

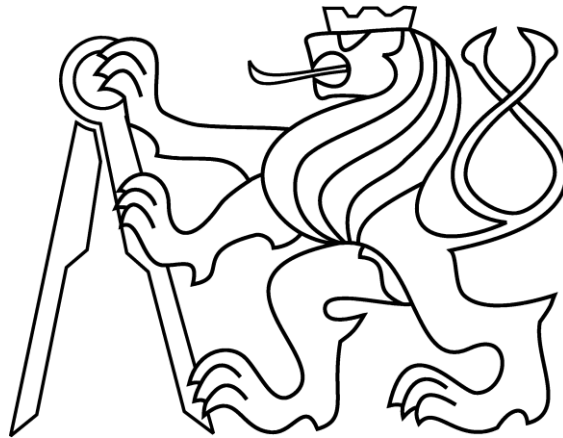
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ – ÚSTAV MECHANIKY,

BIOMECHANIKY A MECHATONIKY

ODBOR PRUŽNOSTI A PEVNOSTI

Diplomová práce



Optimalizace laminátových desek

Vypracoval:

Bc. Vojtěch Fiala

Vedoucí práce:

doc. Ing. Tomáš Mareš, PhD.

Praha, 2016

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Fiala** Jméno: **Vojtěch** Osobní číslo: **397062**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Optimalizace laminátových desek

Název diplomové práce anglicky:

Laminated plate optimization

Pokyny pro vypracování:

1. Klasická laminační teorie - úvod
2. Technologie a materiály
3. Analýza tuhosti desky
4. Optimalizace - genetické algoritmy
5. Výsledky optimalizace

Seznam doporučené literatury:

Z. Gürdal, R. T. Haftka, P. Hajela. Design and optimisation of laminated composite materials. John Wiley and Sons, New York, 1999

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.

Jméno a pracoviště konzultanta(ky) diplomové práce:

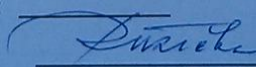
Datum zadání diplomové práce: **12.04.2016**

Termín odevzdání diplomové práce: **12.08.2016**

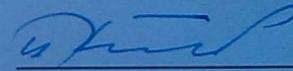
Platnost zadání diplomové práce:



Podpis vedoucí(ho) práce



Podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



Podpis děkana(ky)

Neodevzdá-li student bakalářskou nebo diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodní a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání bakalářské nebo diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluví nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat bakalářskou nebo diplomovou práci podruhé

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ



Datum převzetí zadání



Podpis studenta(ky)

Anotační list

Jméno autora:	Bc. Vojtěch Fiala
Název DP:	Optimalizace laminátových desek
Anglický název:	Optimization of laminated plates
Akademický rok:	2015/2016
Obor studia:	Aplikovaná mechanika
Ústav / Odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky / Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí DP:	doc. Ing. Tomáš Mareš, PhD.
Bibliografické údaje:	Počet stran: 82 Počet obrázků: 43 Počet tabulek: 30 Počet příloh: 1 (elektronická)
Klíčová slova:	Laminátové desky, optimalizace, genetické algoritmy, kompozitní materiály
Keywords:	Laminated plates, optimization, genetic algorithms, composite materials
Anotace:	Práce se zabývá výpočtem tuhosti laminátových desek a jejich následnou optimalizací. Nejprve je provedena analýza tuhosti desky. Poté jsou popsány nejdůležitější technologie a materiály pro výrobu laminátových desek. Jsou klasifikovány nejdůležitější optimalizační metody a popsány genetické algoritmy, pomocí kterých jsou následně desky optimalizovány. Optimalizace jsou počítány pro různá zatížení, materiály a tvar desek.
Abstract:	The thesis deals with computing of the stiffness of laminated plates and following optimization of it. First the analysis of the stiffness is done. After that most important technology and materials used for manufacturing are described. Most important optimization methods are classified and Genetic algorithms which are subsequently used for optimization of the plates are described. Optimization is done for different loading, materials and shape of the plates.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a pouze s použitím zdrojů uvedených v seznamu literatury.

V Praze dne _____

Vojtěch Fiala

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Tomášovi Marešovi, PhD. za cenné rady a připomínky a za poskytnutí dat nezbytných k vypracování práce.

Obsah

1 Úvod.....	8
2 Analýza tuhosti laminátové desky.....	9
2.1 Formulace úlohy	9
2.2 Zobecněný Hookeův zákon laminátové vrstvy	10
2.3 Konstitutivní rovnice laminátové desky	10
2.4 Způsoby skládání vrstev laminátu	17
2.4.1 Symetrický laminát	17
2.4.2 Vyrovnaný laminát.....	18
2.5 Úplná potenciální energie symetrického laminátu	18
2.6 Nutná a postačující podmínka řešení úlohy průhybu	19
2.7 Parametrizace úlohy	20
2.8 Stacionární podmínky úlohy.....	26
2.9 Vyjádření koeficientů $q_{\kappa\gamma}$ pro různá zatížení	31
2.9.1 Zatížení $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$	31
2.9.2 Zatížení $q(x, y) = q_0 xy$	32
2.9.3 Zatížení izolovanou silou působící kolmo na rovinu desky.....	32
2.10 Vyjádření cílové funkce.....	35
3 Technologie výroby a materiály.....	36
3.1 Technologie výroby.....	36
3.1.1 Ruční kladení	36
3.1.2 Metoda vakuového prosycování	36
3.1.3 Vytvrzování v autoklávu.....	36
3.1.4 Metoda vysokotlakého vstřikování matrice (RTM).....	37
3.1.5 Tažení.....	38
3.1.6 Ostatní kontinuální metody	38

3.2 Materiály.....	39
3.2.1 Vlákná	40
3.2.2 Matrice	41
4 Optimalizace a genetické algoritmy	43
4.1 Základní optimalizační metody	44
4.1.1 Prohledávání stavového prostoru	45
4.1.2 Simulované žíhání.....	46
4.1.3 Optimalizace mravenčí kolonií	47
4.2 Genetické algoritmy	47
5 Formulace řešené úlohy	51
6 Výsledky optimalizace	52
6.1 Optimalizace směrů vláken při konstantní tloušťce vrstev.....	52
6.1.1 Čtvercová deska	53
6.1.2 Obdélníková deska.....	64
6.2 Současná optimalizace směrů vláken i tloušťky vrstev	71
6.2.1 Čtvercová deska	71
6.2.2 Obdélníková deska.....	74
6.3 Obecné závěry	76
6.3.1 Porovnání výsledků optimalizace	76
6.3.2 Vliv materiálu na optimální uspořádání.....	76
7 Závěr.....	77
Literatura	78
Internetové zdroje.....	79
Seznam obrázků	80
Seznam tabulek	82

1 Úvod

Klasické kovové materiály mají izotropní materiálové vlastnosti a při konstrukci součástí bývá materiál často naplno využit jen v malé části, což je značně neefektivní. Kompozitní materiály umožňují vytvořit strukturu, která odpovídá poli napjatosti, je vysoce pevná tam, kde je vyžadováno a jinde už takové vlastnosti nemá. Svoji skladbou přímo ovlivňují mechanické vlastnosti součástí z nich vyrobených, a proto je třeba tuto skladbu optimalizovat vzhledem k požadavkům dané aplikace. Hlavními přednostmi kompozitů oproti klasickým kovovým materiálům jsou zejména nízká hustota, vyšší měrná pevnost, odolnost vůči chemickým a povětrnostním vlivům, lepší tepelné a elektroizolační vlastnosti a dobrá prostupnost elektromagnetickým zářením. Využívání kompozitních materiálů v technické praxi je v dnešní době stále širší a vše nasvědčuje, že vzestupná tendence by měla pokračovat i v budoucnosti.

V úvodní kapitole se budeme zabývat analýzou tuhosti příčně zatížené tenké laminátové desky. Definujeme základní pojmy týkající se této analýzy a pomocí minimalizace funkcionálu celkové potenciální energie, který budeme pro potřeby výpočtu parametrizovat, určíme tuhost desky.

V kapitole tři popíšeme základní způsoby výroby laminátových desek a materiály, ze kterých jsou tyto desky nejčastěji vyráběny.

Následující kapitola bude věnována seznámení s pojmem matematické optimalizace. Kategorizujeme si zde problémy, kterými se optimalizace zabývá a základní metody řešení optimalizačních úloh. Blíže se budeme věnovat genetickým algoritmům, jenž následně použijeme k vlastní optimalizaci laminátových desek.

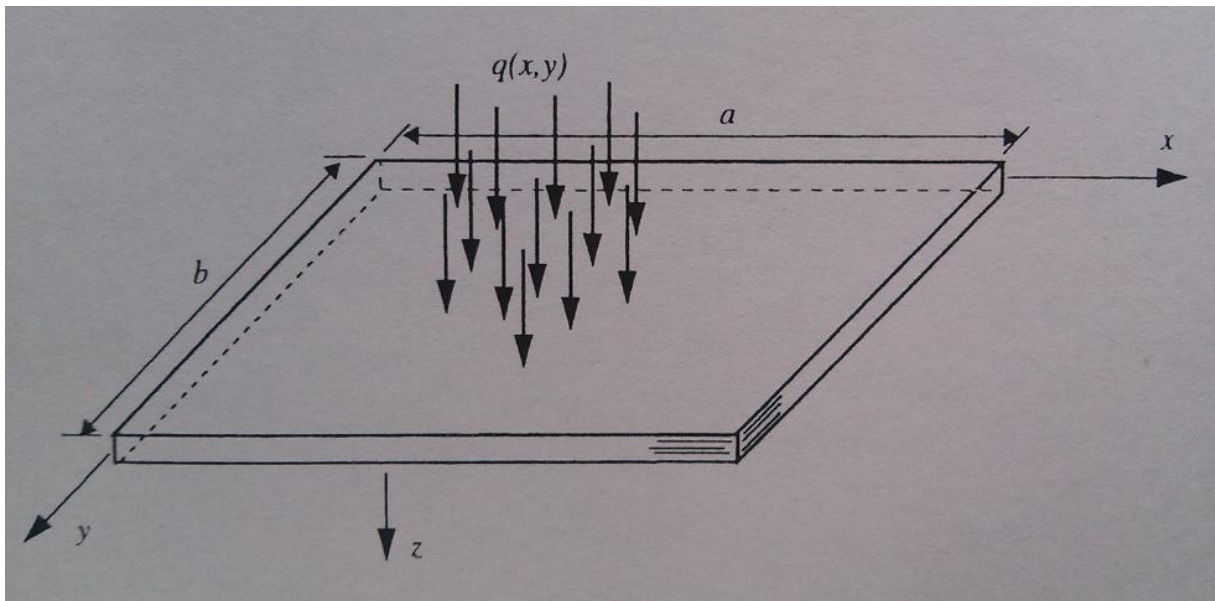
V páté kapitole přehledně definujeme řešenou úlohu.

Závěrečná kapitola bude zaměřena na vlastní optimalizaci laminátových desek. Budeme optimalizovat uspořádání desek z různých materiálů o různých rozměrech podrobené různým zatížením. To vše pro různé sady optimalizačních parametrů tedy zejména směrů vláken ve vrstvách desky a tloušťky těchto vrstev. Z těchto výpočtů se poté učiníme obecné závěry pro optimální skladbu příčně zatížených laminátových desek.

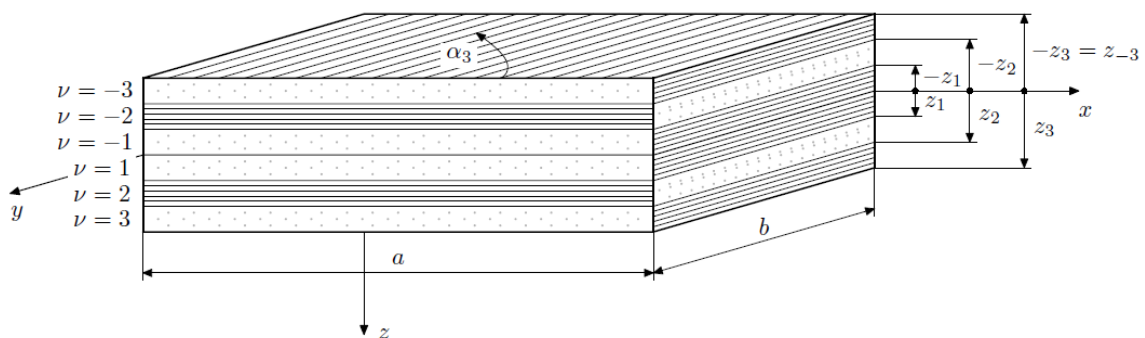
2 Analýza tuhosti laminátové desky

2.1 Formulace úlohy

Cílem této části práce je sestavit rovnice pro výpočet tuhosti prostě podepřené obdélné laminátové desky s volitelnou orientací vláken, která je zatížena v příčném směru (Obr. 2.1). Uvažujeme symetrický laminát s danými materiálovými vlastnostmi jednotlivých ortotropních vrstev dané tloušťky. Chování materiálu uvažujeme ideálně elastické.



Obrázek 2.1: Uvažovaná obdélná deska zatížená spojitým zatížením $q(x,y)$ [2]



Obrázek 2.2: Zavedení z -ových souřadnic jednotlivých vrstev symetrické desky [1]

Počet symetricky kladených vrstev desky je $2N$.

2.2 Zobecněný Hookeův zákon laminátové vrstvy

Zobecněný Hookeův zákon laminátové vrstvy (pro rovinnou napjatost) v souřadném systému této vrstvy položeném do hlavních ortotropních směrů této vrstvy (budeme značit $x^{\nu} - y^{\nu}$) má tvar:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{\nu} \\ \sigma_{22}^{\nu} \\ \sigma_{12}^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{\nu} & Q_{12}^{\nu} & 0 \\ Q_{12}^{\nu} & Q_{22}^{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12}^{\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{\nu} \\ \varepsilon_{22}^{\nu} \\ \varepsilon_{12}^{\nu} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

kde

$$Q_{11}^{\nu} = \frac{E_1^{\nu}}{1 - \nu_{12}^{\nu} \nu_{21}^{\nu}} \quad (2.2)$$

$$\nu_{21}^{\nu} = \nu_{12}^{\nu} \frac{E_2^{\nu}}{E_1^{\nu}} \quad (2.3)$$

$$Q_{12}^{\nu} = \frac{E_2^{\nu}}{1 - \nu_{12}^{\nu} \nu_{21}^{\nu}} \quad (2.4)$$

$$Q_{12}^{\nu} = \frac{\nu_{12}^{\nu} E_2^{\nu}}{1 - \nu_{12}^{\nu} \nu_{21}^{\nu}} \quad (2.5)$$

kde horní index ν udává pořadí vrstvy od střední plochy ($\nu = 1, 2, \dots, N$). E_1^{ν} je modul pružnosti vrstvy v prvním hlavním směru, E_2^{ν} je modul pružnosti v druhém hlavním směru¹ a G_{12}^{ν} je modul pružnosti ve smyku v rovině 1–2 ($x^{\nu} - y^{\nu}$). Hlavní Poissonovo číslo ν_{12}^{ν} udává prodloužení v druhém hlavním směru při zatížení pouze v prvním hlavním směru:

$$\nu_{12}^{\nu} = - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.6)$$

Obdobně vedlejší Poissonovo číslo udává prodloužení v prvním hlavním směru při zatížení pouze v druhém hlavním směru:

$$\nu_{21}^{\nu} = - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2.7)$$

2.3 Konstitutivní rovnice laminátové desky

Se zobecněným Hookeovým zákonem pro laminátovou vrstvu nebudeme pracovat ve výše uvedeném maticovém (Voigtově) tvaru, ale v tvaru tenzorovém. Zavedeme tenzory napětí a deformací ν -té vrstvy v soustavě souřadnic splývající s hlavními směry příslušné ortotropní vrstvy.

¹ Platí $E_1 > E_2$

$$\{\sigma_{ij}^v\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^v & \sigma_{12}^v \\ \sigma_{21}^v & \sigma_{22}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^v & \sigma_{xy}^v \\ \sigma_{yx}^v & \sigma_{yy}^v \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\{\varepsilon_{ij}^v\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^v & \varepsilon_{12}^v \\ \varepsilon_{21}^v & \varepsilon_{22}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^v & \varepsilon_{xy}^v \\ \varepsilon_{yx}^v & \varepsilon_{yy}^v \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

kde značení indexy 11 či xx je ekvivalentní. Hookeův zákon v soustavě souřadnic ležící v hlavních směrech ortotropní vrstvy má potom tvar

$$\sigma_{ij}^v = E_{ijkl}^v \varepsilon_{kl}^v \quad (2.10)$$

kde

$$\{E_{ijkl}^v\}_{ij/kl} = \begin{array}{c} ij/kl \\ 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array} \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \\ \left[\begin{array}{cccc} Q_{11}^v & 0 & 0 & Q_{12}^v \\ 0 & G_{12}^v & G_{12}^v & 0 \\ 0 & G_{12}^v & G_{12}^v & 0 \\ Q_{12}^v & 0 & 0 & Q_{22}^v \end{array} \right] \end{array} \quad (2.11)$$

kde pravý dolní index ij/kl říká, že řádky matice odpovídají postupně indexům ($ij = 11, 12, 21, 22$) a jednotlivé sloupce indexům ($kl = 11, 12, 21, 22$), jak je naznačeno. Uvedený tvar konstitutivního vztahu musí být stejný, jako při roznásobení matic ve Voigtově zápisu (2.1) tedy:

$$\sigma_{11}^v = Q_{11}^v \varepsilon_{11}^v + Q_{12}^v \varepsilon_{22}^v \quad (2.12)$$

$$\sigma_{22}^v = Q_{12}^v \varepsilon_{11}^v + Q_{22}^v \varepsilon_{22}^v \quad (2.13)$$

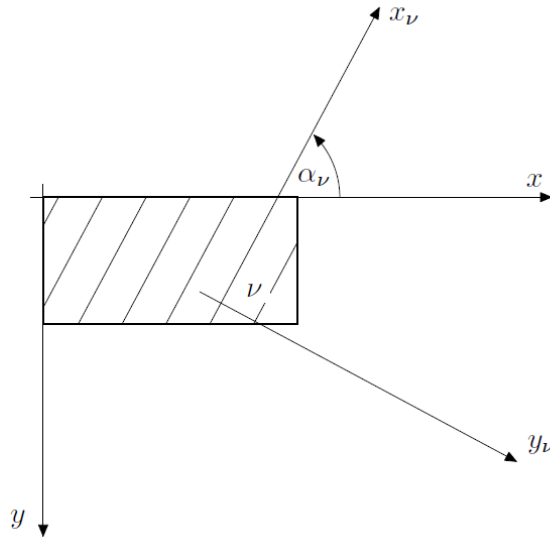
$$\sigma_{12}^v = \sigma_{21}^v = G_{12}^v \varepsilon_{12}^v + G_{12}^v \varepsilon_{21}^v = 2G_{12}^v \varepsilon_{12}^v = 2G_{12}^v \varepsilon_{21}^v \quad (\varepsilon_{21}^v = \varepsilon_{12}^v) \quad (2.14)$$

Provedeme transformaci tenzoru napětí z lokálního souřadnicového systému $x^v - y^v$ do globálního souřadnicového systému desky $x - y$. Tím zavedeme tenzor napětí v v -té vrstvě v globálním souřadnicovém systému

$$\sigma_{ij}(x, y, z) = l_{ik}^v l_{jl}^v \sigma_{kl}^v \quad \begin{array}{l} \forall z \in \langle z_{v-1}, z_v \rangle \text{ pro } v > 0 \\ \forall z \in \langle z_v, z_{v+1} \rangle \text{ pro } v < 0 \end{array} \quad (2.15)$$

jako funkci tenzoru deformace v -té vrstvy v globálním souřadnicovém systému

$$\varepsilon_{ij}(x, y, z) = l_{ik}^v l_{jl}^v \varepsilon_{kl}^v \quad \begin{array}{l} \forall z \in \langle z_{v-1}, z_v \rangle \text{ pro } v > 0 \\ \forall z \in \langle z_v, z_{v+1} \rangle \text{ pro } v < 0 \end{array} \quad (2.16)$$



Obrázek 2.3: Natočení lokálního souřadnicového systému $x^\nu - y^\nu$ v $-té$ vrstvy vůči globálnímu souřadnicovému systému desky [1]

Transformační matice má tvar vyplývající z natočení lokálního souřadnicového systému vůči globálnímu souřadnicovému systému, jehož orientace je patná z obrázku 2.3

$$\begin{aligned} \{l_{ik}(\alpha_\nu)\}_{i/k} &= \{l_{ik}^\nu\}_{i/k} = \{\cos(x_i, x_k^\nu)\}_{i/k} = \begin{bmatrix} \cos(x, x^\nu) & \cos(x, y^\nu) \\ \cos(y, x^\nu) & \cos(y, y^\nu) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha_\nu) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_\nu\right) \\ \cos\left(\alpha_\nu + \frac{\pi}{2}\right) & \cos(\alpha_\nu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_\nu) & \sin(\alpha_\nu) \\ -\sin(\alpha_\nu) & \cos(\alpha_\nu) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Uvážíme-li

$$l_{ik}l_{jk} = l_{ki}l_{kj} = \delta_{ij} \quad (2.18)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerova delta a vynásobíme obě strany rovnice (2.16) výrazem $l_{im}^\nu l_{jn}^\nu$, dostáváme inverzní transformační vztah

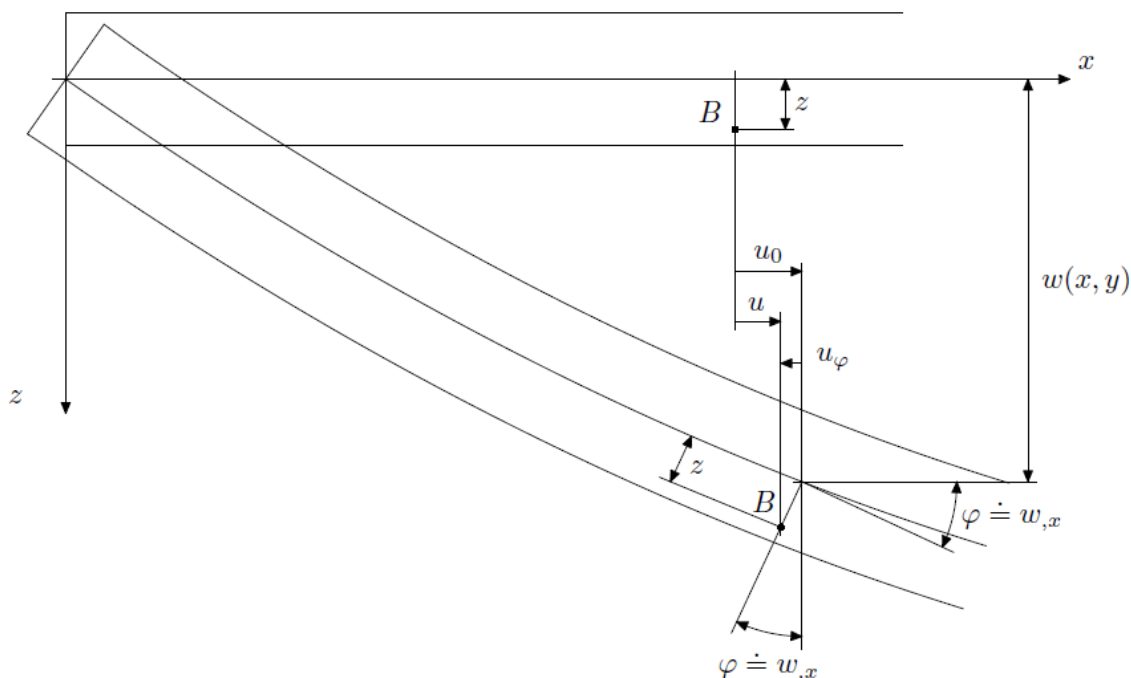
$$\varepsilon_{mn}^{v(z)}(x, y, z) = l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} \varepsilon_{ij}(x, y, z) \quad (2.19)$$

kde transformační tenzory l_{im}^ν a l_{jn}^ν se liší pro každou vrstvu, tedy pro souřadnici z z každého intervalu podle rovnice (2.16).

Výsledný vztah mezi tenzorem napětí v globálním souřadnicovém systému a tenzorem deformace v tomto systému získáme pomocí následujících úprav vztahu (2.15)

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x, y, z) &= l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} \sigma_{mn}^{v(z)} = l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} E_{mnop}^{v(z)} \varepsilon_{op}^{v(z)} = \\ &= l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} E_{mnop}^{v(z)} l_{ko}^{v(z)} l_{lp}^{v(z)} \varepsilon_{kl}(x, y, z)\end{aligned}\quad (2.20)$$

což je konstitutivní vztah pro tenkou laminátovou desku.



