrombogenní povrch, kontrolují napětí cévní stěny a tedy i průtok krve. Nad touto vrstvou je elastická membrána, tvořená z elastických vláken (membrána elastica interna). Elastickou membránu od endotelových buněk odděluje subendotelová vazivová vrstva. Tunica intima u dospělého zdravého člověka dosahuje tloušťky až 100 $\mu$ m.

**Tunica media [9]** je střední, nejsilnější, vrstva stěny tepny. Je tvořena ze 40 – 70 vrstev pružných elastických lamel, které jsou uspořádány soustředně kolem osy cévy. Lamelami prostupují buňky hladké svaloviny, tvořící spirálovitá vlákna s malým stoupáním. Tato vlastnost tunici mediae umožňuje smrštění tepny po průchodu pulzní vlny. Mezi buňkami hladké svaloviny jsou propletena kolagenní a elastická vlákna.

**Tunica adventicia [9]** je povrchová vrstva cévy, která je tvořena řídkým vazivem s kolagenními a elastickými vlákny, které se navzájem kříží. Tunicu medii a adventitii odděluje membrána elastica externa, která je složena ze silných elastických vláken.

Podle vnitřního průměru a tloušťky stěn rozlišujeme 3 typy tepen [10]:

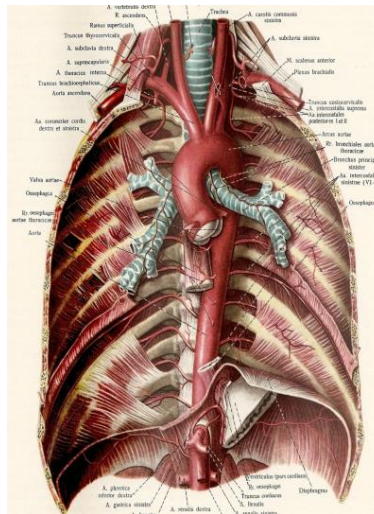
*Velké tepny*-vnitřní průměr 8 mm, tloušťka stěn 1 – 2mm (největší tepnou v těle je aorta, které má vnitřní průměr 26mm)

*Malé tepny*-vnitřní průměr 3 mm, tloušťka stěn 0.1-1 mm

*Tepénky*'- vnitřní průměr 100  $\mu\text{m}$ , tloušťka stěn 20-100  $\mu\text{m}$

## 3.2 Srdečnice (Aorta)

Srdečnice je nejmohutnější tepna lidského těla [10]. Navazuje na levou srdeční komoru a prostupuje celým trupem člověka (Obr. 3.2).



Obr. 3.2 Poloha srdečnice v těle [11]

### 3.2.1 Geometrie a rozměry aorty

Rozměry aorty jsou individuální záležitostí. Jsou ovlivněné např. pohlavím, věkem, nebo fyzickou zátěží, které je dotýčný člověk běžně vystavený. Byly vysledované určité fyziologické znaky, které jsou pro aortu charakteristické.

Rozměry a geometrie aorty:

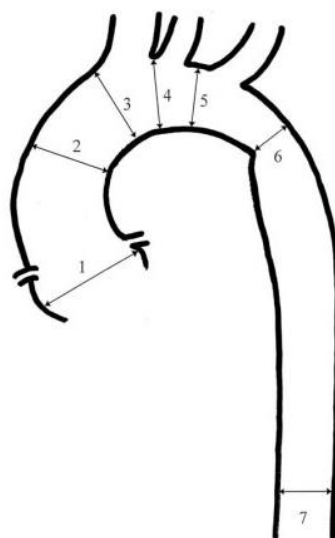
#### 1) Průměr aorty v závislosti na vzdálenosti od srdce

Tab. 3.1 [12] na následující straně zobrazuje hodnoty měření průměrů aorty v předem definovaných bodech. Pro lepší představu jsou místa řezů zobrazena na Obr.3.3 [12]. Měření byla provedena pomocí počítačové tomografie u 24 žen a 46 mužů. Z hodnot je zřejmé, že průměr aorty klesá od srdečního oblouku směrem k otvoru, kde probíhá aorta bránicí. Dále z tabulky vyplývá, že muži mají větší průměr aorty než ženy.



Tab. 3.1. Průměrné hodnoty aortálních rozměrů se směrodatnou odchylkou (cm) [12]

Úroveň aorty	Ženy (n=24)	Muži (n=46)	Celkem (n=70)
Ústí aorty (u chlopně) (1)	2.88±0.38	3.04±0.50	2.98±0.46
Vzestupná aorta (max.) (2)	2.90±0.34	3.20±0.42	3.09±0.41
Část aorty u ústí hlavopažní tepny(3)	2.82±0.36	3.00±0.44	2.94±0.42
Srdeční oblouk -střed (4)	2.65±0.27	2.84±0.40	2.77±0,37
Srdeční oblouk- okraj(5)	2.40±0.29	2.72±0.43	2.61±0.41
Aortální zúžení (6)	2.32±0.36	2.55±0.39	2.47±0.40
Aorta v oblasti bránice (7)	2.27±0.31	2.51±0.34	2.43±0.35

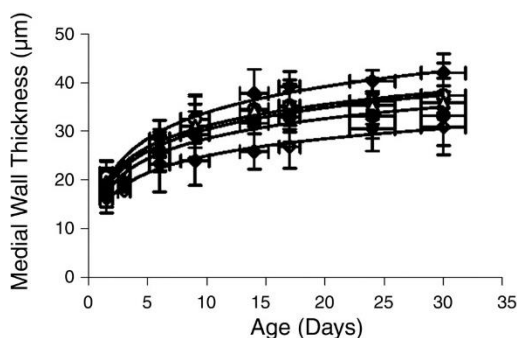


Obr.3.3 Oblast měření rozměru[12]

Další poznatek o změně geometrie aorty v axiálním směru přináší článek [13]. Zde byla vysledována změna geometrie aorty u myši. Krátce po narození byla aorta po délce spíše válcová a v průběhu vývoje docházelo k jejímu podélnému zužování.

## 2) Tloušťka aorty

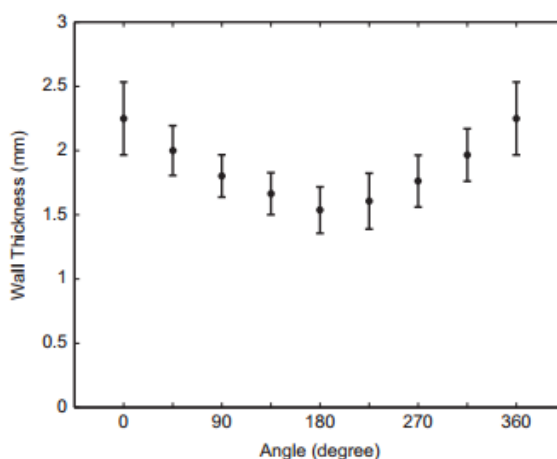
Tloušťka po obvodu průřezu aorty variuje z fyziologických důvodů a je závislá na věku pozorovaného subjektu. V článku [14] byl vysledován vliv stáří laboratorních myši, na velikosti aortální stěny viz Graf 3.1



Graf 3.1 Tloušťka stěny aorty v závislosti na stáří subjektu[14]

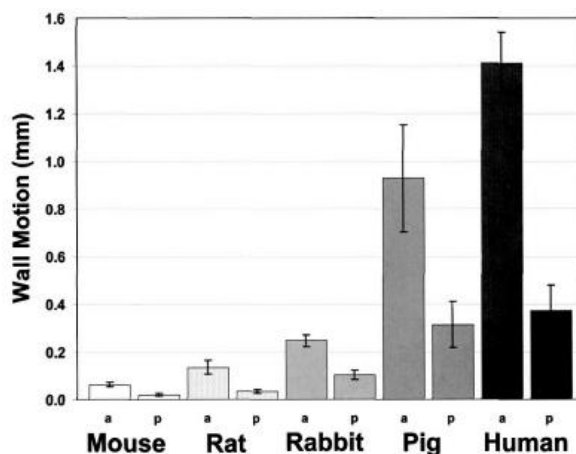
Z grafu je vidět, že se stářím myši se zvětšovala i tloušťka stěny aorty. Nejrapidnější nárůst byl u hrudní aorty, zatímco méně rychlý byl u distální části abdominálního úseku. Tento nárůst by mohl být spojen se změnami krevního tlaku (zvýšením) v období po narození.

V dalším výzkumu [13] byla sledována obvodová proměnlivost mechanických vlastností u prasečích hrudních aort během inflačních testů, které proběhly na 7 vzorcích. Na každém ze segmentů byla vyznačena jejich poloha v těle (část přivrácená k čelu (A-anterior), páteři (P- posterior), levá a pravá strana (L-lateral, R-lateral)). Aby mohly být veličiny, jako napětí nebo deformace vypočteny dostatečně precizně, bylo provedeno měření tloušťek aort v několika průřezech (pomocí posuvného měřítka). Na Graf 3.2 jsou zobrazeny průměrné hodnoty tloušťky aort a jejich deviační odchylky naměřené po 45° podél obvodu pro sedm vzorků. Oblast 0°(360°) odpovídá části aorty přivrácené k čelu, 90°je levá postranní část 180°je část přivrácená k páteři a konečně 270°odpovídá pravé postranní části aorty. Z Graf 3.2 je zřejmé, že se tloušťka mění postupně podél obvodu, část přivrácená k čelu (anterior) má větší tloušťku, zatím co průřezy přivrácené k páteři (posterior) jsou naopak nejtenčí.



Graf 3.2 Tloušťka prasečí hrudní aorty podél obvodu  
A-0°(360°), P-180°, L-90°, R-270° [13]

V [15] byly sledovány posuvy břišní aorty při diastole. Z počítačové tomografie a magnetické rezonance bylo zjištěno, že posuvy během srdečního cyklu nejsou kolem osy aorty rovnoměrné, ale v přední části aorty (anterior) dochází k posuvům výraznějším, než v části přivrácené k páteři (posterior). Cílem tohoto výzkumu bylo porovnat tyto posuvy mezidruhově a určit jak velký vliv na ně má velikosti aorty a hmotnosti subjektu. Experiment byl proveden na pěti druzích savců (myši, kryse, králíkovi, praseta a na člověku). Posuvy byly měřeny pomocí ultrazvuku. Bylo zjištěno, že posuv přední stěny aorty (a) je významně větší, než posuv zadní stěny (p) a to u všech živočišných druhů nezávisle na velikosti aorty viz Graf 3.3. Pro vysvětlení tohoto jevu se nabízí několik hypotéz. Jednou z nich je i fakt, že je tloušťka stěny aorty nerovnoměrně rozdělena podél obvodu. Výsledky ukazují, že větší posuvy nastávají v oblastech, kde je tloušťka stěny širší, což by mohlo znamenat, že anatomická stavba a tedy i mechanické vlastnosti aorty v těchto oblastech, jsou odlišné od zbývajících částí.



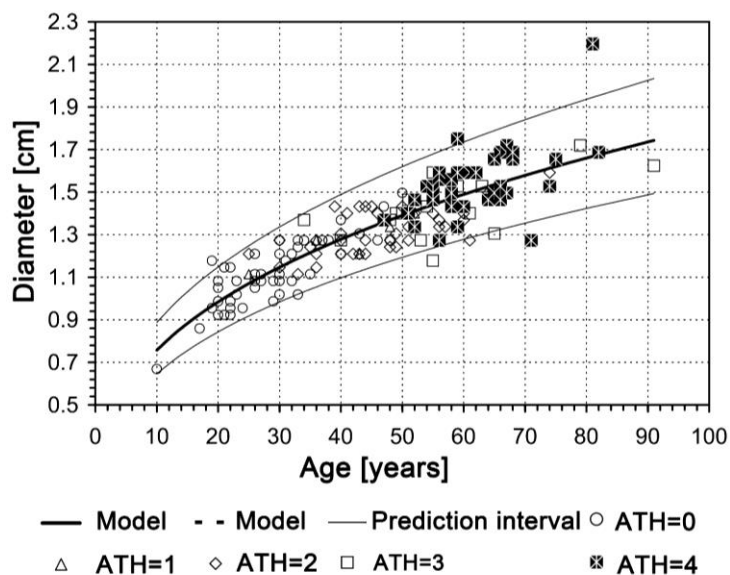
Graf 3.3 Průměrné hodnoty posuvů přední části (a-anterior) a zadní části (p-posterior) aorty pro aorty myši, krysy, králíka, prasete a člověka [15]

Nárůst tloušťky stěny aorty s věkem, tentokrát u lidí potvrzuje i Tab. 3.2 [16], kde byly naměřeny tloušťky stěny hrudní a břišní aorty. Jedná se o průměrné hodnoty a je zřejmé, že s věkem tyto hodnoty rostou. Nárůst může být způsobený vlivem strukturálních změn ve tkáni. Dochází ke zvyšování podílu kolagenu v cévách, ty potom ztrácejí poddajnost a stávají se tužšími[17]. Vliv na změnu tloušťky aorty má i hmotnost subjektu.

Tab. 3.2 Vnější průměr a tloušťka hrudní a břišní aorty [16]

Věk (roky)	Hrudní aorta		Břišní aorta	
	Vnější průměr (cm)	Tloušťka (cm)	Vnější průměr (cm)	Tloušťka (cm)
30-39	2.16-2.85	0.12-0.14	1.68-2.20	0.13-0.17
40-46	2.13-2.64	0.12-0.16	1.60-1.94	0.12-0.15
50-59	2.16-2.83	0.14-0.20	1.54-2.36	0.15-0.19
60-66	2.49-3.23	0.15-0.24	1.66-2.23	0.14-0.20
70-78	2.41-3.26	0.16-0.28	1.72-2.10	0.16-0.31
80-88	2.55-3.49	0.17-0.41		

V článku [18] jsou publikovány výsledky z měření, jehož cílem bylo ověřit korelaci mezi věkem a předpětím břišní aorty. Dále zde autoři zveřejňují závislost mezi věkem a průměrem aorty, kde je zohledněn i výskyt aterosklerotických plátů. Vzorok aort byly vyjmuty od 156 dárců, jejichž věk byl v rozmezí od 10 do 91 let, mužského pohlaví. ATH označuje stupeň vývoje aterosklerotického plátu, kde čísla označují stupeň aterosklerózy (0-neporušená tepna, nebo tukový proužek, 1 - vazivový plak, 2 - pokročilý plak, 3 - kalcifikovaný plak, 4 - ruptura plaku). Z Graf 3.4 je zřejmá přímo úměrná závislost mezi věkem a průměrem břišní aorty. Dále je možné vypořadovat, závislost mezi věkem a stupněm vývoje aterosklerotického plátu. Zvětšení průměru aorty, ale také zesílení aortální stěny, je tedy možné přičítat také ateroskleróze.



Graf 3.4 Závislost průměru břišní aorty na věku se zohledněním výskytu aterosklerotických plátů [18]

Patologické jevy, jako již zmiňovaná ateroskleróza, nebo aneurysma, ovlivňují tloušťku a geometrii aorty. V souvislosti s těmito onemocněními dochází k nárůstu tloušťky aortální stěny a ke zhoršení mechanických vlastností tepen. Těmto onemocněním je věnována následující kapitola.

### 3.2.2 Cévní onemocnění

[V závislosti na výskytu sklerotického plátu v cévní stěně velkých tepen, lze rozlišovat tyto dva druhy onemocnění[19]:

- Ateroskleróza
- Möckenbergova medioskleróza (arterioskleróza)

Cévy malých průměru jsou postiženy onemocněním, které se nazývá arterioloskleróza.

**Ateroskleróza** [19] (kornatění tepen) je chronické onemocnění, které postihuje tuniku intimu arterií. Vývoj aterosklerózy je dlouhodobý proces. Předpokladem pro vznik onemocnění je poškození endotelových buněk. Poškozený endotel není schopen plnit svoji funkci a dochází ke zvýšené propustnosti pro některé látky, zejména pro LDL (low density lipoproteins). Normální funkcí těchto lipoproteinů je zajišťovat transport cholesterolu k buňkám. Ovšem při poškození endotelu dochází k jeho usazování v subendotelovém prostoru v tepnách, což vyvolává reakci organismu. Do postiženého místa pronikají buňky imunitního systému a dochází ke vzniku tzv. pěnových buněk (lipofágů). Na poškozeném endotelu dále ulpívají krevní destičky (trombocyty), které produkují růstové faktory, které jsou za normálních okolností nezbytné pro opravu poškozené stěny tepen, ovšem v tomto případě to vede k množení buněk hladké svaloviny a produkci extracelulární matrix. Tímto procesem vzniká tzv. vazivová čepička a dochází k tomu,

že nekróza stále více zasahuje do stěny. Takto se vytváří aterosklerotický plát (Obr. 3.4), jehož jádro je náchylné ke kalcifikaci.



Obr. 3.4. Aterosklerotický plát [20]

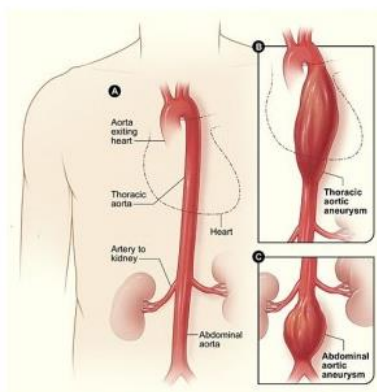
V pokročilém stádiu onemocnění dojde k zúžení (uzávěru) tepen, což může vést k nedostatečnému prokrvení orgánu a jejich následnému poškození. Dalším nebezpečím je prasknutí aterosklerotického plátu, které vede ke vzniku trombů, jejichž uvolnění může způsobit ucpání cév v jiném místě krevního řečiště popř. embolii. Ateroskleróza je také možná příčina vzniku aneurysmat. Mezi rizikové faktory pro vznik aterosklerózy se řadí: kouření, diabetes mellitus, obezita, hypertenze, věk, pohlaví a genetické predispozice.

**Möckenbergova medioskleróza [19] (arterioskleróza)** zasahuje medii tepen. Jedná se o ukládání vápníku, které vede k tuhnutí a křehnutí tepenné stěny. Často se vyskytuje u starších lidí v kombinaci s aterosklerózou.

**Arteriolskleróza [19]** je onemocnění, které se vyskytuje u arterií a malých tepen, vzniká v důsledku ukládání fibrinoidních hmot v jejich stěně. V důsledku tohoto procesu dochází ke zvětšování stěny arterioly a k zužování jejich průtočného průměru.

### **Aneurysma (Výdut')**

Další onemocněním tepen je aneurysma. Jedná se o lokální rozšíření tepny [21] (většinou aorty viz Obr. 3.5) o více než 50% vzhledem ke zdravé tkáni. Příčiny vzniku nejsou zcela objasněné. Jednou z hypotéz, proč toto onemocnění vzniká, je například ateroskleróza. Svou roli hraje i genetická predispozice, infekce apod. V souvislosti s aneurysmaty byly pozorovány změny v cévní stěně, chybí hladké svalstvo, mění se procentuální zastoupení různých typů kolagenu, je zde méně elastinu a naopak dochází ke zvýšení zastoupení fibronektinu. Nebezpečí tohoto onemocnění je ruptura aneurysmatu.

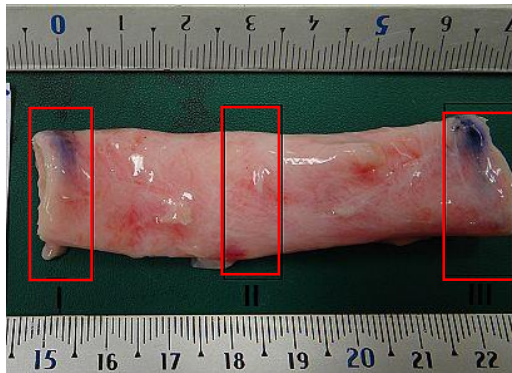


Obr. 3.5 Aneurysma aorty [21]

### 3.3 Tloušťka stěny abdominální aorty v závislosti na obvodové souřadnici

Výpočtové modely aort, které se hojně uplatňují např. při modelaci patologických jevů jako je aneurysma nebo ateroskleróza, ale i modely fyziologických tepen, doposud nezohledňovaly vliv proměnné obvodové tloušťky stěn. Cílem našeho výzkumu, který proběhl na fakultě strojní ČVUT v laboratoři kardiovaskulární biomechaniky ve spolupráci s Fakultní nemocnicí Královské Vinohrady, bylo zjistit, zda a popřípadě jak se mění tloušťka stěny abdominální aorty v závislosti na obvodové souřadnici vzorku.

Výzkum proběhl na dvanácti vzorcích abdominálních aort (Obr. 3.6) od dárců (tři ženy, devět mužů), jejichž věk byl v rozmezí od 42 do 83 let.



Obr. 3.6 Segment abdominální aorty

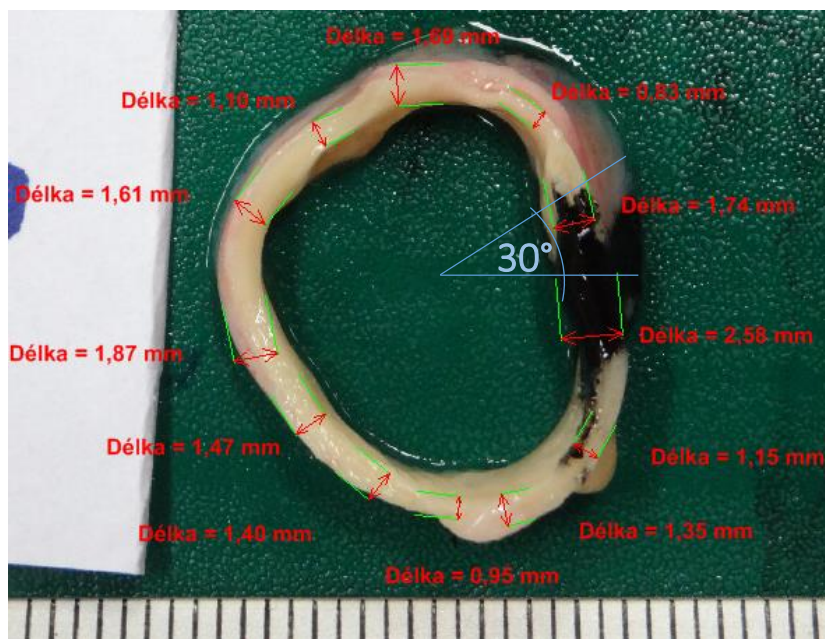


Obr. 3.7 Průřez abdominální aortou

#### Příprava a měření vzorků:

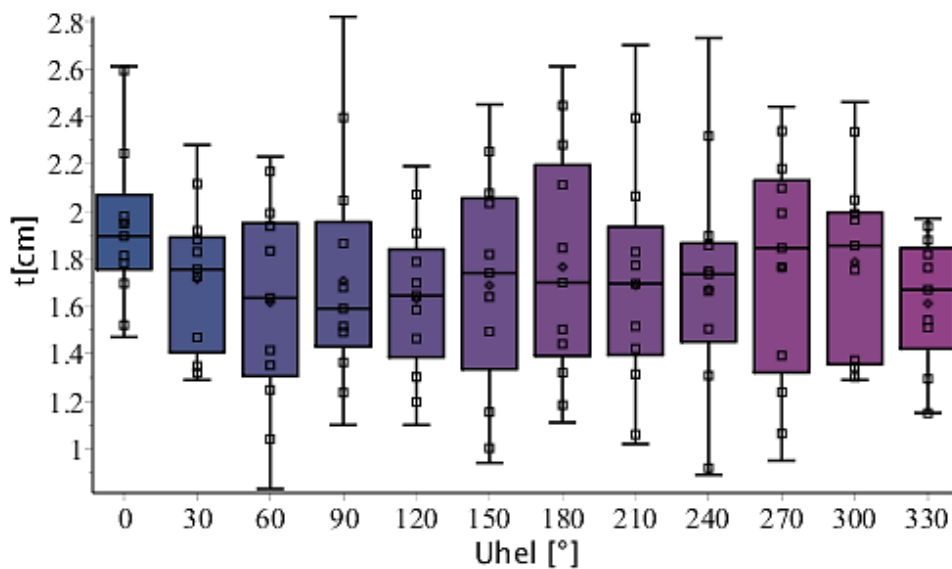
Z abdominální aorty byly vyjmuty tři segmenty, segment označený římskou číslicí jedna odpovídá kraniálnímu konci abdominální aorty. Na každém segmentu byla vyznačena orientace aorty v těle směrem k páteři (černá značka na Obr. 3.7), na což byl při vyhodnocování brán zřetel.

