

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

Katedra hydrauliky a hydrologie

---

MODELOVÁNÍ PONOŘENÉHO TURBULENTNÍHO PAPRSKU  
MODELLING OF SUBMERGED TURBULENT JET

Bakalářská práce



Zpracoval: Petr Šplíchal

Studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Vodní hospodářství a vodní stavby

Školitel: Ing. Petr Sklenář, Ph.D.

**Praha 2016**



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Šplíchal

Jméno Petr

Osobní číslo:

Zadávací katedra: Katedra hydrauliky a hydrologie

Studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor: Vodní hospodářství a vodní stavby

### II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce: Modelování ponořeného turbulentního paprsku

Název bakalářské práce anglicky: Modelling of submerged turbulent jet

Pokyny pro vypracování:

Ponořený paprsek a jeho vymezení v problematice turbulentních proudění. Využití vhodných simulačních nástrojů pro popis základních hydrodynamických charakteristik ponořeného paprsku, diskuze o vlivu diskretizace popisu. Porovnání výsledků simulace s dostupnými poznatky o problematice

Seznam doporučené literatury:

V. Tesař (1996): Mezní vrstvy a turbulence. Vydavatelství ČVUT Praha.

Jméno vedoucího bakalářské práce: Ing. Petr Sklenář, Ph.D.

Datum zadání bakalářské práce: 22. 2. 2016 Termín odevzdání bakalářské práce: 23. 5. 2016

.....  
Podpis vedoucího práce

.....  
Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v bakalářské práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

.....  
Datum převzetí zadání

.....  
Podpis studenta (ky)

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Modelování ponořeného turbulentního paprsku vypracoval samostatně pod vedením pana Ing. Petra Sklenáře, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

V Praze dne: 16. května 2016

.....  
Petr Šplíchal

## PODĚKOVÁNÍ

Rád bych touto cestou poděkoval vedoucímu práce panu Ing. Petru Sklenářovi, Ph.D. za jeho podnětné rady, věcné připomínky, poskytnutou literaturu, ochotu a trpělivost při psaní této práce.

V Praze dne: 16. května 2016

.....  
Petr Šplíchal

## ABSTRAKT

Tato práce se zabývá popisem a modelováním ponořeného turbulentního paprsku tekutiny pomocí modelů  $k-\varepsilon$  (Standard, RNG, Realizable) a  $k-\omega$  (Standard, SST, BSL). Popis turbulentního paprsku obsahuje vymezení problematiky paprsku v oblasti turbulentního proudění a je doplněn základními příklady výskytu a využití turbulentních paprsků tekutiny. Krátká část práce je věnována základním principům matematického modelování turbulence se zaměřením na použité modely. Obdržené výsledky jsou porovnány s experimentálně stanovenými výrazy popř. se vztahy, jejichž platnost byla ověřena experimentálním měřením. Pro model, jenž poskytl nejlepší výsledky, jsou uvedeny základní rovnice popisující rozdělení rychlostí tekutiny (vody) paprsku.

<b>Téma práce:</b>	Modelování ponořeného turbulentního paprsku
<b>Topic:</b>	Modelling of submerged turbulent jet
<b>Příbuzné termíny a synonyma:</b>	Modelování turbulentního proudění
<b>Related terms or synonyms:</b>	Turbulent flow modelling
<b>Nadřazené obecnější termíny:</b>	Turbulentní proudění, volná smyková turbulence
<b>Broader terms:</b>	Turbulent flow, Free shear flow
<b>Podřazené podrobnější termíny:</b>	Kruhové paprsky, osově symetrické paprsky
<b>Narrower terms:</b>	Round jets, Axisymmetric jets

## ABSTRACT

This work deals with the description and modelling of turbulent submerged jet of fluid using the  $k-\varepsilon$  models (Standard, RNG, realizable) and  $k-\omega$  models (Standard, SST, BSL). Description of turbulent jet contains a definition of the problem of turbulent flow and is completed with basic examples of occurrence and application of turbulent jets. A short part is devoted to the basic principles of mathematical modelling of turbulence focusing on used models. Obtained results are compared with experimentally determined expressions respectively relationships whose validity was verified by experimental measurements. The fundamental equations of velocity distribution in the fluid (water) jet are provided for a model which suits the best.

