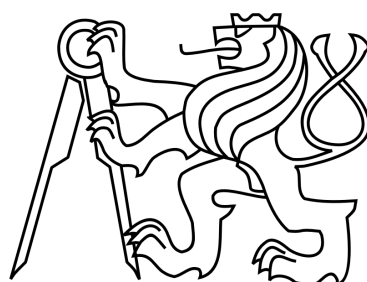


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA STROJNÍ  
ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY



## DIPLOMOVÁ PRÁCE

„Stanovení životnosti dílů zatížených náhodnými  
vibracemi.“

**Autor:** Kohout Pavel

**Vedoucí práce:** doc. Ing. Miroslav Španiel CSc.

Praha, 2016

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kohout** Jméno: **Pavel** Osobní číslo: **397017**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Strojní inženýrství**  
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Stanovení životnosti dílů zatížených náhodnými vibracemi.**

Název diplomové práce anglicky:

**Life time assessment of parts subjected to random loading.**

Pokyny pro vypracování:

Cílem práce je osvojit si a implementovat postup stanovení životnosti dílů založený na popisu mechanické odezvy ve frekvenční doméně a demonstrovat na konkrétním případě.

- 1) Proveďte rešerši metod pro vyhodnocení životnosti při náhodném mechanickém buzení.
- 2) Seznamte se s výpočtovým aparátem pro zpracování náhodného buzení ve frekvenční doméně ve zvoleném MKP aparátu.
- 3) Implementujte vhodný postup (např. dle Dirlika) výpočtu poškození od odezvy na zadané náhodné buzení v daném materiálovém bodě ve vhodném prostředí (Python, Matlab).
- 4) Analyzujte vzorovou úlohu a srovnajte s experimentálními daty.
- 5) Formulujte závěry a sepište zprávu (DP).

Předpokládaný rozsah: 50-60 stran.

Seznam doporučené literatury:

- [1] BALDA, Miroslav. Úvod do statistické mechaniky, 2001.
- [2] SHERRATT, DIRLIK. Predicting lifefrom frequency domain data, 2006.
- [3] TUSTIN Wayne. Random Vibration and Shock Testing. Equipment Reliability Institute. 2005

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

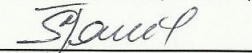
**doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.**

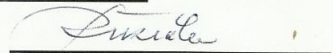
Jméno a pracoviště konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **11.04.2016**

Termín odevzdání diplomové práce: **12.08.2016**

Platnost zadání diplomové práce:

  
Podpis vedoucí(ho) práce

  
Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

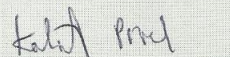
  
Podpis děkana(ky)

*Neodevzdá-li student bakalářskou nebo diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání bakalářské nebo diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat bakalářskou nebo diplomovou práci podruhé*

*Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.*

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

**21.4.2016**  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta(ky)

---

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a uvedených použitých zdrojů.

V Praze dne 11. 8. 2016

.....

Kohout Pavel

---

# Anotační list

**Autor:** Kohout Pavel

**Název práce:** Stanovení životnosti dílů zatížených náhodnými vibracemi.

**Anglický název:** Life time assessment of parts subjected to random loading.

**Rok:** 2016

**Studijní program:** N 2301 STROJNÍ INŽENÝRSTVÍ

**Obor studia:** 3901T003 Aplikovaná mechanika

**Ústav:** Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

**Vedoucí DP:** doc. Ing. Miroslav Španiel CSc.

**Bibliografické údaje:**

Počet stran: 77

Počet obrázků: 57

Počet tabulek: 1

Počet příloh: 2

**Klíčová slova:** submodeling, metoda konečných prvků, životnost, náhodné vibrace

**Keywords:** submodeling, finite element method, life time, random vibration

**Anotace:**

Diplomová práce se zabývá stanovením životnosti dílů zatížených náhodnými vibracemi. Obsahuje obecný úvod do problematiky náhodně buzených poddajných mechanických soustav tzv. úzkopásmové (narrow band) náhodné buzení a na řešení s využitím MKP a techniky submodelingu. Tato metodika je demonstrována na příkladu páky (součástí servopohonu v automobilovém průmyslu označovaného jako GPA modul) zatížené náhodnými vibracemi.

**Abstract:**

Diploma thesis specializes in life time assesment of component subjected to random loading. It contains a general introduction randomly excited flex- mechanical systems with special emphasis on narrowband random excitation using FEM techniques and submodeling. This methodology is demonstrated on the example of the lever (part of general purpose actuator module named as GPA modul) subjected to random loading

# Obsah

<b>Seznam použitého značení</b>	<b>7</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>8</b>
1.1 Motivace . . . . .	8
<b>2 Cíle práce</b>	<b>10</b>
<b>3 Teoretické pozadí pro stanovení únavové životnosti z náhodných vibrací</b>	<b>11</b>
3.1 Současný stav problematiky . . . . .	11
3.2 Náhodné vibrace . . . . .	12
3.3 Vyhodnocení únavy v časové oblasti . . . . .	13
3.4 Statistické nástroje používané ve frekvenční doméně . . . . .	15
3.4.1 Fourierova transformace . . . . .	15
3.4.2 Korelace mezi náhodnými procesy . . . . .	15
3.4.3 Autokorelační funkce a spektrální výkonová hustota . . . . .	16
3.5 Popis frekvenční domény . . . . .	17
3.6 Statistické teoretické pozadí . . . . .	20
3.6.1 Statistické procesy . . . . .	20
3.6.2 Normální rozdělení . . . . .	21
3.6.3 Rayleighovo rozložení . . . . .	21
3.7 Vlastnosti náhodného procesu . . . . .	22
3.7.1 Metody používané pro vyhodnocení ve frekvenční doméně . . . . .	26
3.8 Únavová analýza řešená metodou konečných prvků ve frekvenční doméně . . . . .	29
3.8.1 Modální analýza . . . . .	29
3.8.2 Lineární přenosová funkce . . . . .	29
3.8.3 Výpočet lineární přenosové funkce . . . . .	31
3.8.4 Kombinace PSD zatížení a přenosové funkce pro získání PSD odezvy komponentu . . . . .	33
3.8.5 Přibližná metoda pro určení vlastních čísel komplexního tenzoru napětí . . . . .	33
3.8.6 Exaktní metoda pro určení vlastních čísel komplexního tenzoru napětí	34
3.9 Princip návrhu dílu . . . . .	35

---

3.10	Metoda V80 . . . . .	36
3.11	Výběr metody pro vyhodnocení únavového poškození . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Verifikace použité metody</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Měření a testování analyzovaného dílu</b>	<b>42</b>
5.1	Popis testovaného dílu . . . . .	42
5.2	Měření testovaného dílu . . . . .	42
5.3	Nastavení testu . . . . .	43
5.4	Simulace testovaného dílu . . . . .	47
5.5	Určení kritického uzlu pro vyhodnocení analýz . . . . .	49
5.6	Určení kritických frekvencí pro vyhodnocení . . . . .	49
5.7	Modální analýza <i>leveru</i> . . . . .	52
5.8	Harmonická analýza <i>leveru</i> . . . . .	52
5.9	Analýza náhodných vibrací . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Vyhodnocení</b>	<b>57</b>
6.1	Submodel svarového spoje . . . . .	57
6.2	Postup při generování S-N křivky testovaného dílu . . . . .	62
6.2.1	Postup vyhodnocování S-N křivky . . . . .	62
6.2.2	Pozadí použitého postupu pro vyhodnocení S-N křivky . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>67</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>74</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>75</b>
<b>8</b>	<b>Přílohy</b>	<b>76</b>
<b>A</b>	<b>Výkonová křivka použitého shakeru</b>	<b>76</b>
<b>B</b>	<b>CD s digitální podobou práce</b>	<b>77</b>

## Seznam použitého značení

Označení	Jednotka	Význam
$PSD$	$\frac{(m/s^2)^2}{Hz}$	Power soectral densyty (spektrální výkonová hustota)
$FFT$		Fast fourier transform (Rychlá Fourierova transformace)
$MKP$		Metoda konečných prvků
$FE$		Finite element (Konečné prvky)
$P(f)$	$\frac{(m/s^2)^2}{Hz}$	PSD zatížení
$FEM$		Finite element method (Metoda konečných prvků)
$H1A$		Jednotkvá harmonická analýza
$ X_{AMP}(f) $	$\frac{m/s^2}{N}$	Lineární přenosová funkce
$\nu_p$	[1]	Očekávaná frekvence výskytu vrcholů (lokálních maxim napětí)
$\nu_0$	[1]	Počet průchodů signálu osou "x" za jednu vteřinu
$\gamma$	[1]	Faktor nerovnoměrnosti rozložení
$LCF$	[1]	Level cross frequency (Počet průchodů signálu osou "x")
$HMH$		hypotéza dle Huber-Mises-Hencky
$G_{AMP}$	$\frac{(m/s^2)^2}{Hz}$	PSD odezva dílu
$N$	[1]	Počet cyklů
$SoR$		Sine on random (náhodné vibrace spojené s harmonickou zátěží)
$PDF$	[1]	Probability densyty function (funkce hustoty pravděpodobnosti)
$D$	[1]	kumulace poškození

# 1 Úvod

Reálné konstrukce jsou během své životnosti často vystavovány zatížením, které je zcela nepravidelné. Pro určení únavové životnosti daného komponentu je možné použít dva různé přístupy. Soudobé fenomenologické modely vysokocyklové únavy předpovídají životnost jako dobu (počet cyklů) do iniciace trhliny v daném místě materiálu na základě četností cyklů o různých rozkmitech napjatosti a deformace. Vliv pořadí jednotlivých cyklů je považován za nevýznamný. Ke stanovení těchto četností se dnes téměř výhradně využívá metoda stékání deště. Historie napjatosti a deformace v daném místě (odezva) se často stanovuje výpočtem na základě historie zatížení (buzení) analyzované struktury. Historie zatížení může být stanovena: odhadem (např. ve fázi návrhu na základě norem nebo zkušeností s provozem podobných zařízení), měřením, simulací provozu nebo kombinací různých přístupů. Volbu přístupu pro získání mechanické odezvy komponentu je možné učinit na základě následujících skutečností: Lze-li při výpočtu mechanické odezvy na zatížení 1) zanedbat setrvačné síly; a jsou-li 2) zatížení tak malá, že odezva je lineární, lze napjatost a deformaci v daném místě a čase stanovit jako lineární kombinaci napěťových a deformačních statických odezev vhodně zvolených jednotkových zatěžovacích stavů s koeficienty úměrnými příslušným zatěžovacím silám v daném okamžiku. V opačném případě je nutno mechanickou odezvu analyzované struktury stanovit integrací pohybových rovnic (diskretizovaného) kontinua, což je obvykle velmi náročné na výpočtový výkon i čas. V případech, kdy je splněna podmínka linearity a kdy buzení vykazuje určité statistické parametry, lze s využitím poznatků z teorie náhodných procesů a harmonické analýzy struktury stanovit vztah mezi statistickými parametry (tzv. výkonovými spektrálními hustotami) buzení a odezvy struktury. Výkonovou spektrální hustotu odezvy lze využít k odhadu vysokocyklové únavy. Tento alternativní přístup se obecně označuje jako řešení ve frekvenční doméně (zatímco integrace pohybových rovnic jako řešení v časové doméně) a je významně efektivnější, než integrace pohybových rovnic a aplikace metody stékání deště.

## 1.1 Motivace

Aktuální komerční software umožňuje výpočet náhodných vibrací, avšak výstup v podobě PSD veličin je poměrně těžko zpracovatelný a simulace jako taková neumožňuje vytváření



submodelů už ze své podstaty (nelze určit čas ani frekvenci pro submodel<sup>1</sup> – všechny jevy probíhají „najednou“). Pro získání dostatečně přesného řešení v zájmové oblasti modelu je však možnost submodelingu<sup>2</sup> a výsledkových veličin bez „PSD“ nezbytná – speciálně v případě, kdy jsou náhodné vibrace spojeny se sinusovou zátěží. Právě z těchto důvodů je nutné pro stanovení únavové životnosti součásti a následné umožnění výše zmíněných výpočtových operací např. submodelingu zvolit vhodnou metodu, kterou bude možné vyhodnotit únavové poškození z PSD zatížení a nepřijít přitom o informace důležité pro submodeling, tj. údaje o kinematice modelu (amplituda a fázový úhel). Tato metoda se pak ve firmě Robert Bosch České Budějovice uplatní zejména při vyhodnocování plastových komponent zatížených náhodným nebo SoR(sinus on random) signálem.

---

<sup>1</sup>Submodel je nezávislý, jemněji vysířovaný model oblasti zájmu v rámci globálního modelu. Typicky obsahuje podrobnosti, které byly s ohledem na velikost sítě v globálním modelu vynechány.

<sup>2</sup>Submodeling je technika používaná v metodě konečných prvků k získání přesnějších výsledků v zájmové oblasti MKP modelu.

## 2 Cíle práce

Cílem práce je osvojit si a implementovat postup stanovení životnosti dílů založený na popisu mechanické odezvy ve frekvenční doméně vhodný pro aplikaci na konkrétním případě.

- 1) Provést rešerši metod pro vyhodnocení životnosti při náhodném mechanickém buzení.
- 2) Seznámit se s výpočtovým aparátem pro zpracování náhodného buzení ve frekvenční doméně ve zvoleném MKP aparátu.
- 3) Implementovat vhodný postup (např. dle Dirlika) výpočtu poškození od odezvy na zadané náhodné buzení v daném materiálovém bodě ve vhodném prostředí (Python, Matlab).
- 4) Analyzovat vzorovou úlohu a porovnat s experimentálními daty.

## 3 Teoretické pozadí pro stanovení únavové životnosti z náhodných vibrací

V této kapitole je uveden současný stav problematiky vyhodnocování únavové životnosti jak v časové tak ve frekvenční doméně, dále rozdíl mezi harmonickými a náhodnými vibracemi, obecná teorie z oblasti statistické mechaniky.

Tento teoretický základ je potřebný pro řešení daného problému v následujících kapitolách. Pro detailnější seznámení s touto teorií je možné použít odkazy a zdroje, které jsou uvedeny v referencích na konci práce.

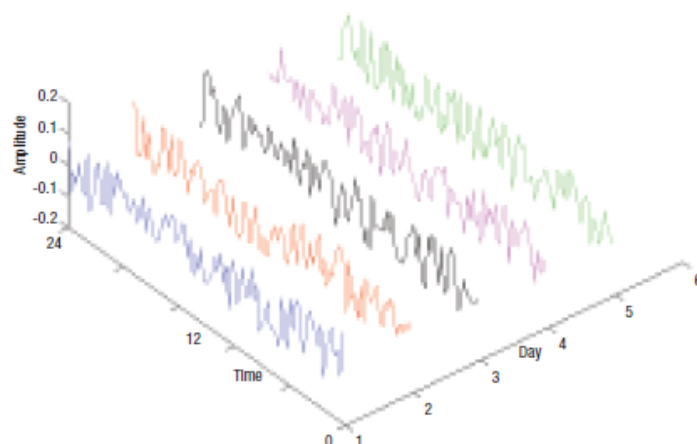
### 3.1 Současný stav problematiky

V současné době se pro vyhodnocení únavové životnosti ve velké míře používá vyhodnocení časového průběhu tenzoru napjatosti, tzv. vyhodnocení v časové doméně. Tento přístup je sice fenomenologický, ale řada metod je již dobře zavedena a vyzkoušena v praxi. Pokud se vyhodnocuje únavová životnost komponent, které jsou zatíženy náhodnými vibracemi v časové doméně, jsou zde metody např. (multiaxiální únavové hypotézy), které umožňují vyhodnocení únavového poškození z libovolného napětí. Problém nastává, pokud je požadováno vyhodnotit únavové poškození způsobené náhodnými vibracemi na základě výkonových spektrálních hustot složek tenzoru napjatosti, tzv. vyhodnocení ve frekvenční doméně. Zde je relativně jednoduché vyhodnocení pomocí HMM napětí, které používá v komerčních konečněprvkových softwarech algoritmus navržený Sagalmanem a Fulchrem [7]. Tento algoritmus umožňuje vyhodnocení pomocí HMM, ale podobné univerzální postupy nelze použít pro jiné invarianty než druhý invariant deviátoru napjatosti (HMM). Nicméně u nekovových komponent, kde se nevyskytuje určitá symetrie v křivce napětí/deformace je potřeba používat pro vyhodnocení jiné invarianty napětí než HMM (například první hlavní napětí), z důvodu, že je nutné znát informaci, zda se v daném místě jedná o tlakové nebo tahové zatížení. Obecně není tento problém (vyhodnocení pomocí prvního hlavního napětí) ve frekvenční doméně zcela matematicky exaktně vyřešen, nicméně je možné použít přístup (provedený v této práci), kdy se pomocí lineární přenosové funkce získá PSD odezva napětí beze ztráty informace o fázovém úhlu, který je pro určení zda se jedná o tahové nebo tlakové napětí nezbytný. Hlavním důvodem proč se vyhodnocením únavového poškození ve frekvenční doméně zabývat je rychlost provedení

únavového vyhodnocení jak z hlediska testování součástí na shakerech, tak z hlediska výpočtu MKP. V časové doméně se jedná o zdlouhavý proces, protože takové zatížení je v časové doméně pro vyhodnocení únavové životnosti komplikované hlavně z důvodu časové náročnosti na vyhodnocení a testování. Tento vyhodnocovací čas není akceptovatelný při využití metody konečných prvků obzvláště pak v případech, kdy jsou modelovány složité dynamické úlohy. [20]

### 3.2 Náhodné vibrace

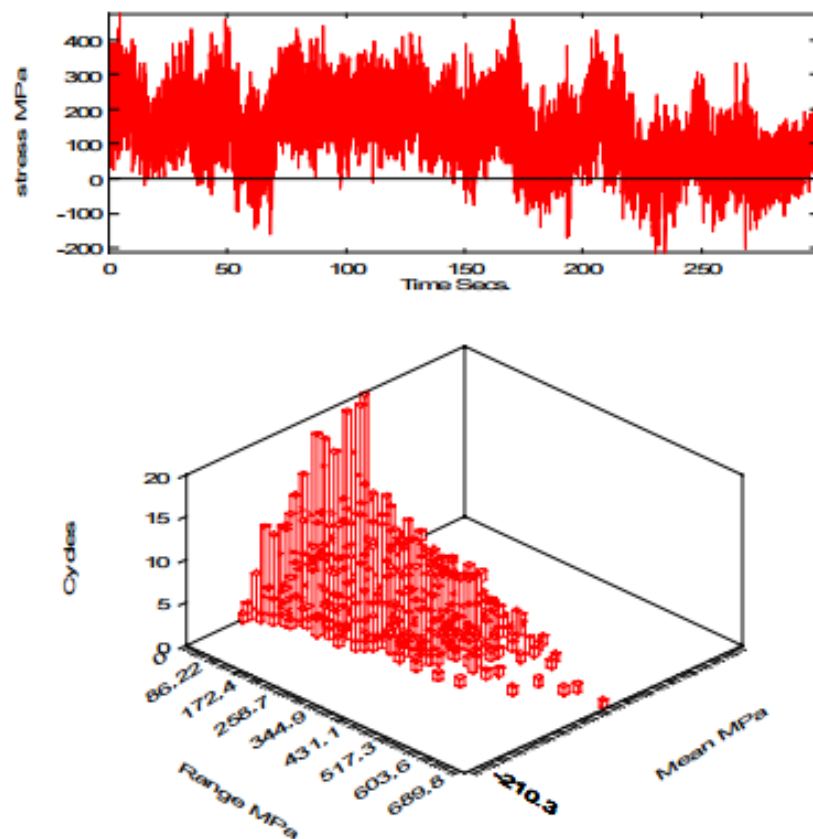
Stanovení únavové životnosti dílů je poměrně jednoduchý proces. Výpočet je relativně snadný, jelikož absolutní hodnoty vibrací jsou poměrně snadno předvídatelné v každém časovém okamžiku. Nicméně spektrum zatížení vyskytující se v přírodě může mít náhodný charakter v mnoha různých aplikacích. Jako příklad lze uvést vibrace vznikající při jízdě automobilem po nerovné vozovce, nebo při vysokorychlostním proudění okolo letadla. V těchto příkladech nejsou amplitudy napětí předvídatelné, to znamená, že amplituda v jednom časovém okamžiku není shodná s amplitudou ve stejném časovém okamžiku při opakování děje. Hlavní rozdíl mezi periodickými a náhodnými vibracemi je v tom, že harmonické vibrace jsou opakovatelné a předvídatelné, zatímco náhodné vibrace nikoliv. Obrázek 3.1 znázorňuje neopakovatelnost a nepredikovatelnost náhodných vibrací zde v případě automobilu jedoucího po nerovné vozovce.[10] [20]



Obrázek 3.1: Náhodné vibrace naměřeny na automobilu jedoucím po nerovné vozovce při opakovaném projetí stejné trasy v šesti po sobě následujících dnech [10]

### 3.3 Vyhodnocení únavy v časové oblasti

Počátečním stavem pro většinu únavových analýz je odezva sestavy nebo komponenty na dané zatížení. U únavových analýz vyhodnocovaných v časové oblasti je zatížení nejčastěji vyjádřeno jako napětí, nebo deformace v časové historii. Vzhledem k tomu, že má únavové zatížení kumulativní charakter (tzn. únavové poškození se kumuluje s rostoucím počtem zatěžovacích cyklů než dojde k lomu), je potřeba odbřít informaci, kdy k tomuto kritickému poškození dojde. Významné aspekty únavového poškození jsou rozsah napětí v cyklu a také hodnota středního napětí. V dnešní době se pro extrakci těchto dvou důležitých informací používá tzv. metoda Rain-flow (metoda stékání deště), která byla navržena Matsuishim a Endem v roce 1968. Výstupem metody stékání deště je obvykle histogram rozsah-rozložení, který je ukázán na obrázku 3.2. [6]



Obrázek 3.2: Histogram odvozený z časové historie zatěžování vyhodnocený metodou stékání deště (rain-flow) [6]

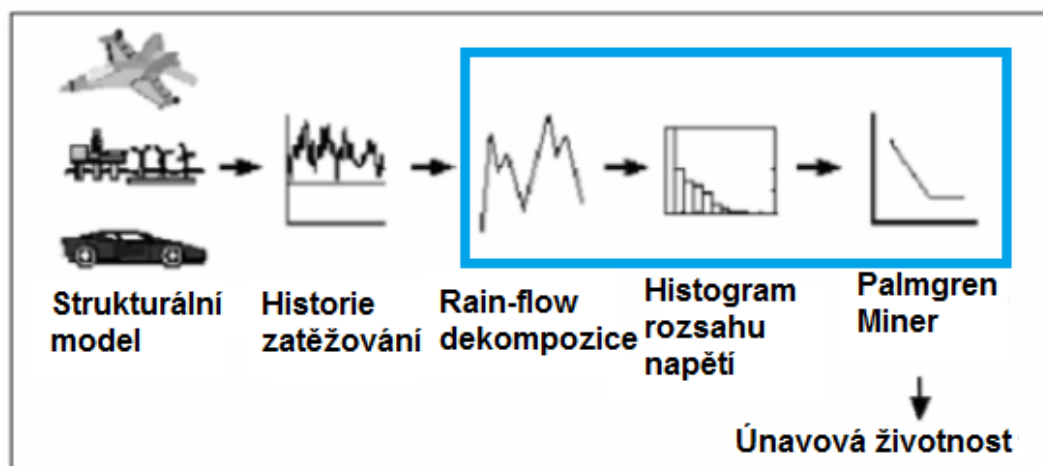
Kumulativní povaha únavového procesu je vyjádřena fenomenologickou veličinou "poškození", které je v každém okamžiku součtem přírůstků poškození za cyklus od počátku

zatěžování. Přírůstek poškození je funkcí amplitudy napětí (deformace).

Celkové únavové poškození způsobené jednotlivými cykly může být vypočteno sečtením únavového poškození od jednotlivých cyklů. Tento přístup je znám jako Palmgren - Minerova hypotéza kumulace poškození. Tento model kumulace poškození publikoval M.A. Miner v roce 1945. Zde se vychází z předpokladu, že součást snese jen určité množství únavového poškození, přičemž limitující kritické poškození, při kterém dojde k selhání, je S-N křivka. S-N křivka tedy udává počet cyklů ( $N_i$ ) do lomu pro dané napětí. Kde  $n_i$  je počet cyklů nashromážděných při napětí  $\sigma_i$ . Celkové únavové poškození je vyjádřeno jako součet dílčích poškození od jednotlivých napětí. Toto pravidlo je vyjádřeno rovnicí 3.1.

$$D = \sum_i^I \frac{n_i}{N_i} \quad (3.1)$$

Při standartním vyhodnocení únavového poškození v časové oblasti se v běžné praxi postupuje tak, jak je popsáno na obrázku 3.3. Zde časová historie reprezentuje typický



Obrázek 3.3: Standartní postup při vyhodnocování únavového poškození v časové oblasti[14]

zatěžovací blok (bloky). Zatěžovací bloky představují typický úsek života konstrukce. V modrém rámečku je uvedeno zpracování jednoho zatěžovacího bloku. Na základě hypotézy Palmgren Miner se určí poškození na jeden blok  $D_b$ . Převrácená hodnota  $\frac{1}{D_b}$  reprezentuje počet bloků do dosažení mezního stavu únavy - životnost (vyjadřuje se v počtu bloků, v hodinách apod).

## 3.4 Statistické nástroje používané ve frekvenční doméně

### 3.4.1 Fourierova transformace

Základním nástrojem pro zpracování dat ve frekvenční oblasti je Fourierova transformace. Jedná se o integrální transformaci, která zobrazuje časový signál do frekvenční oblasti. Pro převod signálu z frekvenční oblasti zpět do časové se používá zpětná Fourierova transformace. Schematické znázornění převodu signálu mezi frekvenční a časovou doménou je zobrazeno na obrázku 3.5. Matematická formulace Fourierovy transformace je popsána rovnicí 3.2 a zpětná Fourierova transformace je popsána rovnicí 3.3,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-i\omega \cdot t} dt \quad (3.2)$$

kde  $H(\omega)$  je Fourierovou transformací funkce  $h(t)$ .