Vzorky byly nafoceny a následně vyhodnoceny v programu NIS ELEMENTS od firmy Nikon. Tloušťka vzorků byla měřena ve 12 bodech, hodnota naměřená v  $0^\circ$  odpovídala orientaci aorty k břichu (anterior). Následně byly vzaty rozměry zhruba po  $30^\circ$  (Obr. 3.8).



Obr. 3.8 Měření tloušťek aorty (hodnoty jsou zaznamenávány přibližně po 30°)

Následně byly naměřené hodnoty zpracovávány v programu Maple 18 od firmy Maplesoft. Data byla uspořádána a byly z nich vytvořeny box-ploty pro všechny tři řezy. Na Graf 3.5 vidíme rozložení tloušťek po obvodu břišní aorty pro řez I od dvanácti dárců. Na ose x je zaznamenána úhlová souřadnice řezu a na ose y je tloušťka řezu.



Graf 3.5 Rozložení tloušťky po obvodu břišní aorty-v oblasti řezu I

Z grafu je vidět, že tloušťka po obvodu aorty variuje. V Tab. 3.3 jsou zanesené průměrné hodnoty tloušťky aortálních řezů se směrdatnými odchylkami.

Tab. 3.3 Průměrné hodnoty tloušťky aortálních řezů a jejich směrodatné odchylky

<b>Úhel [°]</b>	<b>0</b>	<b>30</b>	<b>60</b>	<b>90</b>	<b>120</b>	<b>150</b>
<b>Průměrná hodnota [cm]</b>	1.951	1.714	1.617	1.707	1.63	1.688
<b>Směrodatná odchylka[cm]</b>	0.353	0.301	0.425	0.452	0.313	0.459
<b>Úhel [°]</b>	<b>180</b>	<b>210</b>	<b>240</b>	<b>270</b>	<b>300</b>	<b>330</b>
<b>Průměrná hodnota [cm]</b>	1.765	1.689	1.671	1.764	1.785	1.612
<b>Směrodatná odchylka[cm]</b>	0.479	0.483	0.47	0.477	0.387	0.285

Z naměřených hodnot docházíme k závěru, že **tloušťka aorty variuje v závislosti na obvodové souřadnici**. Je nutné poznamenat, že hodnoty jsou zatížené chybou při vyhodnocování, jelikož zvolená vyhodnocovací metoda byla závislá na pozorovacích schopnostech vyhodnotitele. Vyhodnocení je provedeno pro malý počet vzorků, pro přesnější výsledky je nutné počet vzorků navýšit.

Na základě zjištěných skutečností jsme se rozhodli uskutečnit parametrickou studii vlivu proměnnosti tloušťky stěny na napjatost a deformaci tlakované trubice. Geometrický model, který má tuto situaci znázorňovat, je excentrická trubice. Vlivem proměnné excentricity dochází ke změně tloušťky stěny po obvodu trubice. Z této simulace jsme schopni říci, jak se bude napjatost a deformace měnit.

Materiálový model, který byl v druhé části práce zvolen pro simulaci nelineárního chování, neodpovídá skutečným materiálovým vlastnostem tepny, jedná se o velice zjednodušený model, který má představovat chování nelineárního materiálu.

### 3.4 Numerické simulace cévních onemocnění

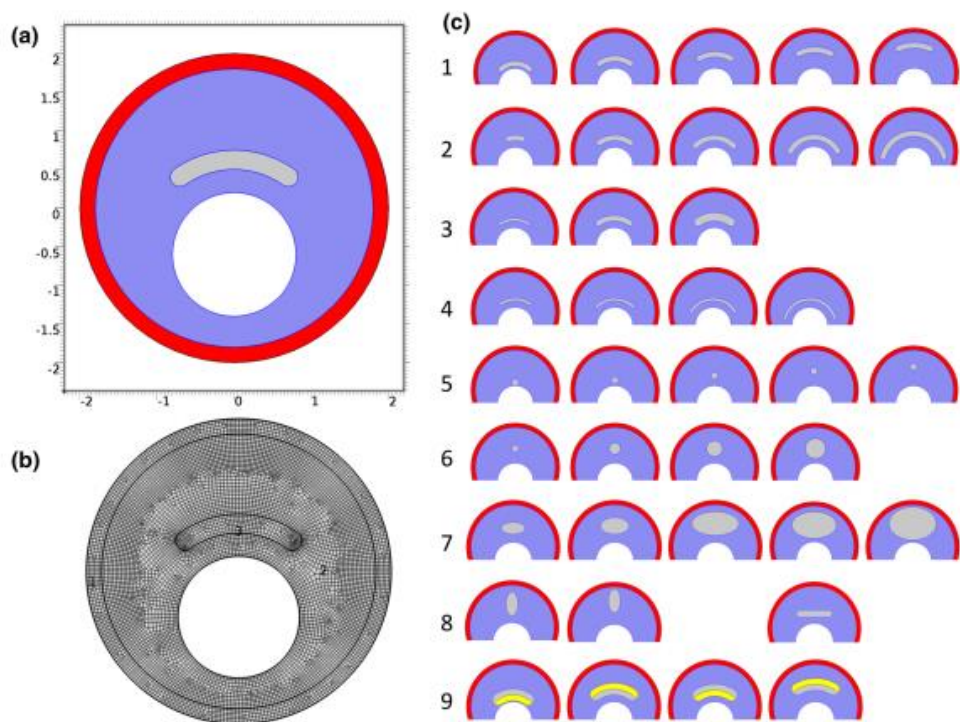
Cévní onemocnění a komplikace, které jsou s nimi spojené, jsou příčinou více než poloviny úmrtí v USA a Evropě ročně. V České republice toto číslo činí 45% [22]. Jedná se tedy o závažný problém, a proto je pozornost nejen lékařů, ale také vědců zaměřena na porozumění a léčbu těchto onemocnění.

Nástrojem pro modelování cévních onemocnění se staly konečně prvkové modely. Existuje řada studií, které jsou zaměřené na modelování např. aneurysmatu či aterosklerotického plátu. Uvedme zde několik příkladů.

V článku [23] autoři uskutečnili parametrickou studii, ve které zjišťovali vliv různorodé geometrie a rozdílných modulů pružnosti kalcifikovaného plátu na jeho napjatost při zatížení. Tepny byly modelovány jako hyperelastické a ortotropní materiály.

Na Obr. 3.9 je zobrazena geometrie koronární aorty s aterosklerotickým plátem. Jedná se o excentricky vyosené kružnice. Oblast zobrazena červeně simuluje nepoškozenou stěnu tepny, modrá oblast představuje fibrózní plak a šedá kalcifikované jádro aterosklerotického plátu. Vidíme, že geometrie plátu je různorodá.





Obr. 3.9 Modely aterosklerotického plátu [23]

Stejnou metodu a model aterosklerotického plátu využili i autoři v článku [24], kde se výpočtový model více blíží realitě.

Hojné studie jsou provedené na téma - aneurysma. Cílem těchto výzkumů je zjistit napjatost, která v aneurysmatu vzniká při různých geometrických a materiálových parametrech, například článek [25] se věnuje vyhodnocení rizika ruptury pro konkrétní pacienty.

## 4 Lineární mechanika kontinua

Následující kapitoly jsou zaměřené na oblast lineární mechaniky kontinua, kde předpokládáme malé posuvy a deformace. Dále předpokládáme, že těleso má elastické vlastnosti při zatěžování a mezi napětím a deformací je lineární závislost. V této oblasti platí Hookeův zákon. Pozornost je věnována zejména tenkostěnným skořepinám. V závěru kapitoly se dostaneme k odvození rovnic rovnováhy pro excentrickou trubici.

### 4.1 Obecné rovnice lineární mechaniky kontinua [26]

Předtím, než se dostaneme k odvození teorie pro skořepinová tělesa, připomeňme si nejprve obecné rovnice lineární mechaniky kontinua.

Uvažujme těleso, které je zatíženo vnějšími silami. Předpokládejme, že se tento objekt nachází v silové rovnováze, což je možné díky existenci vnitřních sil v tělese. Jejich intenzita je určena devíti složkami napětí. Uvedeme-li tyto složky v kartézské soustavě souřadnic  $O [x,y,z]$  získáváme:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ . Na základě podmínky o sdružených napětích dostáváme pouze šest nezávislých složek napětí, jelikož  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{yy} = \sigma_{yy}$ .

Jestliže poddajné těleso silově zatížíme, bude měnit svůj tvar a polohu v prostoru. Změnu rozměrů tělesa označujeme jako deformaci a změnu polohy nazýváme posuvem (rotací). V mechanice kontinua nás zajímají zejména **deformace tělesa**. Zavádíme tenzor deformace, jehož nezávislé složky jsou  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ . Tyto veličiny se získají rozkladem pole posuvů na část, která je způsobena rotací a posuvem tělesa jako tuhého celku a na část, která zapříčiňuje vlastní deformaci. Složky tenzoru deformace s polem posuvu pojí *Cauchyho vztahy*:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{zx}\end{aligned}\tag{4.1}$$

kde  $u$  označuje posuvy ve směru příslušné osy a  $\gamma$  jsou zkosení. Rovnice (4.1) popisují deformaci spojitého tělesa, za platnosti rovnic kompatibility.

Aby bylo těleso v rovnováze, musí jeho vnitřní napěťové účinky vyhovovat následujícím rovnicím:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + G_x &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + G_y &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + G_z &= 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

kde  $\mathbf{G}$  označuje vektor vnějších objemových sil.

Závislost mezi napětími a deformacemi popisují tzv. konstitutivní rovnice. Pro materiály, vykazující chování zmíněné v úvodu této kapitoly tento vztah popisuje Hookeův zákon

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda \varepsilon_I + 2\mu \varepsilon_x & \sigma_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \\
\sigma_y &= \lambda \varepsilon_I + 2\mu \varepsilon_y & \sigma_{xz} &= \mu \gamma_{xz} \\
\sigma_z &= \lambda \varepsilon_I + 2\mu \varepsilon_z & \sigma_{yz} &= \mu \gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Kde konstanty  $\lambda$  a  $\mu$  jsou materiálové parametry,  $\varepsilon_I$  je první invariant tenzoru malých deformací

a platí pro ně tyto vztahy:  $\varepsilon_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ,  $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  a  $\mu = \frac{Ev}{2(1+\nu)}$ .

## 4.2 Skořepiny [27,28]

Skořepiny jsou konstrukční prvky plochého charakteru, při čemž jeden jejich rozměr je výrazně menší než zbývající. Důležitým pojmem v teorii skořepin je střední plocha skořepiny, což je geometrické místo, které pólí tloušťku skořepiny.

Skořepiny lze rozdělit dle jejich tvaru nebo způsobu namáhání. Podle tvaru rozlišujeme obecné skořepiny nebo rotačně symetrické skořepiny. Složitější dělení skořepin dle tohoto kritéria poskytuje Gaussova křivost, která je založena po tzv. hlavních poloměrech křivosti. Každý bod skořepiny je možné proložit nekonečně mnoha rovinami. Mezi těmito rovinami ovšem existují pouze dvě, které jsou na sebe kolmé a mají nejmenší  $R_{\min}$  a největší poloměr křivosti  $R_{\max}$  (hlavní poloměry křivosti). Gaussova křivost  $K$  je dána součinem:

$$K = \frac{1}{R_{\max}} \frac{1}{R_{\min}} \tag{4.4}$$

Pro nás důležitější kritérium dělení je dle způsobu namáhání. Skořepiny rozdělujeme do těchto skupin: tlustostěnné, střední tloušťky, tenkostěnné, nelineární tenkostěnné a membránové. Tloušťka skořepiny rozhoduje o tom, jakému namáhání bude skořepina vystavena. Způsoby namáhání skořepiny určují i jiné okolnosti, například její uložení.

**Tlustostěnné skořepiny** jsou takové, jejichž tloušťka  $h$  je srovnatelná s minimálním poloměrem křivosti střednicové plochy  $R_{\min}$ . Skořepiny jsou namáhány normálovým napětím, které

je kolmé ke střednicové ploše. V důsledku smykových napětí dochází ke zprohýbání normál ke střední ploše (neplatí Kirchhoffova hypotéza). Důsledkem je nelineární rozložení napětí po tloušťce stěny.

**Skořepiny střední tloušťky** představují přechodový prvek mezi tlustostěnnými a tenkostěnnými skořepinami.

O **tenkostěnných skořepinách** hovoříme, jestliže je jejich tloušťka mnohem menší ve srovnání s minimálním poloměrem křivosti ke střednicové ploše. U těchto skořepin lze zanedbat vliv smykových napětí. Na základě Kirchhoffovy hypotézy se zachovává kolmost normál ke střednicové ploše i po deformaci. Průběh napětí ve stěnách je lineární.

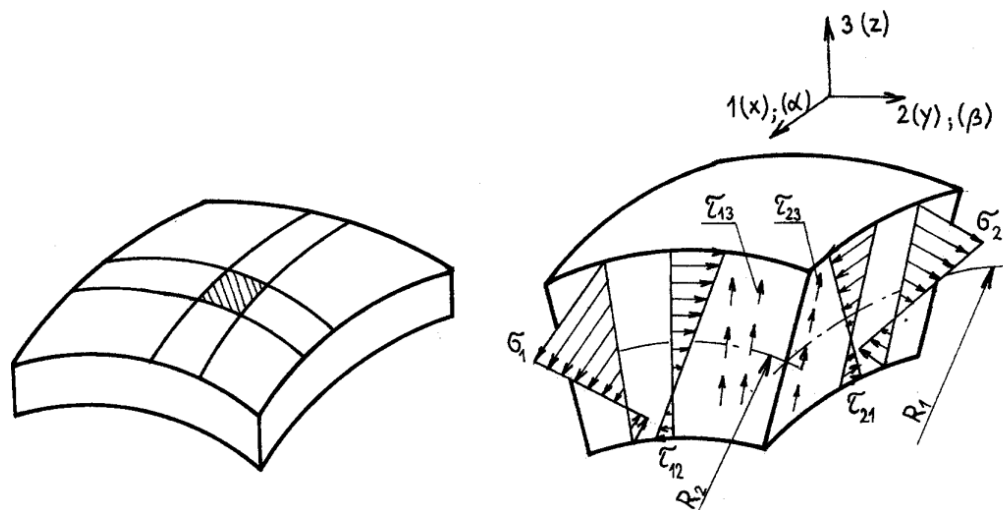
V technické praxi je velmi žádaný membránový stav napjatosti, takové skořepiny označujeme jako **membránové**. Ve stěnách se nevyskytují žádné momenty. Namáhání je dáno pouze normálovými složkami napětí popř. smykovými silami. Napjatost je ve stěnách rozložena rovnoměrně. Při tomto zatížení dochází z konstrukčního hlediska k ideálnímu využití materiálu.

Poslední skupinou skořepin z našeho rozdělení jsou **nelineární tenkostěnné skořepiny**. Stěny těchto prvků jsou tak tenké, že vzniklé posuvy po zatížení jsou srovnatelné, či mnohonásobně překračují jejich tloušťku. Dochází tak ke geometrickým nelinearitám.

Tato práce se zabývá tenkostěnnými skořepinami, proto jim zde bude věnována rozšířená pozornost.

#### 4.2.1 Namáhání skořepin a vnitřní silové účinky

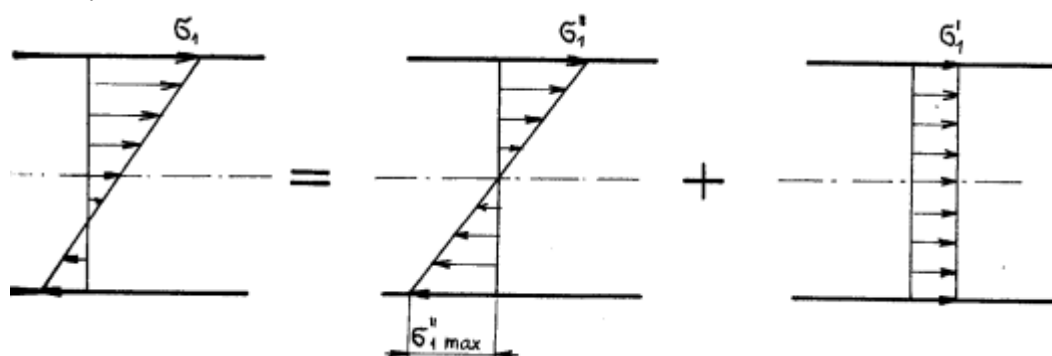
Pro odvození rovnic popisující namáhání obecné skořepiny z ní nejprve vytkneme element, který bude ohraničený na sebe kolmými řezy, procházejícími střední plochou skořepiny (Obr. 4.1), zde lze vidět napěťové účinky, které v obecné skořepině vznikají.



Obr. 4.1 Element vytknutý ze skořepiny[27]

Čtenář si jistě povšimne, že nulová hodnota ohybového napětí ve stěnách neleží na střednici skořepiny. Toto napětí je tvořeno superpozicí membránového (tahového)  $\sigma_1'$  a ohybového  $\sigma_1''$

napětí viz Obr. 4.2, nebo v případě smykového napětí se jedná o superpozici krutu a rovnoměrně rozloženého smyku.

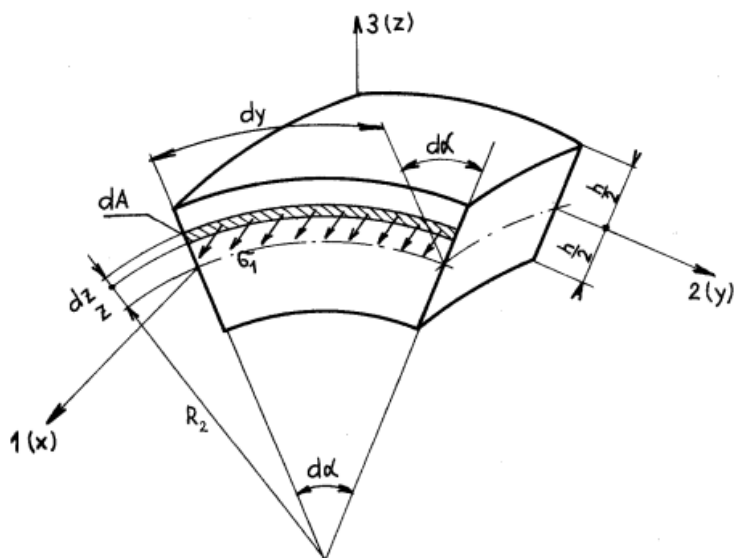


Obr. 4.2 Superpozice membránového a ohybového napětí [27]

Napětí ve stěnách u tenkostěnných skořepin se nahrazují výslednými silovými účinky vztaženými na jednotku délky.

#### 4.2.2 Závislost mezi napětím a vnitřními silovými účinky

Odvoďme závislost mezi napětím a vnitřními silovými účinky například pro sílu  $N_1$ , což bude výslednice membránového (tahového) napětí. Na Obr. 4.3 vidíme vytknutý element, který je dán tloušťkou  $h$ , poloměr  $R_2$  určuje křivost střednicové plochy v rovině kolmé na napětí.



Obr. 4.3 Napětí působící na plošku vytknutého elementu [27]

Velikost šrafované plošky vytknutého elementu je dána vztahem

$$dA = (dy + z \cdot d\alpha) dz \quad d\alpha = \frac{dy}{R_2} \quad (4.5)$$

Po úpravě získáváme rovnici

$$dA = \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \cdot dy \quad (4.6)$$

Elementární síla, působící na plošku má velikost

$$\sigma_1 dA = \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \cdot dy \quad (4.7)$$

Výslednou sílu, která působí na celou přední plochu elementu, získáme integrací po tloušťce  $h$

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \cdot dy \quad (4.8)$$

Výsledkem má ovšem být vnitřní síla, která působí na jednotkovou délku oblouku střední plochy, proto celou rovnici podělíme  $dy$ . Dostáváme hledaný vztah ve tvaru

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (4.9)$$

Obdobným způsobem by bylo možné určit i ostatní silové účinky působící na jednotkové délce oblouku střední plochy, jejichž výčet je uveden v Tab. 4.1.

Tab. 4.1 Silové účinky působící na jednotkové délce oblouku střední plochy skořepiny

<i>Normálová síla</i>	$N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz$
<i>Ohybové momenty</i>	$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz$
<i>Smykové síly</i>	$S_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad S_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz$
<i>Krouticí momenty</i>	$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad M_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21} z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz$
<i>Příčné posouvající síly</i>	$Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{13} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{23} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz$

Ze zákona sdružených smykových napětí dostáváme rovnost  $\tau_{12} = \tau_{21}$ . Obecně neplatí rovnost smykových sil, ani kroutících momentů. Pouze pro určité zjednodušené případy tenkostěnných skořepin toto lze předpokládat. Dále je dobré si uvědomit skutečnost, že jedním z našich předpokladů byla tenkostěnnost skořepin, proto můžeme zanedbat podíly  $\frac{z}{R_1}, \frac{z}{R_2}$  aniž bychom se dopustili velké chyby.

## 4.3 Teorie obecných skořepin

Pro řešení obecných skořepin musí být splněny tyto požadavky:

- 1) Platnost lineárního Hookeova zákona a superpozice posuvů.
- 2) Platí předpoklad tenkostěnnosti  $h/R_{\min} \leq 10$ , kde  $h$  je tloušťka skořepiny a  $R_{\min}$  je poloměr křivosti střednicové plochy.
- 3) Průhyby skořepiny jsou malé ve srovnání s její tloušťkou.
- 4) Je zaručena platnost Kirchhoffovy hypotézy.

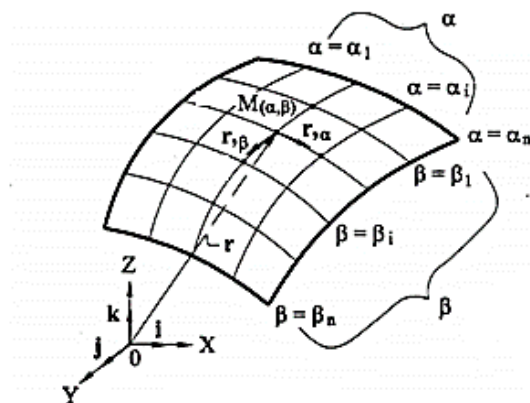
Pokud jsou tyto předpoklady splněné, můžeme přikročit k odvození teorie obecných skořepin. K této teorii se lze dostat dvěma cestami. Potřebné rovnice lze odvodit na základě geometrické představy [27], což je názorné, ale pro složitější geometrie obtížné. Druhou možností je využití matematické teorie, která je méně názorná, ale představuje způsob nalezení rovnic i pro složité geometrie.