## Obsah

ÚVOD.....	9
ZÁKLADNÍ POJMY A DEFINICE .....	10
SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN .....	12
TURBULENCE .....	13
1.1 Atributy turbulence .....	13
1.2 Druhy turbulentních proudění .....	15
1.3 Průměrné hodnoty .....	17
1.4 Intenzita turbulence a kinetická energie.....	17
1.5 Vzájemná podobnost proudění.....	17
1.6 Turbulentní měřítka .....	18
1.7 Energetická kaskáda .....	21
1.8 Energetické spektrum.....	22
1.9 Přechod laminárního do turbulentního proudění.....	24
PAPRSEK TEKUTINY.....	26
2.1 Použití turbulentních paprsků .....	26
2.2 Výskyt turbulentních paprsků .....	29
2.3 Pronikání jedné tekutiny do druhé.....	30
2.4 Rozdělení paprsků .....	32
ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI TURBULENTNÍCH PAPERKŮ .....	35
3.1 Popis proudění v turbulentním paprsku .....	35
3.1.1 Oblast vývinu proudění .....	36
3.1.2 Oblast vyvinutého proudění.....	38
3.1.3 Vzájemná podobnost.....	39
3.1.4 Linie konstantní velikosti rychlosti .....	40
3.1.5 Vstupní úhel.....	41
3.1.6 Virtuální počátek .....	42
3.1.7 Základní popis rychlostí v paprsku .....	43
3.2 Experimentální výsledky.....	46
3.2.1 Vztahy pro výpočet maximální rychlosti .....	46
3.2.2 Vztahy pro výpočet průtoku .....	48
3.3 Tollmienovo a Görtlerovo řešení.....	49
3.3.1 Pohybové rovnice .....	49
3.3.2 Tollmienovo řešení .....	49
3.3.3 Görtlerovo řešení .....	51

MODELOVÁNÍ TURBULENCE .....	54
4.1 Základní přístupy modelování turbulentního proudění .....	54
4.1.1 Metoda přímé numerické simulace (DNS - Direct Numerical Simulation) .....	54
4.1.2 Metoda konečných vírů (LES – Large Eddy Simulation) .....	55
4.1.3 Metoda Reynoldsova časového středování Navier-Stokesových rovnic (RANS Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations) .....	55
4.2 Rozdělení proudění .....	56
4.3 Základní rovnice popisující proudění.....	57
4.4 Statistické modely turbulence .....	58
4.4.1 Reynoldsova rovnice .....	58
4.4.2 Reynoldsovo napětí.....	59
4.4.2 Boussinesquova hypotéza .....	60
4.4.3 Dvourovnicové modely turbulence (FLUENT) .....	61
MODEL TURBULENTNÍHO PAPRSKU.....	64
5.1 Popis tvorby modelu .....	64
5.2 Pre-Processing .....	64
5.2.1 Tvorba geometrie .....	64
5.2.2 Tvorba výpočetní sítě .....	65
5.2.3 Nastavení okrajových podmínek.....	66
5.2.4 Nastavení parametrů modelu .....	67
5.2.5 Nastavení řešiče .....	68
5.3 Simulace .....	68
5.4 Post-processing .....	69
5.4.1 Vyhodnocování výsledků.....	69
5.2 Zpracování výsledků modelu $k-\varepsilon$ Standard .....	73
ZÁVĚR .....	78
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY .....	80
SEZNAM OBRÁZKŮ .....	82
SEZNAM GRAFŮ A TABULEK.....	86
SEZNAM PŘÍLOH.....	87



## ÚVOD

Výzkumem turbulentních paprsků tekutiny se lidé začali zabývat počátkem minulého století v souvislosti s rozvojem letectví, kde se zkoumalo především proudění vzduchu. Nicméně poznatky o proudění paprsku vzduchu lze aplikovat i na vodní paprsky.

Paprsek tekutiny se vyskytuje v případech, kdy dochází k pronikání tekutiny z určitého otvoru do objemu tekutiny. Na vodní paprsky lze tedy nahlížet jako na výtok otvorem. Téměř všechny známé případy paprsků lze považovat za ponořené, jelikož jsou v blízkosti zemského povrchu obklopeny vzduchem (tekutinou). Vyznačují se přenosem hybnosti a významným difúzním charakterem. Paprsky tekutiny patří do jedné skupiny označované jako volná smyková turbulence.

