



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní
Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky

Výpočetní model pro návrh lopatek Francisovy turbíny
Computational Model for Design Francis Turbine Blades
Diplomová práce

Bc. Jakub Suchý

Vedoucí diplomové práce: Ing. Vít Štorch
Studijní program: Strojní inženýrství
Studijní obor: Aplikovaná mechanika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem: "Výpočetní model pro návrh lopatek Francisovy turbíny" vypracoval samostatně pod vedením Ing. Víta Štorcha, s použitím literatury, uvedené na konci mé diplomové práce v seznamu použité literatury.

V Praze dne 26. srpna 2016

.....

Anotace

- Jméno autora: Bc. Jakub Suchý
- Název diplomové práce: Výpočetní model pro návrh Lopatek Francisovy turbíny
- Anglický název: Computational Model for Design Francis Turbine Blades
- Rok: 2016
- Studijní program: Strojní inženýrství
- Obor studia: Aplikovaná mechanika
- Ústav: Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky
- Vedoucí práce: Ing. Vít Štorch
- Bibliografické údaje: počet stran: 52
počet obrázků: 24
počet tabulek: 3
počet příloh: 2
- Klíčová slova: francisova turbína, potenciální proudění, panelové metody, potenciální vír, konformní zobrazení
- Keywords: Francis turbine, potential flow, panel methods, potential vortex, conformal mapping
- Anotace: Diplomová práce se v první části zabývá analytickými metodami návrhu Francisovy vodní turbíny. Posléze jsou uvedeny obecné poznatky týkající se potenciálního proudění a panelových metod. Třetí čtvrtina práce se zabývá odvozením vztahů Martensenovy panelové metody pro rotující mříž. V závěru práce jsou diskutovány modelové výsledky výpočtu.
- Abstract: The first part of this master's thesis deals with the analytical approaches of Francis turbines design. The next chapters contain the summary of the potential flow and panel methods. The third quarter of the thesis deals with the derivation of the Martensen panel method for rotating rows. At the end there the results of the example computation are discussed.

Poděkování

Chtěl by poděkovat vedoucímu mé diplomové práce Ing. Vítu Štorchovi za cenné náměty, rady a připomínky k vypracování této práce.

Obsah

Použité značky a symboly	viii
1 Úvod	1
1.1 Rozváděcí kolo	2
1.2 Oběžné kolo	3
1.3 Proudová plocha	3
1.4 Lopatka turbíny. Lopatková mříž	4
2 Kinematické poměry	6
2.1 Eulerova turbínová rovnice	7
2.2 Stupeň reakce	8
3 Analytické metody návrhu	9
3.1 Určení základních parametrů turbíny	9
3.2 Jednorozměrná teorie návrhu oběžného kola	10
3.3 Empirická metoda analýzy oběžného kola	12
4 Transformace lopatkové mříže	14
4.1 Transformace proudové plochy do kartézského systému rovinné mříže	14
4.1.1 Speciální případy transformace	15
4.1.2 Obecná transformace	16
4.2 Zpětná transformace	17
4.3 Komplexní souřadnice	17
4.4 Transformace rychlostí	17
4.5 Praktické využití transformace	18
5 Potenciální proudění	20
5.1 Vířivost. Cirkulace	21
5.2 Zdroj a propad	21
5.3 Superpozice	22
6 Panelové metody	23
6.1 Biot-Savartův zákon	24
6.2 Typy panelů	24
6.2.1 Dle typu elementu	24
6.2.2 Dle rozložení veličiny	25
6.3 Formulace panelových metod	25
6.3.1 Rychlostní formulace	26
6.3.2 Formulace potenciálovou a proudovou funkcí	27
6.4 Koeficienty vlivu	27
6.5 Okrajové podmínky	28
6.5.1 Neumannova okrajová podmínka	29
6.5.2 Dirichletova okrajová podmínka	29

6.6	Podmínka odtokové hrany	29
6.7	Diskretizace profilu	30
6.8	Užití panelové metody na lopatkovou mříž	31
7	Martensenova panelová metoda	33
7.1	Okrajová podmínka	33
7.2	Koeficienty vlivu	34
7.3	Rotující lopatková mříž	35
7.3.1	Relativní vířivost	36
7.3.2	Korekce vnitřní vířivosti	37
7.4	Změna meridiální rychlosti	39
7.4.1	Mohutnost zdrojů	40
7.5	Upravená Martensenova panelová metoda	41
8	Výpočet lopatek oběžného kola	42
8.1	Definice a cíl výpočetní úlohy	42
8.1.1	Definice úlohy	42
8.1.2	Cíl úlohy	42
8.2	Kuttova podmínka	43
8.3	Výpočet úhlů β_1 a β_2	43
8.4	Výpočet součinitele tlaku c_p	44
8.5	Výpočet výkonu z panelové metody	45
9	Výsledky metody	46
9.1	Zadání modelového výpočtu	46
9.1.1	Volba proudové plochy	46
9.1.2	Volba profilu	47
9.2	Součinitel tlaku	47
9.3	Srovnání výkonů	47
9.4	Vliv diskretizace na výsledky	49
9.5	Vliv korekce vnitřní vířivosti na výsledky	50
10	Závěr	51
	Literatura	53
A	Popis programu	55

Seznam obrázků

1.1	Schéma Francisovy turbíny. Zdroj: [2]	2
1.2	Meridiální řez Francisovou turbínou	2
1.3	Proudová plocha	4
1.4	Lopatka turbíny	5
2.1	Rychlostní trojúhelníky	6
2.2	Radiální a tečná složka rychlosti	7
3.1	Jednorozměrná teorie - proudové plochy	11
4.1	Definice parametrů proudové plochy	14
4.2	Příklady základních singularit	19
5.1	Příklady základních singularit	22
6.1	Rozdělení 2D profilu na panely	23
6.2	Vliv panelů	28
6.3	Detailní pohled na odtokovou hranu	29
6.4	Špatně definovaná, či nedefinovaná okrajová podmínka	30
7.1	Úsek profilu	34
7.2	Rozdělení profilu na segmenty	38
7.3	Rozdělení profilu na jemnější segmenty	39
8.1	Rychlostní pole před a za lopatkovou mříží	44
9.1	Tvořící křivka rotační proudové plochy	46
9.2	Součinitel rozložení tlaku na profilu při $\Omega = 5s^{-1}$	47
9.3	Součinitel rozložení tlaku na profilu při $\beta_1 = 65^\circ$	48
9.4	Změna úhlu β_2 za mříží při změně počtu panelů	49
9.5	Výkonu integrací tlaku podél profilu při změně počtu panelů	49
9.6	Srovnání součinitel tlaku c_p	50

Seznam tabulek

5.1	Základní elementy potenciálního proudění	22
9.1	Vstupní parametry modelového výpočtu	46
9.2	Výsledky modelového výpočtu	48

Použité značky a symboly

Parametr	Označení	Použitá jednotka
Výška lopatky	b	m
Korekční součinitel	c	ms^{-1}
Absolutní rychlost	c	ms^{-1}
Součinitel tlaku	c_p	1
Geometrický průměr	d	m
Síla	F	N
Funkce komplexního potenciálu	F	m^2s^{-1}
Gravitační zrychlení	g	ms^{-2}
Čistý spád	H	m
Výška tvořící křivky	h	m
Imaginární jednotka	i	
Parametr křivky	k	1
Koeficient vlivu	K	1
Moment hybnosti	L	$kg \cdot ms^{-2}$
Hmotnost	m	kg
Hmotnostní tok	\dot{m}	$kg \cdot s^{-1}$
Moment	M	Nm
Počet lopatek	N	1
Počet panelů	N_p	1
Tlak	p	Pa
Výkon	P	W
Průtok	Q	m^3s^{-1}
Poloměr	r	m
Stupeň reakce	R	1
Souřadnice na rotační proudové ploše	s	m
Rozteč lopatek	t	m
Unášivá rychlost	u	ms^{-1}
Relativní rychlost	v	ms^{-1}
Měrná práce	\bar{W}	$Jkg^{-1}s$
Obecná souřadnice	x	
Obecná souřadnice	y	
Komplexní souřadnice	z	

Parametr	Označení	Použitá jednotka
Relativní úhel	α	<i>rad</i>
Absolutní úhel	β	<i>rad</i>
Úhel panelu	β_m	<i>rad</i>
Lokální sklon rotační proudové plochy	γ_s	<i>rad</i>
Intenzita víru	γ	$m s^{-1}$
Cirkulace	Γ	
Transformovaná komplexní souřadnice	ζ	
Transformovaná souřadnice	η	
Úhel zakřivení profilu	θ	<i>rad</i>
Transformovaná souřadnice	ξ	
Hustota	ρ	$kg \cdot m^{-3}$
Sklužový faktor	σ	1
Úhel rotační proudové plochy	φ	<i>rad</i>
Rychlostní potenciál	ϕ	$m^2 s^{-1}$
Proudová funkce	ψ	$m^2 s^{-1}$
Čas	τ	<i>s</i>
Vířivost	ω	s^{-1}
Úhlová rychlost	Ω	s^{-1}

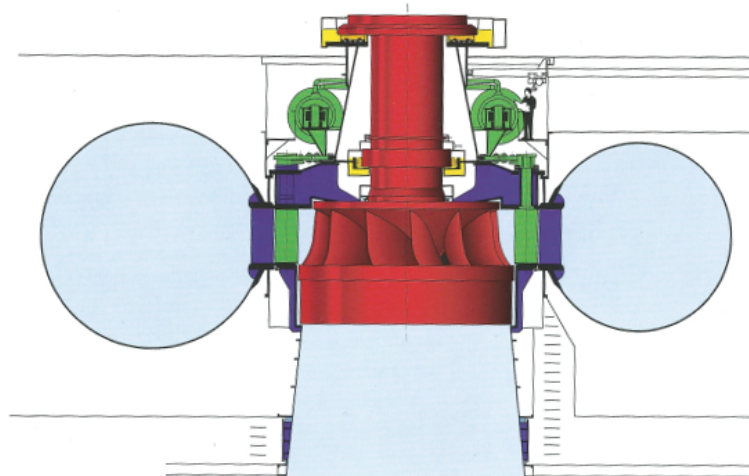
1. Úvod

Francisovy turbíny patří mezi nejstarší typy vodních turbín používaných pro výrobu elektrické energie. Základní koncept tohoto typu turbíny byl navržen v roce 1849 v Anglii J. B. Francisem [1]. Na obr. 1.1 je vyobrazeno základní schéma turbíny. Francisova turbína je přetlakovým typem vodní turbíny, tedy statický tlak pracovního média (vody) před turbínou je vyšší než statický tlak za turbínou. Mezi základní parametry Francisovy turbíny patří spád, průtok a geometrie. Parametry spád a průtok jsou dány do jisté míry geografickou polohou vodní elektrárny, kdežto geometrie turbíny je právě navrhována tak, aby byla optimální pro danou kombinaci spádu a průtoku.

Návrh geometrie turbíny je do jisté míry obchodním tajemstvím výrobních společností, neboť vývoj dostatečně efektivní turbíny není snadná záležitost. V současnosti je možné využívat pro základní vývoj metody založené na řešení Navier-Stokesových rovnic, tedy metody označované souhrně jako CFD. Jejich nevýhodou je však vysoká výpočetní náročnost. Proto se hledají možnosti, jak výpočet vodních turbín zjednodušit bez ztráty možnosti inovací, což dříve hojně využívané analytické metody postrádaly. Zároveň bylo Francisovým turbínám věnováno poměrně málo pozornosti i z pohledu teoretického výzkumu. O Kaplanových turbínách existuje bezpočet studií, avšak v případě Francisových je toho zlomek.

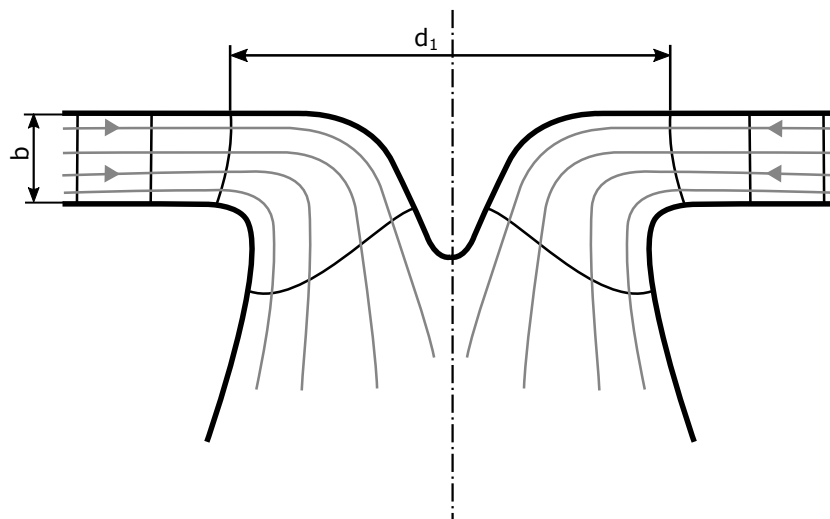
Jednou z možností jak provádět výpočet Francisovy turbíny, resp. jejího oběžného kola, jsou panelové metody. Panelové metody jsou založené na řešení potenciálního proudění, tedy na zjednodušeném modelu reálné tekutiny. Jejich nesmírnou výhodou oproti CFD je tedy jejich rychlost, nicméně proudění je značně zjednodušené. Vzhledem k tomu, že existují funkční prototypy Francisových turbín, je spíše problematikou jejich optimalizace, aby měly co možná nejvyšší účinnost. Tuto problematiku mohou panelové metody bez problémů řešit a v případě nutnosti je možné doplnit jejich odhady výpočtem z CFD.

Voda přichází přívodním kanálem na lopatky radiálního rozváděcího kola (na obrázku zelené), kde se proudění usměrní a uzpůsobí jeho směr tak, aby úhel



Obrázek 1.1: Schéma Francisovy turbíny. Zdroj: [2]

náběhu na oběžné kolo (na obrázku červené) odpovídá navrženým parametrům. Na oběžné kolo nabíhá proudění stále v radiálně-tečné rovině, avšak blíže k ose turbíny se proudění mění na téměř axiální. V anglické literatuře je tento typ označován jako *90° inward flow radial turbine (90° IFR turbine)*. [3]



Obrázek 1.2: Meridiální řez Francisovou turbínou

1.1 Rozváděcí kolo

Rozváděcí kolo Francisovy turbíny je radiální statorová lopatková mříž, jejíž úkolem je usměrnit proudění tak, aby při návrhových podmínkách dopadalo

pod návrhovým úhlem na lopatky kola oběžného. Neméně důležitým úkolem rozváděcích lopatek bývá regulace průtoku turbínou, tedy lopatky rozváděcího kola jsou pohyblivé a je možné jimi do jisté míry měnit průtok a úhel náběhu vody na oběžné kolo. Zároveň je rozváděcí kolo navrhováno tak, aby bylo možné turbínu případně úplně uzavřít. Na požadavek uzavření turbíny je třeba dbát při návrhu geometrie a počtu lopatek rozváděcího kola.