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t} d\omega \quad (3.3)$$

Nyní jsou rovnice popisující Fourierovu transformaci psané z matematické definice pro  $\omega$ , nicméně v technické praxi se spíše používá zápis ve formě  $f$ , tento přepočít lze jednoduše provést s využitím vztahu  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ , potom mají rovnice 3.2 a 3.3 tvar [21][13]

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-i2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad (3.4)$$

a

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{i2\pi \cdot f \cdot t} df \quad (3.5)$$

### 3.4.2 Korelace mezi náhodnými procesy

Korelace představuje vzájemný vztah mezi dvěma procesy (signály). Korelace mezi náhodnými procesy má široké uplatnění v technické praxi, kde je potřeba porovnat dva signály, které by měly být "stejně". Názorným příkladem z praxe může být například radarová detekce, kde je vyslaný signál a je potřeba určit jak detekovat signál odražený. Vyslaný signál  $x(t)$  a detekuje se odražený signál  $y(t)$ , zde se v případě již zmíněného radaru popisuje detekovaný signál jako náhodná veličina a hledá se korelace s generovaným signálem  $x(t)$ , aby bylo možné určit vzdálenost letadla. Oba tyto signály ( $x(t)$  a  $y(t)$ ) spolu musí souviset, tedy musí být korelovány.

Korelační funkce je definována jako moment druhého řádu náhodné proměnné (x,y). Momenty náhodných veličin jsou popsány rovnicí 3.6. Momenty náhodných veličin budou podrobněji popsány v sekci Vlastnosti náhodného procesu. Korelační funkce pro stacionární proces je popsána rovnicí 3.7.[4]

$$m_i = \int_0^{\infty} f^i G_{xx}(f) df = \sum_1^{\infty} f_k^n \cdot G_k(f) \cdot \delta f \quad (3.6)$$

$$R_{xy}(\tau) = E \{x(t)y(t + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \quad (3.7)$$

### 3.4.3 Autokorelační funkce a spektrální výkonová hustota

Autokorelační funkce je definována jako korelační funkce náhodného procesu vyhodnocovaného ve dvou různých časových okamžicích. Autokorelační funkce je popsána rovnicí 3.8.

$$R_{xx}(\tau) = E \{x(t)x(t + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (3.8)$$

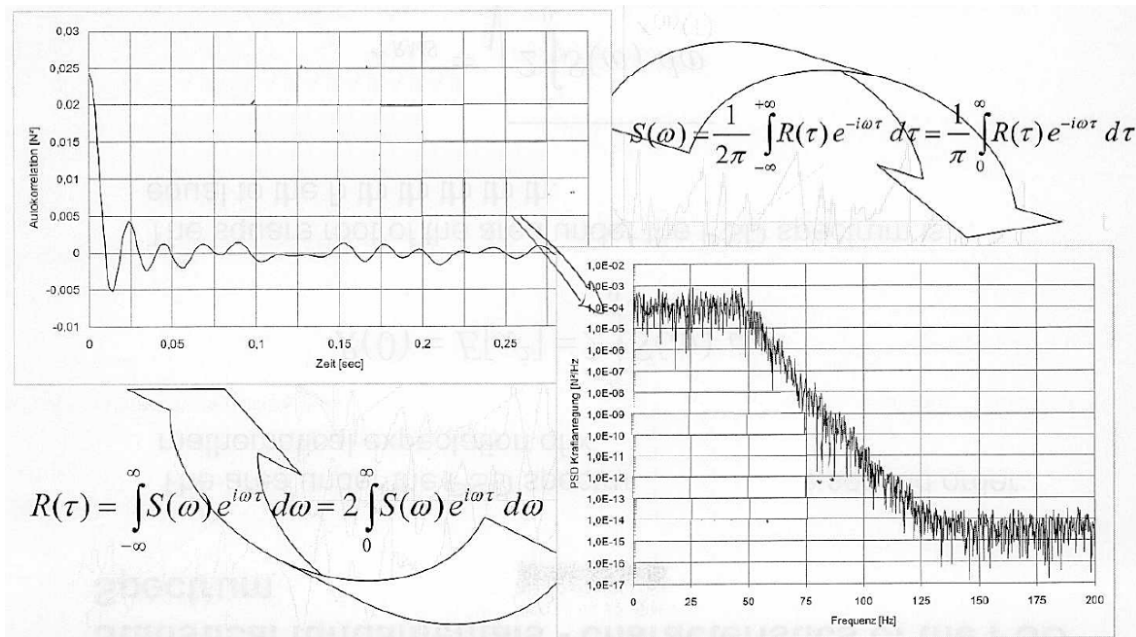
Pro diskrétní systémy lze integrály v rovnicích 3.7 a 3.8 nahradit sumou. Autokorelační funkce je charakteristika náhodného procesu v časové doméně, proto je potřeba definovat charakteristiky náhodných procesů také ve frekvenční doméně. K převedení korelačních funkcí z časové do frekvenční domény použijeme Fourierovu transformaci. Pokud na autokorelační funkci aplikujeme Fourierovu transformaci dostaneme spektrální výkonovou hustotu. Vztahy pro přímou a zpětnou Fourierovu transformaci autokorelační funkce se nazývají Wiener-Chinčinovy vztahy viz. rovnice 3.9 a 3.10.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.9)$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx} e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.10)$$

Vztah mezi autokorelační funkcí a spektrální výkonovou hustotou je názorně ukázán na obrázku 3.4.[4][21]





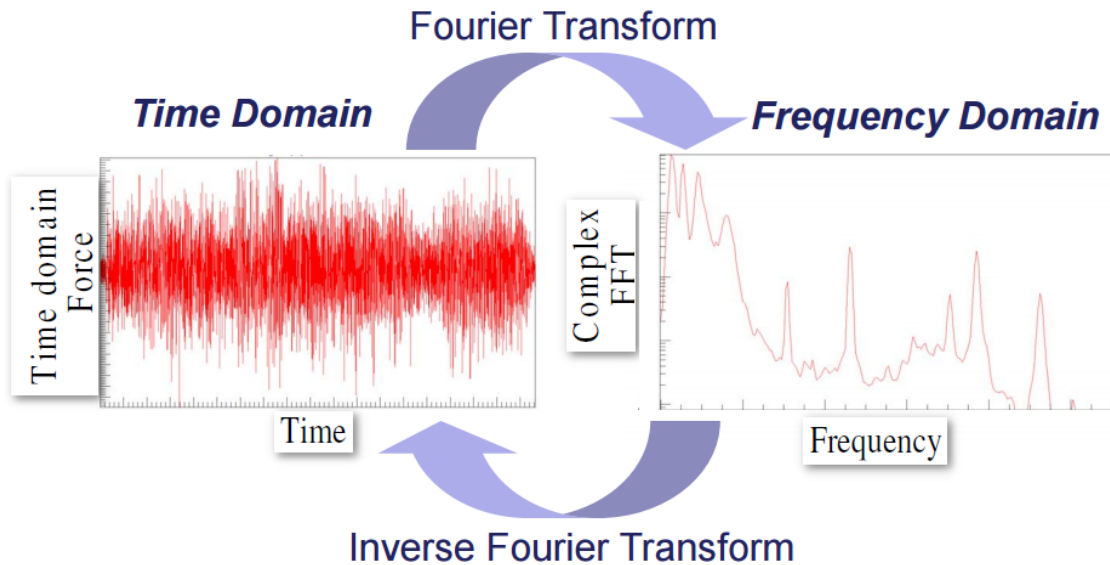
Obrázek 3.4: Vzájemný vztah mezi autokorelační funkcí a spektrální výkonovou hustotou[17]

### 3.5 Popis frekvenční domény

Frekvenční, resp. časová doména, je označení nezávislé osy vztážného systému pro popis fyzikálních charakteristik, je-li nezávislou proměnnou frekvence, resp. čas, používá se pro popis a analýzu matematických funkcí nebo signálů. Graf ve frekvenční doméně, ukazuje kolik signálu leží uvnitř každého daného frekvenčního pásma v rozsahu frekvence. Frekvenční doména může také obsahovat informace o fázovém posunu, který musí být použit pro každý harmonický signál tak, aby bylo možné rekombinovat frekvenční složky a získat tak původní časový signál.

Na frekvenční doménu se lze dívat jako na alternativní možnost zobrazení signálu z časové domény. Při vynášení do grafu nyní vodorovná osa nereprezentuje čas, ale frekvenci v Hz. Pro převedení signálu do frekvenční domény lze signál efektivně rozdělit na konečný počet diskrétních sinusových vln s měnící se amplitudou, frekvencí a fází. Pokud jsou převedeny všechny tyto parametry, lze účinně generovat originální časový signál. Algoritmus používaný pro rozdělení časového signálu na jednotlivé sinusové vlny se nazývá Fourierova transformace. Výsledkem Fourierovy transformace je vektor komplexních hodnot, kde každá hodnota reprezentuje amplitudu a fázi jednotlivých harmonických vln na

jednotlivých frekvencích. Schematické použití Fourierovy transformace pro přechod mezi frekvenční a časovou doménou je zobrazen na obrázku 3.5.



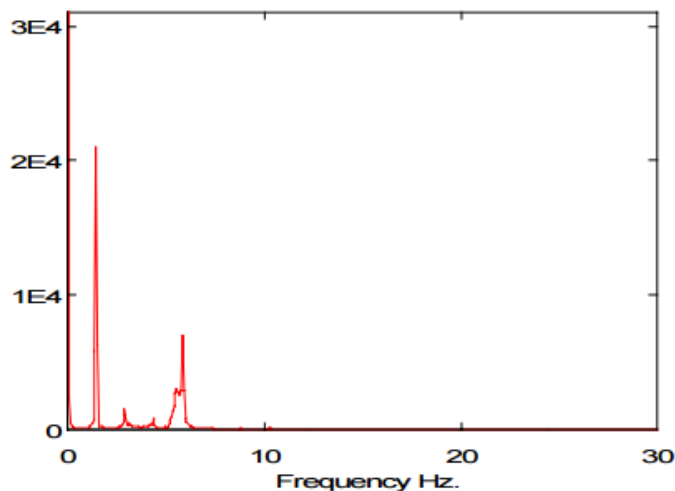
Obrázek 3.5: Přechod mezi časovou a frekvenční doménou[12]

Při řešení problematiky vyhodnocování únavové životnosti ve frekvenční doméně, a nebo při práci s náhodnými vibracemi obecně, se reprezentuje frekvenční doména jako spektrální výkonovou hustota (z anglického power spectral density) a to z důvodu, že samotná Fourierova transformace není pro použití v oblasti náhodných vibrací úplně vhodná. Dobré je ale poznamenat, že spektrální výkonová hustota neobsahuje žádnou informaci o fázi.

Spektrální výkonová hustota popisuje střední kvadratickou amplitudu každé sinusové vlny na dané frekvenci. Střední kvadratická amplituda jednotlivých sinusových vln může být určena plochou pod křivkou v grafu PSD vs. frekvence na požadovaném frekvenčním rozsahu. Amplituda může být také určena rovnicí 3.11. Průběh získaný použitím PSD veličin je znázorněn na obrázku 3.6.

$$\text{Amplituda} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \Delta f_n \cdot PSD} \quad (3.11)$$

V rovnici 3.11  $\Delta f_n$  jednotlivá frekvenční okna, sečtením všech frekvenčních oken a vynásobením PSD se dostane amplituda.



Obrázek 3.6: Graf PSD vygenerovaný z náhodných vibrací v časové doméně[6]

Pro transformaci signálu z frekvenční domény do časové se nejčastěji používá inverzní Fourierova transformace. Transformuje se vektor komplexních výsledků z frekvenční domény. Po transformaci by měl být obdržen identický časový signál, který byl získán na počátku ještě před transformací do frekvenční domény. Pokud je použita pro popis signálu ve frekvenční doméně spektrální výkonová hustota, tak je to pro zpětnou transformaci signálu do časové domény postup nevhodný a to z důvodu, že PSD neobsahuje žádné informace o fázi původního signálu. Fáze je zde generována čistě náhodně. Pokud ale bude přece jen požadováno regenerovat časový signál, je pro určité časové průběhy možné vyjádřit tzv. statisticky ekvivalentní časovou historii odhadnutím původní fáze. Pokud je časová historie signálu tzv. ergodický stacionární Gaussovský náhodný proces, je zde fázový úhel čistě náhodný mezi  $-\pi$  a  $\pi$  radiánu.[6][13][19]

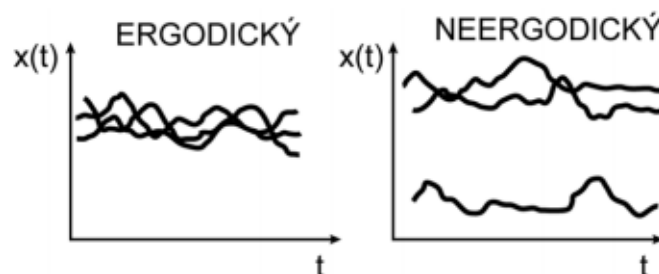
Použití spektrálních metod s využitím výsledků z frekvenční domény vede k otázce, jak souvisí frekvence zatěžování s výsledným poškozením. Po prostudování příslušné literatury lze konstatovat, že frekvence neovlivňuje životnost součásti v rámci desítek kHz. Nebo-li frekvence zatěžování neovlivňuje materiálové parametry dané součásti, záleží pouze na dané četnosti. Vliv frekvence zatěžování negativně ovlivňuje výslednou životnost ve smyslu většího počtu prodělaných cyklů. Vyšší frekvence znamená větší počet prodělaných cyklů v rámci časové jednotky.[5]

### 3.6 Statistické teoretické pozadí

Pro usnadnění porozumění jednotlivým metodám pracujícím ve frekvenční doméně je zde prezentován stručný statistický úvod do teorie stochastických procesů. Pro hlubší porozumění a pro odvození je čtenář přesměrován na referenční práce věnované této problematice, například práce Shina a Hammonda[2], nebo práce Newlanda[13].

#### 3.6.1 Statistické procesy

O procesu se řekne, že je stacionární, pokud statistické charakteristiky nejsou ovlivněny časovým posunem, pokud jsou v čase konstantní. To znamená, že statistické charakteristiky časové historie  $X(t)$  jsou stejné jako statistické charakteristiky  $X(t + \tau)$  pro všechny hodnoty  $\tau$ . Testování stacionarity procesu se provádí tak, že se použije více náhodných procesů v různých časech. Proces je stacionární, pokud pravděpodobnostní rozdělení souboru je stejné pro všechny body v čase. Pokud je funkce hustoty pravděpodobnosti podle Gaussovo rozdělení, řekne se, že se jedná o Gaussovský náhodný proces. Stacionární proces se nazve ergodickým procesem, pokud je možné pomocí statistických charakteristik jednoho vzorku (z jedné realizace procesu) určit statistické charakteristiky celého souboru, jinými slovy pokud jsou statistické charakteristiky získané z jednoho vzorku shodné se statistické charakteristiky celého souboru. Ergodicita a stacionarita náhodného procesu jsou dvě nezávislé vlastnosti. Ergodický stacionární náhodný proces je potřebný pro jednoduchou a efektivní regeneraci časového procesu. Nutnou podmínkou ergodicity je stacionarita; není to však podmínka postačující. Názorný rozdíl mezi ergodickým a neergodickým procesem zobrazuje obrázek 3.7.



Obrázek 3.7: Rozdíl mezi ergodickým a neergodickým stacionárním procesem[19]

Pro nestacionární procesy se statistické údaje (získané z časové historie) kontinuálně mění, a proto by neměly být reprezentativní pro statistické charakteristiky celého náhodného

procesu. Pro regeneraci časového signálu z PSD proto se předpokládá, že původní signál byl ergodický, stacionární, Gaussovský a náhodný. Pak je možné vygenerovat náhodné fázové úhly a přidat je k údajům o amplitudách uvedených v PSD. V tomto případě lze poté pomocí zpětné Fourierovy transformace sestavit statisticky ekvivalentní časový průběh.[19][6][13]

### 3.6.2 Normální rozdělení

Gaussovo nebo také normální rozdělení pravděpodobnosti je jedno z nejdůležitějších pravděpodobnostních rozdělení spojitě náhodné veličiny. Tímto rozdělením se řídí jen málo spojitých náhodných veličin, nicméně je používáno proto, že za určitých podmínek dobře aproximuje řadu jiných pravděpodobnostních rozdělení. Reálné provozní procesy leží mezi normálním a Rayleighovo rozložením. Podobný předpoklad byl použit i v této práci, kdy shaker zatěžoval díl normálním rozložením a díl měl odezvu podle Rayleighovo rozložení. Průběh signálu podle normálního a Rayleighovo rozložení je zobrazen na obrázku 3.10. [16][3]

Normální rozdělení pravděpodobnosti s parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$ , pro  $-\infty < \mu < \infty$  a  $\sigma^2 > 0$ , je pro  $-\infty < x < \infty$  definováno hustotou pravděpodobnosti popsanou v rovnici 3.12,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.12)$$

kde  $\mu$  značí střední hodnotu normálního rozdělení a  $\sigma$  vyjadřuje směrodatnou odchylku procesu. Distribuční funkce je vyjádřena rovnicí 3.13.

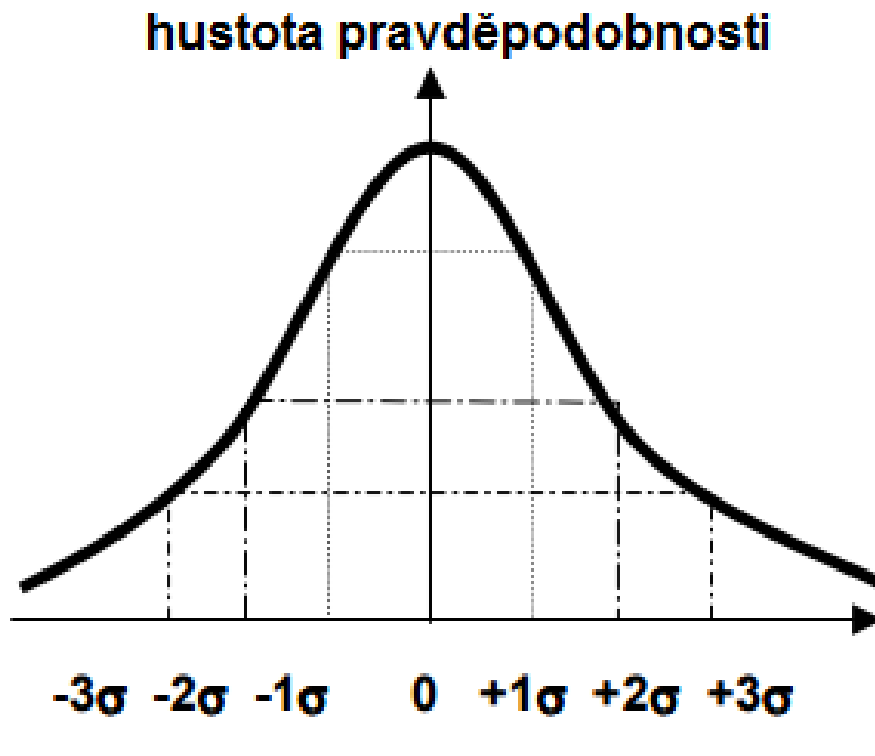
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (3.13)$$

Pro úplnost je Gaussovo rozdělení ukázáno na obrázku 3.8, kde jsou uvedeny hodnoty  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  a  $3\sigma$ , přičemž hodnota pravděpodobnosti výskytu náhodné veličiny pro  $1\sigma$  je 68.2%. Tato skutečnost je zde zmíněna speciálně proto, že v této práci je použito Gaussovo pravděpodobnostní rozložení právě s hodnotou  $1\sigma$ .

### 3.6.3 Rayleighovo rozložení

V pravděpodobnostní teorii a statistice je Rayleighovo pravděpodobnostní rozložení používáno pro kladné hodnoty náhodných veličin. Funkce hustoty pravděpodobnosti pro Rayleighovo rozložení je popsána rovnicí 3.14.

$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0 \quad (3.14)$$



Obrázek 3.8: Gaussovo pravděpodobnostní rozložení [24]

a distribuční funkce pro Rayleighovo rozložení je popsána rovnicí 3.15.

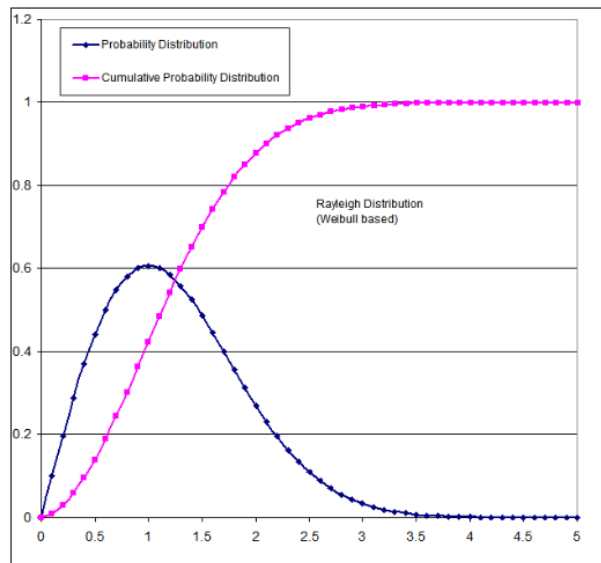
$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0 \quad (3.15)$$

Pro účely vyhodnocení byla hodnota rozptylu  $\sigma$  upravena na hodnotu 0.1 a Rayleighovo pravděpodobnostní rozložení bylo oříznuto až na hodnotě rozptylu  $5.25\sigma$ , na této hodnotě vychází pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny na hodnotu 1 : 1000000. Rayleighovo rozložení je zobrazeno na obrázku 3.9. [25]

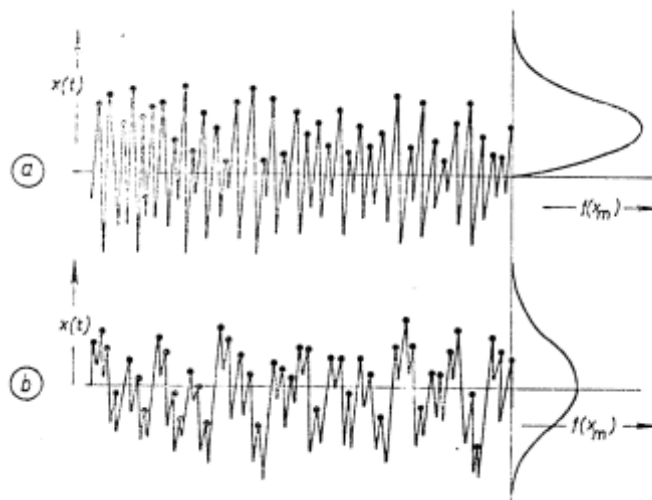
### 3.7 Vlastnosti náhodného procesu

Ve frekvenční doméně je náhodné zatěžování náhodného signálu  $X$  definováno spektrální výkonovou hustotou  $S_{xx}(f)$ , kde  $f$  označuje frekvenci. Běžně se používá tzv. jednostranná spektrální výkonová hustota  $G_{xx}(f)$ , která je definována pouze na kladné poloose. Obecná forma pro  $i$ -tý spektrální moment  $m_i$  je definována rovnicí 3.16:

$$m_i = \int_0^{\infty} f^i G_{xx}(f) df = \sum_1^{\infty} f_k^n \cdot G_k(f) \cdot \delta f \quad (3.16)$$

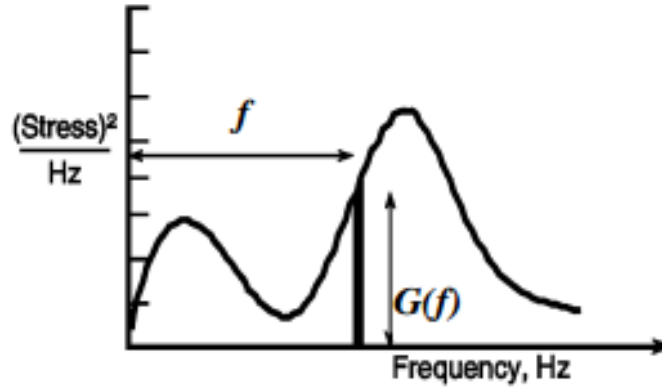


Obrázek 3.9: Rayleighovo pravděpodobnostní rozložení [23]



Obrázek 3.10: Ukázka procesů řídicích se Rayleighovo rozložením (a) a normálním rozložením (b) [19]

Schematické znázornění metody, jak jsou tyto momenty počítány je zobrazeno na obrázku 3.11. Z těchto spektrálních momentů mohou být dopočteny některé velmi důležité statis-



Obrázek 3.11: Výpočet momentů z PSD[15]

tické parametry. Tyto důležité parametry jsou RMS (root mean square), očekávaný průchod signálu nulovou hodnotou na ose y a počet vrcholů (peaků) za vteřinu. Tyto vztahy jsou vyjádřeny v rovnicích 3.17. Pro únavovou analýzu se běžně používají momenty  $m_1, m_2, m_3$  a  $m_4$ , nicméně pro vyhodnocení únavové životnosti se používají momenty  $m_0, m_2$  a  $m_4$ , kde se při výpočtu tzv. level cross frequency (počet průchodu signálu osou "x") používá moment  $m_0$ , který má význam posunů a moment  $m_2$ , který má význam rychlostí. Očekávaná frekvence výskytu vrcholů (lokálních maxim napětí) za vteřinu  $\nu_p$  a očekávaný tzv. level cross frequency, tj. kdy daný signál projde nulovou hodnotou na ose y při postupu signálu do kladného směru  $\nu_0$ , jsou definovány vztahy,

$$\nu_p = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad RMS = \sqrt{m_0} \quad (3.17)$$

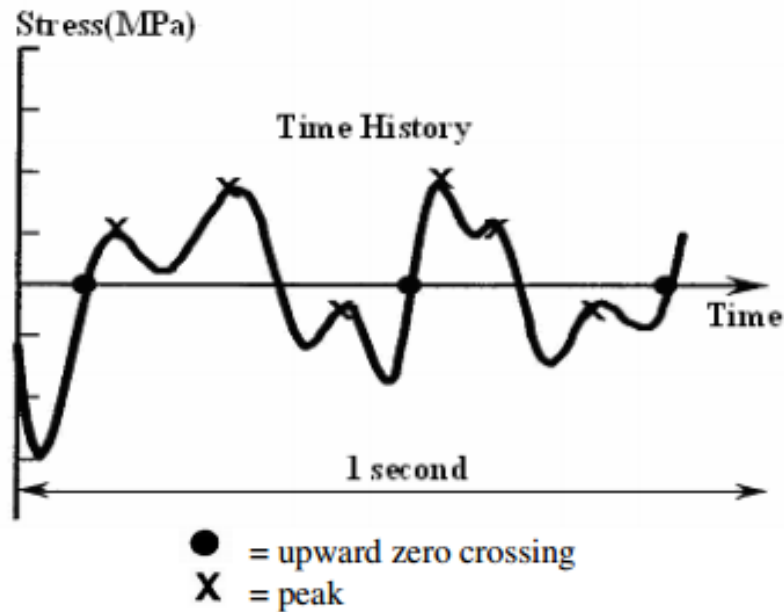
kde  $\gamma_i$  popsáný v rovnici 3.18 vyjadřuje faktor nerovnoměrnosti.

$$\gamma_i = \frac{\nu_0}{\nu_p} = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \quad (3.18)$$

Lepší pohled na výše zmíněné vztahy popsané v rovnicích 3.17 poskytne obrázek 3.12, na kterém je znázorněn průchod signálu nulovou hodnotou ve směru signálu nahoru ( $\nu_p$ ) a počet vrcholů (počet lokálních maxim napětí) tj.  $\nu_0$  za jednu sekundu a faktor nerovnoměrnosti  $\gamma$ , kde v tomto případě je počet průchodů nulou

$$\nu_0 = 3$$





Obrázek 3.12: Grafické znázornění průchodu signálu nulou  $\nu_p$  a počet vrcholů  $\nu_0$  v jednom zatěžovacím intervalu[14]

počet vrcholů

$$\nu_p = 6$$

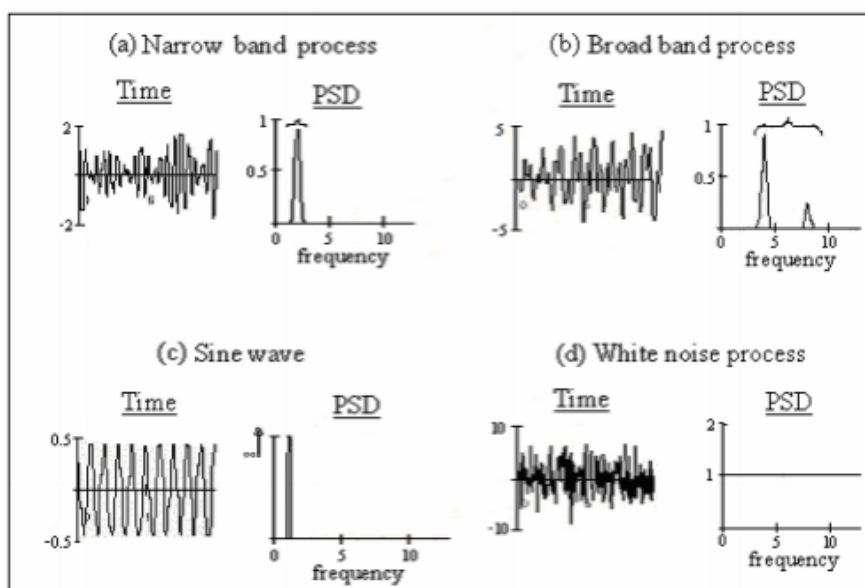
faktor nerovnoměrnosti

$$\gamma = \frac{\nu_0}{\nu_p} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Faktor nerovnoměrnosti  $\gamma$  může být použit pro vyhodnocení procesu v blízkosti centrální frekvence. Nicméně tento faktor může být použit i pro určení, zda je proces širokopásmový nebo úzkopásmový. Faktor nerovnoměrnosti  $\gamma$  je vyjádřen rovnicí 3.18.