Existuje celá řada modifikací paprsků, avšak tato práce je orientována pouze na popis základních charakteristik proudění ponořeného turbulentního osově symetrického paprsku, vytékajícího z kruhové trysky do klidového prostředí, které se skládá z téže tekutiny a nedochází k ovlivnění proudění přítomností tuhé stěny či hladiny. V první části této práce je vymezena problematika paprsku tekutiny v rámci turbulence. Dále je zde uveden krátký výčet výskytu a použití paprsků tekutiny se základním rozdělením v rámci environmentální hydrauliky. Ve druhé části práce je výklad orientován na popis základních charakteristik proudění, který je doplněn o experimentální výrazy popř. matematické řešení (Tollmienovo a Görtlerovo). Pro matematická řešení jsou uvedeny základní vztahy a předpoklady jejich odvození, aby danou problematiku alespoň částečně objasnila. V poslední části textu je výklad zaměřen na popis matematického modelování turbulence včetně výčtu použitých modelů a popisu tvorby modelu ponořeného turbulentního paprsku. Na závěr jsou uvedeny vztahy pro popis průběhu rychlosti proudění v turbulentním ponořeném paprsku vycházející z výsledků modelu, který při srovnání s experimentálními výrazy poskytl nejlepší výsledky průběhu osových a průřezových rychlostí.

## ZÁKLADNÍ POJMY A DEFINICE

*Tekutina* – izotropní hmotné kontinuum, které bez ohledu na vazkost se za určitou dobu deformuje (*teče*) při působení sebemenší síly a je schopné samovolně obnovit svoji izotropii po každé možné deformaci svého tvaru, je-li čas k obnově izotropie dostatečně dlouhý. Tečné napětí mezi přilehlými částicemi je úměrné deformační rychlosti a mizí, přestane-li pohyb. Tekutiny se dělí na *kapaliny* a *vzdušiny*.

*Izotropie* – určité prostředí nebo látka, která má v daném bodě ve všech směrech tytéž vlastnosti.

*Ideální tekutina* – dokonale tekutá nevazká tekutina, jejíž částice je možno přesunovat konečnou rychlostí bez vynaložení práce. Může tedy téci. Nemá vlastní tvar a přijímá tvar nádoby, v níž je obsažena. Ve skutečnosti neexistuje, protože každá tekutina má určitou konečnou vazkost. Zavedení ideální tekutiny umožňuje jednodušeji odvodit některé základní zákony proudění.

*Skutečná tekutina* – tekutina, jejíž vazkost na rozdíl od ideální tekutiny není zanedbatelná.

*Newtonovská tekutina (kapalina)* – tekutina (kapalina), která se chová podle Newtonova zákona, tj. její tečné napětí je rovné součinu rychlostního gradientu a dynamické vazkosti, která se rychlostním gradientem nemění.

*Kapalina* – málo stlačitelná tekutina, která může mít volnou hladinu a při stálé teplotě nemůže v otevřené nádobě samovolně zvětšit svůj objem. Svůj tvar snadno mění a zaujímá jej podle tvaru nádoby. Vlivem zemské přitažlivosti zaplňuje vždy její spodní část. Při vytékání může tvořit kapky a v beztlížném prostoru zaujímá vlivem vzájemné soudržnosti molekul a povrchového napětí kulovitý tvar. Při vyšších teplotách přechází v plynné skupenství, při nižších v tuhé skupenství. Na rozdíl od vzdušin nepatrně podléhá vlivu změny tlaku a teploty.

*Vazkost (též viskozita)* – odpor tekutin proti změně tvaru, jehož velikost vyjadřujeme hodnotami *dynamické* nebo *kinematické* vazkosti. Opačná vlastnost je *tekutost* neboli *fluidita*.

*Střední průřezová (též profilová) rychlost* – charakteristická rychlost pro daný průřez, daná podílem průtoku a plochy průtočného průřezu. Zavedením tohoto pojmu považujeme potrubí nebo trubici za jediné proudové vlákno, ve kterém proudí médium v celém průřezu konstantní rychlostí. Obecně však jsou rychlosti proudění tekutiny v různých bodech průřezu různé.

*Rychlostní pole* – prostor (část prostoru), v jehož každém místě má vektor rychlosti jistou hodnotu.

*Laminární proudění* – částice kapaliny se pohybují v hlavním směru proudění v souběžných drahách bez fluktuací rychlostí, proudová vlákna jsou rovnoběžná a spojitá.

*Turbulentní proudění* – v přírodě nejběžnější typ proudění – dochází ke směšování částic z různých částí proudu, jehož pohyb je nahodilý. Vektory rychlosti pulsují co do velikosti i směru kolem statisticky středních hodnot.