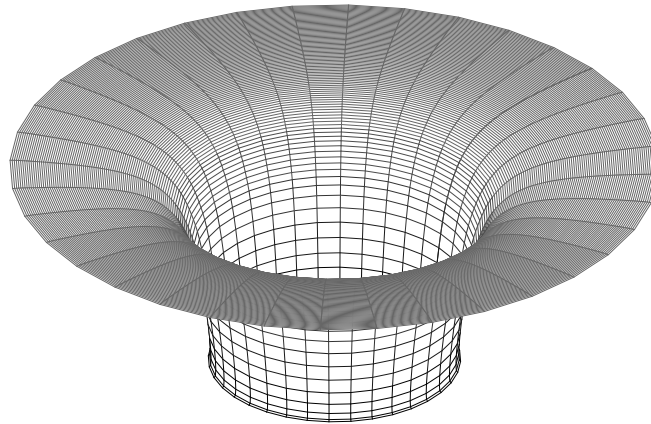
1.2 Oběžné kolo

Oběžné kolo je nejdůležitější součástí Francisovy turbíny, zajišťuje přeměnu části využitelné energie vody na energii kinetickou (točivý moment) hřídele. V oběžném kole dochází vlivem geometrie ke zratě energie vody a změně směru proudění. Do oběžného kola vstupuje voda v radiálním směru (resp. v radiálně-tečné rovině) a vystupuje z něj v téměř axiálním směru. Proto bývá Francisova turbína označována jako radiálně-axiální turbína. Vzhledem k povaze změny směru proudění může být turbína občas nesprávně označována jako diagonální, avšak diagonální turbínou je turbína Dériazova, která tvoří přechodový stupeň mezi axiální Kaplanovo turbínou a právě radiálně-axiální Francisovou turbínou. [4]

1.3 Proudová plocha

Problematika proudění v radiálně-axiální turbíně je třídimenzionální, avšak zvolením vhodného přístupu je možné řešení proudění značně zjednodušit. Vzhledem k axisymetrii turbíny lze samostatně vyjmout tzv. „proudovou plochu“, jež vznikne rotací zvolené proudnice kolem osy turbíny, viz obr. 1.3. Takto lze turbínu rozdělit na n proudových ploch a v každé řešit geometrii lopatek samostatně (s ohledem na spojitost lopatky).

Tuto proudovou plochu lze pak vhodně navrženou matematickou transformací převést do rovinné mříže, důležitou podmínkou takovéto transformace je zachování úhlů (více o této problematice v samostatné kapitole 4). Na rovinné mříži lze pak definovat geometrické veličiny pro lopatkové mříže běžné. Předpokladem



Obrázek 1.3: Proudová plocha

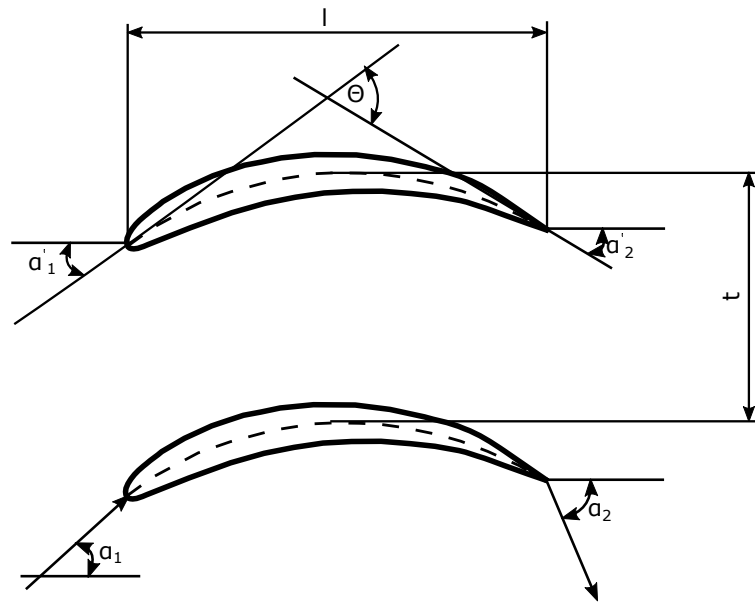
proudových ploch pro následné výpočty dvoudimenzionálního proudění po transformaci do rovinné mříže je nemísitelnost proudění v jedné proudové ploše s prouděním v jiné proudové ploše.

1.4 Lopatka turbíny. Lopatková mříž

Na obr. 1.4 je znázorněna a popsána základní geometrie lopatkové mříže turbíny. Tento popis lopatkové mříže je obecný v transformované proudové ploše Francisovery turbíny a lze jej tedy uvažovat jak pro statorovou, tak pro rotorovou mříž. V případě rotorové mříže je však zapotřebí navíc uvažovat unášivou rychlost - tedy je třeba důsledně rozlišovat absolutní a relativní úhly vůči rotující lopatkové mříži.

Lopatková mříž je tedy definovaná délkou lopatky l a roztečí mezi lopatkami t , která se však častěji v literatuře vyskytuje jako poměrná vůči délce lopatky, tedy $\frac{t}{l}$. Geometrie samotné lopatky je definována tečným úhlem střední čáry u náběžné hrany α'_1 a tečným úhlem α'_2 , popř. úhlem zakřivení profilu $\theta = \alpha'_1 - \alpha'_2$.

Proudění okolo lopatky lze charakteristicky popsat úhlem náběhu α_1 a úhlem odtoku α_2 . V ideálním případě by se úhel odtoku měl shodovat s tečným úhlem ke středové čáře lopatky u odtokové hrany: $\alpha_2 = \alpha'_2$. V reálném případě se však

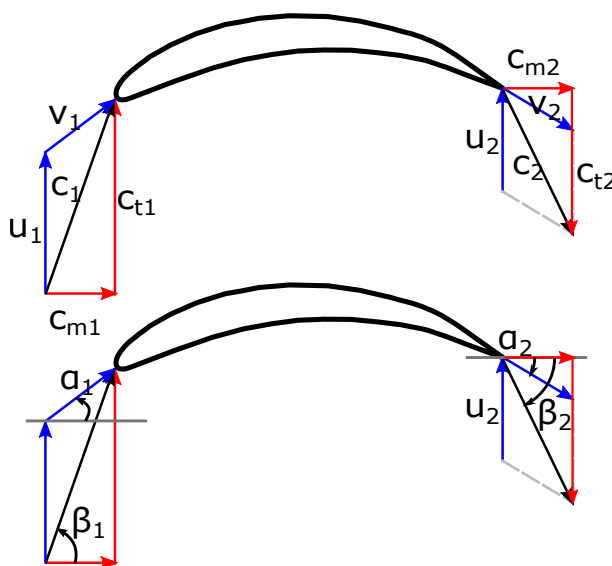


Obrázek 1.4: Lopatka turbíny

tyto dva úhly liší o tzv. úhel skluzu: $\delta = \alpha_2 - \alpha_2'$. Vzhledem k tomu, že lopatková mříž je popsána v konformním zobrazení, je možné tyto definované úhly uvažovat i ve zpětně transformované mříži v proudové ploše.

2. Kinematické poměry

Na vstupu či výstupu z oběžného/rozdávěcího kola lze definovat rychlost a směr proudění tzv. rychlostním trojúhelníkem. Parametry rychlostního trojúhelníku, kterými jej lze přesně definovat, se pak nazývají kinematické poměry. Na obr. 2.1 jsou vyobrazeny rychlostní trojúhelníky na vstupu a na výstupu oběžného kola v meridiálním řezu.



Obrázek 2.1: Rychlostní trojúhelníky

Absolutní složka rychlosti je vektorovým součtem rychlosti unášivé a relativní:

$$\vec{c}_i = \vec{u}_i + \vec{v}_i \quad (2.1)$$

Zároveň lze absolutní složku rychlosti rozdělit na meridiální a tečnou rychlost.

$$\vec{c} = \vec{c}_m + \vec{c}_t \quad (2.2)$$

Vzhledem k tomu, že meridiální a tečná rychlost jsou na sebe vzájemně kolmé, lze definovat relativní úhel proudění jako:

$$\alpha_i = \arctg \left(\frac{c_{ti} - u_i}{c_{mi}} \right) \quad (2.3)$$

Popř. absolutní úhel proudění:

$$\beta_i = \arctg \left(\frac{c_{ti}}{c_{mi}} \right) \quad (2.4)$$

2.1 Eulerova turbínová rovnice

Druhý Newtonův pohybový zákon lze uvažovat ve tvaru:

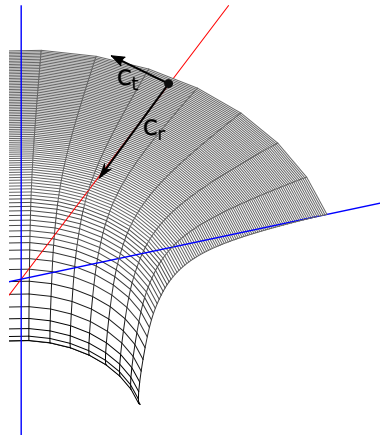
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{d\tau} \quad (2.5)$$

kde \vec{L} je moment hybnosti, \vec{M} je moment síly a τ je čas.

Moment hybnosti je definován jako vektorový součet průvodiče a hybnosti:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{c}_t \quad (2.6)$$

kde c_t je tečná rychlost tekutiny na průvodiči r a m je hmotnost vyšetřovaného tělesa. Po dosazení do rovnice 2.5 a derivaci v kontrolním objemu (viz obr. 2.2):



Obrázek 2.2: Radiální a tečná složka rychlosti

$$M = \dot{m}(r_1 c_{t1} - r_2 c_{t2}) \quad (2.7)$$

Tuto rovnici lze vynásobit úhlovou rychlostí Ω a poté vydělit hmotnostním tokem \dot{m} . Touto úpravou se dostane rovnice pro měrnou práci turbíny:

$$\frac{\vec{W}}{\dot{m}} = \vec{W} = u_1 c_{t1} - u_2 c_{t2} \quad (2.8)$$

Tato rovnice (2.8) se označuje jako Eulerova turbínová rovnice [3].

U Francisových turbín se v návrhovém režimu uvažuje, že proudění je na výstupu z oběžného kola téměř axiální a tečná složka rychlosti tekutiny je tudíž

nulová, resp. $c_{t2} = 0$, $c_{m2} = c_2$. Pokud tečná složka absolutní rychlosti je nezanedbatelná, pak je turbína provozována v nenávrhovém režimu.

$$\bar{W} = u_1 c_{t1} \quad (2.9)$$

Měrnou energii turbíny lze též vyjádřit z rychlostních trojúhelníků na obr. 2.1 [5]:

$$\bar{W} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \quad (2.10)$$

2.2 Stupeň reakce

Rychlostní trojúhelníky u reakčních turbín, mezi které patří Francisova turbína, lze kvalitativně ohodnotit tzv. stupněm reakce R . Tento bezrozměrný koeficient vypovídá nejen o účinnosti turbíny, ale i o volbě lopatkování na základě podobnosti. Stupeň reakce je definován [6]:

$$R = \frac{\text{změna energie způsobená změnou statického tlaku}}{\text{celková změna energie}} \quad (2.11)$$

U Francisových turbín se stupeň reakce běžně pohybuje podle [5] v rozmezí 0,5 až 0,75. Pro názornost významu stupně reakce lze uvést, že u rovnotlakých (impulzních) turbín, mezi které patří např. Peltonova turbína, je stupeň reakce $R = 0$.

Pro Francisovu turbínu lze stupeň reakce psát ve tvaru [5]:

$$R = \frac{\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}}{\bar{W}} \quad (2.12)$$

Pokud se uvažuje konstantní meridionální rychlost ($c_{m1} = c_{m2}$) a zároveň se dosadí měrná práce ze vztahu 2.9, lze vztah přepsat do jednoduché podoby:

$$R = 1 - \frac{1}{2} \frac{c_{t1}}{u_1} \quad (2.13)$$

3. Analytické metody návrhu

Jako již bylo řečeno v úvodu mezi základní parametry patří spád H a průtok Q . Užité spád H je vzhledem ke ztrátám vodního díla vždy menší než hrubý geodetický spád. Turbína je navrhována na jmenovitý průtok, ačkoli vzhledem k aktuálním energetickým potřebám je možné rozváděcím kolem průtok turbínou regulovat, čímž se turbína dostává do oblasti nenávrhových hodnot a tudíž klesá její celková účinnost. Měrná energie vody protékající turbínou:

$$\Delta E = g \cdot H \quad (3.1)$$

3.1 Určení základních parametrů turbíny

Mezi základní měrné parametry patří otáčky turbíny, resp. úhlová rychlost Ω .

$$\Omega_s = \frac{\Omega \sqrt{Q}}{(\Delta E)^{\frac{3}{4}}} \quad (3.2)$$

Po dosazení z rovnice 3.1:

$$\Omega_s = \frac{\Omega \sqrt{Q}}{(g \cdot H)^{\frac{3}{4}}} \quad (3.3)$$

Volba velikosti turbíny závisí na požadavcích návrhu. Jako nejzákladnější volený rozměrový parametr lze uvažovat průměr oběžného kola d_1 .