### 4.3.1 Matematická teorie

V této kapitole odvodíme rovnice rovnováhy elementu obecné skořepiny pomocí matematické teorie.

#### 4.3.1.1 Křivočarý souřadnicový systém (přirozený)

Nejprve musíme na vytyčeném elementu definovat souřadnicový systém. Element skořepiny je umístěn do kartézského souřadnicového systému OXYZ. Vzhledem k tomu, že naše silové účinky zmíněné v předchozí kapitole, jsou vztažené ke střední ploše, budeme i rovnice rovnováhy odvozovat pro tuto plochu. Na střední ploše elementu zavedeme křivočaré souřadnice  $\alpha, \beta$  viz. Obr. 4.4



Obr. 4.4 Souřadnicový systém střední plochy[28]

Vektorová rovnice střední plochy je

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (4.10)$$

kde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os. Poloha libovolného bodu na ploše dána křivočarými souřadnicemi  $\alpha, \beta$ . Platí funkční závislost

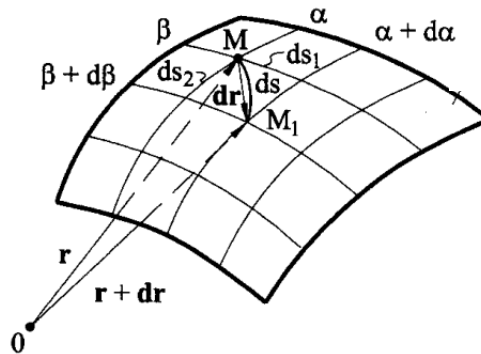
$$x = x(\alpha, \beta) \quad y = y(\alpha, \beta) \quad z = z(\alpha, \beta) \quad (4.11)$$

Rovnice střední plochy potom lze zapsat ve formě

$$\vec{r} = x(\alpha, \beta)\vec{i} + y(\alpha, \beta)\vec{j} + z(\alpha, \beta)\vec{k} \quad (4.12)$$

Křivočaré souřadnice střednicové plochy jsou voleny tak, aby byly na celé ploše vzájemně ortogonální.

Jestliže máme na ploše dva nekonečně blízké body  $M(\alpha, \beta)$  a  $M_1(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ , jejichž poloha v kartézském souřadnicovém systému je dána vektory  $\vec{r}$  a  $\vec{r} + d\vec{r}$  (Obr. 4.5)



Obr. 4.5 Poloha nekonečně blízkých bodů na střednicové ploše[28]

Velikost oblouku  $d\vec{s}$  na ploše se limitně blíží velikosti rozdílu vektoru  $d\vec{r}$ , který je zdefinován jako

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta. \text{ Pro velikost oblouku na ploše platí}$$

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \beta^2} d\beta^2 \quad (4.13)$$

Chybějící člen umocnění  $2 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta$  je roven nule, jelikož se zde vykytuje skalární součin dvou vzájemně kolmých vektorů.

Označme derivace  $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^2} = A^2$  a  $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \beta^2} = B^2$ , kde  $A, B$  jsou tzv. Lamého konstanty.

Rovnice (4.13) se nazývá první kvadratická forma povrchu a pomocí Lamého konstant bude mít tvar

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 \quad (4.14)$$

Tento vztah můžeme také interpretovat pomocí geometrické představy (Obr. 4.5) a získáváme následující rovnici .

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 \quad (4.15)$$

ze které porovnáním s rovnicí (4.14) vyplývá význam Lamého konstant.



$$\begin{aligned} ds_1 &= A \cdot d\alpha \\ ds_2 &= B \cdot d\beta \end{aligned} \quad (4.16)$$

Důležité vztahy představují Godazzi-Gaussovy rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{R_1} \right) &= \frac{1}{R_2} \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{R_2} \right) &= \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) &= - \frac{AB}{R_1 R_2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

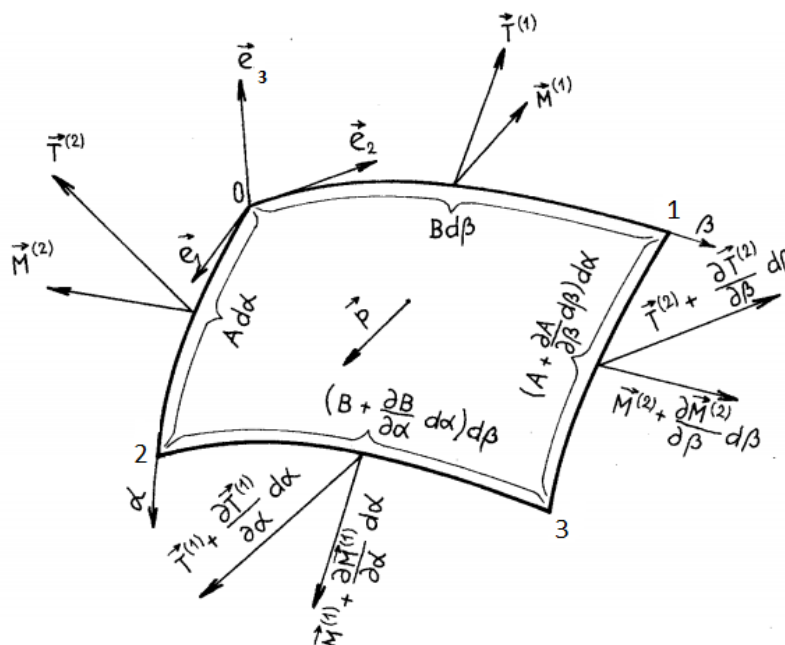
Pomocí těchto rovnic jsou definované vzájemné vztahy mezi Lamého parametry a poloměry křivosti  $R_1, R_2$ . Odvození těchto rovnic zde není uvedeno, ale v případě zájmu čtenáře, ho lze najít např. v literatuře [28].

Pro obecný bod střednicové plochy dále zavedeme ortogonální normovanou bázi, ve které budeme následně moci určit libovolný vektor.

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \quad (4.18)$$

### Rovnice rovnováhy elementu

V předchozí kapitole jsme definovali křivočarý souřadnicový systém na střední ploše vytyčeného elementu, nyní můžeme přikročit k sestavení rovnic rovnováhy. Pro tvorbu rovnic využijeme pro lepší představu Obr. 4.6, na kterém je zobrazena střední plocha elementu. Plocha je ohraničena řezy vedoucími hlavními poloměry křivosti, omezenými křivočarými souřadnicemi.



Obr. 4.6 Uvolnění střední plochy se silovými účinky a montovými účinky[27]

Na stranu 0-2elementu působí silové a momentové výslednice, na protilehlou hranu 3-1 působí síly a momenty, které jsou zvětšené o přírůstky, odpovídající velikosti posunu po elementu. Silové účinky jsou vztažené na jednotku délky oblouku.

Vektorová rovnice rovnováhy elementu poté bude mít tvar

$$\begin{aligned} & (\vec{T}^{(1)} + \frac{\partial \vec{T}^{(1)}}{\partial \alpha} d\alpha)(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial \alpha} d\alpha)d\beta - \vec{T}^{(1)} \vec{B} d\beta + (\vec{T}^{(2)} + \frac{\partial \vec{T}^{(2)}}{\partial \beta} d\beta)(\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \beta} d\beta)d\alpha \\ & - \vec{T}^{(2)} \vec{A} d\alpha + \vec{p} \vec{A} d\alpha \vec{B} d\beta = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Roznásobením členů rovnice se některé složky napětí odečtou, také zanedbáme členy s vyššími stupni derivace. Po úpravách získáme rovnici (4.19) ve tvaru

$$\frac{\partial(\vec{T}^{(1)} \vec{B})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(\vec{T}^{(2)} \vec{A})}{\partial \beta} + \vec{p} \vec{A} \vec{B} = 0 \quad (4.20)$$

Rozepišme nyní tuto rovnici do složek, vycházíme z Obr. 4.1

$$\begin{aligned} \vec{T}^{(1)} &= N_1 \vec{e}_1 + S_{12} \vec{e}_2 + Q_1 \vec{e}_3 \\ \vec{T}^{(2)} &= N_2 \vec{e}_2 + S_{21} \vec{e}_1 + Q_2 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Stejně tak i vnější zatížení musí být vektorově rozepsáno

$$\vec{p} = p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 + p_3 \vec{e}_3 \quad (4.22)$$

Dosadíme tyto vztahy do rovnice (4.20). Po zdlouhavých úpravách nakonec dostaneme rovnici:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial(BN_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AS_{21})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S_{12} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_2 + \frac{AB}{R_1} Q_1 + ABp_1 \right] \vec{e}_1 + \\ & + \left[ \frac{\partial(BS_{12})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_2)}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S_{21} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_1 + \frac{AB}{R_2} Q_2 + ABp_2 \right] \vec{e}_2 + \\ & + \left[ \frac{\partial(BQ_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AQ_2)}{\partial \beta} - AB \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) + ABp_3 \right] \vec{e}_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Při derivacích nesmíme opomenout fakt, že i jednotkové vektory jsou funkcí křivočarých souřadnic  $\alpha, \beta$  a musíme je tedy také derivovat. Tyto derivace lze nalézt v literatuře např. [28].

V dalším kroku odvození rovnic rovnováhy vycházíme z úvahy, že pokud je nějaký vektor nulový, musí být nulové i jeho složky. Z toho vyplývá, že dostáváme tři rovnice rovnováhy, které formálním podělením Lamého konstantami mají následující tvar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(BN_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AS_{21})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S_{12} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_2 \right] + \frac{Q_1}{R_1} + p_1 = 0 \\ & \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(BS_{12})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_2)}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S_{21} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_1 \right] + \frac{Q_2}{R_2} + p_2 = 0 \\ & \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(BQ_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AQ_2)}{\partial \beta} \right] - \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) + p_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nyní musíme odvodit také momentové rovnice rovnováhy. Opět budeme postupovat stejně, jako při odvození silové rovnováhy. Po sestavení vektorové rovnice a jejích úpravách dostaneme tvar

$$\frac{\partial(\vec{M}^{(1)} \vec{B})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(\vec{M}^{(2)} \vec{A})}{\partial \alpha} + \left[ Q_2 \vec{e}_1 - Q_1 \vec{e}_2 + (S_{12} - S_{21}) \vec{e}_3 \right] \vec{A} \vec{B} = 0 \quad (4.25)$$

V rovnici se vyskytují momenty od silových složek. Nyní musíme za momenty  $\vec{M}^{(1)}$  a  $\vec{M}^{(2)}$  dosadit jejich jednotlivé složky

$$\vec{M}^{(1)} = -M_{12}\vec{e}_1 + M_{21}\vec{e}_2 \quad \vec{M}^{(2)} = -M_{21}\vec{e}_1 + M_{12}\vec{e}_2 \quad (4.26)$$

A opět můžeme rozepsat rovnici (4.25) ve složkovém tvaru, jako v případě silových rovnic.

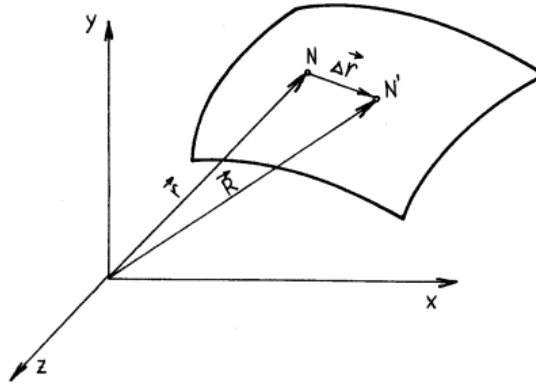
$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(BM_{12})}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AM_{21})}{\partial\beta} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{21} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{12} \right] - Q_2 &= 0 \\ \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(BM_{21})}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AM_{12})}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{12} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{21} \right] - Q_1 &= 0 \\ S_{12} - S_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Poslední rovnice je splněna identicky. Nyní vidíme, že máme k dispozici soustavu pěti rovnic pro osm nezávislých silových účinků. Musíme se tedy zaměřit na deformaci skořepiny.

### Deformace skořepiny

Při odvozování rovnic deformace skořepiny předpokládáme platnost Kirchhoffovy hypotézy o zachování kolmosti normál na střednici, což nám umožňuje převést trojrozměrný problém na dvourozměrný. Pokud stanovíme tvar střednicové plochy, pak vztyčením normál, jejichž délka odpovídá původní tloušťce skořepiny, jsme schopni vymodelovat tvar celého elementu. Poměrná prodloužení, zkosity apod. stanovíme pomocí geometrických úvah.

Uvažujme bod  $N$  ležící na střední ploše, který je v základním souřadnicovém systému dán radiusvektorem  $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta)$ . Po deformaci střední plochy se tento bod přemístí do nové polohy  $N'$  viz. Obr. 4.7, ve směru souřadnicových vektorů  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , dojde tedy k posuvu  $u, v, w$ .



Obr. 4.7 Deformace střední plochy[27]

Bod  $N'$  zdeformované střední plochy, bude definován novým radiusvektorem

$$\vec{R}(\alpha, \beta) = \vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r} + u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3 \quad (4.28)$$

Pro zdeformovanou plochu je zapotřebí stanovit nové Lamého konstanty

$$(A')^2 = \left( \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha} \right)^2 \quad (B')^2 = \left( \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta} \right)^2 \quad (4.29)$$

Dosadíme z rovnice (4.28) do (4.29) a provedeme derivace, získáme výsledný vztah

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha}\right)^2 &= A^2 \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}\right)^2 \bar{e}_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} u\right)^2 \bar{e}_2 \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{A}{R_1} u\right)^2 \bar{e}_3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nesmíme opomenout, že i jednotkové vektory jsou funkcí křivočarých souřadnic a musí tedy být derivovány. Derivace jednotkových vektorů lze nalézt např. v [27]. Vztah (4.30) získáme po úpravách, které je zde zbytečné rozepisovat. Přikročíme k určení Lamého konstanty. Zanedbáme vyšší derivace a malé hodnoty posuvů. Malými hodnotami rozumíme např. součiny posuvů popř. jejich druhé a vyšší derivace,. Jelikož předpokládáme, že posuvy jsou mnohem menší než tloušťka skořepiny, můžeme si to dovolit. Lamého konstanta bude mít tvar

$$(A')^2 = \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha}\right)^2 = A^2 \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}\right)^2 \quad (4.31)$$

a po odmocnění

$$A' = A \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}\right) = A(1 + \varepsilon_1)$$

Nová veličina  $\varepsilon_1$ , která se vyskytla v předchozí rovnici, má význam poměrného prodloužení ve směru křivočaré souřadnice  $\alpha$ .

Dalším krokem pro určení deformované střednice plochy je zjistit, jaké směry budou mít vektory báze po deformaci. Budeme předpokládat, že ortogonální vektory  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  přejdou v důsledku pootočení na vektory  $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ , které již ortogonální nebudou.

Nový vektor deformované střednice určíme dosazením do rovnice  $\bar{e}' = \frac{1}{A'} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha}$  a následnými

úpravami získáme vztah pro  $\bar{e}'_1$  ve tvaru

$$\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u\right) \bar{e}_2 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}\right) \bar{e}_3 \quad (4.32)$$

Obdobným způsobem bychom získali i vyjádření  $\bar{e}'_2$

$$\bar{e}'_2 = \bar{e}_2 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v\right) \bar{e}_1 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}\right) \bar{e}_3 \quad (4.33)$$

Poslední bázový vektor, který nám chybí je

$$\bar{e}'_3 = \bar{e}'_1 \times \bar{e}'_2 = \bar{e}_3 + \mathcal{G} \bar{e}_1 + \psi \bar{e}_2 \quad (4.34)$$

kde

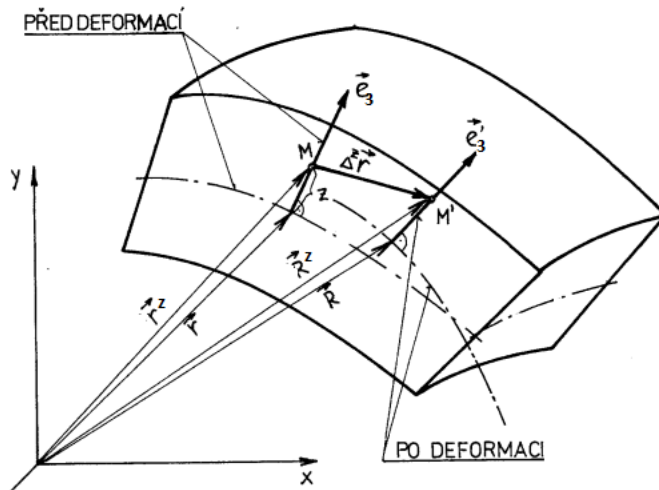
$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \\ \psi &= -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Odvozené vztahy nám charakterizují deformaci střednici. Nás také zajímá, jak se doformují jiné plochy ve vzdálenosti  $z$  od střední plochy. Zvolme si na této ploše bod  $M$ , který se po deformaci

přemístí do bodu  $M'$ . Nezdeformovaný bod má radiusvektor  $\vec{r}^z = \vec{r} + z\vec{e}_3$ , bod  $M'$  bude mít po deformaci nový radiusvektor  $\vec{R}^z = \vec{R} + z\vec{e}_3 = \vec{r} + \Delta\vec{r} + z\vec{e}_3'$ . Z toho plyne, že bod  $M$  vykonal posuv, který se dá vyjádřit jako

$$\Delta\vec{r}^z = \vec{R}^z - \vec{r}^z = \Delta\vec{r} + z(\vec{e}_3' - \vec{e}_3) \quad (4.36)$$

Celá situace je zachycena na Obr. 4.8 na následující straně.



Obr. 4.8 Deformace ekvidistantní plochy[27]

Po dosazení z (4.34) získáme rovnici pro posuv ve tvaru

$$\Delta\vec{r}^z = \Delta\vec{r} + z(\vartheta\vec{e}_1 + \psi\vec{e}_2) \quad (4.37)$$

Nyní označme složky posuvů bodu  $M$  jako  $u_z, v_z, w_z$ , dosazením do (4.36) za  $\Delta\vec{r}^z$  získáme jiný tvar rovnice, ze kterého porovnáním posuvů v příslušných směrech získáme tyto složky

$$\begin{aligned} u_z &= u + z\vartheta \\ v_z &= v + z\psi \\ w_z &= w \end{aligned} \quad (4.38)$$

Poměrné prodloužení  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  střední plochy ve směru  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  získáme jako rozdíl délek oblouků před a po deformaci. Délka oblouku před deformací má hodnotu  $ds_\alpha = A d\alpha$  a po deformaci  $ds'_\alpha = A' d\alpha$ .

Poměrné prodloužení bude rovno

$$\varepsilon_1 = \frac{ds'_\alpha - ds_\alpha}{ds_\alpha} = \frac{A'd\alpha - Ad\alpha}{Ad\alpha} = \frac{A'}{A} - 1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} \quad (4.39)$$

Analogicky bychom získali poměrné prodloužení  $\varepsilon_2$  ve směru  $\vec{e}_2$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} \quad (4.40)$$

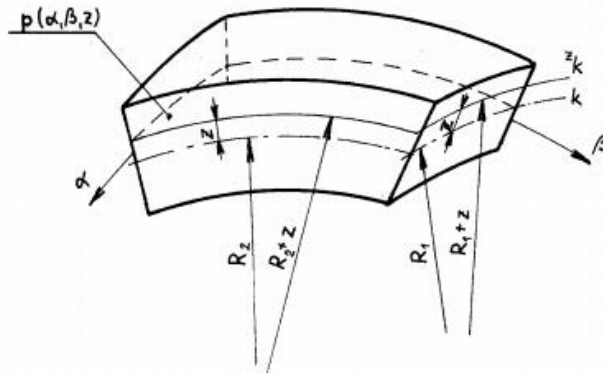
Zkos střednicové plochy po deformaci vypočítáme následovně. Původně pravý úhel, který svírá vektory  $\vec{e}_1$  a  $\vec{e}_2$  se změní o hodnoty  $\gamma_1, \gamma_2$ . Pro zkos  $\gamma_{12}$  platí

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 \cong \sin(\gamma_1 + \gamma_2) = \cos(90^\circ - (\gamma_1 + \gamma_2)) \quad (4.41)$$

Jednotkové vektory  $e'_1, e'_2$  mají skalární součin  $e' \cdot e' = \cos(90^\circ - (\gamma_1 + \gamma_2))$ , z toho plyne, že skos je roven právě tomuto součinu. Dosadíme-li z rovnic (4.32), (4.33) do  $\gamma_{12} = e'_1 \cdot e'_2$  a zanedbáme-li členy s vyššími stupni derivace, získáme námi hledaný vztah pro zkos střední plochy po deformaci

$$\gamma_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \quad (4.42)$$

Pro deformaci ekvidistantní plochy budou formálně platit stejné vztahy, jako pro deformaci střední plochy. Pouze musíme zohlednit její odlehlost. Na obr. 69 je zobrazena plocha  $P$ , která je od střední plochy vzdálena o souřadnici  $z$ .



Obr. 4.9 Ekvidistantní plocha [27]

Pro křivky  $k$  a  $k_z$ , platí vztah podobnosti

$$\frac{R_1 + z}{R_1} = 1 + \frac{z}{R_1} \quad (4.43)$$

Pro Lamého parametr a poloměr křivosti plochy potom platí tyto vztahy

$$\begin{aligned} A_z &= A \left( 1 + \frac{z}{R_1} \right) & R_1^z &= R_1 + z \\ B_z &= B \left( 1 + \frac{z}{R_2} \right) & R_2^z &= R_2 + z \end{aligned} \quad (4.44)$$

Abychom vyjádřili hodnoty zkosů a deformací pro odlehlou plochu, využijeme již odvozených vzorců. Musíme jen dávat pozor, abychom dosazovali správné veličiny pro ekvidistantní plochu, které byly v předchozím textu odvozeny. Pro ilustraci zde bude odvozeno poměrné prodloužení  $\varepsilon_1^z$ , ostatní veličiny budou pouze vypsány v tabulce.

$$\varepsilon_1^z = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial(u_z)}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} (v_z) + \frac{w_z}{R_1} \right] \quad (4.45)$$

Dosazením z rovnic (4.38) do rovnice (4.45) a jejich zjednodušením získáme hledaný výraz

$$\varepsilon_1^z = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} (\varepsilon_1 + z\kappa_1) \quad (4.46)$$

kde

$$\kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} \psi$$

V následující tabulce jsou přehledně uvedeny rovnice pro výpočet deformace a zkosů v ekvidistantní rovině od střední roviny.