*Ustálené proudění* (též *stacionární* nebo *permanentní*) – proudění, při němž je průtok stálý, jednotlivé vektory rychlosti nezávislé na čase, pouze na poloze uvažovaného bodu. Při ustáleném proudění proudí tekutina proudovou trubicí stejně, jako kdyby měla pevné stěny. Všechny částice, které jsou v daném okamžiku uvnitř proudové trubice, zůstávají v ní během celého pohybu. Ustálené proudění se dále dělí na *rovnoměrné* a *nerovnoměrné*.

*Neustálené proudění* (též *nestacionární*, *nepermanentní*) – průtok i střední průřezová rychlost jsou funkcemi času a dráhy, vektory rychlosti mění s časem svoji velikost.

## SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

$a$	Konstanta Tollmienova řešení	$M$	Hybnost paprsku tekutiny
$A$	Průtočná plocha	$M_0$	Počáteční hybnost paprsku
$b$	Poloviční šířka paprsku	$t$	Čas
$b'$	Poloviční šířka jádra paprsku	$T$	Absolutní teplota
$B$	Koeficient průběhu osově rychlosti	$T$	Časový interval
$C_K$	Kolmogorova konstanta	$V$	Objem
$d, D_0$	Průměr trysky	$\bar{x}$	Vzdálenost od ústí trysky
$E$	Kinetická energie proudu	$x_0$	Poloha virtuálního počátku
$F_i$	Vnější objemové síly	$\alpha$	Teplotní vodivost
$F$	Síla proudu paprsku	$\alpha'$	Koeficient strhávání tekutiny
$F_0$	Počáteční síla proudu paprsku	$\delta_{ij}$	Kroneckerovo delta
$F_{rd}$	Froudovo hustotní číslo	$\delta$	Šířka paprsku
$F_{vz}$	Vztlaková síla	$\varepsilon$	Množství disipované energie
$g$	Gravitační zrychlení	$\theta$	Úhel strhávání okolní tekutiny
$k$	Turbulentní kinemická energie	$\kappa$	Vlnové číslo
$K$	Koeficient síly proudu v paprsku	$\mu$	Dynamická molekulární viskozita
$l$	Směšovací délka	$\mu_t$	Turbulentní viskozita
$l_\eta$	Kolmogorovo délkové měřítko	$\nu$	Kinemická viskozita
$L$	Délkové měřítko turbulence	$\rho$	Hustota
$p$	Statický tlak	$\rho_S$	Hustota splavenin
$q$	Přírůstek průtočného množství	$\sigma$	Konstanta Görtlerova řešení
$Q$	Objemový průtok	$\sigma$	Směrodatná odchylka
$Q_0$	Počáteční objemový průtok (v trysce)	$\tau$	Smykové napětí
$r$	Poloměr paprsku tekutiny	$\tau_\eta$	Kolmogorovo časové měřítko
$r_i$	Relativní intenzita turbulence	$\tau_t$	Turbulentní vírová viskozita
$Re$	Reynoldsovo číslo	$\psi$	Stokesova proudová funkce
$S$	Koeficient úměrnosti	$\omega$	Specifická disipace energie
$U, V, W$	Složky vektoru rychlosti		
$u_{max}$	Maximální (osová) rychlost tekutiny		
$u_\eta$	Kolmogorovo měřítko rychlosti		
$u'$	Intenzita turbulentních fluktuací		
$\bar{u}'$	Časově středovaná složka rychlosti		
$U_J, U_0$	Vstupní rychlost		

## TURBULENCE

Slovo turbulence znamená *zmatek*, *nahodilost*, *nepravidelnost* či *bouřlivost*. Dosud nebyl nalezen úspěšný přístup k popisu a řešení turbulence, ačkoliv je zkoumána již déle než století. Turbulentní mechanismus transportu má dominantní postavení v naprosté většině vyšetřovaných případů proudění.

### 1.1 Atributy turbulence

Zkoumání turbulence se věnovala řada významných odborníků, avšak stále neexistuje uspokojivá definice turbulence. To, co považujeme za turbulenci, je proto lépe vyjádřit jako seznam vlastností, atributů, pomocí kterých můžeme identifikovat turbulentní proudění. Je v zásadě nutné vycházet z předpokladu, že turbulence je děj, proces, vlastnost proudění a nikoliv vlastnost tekutiny. [28]

Přijatelnějším východiskem pro definici je typická *chaotičnost*, *neuspořádanost* turbulentního pohybu. Dále je pro turbulenci typické, že se vyskytuje při *vysokých hodnotách Reynoldsova čísla*, nicméně tato okolnost může být jen stěží definičním znakem.