Stejně jako byly zavedeny měrné otáčky, je možné zavést i měrný průměr oběžného kola [7]:

$$d_s = \frac{d_1 (g \cdot H)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{Q}} \quad (3.4)$$

Poměrná výška b rozváděcího kola lze dle Korpely [7] empiricky odhadnout pomocí poměrné výšky b_r rozváděcího kola a měrné úhlové rychlosti:

$$b_r = \frac{b}{d_1} \quad (3.5)$$

$$b_r = -0,0505\Omega_s^2 + 0,26\Omega_s + 0,018 \quad (3.6)$$

Z volby základních rozměrů lze pomocí stupně reakce, užitého spádu (resp. Toricelliho vztahu) určit průtok jako [5]:

$$Q = \pi d_1 b \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{0,48}{\sqrt{1-R}} \sqrt{2gH} \quad (3.7)$$

Z těchto parametrů lze empirickými vztahy z návrhových příruček určit další základní parametry. Počet lopatek [4]:

$$N = 12 + 5 \cdot d_1 \quad (3.8)$$

Na základě těchto empiricky spočtených parametrů, popř. na základě dalších volených parametrů lze v literatuře (např. [4], [5], [7]) vyhledat vhodné tvary meridiálního řezu turbíny.

Význam těchto návrhových vztahů přetrvává i v případě komplexnějších výpočetních modelů pro určení inicializačních hodnot optimalizace geometrických parametrů oběžného kola.

3.2 Jednorozměrná teorie návrhu oběžného kola

Postupem popsaným výše se určí základní tvar meridiálního řezu turbíny. Tvar lopatky oběžného kola lze zjednodušeně navrhnout pomocí jednodimenzionální metody [6]. V zásadě principu jednorozměrné teorie využívají dva přístupy [4]. V jednom přístupu se uvažuje konstatní meridiální rychlost podél proudnice, ve druhém případě se rychlost proudění podél proudové čáry mění na základě změny měrné potenciální energie.

Společné pro oba přístupy je rozdělení meridiálního řezu turbíny na několik proudových ploch, podle [4] se běžně turbína rozděluje na 3-5 rotačních proudových ploch s tím, že krajní proudové plochy jsou nepatrně odsazeny od obrysu meridiálního řezu.

Obecně se uvažuje, že průtok je dán:

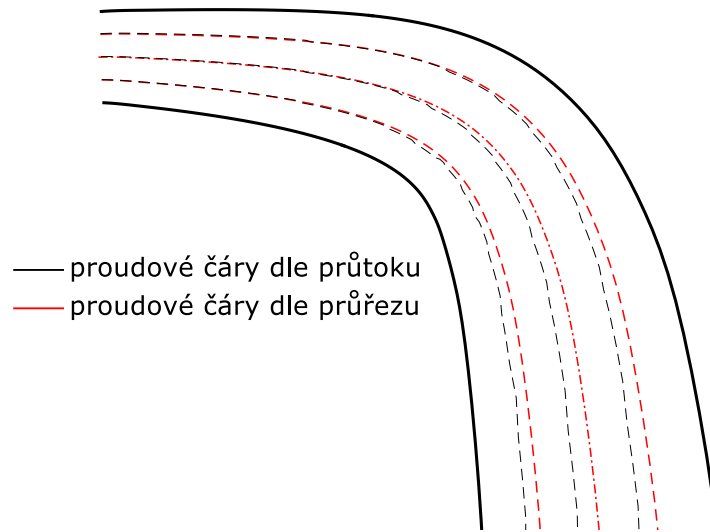
$$Q = \pi d_1 b_1 c_m \quad (3.9)$$

kde c_m je střední meridiální rychlost, v prvním případě tedy na dané rotační proudové ploše konstatní. Pokud se tedy podél výšky vstupního kanálu b rozdělí oběžné kolo na n proudových ploch, lze rozdělit průtok též na n shodných dílů. A následně se rovnice 3.9 vydělí n a oddělí se proměnné, jež jsou na dané proudové ploše konstantní, na levou stranu rovnice, čímž se dostane rovnice:

$$\frac{Q}{n\pi c_m} = d_i b_i \quad (3.10)$$

Tedy výška vyšetřované části i se nepřímo úměrně mění s průměrem. Z této analýzy lze určit, že průmět tvořící křivky rotační proudové plochy do meridiálního řezu je hyperbola. Lze tedy předpokládat, že i obrys radiálně-axiální turbíny s nekonstantní meridiální rychlostí podél proudové čáry, bude křivka „blízká“ hyperbole a v případě optimalizace tvaru by bylo vhodné z hyperboly vycházet.

V případě, předpokládá-li se obecně nekonstantní meridiální rychlost podél křivky, je možné proudové plochy spojit ekvipotenciálami, na kterých má tekutina stejnou meridiální rychlost. Postup konstrukce ekvipotenciál a průmětů proudnic je však opačný. Nejprve se vytvoří ekvipotenciály, pro které platí rovnice 3.10, jako hyperboly, následně se vhodně diskretizují a odpovídající si body se spojí jako proudové čáry.



Obrázek 3.1: Jednorozměrná teorie - proudové plochy

Vztah 3.10 lze tedy zobecnit na:

$$\frac{Q}{n} = \pi \cdot d_n \cdot b_n \cdot c_{mn} \quad (3.11)$$

Z tohoto vztahu je možno počítat rychlost v kterémkoli bodě kanálu turbíny. Je zapotřebí rozvinout proudové plochy do roviny, což však vzhledem ke komplikované geometrii tvořící křivky proudové plochy (již se nejedná o hyperbolu) není úplně jednoduché. Proto se v této zjednodušené metodě využívá náhrady

pomocí vhodně zvolené plochy kuželovitého tvaru, kde tvořící křivkou rotační plochy je přímka různoběžná s osou turbíny, avšak není mimoběžná. Tvořící přímka náhradní kuželové plochy se tečně dotýká tvořící křivky rotační proudové plochy v místě odtokové hrany lopatky.

Samotný profil je pak návrhován podle tvaru vstupního a výstupního rychlostního trojúhelníku, neboť podle Eulerovy turbínové rovnice 2.8 výkon turbíny záleží jen na dodržení tečné rychlosti na náběžné a odtokové hraně lopatek oběžného kola. Tedy na samotném profilu lopatky mezi odtokovou a náběžnou hranou v této teorii nezáleží, avšak v praxi je třeba jej navrhovat s ohledem na minimální hydraulické ztráty.

Tečný úhel střednice na náběžné hraně α'_1 se volí tak, aby odpovídal směru nabíhání proudu vytekajícího z rozváděcího kola. Proud vody však nesleduje tečný úhel střednice na odtokové hraně profilu α'_2 , velikost úhlu skluzu závisí primárně na počtu lopatek, resp. hustotě lopatkové mříže. Z tohoto důvodu se volí úhel α'_2 o 2° až 5° větší než odtokový úhel vody α_2 . Takto navržená lopatková mříž se pak pomocí prostředků konstruktivní geometrie přenesou zpět do proudových ploch.

3.3 Empirická metoda analýzy oběžného kola

Spíše inženýrský přístup návrhu oběžného kola uvedený v předchozí kapitole 3.2 lze zpřesnit pomocí výpočtu úhlu skluzu. Výpočet úhlu skluzu je založen v analyticky řešených úlohách na empirických modelech pro dané typy lopatek. Většina těchto empirických modelů je však založena spíše na výpočtu tzv. skluzového faktoru, který je definován jako poměr skutečné tečné rychlosti proudění c_{t2} na odtokové hraně ku teoretické tečné rychlosti, kdyby proudění sledovalo tečnu ke středové čáře na odtokové hraně.

$$\sigma = \frac{c_{t2}}{c'_{t2}} \quad (3.12)$$

Většina empirických studií (např. Stanitz [3]) se týká čistě radiálních turbín, resp. turbín s radiálním prouděním na vstupu i výstupu. Stanitz mimo jiné došel k závěru, že skluzová rychlost ($c_{ts} = c'_{t2} - c_{t2}$) závisí pouze na počtu lopatek a

je tedy nezávislá na úhlu α'_2 . Pro radiální turbíny je skluzový faktor dle Stanitze [3]:

$$\sigma = 0,63 \cdot \frac{\pi \cdot u_2}{N} \quad (3.13)$$

Lewis[8] v souladu s konformní transformací odvodil vztah pro turbínu se smíšeným typem proudění:

$$M = \frac{N}{\sin\gamma_s} \quad (3.14)$$

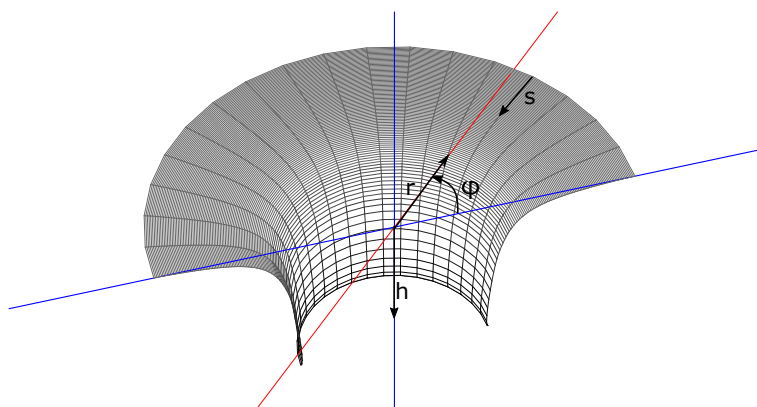
Tento vztah udává náhradní počet lopatek M čistě radiální turbíny odpovídající turbíně se smíšeným typem proudění s počtem lopatek N . Úhel γ_s je úhel tečny proudové čáry (viz obr. 4.1). Právě v úhlu γ_s spočívá nevýhoda tohoto vztahu, který je určen pro výpočet náhradního počtu lopatek pro turbíny s konstatním γ_s . Tento požadavek však obecně Francisovy turbíny nesplňují, vhodnější je užít tento vztah pro turbínu Dériazovu, popř. v případě Francisových turbín pro aproximaci rychloběžných turbín, u nichž lze snáze určit střední úhel γ_s .

4. Transformace lopatkové mříže

4.1 Transformace proudové plochy

do kartézského systému rovinné mříže

V úvodu byla definována proudová plocha jako rotační plocha kolem osy turbíny daná meridálním průmětem proudové čáry. Meridiální průmět proudové čáry lze označit jako křivku C . Souřadnice podél křivky C bude označována s , délkový element křivky jako ds . Každý bod P dané rotační plochy lze jednoznačně definovat dvěma na sobě nezávislými souřadnicemi (s, φ) , viz obr. 4.1, pokud je jednoznačně definována křivka C , což je předpokladem této transformace.



Obrázek 4.1: Definice parametrů proudové plochy

Pro transformaci lopatkové mříže je vhodné zavést tzv. konformní zobrazení, jež zachovává úhly. Základní podmínka pro zobrazení do transformovaného kartézského souřadného systému $\xi - \eta$ je:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{ds}{rd\varphi} \quad (4.1)$$

Tato rovnice je matematickým vyjádřením podmínky zachování velikosti a orientace úhlů (tedy i směrů derivací) při transformaci mezi systémy. Nicméně velikost a tvar invariantem obecně není. Z obrázku 4.1 je patrné, že souřadnice r je funkcí souřadnice s a není souřadnicí φ , proto je vyjmuta z diferenciálu a je tedy pouze pomocnou proměnnou pro výpočet úhlu.

Je vhodné, aby souřadnice η byla závislá pouze na souřadnici φ z toho důvodu, aby bylo možné transformovat lopatkovou mříž s polárním půdorysem do nekonečné rovinné mříže, kde odpovídající si body lopatek leží v přímce.

Podle Lewise [8] je možné tuto diferenciální rovnici řešit separací:

$$d\xi = \frac{ds}{r} \quad (4.2)$$

$$d\eta = d\varphi \quad (4.3)$$

Zároveň lze zadefinovat úhel γ_s svírající element ds s osou rotační plochy. Na základě toho lze odvodit vztah mezi ds a dr :

$$\frac{dr}{ds} = \sin\gamma_s \quad (4.4)$$

Pokud γ_s je konstanta, tedy rotační proudová plocha je kónická, pak po integraci platí:

$$\xi = \frac{\ln(r)}{\sin(\gamma_s)} \quad (4.5)$$

A obecně platí pro souřadnici η :

$$\eta = \varphi \quad (4.6)$$

4.1.1 Speciální případy transformace

Transformační vztahy 4.2 a 4.6 jsou obecně platné, tedy platí i pro čistě axiální, popř. čistě radiální turbínu. V případě čistě axiální turbíny ($r = konst.$) je vztah pro souřadnici ξ (proudová plocha je válec):

$$\xi = \frac{s}{r} \quad (4.7)$$

V případě čistě radiální turbíny, kdy $\sin(\gamma_s) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, tedy proudová plocha je rovina:

$$\xi = \ln(r) \quad (4.8)$$

4.1.2 Obecná transformace

V případě obecné proudové plochy je nutno řešit vztah 4.2 jako křivkový integrál:

$$\xi = \int_C \frac{1}{r} ds \quad (4.9)$$

Řešení nyní závisí na vyjádření křivky C . V nejobecnější případě lze křivku definovat parametricky jako funkci obecného parametru k , $C : h = h(k), r = r(k); k \in < 0; 1 >$. Pak obecně platí:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dh}{dk}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dk}\right)^2} dk \quad (4.10)$$

Následně se transformační integrál změní:

$$\xi(k_0) = \int_0^{k_0} \frac{1}{r(k)} \sqrt{\left(\frac{dh}{dk}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dk}\right)^2} dk \quad (4.11)$$

Tento integrál 4.11 má výhodu v tom, že je jednoznačně definovaný pro libovolný tvar průmětu proudové čáry do meridiálního řezu. V případě potřeby lze popis křivky zjednodušit a to buď na jednodznačnou definici podle výšky h , nebo podle průměru r :

V případě jednoznačně zadané křivky podle výšky h (tedy $h = k$), lze vyjádřit integrál ve tvaru:

$$\xi(h) = \int_{h_0}^h \frac{1}{r(h) \cdot \cos \gamma_s(h)} dh \quad (4.12)$$

Je však zřejmé, že tento integrál není vhodný pro definici proudové plochy, která v určitém místě má radiální směr tečny - resp. pro výšku h není funkce poloměru funkcí prostou.

Naopak v případě jednoznačně zadané křivky podle poloměru r (tedy $r = k$), lze vyjádřit integrál ve tvaru:

$$\xi(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{r \cdot \sin \gamma_s(r)} dr \quad (4.13)$$

Zde je opět omezení, tentokrát nesmí tečna tvořící křivky rotační proudové plochy být rovnoběžná s osou turbíny. Výhodou tohoto zápisu je však ve snažší definici křivky, není potřeba několika samostatných předpisů.