Tab. 4.2 Rovnice pro výpočet deformace a zkosů v ekvidistantní rovině od střední plochy

$\varepsilon_1^z = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} (\varepsilon_1 + z\kappa_1)$	
$\varepsilon_2^z = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} (\varepsilon_2 + z\kappa_2)$	
$\gamma_{12}^z = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left[ \gamma_{12} + \left( 2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{z}{2} + 1 \right) z\kappa_{12} \right]$	
$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} v + \frac{w}{R_1}$	$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} u + \frac{w}{R_2}$
$\gamma_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{v}{B} \right)$	
$\kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} \psi$	$\kappa_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \mathcal{G}$
$\kappa_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} \mathcal{G} + \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} v \right) \frac{1}{R_1}$	
$\mathcal{G} = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}$	$\psi = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}$

#### 4.3.1.2 Fyzikální vztahy mezi deformacemi a vnitřními silovými účinky

U tenkostěnných skořepin předpokládáme rovinnou napjatost. Pro určení fyzikálních závislostí můžeme vyjít z rozšířeného Hookeova zákona. Pro napětí v obecném bodě skořepiny dostáváme vztahy:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^z + \nu \varepsilon_2^z) \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2^z + \nu \varepsilon_1^z) \\ \tau_{12} &= G\gamma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{12}^z\end{aligned}\quad (4.47)$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti materiálu a  $\nu$  je Poissonovo číslo. Abychom zjistili napětí  $\sigma_1$ , musíme do rovnice (4.47) dosadit vztahy z Tab. 4.2. (deformace v ekvidistantních rovinách) Hledaný výraz bude mít tvar

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{1+\frac{z}{R_1}} (\varepsilon_1 + z\kappa_1) + \frac{1}{1+\frac{z}{R_2}} (\varepsilon_2 + z\kappa_2) \right] \quad (4.48)$$

Vnitřní normálová síla bude mít tvar

$$N_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{1+\frac{z}{R_2}}{1+\frac{z}{R_1}} (\varepsilon_1 + z\kappa_1) + \nu (\varepsilon_2 + z\kappa_2) \right) dz \quad (4.49)$$

Předpokládáme tenkostěnné skořepiny a z toho důvodu zanedbáme poměr  $\frac{z}{R_1} \left( \frac{z}{R_2} \right)$ . Nyní získáme zjednodušené vyjádření vnitřní síly  $N_1$  jako

$$N_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) + z(\kappa_1 + \nu \kappa_2) \right) dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \quad (4.50)$$

Obdobným způsobem určíme i ostatní silové a momentové složky napjatosti skořepiny. Přehled uvádí tabulka Tab. 4.3.

Tab. 4.3 Vnitřní silové účinky v elementu skořepiny

$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)$	$N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)$
$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu \kappa_2)$	$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu \kappa_1)$
$S_{12} = S_{21} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{12}$	
$M_{12} = M_{21} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \kappa_{12}$	

Tímto jsme odvodili pomocí matematického přístupu teorii pro obecné skořepiny. V následující kapitole si ukážeme, jak vypadají příslušné rovnice pro náš problém trubice s excentrickým vyosením vnitřního válce.



## 4.4 Skořepinová teorie – excentrická válcová trubice

Rovnice určíme na základě již odvozených vztahů. Nejprve musíme určit střední plochu našeho geometrického útvaru. Střední plocha je definována jako oblast, která dělí tloušťku stěny skořepiny na poloviny. V našem případě tuto podmínku splňuje válec. Na Obr. 4.10 je zobrazen čelní pohled na excentrickou trubici. Čárkovaně je vyznačena střední kružnice, která má poloměr

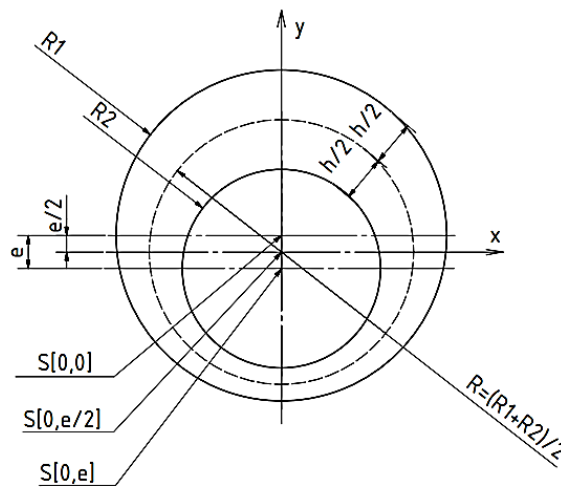
$$\frac{R_1 + R_2}{2} \text{ a její počátek je v } S\left[0, \frac{e}{2}\right].$$

Dle článku [33] je možno určit měnící se tloušťku trubice po obvodu vztahem

$$\begin{aligned} h &= h_0 + h_1 e \\ h_1 &= -\cos \theta \end{aligned} \quad (4.51)$$

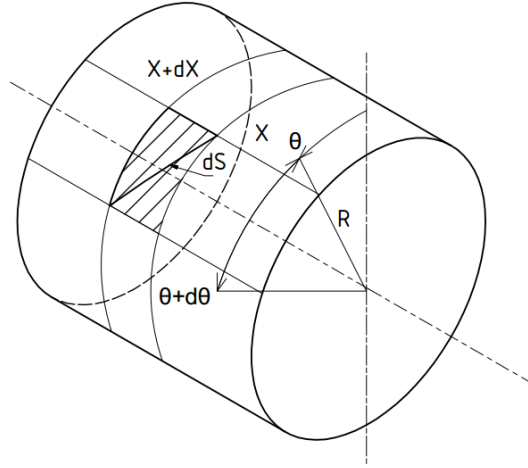
kde  $h$  je celková tloušťka v závislosti na úhlové souřadnici  $\theta$ ,  $e$  je excentricita vnitřního válce a  $h_0$  je tloušťka koncentrického válce. (Obr. 4.10). V rovnicích z Tab. 4.3 vnitřních silových účinků se vyskytuje třetí mocnina  $h$ , pokud provedeme umocnění a zanedbáme složky, které budou malé, dostaneme vztah

$$h^3 = h_0^3 + 3h_0^2 h_1 e \quad (4.52)$$



Obr. 4.10 Čelní pohled na excentrickou trubici

Pro popis povrchu válce zavedeme nové křivočaré souřadnice, kde je  $\alpha = x$  a  $\beta = \theta$  (cylindrické souřadnice).



Obr. 4.11 Střední plocha excentricky vyosené trubice

Uvažujme element, který je vytčený řezy  $x, x + dx$  a  $\theta, \theta + d\theta$ . Nyní odvodíme první kvadratickou formu povrchu, při čemž budeme vycházet z rovnice (4.15). Vztah dostaneme ve tvaru

$$ds^2 = dx^2 + R^2 d\theta^2 \quad (4.53)$$

kde  $R$  označuje druhou hlavní křivost, první hlavní křivost je rovna  $\infty$ . Z rovnic (4.16) určíme Lámeho konstanty:  $A=1, B=R$ .

Fyzikální rovnice z Tab. 4.3 budou mít po dosazení kinematických vztahů z Tab. 4.2 Rovnice pro výpočet deformace a zkosů v ekvidistantní rovině od střední plochy tvar:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R} \right) \right) \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) \right) \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \\ S_{12} = S_{21} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ M_{12} = M_{21} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left( -\frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Tímto byly odvozené vztahy pro výpočet vnitřních silových účinků na střední ploše skořepiny. Následným dosazením (4.51) a (4.52) do fyzikálních rovnic (4.54) získáme rovnice ve tvaru, jehož princip nalezení bude demonstrován například na tahové síle

$$N_1 = N_{10} + N_{11}e \quad (4.55)$$

kde

$$N_{10} = \frac{Eh_0}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{w_0}{R} \right) \right)$$

$$N_{11} = \frac{Eh_0}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{w_1}{R} \right) \right) + \frac{Eh_1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{w_0}{R} \right) \right)$$

Tímto způsobem jsou odvozené i další vnitřní účinky ve skořepině, důkaz odvození je možný najít v [33].

Pro posuvy  $u, v$  a w platí následující vztahy

$$u = u_0 + u_1 e \quad v = v_0 + v_1 e \quad w = w_0 + w_1 e \quad (4.56)$$

Přistoupíme k odvození rovnic rovnováhy pro válcovou střední plochu. Využijeme již odvozených rovnic (4.24) a (4.27), do kterých dosadíme hodnoty Lamého konstant a nahradíme křivočaré souřadnice  $\alpha, \beta$ , po úpravách dostáváme rovnice rovnováhy ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{21}}{\partial \theta} + p_1 &= 0 \\ \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{Q_2}{R} + p_2 &= 0 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - \frac{N_2}{R} + p_3 &= 0 \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - Q_2 &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta} - Q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Z posledních dvou rovnic vyjádříme  $Q_1$  a  $Q_2$  a dosadíme do prvních třech vztahů, dostáváme 3 rovnice rovnováhy pro 6 neznámých a to ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{21}}{\partial \theta} + p_1 &= 0 \\ \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + p_2 &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{12}}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} - \frac{N_2}{R} + p_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Tímto byly odvozené vztahy pro výpočet vnitřních silových účinků na střední ploše skořepiny.

Po dosazení upravených složek vnitřních silových účinků, jehož princip je vysvětlen na (4.55) do rovnic (4.58) a provedením derivací, dostaneme konečný tvar rovnic rovnováhy pro náš excentrický případ:

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{Eh_0}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} \right) \right) \right) + \\ & + \frac{Eh_0}{1-\nu^2} e \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{Eh_0}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \theta} \right) \right) \right) + \\ & + \frac{Eh_1}{1-\nu^2} e \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{Eh_1}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} \right) \right) \right) + p_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh_0}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + \\
& \frac{1}{R} \frac{Eh_0}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} D_0 \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta \partial x^2} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{R^2} D_0 \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3} \right) + \nu \left( -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right) + \\
& + \frac{Eh_1}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + \\
& + \frac{1}{R} \frac{Eh_1}{1-\nu^2} e \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} D_1 \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta \partial x^2} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{R^2} D_1 e \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3} \right) + \nu \left( -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right) + \\
& + \frac{Eh_0}{2(1+\nu)} e \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) + \\
& \frac{1}{R} \frac{Eh_0}{1-\nu^2} e \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w_1}{R \partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} D_0 \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta \partial x^2} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{R^2} D_0 e \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta^3} \right) + \nu \left( -\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right) + p_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
& D_0 \left( -\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \nu \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^2 \partial x^2} \right) \right) \right) + \\
& + 2 \left( D_0 \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{R^2} \left( D_0 \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} \right) \right) + \nu \left( -\frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^2 \partial x^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{Eh_0}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{w_0}{R} \right) \right) \right) + \\
& + D_1 e \left( -\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \nu \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^2 \partial x^2} \right) \right) \right) + 2e \left( D_1 \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{R^2} \left( D_1 \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} \right) \right) + \nu \left( -\frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^2 \partial x^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{Eh_1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{w_0}{R} \right) \right) \right) + \\
& + D_0 e \left( -\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \nu \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial \theta \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial \theta^2 \partial x^2} \right) \right) \right) + \\
& + 2e \left( D_0 \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{R^2} e \left( D_0 \left( -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial \theta^4} \right) \right) + \nu \left( -\frac{\partial^4 w_1}{\partial \theta^2 \partial x^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{Eh_0}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{w_1}{R} \right) \right) \right) + \\
& + p_3 = 0
\end{aligned}$$

Posledním bodem, co je nutné provést před analytickým vyřešením úlohy, je stanovení okrajových podmínek. Vzhledem k tomu, že je excentrická trubice v mé práci vetknutá (podobně, jako v práci [33]), jsou zvoleny okrajové podmínky na obou stranách trubice následovně:

$$\begin{aligned} w_0 = v_0 = w_1 = v_1 &= 0 \\ \frac{dw_0}{dx} = \frac{dw_1}{dx} &= 0 \\ \frac{du_0}{dx} = \frac{du_1}{dx} &= 0 \end{aligned} \tag{4.60}$$

To znamená, že jsou zamezeny posuvy trubice na obou jejích koncích.

Na základě postupu řešení z článku [33], jsem se pokusila o analytické vyřešení odvozených parciálních diferenciálních rovnic. Materiál, ze kterého jsem čerpala, byl ve špatné tiskové kvalitě. Je možné, že jsem některé proměnné nesprávně identifikovala a vlivem toho byly výsledky, které vycházely, fyzikálně nesmyslné.

Rovnice je možné řešit numerickými metodami, jako jsou například metoda sítí, Ritzova metoda, či Galerkinova metoda. Já jsem se rozhodla tuto úlohu řešit metodou konečných prvků. Pro analýzu byly zvoleny předem definované geometrie se zvolenými okrajovými podmínkami.

## 5 Nelineární mechanika kontinua

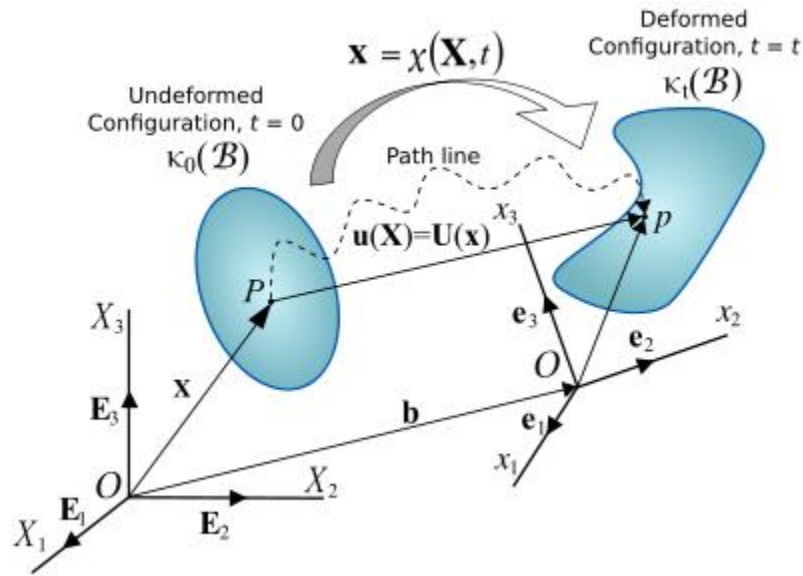
Následující část práce se věnuje nelineární oblasti mechaniky kontinua, kde jsou deformace natolik veliké, že zde již není platnost Hookeova zákona.

Nelinearita, se obecně rozděluje do dvou skupin. Rozlišujeme[27]:

- 1) Geometrickou nelinearitu
- 2) Materiálovou nelinearitu

### 5.1 Kinematika konečných deformací [29]

Deformaci tělesa můžeme popisovat vzhledem k jeho **počátečnímu (referenčnímu) stavu**, pak tento popis označujeme jako **materiálový (Lagrangeovský)**, nebo vzhledem k **průběžnému (zdeformovanému) stavu**, a potom mluvíme o **prostorovém (Eulerovském) popisu**.



Obr. 5.1 Popis materiálových a prostorových sořadnic [30]

Na Obr. 5.1 vidíme těleso, které se nachází v čase  $t = 0$  v počáteční konfiguraci  $\kappa_0$  a v čase  $t$  se nachází v průběžné konfiguraci  $\kappa_t$ . Celé těleso je složeno z materiálových částic (bodů), jejich poloha může být popsána materiálovým popisem  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X_1, X_2, X_3, t)$  nebo prostorovým popisem  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, t)$ . Posunutí bodu tělesa je v materiálovém popisu definováno jako

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (5.1)$$

**Streč** je veličina definovaná jako poměr délky elementu po deformaci, vůči délce elementu před deformací.

$$\lambda = \frac{L_0 + \Delta L}{L_0} = 1 + \varepsilon \quad (5.2)$$

$\varepsilon$  je poměrné prodloužení délek elementu.

**Deformační gradient F** popisuje důsledky pohybu tělesa. Jedná se o operátor, který převádí počáteční polohový stav tělesa do zdeformované konfigurace.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.3)$$

Deformační gradient je tenzor druhého řádu a ve složkovém tvaru ho lze zapsat

$$F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \quad i, K \in \{1, 2, 3\} \quad (5.4)$$

Pomocí deformačního gradientu lze vyjádřit změnu objemu tělesa

$$\det \mathbf{F} = J \quad \text{kde } J = \frac{dV}{dv} \quad (5.5)$$

$J$  označuje Jakobián,  $dv$  objem elementárního elementu po deformaci a  $dV$  před deformací. **Pro nestlačitelné materiály platí, že Jakobián je roven jedné, pro ostatní materiálové modely je vždy větší než nula.**

Deformační gradient nese komplexní informaci o deformaci, což znamená, že zahrnuje změny délek elementu kontinua, ale také jeho natočení.

Rozklad deformačního gradientu na streče a rotace vypadá následovně

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R} \quad (5.6)$$

kde  $\mathbf{U}$  se nazývá pravý tenzor strečů,  $\mathbf{v}$  levý tenzor strečů a  $\mathbf{R}$  označuje ortogonální tenzor rotace. Součinu  $\mathbf{R}\mathbf{U}$  odpovídá pořadí pohybů takové, že nejprve dochází ke strečování a poté k rotaci elementu, v případě  $\mathbf{v}\mathbf{R}$  je pořadí operací opačné. Rozklad lze provést na základě věty o polárním rozkladu nesingulární matice.

V nelineární mechanice jsou odvozeny další míry deformace, definované pomocí deformačního gradientu:

**Pravý Cauchyův-Greenův tenzor deformace**

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (5.7)$$

**Levý Cauchyův-Greenův tenzor deformace**

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{v}^2 \quad (5.8)$$

**Green-Lagrangeův tenzor deformace**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (5.9)$$

kde  $\mathbf{I}$  označuje jednotkovou matici.

**Materiálový logaritmický tenzor deformace (Henckyho)**

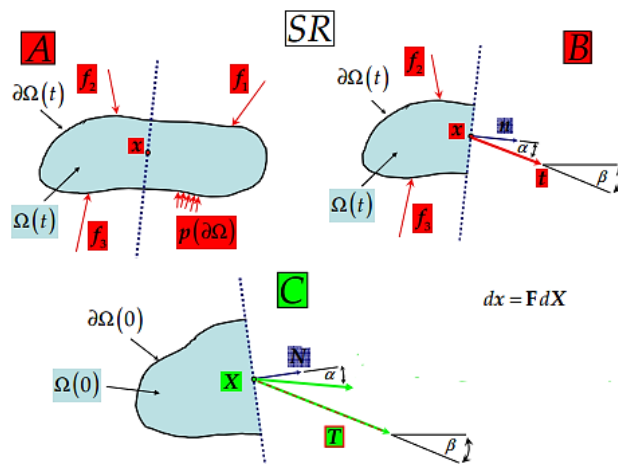
$$\mathbf{h} = \ln \mathbf{U} \quad (5.10)$$

Důležitou vlastností tenzorů deformace ( $\mathbf{C}, \mathbf{b}$ ) jsou invarianty

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right] \\ I_3 &= \det \mathbf{C} \end{aligned} \quad (5.11)$$

## 5.2 Tenzor napětí [29]

Na Obr. 5.2-A vidíme těleso, které se nachází v čase  $t$  v průběžné (zdeformované) konfiguraci  $\Omega(t)$  a působí na něj vnější silové zatížení.



Obr. 5.2 Těleso v referenční a zdeformované konfiguraci [29]

Těleso rozdělíme myšleným řezem. Zavedením silové dvojice do oblasti řezu zajistíme silovou rovnováhu. Věnujme pozornost materiálovému bodu  $x$  v rovině řezu, na elementární plošce  $ds$ . Tato plocha má vnější normálový vektor  $\mathbf{n}$ . K silovému vektoru  $d\mathbf{f}$  můžeme zavést vektor plošné intenzity sil  $\mathbf{t}$  - **skutečný (Cauchyův)**. Silové působení na této plošce potom bude rovno  $d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds$ . Při platnosti lineární transformace

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n} \quad (5.12)$$

nazýváme  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  **Cauchyovým napětím**.

Při přesunu z referenční do průběžné konfigurace existuje deformační gradient. Pomocí inverze tohoto operátoru se můžeme dostat i zpět do počáteční konfigurace Obr. 5.2-C. Zde můžeme na elementární původní (nezdeformované) plošce v okolí bodu  $X$ , definovat **nominální (první Piola-Kirchhoffovo)** intenzitu vnitřních sil  $\mathbf{T}$ . Vektor intenzity vnitřních sil v nezdeformované konfiguraci získáme lineární transformací

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{N})\mathbf{N} \quad (5.13)$$

kde  $\mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{N})$  nazýváme **nominální (smluvní, první Piola-Kirchhoffovo) napětí**. Pomocí deformačního gradientu lze toto napětí vyjádřit jako

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (5.14)$$

Dalším v mechanice kontinua často užívaným tenzorem napětí je **druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí**

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (5.15)$$

### 5.3 Konstitutivní modelování – hyperelasticita [29]

Konstitutivní modelování představuje nástroj, díky kterému jsme schopni matematicky vyjádřit vzájemný vztah mezi (stavovými) veličinami popisující materiál.

Hyperelasticita

Hyperelastický materiál, jak název sám napovídá, je elastický a nemaří se v něm energie. Vykazuje velké deformace a existuje nelineární závislost mezi deformací a napětím. Pro popis tohoto materiálu se využívá existence potenciálové funkce - hustoty deformační energie  $W$ , která je funkcí deformačního gradientu  $W = W(\mathbf{F})$ .

Smluvní napětí je definováno jako

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (5.16)$$

**Nestačitelný, izotropní hyperelastický materiál** vykazuje isochorické chování, což znamená, že se během zatěžování nemění objem tělesa. Tato skutečnost je zohledněna v rovnici pro výpočet smluvního napětí

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-T} \quad (5.17)$$

kde  $p$  je Lagrangeův multiplikátor. Jeho hodnota je určena z okrajových podmínek úlohy. Pro zdeformovanou konfiguraci je zavedeno skutečné napětí



$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I} \quad (5.18)$$

Pro izotropní materiál platí, že hustota deformační energie, není závislá na rotaci systému. To znamená, že  $W$  je invariantní.

## 6 Simulace pomocí metody konečných prvků

Vliv obvodové proměnlivosti tloušťky trubice na její napjatost a deformaci byl vyhodnocován pomocí konečně prvkových simulací v softwaru ABAQUS od firmy Dassault systemes. Následně byla data zpracovávána v programu Maple 16.

### 6.1 Software Abaqus

Program ABAQUS je výpočtový program, který je určen k řešení různých fyzikálních problémů definovaných ve spojitém prostředí (kontinuu). Kromě mechanických úloh se může jednat o úlohy termomechanické, elektromagnetické, akustické a další. Tento program hledá řešení okrajové úlohy pomocí metody konečných prvků. Metoda konečných prvků je založena na diskretizaci spojitého prostředí pomocí elementů, v nichž je aproximována hledaná hodnota fyzikální veličiny na základě principu minima potenciální energie.

#### Tvorba simulací v Abaqusu [31]

Abaqus obsahuje moduly, díky nimž je možné vytvořit model, přiřadit mu materiálové parametry, provést výpočtové analýzy a následně získat data z těchto analýz. Práci v tomto programu je možné rozdělit do třech kroků.

##### 1) *Preprocessing*

V této části je definována modelovaná úloha. Jsou zde určeny geometrické rozměry součásti, dále jí jsou přiřazeny materiálové parametry, zatížení, okrajové podmínky modelované úlohy a podobně. Do tohoto kroku patří také tvorba sítě.

##### 2) *Simulation*

V tomto kroku dochází k samotnému výpočtu úlohy. Výsledky simulací jsou ukládány do souborů, které se dostávají k uživateli následně v části zvané postprocessing.