**Obr. 1.1a,b** Kresba turbulentního proudění - autor Leonardo da Vinci (kolem roku 1500) [28], obraz *Hvězdná noc* (patrné turbulentní struktury na obloze) - autor Vincent van Gogh (1889). [28]

Kromě výše zmíněných okolností je pro turbulenci charakteristické, že se jedná o pohyb *rotační*. Například vlny na vodě, ačkoliv budou vyvolány turbulentním větrem a mají tedy chaotický charakter, nejsou považovány za turbulentní, neboť pohyby v nich nejsou rotační.

Důležitá je rovněž *trojrozměrnost* turbulence – *prostorovost*. Vírové struktury se vyskytují v prostoru turbulentního proudového pole v náhodných místech a s náhodnou orientací. Z této skutečnosti vyplývá prostorovost vektorového pole fluktuací rychlosti.

Prakticky významnou vlastností je *difuzivita* turbulence – promíchávání částic a s tím spojený rychlý, intenzivní přenos hybnosti nebo kontaminantů. Tato vlastnost má zřejmě důležité praktické důsledky, tj. turbulence je charakterizována zvýšeným míšením tekutiny.

Vlastností, která má základní postavení, je *disipativní* charakter turbulence. Tento charakter totiž představuje mimořádně účinný mechanismus přeměny kinetické energie tekutiny na vnitřní tepelnou energii. Charakteristickým znakem procesu turbulentní disipace je, že probíhá v *kaskádě*, ve které se energie postupně předává vírovým strukturám stále menších rozměrů. Mechanismem, jenž umožňuje předávání energie, je deformace vírů.

Dalším z atributů turbulence je *nelinearita*. Turbulentní proudění je nelineární svou podstatou, již jeho vznik je podmíněn uplatněním nelinearit, kdy dochází k růstu malých poruch. Vývoj a interakce jednotlivých struktur v turbulentním proudovém poli lze popsat pouze nelineárním matematickým modelem.

Poslední charakteristikou turbulentního proudění je *kontinuita proudění*, která vychází z velikosti jednotlivých vírů. Nejmenší víry, které se vyskytují v proudění, jsou významně větší oproti molekulárnímu měřítku, a proto je možné považovat proudění za kontinuální.



**Obr. 1.2** Příklad turbulence v přírodě - North Pier, Tynemouth (U. K.).

## 1.2 Druhy turbulentních proudění

Na základě stupně idealizace nebo geometrických odlišností rozlišujeme několik typů turbulentních proudů: [4]

### 1. Homogenní turbulence

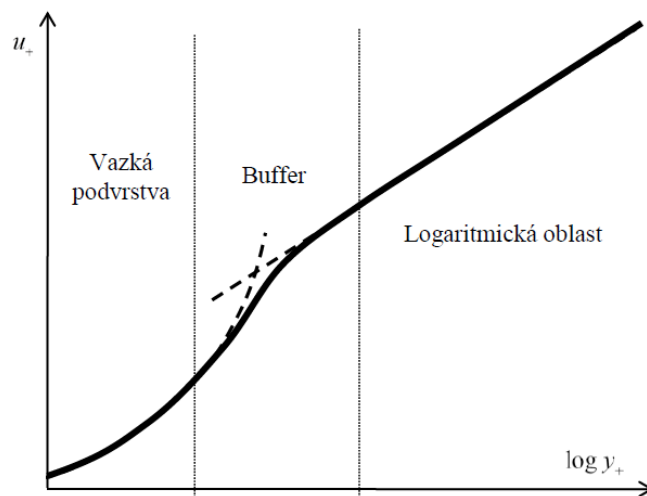
Jedná se o idealizovaný typ proudění, ve kterém jsou jednotlivé charakteristiky nezávislé na poloze. Homogenní turbulence se vyskytuje, pokud jsou gradienty středních rychlostí konstantní.

### 2. Izotropní turbulence

Opět se jedná o idealizovaný typ proudění, ve kterém jsou charakteristické vlastnosti proudění nezávislé na směru proudění. Pozorovat izotropní turbulenci je možné při proudění skrze mřížku.

### 3. Stěnová turbulence

Typ turbulence, na jejíž strukturu má přímý vliv existence tuhé stěny. Při proudění tekutiny podél pevné stěny vzniká v důsledku ulpívání tekutiny na stěně smyková oblast. Rychlost tekutiny na styku se stěnou se uvažuje nulová. Základním typem stěnové smykové oblasti je mezní vrstva, která vzniká v blízkosti stěny obtékané proudem tekutiny.