4.2 Zpětná transformace

Transformační vztah mezi souřadnicemi η a φ je zřejmý ze vztahu 4.6. Avšak obecný vztah mezi souřadnicemi ξ a s 4.9 je komplikovaný. Inverzní vztah k tomuto vztahu není možné analyticky nalézt a vyžaduje numerické řešení.

Obecnou zpětnou transformaci by bylo možné nalézt pouze v případě, kdy výraz $\frac{1}{r(h) \cdot \cos \gamma_s(h)}$ by byl analyticky integrovatelný.

4.3 Komplexní souřadnice

Pro pozdější využití při řešení problémů 2D-potenciálního proudění je vhodné využít zápis souřadnic v komplexním tvaru. Souřadnice v pravoúhlé kartézské soustavě souřadné $\xi - \eta$ lze definovat:

$$\zeta = \xi + i\eta \quad (4.14)$$

Souřadnice obecné proudové plochy lze definovat jako:

$$z = s + ir\varphi \quad (4.15)$$

Dále lze předpokládat, že je jednoznačně dána funkce předepisující transformaci mezi souřadnicemi ζ v prostoru $\xi - \eta$ a souřadnicemi z v souřadnicovém prostoru turbíny.

4.4 Transformace rychlostí

Pro derivaci funkce komplexního potenciálu (viz kapitola 5) platí:

$$c_m - ic_t = \frac{F(z(\zeta))}{dz} \quad (4.16)$$

Pro derivaci složené funkce platí:

$$\frac{F(z(\zeta))}{d\zeta} = \frac{F(z(\zeta))}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = (c_m - ic_t) \frac{dz}{d\zeta} \quad (4.17)$$

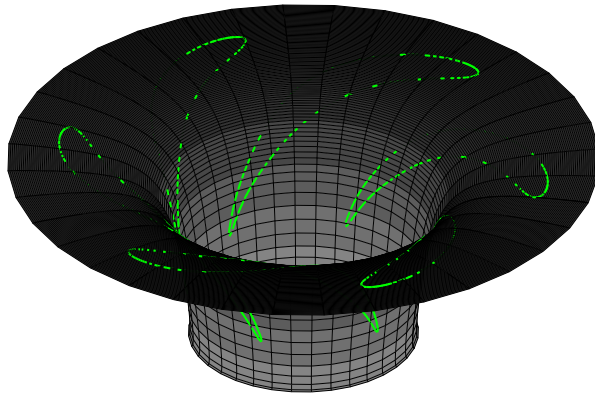
Lze odvodit, že vzájemná derivace souřadnic $\frac{dz}{d\zeta}$ je rovna r . Pak platí:

$$c_\xi - ic_\eta = (c_m - ic_t)r \quad (4.18)$$

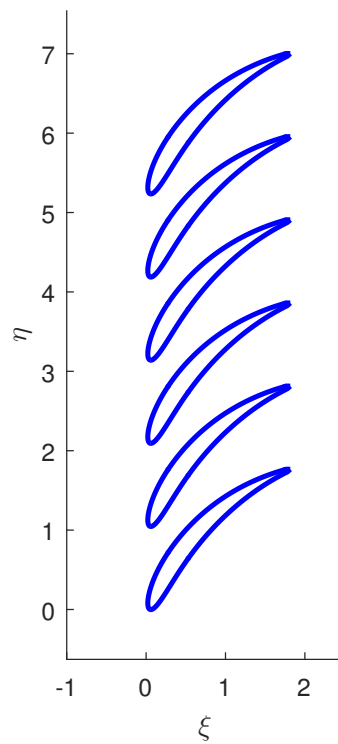
Ze vztahu 4.18 je zřejmé, že z hlediska konformního zobrazení je vyjádření rychlostí správné, neboť poměr obou složek rychlostí (resp. úhel mezi nimi) se po transformaci nezmění, což je hlavní předpoklad konformního zobrazení.

4.5 Praktické využití transformace

Vzhledem k numerické komplikovanosti transformace obecné rotační proudové plochy je vhodné na počátku výpočtu provést výpočet v určitém konečném počtu bodů souřadnice ξ . A vytvořit dostatečně hustou obousměrně mapovací tabulku mezi souřadnicemi ξ a s . Následně pak získávat hodnoty mezi „tabulkovými hodnotami“ pomocí lineární interpolace dvou okolních bodů.



(a) Netransformovaná lopatková mříž



(b) Transformovaná lopatková mříž

Obrázek 4.2: Příklady základních singularit

5. Potenciální proudění

Model potenciálního proudění je zjednodušený model proudění tekutiny. Vlastnosti (předpoklady) definující potenciální proudění jsou následující [3]:

- proudění je nevazké
- proudění je nevířivé
- proudění je nestlačitelné

Základní rovnicí potenciálního proudění je Laplaceova rovnice:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.1)$$

Veličina ϕ je základní skalární veličinou potenciálního proudění, rychlostní potenciál, který je ve dvourozměrném prostoru $x - y$ definován:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (5.2)$$

V potenciálním proudění lze kromě rychlostního potenciálu též definovat proudovou funkci ψ :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.3)$$

Tyto dvě veličiny lze zkombinovat v komplexní rovině do podoby funkce komplexního potenciálu, která je funkcí prostorových souřadnic $z = x + iy$ je v Gaussově rovině:

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (5.4)$$

Z definičních rovnic lze odvodit, že derivací funkce komplexního potenciálu podle komplexní souřadnice z se získá funkce předepisující rychlost v místě z :

$$\frac{dF(z)}{dz} = v_x(z) - iv_y(z) \quad (5.5)$$

Použití funkce komplexního potenciálu je však možné pouze ve dvourozměrném prostoru, neboť je definována právě a jen v Gaussově komplexní rovině, která je dvourozměrná.

5.1 Vířivost. Cirkulace

Vířivost $\vec{\omega}$ je definována [9, str. 32]:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} \quad (5.6)$$

Tedy se jedná o dvojnásobek úhlové rychlosti proudění. Pro potenciální proudění však platí výše uvedená podmínka nevířivosti proudění, tedy: $\vec{\omega} = \vec{0}$. Cirkulace Γ je definována jako křivkový integrál po uzavřené křivce K [13, str. 21]:

$$\Gamma = \oint_K \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (5.7)$$

Tento výtaz lze pomocí Stokesovy věty přepsat na vztah mezi vířivostí a cirkulací:

$$\Gamma = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS \quad (5.8)$$

Tedy na plošný integrál přes polochu S , která je definována uzavřenou křivkou K .

Z definice potenciálního proudění též vyplývá, že cirkulace je v potenciálním proudovém poli $\Gamma = 0$.

Avšak definuje se potenciální vír, který z hlediska proudového pole je singularitou a veškerá jeho vířivost $\vec{\omega}$ je soustředěna právě do této singularity (aby platila Stokesova věta). Proudová částice kolem singularity rotuje, ale nerotuje kolem své vlastní osy, aby toto bylo splněno musí být obvodová rychlost nepřímo uměrná vzdálenosti od singularity. Pro tečnou rychlost na průvodiči \vec{r} ve vzdálenosti r pak platí vztah:

$$v_t = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (5.9)$$

5.2 Zdroj a propad

Zdroj a propad jsou dalšími elementy potenciálního proudění, tentokrát však pohyb tekutiny probíhá pouze ve směru z /do středu elementu. Ve vzdálenosti r je pak radiální rychlost tekutiny:

$$v_r = \frac{q}{2\pi r} \quad (5.10)$$

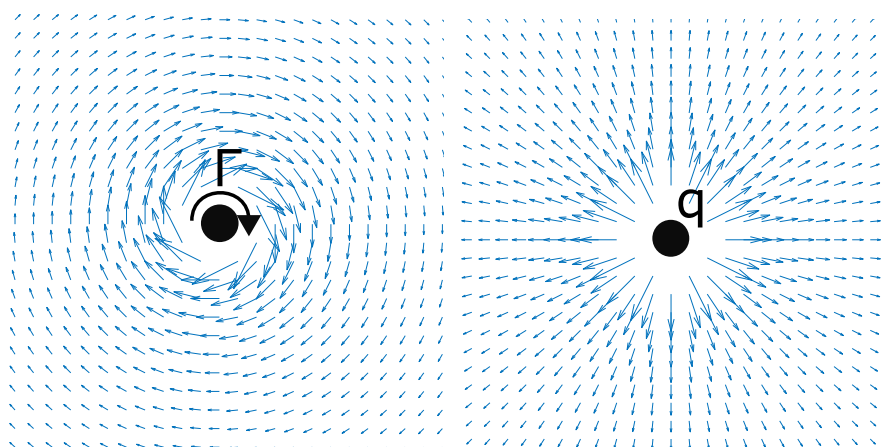
Kde q je vydatnost zdroje ($q > 0$), nebo propadu ($q < 0$).

5.3 Superpozice

Potenciální vír, zdroj a propad je možné libovolně kombinovat, resp. jejich popis proudovou funkcí a rychlostním potenciálem (viz tabulka 5.1), a vytvořit tak vlastní proudové pole popsané funkcí komplexního potenciálu a následně je možné derivací převést toto pole na rychlostní.

Element	Char. veličina	Potenciál. funkce	Proudová funkce
Potenciální vír	Cirkulace Γ	$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
Zdroj	Vydatnost q	$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$	$\psi = \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Tabulka 5.1: Základní elementy potenciálního proudění



(a) Potenciální vír

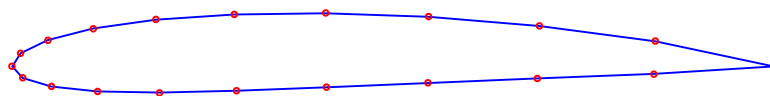
(b) Zdroj

Obrázek 5.1: Příklady základních singularit

6. Panelové metody

Panelové metody jsou numerické metody využívající základní principy a elementy potenciálního proudění. Používají se pro určení rychlostních polí při obtékání těles - např. samostatných lopatek, či složených lopatkových mříží. Skládání a modifikace základní elementů potenciálního proudění tak, aby se vhodně vytvořil obrys profilu lopatky v rychlostním/proudovém poli. Následně lze z rychlostního profilu podél lopatky určit průběh součinitele tlaku na lopatce. V principu jde o nalezení charakteristických konstant daných singulárními elementy na základě okrajových podmínek úlohy. Vzhledem k tomu, že charakteristické konstanty (cirkulace, moment zdroje/propadu) jsou lineárními členy v rovnicích potenciálního proudění, jedná se pak o řešení soustavy algebraických rovnic.

Význam panelových metod spočívá v jednoduchosti jejich výpočtu oproti výpočtům CFD (probíhá řešení algebraické soustavy rovnic, nikoli soustav parciálně diferenciálních rovnic), avšak oblast jejich použití je menší. Na druhou stranu panelové metody jsou schopny pracovat s obecnějšími předpoklady (zvláště v případě geometrie) než metody analytické.



Obrázek 6.1: Rozdělení 2D profilu na panely

6.1 Biot-Savartův zákon

Jak již bylo řečeno v kapitole 5 potenciální vír indukuje v daném bodě rychlost tečnou na průvodič mezi vírem a daným bodem. Na tento jev lze aplikovat fyzikální podobnost s elektrodynamikou a využít Biot-Savartův zákon [10]:

$$d\vec{v}_{nm} = \frac{\Gamma_n(d\vec{s}_n \times \vec{r}_{mn})}{4\pi r_{mn}^3} \quad (6.1)$$

Vztah určuje indukovanou rychlost v bodě m od elementu o délce ds v místě n a cirkulace Γ . Platnost tohoto zákona v potenciálním proudovém poli lze samozřejmě dokázat nezávisle na elektrodynamice (ačkoli v obou případech se jedná o potenciální pole).

Uvažuje-li se vírové vlákno, tedy nekonečně mnoho vírů s nekonečně malým rozestupem a cirkulací Γ , pak rychlost v bodě n ležící mimo vírové vlákno, lze spočítat jako křivkový integrál rovnice 6.1:

$$\vec{v}_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_K \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{mn}}{r_{mn}^3} \quad (6.2)$$

Tuto rovnici lze označit jako Biot-Savartův zákon v integrálním tvaru.

6.2 Typy panelů

V případě nejzákladnějšího dělení lze uvažovat rozdělení na dvoudimenzionální panelové metody, pak je panel tvořen v nejjednoduším případě úsečkou, nebo třídimenzionální panelové metody, ve kterých je panel tvořen plochou. Existují také panelové metody s panely tvořenými křivkami, popř. plochami vyšších řádů, pak se též označuje panelová metoda jako panelová metoda vyššího řádu. Je však třeba uvážit efektivitu řešení, panely tvořené křivkami vyšších řádů lze nahradit vyšším počtem panelů nižšího řádu.

6.2.1 Dle typu elementu

Panel může být tvořen prakticky kterýmkoli singulárním elementem potenciálního proudění, nebo jejich kombinací. Mezi dva nejzákladnější typy panelů dle použitého singulárního elementu patří:

- **potenciální vír** - na panelu je určitým způsobem umístěna cirkulace
- **zdroj** - na panelu je umístěn zdroj/propad

Příkladem panelové metody s panely tvořenými pouze potenciálními víry je Martensenova panelová metoda [10], pouze zdroji Douglas-Neumannova metoda [10]. Jako příklad metody využívající kombinaci víru a zdroje na panelu lze uvést Hess-Smithovu panelovou metodu [11]

6.2.2 Dle rozložení veličiny

Na obr. 6.1 je vyobrazeno rozdělení profilu na panely a kolokační body. Jak již bylo řečeno na panelech jsou umístěny singulární elementy potenciálního proudění, v kolokačních bodech je však počítána rychlost indukovaná všemi singulární elementy a následně je tato rychlost srovnávána s okrajovými podmínkami úlohy.

Rychlost je tedy počítána v jednotlivých bodech, ale singulární element lze na panel konečné délky umístit v běžných případech několika způsoby:

- **bodově** - singulární element je umístěn pouze v kolokačním bodě (popř. jiném bodě) příslušící danému panelu
- **konstatní** rozdělení charakteristické veličiny je konstatní na celém panelu
- **lineární** rozdělení charakteristické veličiny na panelu se mění lineárně mezi jednotlivými konci panelu
- **kvadratické**

6.3 Formulace panelových metod

Podle formulace základní rovnice panelové metody lze uvažovat ve dvoudimenzionálním prostoru o třech možných způsobech. Podle toho, jaké vyjádření účinků od jednotlivých elementů se superponují:

- **rychlostní**

- **potenciální**
- **proudovou funkcí**

Vzhledem k obtížné definici potenciální a proudové funkce ve třídímním prostoru je jejich použití omezeno pouze na dvoudímní úlohy.