Pojmy úzkopásmový a širokopásmový proces úzce souvisí s dekompozicí signálu do frekvenční oblasti. Úzkopásmový proces ( $\gamma \mapsto 1$ ) zobrazený na obrázku 3.13 a) a popsáný rovnicí 3.19 je sestaven z harmonických vln pokrývajících jen úzký rozsah frekvencí s tím, jak se odlišnost od úzkopásmového procesu zvyšuje, se faktor nerovnoměrnosti snižuje k nule ( $\gamma \mapsto 0$ ) a proces je pak popisován jako širokopásmový. Tento proces se také skládá z harmonických vln v širokém frekvenčním rozsahu (výkon má rozložen skrze více frekvenčních pásem). Širokopásmový proces je znázorněn na obrázku 3.13 b) a 3.19. Pokud se vrátíme k úzkopásmovému procesu, lze tvrdit, že počet vrcholů za vteřinu je velmi podobný počtu průchodu signálu nulou  $\nu_0$ . Tento předpoklad vede k tomu, že funkce hustoty

pravděpodobnosti (probability density function) rozsahu únavových cyklů je stejná jako funkce hustoty pravděpodobnosti vrcholů (peaků) signálu (Bendatova teorie). V tomto případě jde únavová životnost snadno odhadnout. Naproti tomu stejná vlastnost neplatí pro širokopásmové procesy ( $\gamma \mapsto 0$ ). Sinusová vlna je zobrazena na obrázku 3.13 c), historie sinusového signálu se v PSD funkci zobrazuje jako svislá čára, to kvůli tomu, že PSD je složeno z jednotlivých sinusových vln přes celý frekvenční rozsah a sinusová vlna o jedné frekvenci tudíž logicky vytvoří jen svislou čáru. Jako 3.13 d) je znázorněn bílý šum, který má speciální časový průběh, je sestaven ze sinusových vln v celém rozsahu frekvencí a PSD funkce má konstantní charakter.[1][6][5]



Obrázek 3.13: Různé typy časových průběhů a k nim odpovídající PSD funkce (a) Narrow band proces; (b) Broad bend proces; (c) Sinová vlna; (d) Bílý šum [15]

### 3.7.1 Metody používané pro vyhodnocení ve frekvenční doméně

V této sekci jsou popsány nejčastěji používané metody pro vyhodnocení únavy ve frekvenční doméně. Tyto metody předpokládají Gaussovské náhodné zatížení, jak je již popsáno v podkapitole Vlastnosti náhodného procesu. Zde je potřeba rozlišovat, zda se jedná o úzkopásmové nebo širokopásmové vyhodnocování, jak je popsáno výše. Zatímco metody navržené pro úzkopásmové procesy jsou použitelné pouze pro úzkopásmové procesy, ostatní jsou rovněž vhodné pro širokopásmové zatěžovací procesy. Bylo by možné popsat spoustu metod, které se touto problematikou zabývají, ale to není předmětem této



Obrázek 3.14: Ukázka širokopásmového a úzkopásmového procesu[6]

diplomové práce, proto budou popsány pouze některé základní metody.

### Dirlikova metoda

V roce 1985 navrhl Dirlik empirické řešení, které využívá algoritmu Monte Carlo. I přesto, že se řešení pomocí této metody zdá být složitější než některé alternativní metody, je toto řešení stále funkcí pouze čtyř momentů  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  a  $m_4$ . Tato metoda je široce použitelná (jak pro úzkopásmové, tak pro širokopásmové procesy) a stále překonává ostatní dostupné metody.

Pokud jde o přesnost, ukazuje se, že Dirlikův empirický vzorec pro rain-flow je mnohem lepší (dosahuje vyšší přesnosti odhadu životnosti) než dříve dostupné korekční faktory. Nicméně byla požadována certifikace této metody před jejím vlastním použitím. Bishop provedl teoretické řešení pro předpovídání rainflow cyklů pro momenty PSD. Tento teoretický přístup je však výpočetně náročný a nepředstavuje tak výrazné zlepšení oproti empirickému přístupu. Tudiž toto teoretické pozadí navržené Bishopem poskytuje spíše verifikaci Dirlikovy metody, než že by byl v praxi používán.[11][6][9]

### Narrow band aproximace

Pro narrow band (úzkopásmové) procesy je rozumné předpokládat, že každý vrchol je shodný s daným cyklem a že v důsledku toho jsou amplitudy jednotlivých cyklů statisticky rozloženy podle Rayleighova rozložení. Rovnice 3.19 popisuje definici aproximace pomocí narrow band metody, zde je definována pro amplitudy napětí,

$$\bar{D}^{NB} = \nu_0 C^{-1} (\sqrt{2 \cdot m_0})^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \quad (3.19)$$

kde  $\nu_0$  je očekávaný průchod signálu osou "x" z anglického level cross frequency. Což je velmi blízko k intenzitě vrcholu  $\nu_p$  pro úzkopásmové procesy. V rovnici popsané koeficienty C a k jsou parametry pro únavu materiálu,  $m_0$  je nultý spektrální moment a  $\Gamma$  je Eulerova gamma funkce, která je definovaná rovnicí 3.20.[11]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (3.20)$$

### Přístup Lalanne/Rice

V rozporu s Dirlikem Lalanne usoudil, že během dostatečně dlouhého časového intervalu se hustota pravděpodobnosti PDF (Probability density function) metody rainflow blíží k hustotě pravděpodobnosti vrcholů a tím prokázal, že Riceův původní vzorec (založený na jednoduchém součtu Gaussova a Rayleighova rozložení) je také dostačující pro určení napěťových rozsahů pomocí rainflow. Přístup Lalanne/Rice je svou robustností podobný Dirlikovu přístupu. To vede ve většině případů k podobným výsledkům těchto metod. Nicméně Lalanne/Rice není úplně empirický a má za sebou určité matematické pozadí.[9]

### Steinbergova metoda

Rice zjistil, že funkce hustoty pravděpodobnosti (PDF- Probability density function) vrcholů úzkopásmových signálů má tendenci být rozdělena podle Reyleighova distribučního rozložení, zatímco širokopásmové signály mají tendenci rozdělovat se podle Gaussova rozložení. Steinbergova metoda předpokládá, že funkce hustoty pravděpodobnosti napěťového rozsahu je také rozdělena podle Gaussova rozložení. Za těchto předpokladů bylo navrženo řešení, které je založeno na násobení jednotlivých (diskrétních) cyklů střední kvadratickou amplitudou (Root mean square).

### 3.8 Únavová analýza řešená metodou konečných prvků ve frekvenční doméně

S využitím modálního rozkladu MKP modelu může být (za předpokladu linearity modelu), dynamická odezva analyzována jak v časové, tak ve frekvenční doméně. Vždy tomu předchází lineární MKP model, který je předepjatý do statické, rovnovážné polohy. Dynamické analýze předchází modální analýza, kde jsou stanoveny vlastní tvary a vlastní frekvence.

#### 3.8.1 Modální analýza

Určení vlastních frekvencí a tvarů konečněprvkových modelů vede na řešení vlastních čísel. Jedná se o speciální případ zahrnující velké matice, které mají obvykle diagonální charakter, mnohdy jsou symetrické a podmnožinou vlastních vektorů. Obvykle je řešena rovnice pro malé kmity,

$$(\mu^2 \cdot [M] + \mu \cdot [C] + [K]) \cdot \Phi = 0 \quad (3.21)$$

kde  $[M]$  je matice hmotnosti (symetrická a pozitivně definitní),  $[C]$  je matice tlumení,  $[K]$  je matice tuhosti,  $\mu$  je vlastní číslo a  $\Phi$  je vlastní vektor. Matice  $[K]$  představuje lineari-zovaný vztah mezi posuvy a vnitřními silami, obecně může zahrnovat i efekty spojené s velkými posuvy a v takovém případě nemusí být ani symetrická ani pozitivně definitní. Rovnice 3.21 vychází z rovnice rovnováhy soustavy.

Obecně může mít soustava podle rovnice 3.21 komplexní vlastní čísla i komplexní vlastní vektory. Za předpokladu, že matice  $[K]$  je symetrická, pozitivně definitní a při zanedbání matice  $[C]$  (neuvažujeme-li tlumení při výpočtu vlastních čísel), lze  $\mu = i\omega$  považovat za ryze imaginární, kde  $\omega$  je úhlová frekvence a problém vlastních čísel lze psát ve tvaru rovnice 3.22. [8][22]

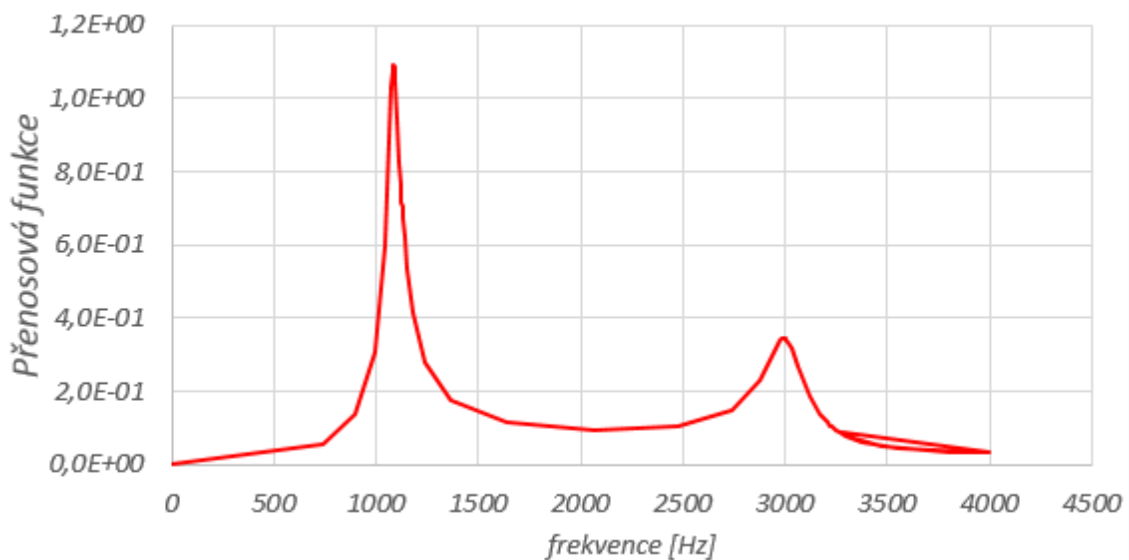
$$(-\omega^2 \cdot [M] + [K]) \cdot \Phi = 0 \quad (3.22)$$

#### 3.8.2 Lineární přenosová funkce

S využitím modálního rozkladu MKP modelu může být (za předpokladu linearity modelu) dynamická odezva analyzována jak v časové, tak ve frekvenční doméně. V časové doméně to často zahrnuje použití dlouho trvajících transientních simulací. Ve frekvenční

doméně je použita ve srovnání s transientní simulací velmi rychlá přenosová funkce (také označovaná jako funkce frekvenční odezvy z anglického frequency response function). Tato přenosová funkce je získána z konečněprvkového programu a je v podstatě výsledkem jednotkové harmonické analýzy, kde je zjištěna frekvenční odezva daného komponentu na jednotkové buzení a vznikne tak komplexní napěťová odezva na toto buzení, což je výše zmíněná přenosová funkce. Tato funkce bude pak zkombinována s daným PSD zatížením působícím na komponent.

Je žádoucí, aby získaná přenosová funkce měla konzistentní jednotky s daným PSD zatížením, to například znamená, že pokud je PSD zatížení v jednotkách  $\frac{(m/s^2)^2}{Hz}$ , pak by měla konečněprvková analýza a z ní generovaná přenosová funkce poskytnout odezvu na  $1m/s^2$  buzení přes celé frekvenční spektrum. Tato přenosová funkce dává do souvislosti PSD zatěžování a PSD odezvu daného komponentu. Tento přístup vyžaduje vynásobení PSD funkce zatěžování lineární přenosovou funkcí, pro získání PSD odezvy napětí a to pro každou frekvenci. Příklad přenosové funkce je zobrazen na obrázku 3.15.[1][6][13]



Obrázek 3.15: Přenosová funkce, která dává do souvislosti vstupní zatěžování a výstupní napětí v uzlu

### 3.8.3 Výpočet lineární přenosové funkce

Pohybová rovnice komponentu je dána v maticovém tvaru rovnicí 3.23,

$$[M] \cdot \ddot{x}(t) + [C] \cdot \dot{x}(t) + [K] \cdot x(t) = f(t) \quad (3.23)$$

kde

$[M]$  je globální matice hmotnosti,

$[C]$  je globální matice tlumení,

$[K]$  je globální matice tuhosti,

$x(t)$  je vector uzlových posuvů,

$f(t)$  je vektor uzlových sil.

V případě, kdy se vstupní zatížení mění v závislosti na funkci sinus, pak se také vektor posunutí  $f(t)$  mění v závislosti na funkci sinus. Vyjádřením v exponenciální formě se získají výrazy pro zatížení a pro posuv, jak je vyjádřeno rovnicí 3.24,

$$f(t) = F \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad x(t) = X \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (3.24)$$

kde  $F$  je amplituda sinusivě se měnící síly na frekvenci  $\omega$  *rad/sec* a  $X$  je amplituda vznikajících posuvů.

Zderivováním posuvů podle času (rovnice 3.25) se dostanou vztahy pro rychlost a zrychlení.

$$\dot{x}(t) = i \cdot \omega \cdot X \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (3.25)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot X \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Dosazením těchto vztahů do pohybové rovnice 3.23 a zjednodušením se získá vztah pro amplitudu posunutí v závislosti na frekvenci.

$$X(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega) \quad (3.26)$$

$H(\omega)$  je lineární přenosová funkce určená vztahem 3.27.

$$H(\omega) = [-[M] \cdot \omega^2 + [C] \cdot i \cdot \omega + [K]]^{-1} \quad (3.27)$$

Často se počítá přenosová funkce spíše mezi vstupním zatížením a výstupním napětím namísto posunutí, jak je ukázáno v rovnici 3.24. Tato operace je provedena FE programem.

Výsledkem klasické konečněprvkové analýzy je vektor šesti složek napětí pro každý uzel. Tento tenzor obsahuje 3 axiální a 3 smykové napěťové složky a je vyjádřen rovnicí 3.28

$$S_{xx}(\omega), S_{yy}(\omega), S_{zz}(\omega) \quad (3.28)$$

pro normálové složky a vztahem 3.29

$$S_{xy}(\omega), S_{yz}(\omega), S_{xz}(\omega) \quad (3.29)$$

pro smykové složky. Pro dvoudimenzionální elementy jsou hodnoty  $S_{zz}(\omega)$ ,  $S_{yz}(\omega)$  a  $S_{xz}(\omega)$  rovny nule.

Pro účely únavové analýzy PSD je požadováno, aby každý uzel konečněprvkové sítě vykazoval nějaký invariant jako je von-Mises, Tresca, nebo maximální napětí. Tyto invarianty jsou obdrženy z vlastních čísel tenzoru napětí tak, jak je popsáno v rovnici 3.30.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1(\omega) \\ \sigma_2(\omega) \\ \sigma_3(\omega) \end{bmatrix} = \text{Vlastní čísla} \left( \begin{bmatrix} S_{xx}(\omega) & S_{xy}(\omega) & S_{xz}(\omega) \\ S_{xy}(\omega) & S_{yy}(\omega) & S_{yz}(\omega) \\ S_{xz}(\omega) & S_{yz}(\omega) & S_{zz}(\omega) \end{bmatrix} \right) \quad (3.30)$$

Potřebný napěťový invariant může být obdržen z rovnice 3.30. Nicméně tyto hodnoty hlavních napětí jsou obecně komplexní. Pro úplnost jsou v rovnicích 3.31, 3.32 a 3.33 matematicky popsány invarianty napětí. Konkrétně první hlavní napětí, von-Misesovo napětí a Trescovo napětí.

První hlavní napětí:

$$\sigma_{max}(\omega) = \max(|\sigma_1(\omega)|, |\sigma_2(\omega)|, |\sigma_3(\omega)|) \quad (3.31)$$

von-Misesovo napětí:

$$\sigma_{von-Mises}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (|\sigma_1(\omega) - \sigma_2(\omega)|^2 + |\sigma_2(\omega) - \sigma_3(\omega)|^2 + |\sigma_3(\omega) - \sigma_1(\omega)|^2)} \quad (3.32)$$

Trescovo napětí:

$$\sigma_{Tresca}(\omega) = \max(|\sigma_1(\omega) - \sigma_2(\omega)|, |\sigma_2(\omega) - \sigma_3(\omega)|, |\sigma_3(\omega) - \sigma_1(\omega)|) \quad (3.33)$$

$\sigma_{xxx}(\omega)$  je přenosovou funkcí ve vztahu k frekvenci *Rad/sec*, kde je tato přenosová funkce vyjádřena jako invariant napětí. Frekvence může být po učinění přepočtu vyjádřena v jednotkách *Hertz*. [6]



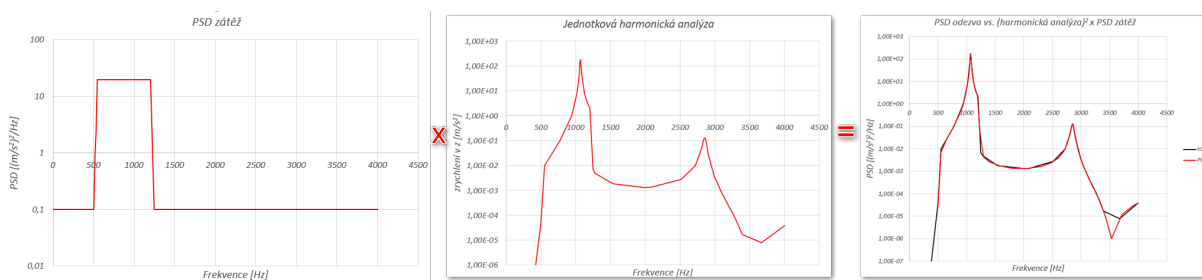
### 3.8.4 Kombinace PSD zatížení a přenosové funkce pro získání PSD odezvy komponentu

Byl nalezen vztah, který dává do souvislosti uzlová napětí (lokální hodnoty napětí) s daným zatížením působícím na komponent. Pokud je zatížení PSD, pak dalším krokem k spočítání PSD odezvy komponentu (tj. předpokládaná lokální napěťová odezva, značíme  $G(f)$ ) je kombinace přenosové funkce s daným PSD zatížením pro získání  $G(f)$  tak, jak je popsáno v rovnici 3.34.

$$G_{AMP}(f) = P(f) \cdot |X_{AMP}(f)|^2 \quad (3.34)$$

, kde  $G_{AMP}(f)$  značí PSD odezvu dílu,  $|X_{AMP}(f)|^2$  lineární přenosovou funkci a  $P(f)$  PSD zatížení dílu.[1]

Pro úplnost je zde přidán obrázek 3.16, na kterém je graficky znázorněna podoba této rovnice.



Obrázek 3.16: Grafické znázornění rovnice 4.1, kde vlevo je PSD zátěž, uprostřed jednotková harmonická analýza a vpravo PSD odezva dílu

Rovnice 4.1 platí, pokud je použito první hlavní napětí.

Je docela pravděpodobné, že PSD daného zatížení nebude dostupné pro danou přenosovou funkci na stejné frekvenci. V takovém případě je možné získat požadovanou hodnotu interpolací obou funkcí, čímž lze získat PSD zatížení na jakékoliv požadované frekvenci.[6] [1] [13]

### 3.8.5 Přibližná metoda pro určení vlastních čísel komplexního tenzoru napětí

Hlavní napětí jsou obvykle určována z vlastních čísel tenzoru napětí (reálná a symetrická matice). Určení prvního hlavního napětí (nebo signovaného HMH) z přenosové funkce

určené konečněprvkovou analýzou může být obtížné a to z důvodu, že je požadováno řešení vlastních čísel komplexní matice. Tento problém lze vyřešit ne úplně matematicky korektní operací, kdy dojde k rozdělení této matice na reálnou a imaginární část a vlastní čísla jsou pak nalezena, zvlášť pro reálnou a zvlášť pro imaginární část přenosové funkce, odděleně.

Přenosová funkce prvního hlavního napětí je pak složena z reálných a imaginárních čísel s největší hodnotou.

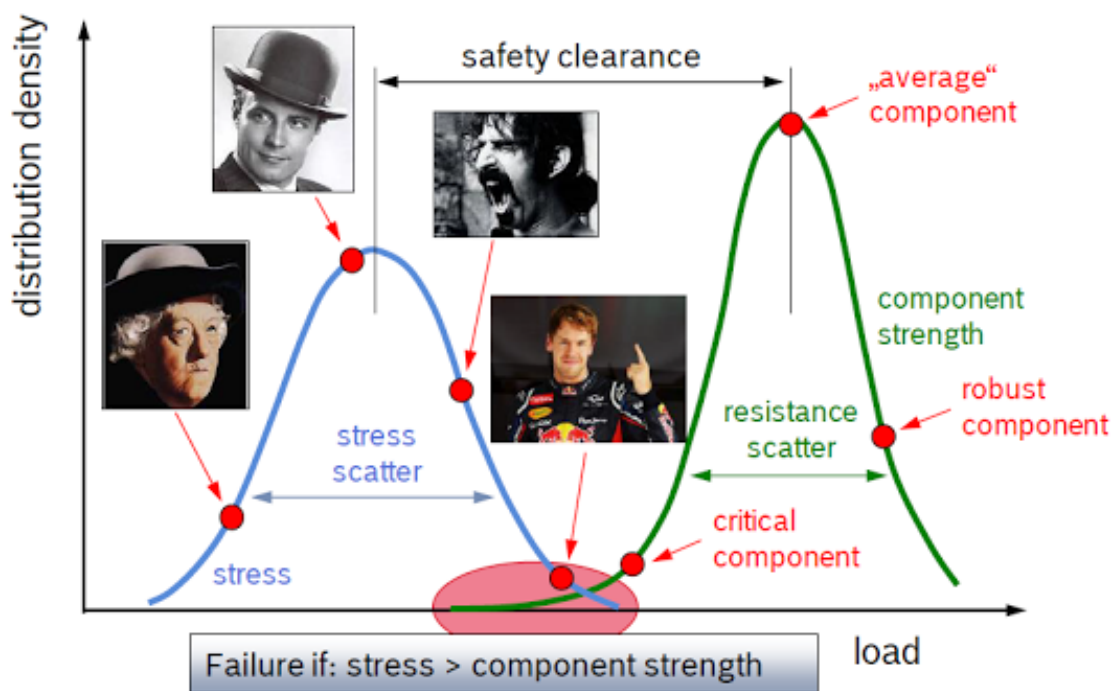
Pokud jde o přenosovou funkci pro HMH napětí, je přenosová funkce určena kombinací všech reálných a imaginárních vlastních čísel. Tento výsledek se nazývá  $x_{AMP}$ , jedná se o aproximaci. Je zde určitá nepřesnost oproti exaktnímu řešení vlastních čísel, ale je pravděpodobné, že tento výsledek bude rozumný, pokud kritické části frekvenčního rozsahu mají významné příspěvky z více než jednoho módu vibrací.[1]

### 3.8.6 Exaktní metoda pro určení vlastních čísel komplexního tenzoru napětí

Exaktní metoda pro určení vlastních čísel komplexního tenzoru napětí řeší plnou komplexní matici napětí tak, jak je dána, což má za následek řádově pomalejší řešení. Obecně algoritmus pro přesné řešení potřebuje cca 40 iterací pro dosažení konvergence, ale může to být i řádově více iterací, pokud by se jednalo o špatně podmíněný systém.[1]

### 3.9 Princip návrhu dílu

DFR (Design for Reliability) je metoda použitá při testování dílu analyzovaného v této práci. Zjednodušeně řečeno se tento princip, nebo lépe řečeno přístup k únavovému testování, skládá ze dvou Gaussových rozdělání. DFR princip je znázorněn na obrázku 3.17, kde levá Gaussova křivka popisuje zátěž dílu přičemž, čím více je díl zatěžován v pravé polovině křivky, tím blíže je svým konstrukčním limitům a pravá Gaussova křivka popisuje výdrž daného dílu. Pokud je díl konstruován tak, že dojde k průsečíku s křivkou výdrže dochází k únavovému porušení. Ideální stav je, pokud k žádnému protnutí těchto křivek nedojde, nicméně v technické praxi a při tlaku na co nejnižší cenu finálního výrobku tento stav nastává často a je nutné počítat spíše s případem zobrazeném na obrázku 3.17.