Obrázek 2.4: Řez deformovanou deskou za předpokladu malých deformací [1]

Pro odvození závislosti deformace desky na silových účincích působících na tuto desku vyjdeme z obrázku 2.4. Uvažujeme malé deformace desky a tudíž že i kolmost a přímost úseček ke střední ploše před deformací je zachována i po deformaci. Tedy když $w(x, y)$ značí velikost průhybu střední plochy, pak její natočení v určité rovině řezu je rovno příslušné derivaci. Pro rovinu řezu $x - z$ (Obr. 2.4) tedy platí $\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x}$, pro rovinu $y - z$ platí $\psi = \frac{\partial w}{\partial y} = w_{,y}$. Budeme sledovat posunutí bodu B

$$u = u_0 + u_\varphi = u_0 - z \sin(\varphi) \doteq u_0 - z\varphi = u_0 - zw_{,x} \quad (2.21)$$

Analogicky pro posunutí ve směru y v rovině řezu $y - z$

$$v = v_0 + v_\psi = v_0 - z \sin(\psi) \doteq v_0 - z\psi = v_0 - zw_{,y} \quad (2.21)$$

Použitím Cauchyho vztahů pro tenzor malých deformací

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.22)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} = u_{0,x} - zW_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} &= v_{,y} = v_{0,y} - zW_{,yy} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) = \frac{1}{2}(u_{0,y} + v_{0,x}) - zW_{,xy} \end{aligned} \quad (2.23)$$

a dále

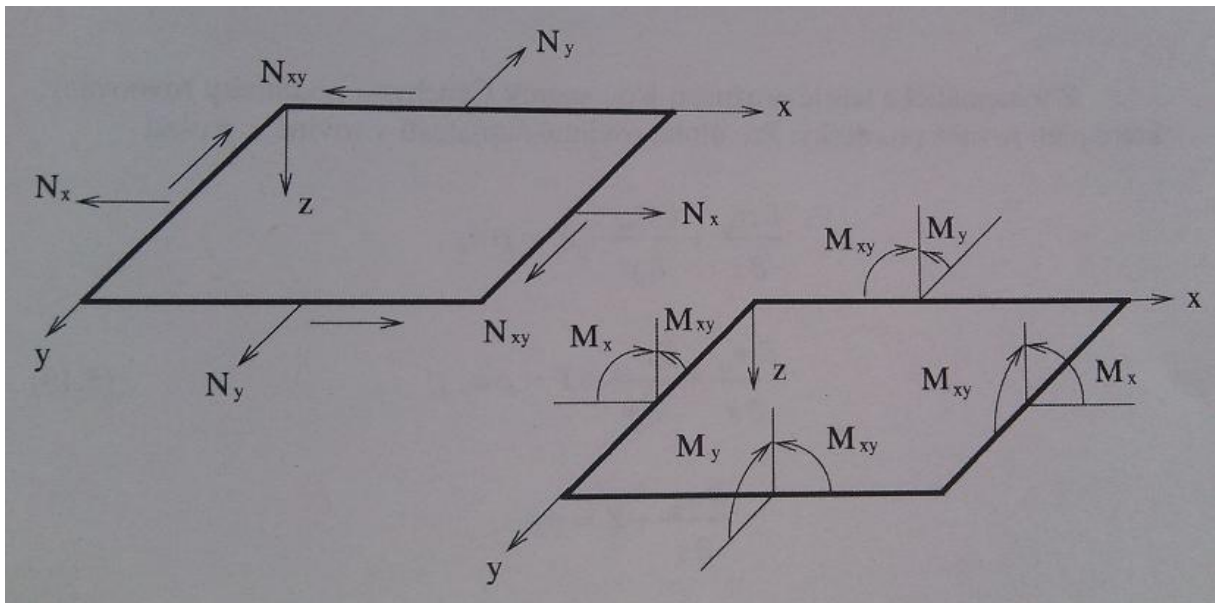
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) = \frac{1}{2}(-w_{,x} + w_{,x}) = 0 \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) = \frac{1}{2}(-w_{,y} + w_{,y}) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

což je přímým důsledkem předpokladu zachování přímosti a kolmosti úseček ke střední ploše po deformaci. Dále platí

$$\varepsilon_{zz} = -\nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.25)$$

Tyto vztahy lze zapsat souhrnně

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}(x, y, z) &= \varepsilon_{kl}^0 - zW_{,kl} = \begin{bmatrix} u_{0,x} & \frac{1}{2}(u_{0,y} + v_{0,x}) \\ \frac{1}{2}(u_{0,y} + v_{0,x}) & v_{0,y} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} W_{,xx} & W_{,xy} \\ W_{,xy} & W_{,yy} \end{bmatrix} = \\ &= \varepsilon^0 - zW'' \end{aligned} \quad (2.26)$$



Obrázek 2.5: Jednotkové síly a momenty ležící v rovině desky [2]

Síly ležící v rovině desky vztažené na jednotku délky můžeme psát jako

$$\mathbf{N} = \{N_{ij}\}_{i/j} = \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{yx} & N_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

což lze rozepsat (pro získání vztahu s napětím)

$$N_{ij} = \int_{z=-N}^{z=N} \sigma_{ij}(x, y, z) dz = \sum_{v=1}^N \int_{z_{v-1}}^{z_v} \sigma_{ij}(x, y, z) dz + \sum_{v=-N}^{-1} \int_{z_v}^{z_{v+1}} \sigma_{ij}(x, y, z) dz \quad (2.28)$$

kde souřadnice z pro jednotlivé vrstvy jsou patrné z obrázku 2.2.

Dosadíme za $\sigma_{ij}(x, y, z)$ pomocí výrazu (2.20)

$$N_{ij} = \sum_{v=1}^N \int_{z_{v-1}}^{z_v} l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} E_{mnop}^{v(z)} l_{ko}^{v(z)} l_{lp}^{v(z)} \varepsilon_{kl}(x, y, z) dz + \sum_{v=-N}^{-1} \int_{z_v}^{z_{v+1}} l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} E_{mnop}^{v(z)} l_{ko}^{v(z)} l_{lp}^{v(z)} \varepsilon_{kl}(x, y, z) dz$$

A dále upravujeme

$$N_{ij} = \sum_{v=1}^N \int_{z_{v-1}}^{z_v} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v (\varepsilon_{kl}^0 - z w_{,kl}) dz + \sum_{v=-N}^{-1} \int_{z_v}^{z_{v+1}} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v (\varepsilon_{kl}^0 - z w_{,kl}) dz$$

$$N_{ij} = \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \varepsilon_{kl}^0 \int_{z_{v-1}}^{z_v} dz - \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v w_{,kl} \int_{z_{v-1}}^{z_v} z dz +$$

$$+ \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \varepsilon_{kl}^0 \int_{z_v}^{z_{v+1}} dz - \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v w_{,kl} \int_{z_v}^{z_{v+1}} z dz$$

$$N_{ij} = \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \varepsilon_{kl}^0 (z_v - z_{v-1}) - \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v w_{,kl} \frac{z_v^2 - z_{v-1}^2}{2}$$

$$+ \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \varepsilon_{kl}^0 (z_{v+1} - z_v) - \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v w_{,kl} \frac{z_{v+1}^2 - z_v^2}{2}$$

Zavedeme tenzor čtvrtého řádu N_{ijkl}^0 a N_{ijkl}^w

$$N_{ijkl}^0 = \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v (z_v - z_{v-1}) + \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v (z_{v+1} - z_v) \quad (2.29)$$

čili po úpravě mezí v druhé sumě a příslušné úpravě druhé závorky

$$N_{ijkl}^0 = \sum_{v=-N+1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v (z_v - z_{v-1}) \quad (2.30)$$

a tenzor N_{ijkl}^w

$$N_{ijkl}^w = - \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \frac{z_v^2 - z_{v-1}^2}{2} - \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \frac{z_{v+1}^2 - z_v^2}{2} \quad (2.31)$$

$$N_{ijkl}^w = - \sum_{v=-N+1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \frac{z_v^2 - z_{v-1}^2}{2} \quad (2.32)$$

Výsledný vztah potom můžeme psát jako

$$N_{ij} = N_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^0 + N_{ijkl}^w w_{,kl} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{N}^w \mathbf{w}'' \quad (2.34)$$

Podobně jako pro síly lze psát i momenty působící na desku v rovině desky vztažené na jednotku šířky desky

$$\mathbf{M} = \{M_{ij}\}_{i/j} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

při čemž závislost momentů na napětí v rovině desky je následující

$$M_{ij} = \int_{z=-N}^{z=N} z \sigma_{ij}(x, y, z) dz = \sum_{v=1}^N \int_{z_{v-1}}^{z_v} z \sigma_{ij}(x, y, z) dz + \sum_{v=-N}^{-1} \int_{z_v}^{z_{v+1}} z \sigma_{ij}(x, y, z) dz \quad (2.36)$$

kde opět $z_0 = 0$. Dalšími úpravami, stejnými jako pro síly, dostáváme

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_{v=1}^N \int_{z_{v-1}}^{z_v} z l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} E_{mnop}^{v(z)} l_{ko}^{v(z)} l_{lp}^{v(z)} \varepsilon_{kl}(x, y, z) dz + \\ &+ \sum_{v=-N}^{-1} \int_{z_v}^{z_{v+1}} z l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} E_{mnop}^{v(z)} l_{ko}^{v(z)} l_{lp}^{v(z)} \varepsilon_{kl}(x, y, z) dz \\ M_{ij} &= \sum_{v=1}^N \int_{z_{v-1}}^{z_v} z l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v (\varepsilon_{kl}^0 - z w_{,kl}) dz + \\ &+ \sum_{v=-N}^{-1} \int_{z_v}^{z_{v+1}} z l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v (\varepsilon_{kl}^0 - z w_{,kl}) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \varepsilon_{kl}^0 \int_{z_{v-1}}^{z_v} z \, dz - \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v w_{,kl} \int_{z_{v-1}}^{z_v} z^2 \, dz + \\
&+ \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \varepsilon_{kl}^0 \int_{z_v}^{z_{v+1}} z \, dz - \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v w_{,kl} \int_{z_v}^{z_{v+1}} z^2 \, dz \\
M_{ij} &= \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \varepsilon_{kl}^0 \frac{z_v^2 - z_{v-1}^2}{2} - \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v w_{,kl} \frac{z_v^3 - z_{v-1}^3}{2} \\
&+ \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \varepsilon_{kl}^0 \frac{z_{v+1}^2 - z_v^2}{2} - \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v w_{,kl} \frac{z_{v+1}^3 - z_v^3}{2}
\end{aligned}$$

Zavedeme tenzory čtvrtého řádu M_{ijkl}^0 a M_{ijkl}^w a upravíme

$$M_{ijkl}^0 = \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \frac{z_v^2 - z_{v-1}^2}{2} + \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \frac{z_{v+1}^2 - z_v^2}{2} \quad (2.37)$$

$$M_{ijkl}^0 = \sum_{v=-N+1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \frac{z_v^2 - z_{v-1}^2}{2} \quad (2.38)$$

$$M_{ijkl}^w = \sum_{v=1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \frac{z_v^3 - z_{v-1}^3}{2} + \sum_{v=-N}^{-1} l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \frac{z_{v+1}^3 - z_v^3}{2} \quad (2.39)$$

$$M_{ijkl}^w = \sum_{v=-N+1}^N l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \frac{z_v^3 - z_{v-1}^3}{2} \quad (2.40)$$

Analogicky jako pro síly můžeme psát

$$M_{ij} = M_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^0 + M_{ijkl}^w w_{,kl} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{M}^w \mathbf{w}'' \quad (2.42)$$

2.4 Způsoby skládání vrstev laminátu

Vhodnou skladbou jednotlivých vrstev laminátu lze docílit požadovaných vlastností materiálu. Cílem je zamezení přídavným namáháním materiálu, které se například u izotropních materiálů nevyskytují.

2.4.1 Symetrický laminát

Z hlediska namáhání laminátu je vhodné odstranit vazbu mezi tahem a ohybem a mezi tahem a krutem. Tedy aby když

$$\mathbf{N} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^0 = 0 \quad (2.43)$$

Otázkou je při jakém tvaru tenzorů N_{ijkl}^0 , N_{ijkl}^w , M_{ijkl}^0 , M_{ijkl}^w tento případ nastává. Pro $\mathbf{N} = 0$ máme

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{N}^w \mathbf{w}'' = 0 \quad (2.44)$$

Požadavek, aby

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = -(\mathbf{N}^0)^{-1} \mathbf{N}^w \mathbf{w}'' = 0 \quad (2.45)$$

je splněn, je-li

$$\mathbf{N}^w = - \sum_{v=1}^N \{l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v\}_{ij/kl} \frac{z_v^2 - z_{v-1}^2}{2} - \sum_{v=-N}^{-1} \{l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v\}_{ij/kl} \frac{z_{v+1}^2 - z_v^2}{2} = 0 \quad (2.46)$$

Tato podmínka je splněna v případě takzvaných symetrických laminátů. Pro ty platí, že jsou symetrické podle střední roviny laminátu a to z hlediska materiálu jednotlivých vrstev, orientace vrstev a také tloušťky vrstev. Tedy platí následující rovnosti pro všechna v .

$$E_{ijkl}^v = E_{ijkl}^{-v} \quad (2.47)$$

$$l_{im}^v = l_{im}^{-v} \quad (2.48)$$

$$z_v = -z_{-v}, \quad z_{v-1} = -z_{-(v-1)} \quad (2.49)$$

2.4.2 Vyrovnání laminát

Často je též vhodné odstranit vazbu mezi ohybem a krutem laminátu. Tuto vazbu reprezentují členy tenzoru \mathbf{M}^w v pozici $M_{1112}^w, M_{2212}^w, M_{1121}^w, M_{2221}^w$, a proto, má-li být tato vazba odstraněna, musí být tyto členy nulové. To je splněno pro takzvané vyrovnané lamináty, pro které platí, že vrstvy $+\alpha$ a $-\alpha$ leží v těsném sousedství.

2.5 Úplná potenciální energie symetrického laminátu

Uvažujeme výše zmíněný symetrický laminát, který ale nemusí být vyrovnaný. Pro ten platí

$$\varepsilon_{kl}(x, y, z) = -z w_{,kl} \quad (2.50)$$

Věta o principu úplné potenciální energie říká, že v rovnovážném stavu nabývá těleso mezi všemi přípustnými deformovanými stavy, které vyhovují okrajovým deformačním podmínkám, takový stav, pro který je hodnota funkcionálu úplné potenciální energie Π minimální.

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\varepsilon_{mn}(u_k)) \varepsilon_{ij}(u_k) d\Omega - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega - \int_{\partial\Omega} t_i u_i dS \quad (2.51)$$

V námi uvažovaném případě obdélné desky, kdy zanedbáme vliv objemových sil, vyjádříme úplnou potenciální energii

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} E_{mnop}^{v(z)} l_{ko}^{v(z)} l_{lp}^{v(z)} \varepsilon_{kl}(x, y, z) \varepsilon_{ij}(x, y, z) d\Omega - \int_{\omega} q(x, y) w(x, y) d\omega \quad (2.52)$$

kde $q(x, y)$ je obecné příčné zatížení vztažené na jednotku plochy a $\omega = (0, a) \times (0, b)$ je průmět desky do roviny $x - y$.

Dosadíme za ε_{kl} ze vztahu (2.50) a dostáváme

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \int_{\omega} l_{im}^{v(z)} l_{jn}^{v(z)} E_{mnop}^{v(z)} l_{ko}^{v(z)} l_{lp}^{v(z)} w_{,kl} w_{,ij} d\omega dz - \int_{\omega} qw d\omega \quad (2.53)$$

V námi uvažovaném případě symetrického laminátu je integrál od $-\frac{h}{2}$ do $\frac{h}{2}$ roven dvojnásobku integrálu od 0 do $\frac{h}{2}$. V zápise pro jednotlivé vrstvy máme

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{v=1}^N \int_{z=z_{v-1}}^{z_v} z^2 dz l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \int_{\omega} w_{,kl} w_{,ij} d\omega - \int_{\omega} qw d\omega \quad (2.54)$$

A nakonec po integraci

$$\Pi = \sum_{v=1}^N \zeta_v l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \int_{\omega} w_{,kl} w_{,ij} d\omega - \int_{\omega} qw d\omega \quad (2.55)$$

kde

$$\zeta_v = \frac{1}{3} (z_v^3 - z_{v-1}^3) \quad (2.56)$$

Čímž jsme vyjádřili úplnou potenciální energii obdélné laminátové desky.

2.6 Nutná a postačující podmínka řešení úlohy průhybu

Řešení \hat{w} úlohy nalezení skutečného deformovaného tvaru desky se zadanou orientací jednotlivých vrstev α minimalizuje funkcional celkové potenciální energie Π . Nutnou podmínkou řešení této úlohy je (za znaménkem implikace)

$$\hat{w}(\alpha) = \arg \min_{w \in \mathbb{W}} \Pi(w, \alpha) \Rightarrow \mathcal{W}(\hat{w}, \alpha) = \frac{\delta \Pi(w, \alpha)}{\delta w} = \mathbf{0} \wedge w \in \mathbb{W} \quad (2.57)$$

kde množina \mathbb{W} je množina všech staticky přípustných deformací. Protože funkcionál celkové potenciální energie je pozitivně definitní (konvexní), nutná podmínka je i podmínkou postačující.

2.7 Parametrizace úlohy

Hledanou funkci průhybu $w(x, y)$ nahradíme Fourierovou řadou s bází splňující okrajové podmínky dané množinou \mathbb{W} .

$$w = \sum_{\kappa, \gamma=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} \quad (2.58)$$

Označme

$$S^{\kappa\gamma} = \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} \quad (2.59)$$

a vyjádříme integrál z rovnice (2.55)

$$\begin{aligned} \int_{\omega} w_{,kl} w_{,ij} d\omega &= \int_{\omega} \sum_{\kappa, \gamma=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} S_{,ij}^{\kappa\gamma} \cdot \sum_{\xi, \eta=1}^{\infty} w^{\xi\eta} S_{,kl}^{\xi\eta} d\omega = \\ &= \sum_{\kappa, \gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi, \eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \int_{\omega} S_{,ij}^{\kappa\gamma} S_{,kl}^{\xi\eta} d\omega \end{aligned} \quad (2.60)$$

Vyjádříme člen uvnitř integrálu

$$\begin{aligned} \{S_{,ij}^{\kappa\gamma} S_{,kl}^{\xi\eta}\}_{ij/kl} &= \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) S^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) S^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} \\ -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 C^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) C^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) C^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 C^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} \\ -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 C^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) C^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) C^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 C^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} \\ \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} & -\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) S^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & -\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) S^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

kde

$$C^{\kappa\gamma} = \cos \frac{\kappa\pi x}{a} \cos \frac{\gamma\pi y}{b} \quad (2.62)$$

Označíme

$$\begin{aligned}
(S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) &= \int_{\omega} S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} d\omega = \int_0^a \int_0^b S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} dy dx = \\
&= \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} \sin \frac{\xi\pi x}{a} \sin \frac{\eta\pi y}{b} dy dx \\
(S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) &= \int_0^a \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\xi\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{\gamma\pi y}{b} \sin \frac{\eta\pi y}{b} dy
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Využitím vztahu

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \tag{2.64}$$

můžeme pro první integrál z rovnice (2.63) psát

$$\int_0^a \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\xi\pi x}{a} dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left(\cos \frac{(\kappa - \xi)\pi x}{a} - \cos \frac{(\kappa + \xi)\pi x}{a} \right) dx \tag{2.65}$$

a po integraci

$$\int_0^a \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\xi\pi x}{a} dx = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(\kappa - \xi)\pi x}{a} \cdot \frac{a}{(\kappa - \xi)\pi} - \sin \frac{(\kappa + \xi)\pi x}{a} \cdot \frac{a}{(\kappa + \xi)\pi} \right]_0^a \tag{2.66}$$

Pro $\kappa \neq \xi$ je poslední integrál roven součtu dvou sinových funkcí s argumentem rovným celočíselnému násobku π tedy nulový, ale pro $\kappa = \xi$ platí toto pouze pro druhý člen. Pro první člen můžeme psát

$$\lim_{\kappa - \xi \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(\kappa - \xi)\pi x}{a} \cdot \frac{a}{(\kappa - \xi)\pi} \right]_0^a \tag{2.67}$$

pro zjednodušení zápisu zavedeme substituci

$$\kappa - \xi = A \tag{2.68}$$

a po dosažení horní a dolní integrační meze můžeme psát

$$\begin{aligned}
\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\sin \frac{A\pi a}{a} \cdot \frac{a}{A\pi} \right] &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{a \sin(A\pi)}{2A\pi} \Big|_{L' \text{ Hospitalovo pravidlo}} = \\
&= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{a\pi \cos(A\pi)}{2\pi} = \frac{a}{2}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Tím pro hodnotu integrálu dostáváme

$$\int_0^a \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\xi\pi x}{a} dx = \begin{cases} = 0 & \text{pro } \kappa \neq \xi \\ = \frac{a}{2} & \text{pro } \kappa = \xi \end{cases} \tag{2.70}$$

Druhý integrál lze upravit analogicky, proto platí

$$(S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \delta_{\kappa\xi} \delta_{\gamma\eta} \frac{ab}{4} \quad (2.71)$$

Obdobně píšme

$$(C^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \int_0^a \int_0^b \cos \frac{\kappa\pi x}{a} \cos \frac{\gamma\pi y}{b} \sin \frac{\xi\pi x}{a} \sin \frac{\eta\pi y}{b} dy dx \quad (2.72)$$

$$(C^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \int_0^a \cos \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\xi\pi x}{a} dx \int_0^b \cos \frac{\gamma\pi y}{b} \sin \frac{\eta\pi y}{b} dy = I_{\kappa\xi} I_{\gamma\eta} \quad (2.73)$$

Využitím vztahu

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)) \quad (2.74)$$

upravíme první integrál z rovnice (2.73). Označme ho

$$I_{\kappa\xi} = \int_0^a \cos \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\xi\pi x}{a} dx$$

$$I_{\kappa\xi} = \frac{1}{2} \int_0^a \sin \frac{(\xi + \kappa)\pi x}{a} dx + \frac{1}{2} \int_0^a \sin \frac{(\xi - \kappa)\pi x}{a} dx \quad (2.75)$$

$$I_{\kappa\xi} = \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi + \kappa)\pi} \left[-\cos \frac{(\xi + \kappa)\pi x}{a} \right]_0^a + \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi - \kappa)\pi} \left[-\cos \frac{(\xi - \kappa)\pi x}{a} \right]_0^a \quad (2.76)$$

$$I_{\kappa\xi} = \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi + \kappa)\pi} (1 - \cos(\xi + \kappa)\pi) + \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi - \kappa)\pi} (1 - \cos(\xi - \kappa)\pi) \quad (2.77)$$

$$I_{\kappa\xi} = \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi + \kappa)\pi} (1 - (-1)^{\xi+\kappa}) + \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi - \kappa)\pi} (1 - (-1)^{\xi-\kappa}) \quad (2.78)$$

Je-li $\xi + \kappa$ sudé, pak i $\xi - \kappa$ je sudé, a potom

$$I_{\kappa\xi} = \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi + \kappa)\pi} (1 - 1) + \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi - \kappa)\pi} (1 - 1) = 0 \quad (2.79)$$

Je-li $\xi + \kappa$ liché, pak i $\xi - \kappa$ je liché, a potom

$$I_{\kappa\xi} = \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi + \kappa)\pi} (1 + 1) + \frac{1}{2} \frac{a}{(\xi - \kappa)\pi} (1 + 1) = \frac{a}{(\xi + \kappa)\pi} + \frac{a}{(\xi - \kappa)\pi} \quad (2.80)$$

Výraz převedeme na společného jmenovatele

$$I_{\kappa\xi} = \frac{a[(\xi - \kappa) + (\xi + \kappa)]}{(\xi^2 - \kappa^2)\pi} = \frac{2a\xi}{(\xi^2 - \kappa^2)\pi} \quad (2.81)$$

Obecně lze pro sudé i liché součty a rozdíly ξ a κ psát

$$I_{\kappa\xi} = (1 - (-1)^{\xi+\kappa}) \frac{a\xi}{(\xi^2 - \kappa^2)\pi} \quad (2.82)$$

Analogicky pro druhý integrál z rovnice (2.73)

$$I_{\gamma\eta} = \int_0^b \cos \frac{\gamma\pi y}{b} \sin \frac{\eta\pi y}{b} dy$$

$$I_{\gamma\eta} = (1 - (-1)^{\eta+\gamma}) \frac{b\eta}{(\eta^2 - \gamma^2)\pi} \quad (2.83)$$

A tedy

$$(C^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = (1 - (-1)^{\xi+\kappa})(1 - (-1)^{\eta+\gamma}) \frac{ab}{\pi^2} \frac{\xi\eta}{(\xi^2 - \kappa^2)(\eta^2 - \gamma^2)} \quad (2.84)$$

Označme

$$\theta_{\xi\kappa\eta\gamma} = (1 - (-1)^{\xi+\kappa})(1 - (-1)^{\eta+\gamma}) \quad (2.85)$$

tedy

$$\theta_{\xi\kappa\eta\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi + \kappa \vee \eta + \gamma \text{ sudé} \\ 4 & \text{je-li } \xi + \kappa \wedge \eta + \gamma \text{ liché} \end{cases}$$

Zavedením $\theta_{\xi\kappa\eta\gamma}$ do rovnice (2.84) dostaneme

$$(C^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = (S^{\xi\eta}, C^{\kappa\gamma}) = \theta_{\xi\kappa\eta\gamma} \frac{ab}{\pi^2} \frac{\xi\eta}{(\xi^2 - \kappa^2)(\eta^2 - \gamma^2)} \quad (2.86)$$

A obdobně můžeme vyjádřit člen s kosiny

$$(C^{\kappa\gamma}, C^{\xi\eta}) = \int_0^a \int_0^b \cos \frac{\kappa\pi x}{a} \cos \frac{\gamma\pi y}{b} \cos \frac{\xi\pi x}{a} \cos \frac{\eta\pi y}{b} dy dx \quad (2.87)$$

$$(C^{\kappa\gamma}, C^{\xi\eta}) = \int_0^a \cos \frac{\kappa\pi x}{a} \cos \frac{\xi\pi x}{a} dx \int_0^b \cos \frac{\gamma\pi y}{b} \cos \frac{\eta\pi y}{b} dy \quad (2.88)$$

Využijeme vztah

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \quad (2.89)$$

a první integrál z rovnice (2.88) můžeme psát jako

$$\int_0^a \cos \frac{\kappa\pi x}{a} \cos \frac{\xi\pi x}{a} dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left(\cos \frac{(\kappa - \xi)\pi x}{a} + \cos \frac{(\kappa + \xi)\pi x}{a} \right) dx \quad (2.90)$$

a po následné integraci

$$\int_0^a \cos \frac{\kappa \pi x}{a} \cos \frac{\xi \pi x}{a} dx = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(\kappa - \xi) \pi x}{a} \cdot \frac{a}{(\kappa - \xi) \pi} + \sin \frac{(\kappa + \xi) \pi x}{a} \cdot \frac{a}{(\kappa + \xi) \pi} \right]_0^a \quad (2.91)$$

Stejně jako v rovnici (2.66) je výraz pro $\kappa \neq \xi$ nulový a pro $\kappa = \xi$ je jeho hodnota stejná jako pro integrál se siny. Znaménko plus potažmo mínus v goniometrickém vzorci pro součin kosinů potažmo sinů je tedy v našem případě nepodstatné a můžeme psát

$$(C^{\kappa\gamma}, C^{\xi\eta}) = (S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \delta_{\kappa\xi} \delta_{\gamma\eta} \frac{ab}{4} \quad (2.92)$$

Dále označme

$$S_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \int_{\omega} S_{,ij}^{\kappa\gamma} S_{,kl}^{\xi\eta} d\omega \quad (2.93)$$

pro což užitím matice (2.61) a vztahů (2.86) a (2.92) platí

$$\begin{aligned} \{S_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}\}_{ij/kl} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \\ \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \end{bmatrix} \cdot \delta_{\kappa\gamma} \delta_{\xi\eta} \frac{ab}{4} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \\ -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Theta_{\xi\kappa\eta\gamma} \frac{ab}{\pi^2} \frac{\xi\eta}{(\xi^2 - \kappa^2)(\eta^2 - \gamma^2)} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & -\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \end{bmatrix} \cdot \Theta_{\kappa\xi\eta\gamma} \frac{ab}{\pi^2} \frac{\kappa\gamma}{(\kappa^2 - \xi^2)(\gamma^2 - \eta^2)} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Uvážíme-li že

$$\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma} = \Theta_{\kappa\xi\eta\gamma}$$

a

$$(\xi^2 - \kappa^2)(\eta^2 - \gamma^2) = (\kappa^2 - \xi^2)(\gamma^2 - \eta^2)$$

můžeme pro vztah (2.94) po vynásobení příslušných členů v matici $\kappa\gamma$ respektive $\xi\eta$ psát

$$\left\{ \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} \right\}_{ij/kl} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \\ \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \end{bmatrix} \cdot \delta_{\kappa\xi} \delta_{\gamma\eta} \frac{ab}{4} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) \kappa\gamma & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) \kappa\gamma & 0 \\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 \xi\eta & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \xi\eta \\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 \xi\eta & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \xi\eta \\ 0 & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) \kappa\gamma & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) \kappa\gamma & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{ab}{\pi^2 (\xi^2 - \kappa^2)(\eta^2 - \gamma^2)} \theta_{\xi\kappa\eta\gamma}$$