Aby bylo možné charakteristické veličiny podél profilu srovnávat zavádí se při formulaci panelových metod jejich intenzita, tedy měrná (normalizovaná) veličina. V případě intenzity cirkulace se jedná v případě diferenciálního elementu o délce ds :

$$\Gamma = \gamma ds \quad (6.3)$$

Toto je vhodné vyjádření pouze pro singularitu umístěné na panelech, v případě singularit s umístěním mimo panely (např. relativní vířivost) je vhodné uvažovat jejich nenormalizovanou hodnotu.

Principem panelových metod je tedy sestavení (většinou lineárních) algebraických rovnic s neznámými charakteristickými hodnotami veličin singularit. Při nalezení odpovídajících hodnot veličin lze pak dopočítat rychlostní/proudové pole v libovolném bodě definovaného prostoru.

6.3.1 Rychlostní formulace

V rychlostní formulaci panelové metody se vychází z Biot-Savartova zákona 6.2, přičemž křivkou, podél níž se integruje, je křivka profilu. Samozřejmě cirkulace nemusí být v obecném případě podél křivky konstantní:

$$\vec{v}_P = \frac{1}{4\pi} \int_K \frac{\Gamma(d\vec{s} \times \vec{r})}{r^3} ds \quad (6.4)$$

Kde r je průvodič k bodu P . Podobnou rovnici lze sestavit i pro další typy singularit a vyjádřit tak jejich vliv k bodu P .

Zůstane-li se u panelové metody složené z potenciálních vírů, lze rovnici 6.4 diskretizovat na elementy konečné délky. Avšak zde je potřeba provést právě náhradu cirkulace Γ vhodnou funkcí na daném elementu ds . Lze to chápat tak, že se jednak diskretizuje geometrie profilu a zároveň rozložení cirkulace podél profilu.

Na profilu musí formulace úlohy zajistit splnění určitých fyzikálních předpokladů, tedy okrajové podmínky (viz kapitola 6.5), které v případě rychlostní formulace by měly být vyjádřené též v rychlostní podobě.

6.3.2 Formulace potenciálovou a proudovou funkcí

Formulace panelové metody pomocí potenciálové a proudové funkce je v prvním kroku jednodušší. Obě veličiny jsou skalární, tedy jejich superpozice je prostý součet dvou čísel. Hodnota potenciálové/proudové funkce se tedy zjistí pomocí sečtení dílčích hodnot funkce od jednotlivých panelů. Zároveň je v této formulaci vhodné vnášet korekce pomocí distribuce zdrojů, nebo virů.

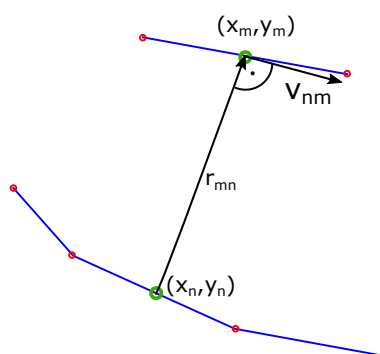
Přestože samotná sestavení základních rovnic je jednoduchá, má tato formulace značná úskalí. Tuto formulaci lze použít v zásadě ve 2D úlohách. Existuje možnost definovat proudovou funkci i ve trojrozměrném prostoru, resp. definice této funkce má podobu dvou rovnic [12] a efektivita tohoto řešení je tedy možností diskuze.

Ekvipotenciálou se nazývá spojitá křivka spojující body se stejnou hodnotou rychlostního potenciálu. Proudovou čarou se označuje křivka spojující místa se stejnou hodnotou proudové funkce. Tyto křivky mají ve svých vzájemných průsečích tečny na sebe kolmé. Protnout se však mohou pouze ekvipotenciály s proudovou čarou. Nemůže nastat, že by se proudová čára protнула s jinou proudovou čarou, či by podobný jev nastal u ekvipotenciály, pokud by tak nastalo, tak se nejedná o potenciálové pole. Výhodou formulace panelové metody např. proudovou funkcí je jednoduchost její následné vizualizace.

6.4 Koeficienty vlivu

Vzhledem k neměnné geometrii profilu v rámci jednoho výpočtu lze pevně definovat tzv. koeficienty vlivu, tedy matici koeficientů vzájemného vlivu jednotlivých panelů. Na obr. 6.2 je geometricky naznačen vliv panelu n na panel m .

V případě rychlostní formulace úlohy tak v závislosti na jejích okrajových podmínkách lze sestavit koeficienty vzájemného vlivu panelů, které budou závislé



Obrázek 6.2: Vliv panelů

pouze na geometrii - profilu, úhlu nastavení, rozteče lopatek (v případě lopatkových mříží).

Jako příklad lze uvést určení tečné rychlosti indukované panelem n s intenzitou cirkulace γ_n na panel m - resp. sestavení vazbového koeficientu:

$$K(m, n) = \left(\frac{u_x}{\gamma_n} \cos \beta_m + \frac{u_y}{\gamma_n} \sin \beta \right) \Delta s_n \quad (6.5)$$

kde u_x a u_y jsou rychlosti vyvozené panelem n na panel m ve směru os souřadného systému.

Vzhledem k tomu, že všechny členy rovnice 6.5 vyjma členu γ_n jsou závislé pouze na geometrii lze člen γ_n vytknout, pak tedy tečná rychlost na panel m indukovaná ostatními panely bude:

$$v_m = \sum_{i=1}^{n_p} K(m, n) \gamma_n \quad (6.6)$$

Podobné koeficienty je možné sestavit i pro případ výpočtu normálové rychlosti k panelu m , stejně tak v případě využití jiných singulárních elementů potenciálního proudění.

6.5 Okrajové podmínky

Ke zvolené panelové metodě je nezbytné sestavit okrajové podmínky, resp. pravou stranu algebraických rovnic. Obecně lze rozlišovat mezi dvěma základními typy okrajových podmínek - Dirichletova a Neumannova okrajová podmínka[13]. Jejich primárním účelem je definovat profil lopatky. Samozřejmě je možné v jedné úloze kombinovat více typů okrajových podmínek.

6.5.1 Neumannova okrajová podmínka

Neumannova okrajová podmínka se definuje jako:

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} = 0 \quad (6.7)$$

Kde n je normála k dané hranici. Tato podmínka nepřímo určuje, že normálová rychlost k povrchu profilu je nulová.

6.5.2 Dirichletova okrajová podmínka

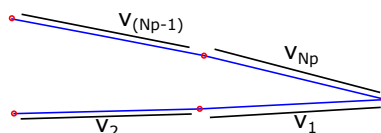
Dirichletova podmínka potenciálního proudění se definuje jako:

$$\phi(x, y) = konst. \quad (6.8)$$

Je tedy přímo zadána konstantní hodnota rychlostního potenciálu na povrchu lopatky, resp. je zadána tečná rychlost na povrchu lopatky. Může se zdát, že tato podmínka není dostačující, že by mohla být nenulová normálová rychlost a tudíž tekutina proudit přes hranici lopatky, nicméně sporem lze dokázat, že toto není možné [10]

6.6 Podmínka odtokové hrany

Přestože okrajové podmínky definují obrys profilu, nezaručují, že se proudění kolem profilu bude chovat fyzikálně správně. Je nutné definovat odtokovou hranu profilu a na ní definovat doplňkovou podmínku - Kuttovu podmínku.

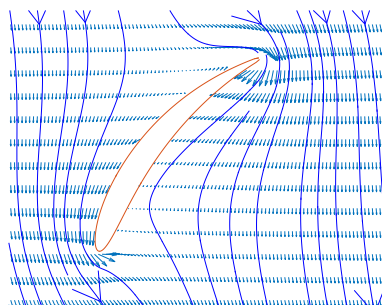


Obrázek 6.3: Detailní pohled na odtokovou hranu

Kuttova podmínka určuje [13, str. 88], že rychlost proudění na ostré odtokové hraně je konečná a proudění opouští odtokovou hranu hladce a plynule, tedy že odtoková hrana je druhý stagnační bod na profilu. (První stagnační bod je

místo, na které proudění natéká.) Lze tedy předpokládat, že rozdíl statických tlaků na panelu před a za odtokovou hranou bude nulový.

Na obr. 6.4 je příklad chování rychlostního pole v případě velmi špatně definované podmínky, či vůbec nedefinované. Je vhodné poznamenat, že ve specifickém případě se může potenciální proudění chovat, jakoby Kuttova podmínka byla definována správně, avšak takovýto model nebude stabilní z hlediska změny okrajových podmínek.



Obrázek 6.4: Špatně definovaná, či nedefinovaná okrajová podmínka

Zajistit splnění Kuttovy podmínky je možné několika způsoby. Zásadním předpokladem je, že v případě nutnosti nulového rozdílu tlaků jsou velikosti tečných rychlostí na panelech v okolí odtokové hrany shodné [10]. Toho je možné nejnadhěji dosáhnout rovností absolutních hodnot cirkulací na těchto panelech, resp. v případě shodné délky panelů (což je maximálně doporučováno) je možné tuto podmínku matematicky zapsat:

$$\gamma_1 = -\gamma_{N_P} \quad (6.9)$$

Nicméně i zajištění této podmínky je z hlediska výpočtu možné několika způsoby.

6.7 Diskretizace profilu

Geometrie profilu je většinou dána jako C^1 spojitá křivka (s výjimkou odtokové hrany, která se předpokládá „ostrá“), je tedy nezbytné vhodně rozdělit křivku na jednotlivé panely tak, aby jejich velikost byla dostatečně malá, tudíž aby panely správně kopírovaly tvar lopatky, avšak zároveň z hlediska přesnosti výpočtu byla metoda efektivní.

Obecně lze říci, že v blízkosti náběžné a odtokové hrany je vhodnější vyšší hustota panelů než ve zbylé části profilu. Je výhodné, aby panely u odtokové hrany byly dostatečně malé, pro správné vyhodnocení Kuttovy podmínky. Dále je vhodné, aby počet panelů byl minimálně takový, aby zásadně nedeformoval tvar lopatky.

Jako příklad vhodného rozdělení hustoty diskretizačních bodů (panelů) na lopatce lze uvést funkci kosinus:

$$x = 1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.10)$$

kde k nabývá hodnoty $k \in \langle 0; 1 \rangle$ s konstantní diferencí a x je jednotkovou souřadnicí panelů, avšak už s proměnnou diferencí. Panely mezi oblastí blízké náběžné hraně a oblastí blízké odtokové hraně jsou sice z hlediska tvaru podstatné, avšak jejich menší diskretizace nebude mít tak značný vliv na samotný výpočet jako menší diskretizace v oblasti náběžné a odtokové hrany, kde dochází k podstatným změnám v proudění.

Je vhodné jednotlivé panely číslovat. V této práci jsou panely číslovány arabskými číslicemi od odtokové hrany, přes spodní hranu profilu k náběžce a zpět k odtokové hraně. Celkový počet panelů je označován jako N_P .

6.8 Užítí panelové metody na lopatkovou mříž

Dosud v této kapitole je využití panelových metod prezentováno převážně na osamoceném profilu. Jejich použití lze zobecnit a využít je pro výpočet potenciálního proudového pole kolem většího množství různých profilů, avšak v případě stejných profilů se řešení značně zjednodušuje.

Lopatková mříž turbíny je kruhového uspořádání - lopatky tak tvoří nekonečnou periodicky se opakující mříž. Je vhodné lopatkovou mříž transformovat do pravoúhlého souřadného systému, kde lopatková mříž bude rovnoběžná s některou z os daného souřadného systému. Taková transformace je popsána blíže v kapitole 4.

K problému výpočtu lopatkové mříže lze tedy přistoupit v zásadě dvěma metodami. Umístění velkého avšak konečného počtu lopatek do mříže a následné

vyhodnocení proudového pole v okolí lopatky nacházející se ve středu této lopatkové mříže. Další metodou výpočetně méně náročnější je využití periodičnosti lopatkové mříže a tuto vlastnost zakomponovat do koeficientů vlivu panelů.

Nevýhodou první zmiňované metody je výpočetní náročnost. Celkový počet panelů není závislý jen na diskretizaci profilu, ale také počtu lopatek „v nekonečné mříži“. Avšak její nespornou výhodou je jednoduchost její matematické formulace.

Alternativní metodou k tomuto výpočtu lopatkové mříže je předpoklad toho, že proudění kolem lopatek bude periodické. Následně lze využít vlastnosti goniometrických, resp. hyperbolických funkcí. Tedy při výpočtu se bude počítat proudění kolem jedné lopatky, avšak díky periodičnosti funkcí bude zajištěno ovlivnění panelu panely okolních lopatek. Nevýhodou tohoto přístupu je komplikovanější matematická definice a z hlediska výpočetní techniky nutnosti výpočtů goniometrických a hyperbolických funkcí - tedy výpočtu obecně iracionálních funkcí pomocí Taylorova rozvoje. Nicméně posledně zmíněný aspekt není při dnešních výpočetních výkonech problém.

7. Martensenova panelová metoda

Panelová metoda, kde na povrchu profilu jsou umístěny jako singularity potenciální víry, se v literatuře často označuje jako Martensenova panelová metoda na počest Ericha Martensena, jehož publikace [14] se stala stěžejním dílem tohoto typu panelových metod. Později tuto metodu značně rozšířil a zobecnil i na rotující mříže Lewis [10].

Základní rovnice Martensenovy panelové metody [14] lze napsat ve tvaru:

$$\frac{\gamma(m)}{2} + \oint K'(m, s)\gamma(s)ds = -v_\infty \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_m \cos\alpha_\infty + \left(\frac{dy}{ds} \right)_m \sin\alpha_\infty \right] \quad (7.1)$$

První člen udává vnitřní tečnou rychlost v nejbližším okolí panelu m , druhý člen je podobný členu z rychlostní formulace (kapitola 6.3.1) a udává vliv zbylé části profilu na panel m . Pravá strana rovnice udává tečnou složku rychlosti nenarušeného proudění k panelu m .