Obrázek 3.17: Princip návrhu pomocí DFR

Z těchto důvodů byly i námi testované díly testované pomocí tohoto principu, kde se pomocí experimentu určil rozptyl výdrže přímo testovaného dílu (tj. pravá Gaussova křivka).

### 3.10 Metoda V80

Metoda V80 se používá pro vyhodnocení napětí v místě vrubu (koncentrátoru napětí). Pomocí této metody lze získat širší pohled na kritické místo z hlediska napětí, jelikož tato metoda poskytuje napěťovou mapu všech elementů, které jsou zatíženy minimálně 80% maximálního napětí. Díky tomu je tato metoda na rozdíl od gradientních metod vždy na konzervativní straně S-N křivky. Laicky řečeno V80 říká, že i když je koncentrátor napětí zatížen takovým napětím, které by z hlediska únavové životnosti nevydržel, tak má kolem sebe ještě materiál, který napětí absorbuje a vyhodnocení tak neproběhne jen v jednom bodě, jako je tomu u gradientních metod. Díky tomu je na konzervativní straně S-N křivky. Tato metoda funguje tak, že vybírá elementy, které splňují podmínku popsanou rovnicí 3.35 a zohledňuje tak celou oblast (objem 80% maximálního napětí odtud V80). Hodnota 80% byla určena na základě provedení mnoha testů. Tato metoda se uplatní zejména při vyhodnocení plastových součástí, ale je možné ji použít i v našem případě při vyhodnocení kovové páčky (*leveru*) GPA modulu.

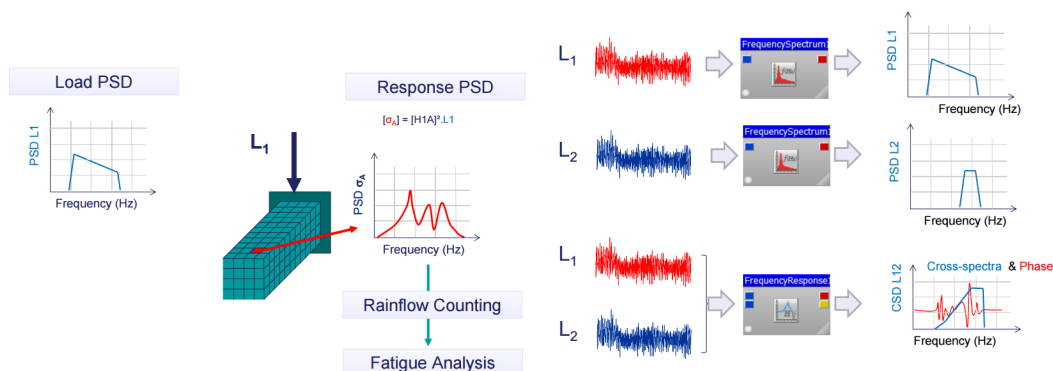
$$\sigma_{V80} = 0.8 \cdot \sigma_{max} \quad (3.35)$$

Zde  $\sigma_{V80}$  je napětí, které má hodnotu minimálně 80% hlavního napětí a  $\sigma_{max}$  je první hlavní napětí.

### 3.11 Výběr metody pro vyhodnocení únavového poškození

Pro vyhodnocení únavového poškození se nabízelo hned několik metod, které jsou popsány v rešeršní části práce. Bylo například možné ze známého PSD zátěžného profilu vypočítat spektrální momenty a pro vyhodnocení použít například Dirlikovu metodu, která by provedla vyhodnocení přímo. Nicméně jak bylo napsáno v předchozích kapitolách, tak při práci s PSD funkcí je vyhodnocováno ekvivalentní napětí a ztrácí se informace o fázi, což je jedna nevýhoda. Druhá nevýhoda je pak nemožnost provést submodeling. Aby se tomuto problému předešlo, bylo rozhodnuto pro vyhodnocení použít méně standardní metodu fungující na následujícím principu. Použije se jednotková harmonická analýza jako zesílení PSD zátěže a dostane se PSD odezva. Vzhledem k lineární povaze celého problému by to mělo být proveditelné. Postup bude podobný jako v rešeršní části práce, ale budou zde určité odlišnosti. Tuto metodu bylo třeba verifikovat, což je provedeno v následující sekci.

Je dobré poznamenat, že v rešeršní části práce se lineární přenosová funkce  $H(\omega)$  počítala z jednotkové analýzy s tím rozdílem, že byl pro získání této funkce použit i fázový úhel. Pro výpočet samotné funkce frekvenční odezvy se pak použil vzorec pro velikost vektoru  $H(\omega) = \sqrt{A^2 + B^2}$ , kde B značilo právě fázový úhel. Po pročtení příslušné literatury bylo rozhodnuto pro použití pouze amplitudy a to z důvodů, že fázový úhel má význam používat u systémů s více vstupy a pro systém s jedním vstupem (tj. PSD buzení v ose z) stačí použít pouze amplitudu. Tuto volbu lépe nastíní obrázek 3.18, na kterém je vlevo vidět systém s jedním vstupním zatížením ( $L_1$  značí vstupní PSD zatížení, kde je s nosníkem kmitáno ve směru šipky, nejedná se o zatížení ve vetknutí). Vypočítá se harmonická analýza a vynásobí se PSD zatížením. Vpravo je vidět, že se jedná o systém s více vstupními zatíženími a je nutné zde uvažovat korelaci obou procesů, kde je třeba vypočítat tzv. křížovou spektrální výkonovou hustotu a pro výpočet je pak nutné použít i fázi. Více informací o tomto způsobu získání funkce frekvenční odezvy je v knize [13].



Obrázek 3.18: Ukázka postupu výpočtu při jednom a při více vstupech PSD[18]

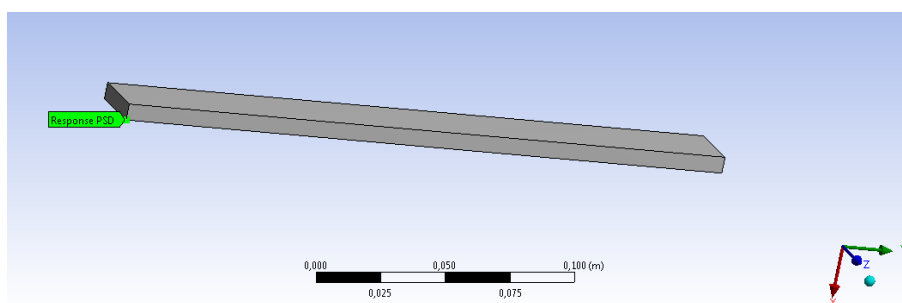
## 4 Verifikace použité metody

Vzhledem k tomu, že metoda použitá k vyhodnocení únavového poškození není úplně standartní, bylo potřeba ji na jednoduchém příkladu verifikovat. V konečněprvkovém programu Ansys byl tedy navržen nosník, jehož rozměry a materiálové vlastnosti jsou uvedeny v tabulce 1. Na tomto nosníku vyobrazeném na obrázku 4.1 byla nejprve provedena modální analýza pro zjištění vlastních frekvencí (obrázek 4.4), poté byla provedena harmonická analýza (zobrazena na obrázku 4.5), která měla jednotkové zatížení ve formě

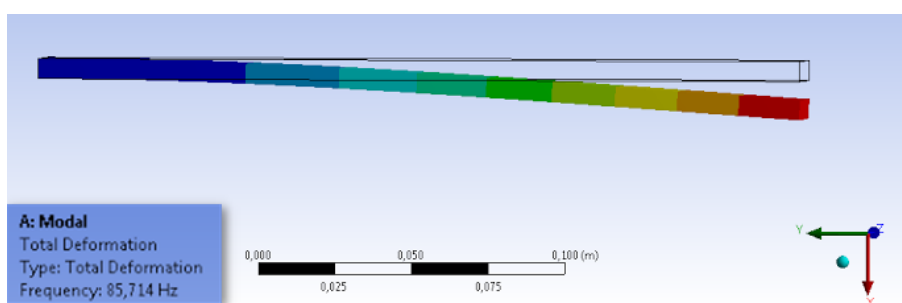
zrychlení, tj.  $1m/s^2$  ve vertikálním směru, v našem případě osa x. Jednotlivé vlastní frekvence analyzovaného nosníku jsou zobrazeny na obrázku 4.4.

Parametr	Hodnota parametru
Šířka	0.025m
Délka	0.25m
Hloubka	0.0065m
Materiál	hliník
Hustota	$2700 \frac{kg}{m^3}$
Modul	$6.9e10 Pa$

Tabulka 1: Rozměry a materiálové vlastnosti testovaného nosníku

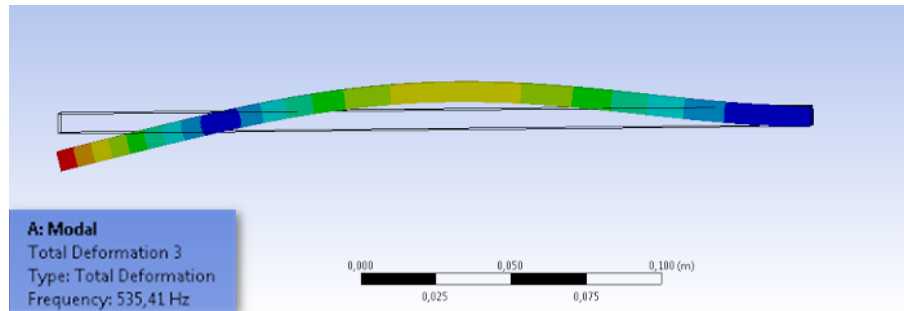


Obrázek 4.1: Nosník použitý pro verifikaci metody

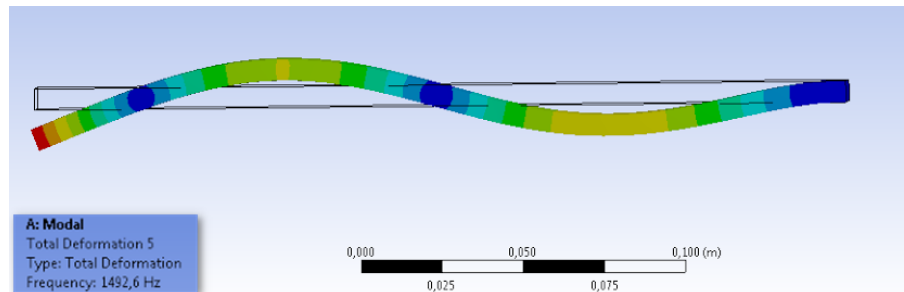


Obrázek 4.2: Jednotlivé vlastní frekvence analyzovaného nosníku

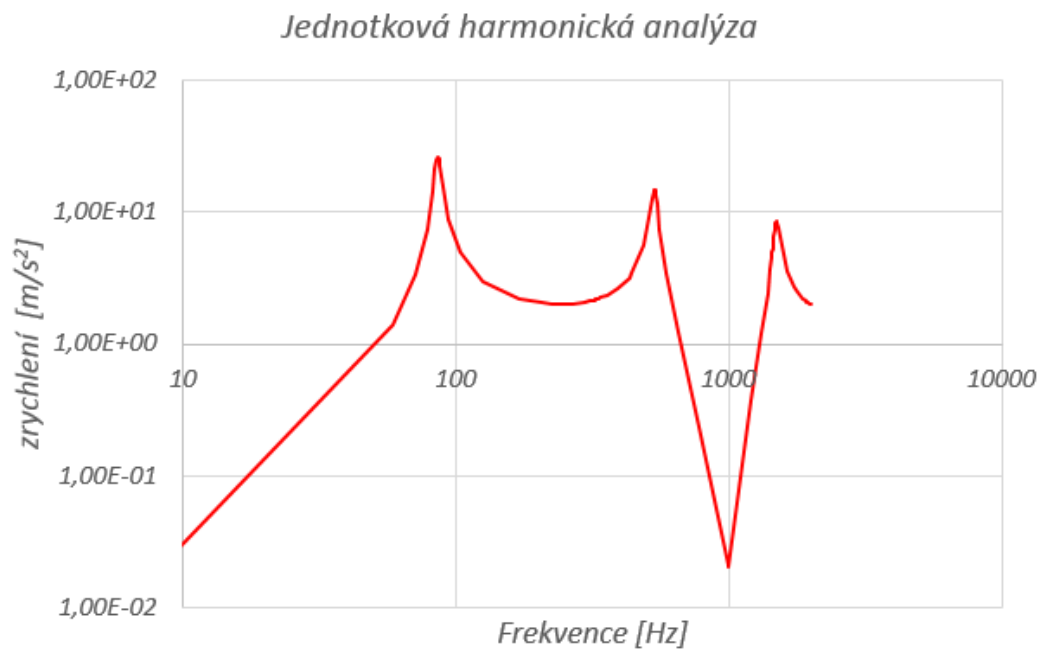
Vlastní frekvence zjištěné z modální analýzy se shodovaly s výsledky z harmonické analýzy i s výsledky z analýzy PSD odezvy. Tato jednotková harmonická analýza zde plnila funkci tzv. lineární přenosové funkce (z anglického frequency response function). Po pročtení příslušné literatury a při předpokladu, že se jedná o lineární dynamiku, do které náhodné vibrace taktéž spadají, bylo známé PSD zatížení (na obrázku 4.6) přenásobeno touto



Obrázek 4.3: Jednotlivé vlastní frekvence analyzovaného nosníku



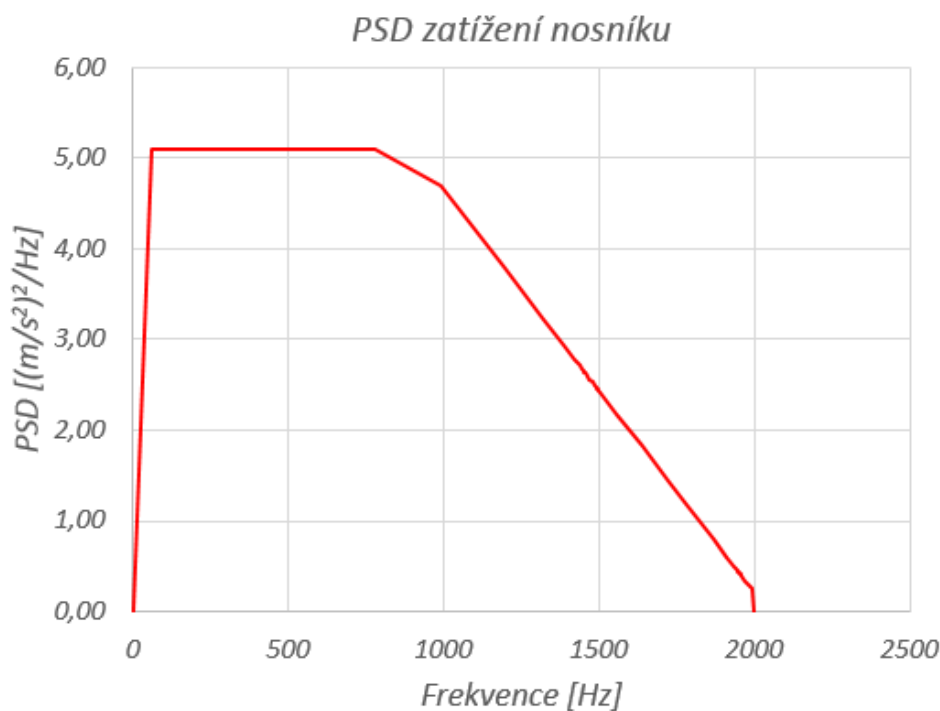
Obrázek 4.4: Jednotlivé vlastní frekvence analyzovaného nosníku



Obrázek 4.5: Graf průběhu odezvy systému na jednotkovou zátěž v ose x

přenosovou funkcí podle vztahu 4.1 a výsledkem byla téměř totožná křivka (zobrazena na obrázku 4.8) s křivkou získanou z řešiče pro náhodné vibrace (obrázek 4.7).

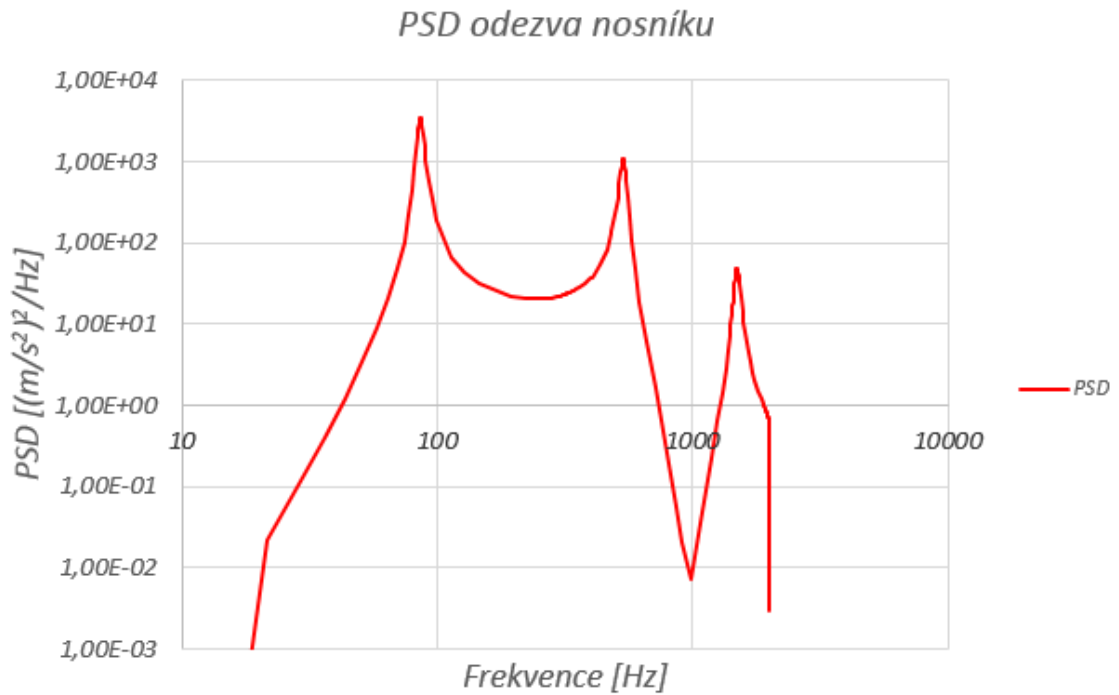
$$G_{AMP}(f) = P(f) \cdot |X_{AMP}(f)|^2 \quad (4.1)$$



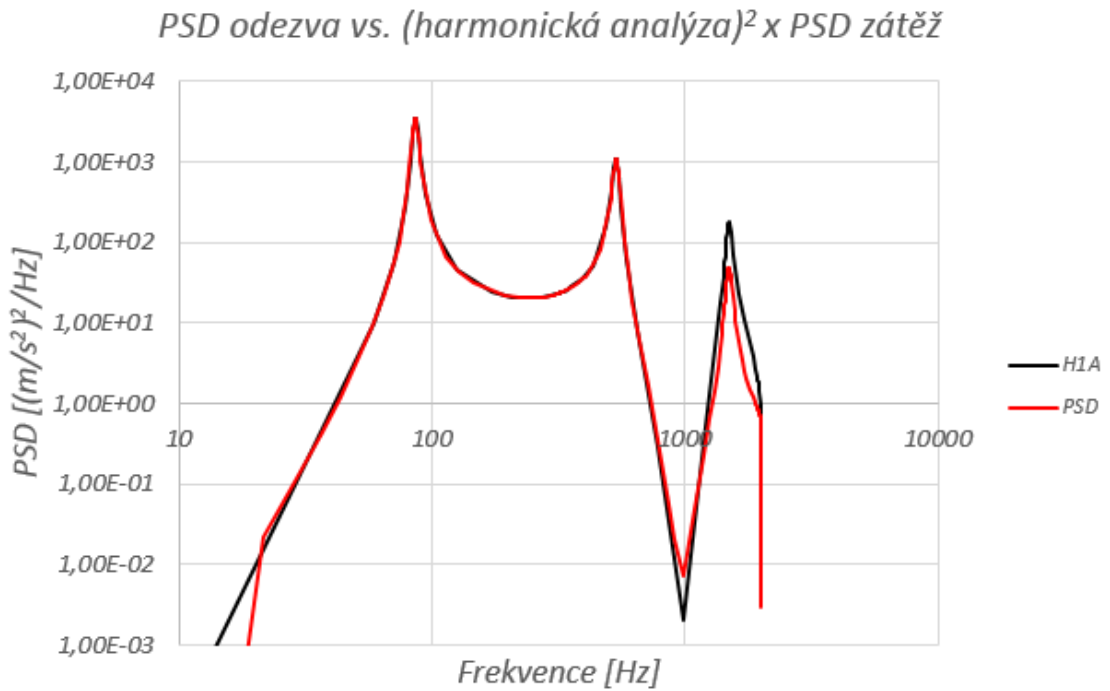
Obrázek 4.6: Graf průběhu PSD zátěže

Z obrázku 4.8 bylo usouzeno, že křivka získaná přenásobením PSD zátěže jednotkovou harmonickou analýzou dostatečně přesně aproximuje křivku získanou z PSD řešiče obzvláště pak v zájmové oblasti kolem prvního vlastního tvaru, který byl v našem případě únavový. Pro úplnost je dobré uvést, že harmonická i PSD analýza byla provedena v jednom stejném uzlu a vyhodnocena jako akcelerace v ose x. Zvolený uzel pro vyhodnocení tohoto příkladu je vidět na obrázku 4.1.





Obrázek 4.7: Graf zobrazující průběh PSD odezvy z řešiče random response



Obrázek 4.8: Porovnání výsledků z řešiče random response s námi vypočtenou odezvou

## 5 Měření a testování analyzovaného dílu

V této kapitole je popsán testovaný díl a experimentální měření, které bylo pro účely vyhodnocení únavového poškození provedeno. Experimentální měření bylo provedeno v laboratořích firmy Robert Bosch České Budějovice a prováděli ho pracovníci laboratoře podle zadání týmu provádějícího simulace .

### 5.1 Popis testovaného dílu

Testovaným dílem byl v této diplomové práci GPA modul (z anglického General Purpose Actuator; český ekvivalent je servopohon pro všeobecné účely), který je zobrazen na obrázku 5.1. Tento modul se v automobilovém průmyslu používá v širokém spektru aplikací například pro nastavení klapek a ventilů v sacím potrubí. Servopohon pro všeobecné účely (GPA) přivádí čerstvý vzduch do komory motoru. Tento elektrický pohon činí klapky a ventily plynule nastavitelné s přesnou polohovou zpětnou vazbou. To znamená, že všechny funkce pro řízení přívodu vzduchu do motoru mohou být lépe koordinovány. Výsledkem je nižší spotřeba paliva, méně  $CO_2$  a celkové snížení emisí. Dále lze tento modul použít pro regulaci turbodmychadel s variabilním časováním lopatek. Vlastní realizace natáčení lopatek turbodmychadla se realizuje pomocí servopohonu, který je přes převodovku spojen s akčním členem, který lopatky přímo natáčí. Tento akční člen je v této práci analyzovaný lever (páka) a je na obrázku 5.1 označen červeným kroužkem.

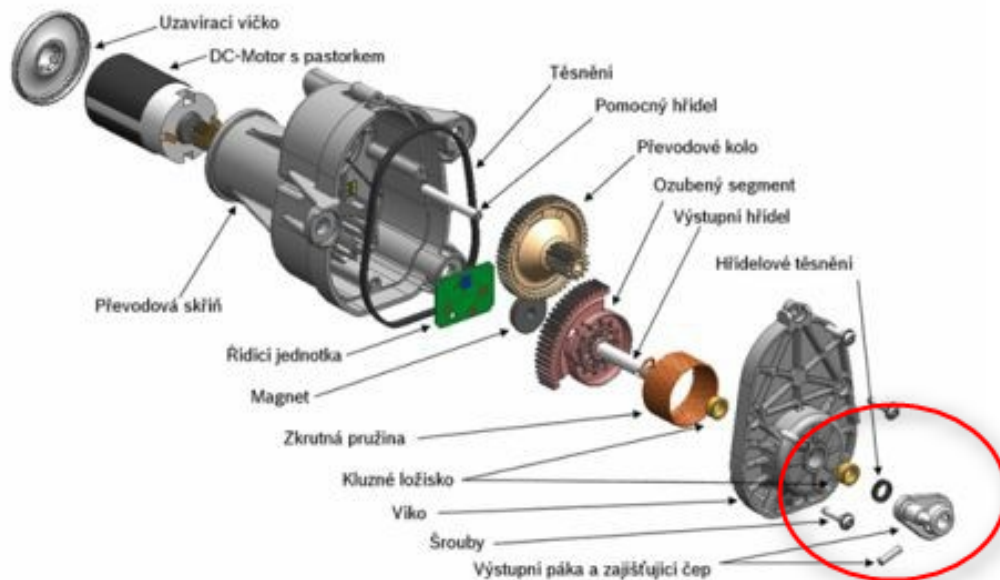
Na výše zmíněném GPA modulu bude testována únavová životnost právě *leveru*. Podle nejnovějších vývojových metod používaných ve firmě Bosch (DFR-design for realibility) byl tento uzel (lever) vyhodnocen jako jeden z možných kritických.