(2.95)

Dále upravíme integrál

$$\int_{\omega} qw \, d\omega = \int_{\omega} q \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} \, d\omega \quad (2.96)$$

do tvaru

$$\int_{\omega} qw \, d\omega = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} q_{\kappa\gamma} \quad (2.97)$$

kde

$$q_{\kappa\gamma} = \int_{\omega} q(x,y) \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} \, d\omega \quad (2.98)$$

Tím získává funkcionál celkové potenciální energie a tedy i úloha o nalezení skutečného deformovaného tvaru plně parametrický tvar

$$\hat{w}(\boldsymbol{\alpha}) = \arg \min_{w \in \mathbb{W}} \Pi_p(w, \boldsymbol{\alpha}) \quad (2.98)$$

kde

$$\Pi_p(w) = \sum_{\nu=1}^N \zeta_{\nu} l_{im}^{\nu} l_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} l_{ko}^{\nu} l_{lp}^{\nu} \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} - \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} q_{\kappa\gamma} \quad (2.99)$$

2.8 Stacionární podmínky úlohy

Obecný tvar stacionární podmínky naší parametrizované úlohy vychází z podmínky pro spojitou úlohu (2.57)

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial w^{\varepsilon\rho}} = 0 \quad (\varepsilon, \rho = 1, 2, \dots) \quad (2.100)$$

Tuto podmínku nyní upravíme. Derivováním podle $w^{\varepsilon\rho}$ dostáváme

$$\sum_{v=1}^N \sum_{\kappa, \gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi, \eta=1}^{\infty} \zeta_v l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} (\delta_{\kappa\varepsilon} \delta_{\gamma\rho} w^{\xi\eta} + w^{\kappa\gamma} \delta_{\xi\varepsilon} \delta_{\eta\rho}) - \sum_{\kappa, \gamma=1}^{\infty} \delta_{\kappa\varepsilon} \delta_{\gamma\rho} q_{\kappa\gamma} = 0 \quad (2.101)$$

a po úpravě indexů pomocí Kroneckerových delta (změna sčítacích indexů ve druhém sčítání)

$$\sum_{v=1}^N \sum_{\xi, \eta=1}^{\infty} \zeta_v l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v (\mathcal{S}_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} + \mathcal{S}_{ijkl}^{\xi\eta\varepsilon\rho}) w^{\xi\eta} - q_{\varepsilon\rho} = 0 \quad (2.102)$$

Označme

$$U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = \mathcal{S}_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} + \mathcal{S}_{ijkl}^{\xi\eta\varepsilon\rho} \quad (2.103)$$

Což rozepsané do složkové podoby vypadá následovně

$$\left\{ U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} \right\}_{ij/kl} = 2 \begin{pmatrix} \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 & 0 & 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 & 0 \\ \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^4 \end{pmatrix} \delta_{\varepsilon\xi} \delta_{\rho\eta} \frac{ab}{4} - \begin{pmatrix} 0 & A & A & 0 \\ A & 0 & 0 & B \\ A & 0 & 0 & B \\ 0 & B & B & 0 \end{pmatrix} \frac{ab}{\pi^2} \frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\rho}}{(\xi^2 - \varepsilon^2)(\eta^2 - \rho^2)} \quad (2.104)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) \varepsilon\rho + \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right) \left(\frac{\rho\pi}{b}\right) \xi\eta \\ B &= \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) \varepsilon\rho + \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right) \left(\frac{\rho\pi}{b}\right) \xi\eta \end{aligned} \quad (2.105)$$

Platí

$$U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{klij}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{lkij}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{kjil}^{\varepsilon\rho\xi\eta} \quad (2.106)$$

a také

$$U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\xi\eta\varepsilon\rho} \quad (2.107)$$

Po těchto úpravách můžeme tedy stacionární podmínku (2.100) psát jako

$$\sum_{v=1}^N \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} \zeta_v l_{im}^v l_{jn}^v E_{mnop}^v l_{ko}^v l_{lp}^v U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} w^{\xi\eta} - q_{\varepsilon\rho} = 0 \quad (2.108)$$

Dále upravíme výraz $U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v l_{im}^v l_{jn}^v l_{ko}^v l_{lp}^v$. Transformační tenzory l_{im}^v lze psát jako

$$l_{im}^v = \delta_{im} \cos \alpha_v + \epsilon_{im} \sin \alpha_v \quad (2.109)$$

kde δ_{im}^v je Kroneckerova delta a ϵ_{im}^v je Levi-Civitův antisymetrický tenzor ve dvourozměrném prostoru.

$$\{\epsilon_{ij}\} = \{-\epsilon_{ji}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

Pro zjednodušení zápisu budeme dále psát $c_v = \cos \alpha_v$ a $s_v = \sin \alpha_v$. Dosazením takto rozepsaných transformačních tenzorů dostaneme

$$\begin{aligned} & U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v l_{im}^v l_{jn}^v l_{ko}^v l_{lp}^v = \\ & = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v (\delta_{im} c_v + \epsilon_{im} s_v) (\delta_{jn} c_v + \epsilon_{jn} s_v) (\delta_{ko} c_v + \epsilon_{ko} s_v) (\delta_{lp} c_v + \epsilon_{lp} s_v) \end{aligned} \quad (2.111)$$

a po roznásobení závorek

$$\begin{aligned} & U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v l_{im}^v l_{jn}^v l_{ko}^v l_{lp}^v = \\ & = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \left(c_v^4 (\delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp}) \right. \\ & \quad + c_v^3 s_v (\delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ko} \epsilon_{lp} + \delta_{im} \delta_{jn} \epsilon_{ko} \delta_{lp} + \delta_{im} \epsilon_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp} + \epsilon_{im} \delta_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp}) \\ & \quad + c_v^2 s_v^2 (\delta_{im} \delta_{jn} \epsilon_{ko} \epsilon_{lp} + \delta_{im} \epsilon_{jn} \epsilon_{ko} \delta_{lp} + \delta_{im} \epsilon_{jn} \delta_{ko} \epsilon_{lp} + \epsilon_{im} \delta_{jn} \delta_{ko} \epsilon_{lp} \\ & \quad + \epsilon_{im} \delta_{jn} \epsilon_{ko} \delta_{lp} + \epsilon_{im} \epsilon_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp}) \\ & \quad + c_v s_v^3 (\delta_{im} \epsilon_{jn} \epsilon_{ko} \epsilon_{lp} + \epsilon_{im} \delta_{jn} \epsilon_{ko} \epsilon_{lp} + \epsilon_{im} \epsilon_{jn} \delta_{ko} \epsilon_{lp} + \epsilon_{im} \epsilon_{jn} \epsilon_{ko} \delta_{lp}) \\ & \quad \left. + s_v^4 (\epsilon_{im} \epsilon_{jn} \epsilon_{ko} \epsilon_{lp}) \right) \end{aligned} \quad (2.112)$$

Jednotlivé koeficienty u goniometrických funkcí označíme

$$U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v l_{im}^v l_{jn}^v l_{ko}^v l_{lp}^v = P_{1v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v^4 + P_{2v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v^3 s_v + P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v^2 s_v^2 + P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v s_v^3 + P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} s_v^4 \quad (2.113)$$

Tyto koeficienty postupně upravíme

$$P_{1v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp} \quad (2.114)$$

$$P_{1v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{ijkl}^v \quad (2.115)$$

Po vynásobení sobě odpovídajících členů a následném sečtení dostáváme

$$P_{1v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = 2 \left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a} \right)^4 Q_{11} + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b} \right)^2 (2Q_{12} + 4G_{12}) + \left(\frac{\rho\pi}{b} \right)^4 Q_{22} \right) \delta_{\varepsilon\xi} \delta_{\rho\eta} \frac{ab}{4} \quad (2.116)$$

Pro koeficient u $c_v^3 s_v$ máme

$$P_{2v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v (\delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ko} \epsilon_{lp} + \delta_{im} \delta_{jn} \epsilon_{ko} \delta_{lp} + \delta_{im} \epsilon_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp} + \epsilon_{im} \delta_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp}) \quad (2.117)$$

$$P_{2v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{mno l}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \epsilon_{lp} + U_{mnkp}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \epsilon_{ko} + U_{mjop}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \epsilon_{jn} + U_{inop}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \epsilon_{im} \quad (2.118)$$

Ve druhém členu přejmenujeme indexy $k \rightarrow l$ a zaměníme $o \leftrightarrow p$, ve třetím přejmenujeme $j \rightarrow l$ a zaměníme $n \leftrightarrow p$ a ve čtvrtém přejmenujeme $i \rightarrow l$ a zaměníme $m \leftrightarrow p$.

$$P_{2v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{mno l}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \epsilon_{lp} + U_{mnlo}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnp o}^v \epsilon_{lp} + U_{mlon}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{m p o n}^v \epsilon_{lp} + U_{lnom}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{p n o m}^v \epsilon_{lp} \quad (2.119)$$

Protože platí

$$E_{mnop} = E_{opmn} = E_{nmop} \quad (2.120)$$

a také (2.106), je

$$P_{2v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = 4 \cdot U_{lnom}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{pnom}^v \epsilon_{lp} \quad (2.121)$$

A protože

$$\{E_{pnom}^v \epsilon_{lp}\}_{ln/om} = \begin{bmatrix} 0 & G_{12}^v & G_{12}^v & 0 \\ Q_{12}^v & 0 & 0 & Q_{22}^v \\ -Q_{11}^v & 0 & 0 & -Q_{12}^v \\ 0 & -G_{12}^v & -G_{12}^v & 0 \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

je

$$P_{2v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = -4 \frac{ab}{\pi^2} \frac{\Theta_{\xi\eta\rho}}{(\xi^2 - \varepsilon^2)(\eta^2 - \rho^2)} \left(\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a} \right) \left(\frac{\eta\pi}{b} \right) \varepsilon\rho + \left(\frac{\xi\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon\pi}{a} \right) \left(\frac{\rho\pi}{b} \right) \xi\eta \right) (2G_{12}^v + Q_{12}^v - Q_{11}^v) + \left(\left(\frac{\rho\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a} \right) \left(\frac{\eta\pi}{b} \right) \varepsilon\rho + \left(\frac{\eta\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon\pi}{a} \right) \left(\frac{\rho\pi}{b} \right) \xi\eta \right) (-2G_{12}^v + Q_{22}^v - Q_{12}^v) \right) \quad (2.123)$$

Další koeficient $P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta}$ je

$$P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \left(\delta_{im}\delta_{jn}\epsilon_{ko}\epsilon_{lp} + \delta_{im}\epsilon_{jn}\epsilon_{ko}\delta_{lp} + \delta_{im}\epsilon_{jn}\delta_{ko}\epsilon_{lp} + \epsilon_{im}\delta_{jn}\delta_{ko}\epsilon_{lp} \right. \\ \left. + \epsilon_{im}\delta_{jn}\epsilon_{ko}\delta_{lp} + \epsilon_{im}\epsilon_{jn}\delta_{ko}\delta_{lp} \right) \quad (2.124)$$

Využijeme vztah

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{lm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{il}\delta_{jl} \quad (2.125)$$

potom

$$P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \left(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}\delta_{op} - \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kp}\delta_{ol} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{no}\delta_{lp} - \delta_{im}\delta_{jo}\delta_{nk}\delta_{lp} \right. \\ \left. + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{ko}\delta_{np} - \delta_{im}\delta_{jp}\delta_{ko}\delta_{nl} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{ko}\delta_{mp} - \delta_{ip}\delta_{jn}\delta_{ko}\delta_{ml} \right. \\ \left. + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{mo}\delta_{lp} - \delta_{io}\delta_{jn}\delta_{mk}\delta_{lp} + \delta_{ij}\delta_{mn}\delta_{ko}\delta_{lp} - \delta_{in}\delta_{mj}\delta_{ko}\delta_{lp} \right) \quad (2.126)$$

$$P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijll}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{ijpp}^v - U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{ijlk}^v + U_{ijjl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{innl}^v - U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{ikjl}^v \\ + U_{ijkj}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{inkn}^v - U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{ilkj}^v + U_{ijki}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mjkm}^v - U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{ljki}^v \\ + U_{ijil}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mjml}^v - U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{kjil}^v + U_{iikl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mmkl}^v - U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{jikl}^v \quad (2.127)$$

Opět přeznačíme příslušné indexy v jednotlivých členech a s využitím výše zmíněných vlastností tenzorů U_{ijkl} (2.106) a E_{ijkl} (2.120) dostáváme

$$P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijll}^{\varepsilon\rho\xi\eta} (E_{ijn}^v + E_{innj}^v + E_{inj}^v + E_{njin}^v + E_{njni}^v + E_{nnij}^v) + U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} (-6E_{ijkl}^v) \quad (2.128)$$

$$P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijll}^{\varepsilon\rho\xi\eta} (2E_{ijn}^v + 4E_{innj}^v) + U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} (-6E_{ijkl}^v) \quad (2.129)$$

Vyjádríme složkové tvary tenzorů v prvním členu.

$$\left\{ U_{ijll}^{\varepsilon\rho\xi\eta} \right\}_{i/j} = 2 \begin{pmatrix} \left(\frac{\varepsilon\pi}{a} \right)^4 + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b} \right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{\rho\pi}{b} \right)^4 \end{pmatrix} \delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\rho\eta} \frac{ab}{4} - \quad (2.130)$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & A+B \\ A+B & 0 \end{pmatrix} \frac{ab}{\pi^2} \frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\rho}}{(\xi^2 - \varepsilon^2)(\eta^2 - \rho^2)}$$

$$\left\{ 2E_{ijn}^v + 4E_{innj}^v \right\}_{i/j} = \begin{pmatrix} 6Q_{11}^v + 2Q_{12}^v + 4G_{12}^v & 0 \\ 0 & 6Q_{22}^v + 2Q_{12}^v + 4G_{12}^v \end{pmatrix} \quad (2.131)$$

Tedy po součinu těchto tenzorů a odečtení druhého členu

$$\begin{aligned}
P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} &= 2\delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\rho\eta} \frac{ab}{4} \left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 (2Q_{12}^v + 4G_{12}^v) \right. \\
&\quad + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 (6Q_{11}^v - 8Q_{12}^v - 16G_{12}^v + 6Q_{22}^v) \\
&\quad \left. + \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^4 (2Q_{12}^v + 4G_{12}^v) \right)
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Dále upravíme koeficient $P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta}$.

$$P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v (\delta_{im}\epsilon_{jn}\epsilon_{ko}\epsilon_{lp} + \epsilon_{im}\delta_{jn}\epsilon_{ko}\epsilon_{lp} + \epsilon_{im}\epsilon_{jn}\delta_{ko}\epsilon_{lp} + \epsilon_{im}\epsilon_{jn}\epsilon_{ko}\delta_{lp}) \tag{2.133}$$

Zaměníme indexy v prvním členu $im \leftrightarrow jn$ a ve třetím členu $ko \leftrightarrow lp$.

$$P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v (2\epsilon_{im}\delta_{jn}\epsilon_{ko}\epsilon_{lp} + 2\epsilon_{im}\epsilon_{jn}\epsilon_{ko}\delta_{lp}) \tag{2.134}$$

A zaměníme indexy $ij \leftrightarrow kl$ a $op \leftrightarrow mn$ ve druhém členu a dostaneme

$$P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v (4\epsilon_{im}\delta_{jn}\epsilon_{ko}\epsilon_{lp}) \tag{2.135}$$

Užitím vztahu (2.125) máme

$$P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v 4\epsilon_{im}\delta_{jn} (\delta_{kl}\delta_{op} - \delta_{kp}\delta_{ol}) \tag{2.136}$$

$$P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = 4\epsilon_{im}\delta_{jn} (U_{ijll}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnp}^v - U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnlk}^v) \tag{2.137}$$

$$P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = 4\epsilon_{im} (U_{inll}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnp}^v - U_{inlk}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnlk}^v) \tag{2.138}$$

Vyjádříme složky tenzoru $\epsilon_{im} E_{mnp}^v$

$$\{\epsilon_{im} E_{mnp}^v\}_{i/n} = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}^v + Q_{22}^v \\ -Q_{11}^v - Q_{12}^v & 0 \end{bmatrix} \tag{2.139}$$

Využitím výše vyjádřených tenzorů (2.130), (2.122) a (2.104) dostaneme

$$\begin{aligned}
P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} &= -4 \frac{ab}{\pi^2 (\xi^2 - \varepsilon^2)(\eta^2 - \rho^2)} \left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) \varepsilon\rho (Q_{22}^v - 2G_{12}^v - Q_{12}^v) \right. \\
&\quad + \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right) \left(\frac{\rho\pi}{b}\right) \xi\eta (Q_{22}^v - 2G_{12}^v - Q_{12}^v) \\
&\quad + \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) \varepsilon\rho (2G_{12}^v + Q_{12}^v - Q_{11}^v) \\
&\quad \left. + \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right) \left(\frac{\rho\pi}{b}\right) \xi\eta (2G_{12}^v + Q_{12}^v - Q_{11}^v) \right)
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Zbývá vyjádřit koeficient $P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta}$.

$$P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v \epsilon_{im} \epsilon_{jn} \epsilon_{ko} \epsilon_{lp} \quad (2.141)$$

Užitím vztahu (2.125) dostaneme

$$P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{ijkl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mnop}^v (\delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{mj}) (\delta_{kl} \delta_{op} - \delta_{kp} \delta_{ol}) \quad (2.142)$$

$$P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{iikl}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mmop}^v (\delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{kl} \delta_{op} - \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{kp} \delta_{ol} - \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} \delta_{op} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kp} \delta_{ol}) \quad (2.143)$$

$$P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{iikk}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mmoo}^v - U_{iiko}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mmok}^v - U_{imkk}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mioo}^v + U_{imko}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mioo}^v \quad (2.144)$$

Opětovným využitím vlastností tenzorů U_{ijkl} (2.106) a E_{mnop} (2.120) a přejmenováním příslušných indexů dostaneme

$$P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = U_{iikk}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mmoo}^v - 2U_{iioo}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{mmok}^v + U_{imok}^{\varepsilon\rho\xi\eta} E_{imok}^v \quad (2.145)$$

A tedy využitím výše rozepsaných tenzorů

$$P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} = 2\delta_{\varepsilon\xi} \delta_{\rho\eta} \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 Q_{22}^v + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^2 (2Q_{12}^v + 4G_{12}^v) + \left(\frac{\rho\pi}{b}\right)^4 Q_{11}^v \right] \quad (2.146)$$

Pomocí těchto koeficientů $P_{1v}^{\varepsilon\rho\xi\eta}$ až $P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta}$ lze psát naši podmínku (2.100) ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^N \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} \zeta_v \left(P_{1v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v^4 + P_{2v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v^3 s_v + P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v^2 s_v^2 + P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v s_v^3 + P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} s_v^4 \right) w^{\xi\eta} = \\ = q_{\varepsilon\rho} \quad (\varepsilon, \rho = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.147)$$

Na závěr ještě omezíme počet členů Fourierovy řady číslem K a dostaneme konečný tvar podmínky.

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^N \sum_{\xi,\eta=1}^K \zeta_v \left(P_{1v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v^4 + P_{2v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v^3 s_v + P_{3v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v^2 s_v^2 + P_{4v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_v s_v^3 + P_{5v}^{\varepsilon\rho\xi\eta} s_v^4 \right) w^{\xi\eta} = \\ = q_{\varepsilon\rho} \quad (\varepsilon, \rho = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.148)$$

2.9 Vyjádření koeficientů $q_{k\gamma}$ pro různá zatížení

2.9.1 Zatížení $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

Koeficienty $q_{k\gamma}$ vypočteme dosazením do rovnice (2.98).

$$q_{\kappa\gamma} = q_0 \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} dy dx \quad (2.149)$$

Užitím vztahu (2.70) okamžitě dostaneme

$$q_{\kappa\gamma} = \begin{cases} = 0 & \text{pro } \kappa\gamma = 11 \\ = q_0 \frac{ab}{4} & \text{pro } \kappa\gamma \neq 11 \end{cases} \quad (2.150)$$

Obdobně pro zatížení $q(x, y) = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$ bychom dostali

$$q_{\kappa\gamma} = \begin{cases} = 0 & \text{pro } \kappa\gamma = 22 \\ = q_0 \frac{ab}{4} & \text{pro } \kappa\gamma \neq 22 \end{cases} \quad (2.151)$$

2.9.2 Zatížení $q(x, y) = q_0 xy$

Opět dosadíme do rovnice (2.98).

$$q_{\kappa\gamma} = q_0 \int_0^a \int_0^b xy \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} dy dx \quad (2.152)$$

Nyní upravíme integrál

$$\int_0^a x \sin \frac{\kappa\pi x}{a} dx \quad (2.153)$$

Užitím metody *per partes* dostaneme

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{a}{\kappa\pi} x \cos \frac{\kappa\pi x}{a} \right]_0^a + \int_0^a \frac{a}{\kappa\pi} \cos \frac{\kappa\pi x}{a} dx = \\ & = -\frac{a^2}{\kappa\pi} [\cos(\kappa\pi)] + \left(\frac{a}{\kappa\pi} \right)^2 \left[\sin \frac{\kappa\pi x}{a} \right]_0^a \end{aligned} \quad (2.154)$$

Druhý člen je nulový pro každé κ , proto

$$\int_0^a x \sin \frac{\kappa\pi x}{a} dx = -(-1)^\kappa \frac{a^2}{\kappa\pi} \quad (2.155)$$

Po stejné úpravě pro druhý integrál z rovnice (2.152) dostaneme

$$q_{\kappa\gamma} = q_0 (-1)^{\kappa+\gamma} \frac{a^2 b^2}{\kappa\gamma\pi^2} \quad (2.156)$$

2.9.3 Zatížení izolovanou silou působící kolmo na rovinu desky

Zatěžující sílu definujeme v bodě $x = c$ a $y = d$. Zatížení $q(x, y)$ v tomto případě nahradíme Fourierovou řadou. Při tom uvažujme, že izolovaná síla působící v bodě $[x, y] = [c, d]$ je

spojitým zatížením působícím na čtverec $x \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle, y \in \langle d - \delta, d + \delta \rangle$ kde $\delta \rightarrow 0$.

Úplný ortonormální systém funkcí na obdélníku $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$ je

$$S^{\kappa\gamma} = \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} \quad (2.157)$$

Z rovnice (2.92) víme, že

$$(S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \delta_{\kappa\xi} \delta_{\gamma\eta} \frac{ab}{4} \quad (2.158)$$

Je třeba náš systém báзовých funkcí normalizovat, abychom eliminovali nežádoucí koeficient

$\frac{ab}{4}$ na pravé straně rovnice. Proto zvolíme ortonormální systém báзовých funkcí

$$N^{\kappa\gamma} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} \quad (2.159)$$

Potom můžeme psát

$$q = \sum_{\kappa, \gamma=1}^{\infty} c_{\kappa\gamma} N^{\kappa\gamma} \quad (2.160)$$

kde

$$c_{\kappa\gamma} = (f, N^{\kappa\gamma}) = \int_0^a \int_0^b f N^{\kappa\gamma} dy dx \quad (2.161)$$

$$f = \begin{cases} \frac{F}{4\delta^2} & \text{pro } x \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle \text{ a zároveň } y \in \langle d - \delta, d + \delta \rangle \\ 0 & \text{pro ostatní } x, y \end{cases}$$

kde $\delta \rightarrow 0$. Nyní vyjádříme koeficienty Fourierovy řady $c_{\kappa\gamma}$

$$c_{\kappa\gamma} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \int_{d-\delta}^{d+\delta} \frac{F}{4\delta^2} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{\gamma\pi y}{b} dy dx \quad (2.162)$$

Upravíme nyní integrál

$$\begin{aligned} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \sin \frac{\kappa\pi x}{a} dx &= \frac{a}{\kappa\pi} \left[-\cos \frac{\kappa\pi x}{a} \right]_{c-\delta}^{c+\delta} = -\frac{a}{\kappa\pi} \left(\cos \frac{\kappa\pi(c+\delta)}{a} - \cos \frac{\kappa\pi(c-\delta)}{a} \right) = \\ &= -\frac{a}{\kappa\pi} \left(\cos \frac{\kappa\pi c}{a} \cos \frac{\kappa\pi\delta}{a} - \sin \frac{\kappa\pi c}{a} \sin \frac{\kappa\pi\delta}{a} - \cos \frac{\kappa\pi c}{a} \cos \frac{\kappa\pi\delta}{a} - \sin \frac{\kappa\pi c}{a} \sin \frac{\kappa\pi\delta}{a} \right) = \\ &= \frac{2a}{\kappa\pi} \sin \frac{\kappa\pi c}{a} \sin \frac{\kappa\pi\delta}{a} \end{aligned}$$

Obdobně

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} \sin \frac{\gamma \pi y}{b} dy = \frac{2b}{\gamma \pi} \sin \frac{\gamma \pi d}{b} \sin \frac{\gamma \pi \delta}{b}$$

S využitím těchto vztahů můžeme psát

$$c_{\kappa \gamma} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{F}{4\delta^2} \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{2a}{\kappa \pi} \sin \frac{\kappa \pi c}{a} \sin \frac{\kappa \pi \delta}{a} \frac{2b}{\gamma \pi} \sin \frac{\gamma \pi d}{b} \sin \frac{\gamma \pi \delta}{b} \quad (2.163)$$

$$c_{\kappa \gamma} = \frac{2Fab}{\kappa \gamma \pi^2 \sqrt{ab}} \sin \frac{\kappa \pi c}{a} \sin \frac{\gamma \pi d}{b} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta^2} \sin \frac{\kappa \pi \delta}{a} \sin \frac{\gamma \pi \delta}{b} \quad (2.164)$$