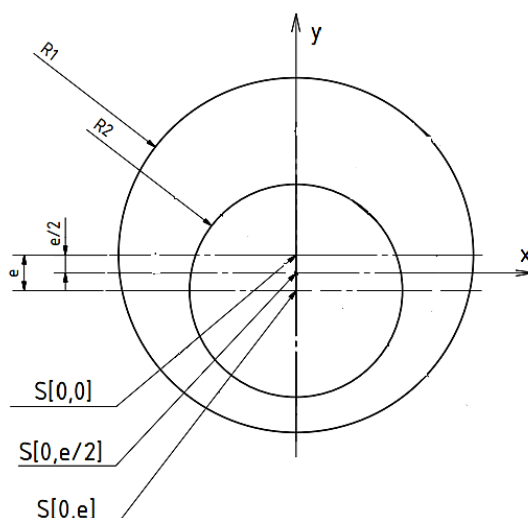
##### 3) *Postprocessing*

Závěrečná fáze vyhodnocování úlohy poskytuje uživateli přístup k výsledkům analýz. S těmito daty je možné dále pracovat, popřípadě je exportovat.

### 6.2 Model excentrické trubice

#### 1) *Geometrie trubice*

V modulu **Part** byla vytvořena geometrie excentrické trubice.



Obr. 6.1 Geometrie excentrické trubice

Na Obr. 6.1 vidíme její schématický náčrtek. Pro analýzu v oblasti lineární mechaniky byly zvoleny takové rozměry, aby vlivem geometrie nedocházelo k nelinearitám. Nejprve byly zvoleny rozměry:  $R1=1mm$ ,  $R2=0.9mm$  s excentricitami  $e=0.03mm$  a  $e=0.06mm$ . Tato geometrie spadá do oblasti tenkostěnných skořepin. U dalšího modelu byly rozměry pozměněny, a to tak, že  $R1=1mm$ ,  $R2=0.7mm$  pro  $e=0.2mm$ . Tato geometrie již částečně spadá do oblasti tlustostěnných skořepin. Cílem změny rozměrů bylo zvýraznit existenci ohybových napětí, které vlivem geometrie v modelu vznikají a jejich vliv na napjatost. Pro analýzu v nelineární oblasti mechaniky byl zvolen pouze jeden model a to  $R1=1mm$ ,  $R2=0.9mm$  pro  $e=0.03mm$ . Délka trubice je pro všechny modely stejná a to  $L=10mm$ . Mimo těchto hlavních modelů bylo v průběhu vyhodnocování vytvořeno ještě několik pomocných geometrií. Jednalo se zejména o modely s nulovou excentricitou, případně další excentrické modely.

## 2) Materiálové vlastnosti modelů

V modulu **Property** byly jednotlivým modelům přiděleny materiálové vlastnosti. Pro *lineární analýzu* byla zvolena hodnota Youngova modulu pružnosti  $E = 210GPa$  a hodnota Poissonova čísla  $\nu=0.3$  (tyto hodnoty odpovídají materiálovým charakteristikám oceli).

Pro *nelineární analýzu* byl zvolen model hustoty deformační energie typu Yeoh, pro hyperelastický materiál.

$$W = \sum_{i=1}^n c_{i0} (I_1 - 3)^i \quad \text{pro } n = 3 \quad (6.1)$$

Hodnoty materiálových konstant  $C_{i0}$  byly převzaty z článku [32] a jsou zaneseny v Tab. 6.1.

Tab. 6.1 Hodnoty materiálových konstant

	$C_{10}(\text{kPa})$	$C_{20}(\text{kPa})$	$C_{30}(\text{kPa})$
Hodnota	22	1461	1000

$I_1$  je hodnota prvního invariantu tenzoru deformace  $\mathbf{C}$ , který vyjádřený v hlavních poměrných protaženích má tento tvar

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (6.2)$$

Model je odvozen pro izotropní materiály.

### 3) Vytvoření sestavy

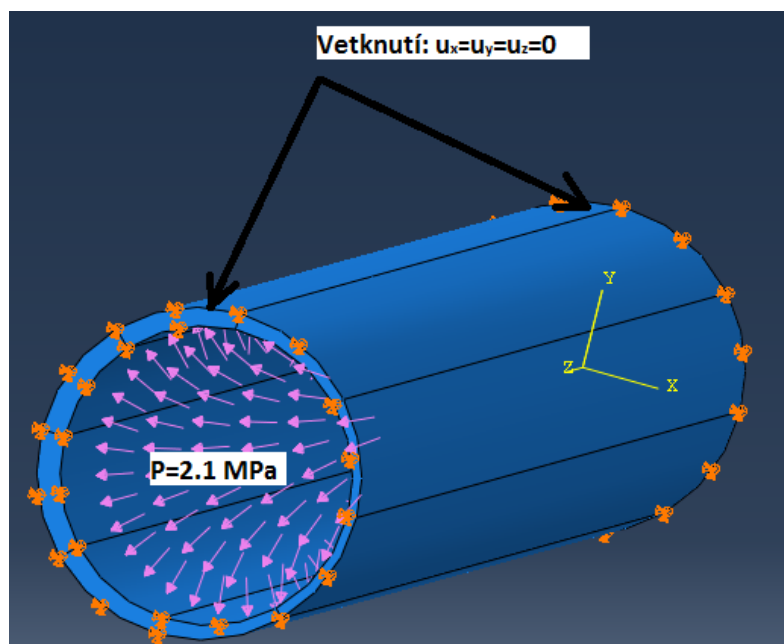
Přesto, že byla modelována pouze jedna entita, bylo nutné vytvořit z ní sestavu v modulu **Assembly**.

### 4) Volba typu úlohy

V modulu **Step** byl nastaven typ úlohy-statická. Byla zde provedena volba typu analýzy-lineární/nelineární. Také zde byla určena velikost inkrementu, pro lineární úlohy byl minimální inkrement  $10^{-5}$ , maximální 1 a počáteční 0.5. Pro nelineární úlohu byla nastavena minimální velikost inkrementu opět  $10^{-5}$ , maximální hodnota 0.2 a počáteční hodnota 0.05.

### 5) Zatížení a okrajové podmínky

V modulu **Load** byly zdefinovány okrajové podmínky. Oba konce trubice byly vetknuty, to znamená, že byla zavedena kinematická okrajová podmínka, kde posuvy do všech směrů os byly rovny nule ( $u_x = u_y = u_z = 0$ ).



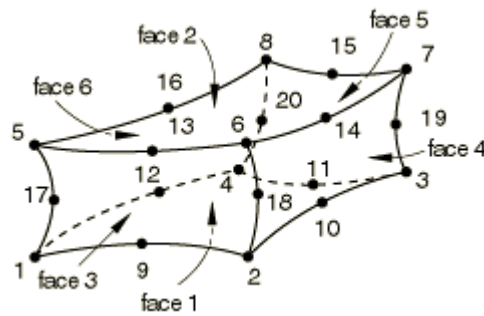
Obr. 6.2 Okrajové podmínky aplikované na model

Dále byl na vnitřní plochu válce aplikován zatěžovací tlak, pro lineární analýzu měl hodnotu  $P=2.1 \text{ MPa}$  a pro nelineární analýzu  $P=0.016 \text{ MPa}$ .

## 6) Tvorba sítě

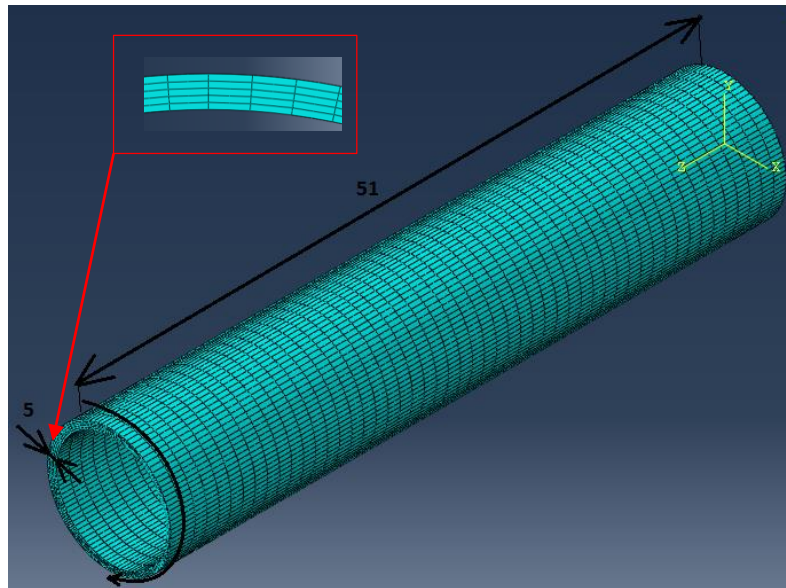
V modulu **Mesh** byla pro daný model vytvořena síť a byl zde zvolen typ elementů (C3D20H), kterými byla součást vysítována.

**Elementy C3D20H** jsou 3D objemové, dvacetiuzlové elementy, hybridního typu s plnou integrací. Tento druh elementů je vhodný jak pro lineární, tak také pro nelineární analýzu. Hybridní typ elementů se používá pro nestačitelné chování materiálů. Plná integrace byla zvolena pro vysokou přesnost výpočtu.



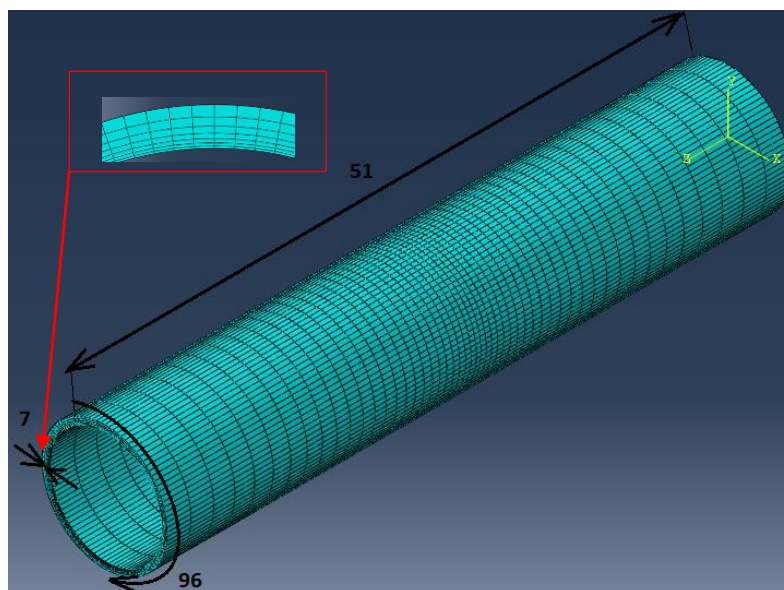
Obr. 6.3 Dvaceti uzlový element (C3D20H)[31]

Pro lineární model byla vytvořena síť (**Mesh**), která celkově čítala 24 480 elementů. Rozložení elementů v modelu bylo následující: po obvodu trubice bylo přiřazeno 96 elementů, po tloušťce 5 a po délce 51 elementů (Obr. 6.4). Elementy byly rozloženy rovnoměrně.



Obr. 6.4 Vysítování lineárního modelu

Pro nelineární model byla vytvořena síť, k jejíž stavbě byly také použity elementy C3D20H, ale jejich rozložení se od předchozího modelu lišilo. Celkově byl model síťován 34 272 elementy, z toho obvod trubice byl vysítován 96 elementy, tloušťka stěny 7 elementy a po délce bylo použito 51 elementů. Elementy byly zhuštěné do poloviny délky trubice. Také po tloušťce stěny byly elementy zhuštěné k jejímu vnitřnímu okraji. Cílem této bylo získat přesnější výsledky.



Obr. 6.5 Vysíťování nelineárního modelu

### 7) Výpočet a výsledky

Posledním bodem bylo spuštění výpočtu v modulu **Job**. Po proběhnutí výpočtu byly výsledky zobrazeny v modulu **Visualization**.

## 6.3 Výsledky simulací

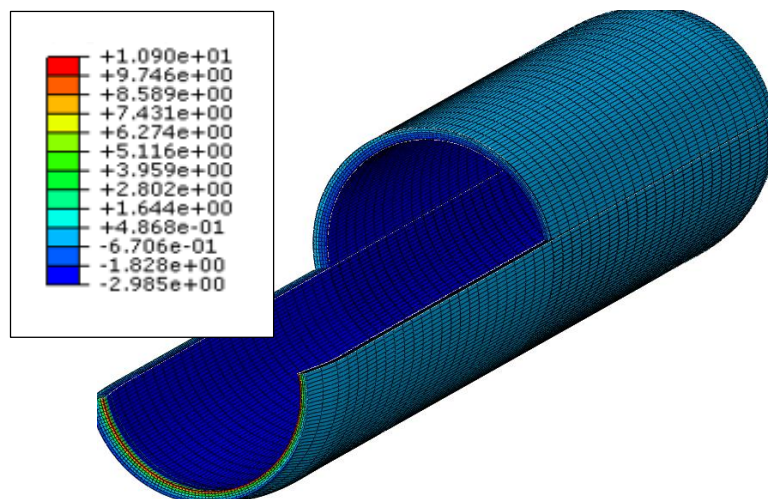
Výsledky simulací jsou zobrazovány v **cylickém souřadnicovém systému**. Délka modelu ( $L=10mm$ ), je dostatečně velká na to, aby napětí a deformace odečtené v polovině trubice nebyly ovlivněné vazbami. Podle literatury [28] se výpočtový model řadí do oblasti dlouhých skořepin.

### 6.3.1 Lineární analýza

**Model 1:  $R_1=1mm, R_2=0.9mm, e=0.03mm$**

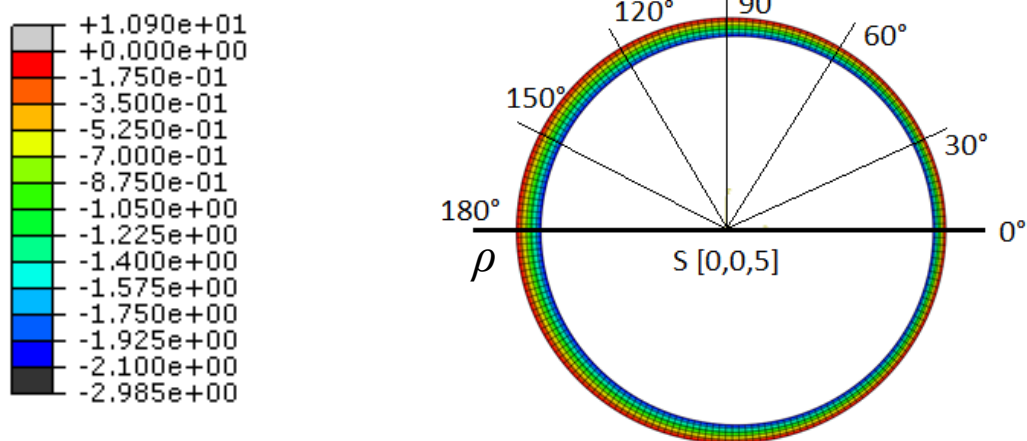
#### 1) Radiální napětí $\sigma_r$

Na Obr. 6.6 vidíme průběh radiálního napětí po celé délce trubice. Z obrázku je vidět, že napětí je největší v místech vazeb. Ovlivnění vazbami do oblasti vyhodnocení (tj. pro  $L=5mm$ ) nezasahuje. Z grafu je patrné, jak se trubice deformuje při zatížení, což je možné díky nastavení měřítka deformací 1:1000.

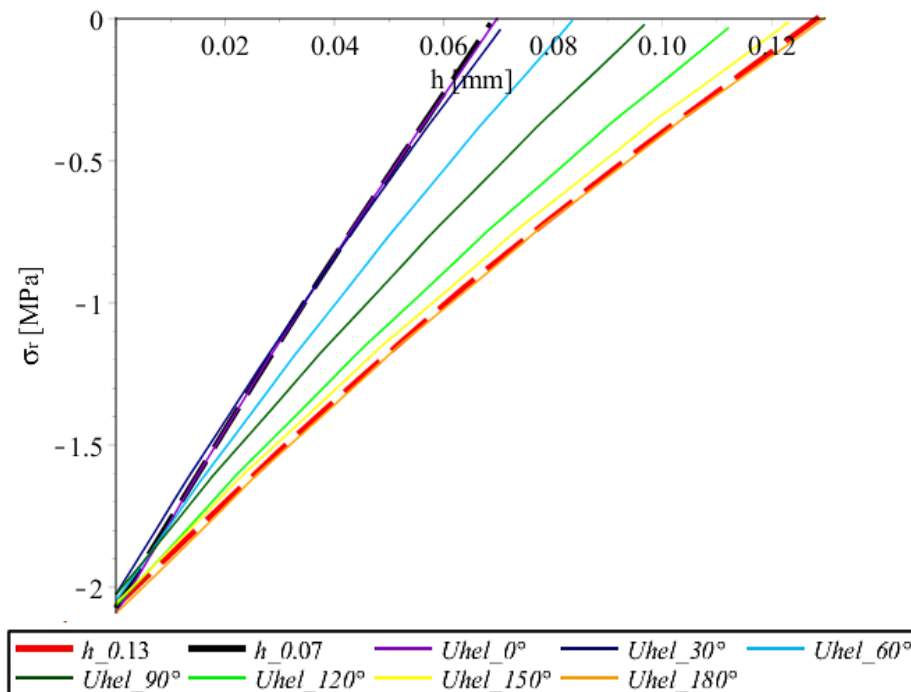


Obr. 6.6 Radiální napětí  $\sigma_r$  [MPa] v celé trubici – Model 1(měřítko deformací 1:1000)

Na Obr. 6.7 je zobrazen průřez stěnou trubice ve vzdálenosti  $L=5mm$ . Barevná zobrazovací škála byla upravena. Z grafu na Obr. 6.7 je zřejmé rozložení radiálního napětí po stěně. Umístění globálního cylindrického souřadnicového systému bylo voleno do středu vnějšího válce -  $S_{cyl}$  [0,0,5]. Pro průřezy v oblastech určených úhlovou souřadnicí byly vyneseny průběhy napětí po tloušťce stěny trubice. Trubice je symetrická podle roviny  $\rho$ , z toho důvodu postačí vyhodnocovat napětí pouze do  $180^\circ$ . Tohoto způsobu vyhodnocování bylo použito pro celou práci.



Obr. 6.7 Radiální napětí  $\sigma_r$  [MPa]



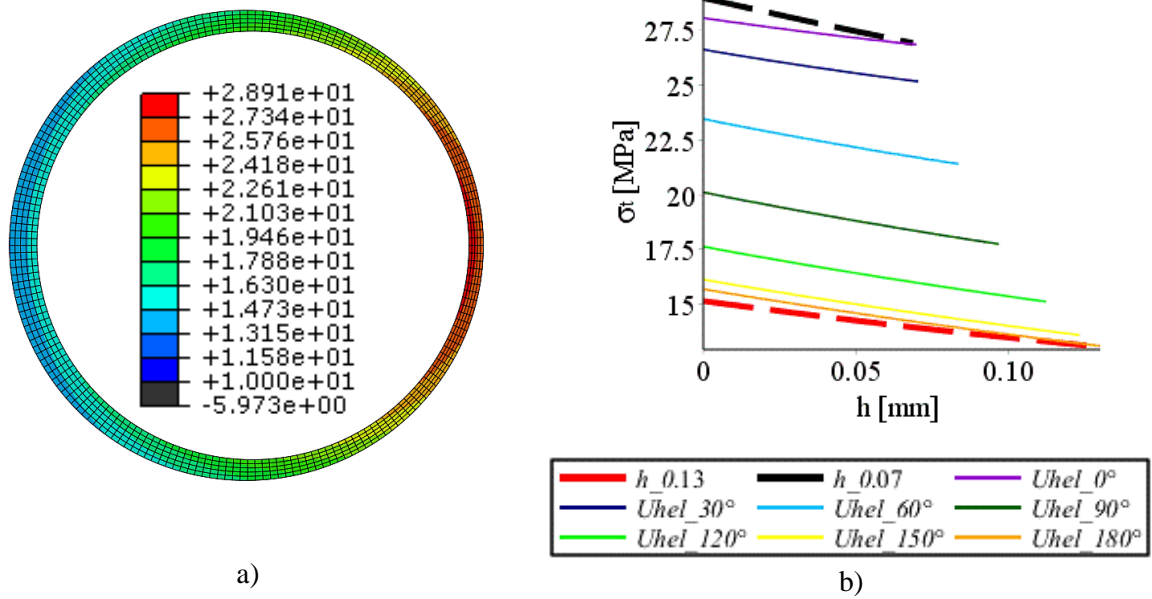
Obr. 6.8 Průběh radiálního napětí  $\sigma_r$  [MPa] v průřezech určených úhlovou souřadnicí

Na Obr. 6.8 vidíme průběh radiálního napětí po tloušťce stěny v závislosti na úhlu průřezu. V grafu jsou také vyneseny hodnoty radiálního napětí pro trubice, jejichž tloušťka stěny je konstantní po celém obvodu. Tyto trubice jsou vytvořeny s tloušťkami stěn  $h=0.13$  (hodnota odpovídá nejširší části stěny excentrické trubice) a  $h=0.07$  (oblast nejtenčí stěny excentrické trubice), v grafu jim přísluší tlusté čárkované křivky.

Vzhledem k tomu, že počátek souřadnicového systému při vyhodnocování byl určen ve středu vnější kružnice, z grafu se jeví přesnější splnění okrajových podmínek na vnějším poloměru válce. Kdybychom si určili střed globálního souřadnicového systému ve středu vnitřního (vyoseného) válce, okrajové podmínky by se z tahového grafu jevíly splněné na vnitřním poloměru válce. (tj. v  $h=0$ ). Obecně lze říci, že krajové podmínky pro naši úlohu jsou splněny.



2) Obvodové napětí  $\sigma_t$



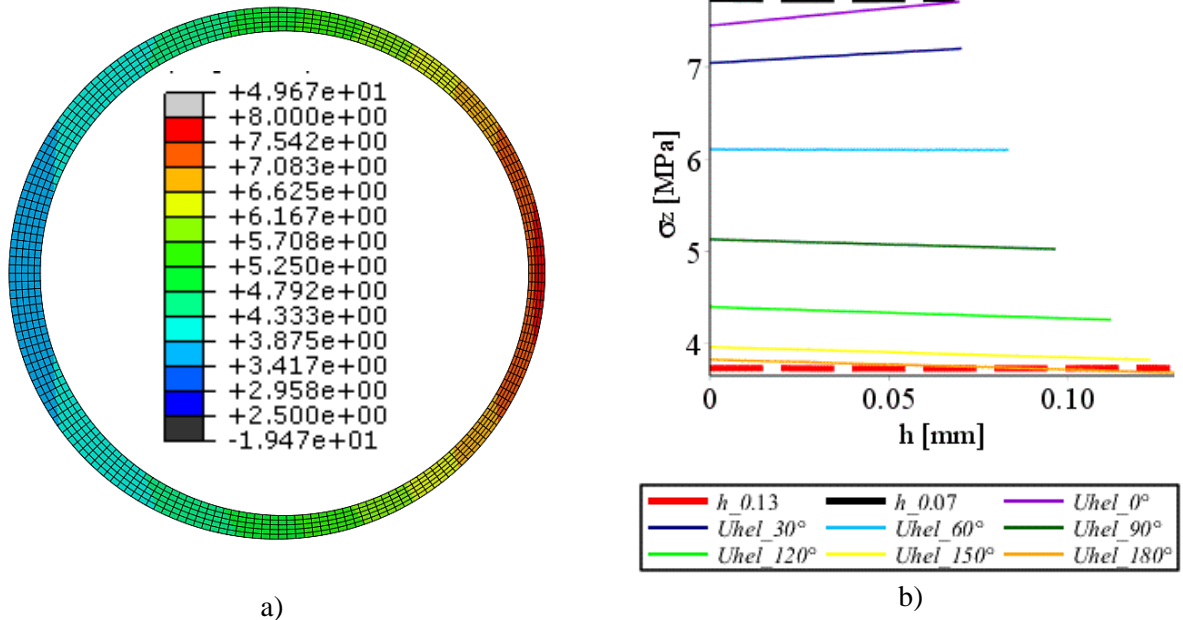
Obr. 6.9 a) Průběh obvodového napětí  $\sigma_t$  [MPa] ve stěně trubice

b) Průběh obvodového napětí  $\sigma_t$  [MPa] ve stěně v průřezích určených úhlovou souřadnicí

Na Obr. 6.9 a) je zobrazen graf průběhu obvodového napětí ve stěně excentrické trubice (pozice průřezu je opět v  $L=5mm$ ). Vidíme, že maximální hodnota obvodového napětí je v oblasti, kde je stěna trubice nejtenčí. Naopak minimální hodnota je v místě nejširšího řezu. Obvodové napětí bylo vyhodnocováno také pro různé úhly řezu stěnou Obr. 6.9.b). V grafu jsou vyneseny i hodnoty pro trubice konstantní tloušťky (tučněji, čárkovaně).