### 5.2 Měření testovaného dílu

Pro určení limitní hodnoty napětí *leveru*, konkrétně nejvíce exponovaného místa ve svaru, byla provedena vibrační zkouška na shakeru. Hlavní úkoly tohoto experimentu byly:

- určit limitní napětí pro svar *leveru* při reálném zatížení
- vybrat optimální konstrukční variantu

### General Purpose Actuator (GPA)



Obrázek 5.1: GPA modul

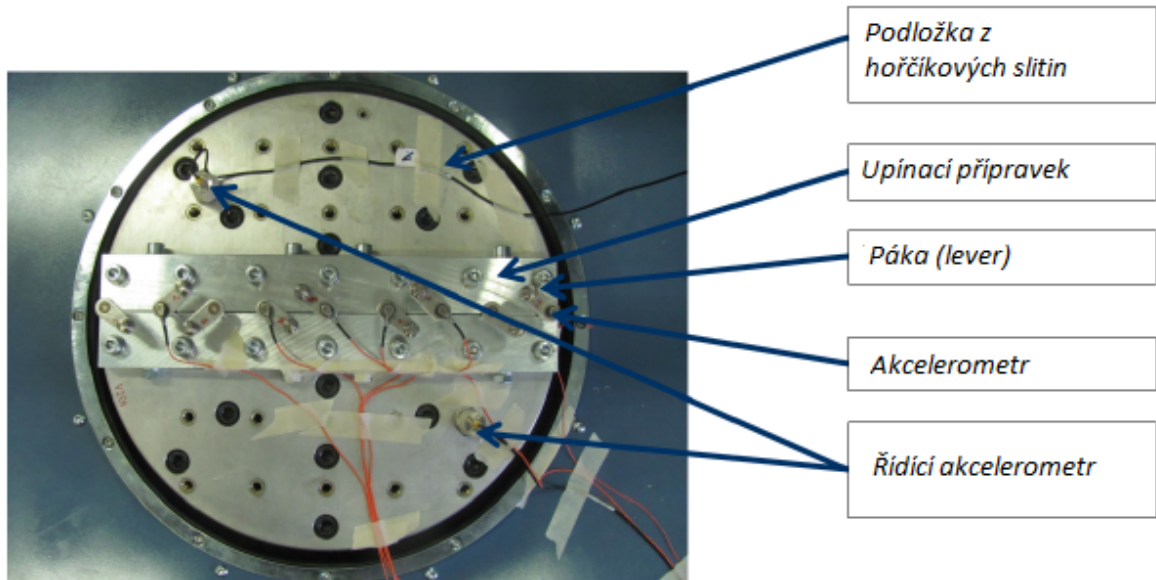
### 5.3 Nastavení testu

Test byl proveden na vibračním zařízení firmy Unholtz-Dickie Corporation, konkrétně se jednalo o typ UDC R12 HF model 560B. Charakteristiky shakeru v podobě dosažitelného zrychlení a rozsahu jsou uvedeny v sekci Přílohy.

Použitý shaker měl frekvenční rozsah do 5 KHz.

Měření bylo provedeno na shakeru, který měl hořčikovou desku, na které byla pro páčky (levery) ještě použita hliníková fixace. Obě tyto komponenty mají vlastní tvar vyšší než 4 kHz (z dat ze simulace a z testů). Pro urychlení testu bylo použito PSD zatížení s hlavní oblastí zatěžování od 500 Hz do 1200 Hz, zbytek frekvenčního spektra byl zatížen malým zatížením  $(0.1(m/s^2)^2/Hz)$  a to proto, aby bylo možné sledovat růst trhliny na zkušebních vzorcích. Pro toto sledování byl využit druhý vlastní tvar, který byl 3000 Hz a byl více citlivý na růst trhliny. Pokles vlastní frekvence vlivem šíření trhliny byl větší než u prvního vlastního tvaru na 1085.1 Hz viz. obrázek 5.11. Na ose *leveru* byl nalepen směrový akcelerometr (pro kontrolu chování svaru, konkrétně šíření trhlin), který měřil vertikální zrychlení (v simulaci zrychlení v ose z). Byly testovány dva různé designy. Nastavení testu

pro první zkoušku je vidět na obrázku 5.2.



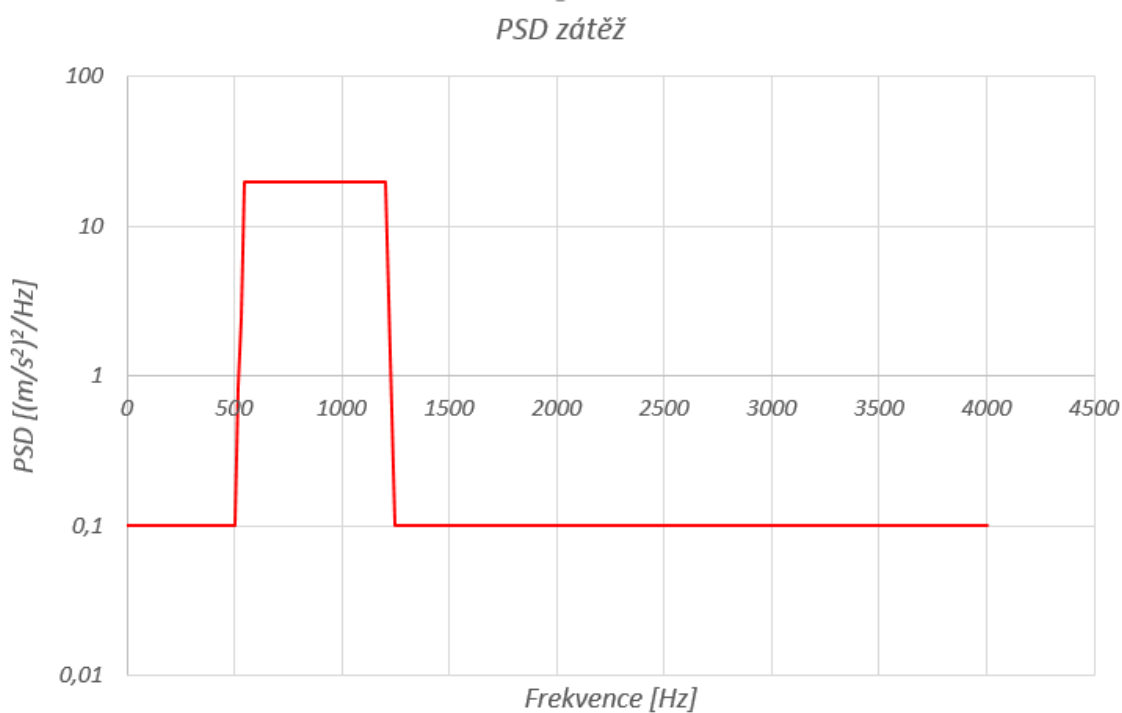
Obrázek 5.2: Nastavení experimentálního měření pro první zkoušku

Experimentální měření bylo provedeno se zátěží, která je zobrazena na obrázku 5.16.

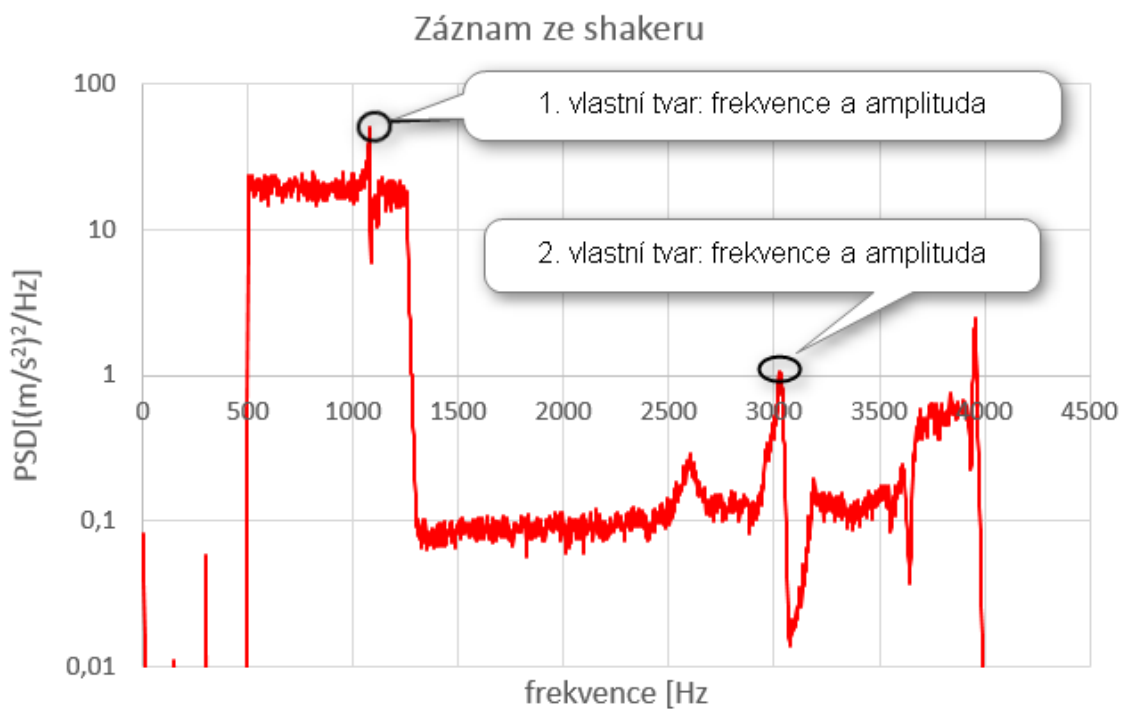
Výstup z měření na shakeru je zobrazen na obrázku 5.4, které bylo provedeno pro první variantu (1.6 mm svar s radiální mezerou viz. obrázek z CT skenu). Na obrázku 5.4 jsou vidět dva vlastní tvary, kde první byl citlivý na únavové poškození a druhý na rozpoznání růstu trhliny.

Jak již bylo popsáno výše, druhý vlastní tvar sloužil pro rozpoznání růstu trhliny vlivem měknutí konstrukce při šíření trhliny. Nicméně cílem experimentu bylo určení limitu tak, aby se dospělo k iniciaci trhlín, ale ne k únavovému poškození. Tím pádem bylo určeno, že pokud se frekvence druhého vlastního tvaru posune o  $\Delta 100\text{Hz}$ , dojde k iniciaci trhliny. Na základě této skutečnosti byla sestavována S-N křivka, kde limitní životnost byla iniciace trhliny, tj. pokud poklesla frekvence vlastního tvaru o 100 Hz, je to údaj, který byl použit jako limitní pro výpočet počtu cyklů. Graf zobrazující pokles frekvence druhého vlastního tvaru vlivem iniciace a šíření trhliny zkušební vzorku je zobrazen na obr. 5.5.

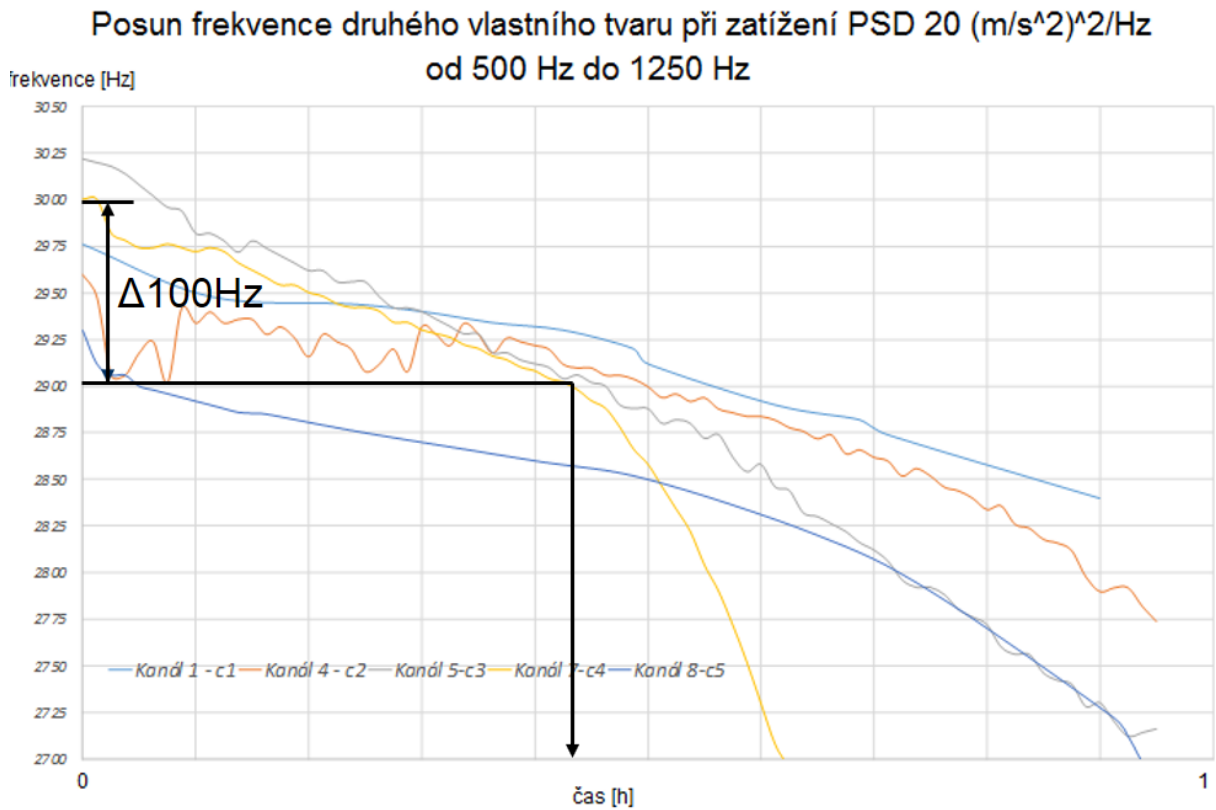
Pro verifikaci použité metody a pro zjišťování iniciace a šíření trhliny pomocí posunu



Obrázek 5.3: PSD zátěž daného komponentu

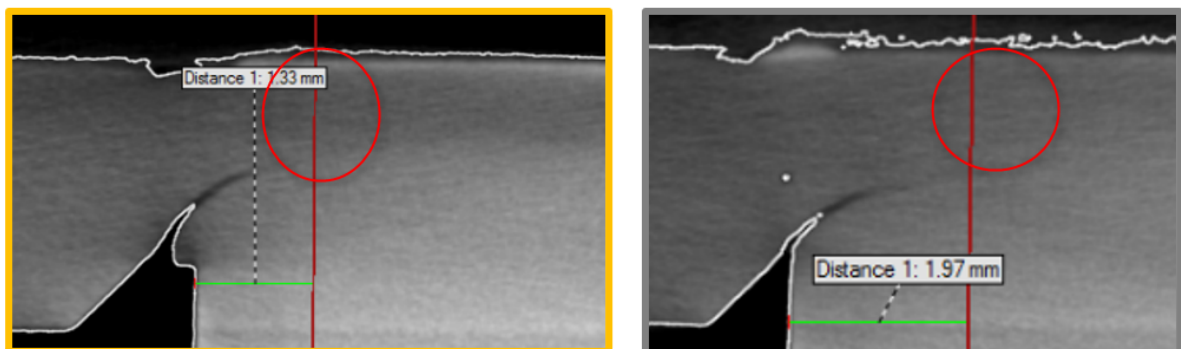


Obrázek 5.4: Výstup z experimentálního měření na shakeru pro první variantu



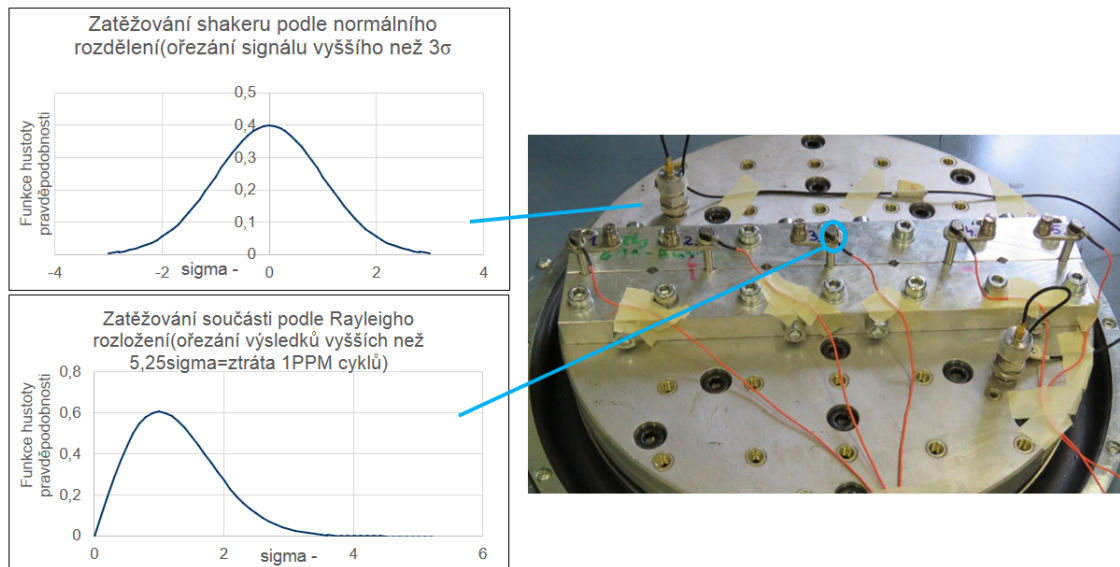
Obrázek 5.5: Pokles frekvence druhého vlastního tvaru vlivem iniciace a šíření trhliny

frekvence druhého vlastního tvaru byl proveden CT sken (na obrázku 5.6, na kterém je znázorněno, jak se trhlina šířila a také, že neprošla skrz celý díl, který tudíž neprasknul ani po teoreticky nekonečném počtu cyklů. Ve svaru se vytvořil plastický kloub (na obrázku zvýrazněný červeným kroužkem), který dalšímu šíření trhliny zamezoval. Barva ohraničení snímku z CT skenu odpovídá křivkám v grafu 5.5. Tento graf popisuje změnu vlastní frekvence v čase tak, jak se trhlina šířila. Vizuální realizaci trhliny ukazuje obrázek 5.6.



Obrázek 5.6: CT sken provedený v místě svaru pro zobrazení únavové trhliny

Je dobré poznamenat, že ze zkušeností pracovníků firmy Robert Bosch byl učiněn předpoklad, že jestliže shaker zatěžuje testovaný díl podle normálního rozložení a předepsané zatížení filtruje tak, že jej ořezává na  $3\sigma$ , potom má testovaný díl odezvu podle Reyleigho rozložení. Tento předpoklad je znázorněn na obrázku 5.7.

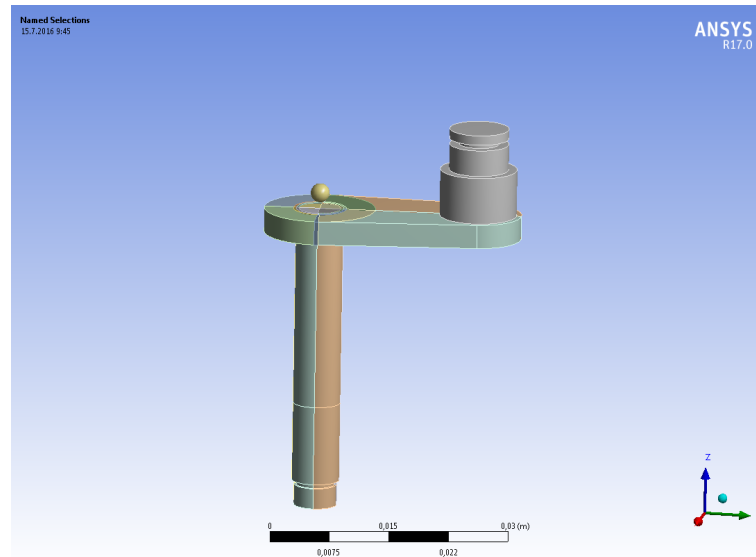


Obrázek 5.7: Zatížení shakerem podle normálního rozložení a odezva dílu podle Reileigho rozložení

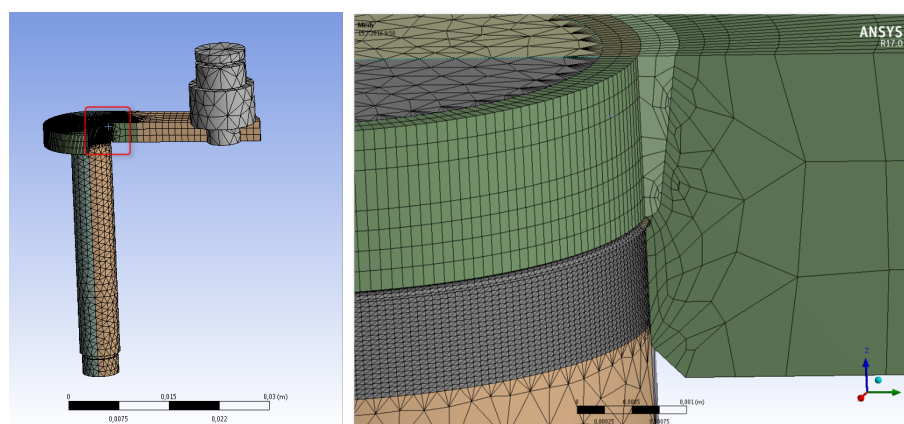
#### 5.4 Simulace testovaného dílu

Nejprve bylo potřeba na získané geometrii vytvořit síť, která byla patřičně upravena v bodech zájmu, zejména v oblasti svaru. Samotný 3D model v Ansysu je zobrazen na obrázku 5.9. Vygenerovaná síť je vidět na obrázku 5.9 vlevo, kde je pak v detailním vpravo zobrazen model a vysíťování svaru.

Po úspěšné verifikaci zvolené metody byla tato metoda použita i pro konečněprvkovou simulaci *leveru*. Postupovalo se stejně jako v případě verifikace metody na jednoduchém nosníku. Byla provedena modální analýza, poté byla provedena jednotková harmonická analýza a nakonec analýza náhodných vibrací. PSD odezva dílu byla poté vypočtena podle rovnice 4.1 Podrobněji je tento postup popsán v jednotlivých sekcích.



Obrázek 5.8: Simulační model vyhodnocovaného komponentu

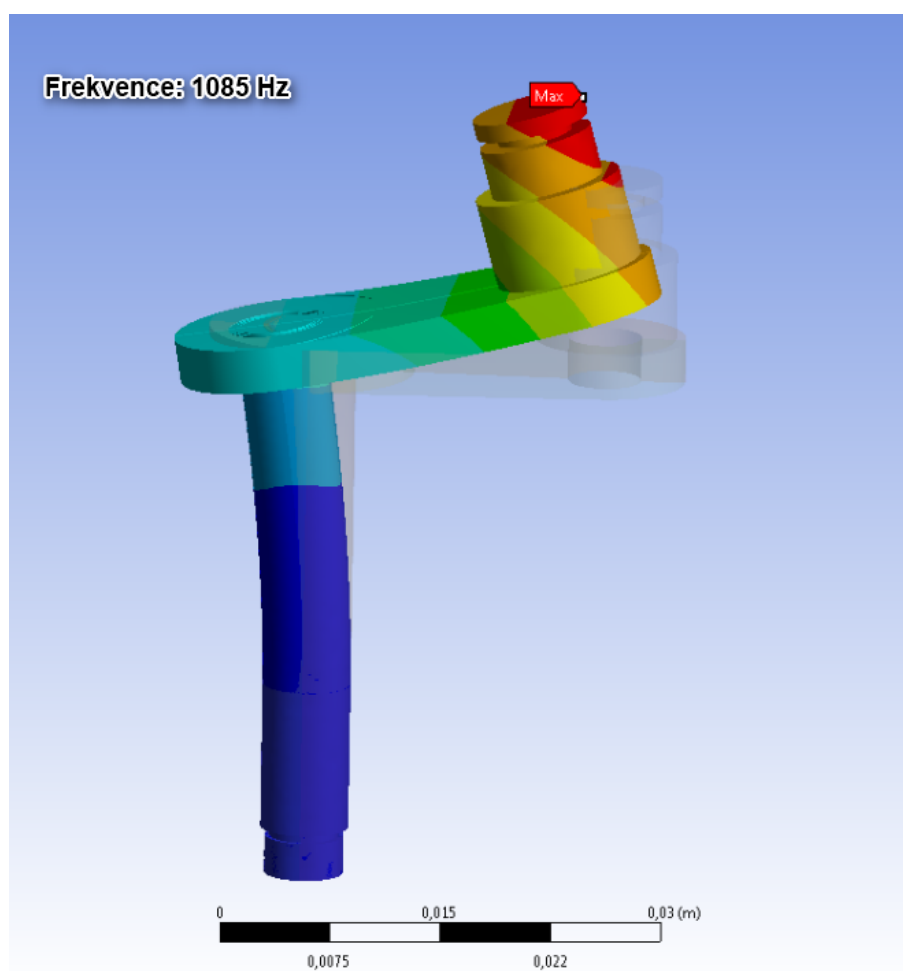


Obrázek 5.9: Vlevo: Ukázka síťování vyhodnocovaného komponentu. Vpravo: Detail sítě svaru



## 5.5 Určení kritického uzlu pro vyhodnocení analýz

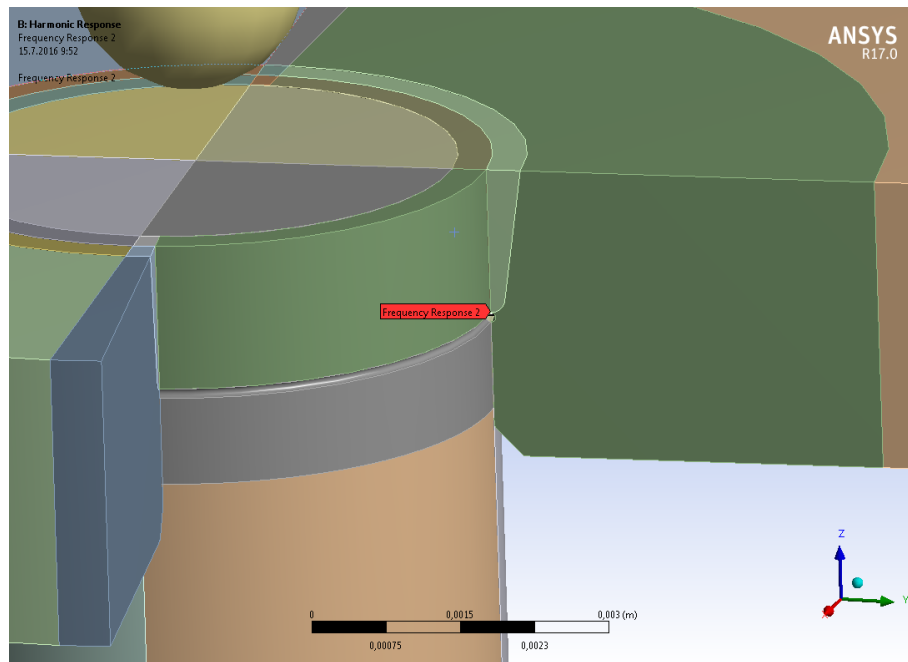
Jak jednotková harmonická analýza, tak analýza náhodných vibrací byly vyhodnoceny v jednom uzlu (vertexu). Byl vybrán uzel, který byl určen jako kritický, jelikož z provedeného experimentu na vibračních zkouškách bylo toto místo vyhodnoceno jako kritické. Obrázek, na kterém je vybraný uzel ukázán je možné vidět zde 5.11. Tento bod byl kritický z důvodu, že v daném místě docházelo k ohybu vlivem vibračního zatížení a svar v daném místě fungoval jako koncentrátor napětí. Tento ohyb je možné pozorovat na obrázku 5.10 a 6.7. Uzel, který byl vyhodnocen jako kritický, je vidět na obrázku 5.11.