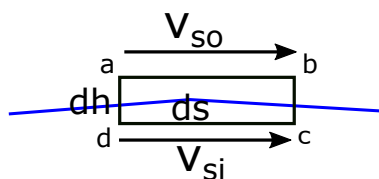
Z matematického hlediska se jedná o Fredholmovu integrální rovnici druhého druhu, pro níž je odvozen důkaz o existenci a jednoznačnosti netriviálního řešení [14]. Člen rovnice $K'(m, s)$ je označován jako „jádro integrální transformace“ a funkce $\gamma(s)$ je hledanou neznámou.

Je zřejmé z pravé strany rovnice 7.1, že Martensenova panelová metoda je definována s Dirichletovo okrajovou podmínkou, tedy tečná rychlost na povrchu profilu je nulová.

7.1 Okrajová podmínka

Přestože již bylo krátce o okrajových podmínkách zmíněno, je vhodné se na tuto Dirichletovu podmínku podívat podrobněji, resp. na fyzikální význam intenzity cirkulace v této panelové metodě.

Na obr. 7.1 je z povrchu profilu vyjmutý element o délce ds a intenzitě cirkulace $\gamma(s)$. Vyjmutý element lze obalit obdélníkem $abcd$. Cirkulace $\gamma(s)ds$ musí



Obrázek 7.1: Úsek profilu

být rovna cirkulaci získané integrálem podél křivky $abcd$. Uvažuje-li se obecně nenulová normálová rychlost, avšak stejně orientována, získá se rovnice:

$$v_{so}ds + v_ndh - v_{si}ds - v_ndh = \gamma(s)ds \quad (7.2)$$

Po úpravě se získá rovnice:

$$v_{so} - v_{si} = \gamma(s) \quad (7.3)$$

Uvažuje-li se tečná rychlost uvnitř profilu nulová $v_{si} = 0$, uvnitř profilu neproudí tekutina, tudíž rychlost je zde nulová. Pak je rychlost nad povrchem elementu rovna intenzitě cirkulace:

$$v_{so} = \gamma(s) \quad (7.4)$$

V případě nehybného profilu (resp. profilu bez unášivé rychlosti) lze dokázat, že normálová rychlost k profilu je nulová bez nutnosti zavedení další okrajové podmínky [14]. Tedy v této panelové metodě předpokládá, že uvnitř panelu se nenachází žádná singularita.

7.2 Koeficienty vlivu

Rovnici 7.1 je možné diskretizovat do tvaru:

$$\frac{\gamma(m)}{2} + \sum_s K(m, s)\gamma(s) = RHS_m \quad (7.5)$$

Člen $K(m, s)$ má nyní význam čistě geometrického koeficientu, výrazem RHS_m bude označována pravá strana (později dojde taktéž k její úpravě).

Lamb [9] odvodil funkci komplexního potenciálu pro nekonečnou řadu vírů o souřadnicích $(0, 0)$, $(\pm t, 0)$, $(\pm 2t, 0)$, ...:

$$F(z) = \frac{i\gamma}{2\pi} \ln \left(\sin \frac{\pi z}{t} \right) \quad (7.6)$$

Derivací se získá vztah pro rychlost:

$$-\frac{dF(z)}{dz} = v_x - iv_y = -\frac{i\gamma}{2t} \cdot \cot\left(\frac{\pi z}{t}\right) = -\frac{\gamma}{2t} \cdot \coth\left(\frac{\pi z}{t}\right) \quad (7.7)$$

Nicméně protože Lamb tento vztah odvodil pro řadu vírů na ose x , je třeba uvažovat pro tento případ $z = y + ix$, tedy zaměnit souřadnice os (a rychlosti)[15] tak, aby výsledný vztah byl v souladu s použitím v návaznosti na transformaci odvozenou v kapitole 4 podle [16, s. 145], lze vztah převést do tvaru:

$$v_y - iv_x = -\frac{\gamma}{2t} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{2\pi x}{t}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi y}{t}\right)}{\cosh\left(\frac{2\pi x}{t}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y}{t}\right)} \quad (7.8)$$

Tedy rychlost ve směru x :

$$v_x = \frac{\gamma}{2t} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi y}{t}\right)}{\cosh\left(\frac{2\pi x}{t}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y}{t}\right)} \quad (7.9)$$

A rychlost ve směru y :

$$v_y = -\frac{\gamma}{2t} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{2\pi x}{t}\right)}{\cosh\left(\frac{2\pi x}{t}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y}{t}\right)} \quad (7.10)$$

Na základě vztahu 6.5 lze odvodit koeficienty vlivu Martensenovy panelové metody pro lopatkovou mříž jako:

$$K(m, n) = (v_x \cos\beta_m + v_y \cos\beta_m) \Delta s \quad (7.11)$$

$$K(m, n) = \frac{\Delta s}{2t} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi y}{t}\right) \cos\beta_m - \sinh\left(\frac{2\pi x}{t}\right) \sin\beta_m}{\cosh\left(\frac{2\pi x}{t}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y}{t}\right)} \quad (7.12)$$

Za souřadnice x a y je třeba dosadit souřadnice souřadného systému posunutého do panelu n , neboť vyjádření funkce komplexního potenciálu 7.6 uvažuje „první“ vír v počátku souřadného systému. Tedy $x = \xi_m - \xi_n$ a $y = \eta_m - \eta_n$.

7.3 Rotující lopatková mříž

V rovnici 7.1 je pravá strana definována pro nerotující lopatkovou mříž. V případě rotující lopatkové mříže je zapotřebí přidat unášivou rychlost způsobenou rotací oběžného kola kolem své osy. Nicméně v okamžiku zavedení unášivé rychlosti dojde k porušení předpokladu, pro který platí, že mříž se v prostoru nepohybuje.

Z tohoto důvodu je pak nutné zavést dovnitř profilu korekci vnitřní vířivosti, která vzniká rotací profilu kolem osy turbíny.

Unášivá rychlost na polomeru r je ze známého vztahu (v netransformovaném souřadném systému):

$$u = \Omega r \quad (7.13)$$

V tuto chvíli je třeba zavést relativní souřadný systém pevně spojený s lopatkovou mříží, tedy souřadný systém unášený rychlostí u . Přestože v absolutním souřadném systému je proudění nevířivé tedy, $\omega = 0$, tak v relativním souřadném systému vzniká nenulová relativní vířivost. [10] Do transformované mříže se tak bude transformovat tato vířivost.

7.3.1 Relativní vířivost

Lewis [10] popisuje zavedení tzv. relativní vířivosti, která značně ovlivňuje proudění mezi lopatkami. Tato vířivost produkuje rotaci opačné orientace než je rotace lopatkové mříže. Zároveň tato vířivost značně ovlivňuje i tzv. skluzový úhel. Normálovou složku této relativní vířivosti k rotační proudové ploše podle Lewis [10, str. 114] lze zapsat:

$$\omega'(s, r\varphi) = 2\Omega \sin\gamma_s \quad (7.14)$$

Dále se předpokládá, že vířivost se nachází na ekvivalentních plochách, jak v transformované mříži, tak v netransformované mříži.

$$\omega(\xi)d\xi d\eta = \omega'(s, r\varphi)dsrd\varphi \quad (7.15)$$

Využitím základní definice transformace v diferenciální podobě z kapitoly 4 se dostane předpis pro relativní vířivost:

$$\omega(\xi) = 2\Omega r^2 \sin\gamma_s \quad (7.16)$$

Samozřejmě je nezbytné, aby r a γ_s měly známou závislost na souřadnici ξ , o této problematice je však blíže pojednáno v kapitole 4.

Vířivost je definována v souřadném systému $\xi - \eta$ jako:

$$\omega(\xi) = \frac{du}{d\xi} \quad (7.17)$$

Dosažením transformačního vztahu a vztahu pro vířivost 7.16 a následnou integrací Lewis získal vztah:

$$u = \Omega r^2 + \text{konst.} \quad (7.18)$$

Vzhledem k symetrii na náběžné a odtokové hraně lopatky se dostane finální vztah:

$$u_\omega = \Omega \left[r^2 - \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) \right] \quad (7.19)$$

Tato rychlost pak doplňuje rychlost nenarušeného proudění ve směru η na pravé straně rovnic panelové metody:

$$v_\eta = v_{\eta\infty} + u_\omega \quad (7.20)$$

7.3.2 Korekce vnitřní vířivosti

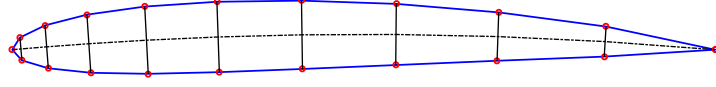
Jak již bylo řečeno na začátku kapitoly, základní Martensenova panelová metoda je navržena s předpokladem nerotující mříže. V předchozí kapitole byla zavedena relativní vířivost, která rotaci lopatková mříže zavádí. Nicméně rotace proudového pole je takto zavedena do celé vyšetřované oblasti bez ohledu na vnitřní část lopatek.

Je nezbytné tedy vnitřní vířivost v lopatkách odstranit, zavést korekci na pravé straně rovnice panelové metody. To lze opět provést více způsoby.

První možnost korekce vnitřní vířivosti se zakládá na principu, že vnitřní profil tenké lopatky se rozdělí na lichoběžníkové segmenty podél středové čáry profilu, viz obr. 7.2.

Každý segment profilu má charakteristickou vířivost odpovídající rovnici 7.16. Využitím vztahu 5.8 lze zapsat následující vztah:

$$\Gamma_I = \iint_S \Omega r^2 \sin \gamma_s dS \quad (7.21)$$



Obrázek 7.2: Rozdělní profilu na segmenty

Po provedení diskretizace podle obrázku 7.2 je velikost cirkulace v daném segmentu:

$$\Delta\Gamma_I = 2\Omega r^2 \sin\gamma_s \Delta S \quad (7.22)$$

Kde ΔS je plocha lichoběžníku definující segment. Využitím vztahů 7.9 a 7.10 lze sestavit vztah udávající rychlost vyvozenou vnitřní cirkulací segmentu na n -tý panel.

$$\Delta c_{\Gamma n} = \frac{1}{2t} \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{t}(\eta_m - \eta_c)\right] \cos\beta_m - \sinh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi_m - \xi_c) \sin\beta_m\right]}{\cosh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi_m - \xi_c)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(\eta_m - \eta_c)\right]} \Omega r^2 \sin\gamma_s \Delta S \quad (7.23)$$

Součtem indukovaných rychlostí od všech vnitřních segmentů se získá opravná rychlost do základní rovnice Martensenové metody.

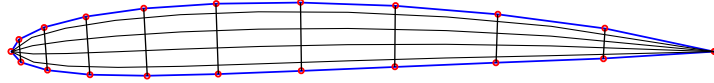
Lewis [10] do tohoto postupu ještě navíc zanáší korekci tloušťky profilu, neboť výše uvedené odvození má dostatečnou přesnost pouze pro tenké profily. Zavádí opravný koeficient jako poměr opravné rychlosti čisté cirkulace od vnitřní vířivosti podél profilu ku rychlosti nenarušeného rotujícího proudění.

$$k = \frac{\sum_{n=1}^{N_p} c_{\Gamma n} \Delta s_n}{\sum_{n=1}^{N_p} \left[r_n^2 - \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)\right] \sin\beta_n \Delta s_n} \quad (7.24)$$

Následně je nutné korekční rychlost tímto koeficientem vynásobit, tedy:

$$c_{\Gamma n} = k \cdot \sum \Delta c_{\Gamma n} \quad (7.25)$$

Tento přístup je závislý na geometrii lopatky a zavádí do korekčního členu další korekční člen. Proto je vhodnější rovnou rozdělit celou plochu profilu na menší na segmenty nejen podél středové čáry profilu.



Obrázek 7.3: Rozdělní profilu na jemnější segmenty

Z každého takového segmentu lze spočítat vliv na n -tý panel:

$$c_{\Gamma\xi_m} = \frac{1}{2t} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\omega_{ij} \sin \left[\frac{2\pi}{t} (\eta_m - \eta_{ij}) \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi_m - \xi_{ij}) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (\eta_m - \eta_{ij}) \right]} \quad (7.26)$$

$$c_{\Gamma\eta_m} = -\frac{1}{2t} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\omega_{ij} \sinh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi_m - \xi_{ij}) \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi_m - \xi_{ij}) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (\eta_m - \eta_{ij}) \right]} \quad (7.27)$$

Kde ω_{ij}

$$\omega_{ij} = 2\Omega r_{ij}^2 \Delta S_{ij} \quad (7.28)$$

7.4 Změna meridiální rychlosti

Jak bylo v úvodu této práce poznamenáno, při průchodu tekutiny turbínou se mění její meridiální rychlosti z důvodu změny průtočného průřezu turbíny (viz obr. 1.2). Vzhledem k tomu, že meridiální rychlost se tedy mění podél proudové čáry, pak se mění i rychlost ve směru s rotační proudové plochy.

Základní přístup k této problematice je změna rychlosti v_ξ ve směru ξ v rovnici Martensenovy panelové metody. Je však důležité poznamenat, že podle Lewise

[10], změna rychlosti ve směru v_ξ implikuje ekvivalentní rozdělení zdrojů podél celé roviny $\xi - \eta$.

$$q(\xi) = \frac{dv_\xi(\xi)}{d\xi} \quad (7.29)$$

Nicméně nyní nastává podobná situace jako v kapitole 7.3 s vnitřní vířivostí, tentokrát však s vnitřními zdroji. Tedy je nutné zavedení korekce „vnitřních zdrojů“ (Uvnitř profilu se nesmí nacházet žádná nenulová singularita.)

Prakticky to však znamená využití podobných rovnic, avšak s výpočtem odpovídajícím zdroji:

$$c_{q\xi m} = \frac{1}{2t} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{q_{ij} \sinh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi_m - \xi_{ij}) \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi_m - \xi_{ij}) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (\eta_m - \eta_{ij}) \right]} \quad (7.30)$$

$$c_{q\eta m} = -\frac{1}{2t} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{q_{ij} \sin \left[\frac{2\pi}{t} (\eta_m - \eta_{ij}) \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi_m - \xi_{ij}) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (\eta_m - \eta_{ij}) \right]} \quad (7.31)$$

7.4.1 Mohutnost zdrojů

V rovnici 7.29 je mohutnost zdroje definována jako změna rychlosti podél osy ξ , což při převedení zpět do netransformované mříže odpovídá směru s - směru meridiální rychlosti. Odvození změny rychlosti podél proudové plochy bylo provedeno v kapitole 3 a lze z něj využít rovnice 3.11 pro vyjádření meridiální rychlosti:

$$c_m(\xi) = \frac{Q}{2nr(\xi)b(\xi)} \quad (7.32)$$

Parametry n (počet proudových ploch), $r(\xi)$ a $b(\xi)$ jsou definovány při zavádění proudových ploch. Nesmí se však opomenout tuto rychlost převést podle kapitoly 4 do souřadného systému transformované lopatkové mříže. Vzhledem k tomu, že rychlost ve směru ξ není zatížena unášivou rychlostí, ani není způsobena žádná její změna vlivem rotující mříže (panelové metody), zavádí se přímo na pravou stranu rovnice panelové metody.