### 3) Axiální napětí $\sigma_z$

Axiální napětí v našem modelu vzniká vlivem vetknutých konců trubice. Jeho průběh je zobrazen na Obr. 6.10 a). Průběh axiálního napětí ve stěně v závislosti na úhlové souřadnici zobrazuje Obr. 6.10 b).

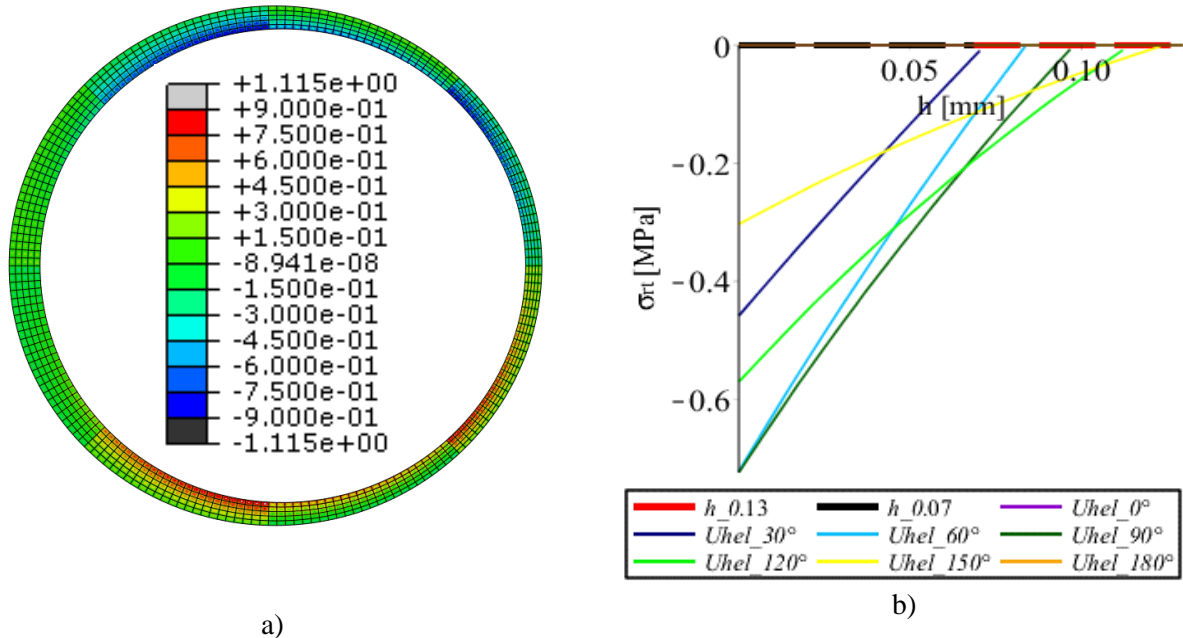


Obr. 6.10 a) Průběh axiálního napětí  $\sigma_z$  [MPa] ve stěně trubice

b) Průběh axiálního napětí  $\sigma_z$  [MPa] ve stěně v průřezech určených úhlovou souřadnicí

4) *Smykové napětí  $\sigma_r$*

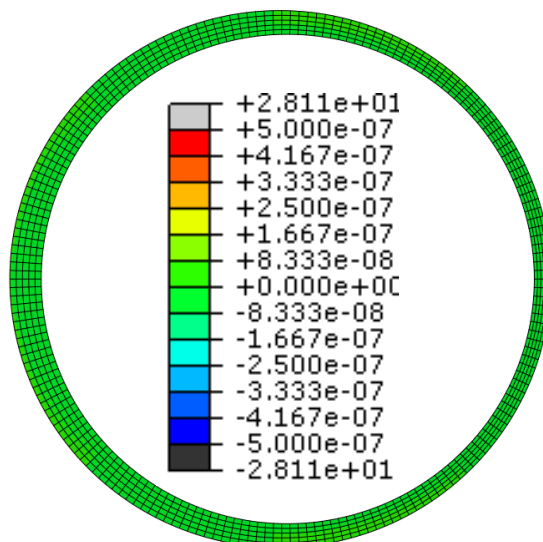
Výskyt smykového napětí  $\sigma_r$  je důkazem, že díky geometrii trubice dochází k ohybovým napětím. V koncentrické trubici je toto napětí nulové Obr. 6.11 a), b). Také pro průřezy v  $0^\circ$  a ve  $180^\circ$  je toto napětí nulové.



Obr. 6.11 a) Průběh smykového napětí  $\sigma_r$  [MPa] ve stěně trubice

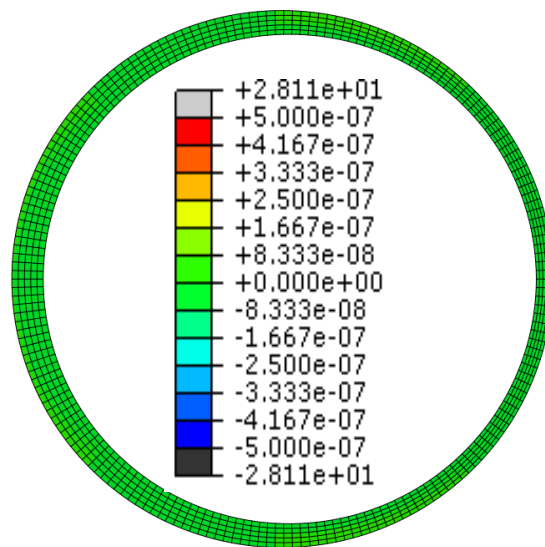
b) Průběh smykového napětí  $\sigma_r$  [MPa] ve stěně v průřezích určených úhlovou souřadnicí

5) *Smykové napětí  $\sigma_{rz}$*



Obr. 6.12 Průběh smykového napětí  $\sigma_{rz}$  [MPa] ve stěně trubice

6) Smykové napětí  $\sigma_{tz}$

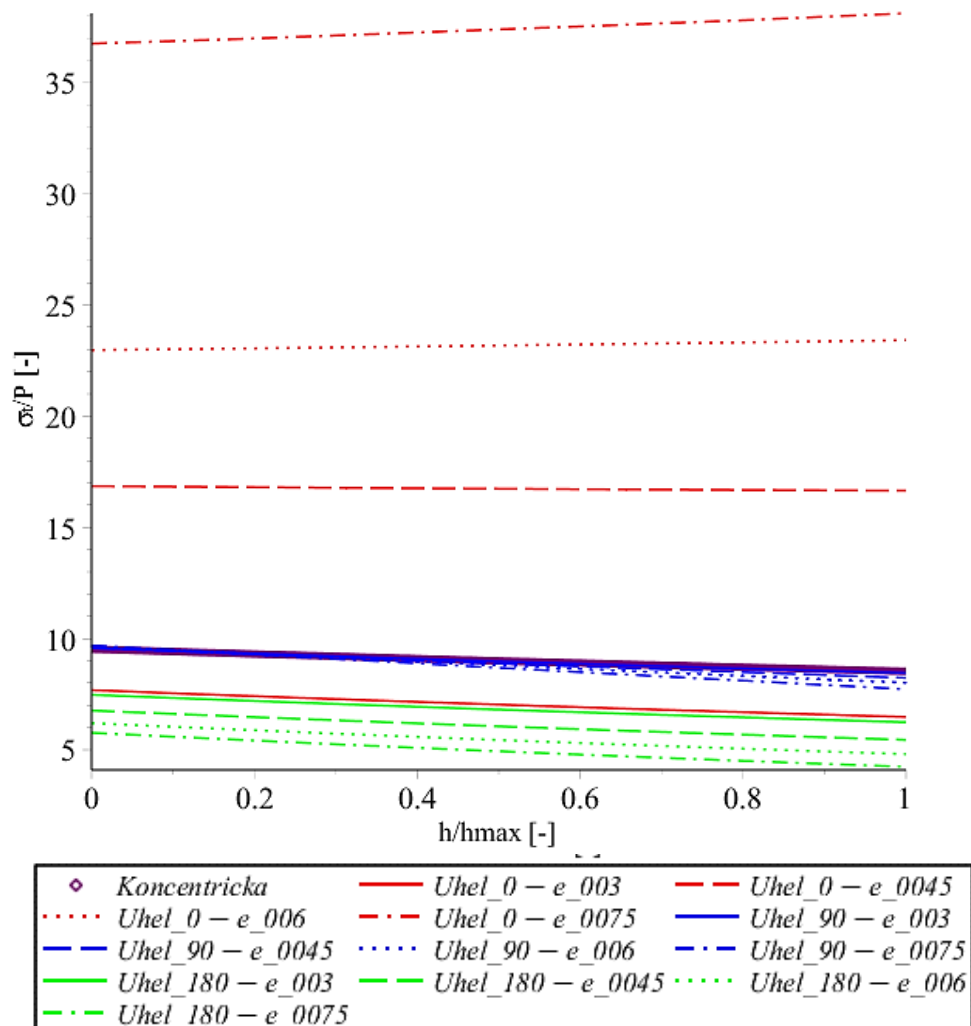


Obr. 6.13 Průběh smykového napětí  $\sigma_{tz}$  [MPa] ve stěně trubice

Velikost smykových napětí  $\sigma_{rz}$  a  $\sigma_{tz}$  je zanedbatelná.

### 6.3.2 Vliv excentricity na obvodové napětí $\sigma_t$

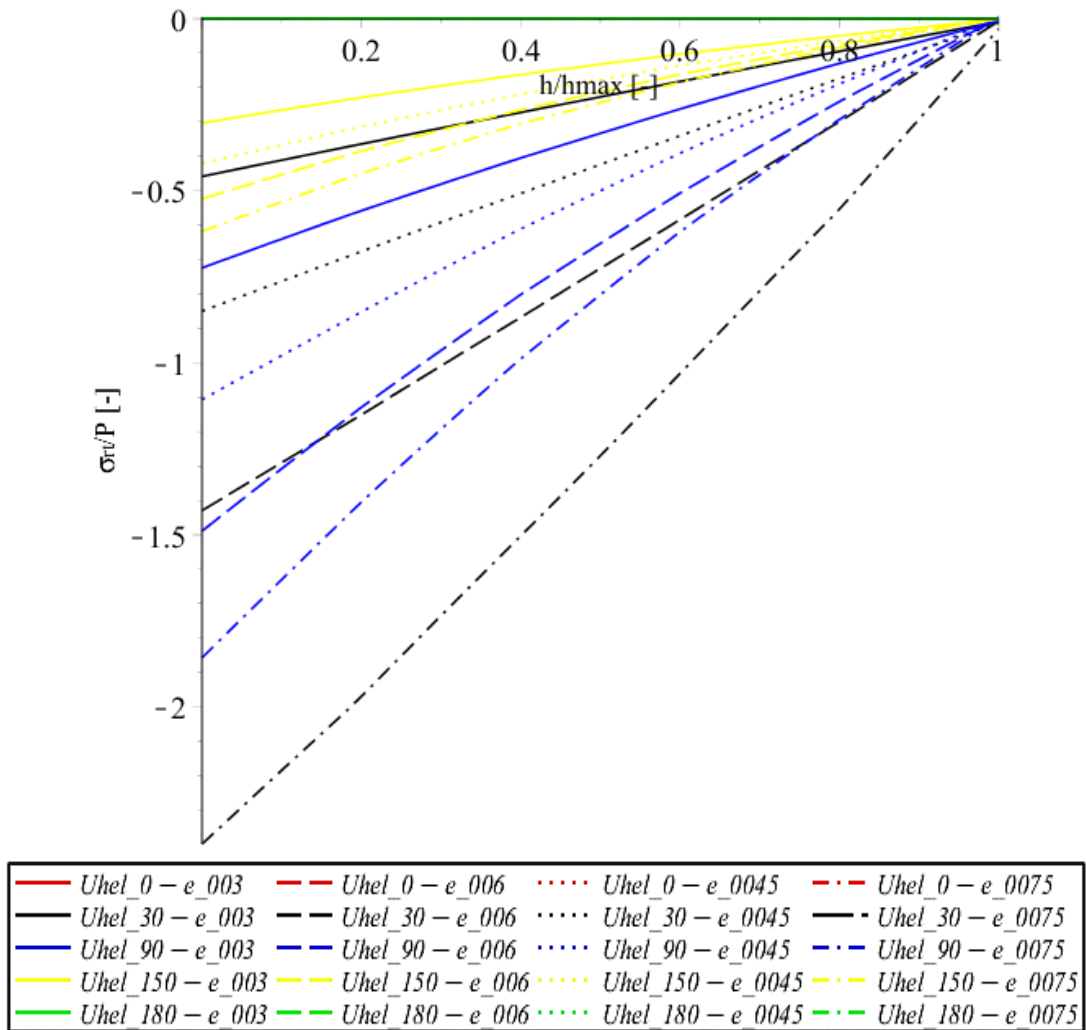
Vliv excentricity na obvodové napětí porovnáváme na geometrii  $R1=1mm$ ,  $R2=0.9mm$ . Volíme čtyři velikosti vyosení  $e = 0.03, 0.045, 0.06, 0.075$ . jak již bylo zmíněno dříve, rozměry volíme takové, aby nedocházelo vlivem geometrie k nelinearitám. Abychom mohli průběhy mezi sebou lépe porovnávat, musíme hodnoty znormovat. Způsob normování byl volen takto: obvodové napětí  $\sigma_t [MPa]$  je poděleno zatěžujícím tlakem  $P [MPa]$ , průběžná tloušťka stěny  $h [mm]$  je podělena maximální tloušťkou  $h_{max} [mm]$  daného řezu. Na Obr. 6.14 vidíme průběhy normovaných napětí. Napětí dosahuje nejvyšší hodnoty pro úhel řezu  $0^\circ$  a excentricitu  $e = 0.075$ . V tomto bodě je tloušťka nejtenčí. Tloušťka v řezu  $180^\circ$  se s přibývajícím excentricitou zvyšuje, zatímco na druhé straně průřezu (pro průřez v  $0^\circ$ ) tloušťka klesá. Tím pádem je napětí v místech, kde je tloušťka stěny vyšší, nižší, než v oblastech tenkého průřezu. Hodnota obvodového napětí v trubici s konstantní tloušťkou stěny ( $h=0.1mm$ ) odpovídá napětí v úhlu průřezu  $90^\circ$ .



Obr. 6.14 Vliv excentricity na velikost normovaného obvodového napětí  $\sigma_t/P [-]$

### 6.3.3 Vliv excentricity na smykové napětí $\sigma_{rt}$

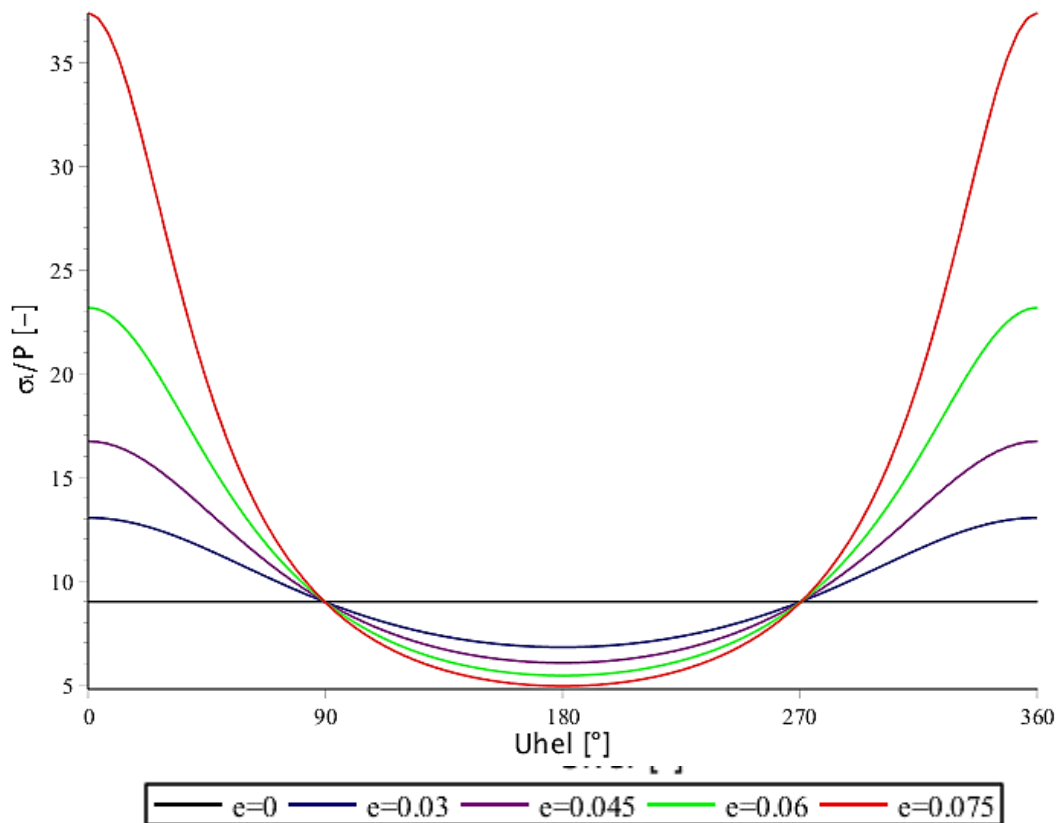
Na Obr. 6.15 vidíme normovaný průběh tečného napětí  $\sigma_{rt}/P$  [-] v závislosti na normované tloušťce stěny. Vidíme, že se hodnoty tohoto napětí v průřezu pro  $0^\circ$  a  $180^\circ$  jsou nulové, což je dáno osovou symetrií trubice. Následně je špička napětí nejvyšší pro úhel  $30^\circ$  s excentricitou 0.075, kde je tloušťka ze zbylých řezů (po vyloučení  $0^\circ$  a  $180^\circ$ ) nejtenčí. Hodnoty napětí pro další geometrie klesají, což je dáno tím, že plocha řezů se zvyšuje. Přetrvávajícím faktem je, že existence tohoto napětí je přisuzována ohybovým momentům v trubici vzniklých vlivem geometrie.



Obr. 6.15 Vliv excentricity na velikost smykového napětí  $\sigma_{rt}$

### 6.3.4 Ověření platnosti Laplaceovy rovnice

Na Obr. 6.16 je zobrazen průběh normovaného obvodového napětí v závislosti na obvodové souřadnici. Závislost byla vytvořena na středním poloměru, jenž prochází polovinou stěny. Vidíme, že s rostoucí excentricitou na jedné straně klesá tloušťka stěny trubice (úhel  $0^\circ$  popř.  $360^\circ$ ) a v těchto místech roste i napětí, oproti tomu v oblasti, kde roste tloušťka stěny vlivem excentricity (úhel  $180^\circ$  odpovídá maximální tloušťce) se maximální napětí snižuje. Černá přímka zobrazuje průběh normovaného napětí pro koncentrickou trubici. Vidíme, že všechny průběhy mají společný průsečík pro obvodové souřadnice  $90^\circ$  a  $270^\circ$ . Z toho vyplývá, že v těchto místech i při změně excentricity zůstává tloušťka stěly konstantní a je rovna  $0.1\text{mm}$ .



Obr. 6.16 Průběh normovaného obvodového napětí  $\frac{\sigma_t}{P}[-]$  po třídnicí v závislosti na obvodové souřadnici pro rozdílné excentricity

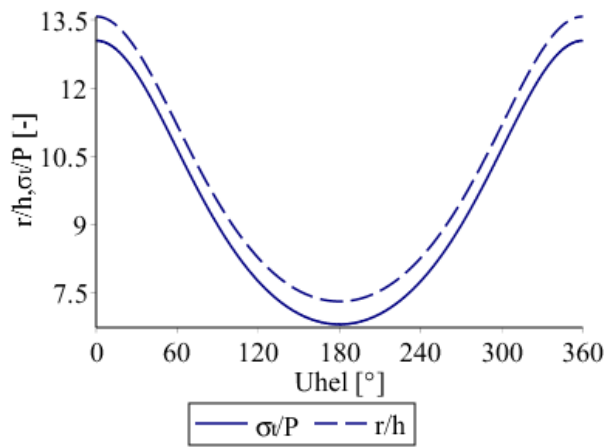
Nyní budeme porovnávat hodnoty obvodového napětí odečtené z Abaqusu s geometrickými rozměry pro dané modely.

Laplaceova rovnice má tvar

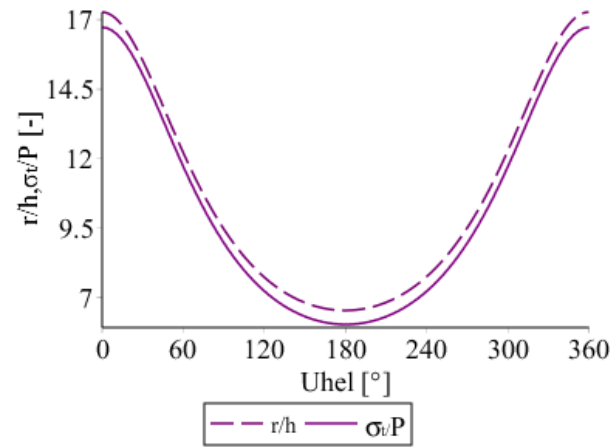
$$\frac{\sigma_t}{r_1} + \frac{\sigma_z}{r_2} = \frac{P}{h} \quad (6.3)$$

Z úvahy  $r_2 = \infty$  bude člen s osovým napětím je nulový. Takže Laplaceova rovnice (6.3) bude mít finální tvar (6.4), jehož platnost bude naším úkolem ověřit.