Obrázek 5.10: Zobrazení ohybu vznikajícího od vibračního zatížení

## 5.6 Určení kritických frekvencí pro vyhodnocení

Důvodem toho, proč byl první vlastní tvar pro únavové poškození nebezpečnější, byla skutečnost, že pro únavové poškození je podstatná kumulovaná deformace, kde na jedno-



Obrázek 5.11: Zobrazení kritického uzlu

duchem příkladě s funkcí sinus (popsáno v rovnici 5.1) lze ukázat, že  $\omega$  a z ní frekvence se po druhé derivaci zrychlení dostává do jmenovatele v kvadrátu. Tím pádem při vyšších hodnotách frekvence způsobuje, že i menší výchylky zrychlení na nižších frekvencích mohou mít větší význam, nebo lépe větší deformaci, než výchylky zrychlení na vyšších frekvencích s větší hodnotou zrychlení.

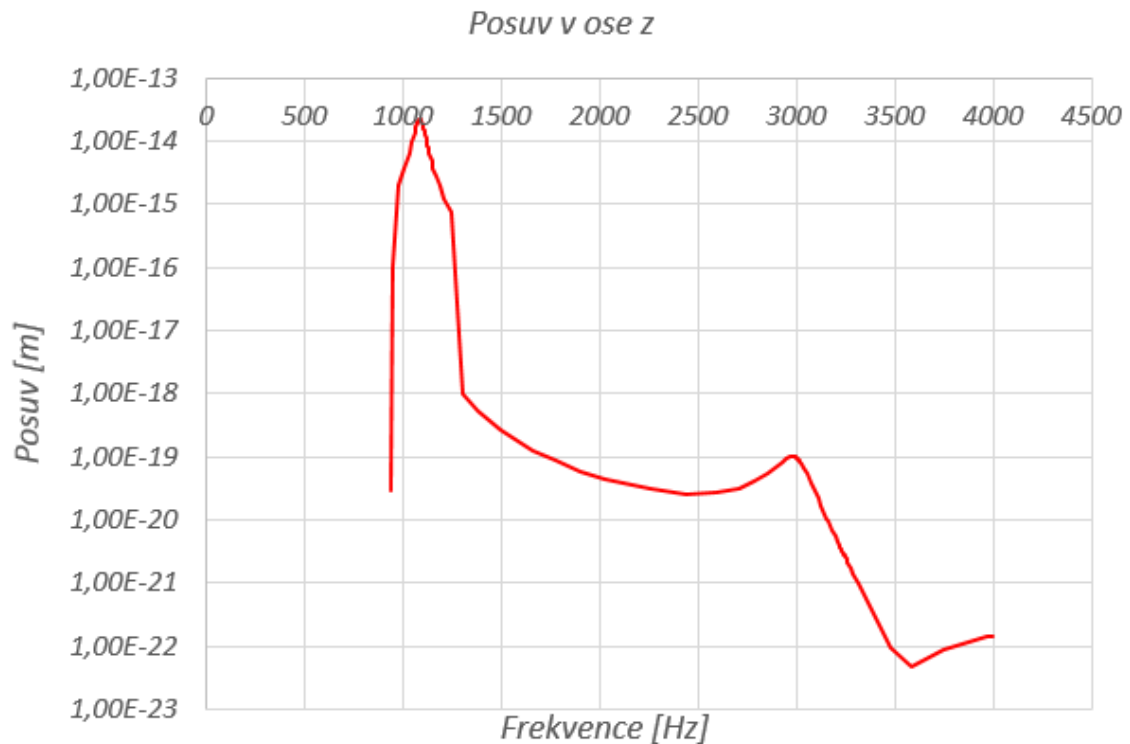
Příklad <sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{d^2 s}{dt^2} = A \sin(\omega t + \varphi) \\
 v &= \frac{ds}{dt} = \int A \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + c \\
 s &= \int -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) dt = -\frac{A}{\omega^2} (\sin(\omega t + \varphi)) + c
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

V tomto příkladu  $\omega$  značí úhlovou rychlost,  $t$  značí čas a  $\varphi$  je fázový úhel.

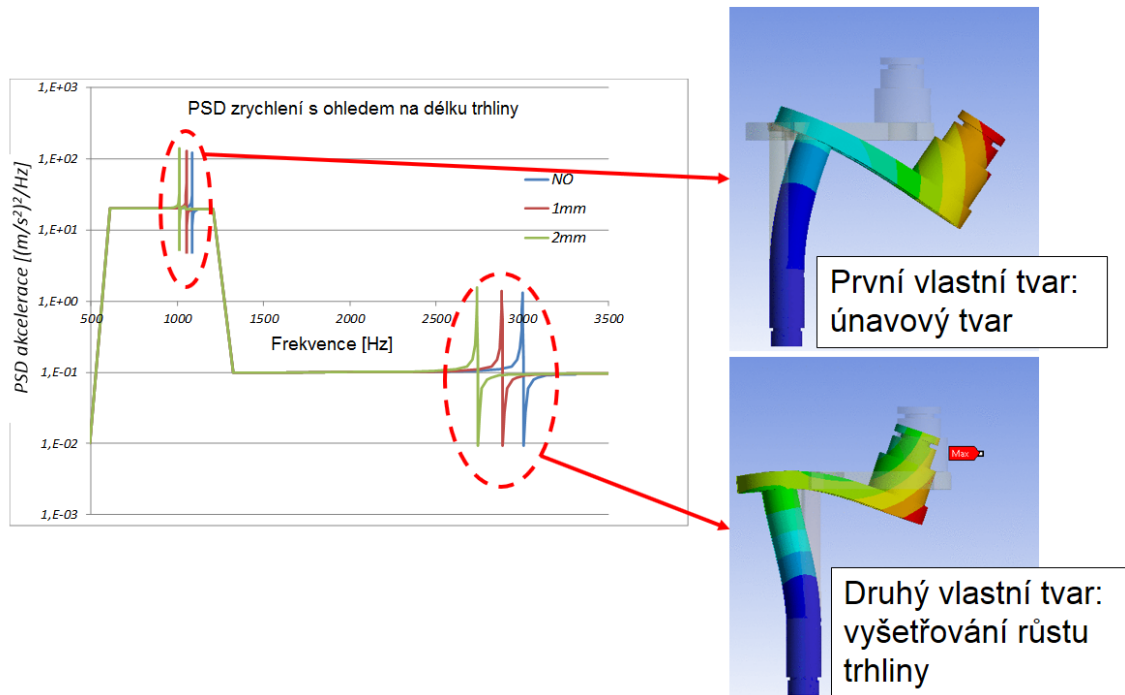
<sup>3</sup>Finální podoba integrálu vyjadřujícího posuv "s" bude v této podobě v případě, že konstanta u rovnici vyjadřující rychlost "v" bude rovna 0

Podobné je to i v případě této simulace, tudíž pokud se toto zjištění aplikuje na náš případ, zjistí se, že větší deformace se bude vyskytovat u tvaru s nižší vlastní frekvencí. V grafu 5.12 je patrné, že největší hodnota deformace je na hodnotě prvního vlastního tvaru. Druhý vlastní tvar byl použit pro určení, zda se ve zkušebním vzorku šíří trhlina. Realizováno to bylo tak, že pokud byl posun vlastní frekvence druhého vlastního tvaru směrem k nižším hodnotám, tak se ve svaru šířila trhlina, protože celá konstrukce jako taková měkla. Tento fakt vychází ze známého vzorce pro výpočet vlastní frekvence  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Tento postup pro zjištění šíření trhliny ve zkušebním vzorku byl použit kvůli faktu, že tento jev nelze jinak pozorovat, protože svar se nachází uvnitř *leveru*. Posun vlastních frekvencí na druhém vlastním tvaru a tím i rozpoznání šíření trhliny je zobrazeno na grafu 5.13.



Obrázek 5.12: Zobrazení posunutí ve vertikálním směru

Fakt, že se trhlina na zkušebním vzorku opravdu šířila, je popsán a zobrazen v sekci Experiment, ve které jsou umístěny obrázky z CT skenu.



Obrázek 5.13: Zobrazení posunu vlastního tvaru vlivem měknutí konstrukce při šíření trhliny na zkušebním vzorku

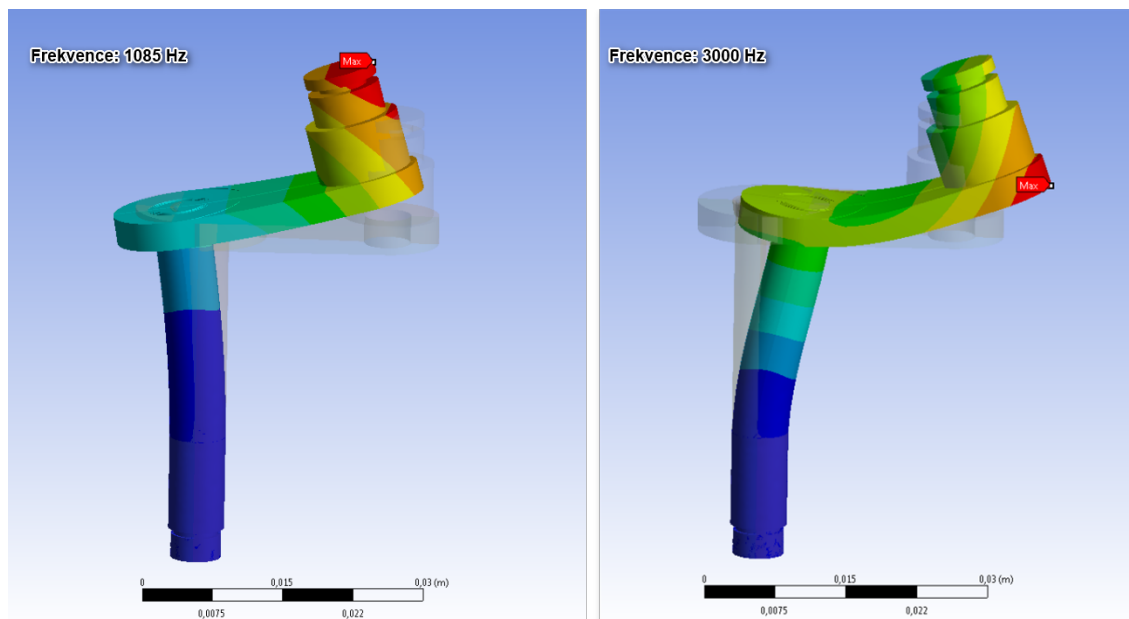
## 5.7 Modální analýza *leveru*

V modální analýze *leveru* byly určeny vlastní frekvence. Vlastní modální analýza je potřebná pro provedení dalších analýz, které z ní vycházejí. Další analýzy, které následují po modální už nepracují se simulačním modelem jako takovým, ale pouze s jeho matematickou interpretací.

První vlastní frekvenci na  $1085\text{ Hz}$  lze vidět na obrázku 5.14 vlevo. Druhá vlastní frekvence byla na  $3000\text{ Hz}$  (na obrázku 5.14) vpravo.

## 5.8 Harmonická analýza *leveru*

Po provedení modální analýzy byla provedena harmonická analýza s jednotkovým zatížením ve vertikálním směru *leveru*. V tomto případě to znamenalo zrychlení  $1\text{ m/s}^2$  v ose  $z$ . Výsledná odezva *leveru* na toto buzení je zobrazena na obrázku 5.15, na kterém je patrné, že vrcholy v harmonické analýze odpovídají vlastním frekvencím v modální analýze a vrcholům v PSD odezvě *leveru* na náhodné buzení. Porovnání výsledků harmonické analýzy a PSD odezvy dílu na náhodné buzení proběhlo v logaritmickém měřítku. Jako u verifikačního příkladu zde byla jednotková harmonická analýza použita jako lineární přenosová



Obrázek 5.14: Výsledky modální analýzy testovaného komponentu

funkce.

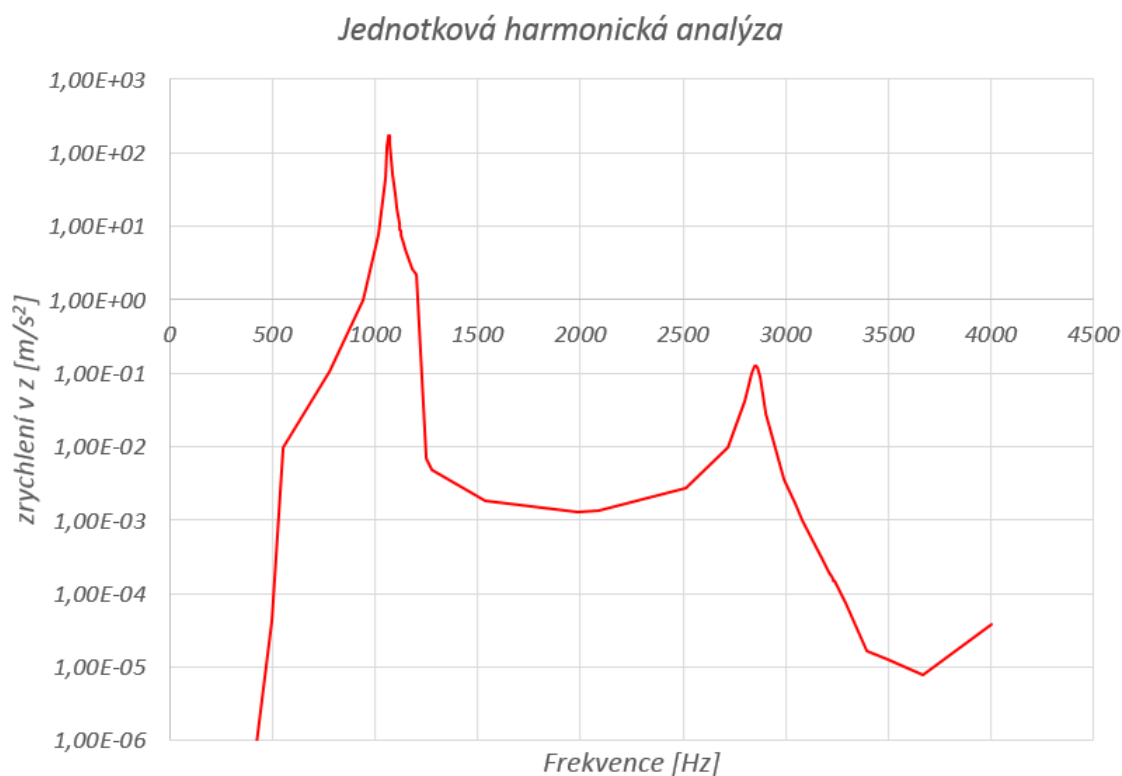
Harmonická analýza byla vyhodnocena v jednom bodě, který byl určen jako kritický. Jednalo se o patu svaru, kde docházelo ke koncentraci napětí vlivem zatížení od vibrací, což bylo popsáno v sekci Výběr kritického uzlu pro vyhodnocení analýz.

## 5.9 Analýza náhodných vibrací

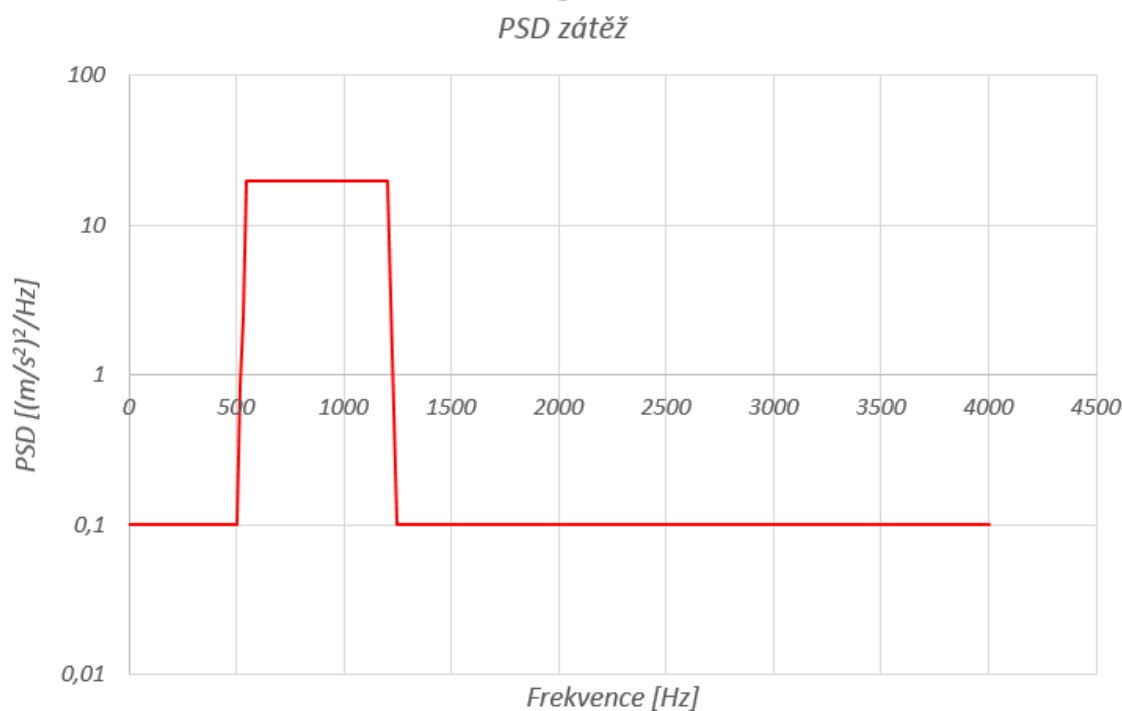
Nakonec byla pro porovnání provedena analýza náhodných vibrací, která sloužila pouze pro verifikaci. V experimentu bylo určeno PSD zatížení *leveru* zobrazené na obrázku 5.16. Na tuto zátěž byla pomocí řešiče pro náhodné vibrace v Ansysu vypočtena odezva (na obrázku 5.17) v nejvíce exponovaném bodě v patě svaru. Tento průběh zátěže je určen empiricky z testování ve firmě Bosch.

PSD odezva z MKP programu Ansys v porovnání s jednotkovou harmonickou analýzou ponásobenou PSD zátěží je zobrazena na obrázku 5.18.

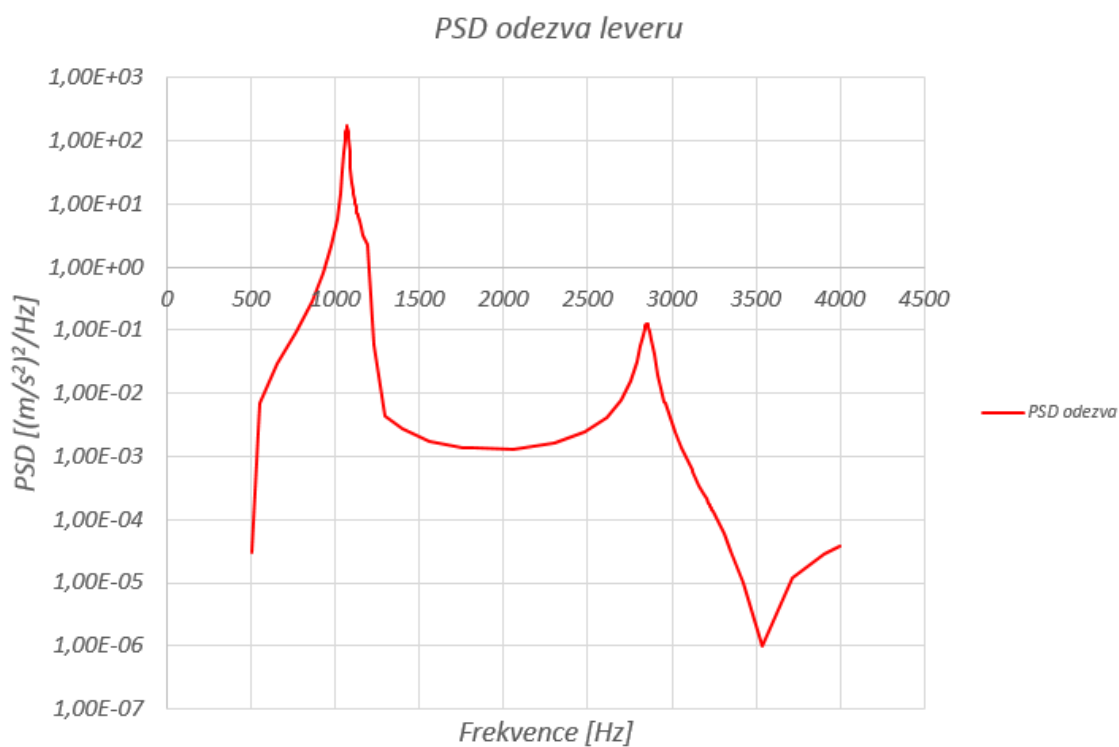
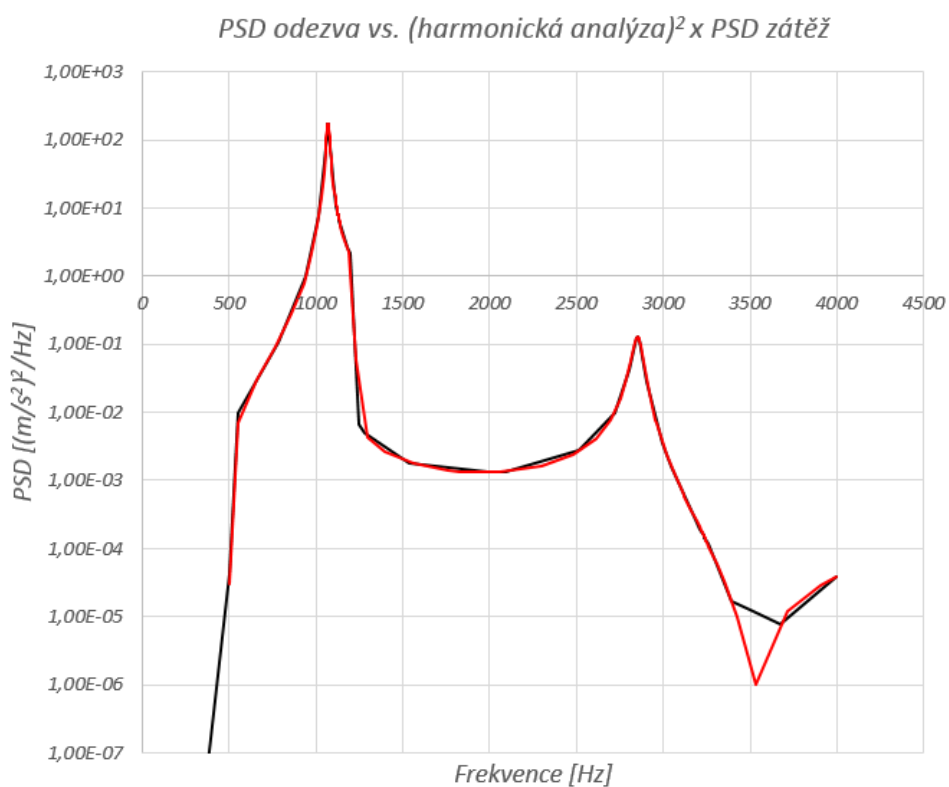
Důvodem toho, že křivky nejsou úplně totožné, je skutečnost, že pro maximální úsporu času (také účel této metody) byla provedena rychlá harmonická analýza a jednotlivé vlastní tvary byly superponovány. Pro lepší shodu obou křivek by bylo možné provést plnou harmonickou analýzu, která je však řádově časově náročnější. Dalším důvodem by mohly být nepřesnosti vlivem vzorkování signálu, které bylo nutné provést z důvodu, že



Obrázek 5.15: Výsledky harmonické analýzy testovaného komponentu na jednotkové buzení v ose z v logaritmickém měřítku



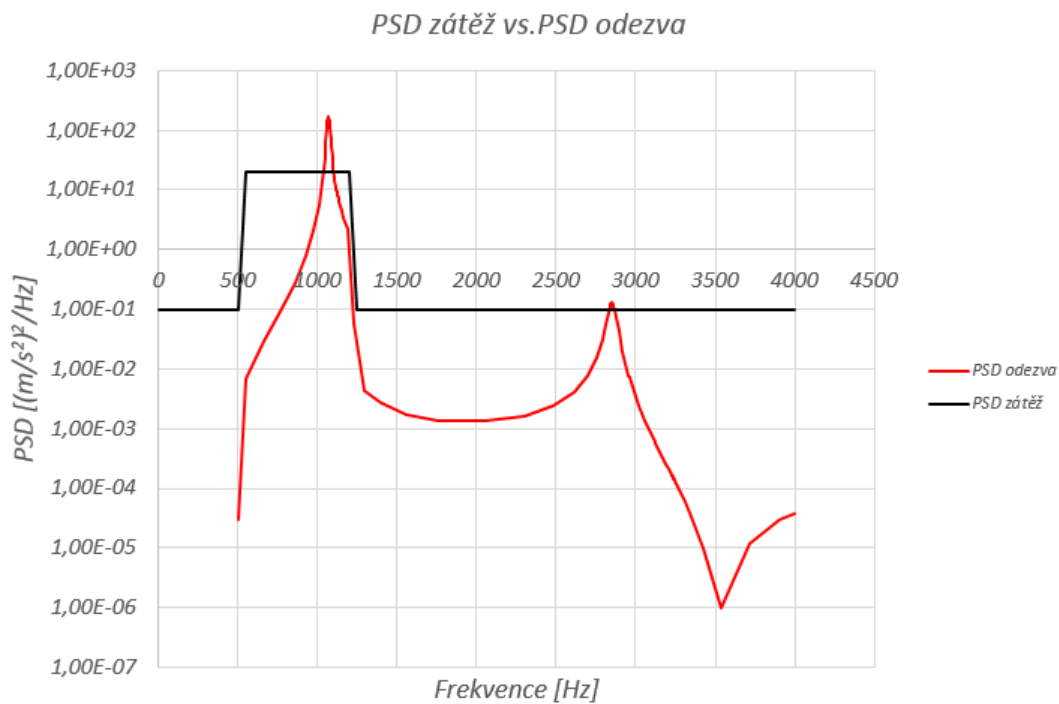
Obrázek 5.16: PSD zátěž daného komponentu

Obrázek 5.17: PSD odezva *leveru* vypočtená programem Ansys

Obrázek 5.18: Výsledné porovnání křivek

odezva z harmonické analýzy nebyla dostupná pro každou hodnotu PSD zátěže, tudíž bylo nutné tyto hodnoty lineárně aproximovat, čímž mohly vzniknout určité nepřesnosti.

Pro úplnost je zde graf PSD zatížení a PSD zátěže, aby bylo lépe představitelné, jak byl díl ve skutečnosti vybuzen. Tento graf je zobrazen na obrázku 5.19.