7.5 Upravená Martensenova panelová metoda

Spojením všech poznatků v předchozích několika kapitolách lze sestavit pravou stranu pro diskretizovanou rovnici Martensenovy panelové metody 7.5:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(m)}{2} + \sum_s K(m, s)\gamma(s) = & - (v_\xi(\xi) - c_{q\xi m} - c_{\Gamma\xi m}) \cos\beta_m \\ & - (v_{\infty\eta} - c_{q\eta m} - c_{\Gamma\eta m}) \sin\beta_m \\ & - \Omega \left[r_m^2 - \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) \right] \sin\beta_m \end{aligned} \quad (7.33)$$

Přestože pravá strana rovnice 7.33 vypadá na první pohled komplikovaně, při správném vyhodnocení nabývá konkrétní číselné hodnoty. Zároveň první člen rovnice $\frac{\gamma(m)}{2}$ lze přesunout do sumačního výrazu jako součást vazbového koeficientu $K(m, m)$.

Maticově lze pak takto upravená rovnice panelové metody zapsat jako:

$$\underline{K}\vec{G} = \overline{RH}\vec{S} \quad (7.34)$$

Kde \vec{G} je vektor jednotkových cirkulací $\gamma(m)$

8. Výpočet lopatek oběžného kola

Na základě poznatků shrnutých v předchozích kapitolách byl vytvořen základní výpočetní software v prostředí MathWorks MATLAB (popis viz [A](#)), který je součástí elektronické přílohy této práce.

8.1 Definice a cíl výpočetní úlohy

8.1.1 Definice úlohy

Pro výpočet lopatek oběžného kola je třeba nejprve definovat zadané parametry do výpočtu, které jsou

- geometrie proudových ploch (parametrické křivky)
- geometrie lopatek pro jednotlivé proudové plochy
- vstupní úhel β_1 pro jednotlivé plochy
- průtok turbíny Q
- úhlová rychlost oběžného kola Ω

8.1.2 Cíl úlohy

Jako nejzákladnější výstupní data z výpočetního modelu lze považovat:

- výstupní úhel β_2 z oběžného kola v jednotlivých proudových plochách
- rozložení tlaku na jednotlivých profilech
- výkon turbín bez započtení vazkých ztrát

8.2 Kuttova podmínka

Jako Kuttova podmínka byl implementován doplňkový vír, tedy taková cirkulace, aby byla splněna Kuttova podmínka. Pro celkovou cirkulaci platí [10]:

$$\sum_m \gamma(m) \Delta s_m = \Gamma_K \quad (8.1)$$

Tato rovnice je nezávislá, proto lze sečíst s Martensenovou rovnicí 7.33:

$$\sum_s (K(m, s) + \Delta s_m) \gamma(s_m) = RHS_m + \Gamma_K \quad (8.2)$$

Kde Γ_K je konstatní vír stejný pro všechny panely, který upravuje cirkulaci jednotlivých panelů tak, aby platila již zmíněná podmínka $\gamma(1) = \gamma(N_p)$. Nicméně člen RHS_m a člen Γ_K jsou na sobě nezávislé. Lze tedy provést rozdělení:

$$\sum_s (K(m, s) + \Delta s_m) \gamma_1(s_m) = RHS_m \quad (8.3)$$

$$\sum_s (K(m, s) + \Delta s_m) \gamma_2(s_m) = \Gamma_K \quad (8.4)$$

První soustavu rovnic lze řešit bez problémů. ve druhé soustavě se za Γ_K lze dočasně dosadit jednotkovou cirkulaci, čímž se získá γ_2 pro jednotkovou cirkulaci. Pro celkovou intenzitu víru na daném panelu bude platit kombinace těchto jednotlivých dílčích intezit:

$$\gamma(s_m) = \gamma_1(s_m) + \Gamma_K \cdot \gamma_2(s_m) \quad (8.5)$$

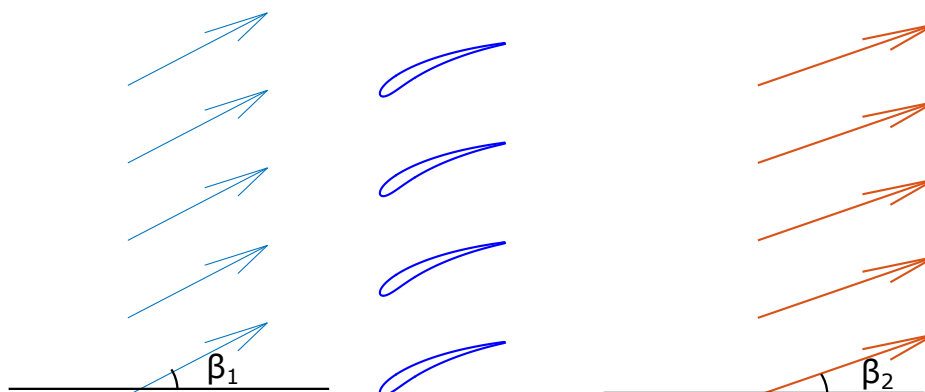
Toto však musí platit pro všechny panely, takže dosazením do vztahu 6.9 a následným upravením se získá vztah pro cirkulaci Γ_K :

$$\Gamma_K = -\frac{\gamma_1(1) + \gamma_1(N_p)}{\gamma_2(1) + \gamma_2(N_p)} \quad (8.6)$$

8.3 Výpočet úhlů β_1 a β_2

V rovnici panelové metody se nepřímo vyskytuje pouze úhel α_∞ , tedy úhel relativního proudění v případě, kdy by se v daném proudovém poli nevyskytovaly žádné lopatky. Jako zadaný parametry výpočtu se vyskytuje úhel β_1 , tedy

úhel proudění před oběžným kolem. Tento úhel je možný (stejně jako úhel β_2) dopočítat v dostatečné vzdálenosti, aby úhel nebyl zatížen prouděním kolem lopatek, od náběžných hran lopatek ze znalosti rychlostního pole v této vzdálenosti, viz obr. 8.1



Obrázek 8.1: Rychlostní pole před a za lopatkovou mříží

Úhel β_1 však patří mezi zadané parametry, kdežto úhel α_∞ zadaný není. Analytickou závislost mezi úhly α_∞ a β_1 není obecně možné vyjádřit, proto je nutné řešit úhel β_1 numericky. Vzhledem k předpokládanému monotónímu chování závislosti mezi úhly je možné pro výpočet použít obyčejnou relaxační iterační metodu.

8.4 Výpočet součinitele tlaku c_p

Mezi základní údaje o lopatkové mříži patří průběh součinitele tlaku po profilu. Součinitel tlaku je definován jako [13]:

$$c_p(x) = \frac{p(x) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \quad (8.7)$$

kde $p(x)$ je lokální statický tlak, p_∞ referenční statický tlak, $\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$ je dynamický tlak nenarušeného proudění.

Výpočet statického tlaku se provede pomocí Bernoulliho rovnice pro relativní souřadnice:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho u^2 \quad (8.8)$$

Tuto rovnici lze upravit a dosadit do rovnice 8.7, výsledná rovnice pro výpočet součinitele tlaku pak bude:

$$c_p(x) = 1 - \frac{v(x)^2 - u(x)^2}{v_\infty^2} \quad (8.9)$$

Z rovnice 7.4 je však lokální relativní rychlost na profilu dána jako: $v(x) = \gamma(x)$.

8.5 Výpočet výkonu z panelové metody

V předchozí kapitole byla uvedena Bernoulliho rovnice 8.10, ze které je možné vyjádřit statický tlak na panelu jako:

$$p(x) = \frac{1}{2}\rho(v_\infty^2 + u(x)^2 - v(x)^2) \quad (8.10)$$

Síla působící v normálovém směru na panel se vypočte jako:

$$F(x) = p(x)b(x)\Delta s(x) \quad (8.11)$$

Do točivého momentu turbíny však přispívá pouze tečná složka síly z hlediska oběžného kola, tedy složka ve směru souřadnice η , která se vypočítá jako:

$$F_t(x) = -F(x)\cos(\beta(x)) \quad (8.12)$$

Celkový moment k ose turbíny je určen jako:

$$M = \sum_x^{N_p} F_t(x)r(x) \quad (8.13)$$

Výkon se tedy spočte:

$$P = M\Omega \quad (8.14)$$

9. Výsledky metody

9.1 Zadání modelového výpočtu

Vstupní parametry modelového výpočtu byly v dané proudové ploše zvoleny následovně:

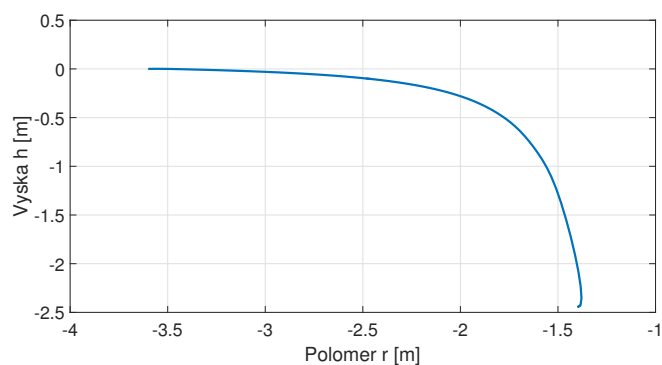
Meridální rychlost na vstupu (c_{m1})	$15ms^{-1}$
Počet lopatek (N)	6
Úhel nastavení lopatek (λ)	30°
Úhel prohnutí lopatek (θ)	40°
Délka lopatek (λ)	$1,55m$
Vstupní výška lopatky (b_1)	$1m$

Tabulka 9.1: Vstupní parametry modelového výpočtu

Ostatní parametry byly v průběhu výpočtů měněny.

9.1.1 Volba proudové plochy

Pro modelový výpočet byla zvolena proudová plocha, jejíž tvořící křivka je na obrázku 9.1.



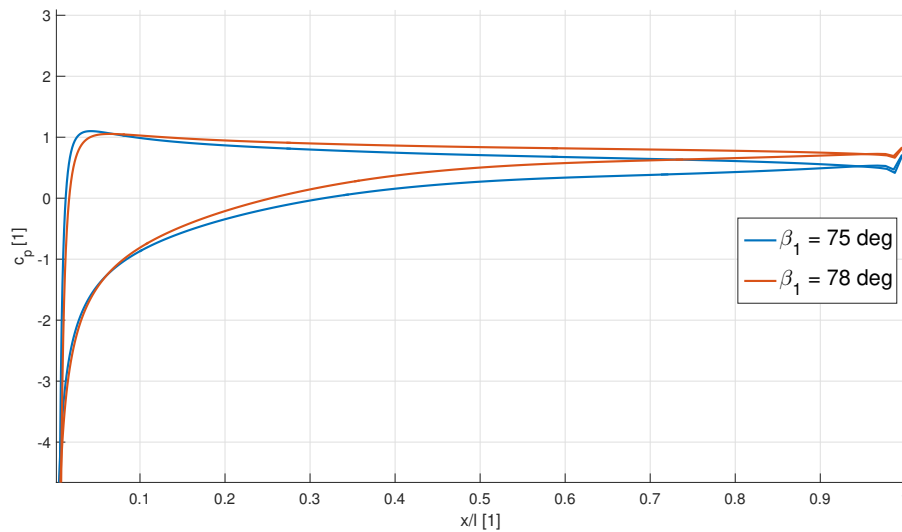
Obrázek 9.1: Tvořící křivka rotační proudové plochy

9.1.2 Volba profilu

Pro ověření a provedení testovacích výpočtů byl zvolen parametrický turbínový profil *C4*, jehož středová čára byla zadána parametrickou rovnicí s parametry: úhel zakřivení a tloušťka profilu. Samotná diskretizace (rozdělení profilu na panely) bude diskutováno v kapitole 9.4.

9.2 Součinitel tlaku

Byl proveden modelový výpočet v jedné proudové ploše při změně úhlu nabíhajícího proudění (obr. 9.2) a při změně otáček, resp. úhlové rychlosti (obr. 9.3).

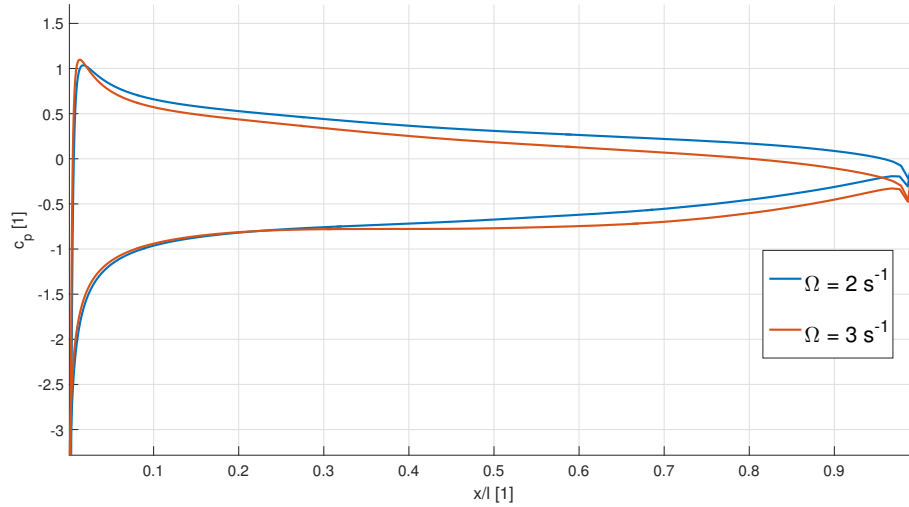


Obrázek 9.2: Součinitel rozložení tlaku na profilu při $\Omega = 5s^{-1}$

9.3 Srovnání výkonů

Z obrázků v předchozí kapitole je patrné, že byly provedeny celkem 4 modelové výpočty. Výsledky jednotlivých výpočtů jsou v tabulce 9.2

Jako jednu z nejzákladnějších možností validace výsledků je srovnání vypočtených výkonů z panelové metody a z rychlostních trojúhelníků, viz tabulka 9.2.