Obr. 1.3 Rychlostní profil turbulentní mezní vrstvy. [28]

### 4. Volná turbulence

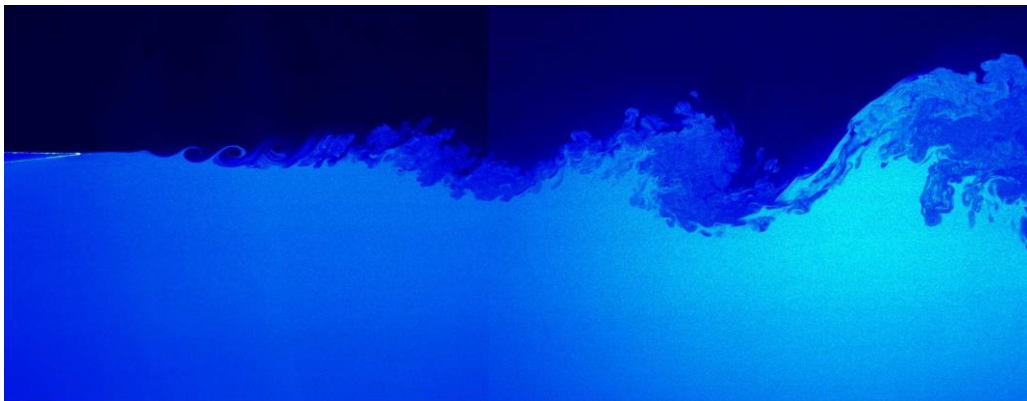
Jedná se o turbulentní proudění způsobované rozdílnými rychlostmi tekutiny při absenci pevné stěny. Označení „volná“ značí, že se jedná o proudění dostatečně vzdálené od stěn, tudíž nedochází k ovlivnění proudění z hlediska přítomnosti stěn.

Výskyt volných smykových vrstev je velice častý např. při obtékání těles nebo při proudění zakřivenými či neprizmatickými kanály nebo na hranici oblasti proudící tekutiny v neomezeném

prostoru. Volná smyková vrstva je téměř vždy nestabilní, což má za následek vznik vírových struktur. Pro smykové vrstvy bývá charakteristické, že mají velmi malý příčný rozměr ve srovnání s délkou proudění.



**Obr. 1.4** Paprsek (*Jet*) tekutiny vytékající z trysky. [28]



**Obr. 1.5** Směšovací vrstvy (*Mixing Layers*).



**Obr. 1.6** Obtékání překážky a tvorba úplavů (*Wakes*).

**Paprsek** (obr. 1.4) vzniká při interakci dvou tekutin, přičemž dochází k pronikání jedné kapaliny do druhé skrze jistý otvor (trysku). Na hranicích paprsku vznikají volné smykové vrstvy, které jsou zpravidla nestabilní a rychle se rozšiřují. Pokud nedochází k ovlivnění proudění přítomností pevných stěn či hladiny stávají se rychlostní profily samo-podobné (*self-similar*). [28]



**Směšovací vrstva** (obr. 1.5) je vrstva vytvořená na pomezí dvou proudících tekutin, ve které dochází vlivem turbulence k promíchávání.

**Úplav** (obr. 1.6) či oblast recirkulačního proudění vzniká v souvislosti s odtržením mezní vrstvy od stěny. [28]

### 1.3 Průměrné hodnoty

Vzhledem k náhodnému charakteru turbulentního proudění je nezbytné používat průměrné hodnoty. Průměrování může být provedeno několika způsoby:

- Průměrné hodnoty v čase (pro stacionární turbulenci)
- Průměrné hodnoty v prostoru (pro homogenní turbulenci)
- Průměrné hodnoty souboru o  $n$  pozorováních

### 1.4 Intenzita turbulence a kinetická energie

Intenzita turbulentních fluktuací (intenzita turbulence) je popisována jako odmocnina kvadrátu složek fluktuujících rychlostí:

$$u'_i = \sqrt{\overline{u_i'^2}} \quad (1.1)$$

Relativní intenzita turbulence charakterizuje relativní velikost amplitud fluktuací vzhledem ke střední hodnotě rychlosti.

$$r_i = \frac{u'_i}{\overline{U_i}} \quad (1.2)$$

Kinetická energie turbulence lze stanovit jako množství kinetické energie fluktuujících složek rychlosti:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (1.3)$$