Obrázek 5.19: Porovnání PSD zátěže s PSD odezvou testovaného komponentu



## 6 Vyhodnocení

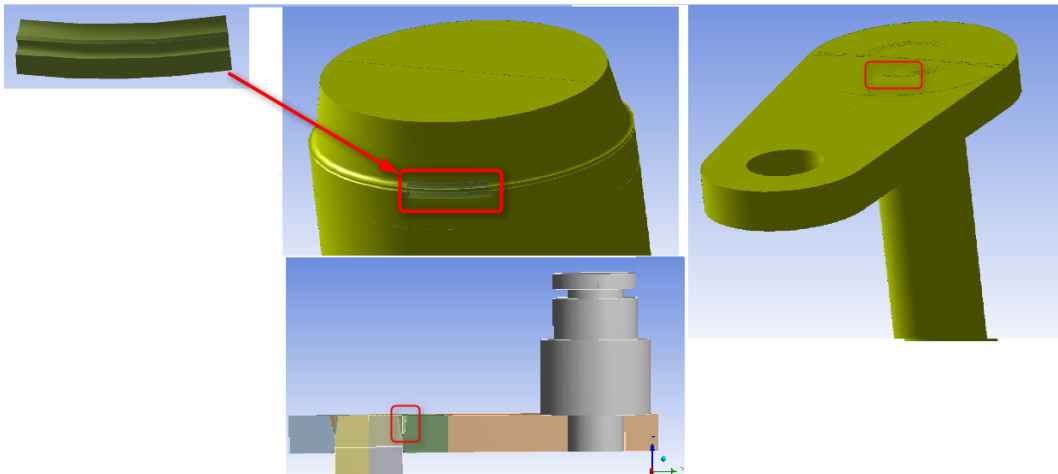
V této kapitole je popsán postup vygenerování S-N křivky daného komponentu pomocí navržené metody, která již narozdíl od řešení náhodných vibrací v řešiči pro náhodné vibrace umožňuje vytvoření submodelu. Submodeling a metoda V80 budou použity pro vyhodnocení únavové životnosti.

### 6.1 Submodel svarového spoje

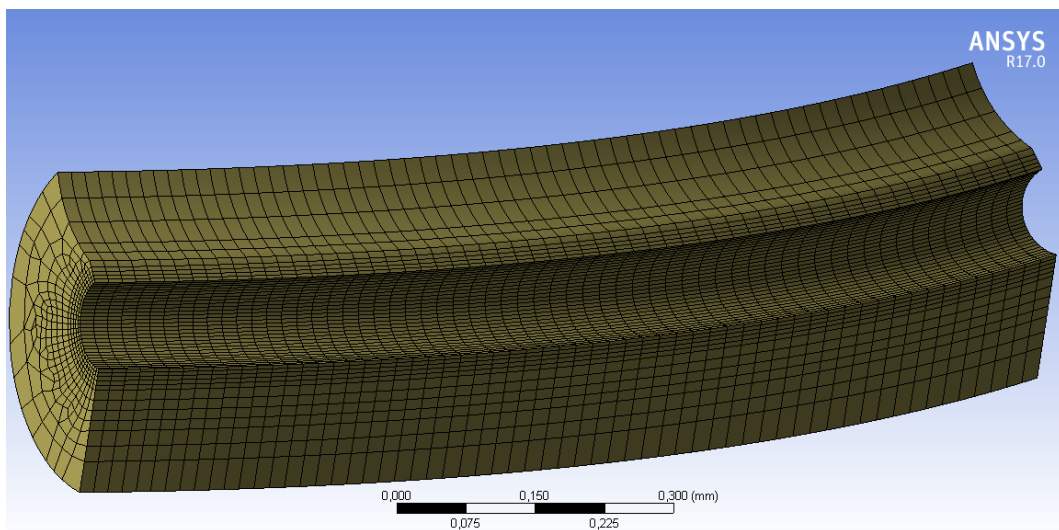
Na základě provedených analýz bylo určeno kritické místo z hlediska únavového poškození, kde pro hrubý odhad prvního hlavního napětí sloužila již jednotková harmonická analýza násobená PSD zátěží, nicméně pro detailnější pohled a vyšší přesnost bylo použito možnosti submodelingu. Submodeling je jedna z výhod, kterou je možné uplatnit, pokud použijeme pro nahrazení PSD odezvy daného komponentu výše popsanou metodu. Jednotková harmonická analýza násobená PSD zátěží totiž na rozdíl od PSD řešiče implementovaného v konečněprvkovém programu Ansys (kde je fázový úhel generován náhodně od  $-\pi$  do  $\pi$  a má statistickou povahu) neztrácí údaje o fázi v místě zájmu (např. vlastní frekvence, únavový tvar atp.). Tato skutečnost umožňuje použít submodeling, který vyžaduje přesnou definici kinematiky komponentu v daném místě (tj. údaj o amplitudě a o fázi). Výběr tělesa pro submodeling a polohu, jak je situováno v globálním modelu, je vidět na obrázku 6.1. Těleso vybrané pro submodeling zahrnuje kritické místo popsané v sekcích výše. Výřez byl proveden způsobem, jaký je zvýrazněn na obrázku a zahrnuje  $30^\circ$  z celého obvodu svaru. Bylo použito symetrie součásti pro zmenšení počtu uzlů sítě a hodnota objemu V80 je tudíž na obrázcích poloviční. Sít' submodelu na analyzovaném komponentu je zobrazena na obrázku 6.2. Tato sít' musela být nastavena tak, aby elementy vybrané metodou V80 byly na některých místech dva za sebou (obrázek 6.3). Metoda V80 totiž pracuje s celými elementy a dvě řady elementů naznačují, že submodel má dostatečně kvalitní sít'. Pokud by byla pouze jedna řada, nelze s jistotou říci, zda-li je v celém elementu 80% maxima prvního hlavního napětí.

Grafické znázornění implementace okrajových podmínek (červené plochy, kde jsou okrajové podmínky, tj. posuvy a deformace, shodné s podmínkami v harmonické analýze) je zobrazeno na obrázku 6.4.

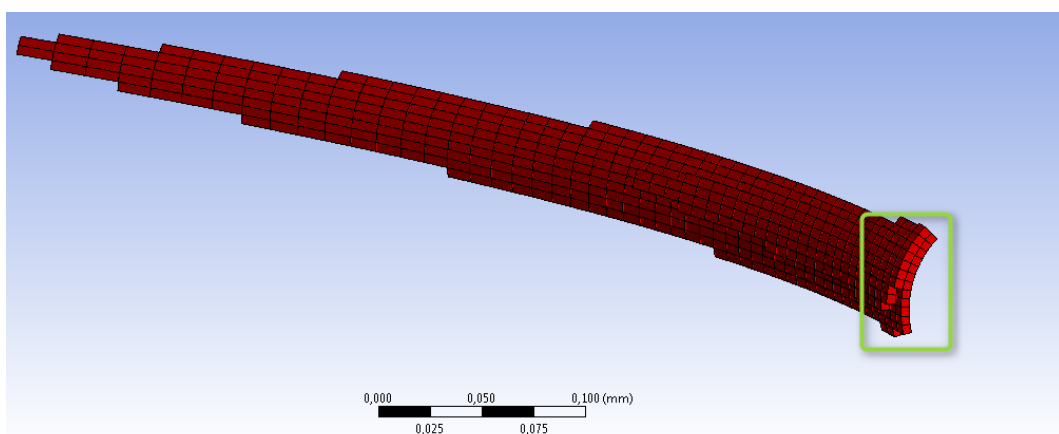
Dále bylo potřeba vybrat uzly, které budou vyhodnoceny metodou V80. Takto vybrané



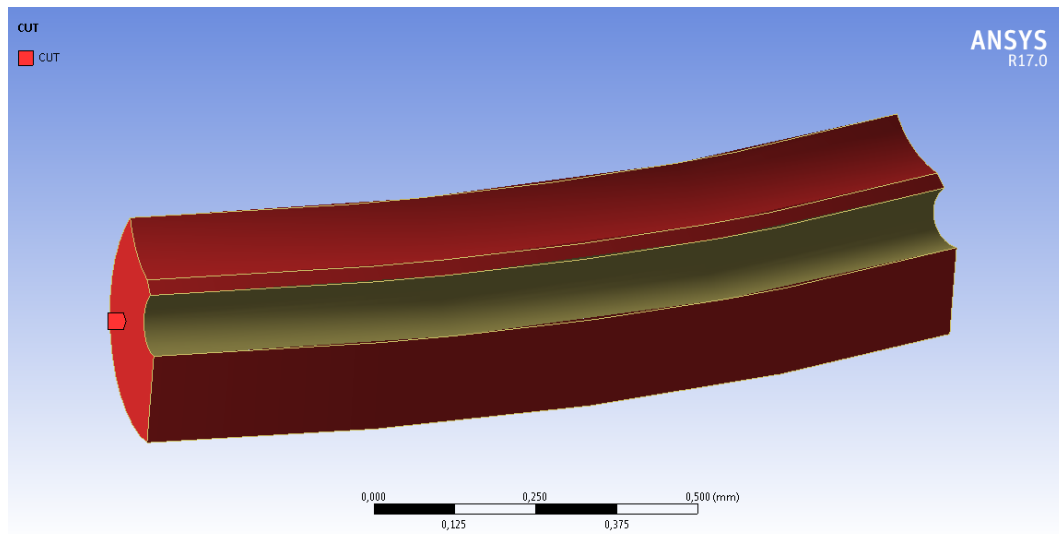
Obrázek 6.1: Ukázka začlenění submodelu do globálního modelu



Obrázek 6.2: Submodel provedený na analyzovaném komponentu

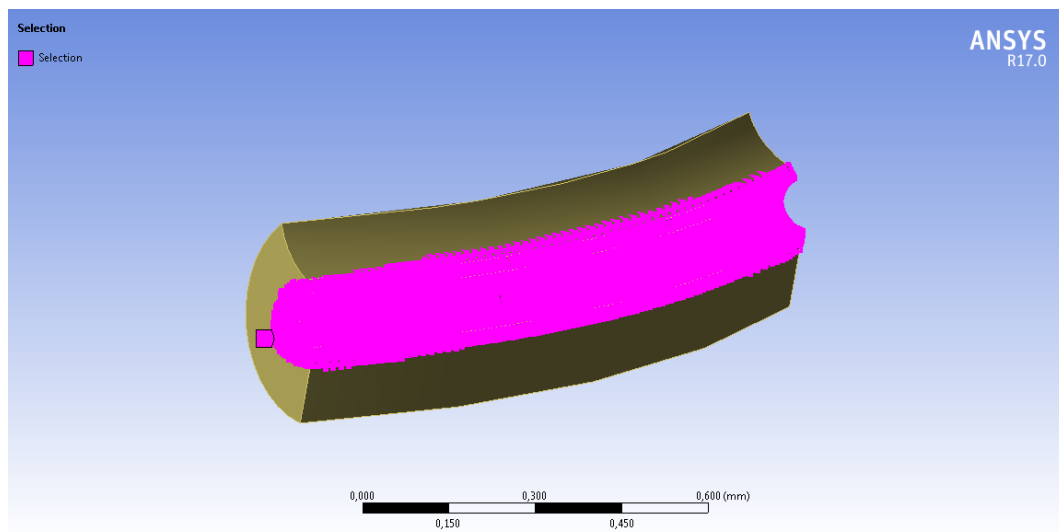


Obrázek 6.3: Elementy vybrané metodou V80



Obrázek 6.4: Grafické znázornění implementace okrajových podmínek

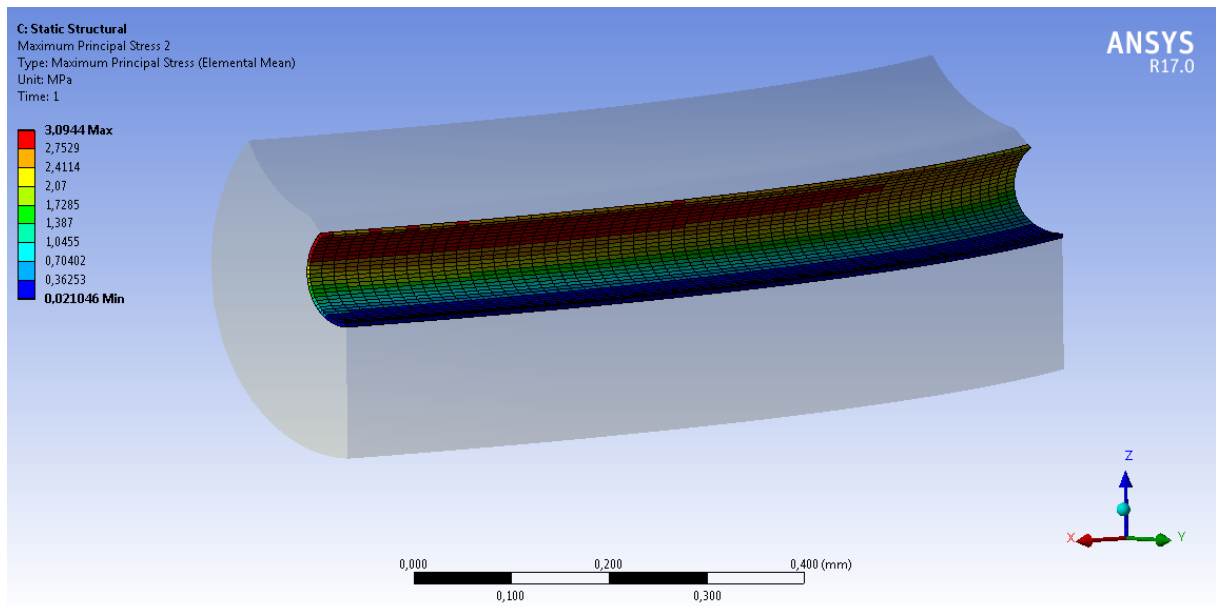
uzly jsou znázorněny na obrázku 6.5.



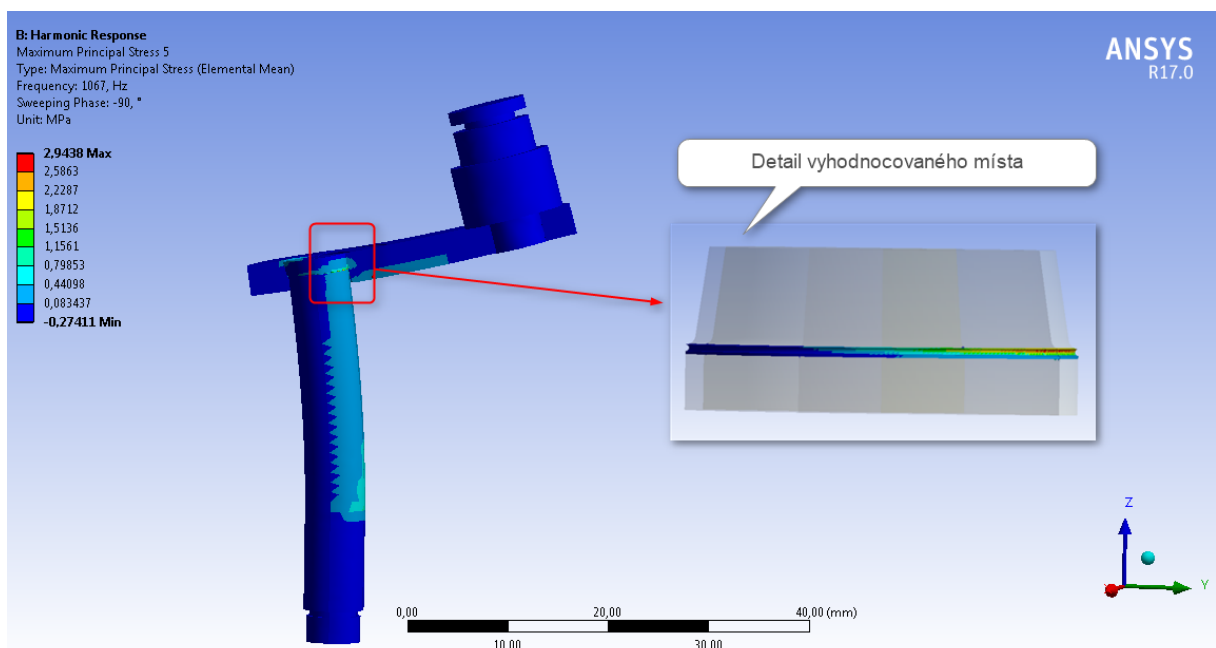
Obrázek 6.5: Uzly vyhodnocené metodou V80

Po těchto operacích již bylo možné provést samotný submodeling a zjistit tak přesnější hodnotu prvního hlavního napětí a aplikovat zmiňovanou metodu V80. První hlavní napětí, jako výstup ze submodelingu, je zobrazeno na obrázku 6.6. Zde je patrné, že maximální hodnota napětí byla dle simulace 3.09 MPa, což je přesnější hodnota oproti hodnotě získané z globálního modelu pomocí jednotkové harmonické analýzy. Pro lepší představu o tom, jak se hodnoty lišily, je zde přidán obrázek 6.7, na kterém je zobrazena hodnota prvního hlavního napětí získaného z makromodelu. Tato hodnota napětí byla dle postupu metody V80 vynásobena podle vzorce  $\sigma_{V80} = 0.8 \cdot \sigma_{max}$ , což poskytlo napěťovou mapu

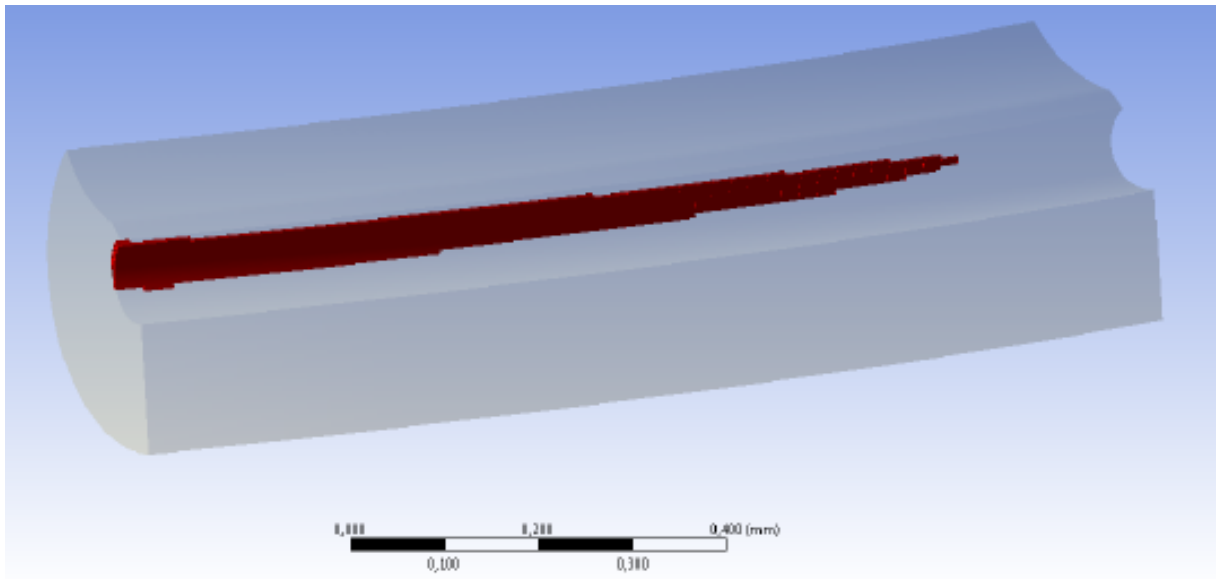
všech elementů, které jsou zatíženy minimálně 80% prvního hlavního napětí. V tomto případě, kdy mělo první hlavní napětí hodnotu 3.094 MPa, vychází 80% maxima na 2.4752 MPa. Elementy s hodnotou vyšší než 2.4752 MPa jsou zobrazeny na obrázku 6.8.



Obrázek 6.6: První hlavní napětí jako výstup ze submodelingu

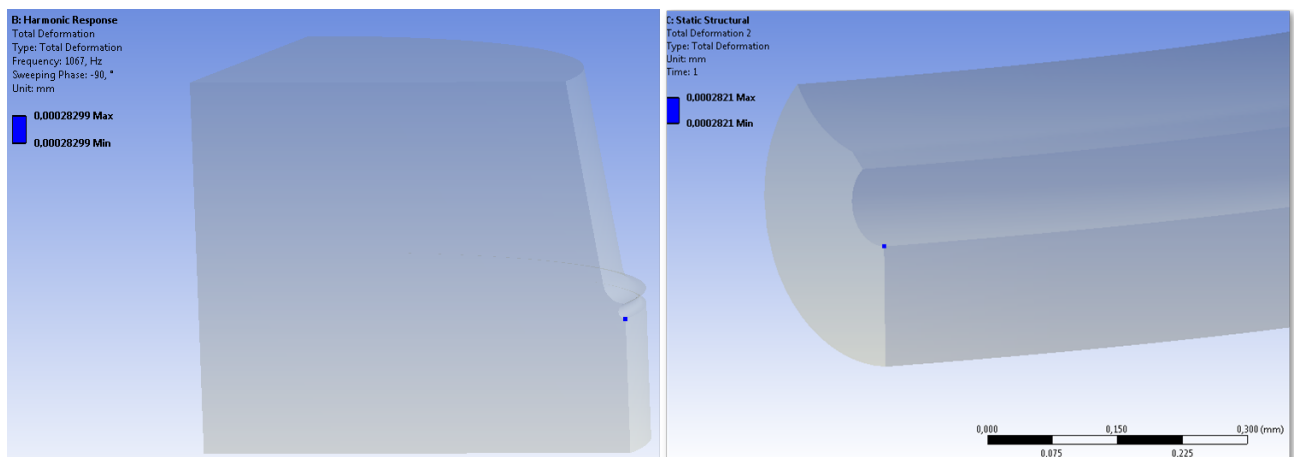


Obrázek 6.7: Hodnota prvního hlavního napětí stanoveného z globálního modelu



Obrázek 6.8: Elementy zatížené minimálně 80% maximálního napětí

Jako validace, zda je submodel v přijatelné korespondenci s makromodelem, bylo použito porovnání deformací ve zvoleném místě (uzlu), dle předpokladu by se měla shodovat hodnota získaná z globálního modelu s hodnotou získanou ze submodelu. Výslednou validaci ve zvoleném místě lze vidět na obrázku 6.9. Z tohoto obrázku je patrné, že rozdíl deformací je zanedbatelný a submodel je v přijatelné korespondenci s makromodelem.



Obrázek 6.9: Porovnání deformací submodelu (vlevo) a makromodelu (vpravo)

## 6.2 Postup při generování S-N křivky testovaného dílu

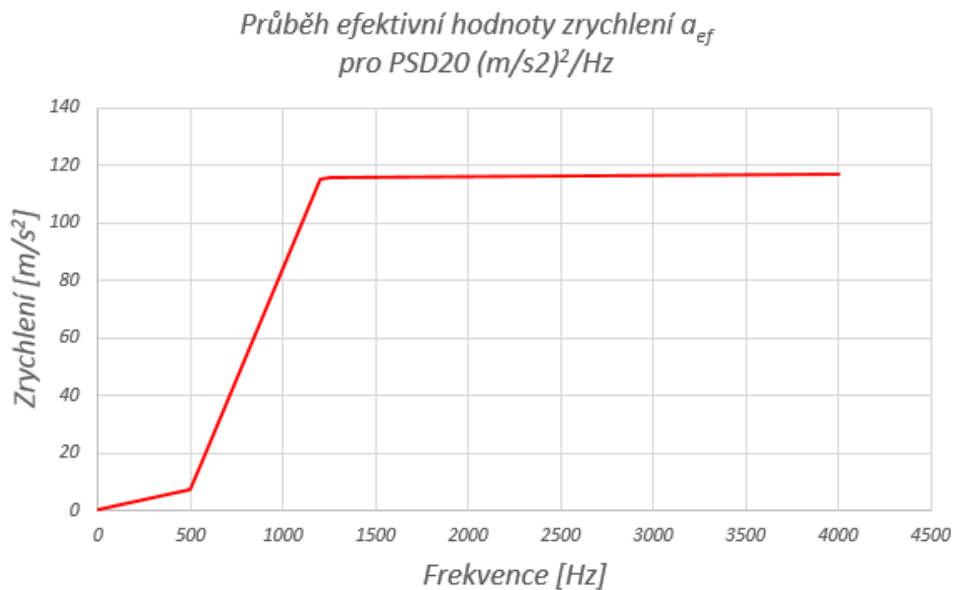
Ze submodelu se stanovilo první hlavní napětí v určeném kritickém místě. Tato hodnota napětí je výsledkem z jednotkového zatížení a je tedy nutné nějakým způsobem tuto hodnotu napětí aplikovat na dané PSD zatížení. To je provedeno vynásobením tohoto napětí efektivní hodnotou zrychlení spočtenou z PSD zátěže v místě, ve kterém již všechny harmonické proběhly, tj. v koncovém bodě <sup>4</sup>. Graf efektivní hodnoty zrychlení v závislosti na frekvenci při zatížení  $PSD\ 20(m/s^2)^2/Hz$  je zobrazen na obrázku 6.10. Z grafu je možné odečíst, že maximální efektivní hodnota zrychlení je  $116m/s^2$ . Vynásobí se tedy napětí získané ze submodelingu touto hodnotou a dostane se reálná hodnota prvního hlavního napětí v nejvíce exponovaném místě při tomto zatížení, tj.  $116 \cdot 3.09 = 358MPa$ . Pomocí tohoto napětí a počtu cyklů se určí jeden bod S-N křivky. Vzhledem k tomu, že jsou potřeba minimálně dva, byl testovaný díl testován a simulace provedena ještě pro zatížení  $PSD\ 15(m/s^2)^2/Hz$  se stejným zátěžným profilem, kde měla efektivní hodnota zrychlení hodnotu  $102m/s^2$ .

Nyní bylo provedeno vyhodnocení na základě předpokladu, že shaker zatěžuje díl podle normálního rozdělení a díl má na toto zatížení odezvu podle Rayleighovo rozložení. Tento předpoklad je ukázán na obrázku 5.7.

### 6.2.1 Postup vyhodnocování S-N křivky

Pro vygenerování S-N křivky byl použit interní nástroj firmy Robert Bosch. Vyhodnocení S-N křivky probíhalo podle předpokladu, že poškození dílu způsobené testem bylo  $D=1$  (tj. 100% životnosti). Tento předpoklad se opírá o snímky pořízené CT skenem obr.5.6. Z těchto snímků je patrné, že se vytvořil plastický kloub a trhlinka se již dále nešířila. Díl neprasknul, nicméně byl považován za zničený ( $D=1$ ), poté se pomocí posunu vlatní frekvence druhého vlastního tvaru zobrazeného na obr.5.5 určila doba do iniciace trhliny. Na základě těchto poznatků byl znám limit přímo testovaného komponentu (princip Design for Reliability). Byl zvolen sklon S-N křivky (označovaný  $k$ ). Počet cyklů, které díl zažil, byl znám z testu a napětí bylo známé ze simulace. Byly použity dva body (jeden z PSD20 a jeden z PSD15) na limitní křivce, na které každý značil napětí a počet cyklů v

<sup>4</sup>Funkce PSD je Fourierovou transformací autokorelační funkce podle Wiener-Chinchinových vztahů, tudíž je složena z konečného počtu funkcí sinus. Pokud je potřeba získat efektivní hodnotu zrychlení, je nutné to provést až v místě, ve kterém je PSD složena ze všech harmonických.