 Obrázek 9.3: Součinitel rozložení tlaku na profilu při $\beta_1 = 65^\circ$

Je vhodné poznamenat, že výkon je vztažen ke vstupní výšce lopatky $b_1 = 1m$, tudíž reálný výkon dodávaný takovýmto elementem lopatky by byl minimálně řádově o řád nižší.

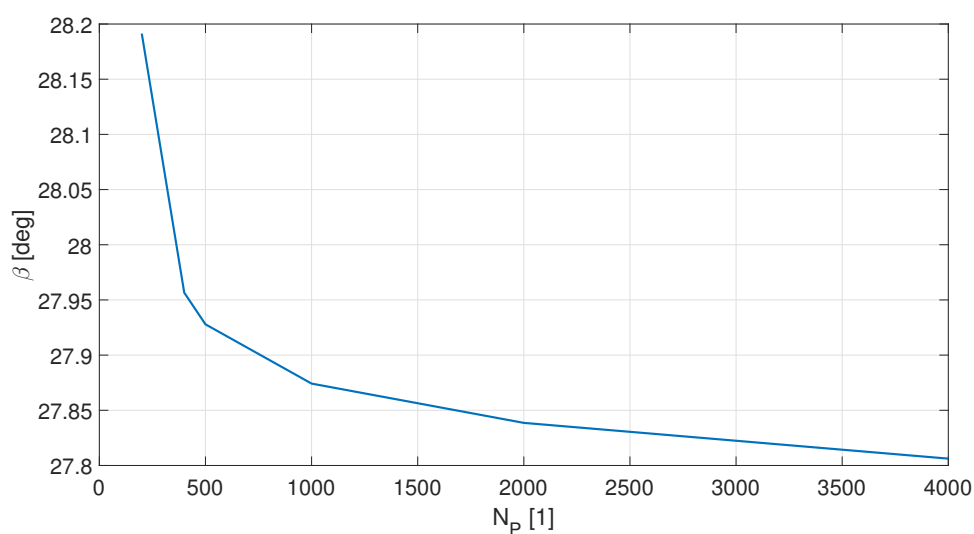
Úhel na vstupu $\beta_1 [^\circ]$	75°	78°	65°	65°
Úhlová rychlost $\Omega [s^{-1}]$	5	5	2	3
Úhel na výstupu $\beta_2 [^\circ]$	37,3221	37,6433°	25,7397	29,7143
Výkon z integrace tlaku [W]	$168,0 \cdot 10^6$	$249,3 \cdot 10^6$	$44,1 \cdot 10^6$	$53,1 \cdot 10^6$
Výkon z rychl. troj. [W]	$183,4 \cdot 10^6$	$243,3 \cdot 10^6$	$41,0 \cdot 10^6$	$58,2 \cdot 10^6$
Relativní odchylka [1]	0,08	0,02	0,07	0,09

Tabulka 9.2: Výsledky modelového výpočtu

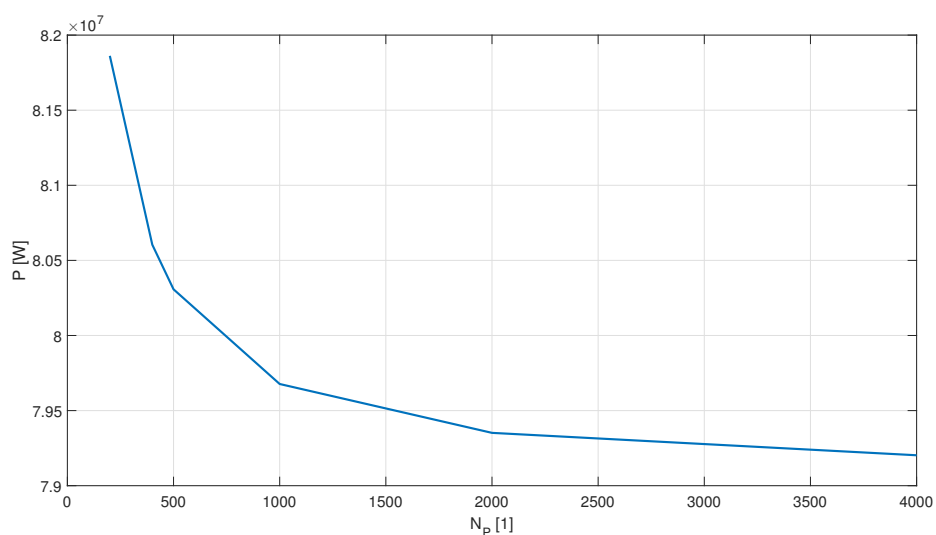
Nejzajímavějším poznatkem v tabulce 9.2, jak již bylo zmíněno, je nízká relativní odchylka výkonů vypočtených integrací rozložení tlaku podél profilu lopatky. Nicméně toto tvrzení nelze zobecnit na celou metodu, je nutná podrobnější verifikace. Je téměř skoro jisté, že v případě nestandardního obtékání lopatek turbíny bude panelová metody dávat značně zkreslené výsledky.

9.4 Vliv diskretizace na výsledky

Aby se určil vliv diskretizace lopatky na výsledky panelové metody. Byly zvoleny modelový výpočet s parametry $\beta_1 = 75^\circ$ a $\Omega = 5s^{-1}$. Zároveň byla „vypnuta“ korekce pro odstranění vnitřních singularit, neboť na její diskretizaci má vliv diskretizace profilu, tudíž korekce by mohla ovlivnit srovnání.



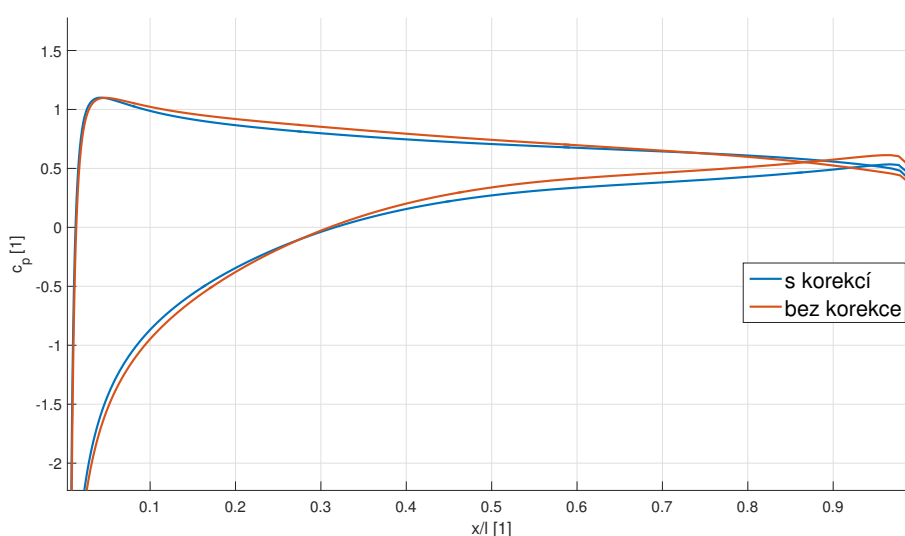
Obrázek 9.4: Změna úhlu β_2 za mříží při změně počtu panelů



Obrázek 9.5: Výkonu integrací tlaku podél profilu při změně počtu panelů

9.5 Vliv korekce vnitřní vířivosti na výsledky

Podobně jako v předchozí kapitole, aby se určil vliv korekce, byl zvolen model s parametry: $\beta_1 = 75^\circ$ a $\Omega = 5s^{-1}$. Na obr. 9.6 je srovnání grafů průběhů součinitele tlaků. Mnohem významější je však změna úhlu β_2 , který se změnil z $37,32^\circ$ bez korekce na $34,47^\circ$ s korekcí. Změna výkonu je v řádu procent (s korekcí $166,5 \cdot 10^6 W$ při integraci tlaku podél profilu).



Obrázek 9.6: Srovnání součinitel tlaku c_p

Tuto korekci není příliš možné analyticky ověřit, pro ověření této korekce by bylo vhodné využít výpočet lopatek turbíny pomocí CFD programů.

10. Závěr

V této práci byl postupně popsán výpočet oběžného kola Francisovy turbíny. Byla provedena rešerše základních analytických postupů, resp. výpočtů pro zjednodušený návrh tvaru meridiálního řezu oběžného kola a v neposlední řadě také odhadu základního tvaru lopatek.

V části týkající se analytického výpočtu byla odvozena Eulerova turbínová rovnice, ostatní vzorce byly převážně empirického původu z literatury. Eulerovu turbínovou rovnici je však vhodné později použít při výpočtu výkonu turbíny panelovou metodou, jako možnost kontroly správné diskretizace a správného chování proudění v okolí lopatek. V případě rozdílu mezi výkony z Eulerovy turbínové rovnice a z panelové metody při konstantní meridiální rychlosti (předpoklad, se kterým byla Eulerova turbínová rovnice odvozena) je třeba ověřit návrh panelové metody. Empirické vztahy popsané v úvodních kapitolách je možné využít při návrhu vstupních parametrů do panelové metody, neboť je potřeba dosazovat hodnoty, které jsou pro dané použití vhodné.

Vzhledem k náročnosti výpočtů ve trojrozměrném prostoru bylo odvozeno konformní zobrazení splňující vhodné podmínky, do kterého je možné rozvinout proudovou plochu oběžného kola turbíny a následně řešit výpočet oběžného kola jako úlohu v dvourozměrném prostoru. S přihlédnutím k používaným tvarům oběžných kol, byla transformace mezi rotační proudovou plochou a dvourozměrným prostorem odvozena co nejobecněji. Navržená transformace vyžaduje v obecném případě numerické řešení integrálu, nicméně v případě jednodušších tvarů proudových ploch, např. proudové plochy vytvořené rotací hyperboly kolem osy turbíny, je možné analytického zjednodušení.

V rámci odvození vhodné panelové metody byl nastíněn stručný úvod do problematiky potenciálního proudění, které má uplatnění nejen při obtékání těles, ale např. i v teoretické akustice. Byla shrnuta základní problematika panelových metod a rozebrány nejčastější možné problémy při jejím užití. Při odvozování panelové metody nebyly opomenuty korekce vnitřní vířivosti a vnitřích zdrojů.

Pomocí navržené a v základní podobě implementované panelové metody byl

proveden modelový výpočet. Byla provedena základní diskuze nad výsledky, avšak pro verifikaci panelové metody je zapotřebí srovnávacích výsledků např. z CFD. Samozřejmě je zapotřebí při verifikaci vzít v úvahu, že tento model pracuje s ne-
vazkým prouděním, tedy v případě malých kanálů mezi lopatkami, což vzhledem k obecnému konformnímu zobrazení není vyloučené. Výsledky budou proti realitě, či CFD značně zatíženy chybou.

Literatura

- [1] WAGNER, H.-J., MATHUR, J. *Introduction to Hydro Energy Systems: Basics, Technology and Operation*. Berlin: Springer, 2011. ISBN 9783642207082.
- [2] *Francis Turbines* Heidenheim: Voith Siemens Hydro, 2002.
- [3] DIXON, S.L. *Fluid Mechanics, Thermodynamics of Turbomachinery*. 5. ed. Boston: Elsevier-Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN 0750678704.
- [4] MELICHAR, J., BLÁHA J., VOJTEK, J. *Malé vodní turbíny: konstrukce a provoz*. Praha: České vysoké učení technické, 1998. ISBN 8001018080.
- [5] DICK, E. *Fundamentals of Turbomachines*. New York: Springer, 2015. ISBN 9789401796262.
- [6] TURTON, R. K. *Principles of Turbomachinery*. 2. ed. Angleterre: Chapman and Hall, 1995. ISBN 0412602105.
- [7] KORPELA, S. A. *Principles of Turbomachinery*. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2011. ISBN 9780470536728.
- [8] LEWIS, R. I. *Turbomachinery Performance Analysis*. New York: Wiley, 1996. ISBN 0470235969.
- [9] LAMB, Horace. *Hydrodynamics*. 6th ed. New York: Dover Publications, 1945.
- [10] LEWIS, R. I. *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. New York: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521017541.
- [11] CEBECI, T, et. al. *Analysis of Low-Speed Unsteady Airfoil Flows*. New York: Horizons Publishing Inc., 2005. ISBN 3540229329.
- [12] CAMPBELL, R. G. *Foundations of Fluid Flow Theory* Reading: Addison-Wesley, 1973.

- [13] KATZ, Joseph. *Low-Speed Aerodynamics. 2 ed.* Cambridge: University Press, 2000. ISBN 0521665523.
- [14] MARTENSEN, E. *Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1959, Vol. 3, str. 235-270
- [15] MINASSIAN, L. M. *A Study on Multielement Cascades and Airfoils* ASME. Journal of Fluids Engineering, 1976, Vol. 2, str. 208-215
- [16] DWIGHT, H. B. *Tables of Integrals and Other Mathematical Data, 3. ed.* New York: Macmillan, 1957

A

Popis programu

Ve výpočetním programu je implementováno základní jádro panelové metody popsané ve druhé polovině této práce. V rámci tohoto softwaru byl vytvořen i transformační objekt, který zajišťuje transformace pro obecně definovanou rotační proudovou plochu.

Základní program se skládá z těchto souborů (funkcí):

- *Transformation* - objekt, jehož konstruktorem se předá parametricky zadaná křivka a následně zajišťuje transformace mezi souřadnými systémy s ohledem na efektivitu
- *generateProfile* - funkce, která na základě vstupních parametrů vytvoří profil C4, provede správné natočení, diskretizaci (vč. diskretizace segmentů a výpočtu dílčích ploch).
- *prepareGeometry* - na základě vstupních dat (z *generateProfile*) vytvoří matici koeficientů vlivu, vypočítá jednotkové korekce
- *panel_method* - implementace samotné panelové metody, jejími vstupy jsou parametry proudění a geometrie (výstup z funkce *prepareGeometry*)

Při návrhu tohoto software bylo přihlédnuto k možnému využití při optimalizaci, proto byly některé dílčí výpočty (např. výpočty na geometrii) oddělené od základního kódu panelové metody.

V rámci elektronické přílohy je umístěno i vzorové použití softwaru, vč. příkladu definici parametrické křivky (označené *example_*).