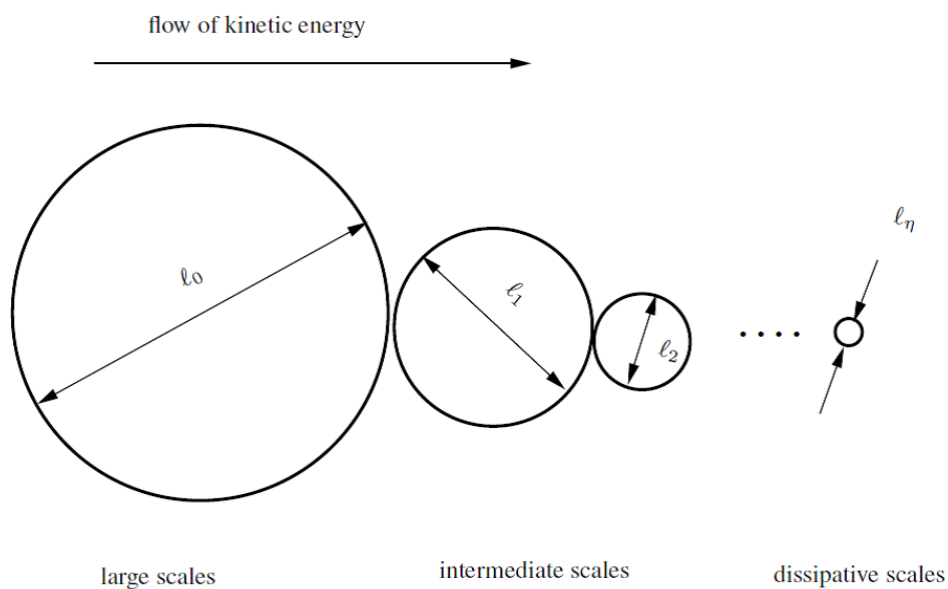
### 1.5 Vzájemná podobnost proudění

Pro jisté typy turbulentního proudění může být předpokládáno, že struktura proudění je podobná ve všech kolmých průřezech na směr proudění. Na základě tohoto předpokladu mohou být pohybové rovnice výrazně zjednodušeny. [4]

Jedním z těchto typů je kruhový paprsek, který vykazuje vlastnost samo-zachování (*self-preserving* jinak též *self-similarity*) ve vzdálenostech odpovídajících více než třiceti násobku průměru trysky  $d$ . Tato vlastnost turbulentních paprsků se nachází v oblasti vyvinutého proudění, kde splývají rychlostní profily po vynesení do bezrozměrného měřítka v jednu křivku.

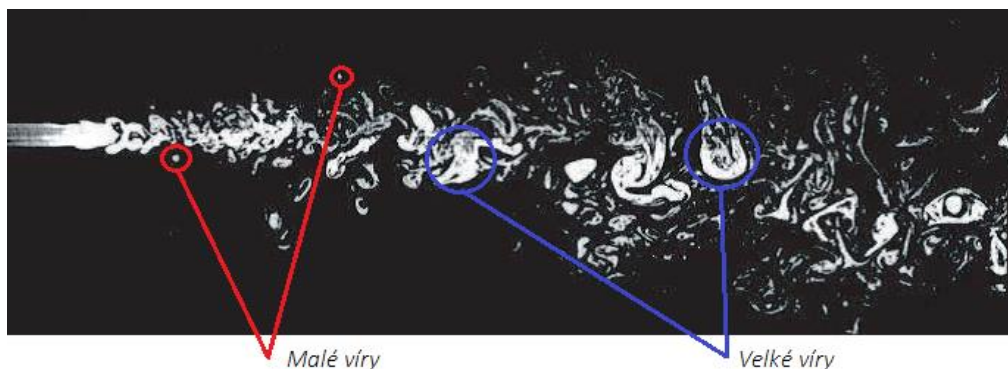
## 1.6 Turbulentní měřítka

Velikost největších měřítek je omezena fyzikálními parametry proudění. Největší délková měřítka postupně přebírají kinetickou energii proudu a předávají ji prostřednictvím kaskádového procesu (energetické kaskády) menším měřítkům. Množství kinetické energie, předávané za jednotku času od jednoho víru ke druhému, je stále stejné a nezávislé na velikosti víru. Při nejmenších měřících se vyskytují velké třecí síly (viskózní napětí) a dochází k přeměně kinetické energie na teplo. Třecí síly se vyskytují u vírů všech velikostí, ale při nejmenších měřících dosahují největší velikosti. Pro reálné případy proudění se předpokládá, že většina energie (zhruba 90%), která je předána velkým měřítkům, je při malých měřících dissipována na teplo. [10]