Upravíme limitu

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta^2} \sin \frac{\kappa \pi \delta}{a} \sin \frac{\gamma \pi \delta}{b} \Big|_{\Gamma_H} &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\kappa \pi}{a} \cos \frac{\kappa \pi \delta}{a} \sin \frac{\gamma \pi \delta}{b} + \sin \frac{\kappa \pi \delta}{a} \cos \frac{\gamma \pi \delta}{b} \frac{\gamma \pi}{b}}{2\delta} \Big|_{\Gamma_H} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left[\frac{\kappa \pi}{a} \left(-\sin \frac{\kappa \pi \delta}{a} \frac{\kappa \pi}{a} \sin \frac{\gamma \pi \delta}{b} + \cos \frac{\kappa \pi \delta}{a} \cos \frac{\gamma \pi \delta}{b} \frac{\gamma \pi}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{\kappa \pi \delta}{a} \frac{\kappa \pi}{a} \cos \frac{\gamma \pi \delta}{b} - \sin \frac{\kappa \pi \delta}{a} \sin \frac{\gamma \pi \delta}{b} \frac{\gamma \pi}{b} \right) \frac{\gamma \pi}{b} \right] = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa \pi}{a} \right)^2 \sin \frac{\kappa \pi \delta}{a} \sin \frac{\gamma \pi \delta}{b} + 2 \frac{\kappa \pi}{a} \frac{\gamma \pi}{b} \cos \frac{\kappa \pi \delta}{a} \cos \frac{\gamma \pi \delta}{b} + \left(\frac{\gamma \pi}{b} \right)^2 \sin \frac{\kappa \pi \delta}{a} \sin \frac{\gamma \pi \delta}{b} \right] = \\ &= \frac{\kappa \pi}{a} \frac{\gamma \pi}{b} = \pi^2 \frac{\kappa \gamma}{ab} \end{aligned}$$

A po dosazení dostáváme tvar koeficientů Fourierovy řady pro naše zatížení

$$c_{\kappa \gamma} = \frac{2F}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\kappa \pi c}{a} \sin \frac{\gamma \pi d}{b} \quad (2.165)$$

Spojité zatížení vyjádřené pomocí Fourierovy řady má potom tvar

$$q(x, y) = \sum_{\kappa, \gamma=1}^{\infty} c_{\kappa \gamma} N^{\kappa \gamma} = \sum_{\kappa, \gamma=1}^{\infty} \frac{2c_{\kappa \gamma}}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\kappa \pi x}{a} \sin \frac{\gamma \pi y}{b} \quad (2.166)$$

Nyní můžeme vyjádřit koeficienty $q_{\xi \eta}$. Dosazením do rovnice (2.98) dostaneme

$$q_{\xi \eta} = \int_0^a \int_0^b \sum_{\kappa, \gamma=1}^{\infty} \frac{2c_{\kappa \gamma}}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\kappa \pi x}{a} \sin \frac{\gamma \pi y}{b} \sin \frac{\xi \pi x}{a} \sin \frac{\eta \pi y}{b} dy dx \quad (2.167)$$

$$q_{\xi \eta} = \frac{2c_{\xi \eta}}{\sqrt{ab}} \frac{ab}{4} \quad (2.168)$$

$$q_{\xi\eta} = F \sin \frac{\xi\pi x}{a} \sin \frac{\eta\pi y}{b} \quad (2.169)$$

2.10 Vyjádření cílové funkce

Cílovou funkci ze vztahu (2.99) vyjadřující míru tuhosti nyní upravíme. Platí

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}_{ijkl}^{\xi\eta\kappa\gamma} \quad (2.170)$$

a tedy

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} U_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} \quad (2.171)$$

Využitím tohoto vztahu lze cílovou funkci psát jako

$$\begin{aligned} \Pi_p(w) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\kappa,\gamma=1}^K \sum_{\xi,\eta=1}^K \zeta_{\nu} \left(P_{1\nu}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_{\nu}^4 + P_{2\nu}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_{\nu}^3 s_{\nu} + P_{3\nu}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_{\nu}^2 s_{\nu}^2 + P_{4\nu}^{\varepsilon\rho\xi\eta} c_{\nu} s_{\nu}^3 \right. \\ \left. + P_{5\nu}^{\varepsilon\rho\xi\eta} s_{\nu}^4 \right) w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} - \sum_{\kappa,\gamma=1}^K w^{\kappa\gamma} q_{\kappa\gamma} \end{aligned} \quad (2.172)$$

Pro skutečné řešení \hat{w} však platí²

$$\hat{\Pi}_p(w) = -\frac{1}{2} \sum_{\kappa,\gamma=1}^K \hat{w}^{\kappa\gamma} q_{\kappa\gamma} \quad (2.173)$$

Zanedbáme vliv nemající jednu polovinu a změníme znaménko. Minimální práce vnějších sil implikuje maximální tuhost, a proto finální podmínka pro maximální tuhost určená k minimalizaci bude mít tvar

$$\hat{\Pi}_{pCF}(w) = \sum_{\kappa,\gamma=1}^K \hat{w}^{\kappa\gamma} q_{\kappa\gamma} \quad (2.174)$$

² Tento vztah vychází z teorie variačních metod řešení diferenciálních rovnic, což není předmětem této práce a ponechám ho zde bez odvození.

3 Technologie výroby a materiály

Tato práce se přímo nezabývá technologií výroby a materiály kompozitových desek, avšak zabývá se mechanickými vlastnostmi těchto desek, na něž má výroba zásadní vliv. Proto zde pouze stručně zmíníme základní výrobní technologie a materiály, které jsou pro výrobu nejčastěji používány.

3.1 Technologie výroby

3.1.1 Ruční kladení

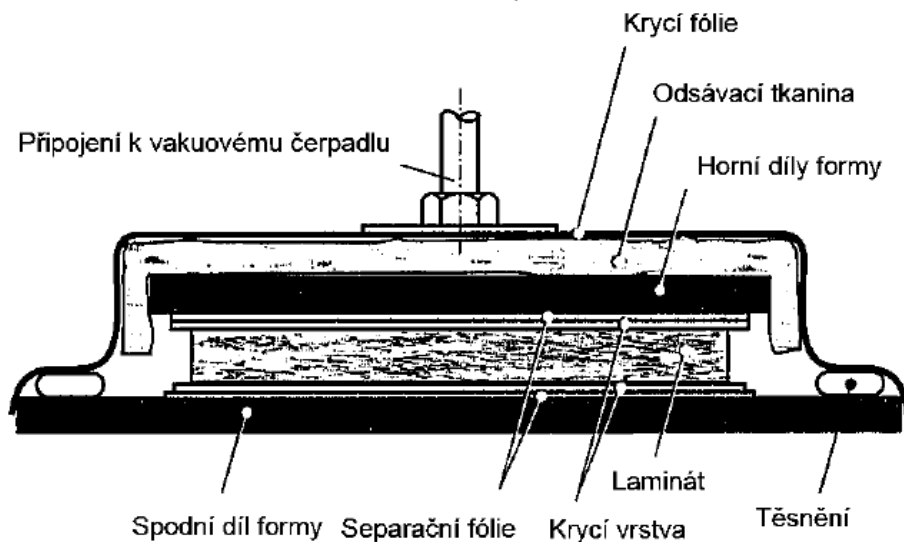
Jde o nejstarší a dosud jednu z nejběžnějších metod výroby laminátu. Ručně se kladou jednotlivé vrstvy výztuže a poté jsou prosycovány pryskyřicí pomocí štětce nebo válečku. Následně jsou vytlačeny vzduchové bubliny pomocí rýhovaných válečků. Vytvrzení laminátu probíhá v bez působení tlaku a za normální teploty. Hlavními výhodami této technologie jsou jednoduchost výroby, nízké náklady na nástroje a vysoká variabilita tvarů a velikostí. Nevýhodami jsou vznik velkého množství nerecyklovatelného odpadu, dlouhý výrobní čas a velká závislost kvality výrobku na zkušenosti pracovníků. Tato technologie je vhodná pro výrobu v nízkých sériích a také pro výrobu prototypů.

3.1.2 Metoda vakuového prosycování

Jde o vylepšení metody ručního kladení. V poslední fázi vytvrzování je na laminát přiložena fólie nepropouštějící vzduch a z formy je vzduch vysáván. Tím je zejména zamezeno nežádoucímu vzniku bublin lépe než při klasickém ručním kladení. Většina výhod ručního kladení je zachována, zvyšuje se cena výroby.

3.1.3 Vytvrzování v autoklávu

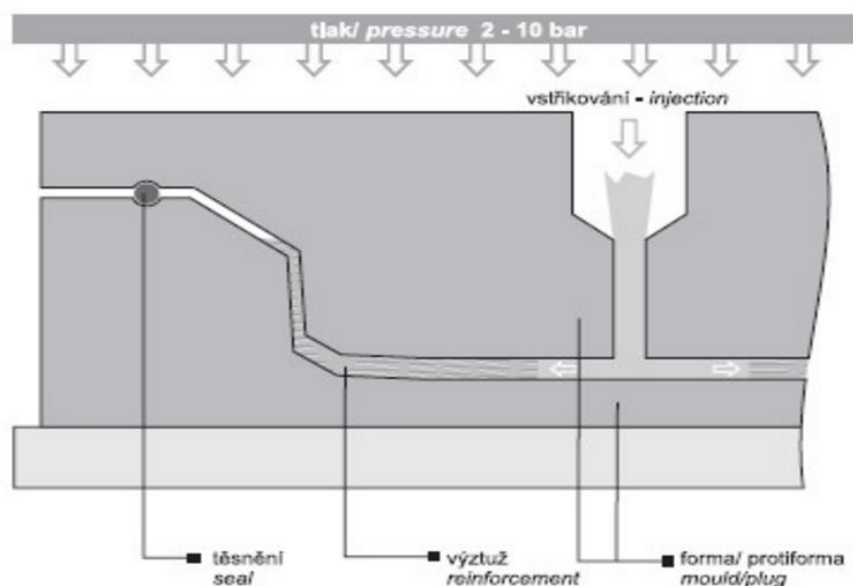
Jedná o nejnákladnější a nejsložitější technologii pro sériovou výrobu. Laminát je nejprve připraven ve formě, na kterou je přidána pružná fólie či plachetka. Na poslední konstrukční vrstvy laminátu bývá přidávána tzv. strhávací tkanina ze syntetických vláken, která usnadňuje další operace jako například povrchové úpravy tím, že může být kdykoliv stržena a na vzniklém povrchu lze pokračovat s dalšími operacemi, aniž by jej bylo třeba odmašťovat, brousit či zdrsňovat. Poté je laminát přenesen do uzavřené nádoby (autoklávu), kde je za působení tlaku a tepla vytvrzen, parametry vytvrzování je tedy možno přesně řídit. Výhodou metody je dosažení výborných mechanických vlastností materiálu, obsah výztuže se zde pohybuje přes 60 %. Hlavními nevýhodami této metody jsou vysoké pořizovací náklady, její pracnost a omezenost velikosti dílů velikostí autoklávu.



Obrázek 3.1: Vytvrzování v autoklávu [5]

3.1.4 Metoda vysokotlakého vstřikování matrice (RTM)

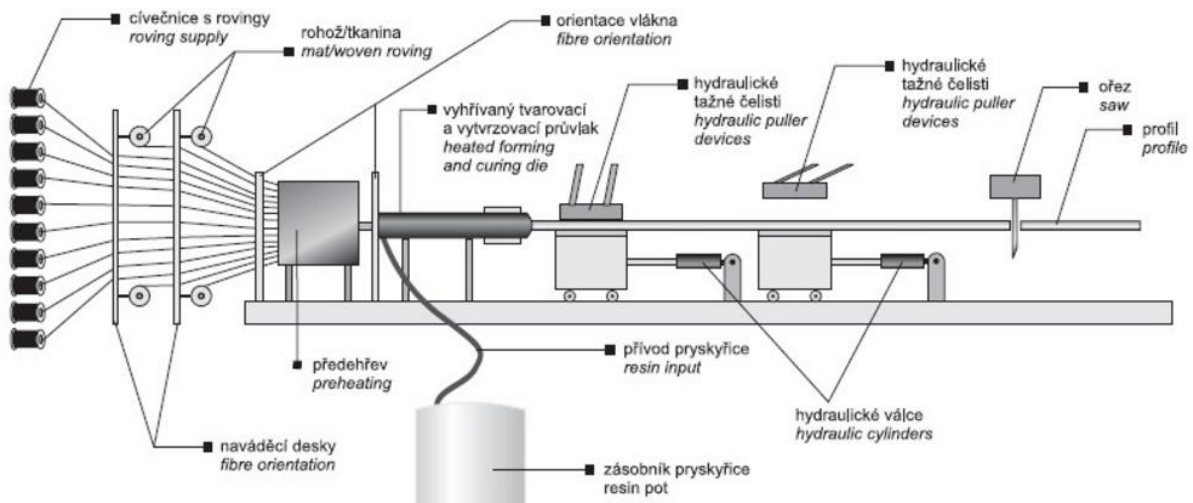
Do formy, jejíž obě strany jsou voskovány, je vložena suchá výztuž dle konstrukčního návrhu tak, aby umožňovala snadný tok pryskyřice, čímž je dosaženo prosycení v co nejkratším čase. Poté je forma uzavřena vrchním dílem a vstřikovacím otvorem je vstřikována pryskyřice do té doby, než začne vytékat odtokovými otvory ven, tedy dokud není výztuž zcela prosycena. Forma zůstává uzavřena po dobu vytvrzení, poté je otevřena a díl vytažen. Výhodou této technologie je možnost výroby dílů s oběma stranami povrchu kvalitními. Nevýhodami jsou velké pořizovací náklady na vstřikovací zařízení a náklady na těžké kovové formy. Metoda je tedy vhodná pro vyšší série v řádu stovek až tisíců kusů.



Obrázek 3.2: Metoda vysokotlakého vstřikování matrice [6]

3.1.5 Tažení

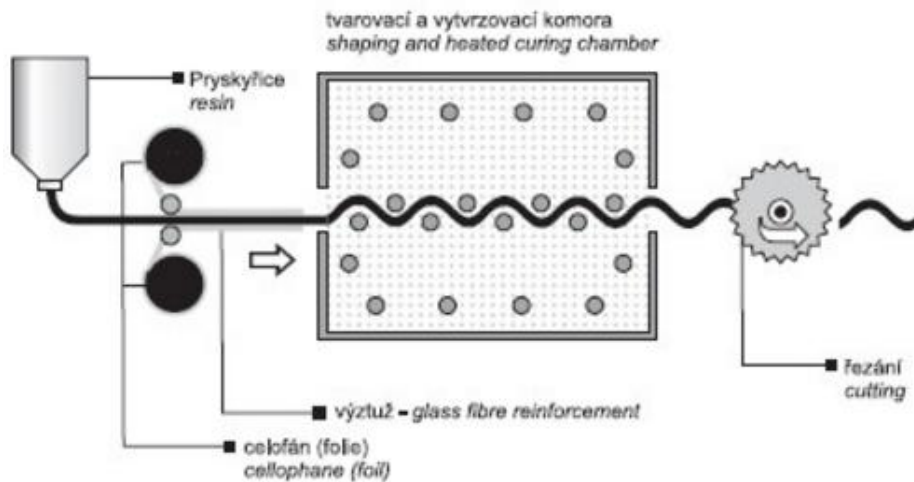
Kontinuálním způsobem jsou vyráběny dílce různých tvarů s vysokým obsahem výztuže (až 80 %). Pramence vláken výztuže jsou procházejí lázní s pryskyřicí, kde je pro sycena, a po následném odždímání přebytečné pryskyřice jsou vtahovány do tvarovacích (forem), jejichž dutina odpovídá vnějšímu tvaru vyráběných profilů. V průvlacích dochází působením tepla k vytvrzení. Díl je odtahován hydraulickými čelistmi a dělen na požadovanou délku. Výhodami jsou výborné mechanické vlastnosti, velká variabilita tvarů a nízké nároky na obsluhu. Nevýhodou je vysoká pořizovací cena.



Obrázek 3.3: Schéma tažení [III]

3.1.6 Ostatní kontinuální metody

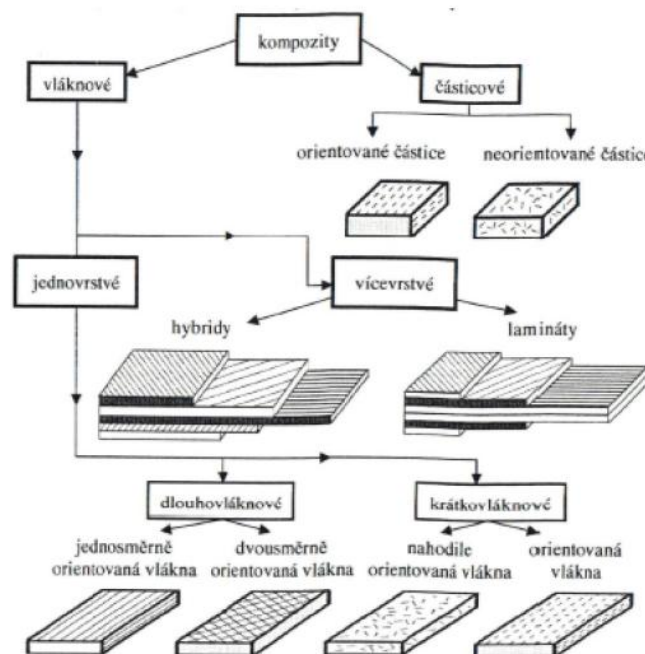
Rovinné laminátové desky se vyrábí také na kontinuálních linkách. Výchozím materiálem mohou být tkané pramence, rohože nebo tkaniny, které jsou nanášeny na nosnou fólii a prosycovány pryskyřicí průchodem lázní nebo zkrápěním. Poté je deska překryta separační fólií a vtahována do vytvrzovací a tvarovací zóny. Linka je zakončena odtahovacím a řezacím zařízením.



Obrázek 3.4: Kontinuální laminování [III]

3.2 Materiály

Synteticky vyráběné kompozity se zpravidla skládají ze dvou složek a to výztuže a pojiva. Výztuž v první řadě zajišťuje mechanické vlastnosti kompozitu tedy tuhost a pevnost. Pojivo častěji označováno jako matrice zajišťuje soudržnost kompozitu, interlaminární pevnost, ochranu vláken před okolními vlivy a distribuci napětí mezi vlákny. Obecně lze kompozity rozdělit dle obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Rozdělení kompozitů [2]

Jelikož se tato práce zabývá laminátovými deskami, omezíme se zde popis materiálů, z nichž jsou vyráběny. To znamená materiály vláken a matrice.

3.2.1 Vlákna

Existuje mnoho druhů vláken používaných k výrobě laminátů, ty nejdůležitější zde stručně popíšeme a následně v tabulce 3.1 shrneme jejich mechanické vlastnosti

Skelná vlákna

Skelná vlákna mají poměrně vysokou pevnost v tahu, která je však snižována vlhkostí, a nízký modul pružnosti. Jsou však odolná proti ohni a mnoha chemikáliím. Únavové vlastnosti a odolnost v oděru jsou rovněž nízké. Rozlišujeme dva hlavní druhy skelných vláken E-sklo (electric), které je vhodné jako elektroizolační materiál, a S-sklo (strength), které má vyšší modul pružnosti i pevnost v tahu.

Uhlíková vlákna

Mechanické vlastnosti uhlíkových vláken se pohybují v široké škále od vysoce pevných, se středním modulem pružnosti, až po extrémně vysoký modul pružnosti. Dle těchto vlastností je dělíme na vysokopevnostní uhlíková vlákna (HS) a vysokomodulová (HM), která mají nižší tahovou pevnost než HM vlákna, ale vyšší modul pružnosti v tahu, jsou také dražší. Cena uhlíkových vláken je v porovnání ze skleněnými desetinásobná až stonásobná.

Aramidová vlákna

Jsou to vlákna z lineárních makromolekul, v jejichž řetězcích se opakují funkční amidové skupiny (silon, nylon). Nejznámějším aramidovým vláknem je kevlar. Aramidová vlákna mají vysoký modul pružnosti a vysokou pevnost v tahu, jsou odolná vůči otěru a teplu a jsou nevodivá. Jsou však citlivá na ultrafialové záření, vlhkost, salinitu a kyseliny.

Borová vlákna

Borová vlákna jsou vyráběna nanášením plynného boru na tenká vlákna z wolframu nebo uhlíku. Vyznačují se vysokým modulem pružnosti a pevností v tahu a zejména vysokou pevností v tlaku, větší než v tahu (6,9 GPa). Mají velmi malou teplotní roztažnost i roztažnost způsobenou vlhkostí. Jsou velmi odolná proti vysokým teplotám. Jejich hlavní nevýhodou je vysoká cena.

Material	E , GPa	σ_b , GPa	ρ , kg/m ³	E/ρ , MJ/kg	σ_b/ρ , MJ/kg	cost, \$/kg
E-glass	72.4	2.4	2,540	28.5	0.95	1.1
S-glass	85.5	4.5	2,490	34.3	1.8	22-33
aramid	124	3.6	1,440	86	2.5	22-33
boron	400	3.5	2,450	163	1.43	330-440
HS graphite	253	4.5	1,800	140	2.5	66-110
HM graphite	520	2.4	1,850	281	1.3	220-660

Tabulka 3.1: Mechanické vlastnosti vláken a jejich cena [XI]

3.2.2 Matrice

Pro výrobu kompozitních materiálů jsou používány čtyři hlavní typy pryskyřic: epoxidové, polyesterové, vinylesterové a fenolové. Jejich mechanické vlastnosti jsou shrnuty v tabulce 3.2.

Epoxidové pryskyřice

Vyznačují se dobrou adhezí k vláknům nízkým smrštěním během vytvrzování (kolem 2 %), dobrou chemickou odolností a také creepovou a únavovou odolností. Po vytvrzení mají dobré mechanické vlastnosti, jsou velmi dobře odolné proti vodě rozpouštědlům a kyselinám. Jsou také dobrými elektrickými izolanty. Většina namáhaných kompozitových struktur je v dnešní době vyráběna z epoxidových pryskyřic.

Polyesterové pryskyřice

Jsou nejčastěji využívanou matricí pro vyztužené plasty v kombinaci se skleněnou výztuží. Mají dobré mechanické, elektrické a chemické vlastnosti. Jsou vhodné pro mírně kyselé prostředí.

Vinylesterové pryskyřice

Jsou určeny do chemicky náročného prostředí a pro velká mechanická namáhání. Mají dobrou odolnost proti kyselinám i za zvýšených teplot, dobrou tepelnou i chemickou izolaci.

Fenolové pryskyřice

Vyznačují se vysokou tvrdostí a modulem pružnosti, ale malou houževnatostí.

Matrice	Hustota	Modul pružnosti v tahu	Pevnost v tahu
	[g.cm ⁻³]	[GPa]	[MPa]
Termosety	1,1 - 1,67	1,3 - 6	20 - 180
Epoxy	1,1 - 1,4	2,1 - 6	35 - 90
Polyestery	1,1 - 1,5	1,3 - 4,5	45 - 85
Fenolické pryskyřice	1,3	4,4	50 - 60
Polyamidy	1,2 - 1,9	3 - 3,1	80 - 190

Tabulka 3.2: Mechanické vlastnosti nejčastěji používaných matic [5]

Mechanické vlastnosti kompozitního materiálu jsou dány mechanickými vlastnostmi vláken, matrice a jejich poměrem, tzv. objemovým podílem vláken či matrice. Lze je tedy dopočítat pomocí řešení rovnic pružnosti pro vzorek materiálu při známých výše zmíněných parametrech a přijetím buď předpokladu stejného napětí v matrici a vlákne, nebo stejné deformace v napětí a vlákne. Tím získáme tzv. směšovací pravidla pro dopočtení elastických konstant kompozitního materiálu. Tento postup není ale zcela přesný.

Druhou možností je experimentální stanovení těchto hodnot. Tento postup je přesnější, a proto budeme v následujících kapitolách pracovat s takto určenými charakteristikami materiálu.

4 Optimalizace a genetické algoritmy

Optimalizace, nebo též matematické programování či matematická optimalizace, je výběr nejlepšího řešení daného problému vzhledem k nějakému definovanému kritériu. Toto kritérium bývá definováno v podobě cílové či účelové funkce. Nejlepší řešení je potom takové, kdy cílová funkce nabývá svého extrému, přičemž záleží, zda je určena k minimalizaci či maximalizaci.

Matematicky lze tento problém definovat následovně: Máme dānu cílovou funkci $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. V pŕípadě úlohy minimalizace hledāme takové $x_0 \in A$, pro které platí $f(x_0) \leq f(x)$ pro všechna $x \in A$. Naopak v pŕípadě úlohy maximalizace hledāme takové $x_0 \in A$, pro které platí $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in A$. Množina A se nazývá pŕípustnou množinou. Bývá zpravidla podmnožinou eukleidovského prostoru \mathbb{R}^n , pŕičemž může být omezena řadou podmínek, často ve formě rovnic, které musí její členové splňovat. Vektor x je nazýván vektorem optimalizačních parametrů a nalezený prvek x_0 je nazýván optimálním řešením.

Podle tvaru cílové funkce a vazbových funkcí rozlišujeme různé třídy optimalizačních úloh. Pokud pro cílovou funkci i vazbové funkce platí

$$f_i(\alpha x + \beta y) = \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \quad (4.1)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak se jedná o tzv. úlohu lineárního programování. Pokud úloha není lineární nazýváme ji úlohou nelineárního programování. Další důležitou třídou jsou tzv. komplexní úlohy, pro které platí

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \quad (4.2)$$

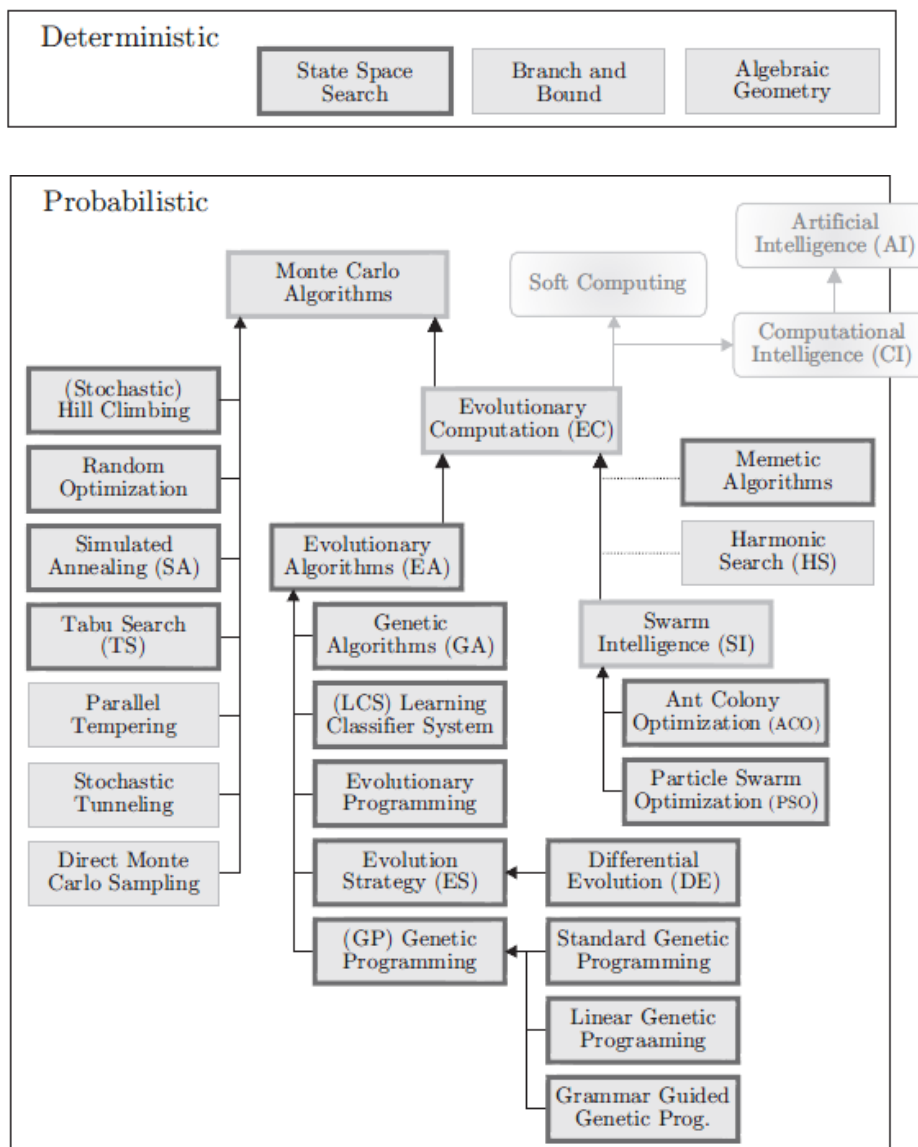
pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s podmínkou $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Pokud úloha není komplexní, pak je nekonvexní. Porovnáním rovnic (4.1) a (4.2) je vidět, že každá komplexní úloha je zároveň i úlohou lineární, úlohy konvexní optimalizace tedy můžeme považovat za zobecnění úloh lineárního programování.