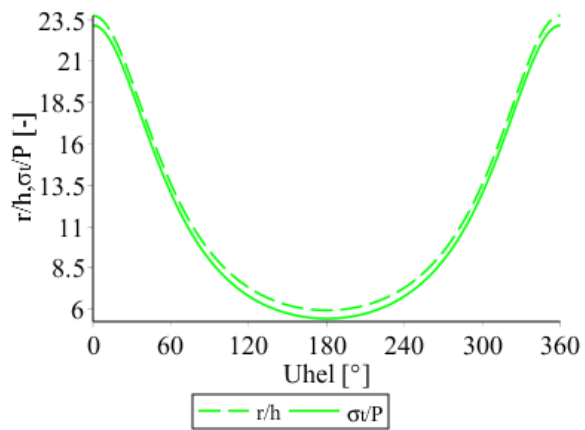
$$\frac{\sigma}{P} = \frac{r}{h} \quad (6.4)$$



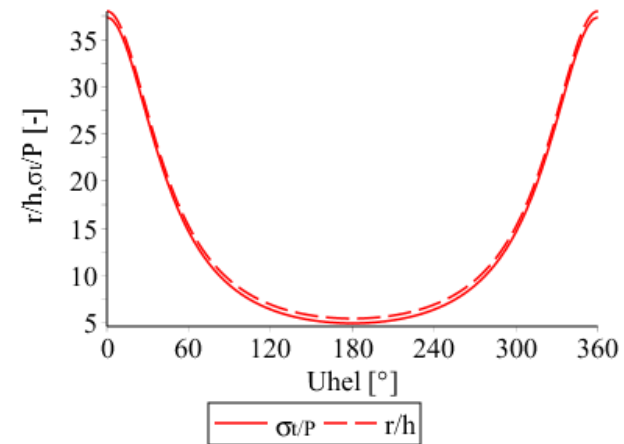
a)



b)



c)



d)

Obr. 6.17 Laplaceova rovnice – a)  $e = 0.03$ , b)  $e = 0.045$ , c)  $e = 0.06$ , d)  $e = 0.075$



Na Obr. 6.17 -a, b, c, d jsou zobrazeny průběhy normovaného obvodového napětí ( $\frac{\sigma_t}{P}$ ) a poměr poloměru a tloušťky ( $\frac{r}{h}$ ) v závislosti na úhlové souřadnici. Hodnoty napětí jsou získané z numerických simulací. P je počáteční zatěžovací tlak  $P = 2.1 \text{ MPa}$ , poloměr  $r$  odpovídá poloměru střední plochy a  $h$  je tloušťka stěny trubice, která se mění podél obvodu. Ověřením rovnosti těchto podílů jsme zjistili, že mezi průběhem hodnot normovaného napětí (pro jehož vykreslení byly použity hodnoty napětí z Abaqusu) a geometrií je chyba. Tato chyba se zmenšuje se zvětšující se excentricitou pro úhel průřezu  $0^\circ$ , kde je tloušťka trubic nejtenčí. Naopak pro úhel  $180^\circ$  se tato chyba zvětšuje. Tyto hodnoty uvádí Tab. 6.2

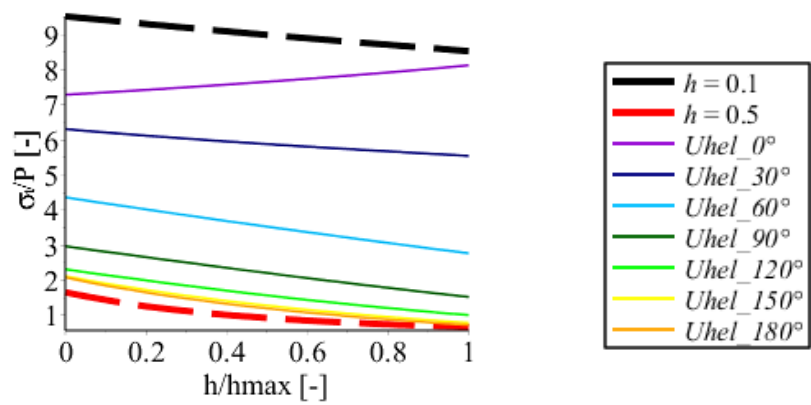
Tab. 6.2 Chyba mezi průběhy  $\frac{\sigma_t}{P}$  a  $\frac{r}{h}$  pro úhel  $0^\circ$  a  $180^\circ$  pro různé excentricity

Excentricita	Chyba	
	Úhel $0^\circ$	Úhel $180^\circ$
<b>0.03</b>	3.86%	6.92%
<b>0.045</b>	2.93%	7.59%
<b>0.06</b>	2.41%	8.44%
<b>0.075</b>	1.68%	9.14%

Tento jev lze vysvětlit tím, že se geometrie tělesa v  $0^\circ$  blíží ideální skořepině, zatímco po  $180^\circ$  se geometrie blíží tlustostěnné skořepině. Z Obr. 6.17 – d vidíme, že i při excentricitě  $e = 0.075$  jistá chyba mezi průběhy  $\frac{\sigma_t}{P}$  a  $\frac{r}{h}$  přetrvává. Nabízí se vysvětlení, že je to díky zanedbání členu axiálního napětí Laplaceovy rovnice. Ze simulací ovšem víme, že osové napětí nulové není (důsledek vazeb). Během zatěžování dochází k deformaci střední plochy a je možné, že vzniká nepatrné zakřivení i střední plochy, a proto nemusí být  $r_2$  po deformaci rovné nekonečnu, ale může mít nějakou malou hodnotu, která výsledky také ovlivní. Dalším důvodem, proč v našich výsledcích nejsou křivky totožné, je skutečnost, že hodnoty napětí z Abaqusu odpovídají hodnotě skutečného (Cauchyova) napětí, zatímco geometrie je vzata k počátečnímu (referenčnímu) stavu. V případě lineární geometrie tento vliv nehraje tak významnou roli, jelikož hodnoty posuvů a deformací jsou malé. V případě nelineární geometrie již musíme zohlednit vliv deformací.

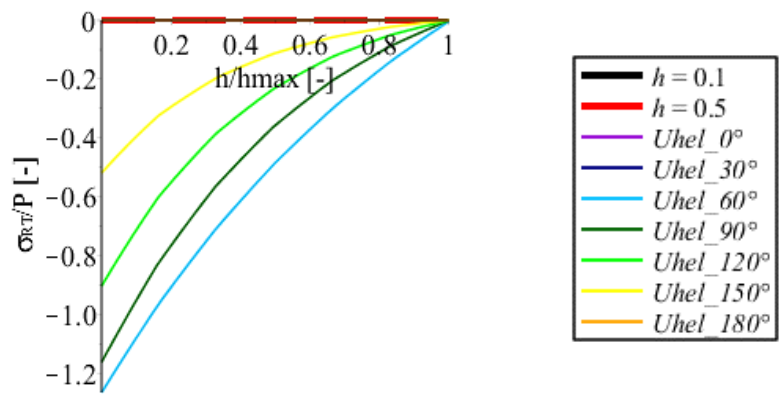
### 6.3.5 Změna geometrie

Nyní ověříme, jak se mění napjatost v trubici, pokud změním geometrii a to tak, že:  $R1=1mm$ ,  $R2=0.7mm$  pro  $e = 0.2mm$ . Pro tuto geometrii částečně opustíme teorii tenkostěnných skořepin. Na Obr. 6.18 vidíme průběh normovaného tečného napětí  $\frac{\sigma_t}{P}$  v závislosti na normované tloušťce stěny. Z grafu je vidět, že pro průřezy do  $120^\circ$  jsou průběhy obvodového napětí lineární, zatímco pro úhly  $150^\circ$  a  $180^\circ$  jsou průběhy hyperbolické. Takový průběh napětí je charakteristický pro tlustostěnné nádoby.



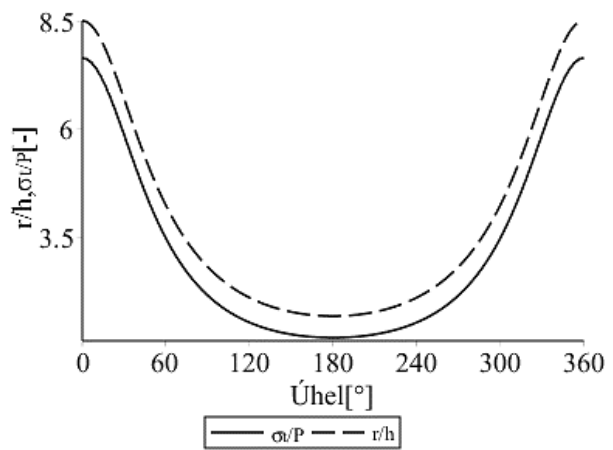
Obr. 6.18 Vliv excentricity na velikost obvodového napětí  $\sigma_t$  pro tlustostěnný model

Na Obr. 6.19 je zobrazen průběh smykového napětí  $\sigma_{rt}$  pro rozdílné průřezy. Opět zde sledujeme stejný trend jako v případě předchozí geometrie - pro úzké průřezy stěny trubice sledujeme vyšší napěťová maxima, oproti tlustým průřezům stěny trubice. Porovnáme-li tyto průběhy tečného napětí s Obr. 6.15, je zřejmé, že v případě této geometrie, napěťové špičky na vnitřním poloměru trubice klesají. Také průběhy napětí již nejsou lineární, ale mají hyperbolický charakter. Vysvětlením může být přechod z oblasti tenkostěnnosti do tlustostěnné teorie skořepin.



Obr. 6.19 Vliv excentricity na velikost tečného napětí  $\sigma_{RT}$  pro tlustostěnný model

Obr. 6.20 zobrazuje průběh  $\frac{\sigma_t}{P}$  a  $\frac{r}{h}$ . Chyba, která mezi těmito průběhy vzniká je pro úhel  $0^\circ$  rovna 10% a pro  $180^\circ$  již je tato chyba rovna 29.41%.



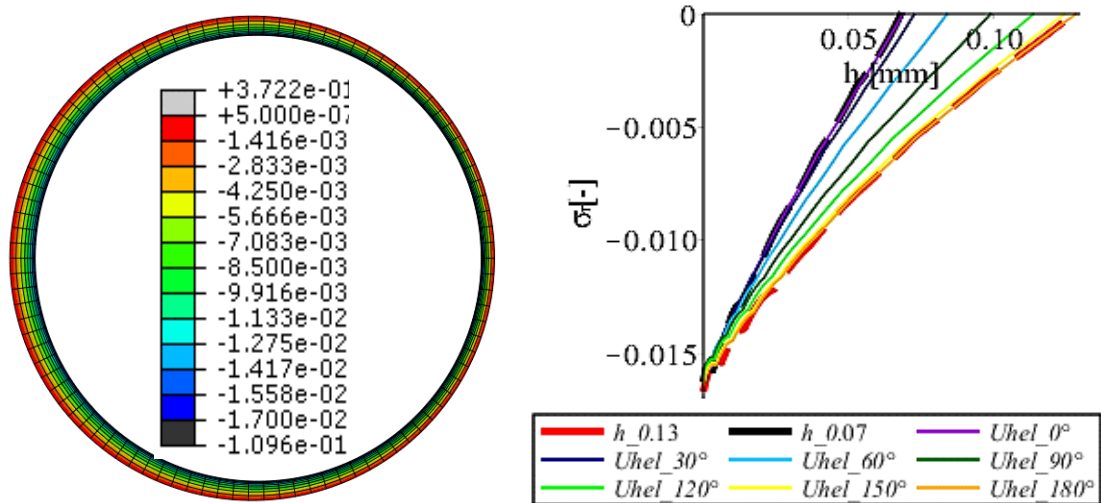
Obr. 6.20 Laplaceova rovnice  $R1=1mm$ ,  $R2=0.7mm$  a  $e=0.2mm$

### 6.3.6 Nelineární analýza

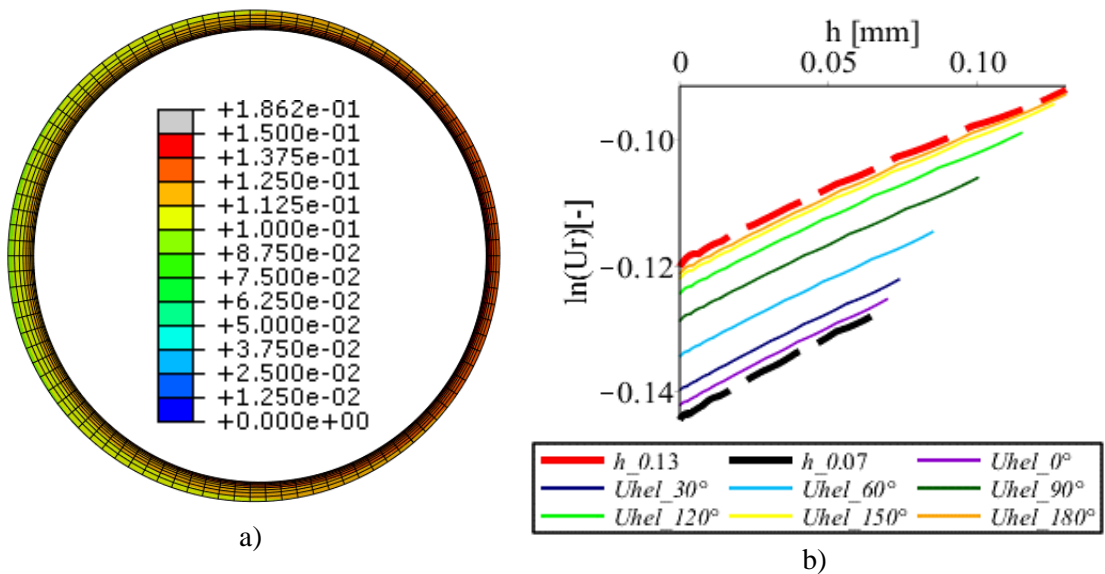
Modelem pro nelineární simulace byla zvolena trubice s rozměry  $R_1=1mm$ ,  $R_2=0.9mm$  a  $e=0.03mm$ . Trubice byla zatížena vnitřním přetlakem  $P = 0.016MPa$ . V následujících odstavcích budou vyhodnoceny hodnoty napětí a logaritmických deformací pro model ve stěně. Deformace a napětí jsou vyneseny na nezdeformované tloušťce.

Průběhy napětí mají obecně stejný trend jako v případě lineárních simulací, z toho důvodu nebudou v této kapitole více okomentované. Pozastavíme se nad průběhy logaritmické axiální deformace  $\ln(U_z)$  a smykového napětí  $\sigma_{rt}$ .

1) Radiální napětí  $\sigma_r$  a logaritmická deformace  $\ln(U_r)$

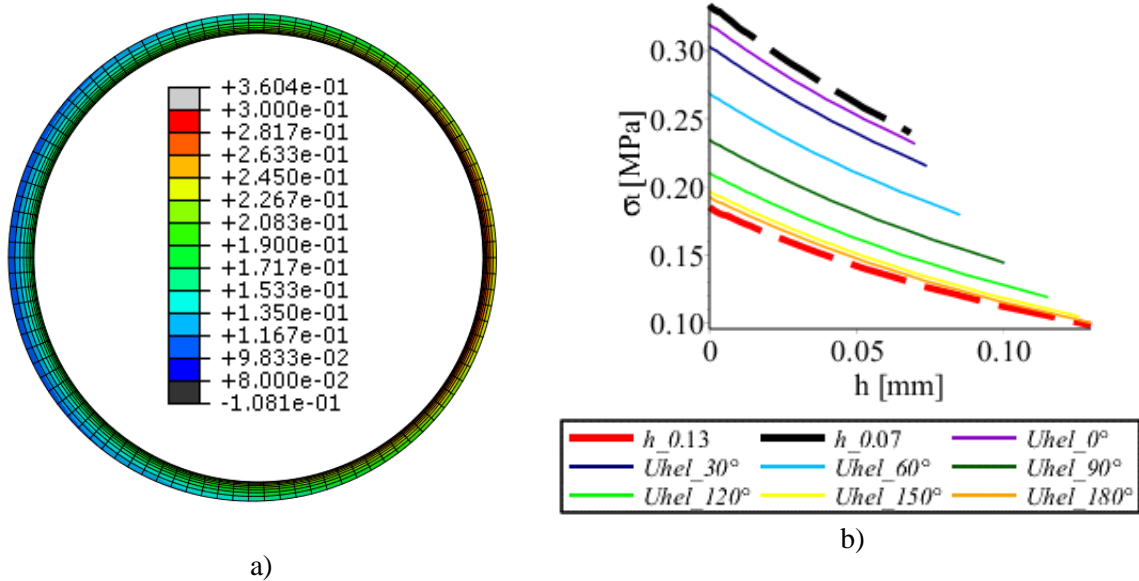


Obr. 6.21 a) Průběh radiálního napětí  $\sigma_r$  [MPa] ve stěně trubice  
b) Průběh radiálního napětí  $\sigma_r$  [MPa] v průřezích určených úhlovou souřadnicí

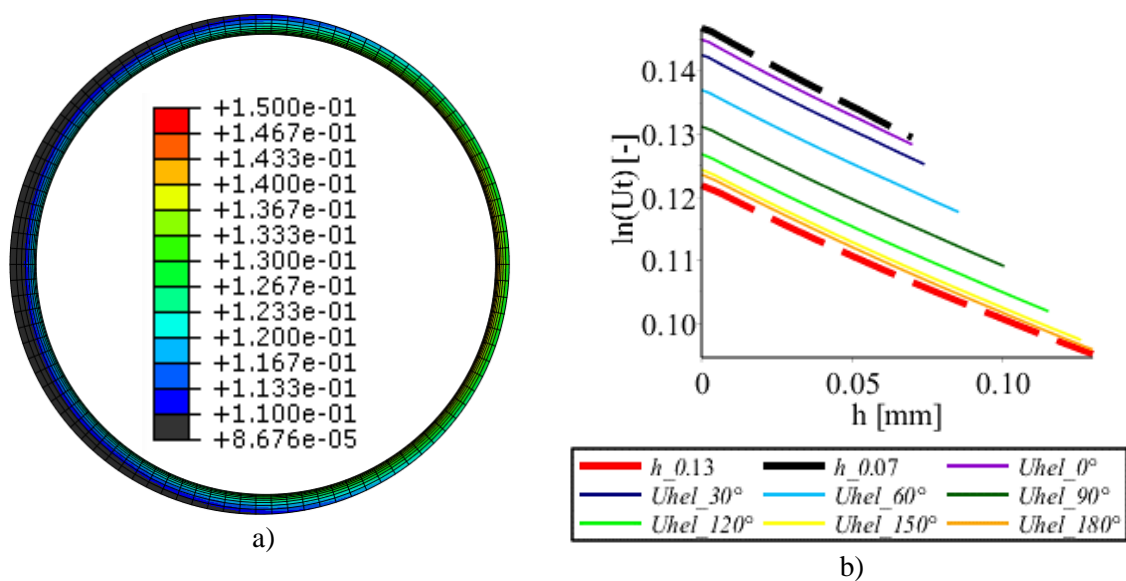


Obr. 6.22 a) Průběh radiální logaritmické deformace  $\ln(U_r)$  [-] ve stěně trubice  
b) Průběh radiální logaritmické deformace  $\ln(U_r)$  [-] v průřezích určených úhlovou souřadnicí

2) Obvodové napětí  $\sigma_t$  a logaritická deformace  $\ln(U_t)$

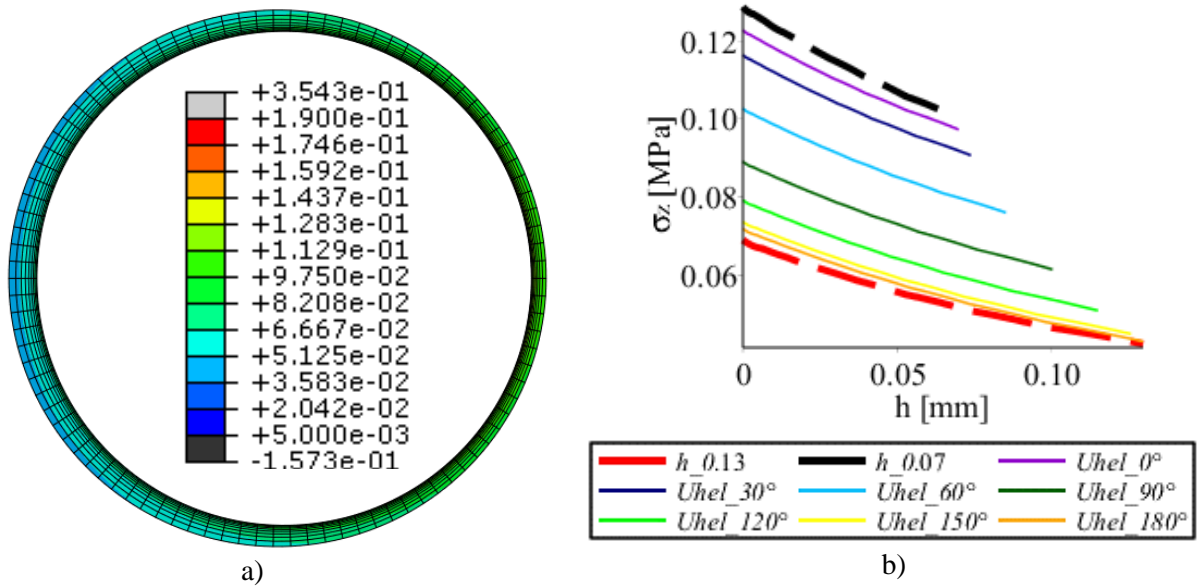


Obr. 6.23 a) Průběh obvodového napětí  $\sigma_t$  [MPa] ve stěně trubice  
 b) Průběh obvodového napětí  $\sigma_t$  [MPa] ve stěně v průřezech určených úhlovou souřadnicí

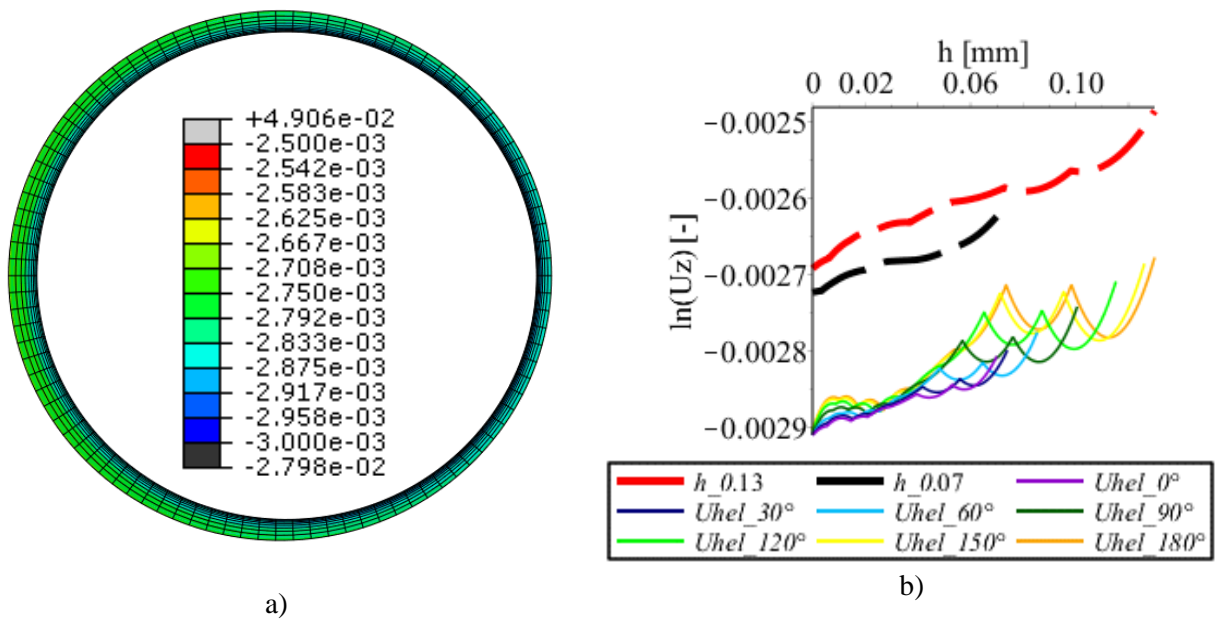


Obr. 6.24 a) Průběh obvodové logaritické deformace  $\ln(U_t)$  [-] ve stěně trubice  
 b) Průběh obvodové logaritické deformace  $\ln(U_t)$  [-] ve stěně v průřezech určených úhlovou souřadnicí