Obrázek 6.10: Graf popisující průběh efektivní hodnoty zrychlení  $a_{ef}$  při zatížení PSD  $20(m/s^2)^2/Hz$

daném místě. Protože limitní křivka je mocninná funkce, která má v log-log měřítku os tvar přímky, tak dva body pro generování přímky stačily. Byl použit následující postup:

1) Určit, zda-li bude či nebude požadován kinking bod (z anglického slova kinked: zalomený, tj. zda-li bude mít S-N křivka ve svém průběhu zlom, změnu sklonu. Pokud bude mít S-N křivka zlom, pak není možné pomocí více vyhodnocovacích bodů proložit S-N křivku jednou přímkou. V tomto případě bude křivka bez zlomu, tudíž rozdělení na část před K-K a po K-K je nerelevantní, ale vyhodnocovací nástroj je na to připraven.

2) Určit sklon požadované S-N křivky (k) - nějaké záporné desetinné číslo, v tomto případě -0.16.

3) Zadat hodnotu napětí ze simulace.

4) Ve fitovacím bodě<sup>5</sup> označovaném sig-eck zadat fitovací napětí (v tomto případě 358MPa, tj.  $1\sigma$  napětí ze simulace).

5) Ve fitovacím bodě označovaném N-eck měnit tak dlouho počet cyklů, až se dostane  $D = 1$  (100% poškození). Dostat jeden bod S-N křivky se známým sklonem

6) Opakovat tento postup s jiným napětím pro získání druhého bodu S-N křivky.

<sup>5</sup>Fitovací bod je v tomto případě bod, ve kterém při daném napětí nastane  $D=1$  (poškození 100%)

### 6.2.2 Pozadí použitého postupu pro vyhodnocení S-N křivky

Vycházelo se z předpokladu, že shaker zatěžuje díl podle normálního rozložení a díl má odezvu podle Reyleigho rozložení. Postup vyhodnocení pomocí tohoto nástroje (excelu) je popsán níže.

Pro vyhodnocení bylo potřeba znát napětí získané ze simulace (v tomto případě 358MPa při zatížení PSD  $20(m/s^2)^2/Hz$  a 309MPa při zatížení PSD  $15(m/s^2)^2/Hz$ ) a počet cyklů, které díl zažil během testu. Tuto hodnotu lze získat vynásobením statistického parametru LCF (průchodu signálu osou "x" popsáno vztahem 3.17) dobou testu do iniciace trhliny (v tomto případě poklesem druhé vlastní frekvence o 100Hz, jak je ukázáno v grafu 5.5). Statistický parametr LCF lze přibližně suplovat hodnotou první vlastní frekvence, jak tomu bylo v tomto případě (tj. LCF=1085). Počet cyklů, které daný komponent zažil je vypočten v rovnici 6.1,

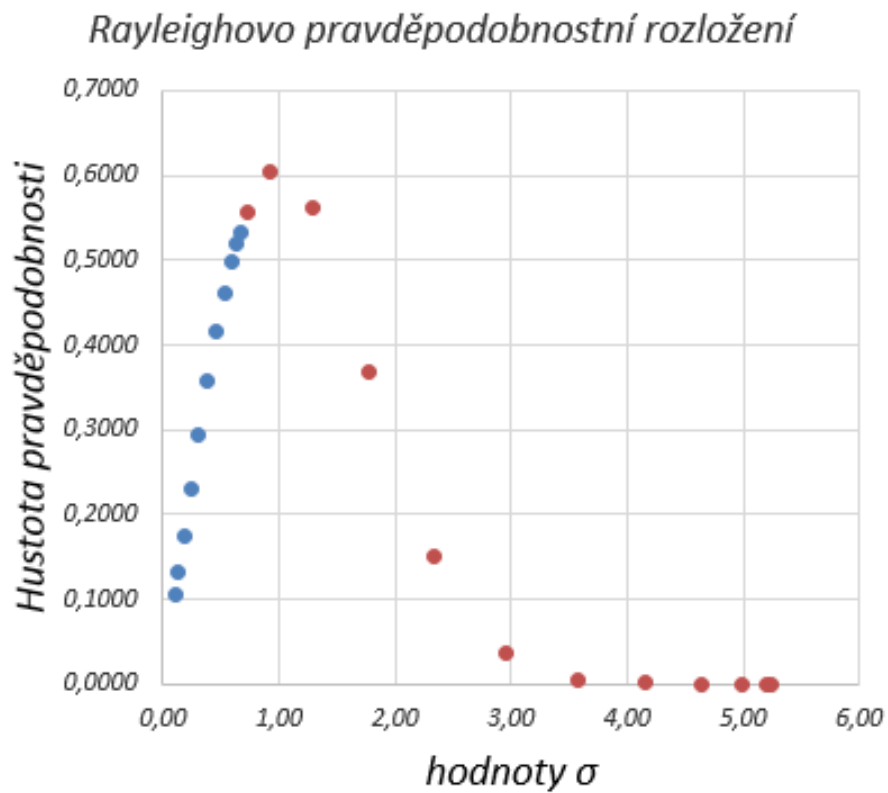
$$N = LCF \cdot T = 1085 \cdot 30600 = 3.32e7. \quad (6.1)$$

kde N značí počet cyklů, LCF je počet průchodů signálu osou "x" a T je doba testu v sekundách.

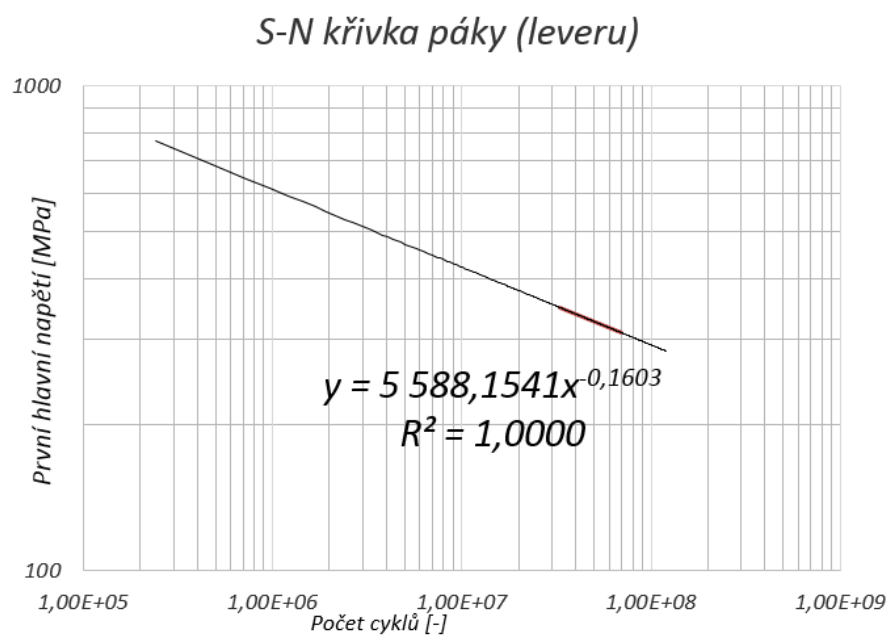
Nyní se vyjde z výše zmíněného předpokladu. Je tedy potřeba Gaussovo rozložení přepočítat na Rayleigho rozložení kvůli výše zmíněné odezvě dílu. Toto rozdělení se nakrokuje od 0.1 (spodní oříznutí) až do 5,25 (1ppm) sigma (v tomto únavovém vyhodnocení se rovná relativnímu napětí) pro použití jednostranné Rayleigho (předpokládaná pravděpodobnostní distribuce napětí u dílu) distribuce. Obrázek 6.11 ukazuje přepočítané Rayleigho rozložení od  $0.1\sigma$  do  $5.25\sigma$ , ve kterém modré tečky ukazují rozložení před K-K bodem a červené za K-K bodem.

Dále se spočítá funkce hustoty pravděpodobnosti pro Rayleigho rozložení podle klasického vzorce popsaného v rešeršní části 3.14. Pro relativní napětí (ti) a sklon S-N křivky k se stanoví inverzní funkce (defacto N-S křivka, tj. hodnoty relativního napětí jsou na ose x a cykly na ose y) pro možnost vyčíslit relativní počet cyklů při daném (známém) napětí. Napětí je známé a počet cyklů při tomto napětí je neznámý, to je důvod pro vytváření inverzní funkce. Dále se znormuje pravděpodobnost jevu (PDF Rayleigho rozložení) a relativní počet cyklů vzájemným podělením, čímž se dostane relativní poškození v závislosti na relativním napětí. Relativní poškození se poté přenásobí funkcí hustoty pravděpodob-





Obrázek 6.11: Rayleighovo distribuce získaná během vyhodnocování S-N křivky

Obrázek 6.12: S-N křivka páky (*leveru*)

nosti normálního rozložení a tím se získá finální poškození pro testovaný díl (výsledná suma je celkové relativní poškození dílu). Přepočítáním přes reálné hodnoty napětí a počet cyklů se dostane jeden bod S-N křivky (viz postup 1-5). Pro korektní nastavení sklonu S-N křivky se musí zadat minimálně dva body, které se při daném počtu cyklů a napětí potkají na totožné křivce.

## 7 Závěr

Tato práce se zabývá stanovením životnosti dílů zatížených náhodnými vibracemi. Po prostudování příslušné literatury byl navržen přístup pro vyhodnocení únavového poškození z PSD zatížení tak, aby bylo možné použít pro řešení MKP a techniky submodelingu. Tento přístup pro vyhodnocení únavového poškození byl poté aplikován na konkrétní součást. Analyzovanou a testovanou součástí byl díl (*lever*), který je součástí GPA modulu (z anglického General Purpose Actuator, česky servomotor pro všeobecné použití). GPA modul je součástí systému pro natáčení lopatek turbodmychadel s variabilním časováním, která jsou používána v dnešních automobilech. Analyzovaná páka (*leveru*) je akční člen, který lopatky natáčí v závislosti na požadované regulaci. Tento díl je zatížen širokým spektrem vibrací (jízda po nerovné vozovce, vibrace od motoru atd.), které lze označit jako náhodné, jelikož ho nelze jednoduše předvídat. Cílem práce bylo vyhodnotit únavové poškození daného dílu a navrhnout nebo využít metodu, která by umožňovala použít při vyhodnocení únavového poškození jiné invarianty napětí než HMH. V rešeršní části práce byly vyhledány a popsány metody, které umožňují vyhodnocení únavového poškození v prostředí náhodných vibrací. Dále byl prostudován teoretický základ potřebný pro aplikaci vybrané metody při vyhodnocení únavové životnosti daného komponentu. Byla vybrána poměrně nestandartní metoda, která byla na daný díl aplikována pomocí konečnoprvkového softwaru Ansys.

Vzhledem k tomu, že ve firmě Robert Bosch České Budějovice v obecné míře nestačí pro vyhodnocení únavového poškození v prostředí náhodných vibrací HMH napětí (hlavně z důvodu nutnosti využití submodelingu při vyhodnocování únavové životnosti plastových komponent), které je standartním výstupem řešičů pro náhodné vibrace v komerčních konečnoprvkových softwarech, vyvstal požadavek na využití alternativní metody, která by umožňovala použít při vyhodnocení únavového poškození jiné invarianty napětí než HMH. Z tohoto důvodu byl použit alternativní přístup, který umožňuje kombinací jednotkové harmonické analýzy dílu s PSD zatížením dílu získat PSD odezvu a neztratit přitom údaje o kinematice modelu, tj. údaje o amplitudě a o fázi. V konečném důsledku tento fakt znamená, že se nepřichází o informaci, zda je napětí v daném místě tahové, nebo tlakové. Plná definice kinematiky modelu je přitom nezbytná pro možnost využití submodelingu. Tímto způsobem se lze úplně vyhnout řešení PSD odezvy přes řešič pro

náhodné vibrace. Ten jako napěťový výstup používá pouze HMH napětí, které je již ze své podstaty kladné a fázový úhel je zde generován statisticky od  $-\pi$  do  $\pi$ . Tato skutečnost poté umožňuje použití i jiného napětí (například prvního hlavního napětí), než standartně výpočtovým řešičem poskytovaného HMH. Další výhodou tohoto alternativního přístupu je právě možnost využití submodelingu (tato výhoda plyne ze zachování plné kinematiky modelu), který je potřebný pro dostatečně přesné vyhodnocení zejména plastových komponent v prostředí náhodných vibrací a náhodných vibrací spojených s harmonickou zátěží (SoR zátěž - Sinus on Random). Submodeling není při standartním vyhodnocení umožněn právě z důvodu statistické povahy fázového úhlu. Fázový úhel společně s amplitudou je nutné v submodelingu explicitně definovat. Při využití tohoto přístupu je pro získání reálného napětí z jednotkové harmonické analýzy použita efektivní hodnota zrychlení, která se vyhodnocuje v koncovém bodě, ve kterém již všechny harmonické proběhly. V praxi to znamená, že se vypočte efektivní hodnota zrychlení dané zátěže (číslo), která je pak použita k přenásobení prvního hlavního napětí (v kritickém místě) získaného z jednotkové harmonické analýzy.

Použitý přístup se uplatní zejména v prostředí, kdy je potřeba vyhodnotit únavovou životnost nebo obecně odezvu dílu zatíženého náhodnými vibracemi, nebo náhodnými vibracemi spojenými s harmonickou zátěží. Jak již bylo popsáno, jsou zde určité výhody oproti standartním postupům, zejména nízká časová náročnost (ve srovnání s tranzientními simulacemi prováděnými v časové doméně) a z toho vyplývající nižší výpočtový čas. Výhodou oproti ostatním postupům využívající pro únavové vyhodnocení frekvenční domény je možnost použití submodelingu. Přesnost použité metody lze zvýšit, pokud se místo harmonické analýzy (používá superpozici jednotlivých vlastních tvarů) použije tzv. plná harmonická analýza, která je však řádově časově náročnější. Tímto se však ztratí hlavní výhoda této metody a dle mého názoru je přesnost metody dostačující způsobem, kterým byla provedena. Jako určitá nadstavba této diplomové práce se nabízí určitá automatizace této metody tak, aby únavové vyhodnocení mohlo proběhnout ještě rychleji. Také by bylo možné a v praxi použitelné využít tento přístup při zatížení součásti náhodnými vibracemi ve více směrech.

Ve firmě Robert Bosch České Budějovice se tento přístup uplatní zejména při vyhodnocování únavové životnosti plastových komponent používaných v automobilovém průmyslu.

## Reference

- [1] *DesingLife Theory Guide*. 26555 vergreen Road - Suite 700 - Southfield, MI 48076 - USA, 2015. HBM-nCode.
- [2] K. Shin a J. K. Hammond. *Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers*. John Willey and Sons, 2008.
- [3] P. Hebák a J. Kahounová. *Počet pravděpodobnosti v příkladech*. 3rd edition, 1988.
- [4] M. Čada. *Statistické vyhodnocování exp. dat*, 2015.
- [5] Michal Bartošák. *Diplomová práce*. ČVUT, Praha, 2013.
- [6] Andrew Halfpenny. A frequency domain approach for fatigue life estimation from finite element analysis. *International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 99) Dublin*, page 9.
- [7] Garth M. Reese Richard V. Field J. Segalman, Clay W. G. Fulcher. An efficient method for calculating rms von Mises stress in a random vibration environment. březen 1998.
- [8] Michal Bartošák Jaromír Fumfera. Modelování odezvy těhlice podvozku vozu formule student při náhodném buzení. Dostupné z: <[http://vypocty2013.fs.cvut.cz/prispevky/VKMKP\\_2013\\_Fumfera\\_s.pdf](http://vypocty2013.fs.cvut.cz/prispevky/VKMKP_2013_Fumfera_s.pdf)>, 2013. [online]. [cit. 2016-08-10].
- [9] Andrew Halfpenny Frédéric Kihm. Rainflow cycle counting and acoustic fatigue analysis techniques for random loading. *10th International Conference RASD 2010*.
- [10] Santhosh M. Kumar. Analyzing random vibration fatigue. Dostupné z: <<http://resource.ansys.com/staticassets/ANSYS/staticassets/resourcelibrary/article/AA-V2-I3-Random-Vibration-Fatigue.pdf>>. [online]. [cit. 2016-08-10].
- [11] Janko Slavič Matjaž Mršnik and Miha Boltežar. Frequency-domain methods for a vibration-fatigue-life estimation - application to real data. *International Journal of Fatigue*, 47:8–17.

- 
- [12] Kurt Munson. Applications of frequency-based fatigue analysis, 2015. HBM nCode Products User Group Meeting.
- [13] D.E. Newland. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*. Longman, 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y. 11501, 3rd edition, 2005.
- [14] A Caserio S Kerr NWM Bishop, N Davies. Fatigue analysis of an f16 navigation pod. *MSC User Conference Daventry, UK*, 1999.
- [15] Jamaludin N. Haron C.H.C. Rahman M.M., Ariffin A.K. Influence of surface treatments on fatigue life of a two-stroke free piston linear engine component using random loading. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A ISSN 1009-3095 (Print); ISSN 1862-1775 (Online)*, pages 1819–1830.
- [16] Johannes Will Klemens Rother. Lifetime analysis of random loaded structures using commercial codes. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- [17] Klaus Schonborn. Antwortspektrum und zufallserregte schwingungen. In *Seminarrunterlagen der CAD-FEM GmbH*, 2004.
- [18] Stephan Vervoort. Best practices for fatigue calculation on fe models, 2011. Hottinger baldwin masstechnik GmbH, nCode Products.
- [19] Miloš Vlk. Charakteristiky stochastických procesů zatížení, namáhání a kmitání, 2015.
- [20] TUSTIN Wayne. *Random Vibration and Shock Testing*. Equipment Reliability Institute, 1520 Santa Rosa Avenue, Santa Barbara, California 93109 USA, 1th edition, 2005.
- [21] Abaqus 6.13: Simulia. abaqus analysis theory guide: Random response analysis. Dostupné z: <<http://129.97.46.200:2080/v6.13/books/stm/default.htmf>>. [online]. [cit. 2016-08-10].
- [22] Abaqus 6.13: Simulia. abaqus analysis user manual: Modal analysis. Dostupné z: <<http://129.97.46.200:2080/v6.13/books/stm/default.htmf>>. [online]. [cit. 2016-08-10].

- [23] <<http://www.cliftonlaboratories.com/userimages/Update13.gif>>. Clifton Laboratories [online]. [cit. 2016-08-11].
- [24] How do i calculate fatigue in a random vibration environment? [online]. [cit. 2016-08-11].
- [25] Rayleighovo rozdělení. wikipedia: the free encyclopedia [online]. san francisco (ca): Wikimedia foundation, 2001- [cit. 2016-08-11]. dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/norm>

## Seznam obrázků

3.1	Náhodné vibrace naměřeny na automobilu jedoucím po nerovné vozovce při opakovaném projetí stejné trasy v šesti po sobě následujících dnech [10]	12
3.2	Histogram odvozený z časové historie zatěžování vyhodnocený metodou stékání deště (rain-flow) [6]	13
3.3	Standartní postup při vyhodnocování únavového poškození v časové oblasti[14]	14
3.4	Vzájemný vztah mezi autokorelační funkcí a spektrální výkonovou hustotou[17]	17
3.5	Přechod mezi časovou a frekvenční doménou[12]	18
3.6	Graf PSD vygenerovaný z náhodných vibrací v časové doméně[6]	19
3.7	Rozdíl mezi ergodickým a neergodickým stacionárním procesem[19]	20
3.8	Gaussovo pravděpodobnostní rozložení [24]	22
3.9	Rayleighovo pravděpodobnostní rozložení [23]	23
3.10	Ukázka procesů řídicích se Rayleighovo rozložením (a) a normálním rozložením (b) [19]	23
3.11	Výpočet momentů z PSD[15]	24
3.12	Grafické znázornění průchodu signálu nulou $\nu_p$ a počet vrcholů $\nu_0$ v jednom zatěžovacím intervalu[14]	25
3.13	Různé typy časových průběhů a k nim odpovídající PSD funkce (a) Narrow band proces; (b) Broad bend proces; (c) Sinová vlna; (d) Bílý šum [15]	26
3.14	Ukázka širokopásmového a úzkopásmového procesu[6]	27
3.15	Přenosová funkce, která dává do souvislosti vstupní zatěžování a výstupní napětí v uzlu	30
3.16	Grafické znázornění rovnice 4.1, kde vlevo je PSD zátěž, uprostřed jednotková harmonická analýza a vpravo PSD odezva dílu	33
3.17	Princip návrhu pomocí DFR	35
3.18	Ukázka postupu výpočtu při jednom a při více vstupech PSD[18]	37
4.1	Nosník použitý pro verifikaci metody	38
4.2	Jednotlivé vlastní frekvence analyzovaného nosníku	38
4.3	Jednotlivé vlastní frekvence analyzovaného nosníku	39
4.4	Jednotlivé vlastní frekvence analyzovaného nosníku	39
4.5	Graf průběhu odezvy systému na jednotkovou zátěž v ose x	39
4.6	Graf průběhu PSD zátěže	40



4.7	Graf zobrazující průběh PSD odezvy z řešiče random response . . . . .	41
4.8	Porovnání výsledků z řešiče random response s námi vypočtenou odezvou .	41
5.1	GPA modul . . . . .	43
5.2	Nastavení experimentálního měření pro první zkoušku . . . . .	44
5.3	PSD zátěž daného komponentu . . . . .	45
5.4	Výstup z experimentálního měření na shakeru pro první variantu . . . . .	45
5.5	Pokles frekvence druhého vlastního tvaru vlivem iniciace a šíření trhliny .	46
5.6	CT sken provedený v místě svaru pro zobrazení únavové trhliny . . . . .	46
5.7	Zatížení shakerem podle normálního rozložení a odezva dílu podle Reileigh rozložení . . . . .	47
5.8	Simulační model vyhodnocovaného komponentu . . . . .	48
5.9	Vlevo: Ukázka síťování vyhodnocovaného komponentu. Vpravo: Detail sítě svaru . . . . .	48
5.10	Zobrazení ohybu vznikajícího od vibračního zatížení . . . . .	49
5.11	Zobrazení kritického uzlu . . . . .	50
5.12	Zobrazení posunutí ve vertikálním směru . . . . .	51
5.13	Zobrazení posunu vlastního tvaru vlivem měknutí konstrukce při šíření trh- liny na zkušební vzorku . . . . .	52
5.14	Výsledky modální analýzy testovaného komponentu . . . . .	53
5.15	Výsledky harmonické analýzy testovaného komponentu na jednotkové bu- zení v ose z v logaritmickém měřítku . . . . .	54
5.16	PSD zátěž daného komponentu . . . . .	54
5.17	PSD odezva <i>leveru</i> vypočtená programem Ansys . . . . .	55
5.18	Výsledné porovnání křivek . . . . .	55
5.19	Porovnání PSD zátěže s PSD odezvou testovaného komponentu . . . . .	56
6.1	Ukázka začlenění submodelu do globálního modelu . . . . .	58
6.2	Submodel provedený na analyzovaném komponentu . . . . .	58
6.3	Elementy vybrané metodou V80 . . . . .	58
6.4	Grafické znázornění implementace okrajových podmínek . . . . .	59
6.5	Uzly vyhodnocené metodou V80 . . . . .	59
6.6	První hlavní napětí jako výstup ze submodelingu . . . . .	60
6.7	Hodnota prvního hlavního napětí stanoveného z globálního modelu . . . .	60

---

6.8	Elementy zatížené minimálně 80% maximálního napětí . . . . .	61
6.9	Porovnání deformací submodelu (vlevo) a makromodelu (vpravo) . . . . .	61
6.10	Graf popisující průběh efektivní hodnoty zrychlení $a_{ef}$ při zatížení PSD $20(m/s^2)^2/Hz$ . . . . .	63
6.11	Rayleighovo distribuce získaná během vyhodnocování S-N křivky . . . . .	65
6.12	S-N křivka páky ( <i>leveru</i> ) . . . . .	65

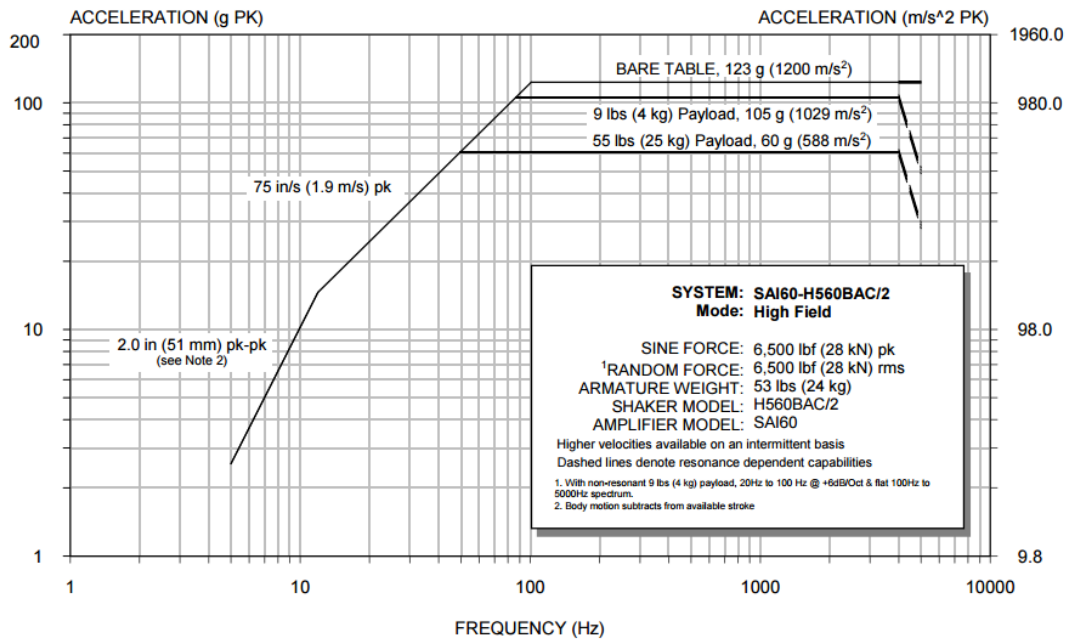
## Seznam tabulek

1	Rozměry a materiálové vlastnosti testovaného nosníku . . . . .	38
---	--	----

## 8 Přílohy

### A Výkonová křivka použitého shakeru

#### **SINE/RANDOM Performance Curve**



Unholtz-Dickie Corporation

Q1082C

## **B CD s digitální podobou práce**