Optimalizační úlohy lze klasifikovat i dalšími způsoby. Z hlediska přítomnosti vedlejších podmínek na úlohy s vedlejšími podmínkami, zde se jedná o tzv. vázané extrémy, a na úlohy bez vedlejších podmínek - volné extrémy. Dle charakteru neznámých veličin na parametrické optimalizační úlohy a funkční optimalizační úlohy, kde řešením je funkce, pro niž má cílový funkcionál extrém.

4.1 Základní optimalizační metody

Metody řešení optimalizačních úloh lze dělit několika způsoby a to na přesné a přibližné, analytické a numerické a dále na metody poskytující řešení jedním výpočtem a metody iterační. Rozlišujeme také tzv. lokální přístupy, které hledají optimum pouze v blízkosti výchozího bodu, a globální přístupy, které se snaží najít optimum v celé přípustné množině.

Zaměříme se zde na metody globální optimalizace, avšak i těch je velké množství a není možné je zde všechny popsat, vybereme tedy pouze ty nejpoužívanější. Obrázek 4.1 přehledně zobrazuje jednu z možných klasifikací globálních optimalizačních metod.



Obrázek 4.1: Klasifikace globálních optimalizačních metod [12]

Obecně lze optimalizační metody rozdělit na dvě základní třídy: deterministické a pravděpodobnostní. Deterministické algoritmy nepoužívají k výpočtu nahodilost, v každém kroku výpočtu je přesně dáno, co bude následovat. Jsou používány v případě, že vztah mezi optimalizačními parametry a cílovou funkcí není příliš komplikovaný a dimenze prohledávaného prostoru není příliš velká. V opačném případě je třeba použít pravděpodobnostní algoritmy. Jejich nejdůležitější skupinou jsou přístupy založené na metodě Monte Carlo, které se vyznačují dobrým poměrem mezi přesností řešení a výpočetním časem. To znamená, že výpočet těmito metodami nezaručuje dosažení globálního optima, ale velmi zkracuje výpočetní čas.

Každá z pravděpodobnostních optimalizačních metod se vyznačuje svojí heuristikou. Ta je v případě globální optimalizace reprezentována postupy či funkcemi implementovanými v algoritmu, jež rozhodují, které ze sady možných řešení budou vyzkoušeny jako další.

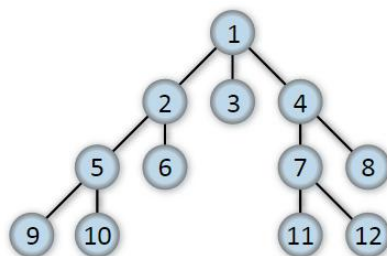
V následujících podkapitolách přiblížíme některé reprezentativní zástupce z nejdůležitějších tříd metod globální optimalizace.

4.1.1 Prohledávání stavového prostoru

Metody prohledávání stavového prostoru můžeme obecně rozdělit na dvě podkategorie. První jsou neinformované metody, které nevyužívají žádné heuristiky a prostě systematicky prohledávají celý prostor, dokud nenaleznou řešení. Druhou kategorií jsou informované metody, které heuristiky využívají. Jelikož zde chceme přiblížit princip třídy deterministických optimalizačních metod, zaměříme se na dvě základní z neinformovaných metod a to prohledávání do šířky a prohledávání do hloubky.

Prohledávání do šířky

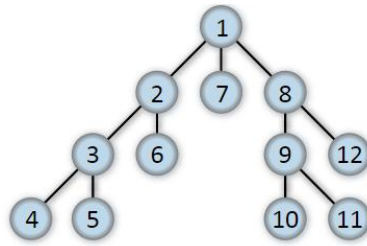
Stavový prostor je prohledáván z výchozího bodu. Metoda nejprve projde všechny sousední body v okolí výchozího bodu a poté všechny body v jejich okolí, které ještě nebyly projity. Tím je vytvořen strom nejkratších cest k jednotlivým uzlům z výchozího bodu (kořene).



Obrázek 4.2: Pořadí procházení uzlů při prohledávání do šířky [XIV]

Prohledávání do hloubky

Prostor je opět prohledáván z výchozího bodu. Nejprve projdeme první sousední bod výchozího bodu a potom první zatím neprojitý sousední bod tohoto bodu. Tímto způsobem pokračujeme dokud se lze někam přemísťovat, tedy dokud má aktuální bod alespoň jednoho nenavštíveného souseda. Další v pořadí je bod, který byl objeven jako poslední a pokračuje se stejně jako v předchozím případě.

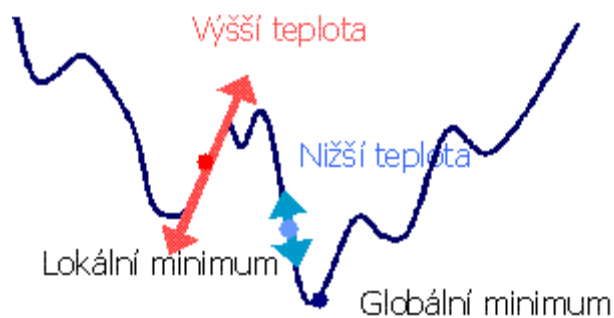


Obrázek 4.3: Pořadí procházení uzlů při prohledávání do hloubky [XIV]

4.1.2 Simulované žíhání

Tato metoda je založená na simulaci žíhání oceli, při níž je ocel ochlazována pozvolna a tím je zabraňováno vzniku krystalů a zvyšuje se pevnost a odolnost materiálu. Atomy se při vyšší teplotě mohou pohybovat materiálem a hledat místo s nižší energií. S klesající teplotou pohyblivost atomů klesá a usazují se v energeticky výhodnějších pozicích (s nižší energií).

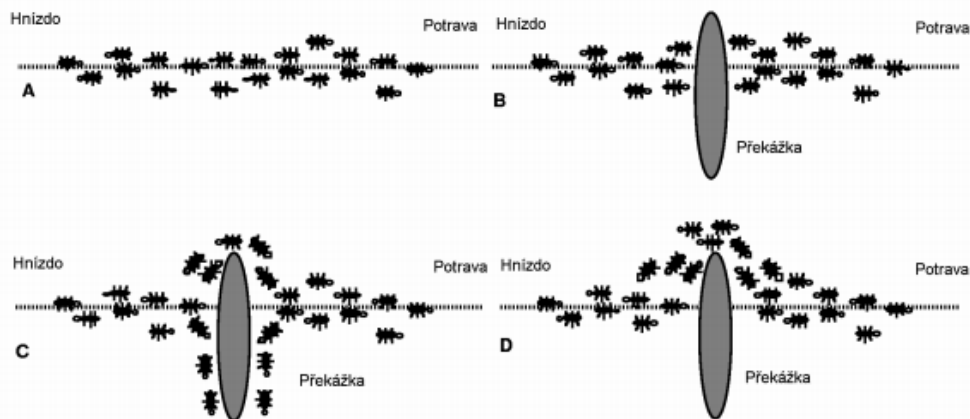
Metoda vychází z předem definovaného výchozího bodu a prohledává stavový prostor. Nový stav je přijat, když je jeho hodnota cílové funkce v něm lepší než hodnota ve stavu aktuálním. Pokud je hodnota v novém stavu horší, může být s určitou pravděpodobností, jež závisí přímo úměrně aktuální teplotě a nepřímo úměrně na velikosti zhoršení, také přijat. Teplota je v průběhu výpočtu postupně snižována na základě rychlosti přibližování cíli. Pokud je rychlost přibližování velká, pak teplota klesá rychle, při menší rychlosti dochází k pomalejšímu ochlazování. Je možné nastavovat mnoho parametrů algoritmu, zejména počáteční teplotu, výchozí bod a koeficient ochlazování. Při příliš vysoké počáteční teplotě prohledává nejprve algoritmus spíše náhodě, až po poklesu teploty funguje správně. Je vhodné pamatovat si všechny stavy, kterými jsme s průběhu výpočtu prošli, dosáhneme tím alespoň řídkého mapování stavového prostoru. Konečný stav navíc nemusí být totožný s nejlepším stavem dosaženým v průběhu výpočtu, když si pamatujeme předchozí stavy, snadno to odhalíme.



Obrázek 4.4: Vliv teploty na přesouvání mezi stavy [XIII]

4.1.3 Optimalizace mravenčí kolonií

Metoda je inspirována chováním mravenců při hledání potravy. Mravenci zanechávají na cestě k potravě feromonovou stopu. Čím je cesta delší, tím dříve stopa na ní vyprchá a převáží stopa na kratší cestě. Mravenec se při opětovné cestě rozhoduje s vyšší pravděpodobností pro alternativu se silnější stopou, a proto je časem mravenci chodí po kratší cestě, jak je zobrazeno na obrázku 4.5. Metoda je využívána zejména pro řešení úloh typu obchodní cestující, tedy úlohu o nalezení nejkratší možné cesty procházející všemi zadanými body na mapě.



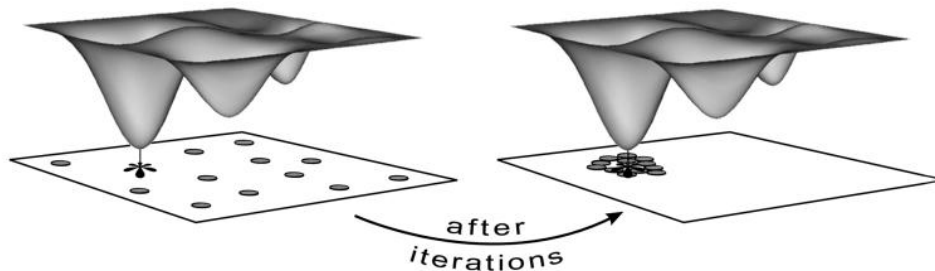
Obrázek 4.5: Proces nalezení nejkratší cesty [13]

4.2 Genetické algoritmy³

K optimalizaci desek budou použity genetické algoritmy, proto je zde rozebereme podrobněji.

³ K řešení optimalizace desek z hlediska směrů vláken jsem nejprve vytvořil vlastní jednoduchý genetický algoritmus, který je součástí příloh na CD. Následně jsem ale využil Genetic Algorithm Toolbox implementovaný v Matlabu. Řešení oběma metodami se shodovala, Matlabový GA byl cca desetkrát rychlejší.

Jsou to algoritmy založené na principech známých z evoluční biologie při evolučních procesech, kterými živé organismy bojují o svoje přežití a přežití svých potomků. I proto se zde často cílová funkce označuje jako funkce zdatnosti (fitness function). Zatímco jiné metody často pracují s jedním odhadem řešení a v průběhu iterací ho přemísťují směrem k optimu, genetické algoritmy současně zvažují několik řešení tzv. populaci a tu směřují k optimu.



Obrázek 4.6: Přemístění populace v průběhu iterací [11]

Principiálně genetické algoritmy pracují v několika krocích.

Krok 0: Inicializace

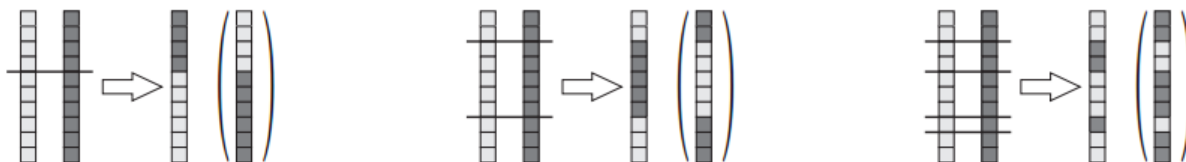
Náhodně je vygenerována původní populace o N jedincích, kteří splňují okrajové podmínky. Spočte se hodnota cílové funkce pro každého jedince.

Krok 1: Výběr rodičů

Rodiče jsou vybíráni na základě svojí zdatnosti. Ti, kteří mají vyšší hodnotu zdatnosti, jsou vybíráni častěji. S určitou pravděpodobností může být ale vybrán i méně zdatný jedinec.

Krok 2: Křížení

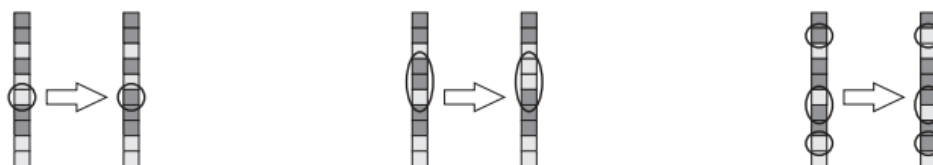
Pro každý pár rodičů vybraný v kroku 1 proběhne s určitou pravděpodobností některý z druhů křížení. Jedná se buď o jednobodové křížení, kdy jsou oba rodiče rozděleni v náhodně určeném bodě křížení a potomci jsou tvořeny spojením první části prvního rodiče a druhé části druhého rodiče a naopak, nebo o křížení vícebodové, které probíhá obdobně pouze ve více bodech. Oba rodiče jsou děleni ve stejných bodech. Pokud křížení neproběhne, pak jsou potomci kopíí rodičů.



Obrázek 4.7: Jednobodové, dvoubodové a vícebodové křížení [12]

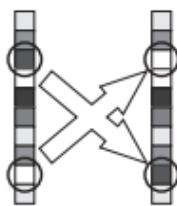
Krok 3: Odstranění a mutace

Je vybrán určitý počet nejlepších jedinců z předchozí generace, který bude ponechán do další generace. Ostatní jedinci předchozí populace jsou odstraněni a nahrazeni částečně potomstvem vzniklým v kroku 2 a částečně zcela náhodnými jedinci. S určitou pravděpodobností jsou členové takto vzniklé populace podrobeni mutaci, tedy malým zcela náhodným změnám jejich části (jedno-genová mutace) či částí (více-genová mutace).



Obrázek 4.8: Jedno-genová mutace a dva typy více-genové mutace [12]

Další z možných operací s jedinci je permutace. Jde o alternativu mutace, kde jsou části jedinců prohazovány, jak je naznačeno na obrázku 4.9. To je smysluplné pouze v případě, že všechny části jedince mají podobné typy dat, jinak by docházelo k nesmyslnému míchání. Je také možné permutaci aplikovat pouze na části jedinců s podobnými vlastnostmi.



Obrázek 4.9: Permutace [12]

Krok 4: Konec cyklu

Je spočtena hodnota cílové funkce jedinců a je-li splněna jistá podmínka, pak je cyklus ukončen a nejlepší jedinec aktuální populace je považován za získané řešení. Není-li podmínka splněna, cyklus pokračuje krokem 1.

Genetické algoritmy dávají často velmi přesné řešení, problém je však, že nemáme jistotu, zda se opravdu jedná o globální extrém, či jak je nalezené řešení globálnímu extrému vzdáleno. Možnou kontrolou je spuštění algoritmu několikrát a porovnání dosažených řešení. Velkou roli v dosažení přesného výsledku hraje též nastavení parametrů algoritmu, například velikosti populace či ukončující podmínky.

5 Formulace řešené úlohy

Na tomto místě přehledně shrneme jaká deska bude optimalizována a z jakého hlediska. Obecně půjde o obdélníkovou desku ze symetrického laminátu, který ale nemusí být vyrovnaný, při optimalizaci skladby tedy budeme řešit složení jedné poloviny desky a druhá polovina bude dána symetrií. Všechny strany řešené desky jsou prostě podepřeny, čehož vyplývají okrajové podmínky pro přípustná deformační pole \mathbb{W} a zároveň podmínky pro volbu báзовých funkcí. Množina \mathbb{W} přípustných deformačních polí w pro prostě podepřenou desku má tvar

$$\mathbb{W} = \left\{ w \mid w|_{x=0,a} = 0, w|_{y=0,b} = 0, w_{,xx}|_{x=0,a} = 0, w_{,yy}|_{y=0,b} = 0 \right\} \quad (5.1)$$

Zatížení řešených desek jsou volena jako spojitá zatížená kolmá na rovinu desky nebo jako izolované síly v různých bodech desky opět působící kolmo na její rovinu. To je znázorněno na obrázku 2.1.

Chování materiálu je uvažováno ideálně elastické. S ohledem na tento předpoklad jsou volena i zatížení desek, aby nedocházelo k přílišným deformacím a elasticita byla zachována. Předpokládáme také zachování přímosti úseček a jejich kolmosti ke střední ploše po deformaci.

Jediným optimalizačním kritériem je tuhost desky. Tloušťka desky je zvolena a při určitém zatížení a je pro určité uspořádání desky vypočtena její tuhost. Tu lze ovšem definovat různými způsoby. Jednou z možností je definovat tuhost jako převrácenou hodnotu maximálního průhybu desky, jinou využít průhyb v místě působící síly. V této práci budeme definovat tuhost pomocí vztahu (2.174) odvozeného v druhé kapitole, který je důsledkem energetického přístupu při výpočtu deformovaného tvaru desky. Z energetického hlediska lze říci, že maximální tuhost desky nastává při minimální práci vnějších sil. Tento vztah je tedy diskretizované vyjádření práce vnějších sil. Pro přehlednost ho na tomto místě zopakujeme.

$$\hat{\Pi}_{pCF}(w) = \sum_{\kappa,\gamma=1}^K \hat{w}^{\kappa\gamma} q_{\kappa\gamma} \quad (5.2)$$

6 Výsledky optimalizace

Optimalizace desek byla původně rozdělena do tří kroků z hlediska optimalizačních parametrů. Nejprve měla proběhnout optimalizace samotných směrů vláken při konstantní tloušťce jednotlivých vrstev, poté optimalizace tloušťky vrstev při ponechání konstantního úhly, který byl vypočten v předchozí optimalizaci a nakonec současná optimalizace tloušťky vrstev i úhlů vláken. Po provedení výpočtů pro tyto tři sady parametrů bylo ale vidět, že samostatná optimalizace tloušťky vrstev se od současné optimalizace tloušťky a směrů vláken liší ve výsledku buď minimálně, nebo se neliší. Z tohoto důvodu, a také kvůli rozsahu práce, by podkapitola o samostatné optimalizaci tloušťky vrstev byla nadbytečná a vynecháme ji.

Budeme se tedy zabývat nejprve optimalizací směrů vláken v jednotlivých vrstvách a poté současnou optimalizací směrů vláken a tloušťky vrstev. Budeme uvažovat desky o různých rozměrech, pro různá zatížení a materiály, při čemž platí, že materiály jednotlivých desek se liší, ne však materiál jednotlivých desek téže desky. V obou podkapitolách ponecháme pro porovnání stejné desky i zatížení, rozdíl bude pouze v optimalizačních parametrech.

Veškeré výpočty optimalizací byly provedeny v programu Matlab R2012b. Nejprve byl vytvořen algoritmus pro výpočet tuhosti při zadaných parametrech. Ten byl poté několikrát upraven pro potřeby optimalizace do tvaru funkce se vstupem optimalizačních parametrů a výstupem cílové funkce reprezentující tuhost. Poté bylo vytvořeno několik algoritmů pro nalezení optima tuhosti. Nejprve pro jednoduché případy řešení prostým výpisem všech hodnot pro diskretizované vstupy. Poté byl vytvořen jednoduchý genetický algoritmus a konečně algoritmus využívající Genetic Algorithm Toolbox implementovaný v Matlabu. Výsledky získané všemi třemi metodami se shodovaly, hlavním rozdílem byl výpočetní čas. Dle očekávání byl nejrychlejší matlabový GA následovaný tím vlastní výroby a nejpomalejší bylo řešení výpisem. Ve většině následujících optimalizací byl proto zvolen výpočet pomocí matlabového GA, pouze v některých jednoduchých případech při potřebě zmapovat celý prostor parametrů jsme přistoupili k řešení výpisem. Použité algoritmy jsou součástí elektronické přílohy na CD.

6.1 Optimalizace směrů vláken při konstantní tloušťce vrstev

Budeme uvažovat čtvercovou desku o rozměrech 1 x 1 m a obdélníkovou desku 1 x 2 m. Pro jednotlivá zatížení budeme uvažovat vždy několik materiálů o různých mechanických

vlastnostech, jejichž přehled je v tabulce 6.1, kde jsou tyto materiály řazeny vzestupně podle poměru podélného a příčného modulu pružnosti (toto pořadí odpovídá i při řazení pouze podle podélného modulu pružnosti). U E skla, Kevlaru a Boru jsou materiálové charakteristiky naměřeny pro objemový podíl vláken 60 %, ostatní jsou označení od výrobce.

Označení kompozitu	E_L/E_T [-]	E_L [GPa]	E_T [GPa]	G_{LT} [GPa]	ν_{LT} [-]
E sklo	5	40	8	4	0,25
Kevlar	12	75	6	2	0,34
Bor	13	200	15	5	0,23
M55	25	300	12	5	0,3
k63712/E	50	380	7,6	3,3	0,2
cn80/E	63	390	6,2	3	0,38
XN-60	74	400	5,4	3,3	0,37
XN-80	80	450	5,6	3,3	0,31
XN-90	102	550	5,4	3,3	0,33

Tabulka 6.1: Materiálové charakteristiky kompozitů [I], [II], [4]

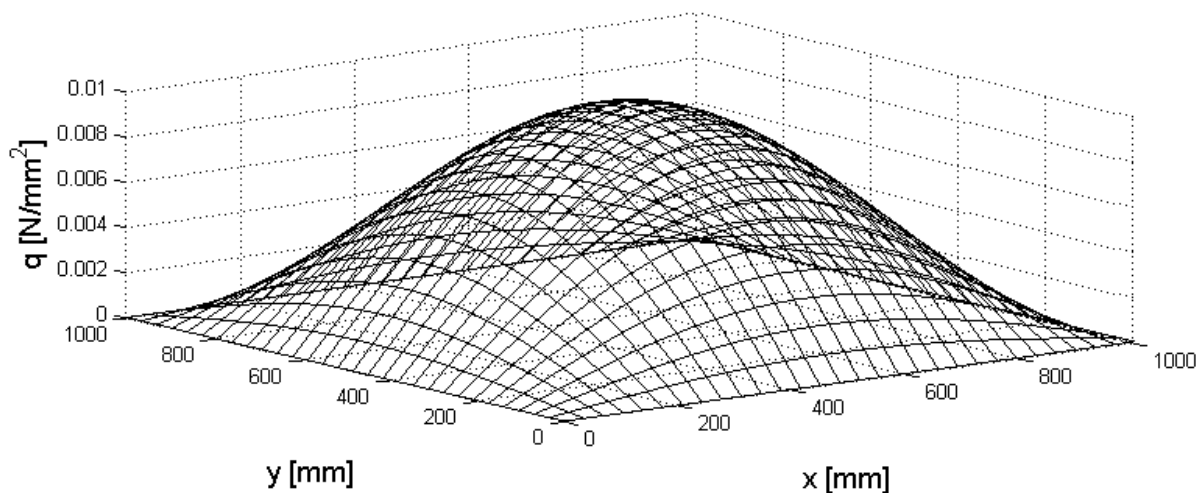
6.1.1 Čtvercová deska

Uvažujme čtvercovou desku 1x 1 m s tloušťkou $h = 20$ mm. Postupně budeme optimalizovat její skladbu z hlediska směrů vláken pro různé počty dvouvrstev symetrického laminátu, kdy rozložení tloušťek vrstev bude rovnoměrné. Tedy například pro desku o počtu dvouvrstev $N = 2$ bude tloušťka jedné vrstvy

$$t = \frac{h}{2N} = \frac{20}{2 \cdot 2} = 5 \text{ mm} \quad (6.1)$$

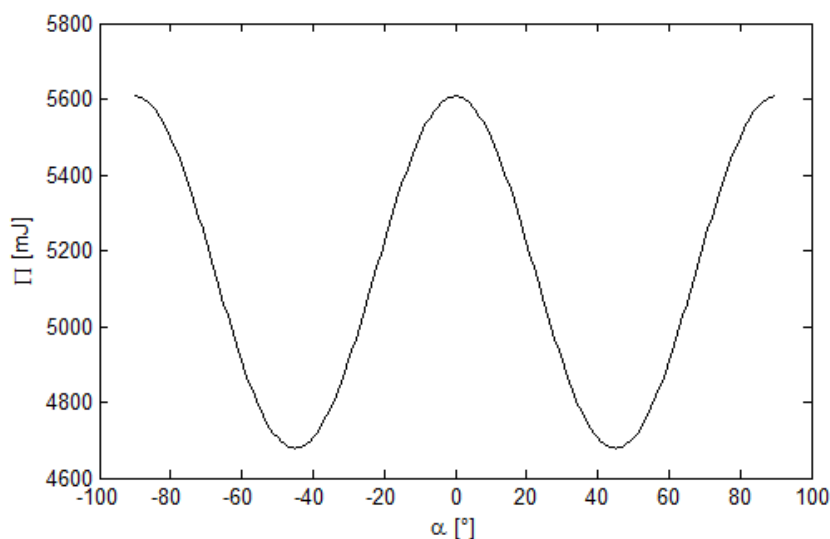
6.1.1.1 Zatížení $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

Velikost q_0 volíme $q_0 = 0,01 \text{ N/mm}^2$. Tvar zatížení je zřejmý z obrázku 6.1.