3) Axiální napětí  $\sigma_z$  a logaritická deformace  $\ln(U_z)$



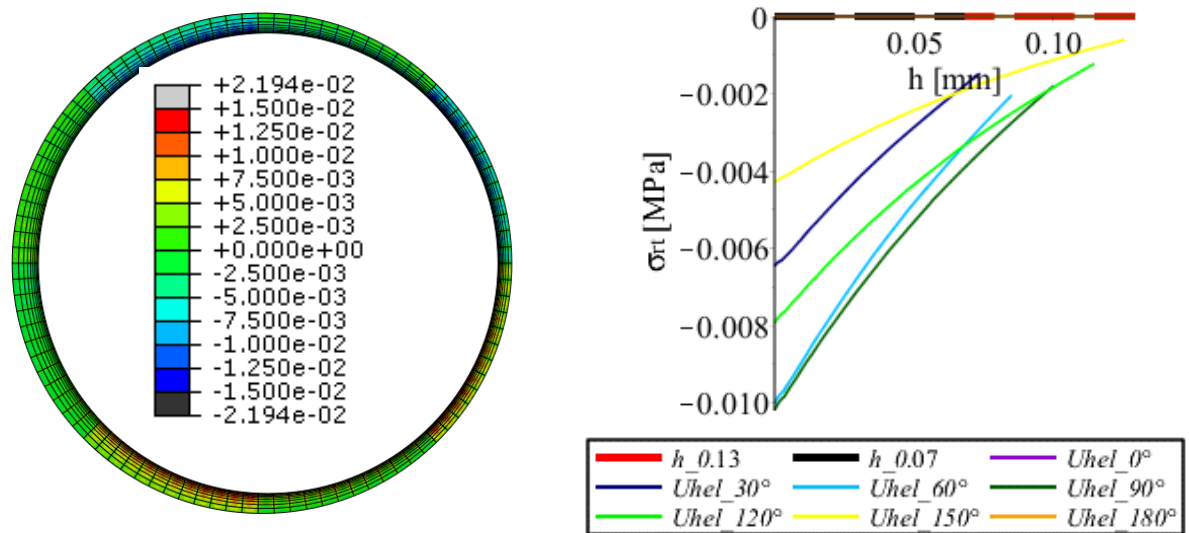
Obr. 6.25 a) Průběh axiálního napětí  $\sigma_z$  [MPa] ve stěně trubice  
b) Průběh axiálního napětí  $\sigma_z$  [MPa] ve stěně v průřezech určených úhlovou souřadnicí



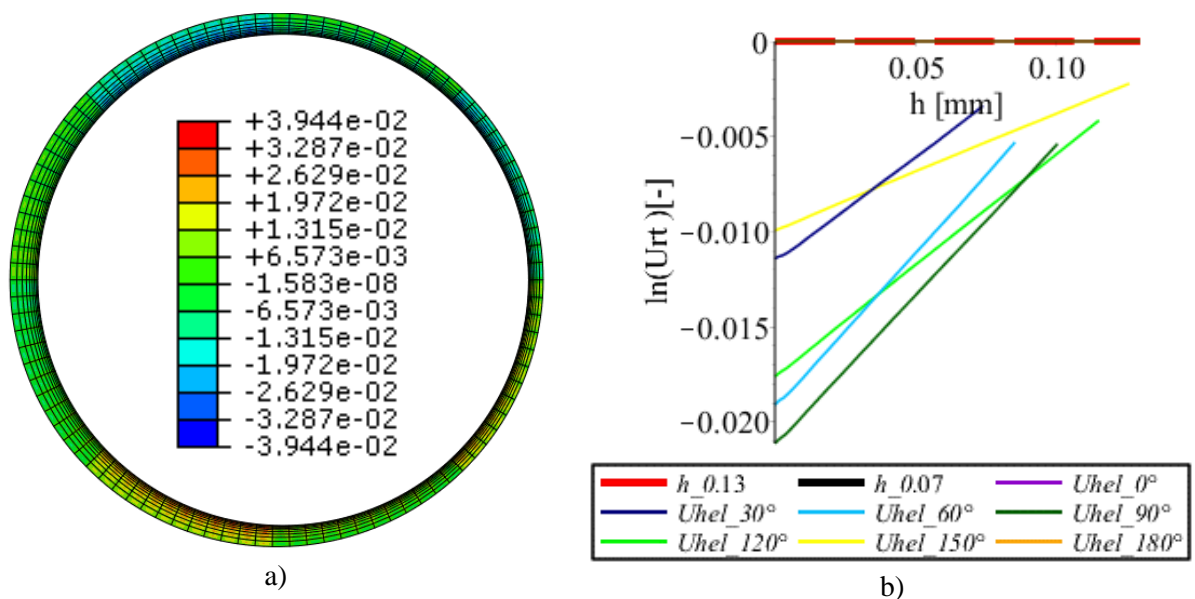
Obr. 6.26 a) Průběh axiální logaritické deformace  $\ln(U_z)$  [-] ve stěně trubice  
b) Průběh axiální logaritické deformace  $\ln(U_z)$  [-] ve stěně v průřezech určených úhlovou souřadnicí

Na Obr. 6.26 b) je zobrazen průběh logaritické axiální deformace  $\ln(U_z)$ . Vidíme, že průběhy jsou v záporných hodnotách (trubice se v místě průřezu zkracuje), což může být zapříčiněno vetknutím. Dále vidíme, že hodnoty u excentrické trubice jsou v absolutní hodnotě větší, než u koncentrických modelů. Tento jev si lze vysvětlit například prohnutím vetknuté trubice, čímž vznikají deformace, které celou výslednou deformaci ovlivní. Dále na průběhu hodnot lze pozorovat, že křivky nejsou hladké, ale jsou „zubaté“. Tento jev je pravděpodobně daný volbou sítě. Pro dosažení hladkých průběhů by bylo nutné volit více elementů po tloušťce trubice.

4) Smykové napětí  $\sigma_{rt}$  a logaritmická deformace  $\ln(U_{rt})$



Obr. 6.27 a) Průběh smykového napětí  $\sigma_{rt}$  [MPa] ve stěně trubice  
 b) Průběh tečného napětí  $\sigma_{rt}$  [MPa] ve stěně v průřezech určených úhlovou souřadnicí



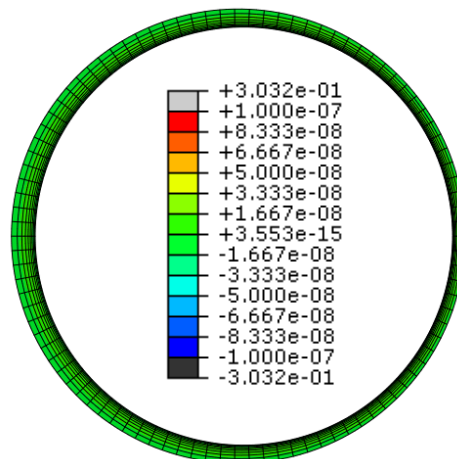
Obr. 6.28 a) Průběh smykové logaritmické deformace  $\ln(U_{rt})$  [-] ve stěně trubice  
 b) Průběh smykové logaritmické deformace  $\ln(U_{rt})$  [-] ve stěně v průřezech určených úhlovou souřadnicí

Z Obr. 6.27 b) je zřejmý průběh smykového napětí  $\sigma_{rt}$  po tloušťce stěny. Již u lineárního materiálu jsme toto napětí zaznamenali a přisuzovali jsme ho vlivu geometrie. Z grafu vidíme, že nejvyšší hodnoty nabývá pro úhel  $90^\circ$  stejně jako v případě lineárního materiálu. V tomto případě ale není splněna okrajová podmínka nulové hodnoty napětí na vnějším povrchu válce. Nabízí se možné

vysvětlení, že nesplnění okrajové podmínky je vlivem volby sítě. Pokud bychom síť zjemnili, je možné, že by byla okrajová podmínka lépe splněna.

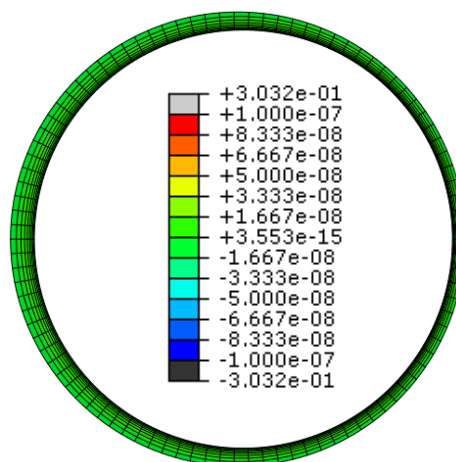
Hodnoty zbývajících smykových napětí a smykových logaritmických deformací mají zanedbatelné hodnoty. Pro představu uvedme průběhy smykových napětí  $\sigma_{rz}$  a  $\sigma_{tz}$ .

5) *Smykové napětí  $\sigma_{rz}$*



Obr. 6.29 Průběh smykového napětí  $\sigma_{rz}$  ve stěně trubice

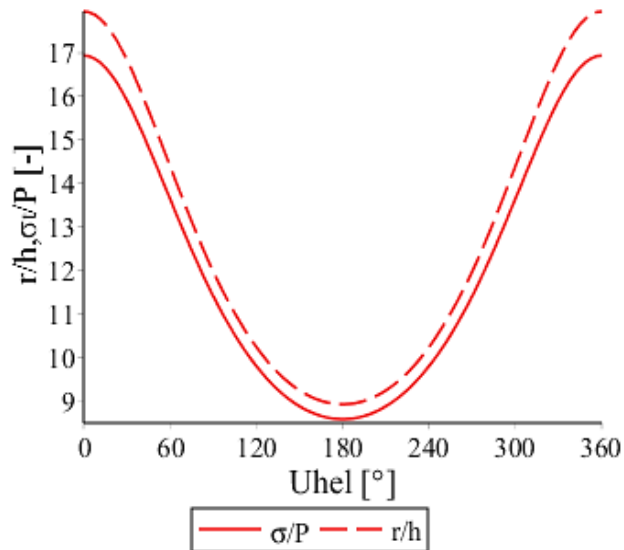
6) *Smykové napětí  $\sigma_{tz}$*



Obr. 6.30 Průběh smykového napětí  $\sigma_{tz}$  ve stěně trubice

### 6.3.7 Ověření Laplaceovy rovnice nelineární analýzy

Vykreslení průběhů  $\frac{\sigma_t}{P}[-]$  a  $\frac{r}{h}[-]$  je provedeno pro zdeformovanou konfiguraci. Na Obr. 6.31 je zobrazen průběh těchto podílů a je zřejmé, že se křivky opět nepřekrývají. Tento fakt je možné přisoudit podobně jako u lineární analýzy tomu, že byl zanedbán člen Laplaceovy rovnice.



Obr. 6.31 Laplaceova rovnice pro nelineární model

Chyba mezi průběhy křivek na Obr. 6.31 je pro **úhel 0° rovna 5.65%** a pro **úhel 180° je tato chyba 3.82%**.



## 7 Závěr

Tato diplomová práce představuje parametrickou studii vlivu obvodově proměnné tloušťky na napjatost a deformaci tlakované trubice. Pro simulaci tohoto problému byl zvolen model tenkostěnné excentrické trubice.

Na počátku práce byly odvozeny parciální diferenciální rovnice rovnováhy pro excentrickou trubici. Jejich analytické řešení nebylo díky jejich komplikovanosti nalezeno, a proto bylo následně přikročeno k řešení nastoleného problému numerickými metodami. K řešení bylo použito metody konečných prvků.

Numerická analýza byla uskutečněna na dvou typech materiálů. První materiálový model byl určený pro analýzu v oblasti lineární mechaniky, model byl definován Youngovým modulem pružnosti  $E = 210GPa$  a Poissonovým číslem  $\nu = 0.3$ . Druhý model představoval hyperelastický izotropní materiál, pro jehož popis byl zvolen model hustoty deformační energie typu Yeoh.

Studován byl průběh napětí a deformací po tloušťce stěn excentrických trubic. Řez trubicí byl proveden v oblasti, která nebyla ovlivněna vazbami. Pro lineární analýzy byly zvoleny modely trubic s vnějším poloměrem  $R_1 = 1mm$ ,  $R_2 = 0.9mm$  a excentricitami  $e = 0.03, 0.045, 0.06, 0.075mm$ . Pro nelineární analýzu byla postačující pouze geometrie  $R_1 = 1mm$ ,  $R_2 = 0.9mm$ ,  $e = 0.03$ .

### Výsledky analýzy

#### *1) Lineární materiálový model*

Pro lineární model byl vyhodnocen průběh skutečných napětí po tloušťce stěny trubice. Z průběhu radiálního napětí  $\sigma_r$  bylo ověřeno splnění okrajových podmínek na vnějším a vnitřním poloměru trubice. Průběh obvodových napětí  $\sigma_t$  potvrdil předpoklad, že v místech, kde je průřez stěnou tenký, bude napětí vyšší, než v oblastech, kde je stěna širší. Axiální napětí v modelu vzniklo vlivem vazeb. Nezanedbatelnou velikost má smykové napětí  $\sigma_{rt}$ . Toto napětí má nejvyšší hodnoty v řezech pro obvodové souřadnice  $90^\circ$  a  $270^\circ$ . Naopak pro souřadnice  $0^\circ$  a  $180^\circ$  je nulové, což zapříčiňuje symetrie modelu. Toto smykové napětí se nevyskytuje v trubicích s uniformním rozložením tloušťky stěny po obvodu. Je možné, že toto napětí vzniká vlivem ohybových momentů, které jsou způsobeny excentrickou geometrií tělesa. Hodnoty zbylých smykových napětí  $\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_{tz}$  mají zanedbatelné velikosti.

#### *2) Nelineární materiálový model*

Pro analýzu v nelineární oblasti mechaniky kontinua byly vyhodnocovány složky napětí a logaritmických deformací po tloušťce stěny trubice. Obecně byly pro jednotlivé průběhy složek napjatostí sledovány stejné trendy jako u lineární analýzy. Průběh radiálního napětí  $\sigma_r$  indikuje splnění okrajových podmínek. Obvodové napětí dosahuje svých maximálních hodnot pro nejtěsnější stěnu trubice. Velikost obvodové a logaritmické deformace souvisí s velikostmi napětí a má nejvyšší hodnoty pro tenké oblasti stěn. Vazby zapříčiňují vznik axiálního napětí. I u materiálu vykazujícího nelineární chování byla zjištěna existence smykového napětí  $\sigma_{rt}$ , dosahující maximálních hodnot pro  $90^\circ$  a  $270^\circ$ .

### Na počátku práce byly stanoveny tyto cíle:

- Zformulovat motivaci pro úlohu pružnosti popisující napjatost a deformaci v tlakované trubici nekonzstantní tloušťky
- Analyzovat úlohu v oblasti lineární pružnosti
- Zhodnotit vliv nelinearity na napjatost a deformaci trubice nekonzstantní tloušťky

V první části práce byly popsány oblasti, kde lze řešenou problematiku aplikovat. Je zde zmíněna důležitost tohoto problému v průmyslu, ale také jsou zde uvedeny biomechanické aplikace.

Velká část práce je věnována analýze excentrických trubic v oblasti lineární pružnosti. Výsledkem této analýzy je zjištění, že pravděpodobně *vlivem excentrické geometrie vznikají v trubici smyková napětí*, která se u trubice s uniformním rozložením tloušťky nevyskytují a tím pádem je porušen stav membránové napjatosti. Podobné jevy z hlediska průběhů napětí se vyskytují i u trubice z nelineárního materiálu.

Tato diplomová práce představuje pouze pilotní studii řešeného problému. Pro aplikace na reálné objekty je nutné upřesnit jejich geometrii, zohlednit jejich komplikovanost a materiálové vlastnosti (jako je například anizotropie).

## 8 Seznam použité literatury

- [1] Více o výrobě trubek. *Zacha velkoobchod s hutním materiálem* [online]. [cit. 2016-08-19]. Dostupné z: <http://www.zacha.cz/více-o-vyrobe-trubek>
- [2] ČSN EN 10216-1. *Bezešvé ocelové trubky pro tlakové nádoby a zařízení: Technické dodací podmínky - Část 1: Trubky z nelegovaných ocelí se zaručenými vlastnostmi při okolní teplotě*. 2014.
- [3] ČSN EN 10217- 1. *Svařované ocelové trubky pro tlakové nádoby a zařízení: Technické dodací podmínky - Část 1: Trubky z nelegovaných ocelí se zaručenými vlastnostmi při okolní teplotě*. 2004.
- [4] *Schema des Schrägwalzvorganges von Rohren* [online]. 2004 [cit. 2016-08-19]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Schraegwalzen.png>
- [5] *ASME B316-1991: Manual for determining the remain strength of corroded pipelines*. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1991.
- [6] NETTO, T.A., U.S. FERRAZ a A. Botto BOTTO. On the effect of corrosion defects on the collapse pressure of pipelines. *International Journal of Solids and Structures*. 2007, 44, Issues 22–23. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.028>.
- [7] FEKETE, Gábor a László VARGA. The effect of the width to length ratios of corrosion defects on the burst pressures of transmission pipelines. *Engineering Failure Analysis*. 2012, (Volume 21), 21–30.
- [8] Zbytková životnost tlakových zařízení. *TLAKinfo* [online]. 2001 [cit. 2016-08-19]. Dostupné z: <http://www.tlakinfor.cz/admin/t.py/t.py?t=2&i=292&z=2>
- [9] ZÁLESKÁ, Klára. *Význam OCT, vyhodnocení vyšetření*. Brno, 2012. Diplomová práce. Masarykova univerzita.
- [10] ČIHÁK, Radomír. *Anatomie 3*. Třetí, upravené a doplněné vydání. Praha: Grada, 2011. ISBN 978-80-247-3817-8.
- [11] FUCHSOVÁ, Jitka. *TEPNYLIDSKÉHO TĚLA* [online]. In: . 2010 [cit. 2016-08-19]. Dostupné z : <http://www.survivalschool.cz/prvni-pomoc/dok/Tepny.pdf>
- [12] HAGER, Alfred et al. Diameters of the thoracic aorta throughout life as measured with helical computed tomography. *The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*. 2002, **123**, Issue 6. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbiomech.2011.04.022> showArticle Info.
- [13] KIM, Junsil a Seungik BAEK. Circumferential variations of mechanical behavior of the porcine thoracic aorta during the inflation test. *Journal of Biomechanics*. 2011, (10.), 1941–1947. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbiomech.2011.04.022> showArticle Info.
- [14] HUANG, Yi, Guo XIAOMEI a Ghassan S KASSAB. Axial nonuniformity of geometric and mechanical properties of mouse aorta is increased during postnatal growth. *American journal of Physiology*. 2006, (Vol. 290 no. 2), H657-H664. DOI: 10.1152/ajpheart.00803.2005.
- [15] GOERGEN, C.J. a B.L. JOHNSON. Increased anterior abdominal aortic wall motion: possible role in aneurysm pathogenesis and design of endovascular devices. *Journal of endovascular therapy*. 2007. DOI: 10.1583/1545-1550(2007)14[574:IAAAWM]2.0.CO;2.

- [16] KONVIČKOVÁ, Svatava a Jaroslav VALENTA. *Biomechanika srdečně cévního systému člověka*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03425-9.
- [17] ERBEL, Raimund a Holger EGGBRECHT. Aortic dimensions and the risk of dissection. *Education in heart*. 2006, , 137–142. DOI: 10.1136/hrt.2004.055111.
- [18] HORNÝ, Lukáš et al. Correlations between age, prestrain, diameter and atherosclerosis in the male abdominal aorta. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2011, (Volume 4,8),2128–2132.DOI:<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.07.011>
- [19] PERSY, V. a P. D'HAESE. Vascular calcification and bone disease: the calcification paradox. *Trend in Molecular Medicine*. 2009, (Volume 15, 9), 405-416. DOI: 10.1016/j.molmed.2009.07.001.
- [20] HORNÝ, Lukáš. *Biomechanika I Kapitoly o krevní oběhové soustavě a elementární popis mechaniky cévní stěny* [online]. In: . [cit. 2016-08-19]. Dostupné z : <http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Biomechanika-I-Krevni-obeh-a-mechanika-cev.pdf>
- [21] *Aneurysma* [online]. 2016 [cit. 2016-08-19]. Dostupné z: <http://www.wikiskripta.eu/index.php/Aneurysma>
- [22] Ministerstvo zdravotnictví České republiky. *Zpráva o zdraví obyvatel České republiky* [online]. 2014 [cit. 2016-08-19]. Dostupné z: [http://www.mzcr.cz/verejne/dokumenty/zprava-o-zdravi-obyvatel-ceske-republiky2014-9420\\_3016\\_5.html](http://www.mzcr.cz/verejne/dokumenty/zprava-o-zdravi-obyvatel-ceske-republiky2014-9420_3016_5.html)
- [23] MILLER, Christine a Donna M. EBENSTEIN. Effect of Calcification Modulus and Geometry on Stress in Models of Calcified Atherosclerotic Plaque. *Cardiovascular Engineering and Technology*. 2014, (Volume 5, 3), 244-260. DOI: 10.1007/s13239-014-0186-6
- [24] CILLA, M, E. PEÑA a M. A. MARTÍNEZ. *3D computational parametric analysis of eccentric atheroma plaque: influence of axial and circumferential residual stresses*. 2012, (Volume 11, 7), 1001–1013. DOI: 10.1007/s10237-011-0369-0.
- [25] ERHART, Philipp et al. *Finite Element Analysis of Abdominal Aortic Aneurysms: Predicted Rupture Risk Correlates With Aortic Wall Histology in Individual Patients*. *Journal of endovascular therapy*. 2015.
- [26] BRDIČKA, Miroslav. *Mechanika kontinua*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959.
- [27] ŠUBRT, Ladislav. *Teorie desek a skořepin*. Praha: Ediční středisko ČVUT, 1981.
- [28] VENTSEL, Eduard a Theodor KRAUTHAMMER. *Thin plates and shells: Theory, analysis and applications*. New York, USA: Marcel Dekker, Inc., 2001. ISBN 0-8247-0575-0.
- [29] HORNÝ, Lukáš. *Patobiomechanika srdečně cévního systému: studijní text*. Praha, 2014.
- [30] Finite strain theory. *Wikipedia* [online]. [cit. 2016-08-19]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_strain\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_strain_theory)
- [31] *Abaqus User's Manual*

[32] POLZER, Stanislav. Importance of material model in wall stress prediction in abdominal aortic aneurysms. *Medical Engineering & Physics*. 2013, (Volume 35, 9), 1282–1289. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.medengphy.2013.01.008>.

[33] MING, C a C LI-LI. Analysis of the eccentric cylindrical thin shell. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1994, (Volume 15, 9), 887–895. DOI: 10.1007/BF02451639.