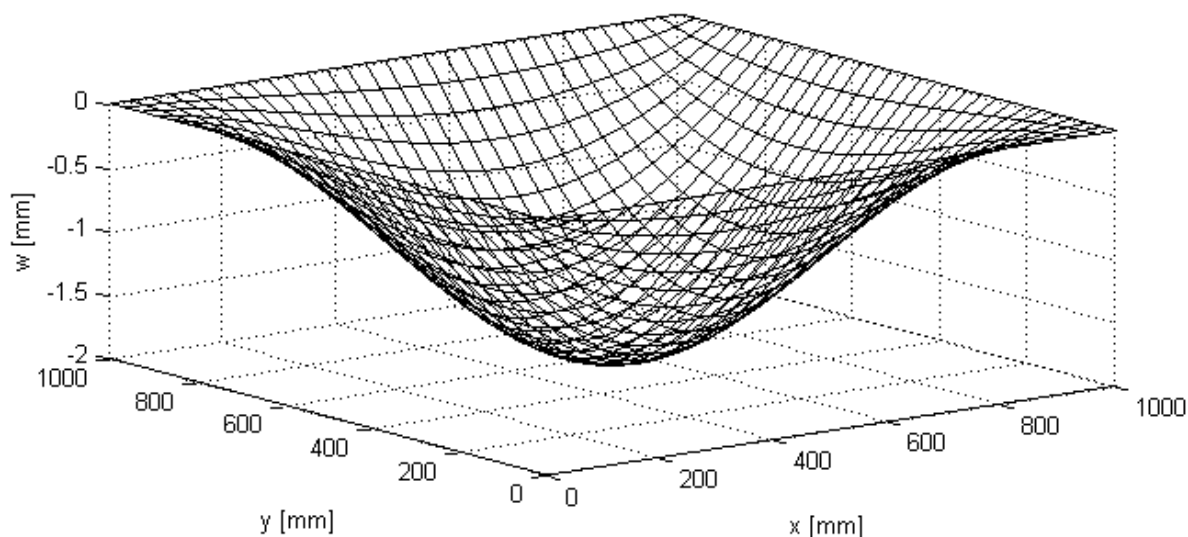


Obrázek 6.1: Spojité zatížení $q(x,y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ na čtvercové desce

Nejprve budeme uvažovat desku s jednou dvouvrstvou $N = 1$. Zde je optimalizace velmi jednoduchá a je možné ji vyřešit výpisem cílové funkce, která je funkcí jedné proměnné. Tím zároveň získáme přehled o tom, jak cílová funkce vypadá v celé uvažované oblasti řešení tedy v intervalu úhlu $\alpha \in \langle -90^\circ; 90^\circ \rangle$, což je vykresleno na obrázku 6.2. Ze symetrie úlohy je jasné, že jsou možná dvě řešení a to $\alpha = \pm 45^\circ$. Výpočet trval přibližně 1 s. Pro desku z E skla je hodnota cílové funkce pro takto zvolený úhel 4 678,4 mJ a maximální průhyb desky 1,90 mm. Průhybová plocha této desky pro $\alpha = -45^\circ$ je vykreslena na obrázku 6.3. Jelikož je tato úloha symetrická, dostaneme stejné hodnoty optimálního úhlu pro všechny materiály. Průhyby desek a hodnoty cílové funkce pro různé materiály jsou v tabulce 6.2.



Obrázek 6.2: Cílová funkce v závislosti na úhlu natočení vláken pro desku z E skla s $N = 1$



Obrázek 6.3: Průhybová plocha desky z E skla s $N = 1$ pro $\alpha = -45^\circ$

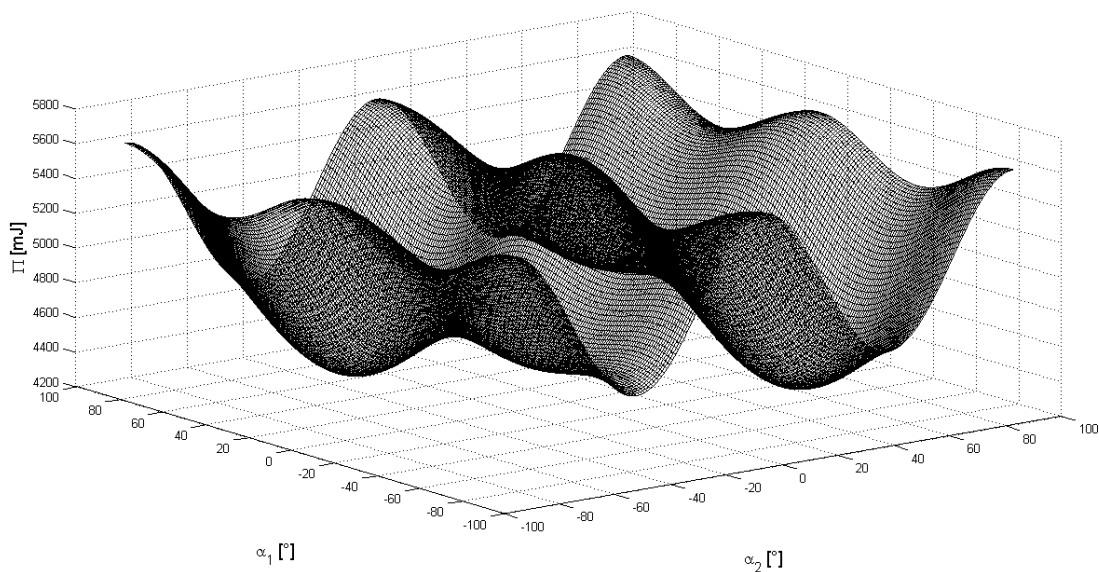
Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
Hodn.CF [mJ]	4 678	3 287	1 261	958	843	843	834	748	625
Průhyb [mm]	1,90	1,38	0,53	0,41	0,37	0,38	0,37	0,34	0,28

Tabulka 6.2: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro $N = 1$

Nyní budeme uvažovat desku se dvěma dvouvrstvami $N = 2$. Zde je pořád ještě přijatelné řešení výpisem hodnot cílové funkce, které nám zároveň zmapuje celý prostor optimalizačních parametrů. Závislost hodnoty cílové funkce na volbě úhlů v jednotlivých vrstvách pro desku z E skla je vykreslena na obrázku 6.4. Výpočet pomocí výpisu trval 59 sekund, při použití genetických algoritmů bylo dosaženo stejného výsledku a výpočet trval 3 sekundy. Optimální úhly ve vrstvách byly stejné pro všechny materiály a to

$$\alpha = \pm \begin{pmatrix} 45^\circ \\ -45^\circ \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

tedy opět dvě rovnocenná řešení pro symetrickou úlohu. Hodnoty cílové funkce a maximálního průhybu pro různé materiály jsou vypsány v tabulce 6.3.



Obrázek 6.4: Závislost cílové funkce na úhlech natočení v jednotlivých vrstvách pro desku z E skla s $N = 2$

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
Hodn.CF [mJ]	4 317	2 751	1 047	744	614	603	591	527	434
Průhyb [mm]	1,74	1,12	0,43	0,30	0,25	0,25	0,24	0,22	0,18

Tabulka 6.3: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro $N = 2$

Pro vyšší počty dvouvrstev úloha symetrie neztrácí, a proto je řešení optimálního uspořádání vždy stejné pro všechny materiály. Pro $N = 3$ je to

$$\alpha = \pm \begin{pmatrix} 45^\circ \\ 45^\circ \\ -45^\circ \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

pro $N = 4$

$$\alpha = \pm \begin{pmatrix} 45^\circ \\ 45^\circ \\ 45^\circ \\ -45^\circ \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

a obdobně pro vyšší počty dvouvrstev. Je zřejmé, že s přibývajícím počtem vrstev se zůstávají vrstvy se stejnou orientací v těsném sousedství, a tudíž vlastně nedochází k zvyšování počtu dvouvrstev s různou orientací, ale zůstáváme na počtu $N = 2$, při čemž optimalizujeme jejich tloušťku. Tím se budeme hlouběji zabývat později. Výpočet byl proveden pomocí genetických algoritmů, pro $N = 3$ trval přibližně 3 sekundy, pro $N = 4$ bylo třeba pro spolehlivé nalezení globálního minima zvýšit populaci oproti předchozím případům a výpočet trval přibližně 25 sekund. Hodnoty cílové funkce a maximálního průhybu pro $N = 3$ jsou v

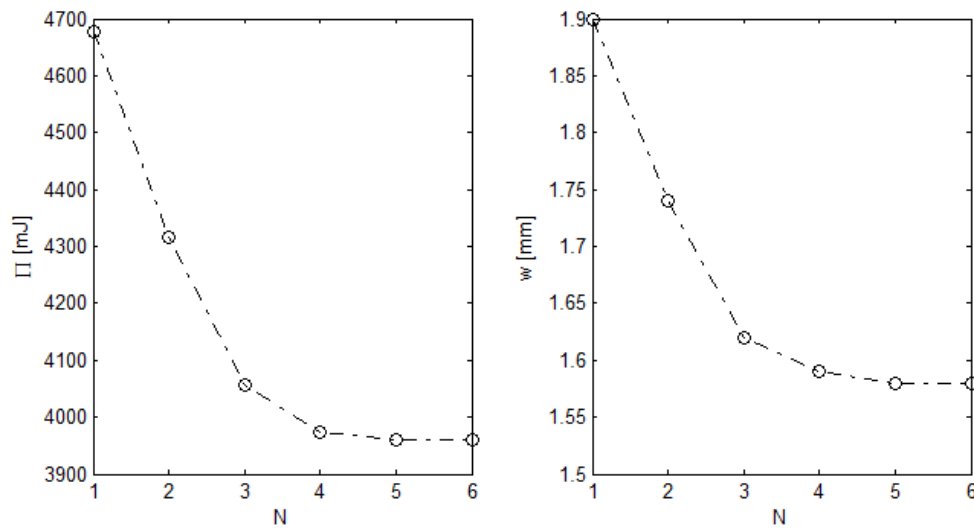
tabulce 6.4, pro $N = 4$ v tabulce 6.5. Závislost hodnoty cílové funkce a průhybu a počtu vrstev je znázorněna na obrázku 6.5.

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
Hodn.CF [mJ]	4 057	2 453	930	645	523	512	500	446	366
Průhyb [mm]	1,62	0,98	0,37	0,26	0,21	0,21	0,20	0,18	0,15

Tabulka 6.4: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro $N = 3$

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
Hodn.CF [mJ]	3 974	2 368	897	619	500	489	478	425	349
Průhyb [mm]	1,59	0,95	0,36	0,25	0,20	0,20	0,19	0,17	0,14

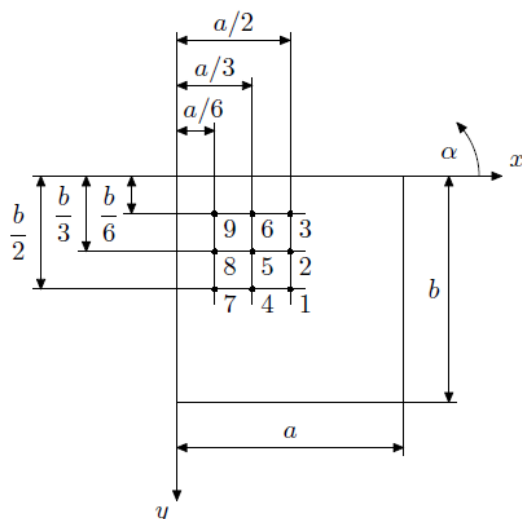
Tabulka 6.5: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro $N = 4$



Obrázek 6.5: Závislost cílové funkce a průhybu na počtu vrstev při stejné tloušťce všech vrstev pro desku z E skla

6.1.1.2 Zatížení izolovanou silou působící kolmo na rovinu desky

Budeme uvažovat desku zatíženou v bodech dle obrázku 6.6.



Obrázek 6.6: Uvažovaná působíště izolované síly [1]

Byla zvolena velikost síly $F = 3\,000\text{ N}$. Pro desku s počtem dvouvrstev $N = 1$ bylo pro svoji jednoduchost a zejména pro zmapování celého prostoru opět zvoleno řešení výpisem. Výsledky optimalizace v jednotlivých bodech pro různé materiály desky jsou shrnuty v tabulkách 6.6 a 6.7.

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	±45°	±48°	±62°	45°	55°	45°
Kevlar		±47°	±61°			
Bor						
M55		±90°	±90°	42°, 48°	54°	
k63712/E						
cn80/E				41°, 49°		
XN-60						
XN-80		40°, 50°	53°			
XN-90		39°, 51°				

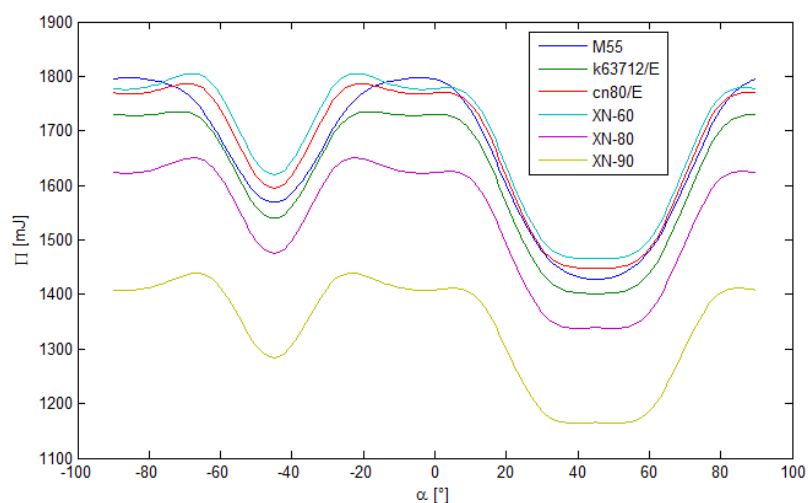
Tabulka 6.6: Optimální uspořádání desek z různých materiálů zatížených v bodech dle obrázku 6.6 pro $N = 1$

Zajímavý jev nastává v bodě číslo 5, kde pro materiály s nižším poměrem modulů pružnosti v podélném a příčném směru je optimální úhel vláken 45°, ale se zvyšujícím se poměrem se graf cílové funkce v okolí 45° nejprve zplošťuje a dále mírně zakřivuje na opačnou stranu. Tento jev je znázorněn na obrázku 6.7. Je zřejmé, že pro velikost „ploché“ oblasti s přibližně

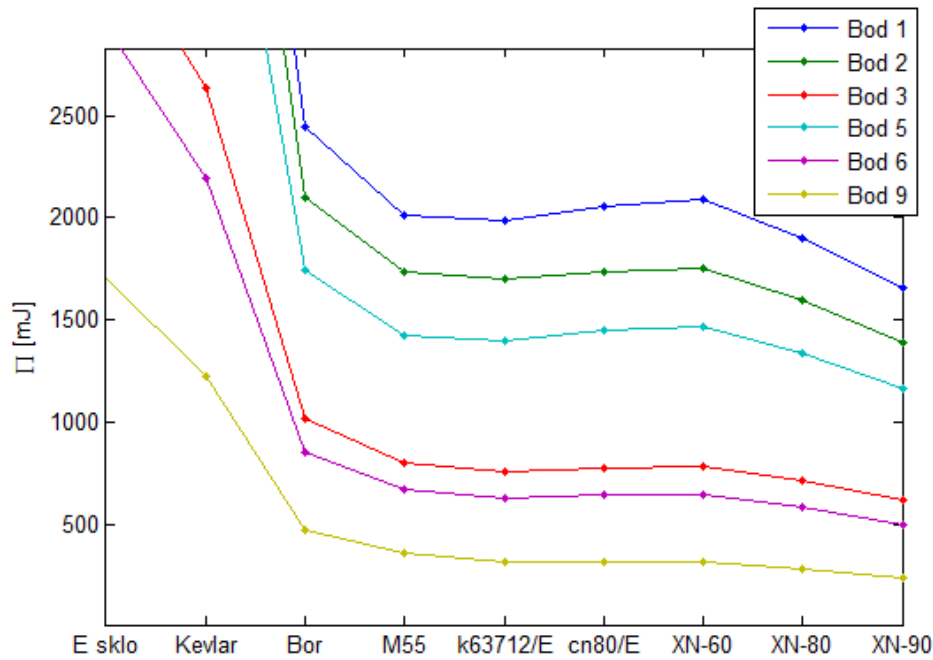
stejnou hodnotou cílové funkce není klíčová absolutní velikost podélného modulu pružnosti, ale zejména hodnota jeho poměru s příčným modulem pružnosti. Podobné chování by se logicky dalo očekávat i v bodě 9, ale tam nenastává. Reprezentativní počet dat z tabulky 6.7 je vyneseno do grafu na obrázku 6.8. Lze vidět obecně převládající trend klesání cílové funkce v závislosti na velikosti poměru podélného a příčného modulu pružnosti, ale neplatí to vždy. Zejména pro zatížení v bodě 1, 2 a 5, tedy body blíže středu desky, dochází pro některé materiály dokonce k mírnému růstu křivky.

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	8 134	6 973	3 450	5 837	2 943	1 706
Kevlar	6 308	5 425	2 637	4 502	2 198	1 226
Bor	2 443	2 103	1 023	1 746	851	479
M55	2 017	1 736	807	1 428	673	361
k63712/E	1 984	1 699	764	1 402	634	323
cn80/E	2 057	1 740	781	1 449	647	323
XN-60	2 089	1 751	784	1 467	648	320
XN-80	1 904	1 600	716	1 338	588	288
XN-90	1 660	1 392	620	1 164	503	242

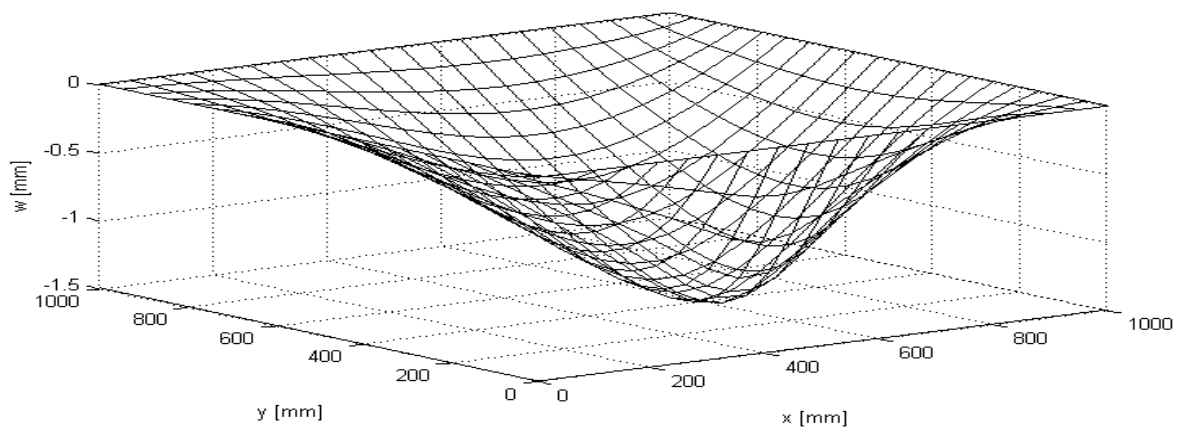
Tabulka 6.7: Hodnoty cílové funkce pro optimální úhel z tabulky 6.6 v [mJ]



Obrázek 6.7: Závislost cílové funkce na úhlu natočení vláken pro osamělou sílu v bodě 5 pro různé materiály



Obrázek 6.8: Hodnota cílové funkce pro různé materiály a body zatížení izolovanou silou



Obrázek 6.9: Průhybová plocha desky z E skla s úhlem natočení vláken $\alpha = -62^\circ$ zatížená izolovanou silou v bodě 3

Nyní zvýšíme počet vrstev na $N = 2$. Pro tento počet už je výhodnější použít k optimalizaci genetické algoritmy, kde se doba výpočtu pohybuje okolo 14 sekund. Výsledky optimalizace jsou shrnuty v tabulkách 6.7 a 6.8. Z těchto dat vyplývá, že je-li deska zatížena silou umístěnou na nediagonální ose symetrie desky (body 1, 2 a 3), je vždy možné najít dvě ekvivalentní řešení poskládání desky lišící se pouze znaménkem. Pro body zatížení neležící na této ose je vždy řešení jednoznačné. Toto je ilustrováno na obrázku 6.9, kde je porovnán tvar cílové funkce desky z E skla pro zatížení v bodě 3 a 6. Zajímavé je porovnání výsledků pro zatížení v bodě 2 a 3. Přestože ty to body leží na stejné ose symetrie desky a liší se pouze

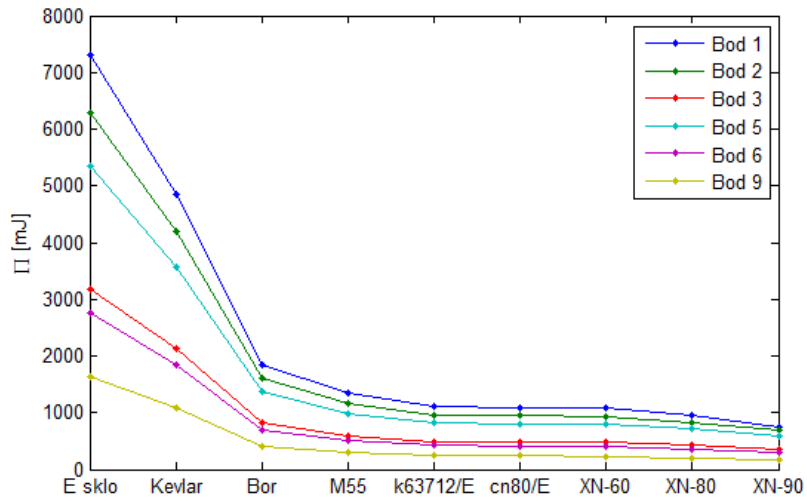
vzdáleností od okraje, bod 2 vykazuje mnohem menší závislost (po zaokrouhlení na celé stupně jde o konstantní funkci) optimálního uspořádání na mechanických vlastnostech desky. Souhrnně lze říct, že optimální uspořádání se pro nejměkčí a nejtužší desky liší minimálně. Vliv mechanických vlastností materiálu na hodnotu cílové funkce je znázorněn na obrázku 6.10. Oproti případu laminátu s pouze jednou dvouvrstvou (obrázek 6.8) jsou nyní křivky pro všechny body zatížení se zvyšujícím se poměrem E_L/E_T vždy klesající. To je dáno výhodnějším využitím materiálu, než v předchozím případě.

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	± [-45 45]°	± [47 -47]°	± [-50 58]°	[-45 45]°	[-48 54]°	[-45 45]°
Kevlar			± [-49 56]°		[-47 53]°	
Bor			± [-48 57]°			
M55						
k63712/E						
cn80/E						
XN-60			± [-47 57]°			
XN-80						
XN-90						

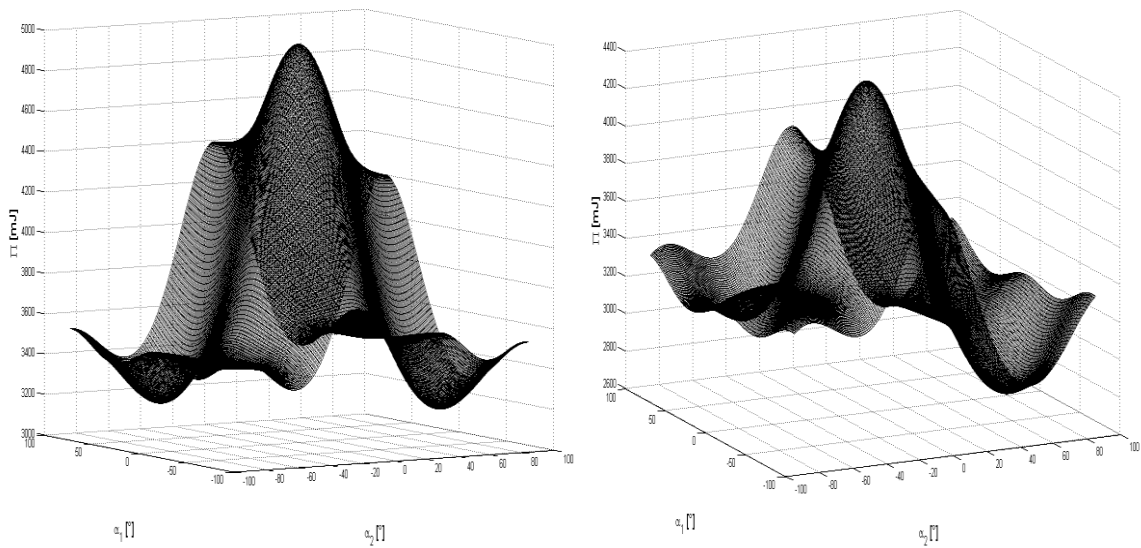
Tabulka 6.8: Optimální uspořádání desek z různých materiálů zatížených v bodech dle obrázku 6.6 pro $N = 2$

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	7 308	6 290	3 182	5 347	2 763	1 638
Kevlar	4 841	4 185	2 133	3 559	1 833	1 075
Bor	1 847	1 598	816	1 360	701	411
M55	1 334	1 154	587	981	503	293
k63712/E	1 115	966	491	821	420	243
cn80/E	1 098	951	483	809	413	239
XN-60	1 076	932	473	793	404	234
XN-80	961	832	422	708	361	209
XN-90	739	687	349	584	298	172

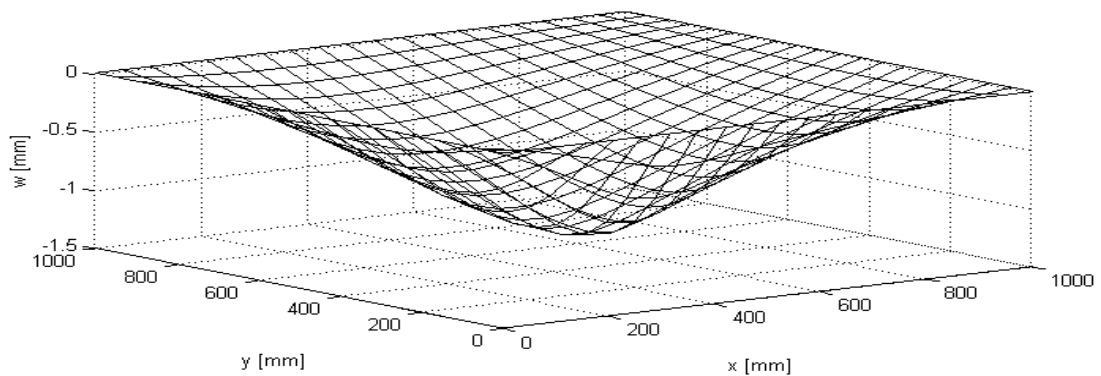
Tabulka 6.9: Hodnoty cílové funkce pro optimální úhly z tabulky 5.8 v [mJ]



Obrázek 6.10: Vykreslení hodnot z tabulky 6.9



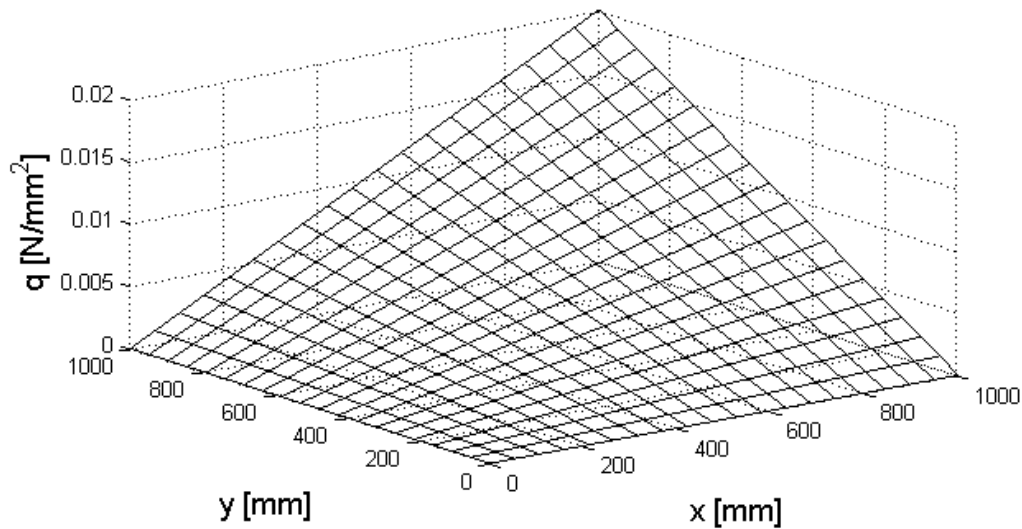
Obrázek 6.11: Porovnání tvarů cílové funkce pro desku z E skla při zatížení izolovanou silou v bodě 3 (vlevo) a 6 (vpravo)



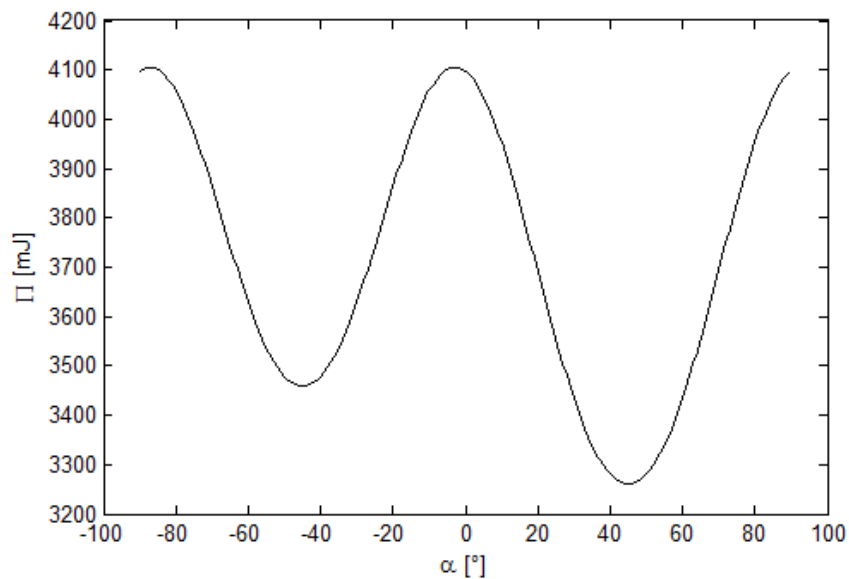
Obrázek 6.12: Průhybová plocha desky z E skla s $\alpha = [-48 \ 54]^\circ$ zatížené silou v bodě 6

6.1.1.3 Zatížení $q(x, y) = q_0xy$

Byla zvolena velikost koeficientu $q_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ N/mm}^4$. Tvar zatížení je zobrazen na obrázku 6.13. Výsledky optimalizací pomocí genetických algoritmů pro $N = 1, 2, 3$ a 4 jsou zaneseny do tabulek 6.10 a 6.11. Závislost hodnoty cílové funkce na úhlu natočení pro desku z E skla pro $N = 1$ je vykreslena na obrázku 6.14. Stejně jako pro zatížení $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ dostaneme pro $N > 2$ řešení se stejnými hodnotami úhlů u sousedních vrstev a počet vrstev tedy prakticky zůstává $N = 2$. Na rozdíl od předchozího spojitého zatížení má ale úloha pouze jednu osu symetrie, a proto dostáváme jednoznačné řešení.



Obrázek 6.13: Zatížení $q(x, y) = q_0xy$ pro $q_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ N/mm}^4$



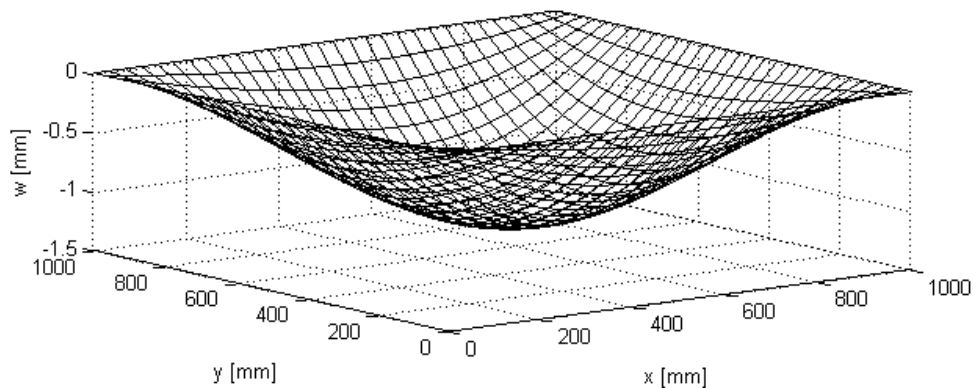
Obrázek 6.14: Závislost velikosti cílové funkce na úhlu natočení pro desku z E skla pro $N = 1$

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
N = 1	45°								
N = 2	[-45 45]°								
N = 3	[-45 -45 45]°								
N = 4	[-45 -45 -45 45]°								

Tabulka 6.10: Optimální úhly ve vrstvách pro N = 1, 2, 3 a 4

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
N = 1	3 260	2 240	858	641	556	554	546	490	408
N = 2	3 060	1 940	738	523	430	422	413	369	303
N = 3	2 920	1 771	672	466	378	370	362	322	264
N = 4	2 885	1 729	655	452	366	258	349	311	255

Tabulka 6.11: Hodnota cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.10 v [mJ]



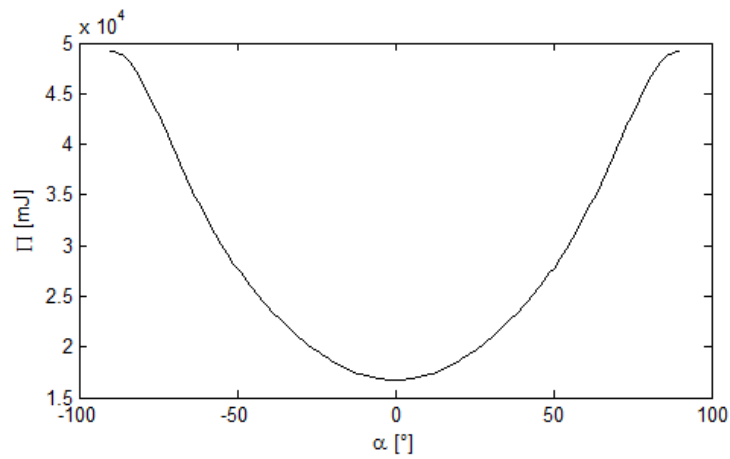
Obrázek 6.15: Průhybová plocha desky z E skla s N = 4 pro $\alpha = [-45 -45 -45 45]^\circ$

6.1.2 Obdélníková deska

Mějme obdélníkovou desku o stranách 1 x 2 metry a tloušťce 20 mm. Budeme uvažovat stejná zatížení jako v případě čtvercové desky.

6.1.2.1 Zatížení $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

Stejně jako pro čtvercovou desku volíme $q_0 = 0,01 \text{ N/mm}^2$. Výsledky optimalizací pomocí genetických algoritmů jsou zaneseny do tabulek 6.12 a 6.13. Je zřejmé, že optimální řešení nastává již pro N = 1 a je pro všechny materiály stejné. Závislost velikosti cílové funkce na úhlu natočení pro N = 1 a tedy i pro všechna vyšší N pro desku z E skla je vykreslena na obrázku 6.16. Průhybová plocha této desky pro optimální úhel natočení je vykreslena na obrázku 6.17



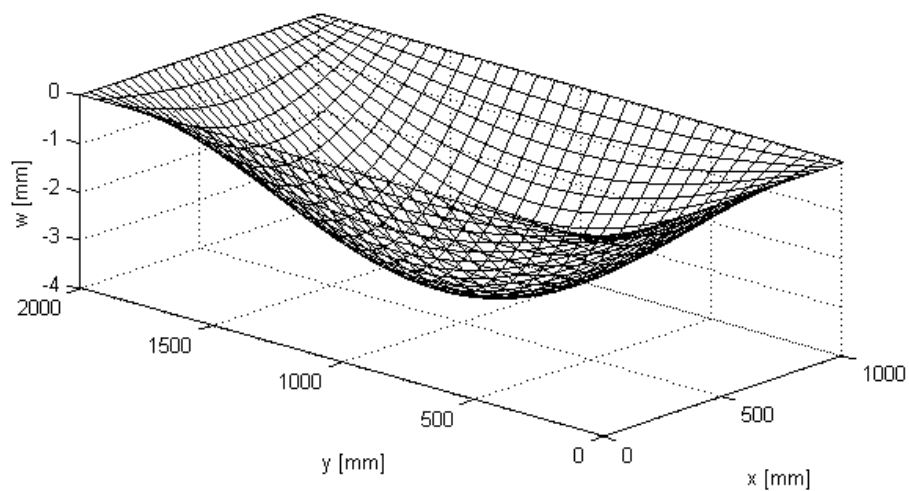
Obrázek 6.16: Závislost velikosti cílové funkce na úhlu natočení pro desku z E skla

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
N = 1	0°								
N = 2	$[0\ 0]^\circ$								
N = 3	$[0\ 0\ 0]^\circ$								
N = 4	$[0\ 0\ 0\ 0]^\circ$								

Tabulka 6.12: Optimální úhly ve vrstvách pro N = 1, 2, 3 a 4

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
N = 1	16 729	9 733	3 693	2 495	2 000	1 949	1 899	1 692	1 387
N = 2									
N = 3									
N = 4									

Tabulka 6.13: Hodnota cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.10 v [mJ]



Obrázek 6.17: Průhybová plocha desky z E skla pro $\alpha = 0^\circ$

6.1.2.2 Zatížení izolovanou silou působící kolmo na rovinu desky

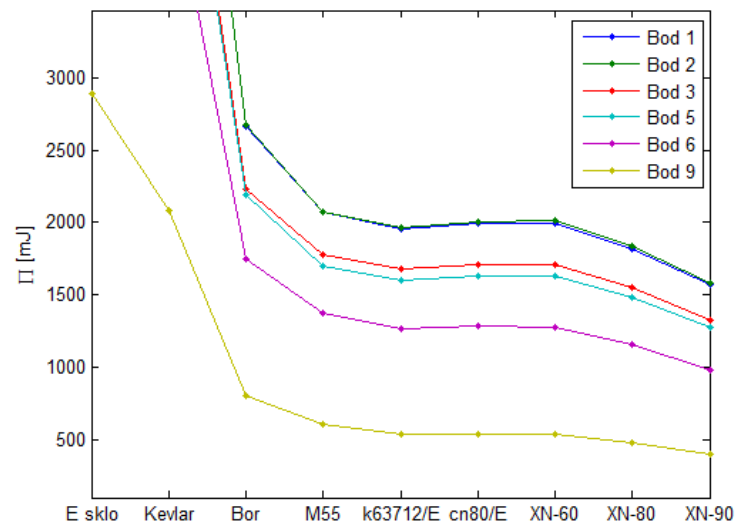
Uvažujeme zatížení v bodech dle obrázku 6.6. Velikost síly ponecháme stejnou jako v případě čtvercové desky, tedy $F = 3000 \text{ N}$. Výsledky optimalizací pro $N = 1$ jsou shrnuty v tabulkách 6.14 a 6.15. Závislost velikosti cílové funkce na zvoleném materiálu pro různé body zatížení je vykreslena na obrázku 6.18. Podobně jako pro čtvercovou desku nedochází při použití materiálu s vyšším podélným modulem pružnosti vždy ke zvýšení tuhosti desky, což je dáno nedokonalým využitím materiálu při použití pouze jedné dvouvrstvy. Tento jev by už při $N > 1$ neměl nastat, stejně jako u čtvercové desky. Závislost hodnoty cílové funkce na úhlu natočení vláken pro desku z E skla zatíženou v bodě 3 je vykreslena na obrázku 6.19. Průhybová plocha obdélníkové desky z E skla s $\alpha = 38^\circ$ zatížená izolovanou silou v bodě 3 je zobrazena na obrázku 6.20.

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	0°		±38°	0°	37°	32°
Kevlar						34°
Bor						
M55						35°
k63712/E						
cn80/E						
XN-60						
XN-80						
XN-90						

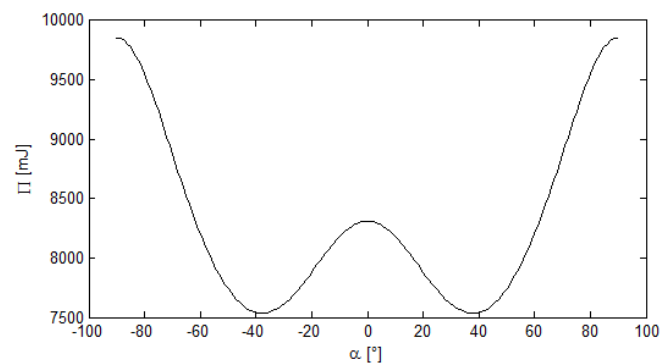
Tabulka 6.14: Optimální úhly ve vrstvách pro desky z různých materiálů zatížené izolovanou silou v různých bodech

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	9 393	9 423	7 534	7 743	6 063	2 894
Kevlar	6 860	6 896	5 756	5 652	4 523	2 080
Bor	2 665	2 678	2 229	2 195	1 749	802
M55	2 069	2 076	1 780	1 697	1 372	609
k63712/E	1 959	1 969	1 678	1 602	1 270	543
cn80/E	1 996	2 008	1 709	1 631	1 284	543
XN-60	1 999	2 013	1 712	1 633	1 281	537
XN-80	1 822	1 835	1 551	1 488	1 158	484
XN-90	1 571	1 584	1 324	1 282	982	405

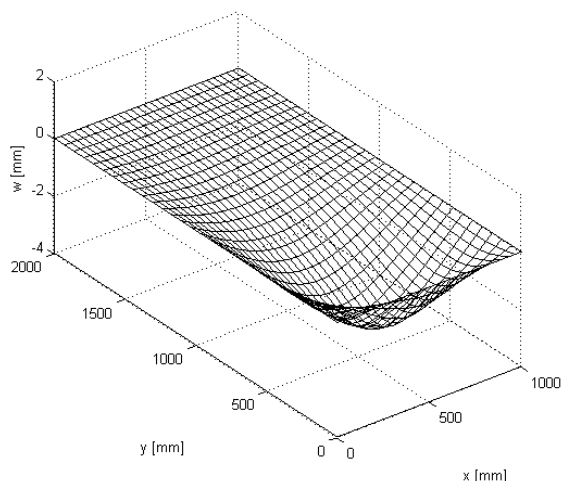
Tabulka 6.15: Hodnoty cílové funkce pro optimální úhly z tabulky 6.14 v [mJ]



Obrázek 6.18: Závislost velikosti cílové funkce na použitém materiálu



Obrázek 6.19: Závislost hodnoty cílové funkce na úhlu natočení vrstvy pro desku z E skla zatíženou v bodě 3



Obrázek 6.20: Průhybová plocha obdélníkové desky z E skla s $\alpha = 38^\circ$ zatížená izolovanou silou v bodě 3

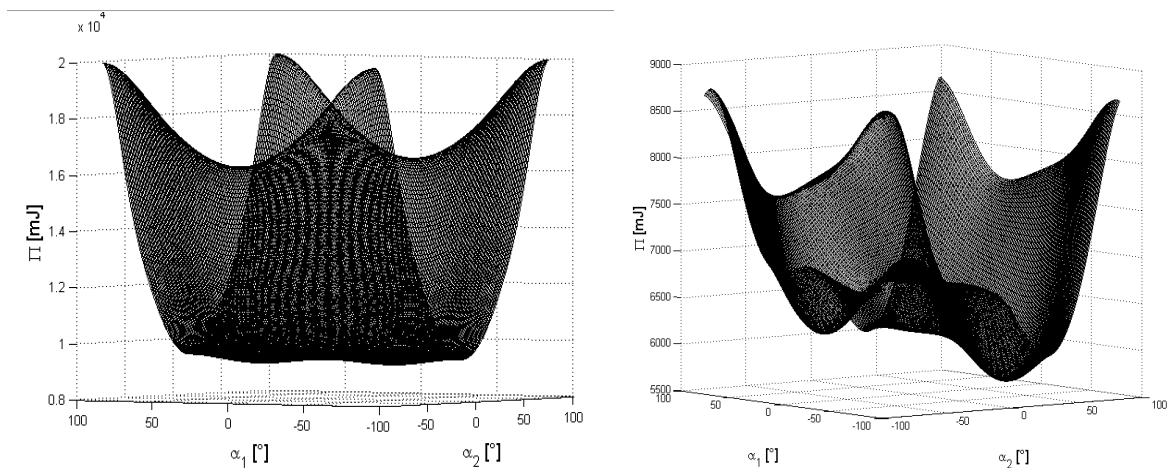
Počet dvouvrstev nyní zvýšíme na $N = 2$ při ponechání stejného zatížení. Výsledky optimalizací jsou zaneseny do tabulek 6.16 a 6.17. Při porovnání s výsledky pro čtvercovou desku jsou znatelné mnohem výraznější rozdíly v optimálních úhlech mezi jednotlivými materiály. Stejně jako pro čtvercovou desku jsou pro body zatížení ležící na nedíagonální ose symetrie možná dvě řešení, což je demonstrováno na obrázku 6.21, kde jsou porovnány cílové funkce pro desku z E skla nad celou oblastí optimalizačních parametrů pro body zatížení 1 a 6. Na obrázku 6.22 jsou zobrazena data z tabulky 6.17, nyní již, oproti desce s $N = 1$, dle očekávání, hodnota cílové funkce se zvyšováním E_L materiálu vždy klesá.

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9	
E sklo	$\pm [39 -6]^\circ$	$\pm [40 -9]^\circ$	$\pm [43 -39]^\circ$	$[-40 10]^\circ$	$[-43 38]^\circ$	$[-41 32]^\circ$	
Kevlar	$\pm [50 -9]^\circ$	$\pm [47 -13]^\circ$	$\pm [44 -39]^\circ$	$[-46 14]^\circ$	$[-44 38]^\circ$	$[-43 34]^\circ$	
Bor	$\pm [51 -9]^\circ$			$[-46 15]^\circ$			
M55	$\pm [54 -10]^\circ$	$\pm [51 -13]^\circ$	$\pm [45 -39]^\circ$	$[-49 15]^\circ$	$[-45 38]^\circ$	$[-44 34]^\circ$	
k63712/E	$\pm [56 -11]^\circ$	$\pm [52 -14]^\circ$		$[-51 16]^\circ$		$[-46 38]^\circ$	$[-45 34]^\circ$
cn80/E	$\pm [57 -11]^\circ$	$\pm [52 -14]^\circ$					
XN-60							
XN-80							
XN-90							

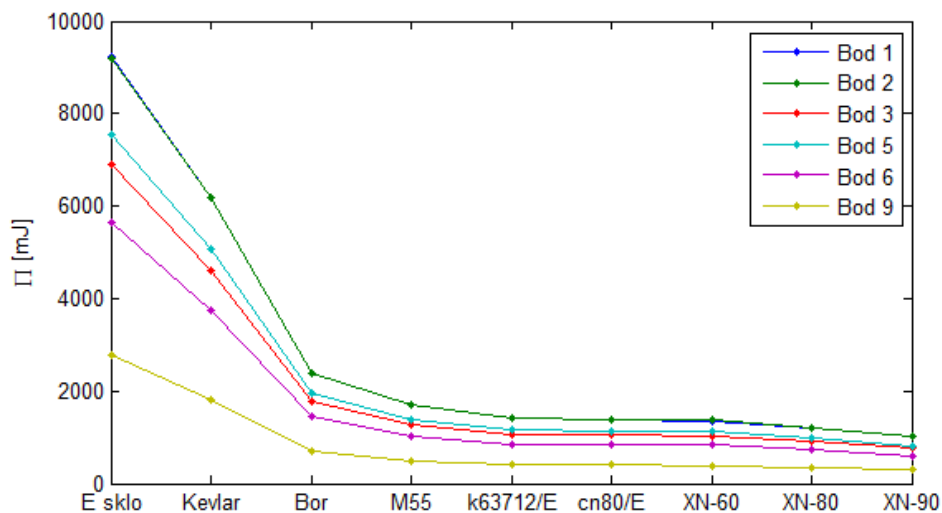
Tabulka 6.16: Optimální úhly ve vrstvách obdélníkové desky pro různé materiály při zatížení izolovanou silou v různých bodech

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	9 237	9 184	6 899	7 544	5 662	2 762
Kevlar	6 179	6 177	4 619	5 063	3 757	1 811
Bor	2 371	2 370	1 766	1 942	1 436	692
M55	1 692	1 692	1 271	1 386	1 029	492
k63712/E	1 416	1 417	1 063	1 160	859	409
cn80/E	1 391	1 393	1 046	1 140	844	402
XN-60	1 361	1 363	1 025	1 115	827	393
XN-80	1 217	1 218	915	997	738	351
XN-90	1 005	1 006	755	823	609	289

Tabulka 6.17: Hodnoty cílové funkce pro optimální úhly z tabulky 6.16 v [mJ]



Obrázek 6.21: Porovnání cílových funkcí pro zatížení desky v bodě 1 a 6



Obrázek 6.22: Cílová funkce pro desky z různých materiálů zatížené v různých bodech

6.1.2.3 Zatížení $q(x, y) = q_0xy$

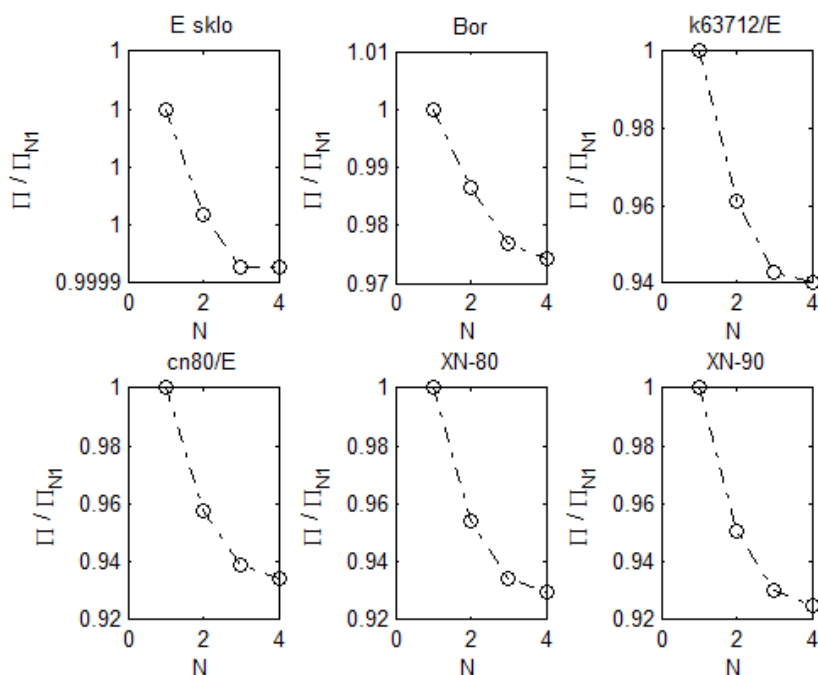
Opět volíme stejné zatížení jako pro čtvercovou desku tedy velikost koeficientu $q_0 = 2 \cdot 10^{-8}$ N/mm⁴. Výsledky optimalizací pomocí genetických algoritmů pro N = 1, 2, 3 a 4 jsou zaneseny do tabulek 6.18 a 6.19. I pro vyšší zvolené počty dvouvrstev ve valné většině případů nastává stav, kdy jsou vrstvy se stejnými úhly natočení umístěny ve vrstvách těsně u sebe a deska skutečný počet dvouvrstev zůstává na čísle dva. Podstatnou optimalizační proměnou se tedy stává tloušťka jednotlivých vrstev, čímž se budeme podrobně zabývat v následující kapitole. Na obrázku 6.23 je zobrazeno srovnání poklesu poměru hodnoty cílové funkce v závislosti na počtu vrstev a cílové funkce pro N = 1 pro různé materiály. Zajímavé je, že tento poměr klesá výrazně strměji pro materiály s vyšším poměrem E_L/E_T .

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
N=1	2	3		4	6	7	8		9
N = 2	$\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -28 \\ 8 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -31 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -33 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -34 \\ 10 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -34 \\ 11 \end{bmatrix}$	
N = 3	$\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -22 \\ -22 \\ 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -22 \\ -22 \\ 14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -25 \\ -25 \\ 15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -26 \\ -26 \\ 15 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -26 \\ -26 \\ 16 \end{bmatrix}$	
N = 4	$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -18 \\ -18 \\ -18 \\ 17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -19 \\ -19 \\ -19 \\ 17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 23 \\ 23 \\ 23 \\ -16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -21 \\ -21 \\ -21 \\ 19 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -22 \\ -22 \\ -22 \\ 19 \end{bmatrix}$	

Tabulka 6.18: Optimální úhly ve vrstvách pro N = 1, 2, 3 a 4 ve [°]

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
N = 1	55 019	34 205	13 067	9 094	7 524	7 381	7 215	6 450	5 320
N = 2	55 017	33 826	12 892	8 880	7 231	7 069	6 897	6 153	5 056
N = 3	55 016	33 544	12 765	8 755	7 094	6 930	6 760	6 026	4 948
N = 4	55 016	33 469	12 731	8 723	7 074	6 895	6 725	5 995	4 921

Tabulka 6.19: Hodnota cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.18 v [mJ]



Obrázek 6.23: Pokles hodnoty cílové funkce normované pomocí hodnoty cílové funkce pro $N = 1$ v závislosti na počtu dvouvrstev pro různé materiály

6.2 Současná optimalizace směrů vláken i tloušťky vrstev

V této části budou desky optimalizovány současně z hlediska úhlu vláken v jednotlivých vrstvách a zároveň z hlediska tloušťky těchto vrstev. Tím by mělo být dosaženo minimálně stejných tuhostí, pravděpodobně však vyšších, jako v kapitole předchozí. Zahnutím tloušťky vrstev do vektoru optimalizačních parametrů odpadají případy pro $N = 1$, kde není jakou tloušťku optimalizovat (vždy by byla maximální možná). Máme $2N-1$ optimalizačních parametrů, N úhlů natočení vláken ve vrstvách a $N-1$ tloušťek těchto vrstev, N -tá tloušťka je dána maximální tloušťkou desky. Vypočtené tloušťky jsou zaokrouhleny na desetiny milimetru.

6.2.1 Čtvercová deska

Uvažujeme desku o stejných rozměrech jako v předchozím.

6.2.1.1 Zatížení $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

Začneme optimalizací pro $N = 2$. Byly využity genetické algoritmy, pomocí kterých jedna optimalizace trvala přibližně 30 sekund. Symetrií úlohy je způsobeno, že optimální uspořádání je pro všechny materiály stejné a jsou možná dvě řešení

$$\begin{bmatrix} \pm \begin{pmatrix} 45^\circ \\ -45^\circ \end{pmatrix} \\ 7,9 \text{ mm} \\ 2,1 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

Váhové funkce ζ_v první a druhé vrstvy jsou si rovny. Výsledky optimalizací jsou shrnuty v tabulce 6.20. Při srovnání s tabulkou 6.5, ve které jsou výsledky pro tentýž případ při optimalizaci pouze směrů vláken pro $N = 4$, je nyní cílová funkce ještě nižší, ale už jen minimálně.

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
Hodn.CF [mJ]	3 960	2 355	892	615	496	485	474	422	346
Průhyb [mm]	1,58	0,94	0,36	0,25	0,20	0,19	0,19	0,17	0,14

Tabulka 6.20: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro $N = 2$

6.2.1.2 Zatížení izolovanou silou působící kolmo na rovinu desky

Výsledky optimalizací pro různé body zatížení dle obrázku 6.6 a pro různé materiály jsou přehledně vypsány v tabulkách 6.21 a 6.22. Platí obdobné závěry jako při samostatné optimalizaci směrů vláken, tedy existence dvou řešení v bodech zatížení 1, 2 a 3 a jednoznačné řešení v bodech 5, 6 a 9. V bodech 1, 2 a 3 navíc optimum tuhosti nastává při stejných váhových funkcích ζ_v pro obě vrstvy. V bodě 1 je řešení vždy stejné pro všechny materiály, což plyne ze symetrie úlohy. V ostatních bodech je závislost mezi optimálním uspořádáním a moduly pružnosti materiálů velmi malá až zanedbatelná. Tedy téměř nezáleží na tom, z jakého vláknového kompozitu bude deska vyrobena, optimální skladba se liší minimálně.

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9	
E sklo	$\begin{bmatrix} \pm \begin{pmatrix} 45 \\ -45 \end{pmatrix} \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \pm \begin{pmatrix} 47 \\ -47 \end{pmatrix} \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \pm \begin{pmatrix} 53 \\ -53 \end{pmatrix} \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 7,7 \\ 2,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 52 \\ -51 \\ 8,4 \\ 1,6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 6,6 \\ 3,4 \end{bmatrix}$	
Kevlar			$\begin{bmatrix} \pm \begin{pmatrix} 52 \\ -52 \end{pmatrix} \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 7,8 \\ 2,2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -50 \\ 51 \\ 7,6 \\ 2,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -50 \\ 51 \\ 7,7 \\ 2,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 7,3 \\ 2,7 \end{bmatrix}$
Bor					$\begin{bmatrix} -49 \\ 51 \\ 7,7 \\ 2,3 \end{bmatrix}$		
M55							
k63712/E							
cn80/E							

XN-60						
XN-80						
XN-90						$\begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 7,4 \\ 2,6 \end{bmatrix}$

Tabulka 6.21: Optimální uspořádání desek zatížených izolovanou silou

$$[\alpha_1 [^\circ] \alpha_2 [^\circ] t_1 [\text{mm}] t_2 [\text{mm}]]^T$$

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	6 552	5 657	2 913	4 935	2 632	1 610
Kevlar	3 950	3 426	1 786	3000	1 619	1 001
Bor	1 498	1 300	679	1 139	615	381
M55	1 036	899	470	788	426	264
k63712/E	838	728	381	638	346	215
cn80/E	820	712	372	624	339	211
XN-60	800	695	364	610	331	205
XN-80	713	619	324	543	295	183
XN-90	585	508	266	446	242	150

Tabulka 6.22: Hodnoty cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.21 v [mJ]

6.2.1.3 Zatížení $q(x, y) = q_0xy$

Ponecháme vše stejné jako při samostatné optimalizaci směrů vláken ve vrstvách. Výsledky optimalizace jsou zobrazeny v tabulkách 6.23 a 6.24. Optimální uspořádání desek se pro různé materiály liší minimálně.

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
Optimální uspořádání	$\begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 7,7 \\ 2,3 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ 7,8 \\ 2,2 \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} 45 \\ -45 \\ 8,1 \\ 1,9 \end{bmatrix}$	

Tabulka 6.23: Optimální uspořádání $[\alpha_1 [^\circ] \alpha_2 [^\circ] t_1 [\text{mm}] t_2 [\text{mm}]]^T$

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
Hodn.CF [mJ]	2 884	1 726	654	451	365	357	348	310	255

Tabulka 6.24: Hodnota cílové funkce pro desky z různých materiálů při optimálním uspořádání dle tabulky 6.23

6.2.2 Obdélníková deska

Uvažujeme stejnou desku jako v případě samostatné optimalizace směrů vláken.

6.2.2.1 Zatížení $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

Zde vyjde stejný výsledek jako pro samostatnou optimalizaci směrů vláken. Optimální je totiž pouze jedna vrstva a její tloušťka je tedy dána tloušťkou desky.

6.2.2.2 Zatížení izolovanou silou působící kolmo na rovinu desky

Výsledky optimalizací jsou vypsány v tabulkách 6.25 a 6.26.

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	$\begin{bmatrix} \pm(-24) \\ 24 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \pm(-29) \\ 29 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \pm(-41) \\ 41 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 27 \\ -29 \\ 8,1 \\ 1,9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 39 \\ -40 \\ 8,3 \\ 1,7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -37 \\ 34 \\ 7,0 \\ 3,0 \end{bmatrix}$
Kevlar	$\begin{bmatrix} \pm(-29) \\ 29 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \pm(-32) \\ 32 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 31 \\ -32 \\ 8,0 \\ 2,0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -41 \\ 39 \\ 7,6 \\ 2,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -38 \\ 35 \\ 7,4 \\ 2,6 \end{bmatrix}$
Bor		$\begin{bmatrix} \pm(-33) \\ 32 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -31 \\ 32 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -41 \\ 40 \\ 7,7 \\ 2,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -39 \\ 35 \\ 7,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$
M55	$\begin{bmatrix} \pm(-30) \\ 30 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \pm(-33) \\ 33 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -33 \\ 31 \\ 7,8 \\ 2,2 \end{bmatrix}$		
k63712/E	$\begin{bmatrix} \pm(-31) \\ 31 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \pm(-34) \\ 33 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -33 \\ 33 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$			
cn80/E			$\begin{bmatrix} -33 \\ 32 \\ 7,9 \\ 2,1 \end{bmatrix}$			
XN-60			$\begin{bmatrix} 32 \\ -33 \\ 8,0 \\ 2,0 \end{bmatrix}$			
XN-80			$\begin{bmatrix} -34 \\ 32 \\ 7,8 \\ 2,2 \end{bmatrix}$			
XN-90						

Tabulka 6.25: Optimální uspořádání desek zatížených izolovanou silou

$$[\alpha_1 [^\circ] \alpha_2 [^\circ] t_1 [\text{mm}] t_2 [\text{mm}]]^T$$

Bod č. Materiál	1	2	3	5	6	9
E sklo	9 014	8 735	6 292	7 221	5 359	2 687
Kevlar	5 611	5 395	3 866	4 465	3 299	1 662
Bor	2 136	2 052	1 469	1 699	1 254	632
M55	1 479	1 419	1 018	1 175	869	438
k63712/E	1 204	1 154	826	955	705	356
cn80/E	1 177	1 128	808	934	690	348
XN-60	1 149	1 101	798	912	674	340
XN-80	1 025	982	703	813	600	303
XN-90	842	806	577	668	493	249

Tabulka 6.26: Hodnoty cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.25 v [mJ]

6.2.2.3 Zatížení $q(x, y) = q_0xy$

Velikost koeficientu q_0 byla ponechána stejná jako v předchozím případě. Výsledky jsou shrnuty v tabulkách 6.27 a 6.28.

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
Optimální uspořádání	$\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 9,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17 \\ -17 \\ 8,2 \\ 1,8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18 \\ -18 \\ 8,2 \\ 1,8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -19 \\ 19 \\ 7,7 \\ 2,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 7,7 \\ 2,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -21 \\ 19 \\ 7,6 \\ 2,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 7,7 \\ 2,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20 \\ 21 \\ 7,8 \\ 2,2 \end{bmatrix}$	

Tabulka 6.27: Optimální uspořádání $[\alpha_1 [^\circ] \alpha_2 [^\circ] t_1 [\text{mm}] t_2 [\text{mm}]]^T$

Označení	E sklo	Kevlar	Bor	M55	k63712/E	cn80/E	XN-60	XN-80	XN-90
Hodn.CF [mJ]	55 017	33 467	12 730	8 721	7 057	6 893	6 724	5 993	4 920

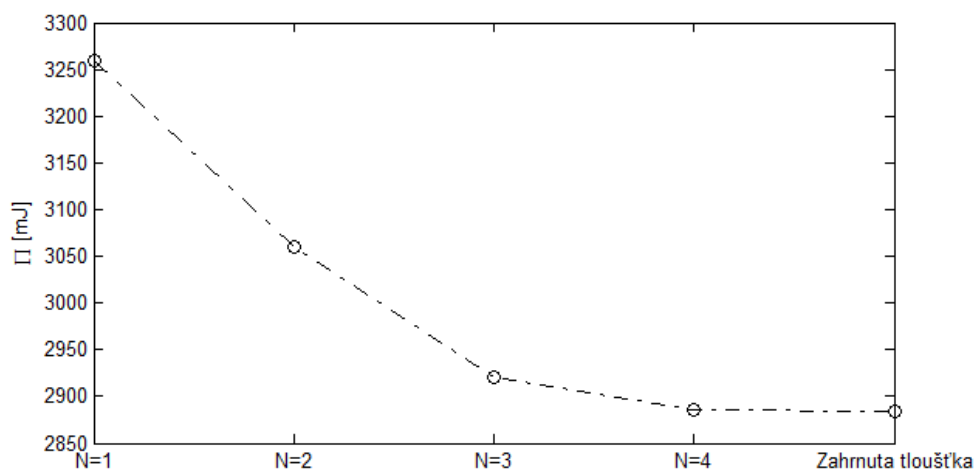
Tabulka 6.28: Hodnota cílové funkce pro desky z různých materiálů při optimálním uspořádání dle tabulky 6.27

Při optimalizaci pro $N > 2$ pro všechny uvažované desky nastává optimum pro stejné úhly vláken v některých sousedních vrstvách nebo je některá z tloušťek nulová a skutečný počet vrstev tedy zůstává roven dvěma. Hodnota cílové funkce i vektor optimalizačních parametrů je proto identický jako pro případ s $N = 2$. Optimální počet dvouvrstev námi uvažovaných případů kompozitových desek při současné optimalizaci směru vláken a tloušťky vrstev je tedy dva.

6.3 Obecné závěry

6.3.1 Porovnání výsledků optimalizace

Na obrázku 6.24 je vykreslena hodnota cílové funkce pro různé sady optimalizačních parametrů pro čtvercovou desku z E skla zatíženou spojitým zatížením $q(x, y) = q_0xy$. První čtyři body jsou pro samostatnou optimalizaci směrů vláken, poslední bod pro současnou optimalizaci při $N = 2$. Je vidět, že při samostatné optimalizaci směrů vláken dochází při zvyšování počtu vrstev k přibližování tuhosti desky optimu spočtenému při zahrnutí tloušťky. Již při čtyřech dvouvrstvách dosahuje tuhost téměř optima. Je tedy možné optimalizovat i pomocí samostatné optimalizace směrů vláken, přičemž optimalizace tlouštěk probíhá při vyšším počtu vrstev vlastně automaticky.



Obrázek 6.24: Porovnání hodnot cílové funkce pro různé sady optimalizačních parametrů

6.3.2 Vliv materiálu na optimální uspořádání

Po provedení reprezentativního počtu výpočtů lze říci, že vliv velikosti podélného modulu pružnosti použitých materiálů respektive poměru podélného a příčného modulu pružnosti, pomocí kterých jsme řadili tabulky v této kapitole na optimální uspořádání je velmi malý. Optimální uspořádání desek se v závislosti na těchto parametrech měnilo velmi mírně a dá se říci, že pro celou škálu průmyslově vyráběných materiálů není nezbytné mezi nimi při výpočtu optimálního uspořádání rozlišovat a výsledné řešení bude blízko optimu pro všechny materiály.

7 Závěr

Úvodní kapitola byla věnována analýze tuhosti laminátové desky. Nejprve jsme definovali zobecněný Hookeův zákon a konstitutivní rovnici pro laminátovou vrstvu. Popsali jsme běžné způsoby skládání vrstev desek, kterými jsou vyrovnaný a symetrický laminát, které jsme následně využili pro zjednodušení problému analýzy. Vyjádřili jsme funkcionál úplné potenciální energie symetrického laminátu a podmínky pro jeho minimalizaci. Funkcionál byl následně parametrizován pomocí rozvoje do Fourierových řad a byla pro něj nalezena minimalizační podmínka. Nakonec jsme definovali tuhost desky, která posloužila v následujících kapitolách jako cílová funkce pro optimalizaci.

V následující kapitole jsme rozebrali nejdůležitější technologie výroby laminátových desek a běžně používané materiály, ze kterých se vyrábějí.

Kapitola čtyři byla věnována seznámení s matematickou optimalizací. Klasifikovali jsme problémy, kterými se tento obor zabývá a metody, které jsou k jejich řešení používány. Na příkladech metod z jednotlivých tříd globální optimalizace byly přiblíženy jejich specifika. Větší pozornost byla věnována genetickým algoritmům, které jsou použity v poslední kapitole k optimalizaci desek.

V páté kapitole jsme přesně formulovali řešenou úlohu, tedy tvar optimalizované desky, její uložení a zatížení a také kritérium pro její optimalizaci.

Poslední kapitola byla věnována vlastní optimalizaci laminátových desek. Byla rozdělena na dvě části podle sad využitých optimalizačních parametrů. V první části jsme optimalizovali pouze směry vláken v jednotlivých vrstvách při konstantní tloušťce vrstev, v druhé části byl vektor optimalizačních parametrů rozšířen o tloušťku vrstev. Optimalizace byly provedeny pro různá zatížení, různé rozměry desek a různé materiály. Nakonec byly porovnány výsledky optimalizací pro obě výše zmíněné sady parametrů a byl diskutován vliv použitého materiálu na optimální uspořádání, jenž se ukázal jako velmi malý.

Tím byly splněny cíle této práce.

Literatura

- [1] MAREŠ, Tomáš. *Základy konstrukční optimalizace*. Praha: ČVUT v Praze, 2006. ISBN 80-239-6508-5.
- [2] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2004. ISBN 80-7043-273-X.
- [3] GURDAL, Zafer. HAFTKA, Raphael T. HAJELA Prabhat. *Design and optimization of laminated composite materials*. Toronto: John Wiley & Sons, inc., 1999. ISBN 0-471-25276-X.
- [4] KULÍŠEK, Viktor. *MKP a ortotropní materiály*. Přednáška ČVUT 2014
- [5] BOUCHAL, Petr. *Technologie výroby a zpracování uhlíkových kompozitů*. Brno: VUT v Brně, 2014. Bakalářská práce, VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav strojírenské technologie
- [6] CHUNG, Deborah D. *Composite materials: Functional materials for modern technologies*. London: Springer, ISBN 18-523-3665-X.
- [7] MITCHEL, Melanie. *An Introduction to Genetic Algorithms*. 1996 Massachusetts Institute of Technology, ISBN 0-262-13316-4
- [8] MIRAVETE, Antonio. *Optimization of Laminated Composite Plates*. 1989 Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 54433-6533
- [9] MIRAVETE, Antonio. *Optimization and Design of Composite Structures*. 1996 University of Zaragoza, ISBN 978-1-85573-208-7
- [10] BOYD, Stephen. VANDENBERGHE, Lieven. *Convex Optimization*. 2009 Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-83378-3
- [11] GENTLE, James E. HARDLE, Wolfgang Karl. MORI, Yuichi. *Handbook of Computational Statistics*. Springer Heidelberg, 2004
- [12] WEISE, Thomas. *Global optimization algorithms - theory and application*. Self-Published, 2009

- [13] JANOŠTÍK, Dušan. *Aplikace moderních metod operační analýzy v prostředí GIS*. Ph.D. Thesis, Vysoké učení technické v Brně, 2004, ISBN 1214-4198
- [14] VRBKA, Jan. *Mechanika kompozitů*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Brno 2004

Internetové zdroje

- [I] http://www.performance-composites.com/carbonfibre/mechanicalproperties_2.asp
- [II] http://www.ngfworld.com/dcms_media/other/GRANOCXNCNfiber2016.pdf
- [III] <http://www.havel-composites.com/clanky/4-Technologie/76-Technologie-jejich-popis-a-schemata.html>
- [IV] <http://www.polymertec.com/lamiplant.html>
- [V] <http://mujweb.cz/zkoriek/laminaty.pdf>
- [VI] http://www.ateam.zcu.cz/download/kompozity09_10.pdf
- [VII] http://www.kompozity.info/seminar/2_seminar/1_materialy_technologie.pdf
- [VIII] <http://www.specmaterials.com/pdfs/boroncompressionstrengthanalysis.pdf>
- [IX] <http://mujweb.cz/zkoriek/vlakna.pdf>
- [X] <http://mujweb.cz/zkoriek/technologie.pdf>
- [XI] http://web.mit.edu/course/3/3.064/www/slides/composites_overview.pdf
- [XII] <http://www.eithel.net/eithel/download/algoritmy/annealing/>
- [XIII] <http://www.fit.vutbr.cz/~jarosjir/groups/eva/sa.html.cz>
- [XIV] <https://www.wikipedia.org/>

Seznam obrázků

Obrázek 2.1: Uvažovaná obdélná deska zatížená spojitým zatížením $q(x,y)$ [2]	9
Obrázek 2.2: Zavedení z-ových souřadnic jednotlivých vrstev symetrické desky [1].....	9
Obrázek 2.3: Natočení lokálního souřadnicového systému $xv - yv$ v -té vrstvy vůči globálnímu souřadnicovému systému desky [1]	12
Obrázek 2.4: Řez deformovanou deskou za předpokladu malých deformací [1]	13
Obrázek 2.5: Jednotkové síly a momenty ležící v rovině desky [2]	14
Obrázek 3.1: Vytvrzování v autoklávu [5]	37
Obrázek 3.2: Metoda vysokotlakého vstřikování matrice [6]	37
Obrázek 3.3: Schéma tažení [III].....	38
Obrázek 3.4: Kontinuální laminování [III]	39
Obrázek 3.5: Rozdělení kompozitů [2]	39
Obrázek 4.1: Klasifikace globálních optimalizačních metod [12]	44
Obrázek 4.2: Pořadí procházení uzlů při prohledávání do šířky [XIV]	45
Obrázek 4.3: Pořadí procházení uzlů při prohledávání do hloubky [XIV].....	46
Obrázek 4.4: Vliv teploty na přesouvání mezi stavy [XIII]	47
Obrázek 4.5: Proces nalezení nejkratší cesty [13]	47
Obrázek 4.6: Přemístění populace v průběhu iterací [11]	48
Obrázek 4.7: Jednobodové, dvoubodové a vícebodové křížení [12]	49
Obrázek 4.8: Jedno-genová mutace a dva typy více-genové mutace [12].....	49
Obrázek 4.9: Permutace [12]	49
Obrázek 6.1: Spojité zatížení $qx, y = q_0 \sin \pi x a \sin \pi y b$ na čtvercové desce	54
Obrázek 6.2: Cílová funkce v závislosti na úhlu natočení vláken pro desku z E skla s $N = 1$	54
Obrázek 6.3: Průhybová plocha desky z E skla s $N = 1$ pro $\alpha = -45^\circ$	55
Obrázek 6.4: Závislost cílové funkce na úhlech natočení v jednotlivých vrstvách pro desku z E skla s $N = 2$	56
Obrázek 6.5: Závislost cílové funkce a průhybu na počtu vrstev při stejné tloušťce všech vrstev pro desku z E skla.....	57
Obrázek 6.6: Uvažovaná působišť izolované síly [1]	58
Obrázek 6.7: Závislost cílové funkce na úhlu natočení vláken pro osamělou sílu v bodě 5 pro různé materiály	59
Obrázek 6.8: Hodnota cílové funkce pro různé materiály a body zatížení izolovanou silou	60
Obrázek 6.9: Průhybová plocha desky z E skla s úhlem natočení vláken $\alpha = -62^\circ$ zatížené izolovanou silou v bodě 3.....	60
Obrázek 6.10: Vykreslení hodnot z tabulky 6.9.....	62
Obrázek 6.11: Porovnání tvarů cílové funkce pro desku z E skla při zatížení izolovanou silou v bodě 3 (vlevo) a 6 (vpravo)	62
Obrázek 6.12: Průhybová plocha desky z E skla s $\alpha = -48.54^\circ$ zatížené silou v bodě 6	62
Obrázek 6.13: Zatížení $qx, y = q_0 xy$ pro $q_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ N/mm}^4$	63

Obrázek 6.14: Závislost velikosti cílové funkce na úhlu natočení pro desku z E skla pro $N = 1$	63
Obrázek 6.15: Průhybová plocha desky z E skla s $N = 4$ pro $\alpha = [-45 -45 -45 45]^\circ$	64
Obrázek 6.16: Závislost velikosti cílové funkce na úhlu natočení pro desku z E skla	65
Obrázek 6.17: Průhybová plocha desky z E skla pro $\alpha = 0^\circ$	65
Obrázek 6.18: Závislost velikosti cílové funkce na použitém materiálu	67
Obrázek 6.19: Závislost hodnoty cílové funkce na úhlu natočení vrstvy pro desku z E skla zatíženou v bodě 3 ..	67
Obrázek 6.20: Průhybová plocha obdélníkové desky z E skla s $\alpha = 38^\circ$ zatížená izolovanou silou v bodě 3.....	68
Obrázek 6.21: Porovnání cílových funkcí pro zatížení desky v bodě 1 a 6	69
Obrázek 6.22: Cílová funkce pro desky z různých materiálů zatížené v různých bodech	69
Obrázek 6.23: Pokles hodnoty cílové funkce normované pomocí hodnoty cílové funkce pro $N = 1$ v závislosti na počtu dvouvrstev pro různé materiály	71
Obrázek 6.24: Porovnání hodnot cílové funkce pro různé sady optimalizačních parametrů	76

Seznam tabulek

Tabulka 3.1: Mechanické vlastnosti vláken a jejich cena [XI].....	41
Tabulka 3.2: Mechanické vlastnosti nejčastěji používaných matric [5]	42
Tabulka 6.1: Materiálové charakteristiky kompozitů [I], [II], [4].....	53
Tabulka 6.2: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro N = 1.....	55
Tabulka 6.3: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro N = 2.....	56
Tabulka 6.4: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro N = 3.....	57
Tabulka 6.5: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro N = 4.....	57
Tabulka 6.6: Optimální uspořádání desek z různých materiálů zatížených v bodech dle obrázku 6.6 pro N = 1 .	58
Tabulka 6.7: Hodnoty cílové funkce pro optimální úhel z tabulky 6.6 v [mJ].....	59
Tabulka 6.8: Optimální uspořádání desek z různých materiálů zatížených v bodech dle obrázku 6.6 pro N = 2 .	61
Tabulka 6.9: Hodnoty cílové funkce pro optimální úhly z tabulky 5.8 v [mJ].....	61
Tabulka 6.10: Optimální úhly ve vrstvách pro N = 1, 2, 3 a 4	64
Tabulka 6.11: Hodnota cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.10 v [mJ]	64
Tabulka 6.12: Optimální úhly ve vrstvách pro N = 1, 2, 3 a 4	65
Tabulka 6.13: Hodnota cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.10 v [mJ]	65
Tabulka 6.14: Optimální úhly ve vrstvách pro desky z různých materiálů zatížené izolovanou silou v různých bodech.....	66
Tabulka 6.15: Hodnoty cílové funkce pro optimální úhly z tabulky 6.14 v [mJ].....	67
Tabulka 6.16: Optimální úhly ve vrstvách obdélníkové desky pro různé materiály při zatížení izolovanou silou v různých bodech	68
Tabulka 6.17: Hodnoty cílové funkce pro optimální úhly z tabulky 6.16 v [mJ].....	69
Tabulka 6.18: Optimální úhly ve vrstvách pro N = 1, 2, 3 a 4 ve [°].....	70
Tabulka 6.19: Hodnota cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.18 v [mJ]	70
Tabulka 6.20: Maximální průhyb desek a hodnota cílové funkce pro různé materiály pro N = 2.....	72
Tabulka 6.21: Optimální uspořádání desek zatížených izolovanou silou $[\alpha_1 [^\circ] \alpha_2 [^\circ] t_1 [mm] t_2 [mm]]^T$	73
Tabulka 6.22: Hodnoty cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.21 v [mJ].....	73
Tabulka 6.23: Optimální uspořádání $[\alpha_1 [^\circ] \alpha_2 [^\circ] t_1 [mm] t_2 [mm]]^T$	73
Tabulka 6.24: Hodnota cílové funkce pro desky z různých materiálů při optimálním uspořádání dle tabulky 6.23	73
Tabulka 6.25: Optimální uspořádání desek zatížených izolovanou silou $[\alpha_1 [^\circ] \alpha_2 [^\circ] t_1 [mm] t_2 [mm]]^T$	74
Tabulka 6.26: Hodnoty cílové funkce pro optimální uspořádání z tabulky 6.25 v [mJ].....	75
Tabulka 6.27: Optimální uspořádání $[\alpha_1 [^\circ] \alpha_2 [^\circ] t_1 [mm] t_2 [mm]]^T$	75
Tabulka 6.28: Hodnota cílové funkce pro desky z různých materiálů při optimálním uspořádání dle tabulky 6.27	75