**Obr. 1.7** Kaskáda vírů různé velikosti. [10]

Velikost nejmenších měřítek se odvíjí od viskozity tekutiny, jejíž vliv postupně vzrůstá se zmenšujícími se měřítky. Za nejmenší měřítka jsou považována měřítka, při kterých dochází k disipaci kinetické energie na teplo. Avšak je nutné mít na paměti, že viskozita tekutiny neovlivňuje množství disipované energie. [18]



**Obr. 1.8** Příklady velkých a malých vírů. [28]

Množství disipované energie:

$$\varepsilon \sim U^3 / \delta \quad (1.4)$$

Za nejmenší měřítka jsou považována *Kolmogorova měřítka*. Kolmogorovo měřítko rychlosti je označováno jako  $u_\eta$ , měřítko délky jako  $l_\eta$  a časové měřítko jako  $\tau_\eta$ . Tato měřítka jsou určena pomocí viskozity  $\nu$  a disipace  $\varepsilon$ .

Kolmogorova měřítka:

$$\begin{aligned} u_\eta &= (\nu\varepsilon)^{1/4} \\ l_\eta &= \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \\ \tau_\eta &= \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.5a-c)$$

Důležitý poznatek vyplývající z Kolmogorových měřítek:

$$Re = \frac{u_\eta l_\eta}{\nu} = 1 \quad (1.6)$$

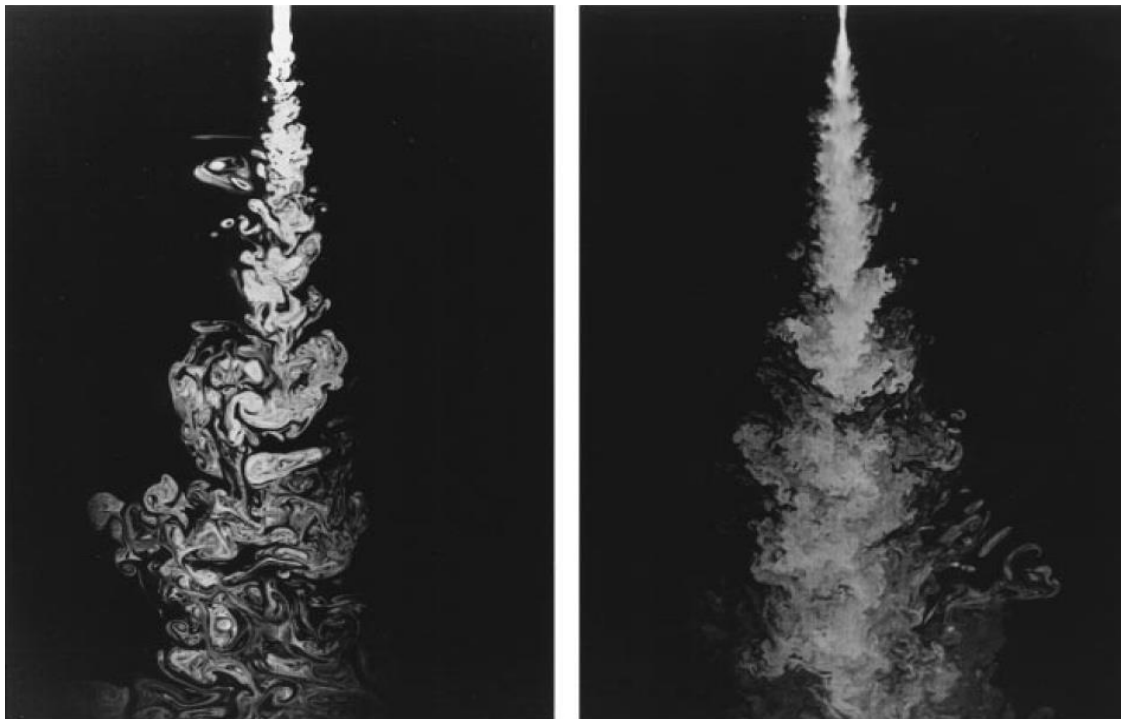
Hodnota Reynoldsova čísla rovna jedné dokládá, že pohyb při malých měřících je zcela viskózní a viskózní disipace odpovídá dodané energii. Dále je patrné, že účinky setrvačných a viskózních sil jsou zhruba stejné.

Množství disipované energie proudění je přibližně rovné energii, která je dodávána skrze největší měřítka do kaskádového procesu. Po dosazení předchozích vztahů (1.5a-c) do vztahu (1.6) obdržíme:

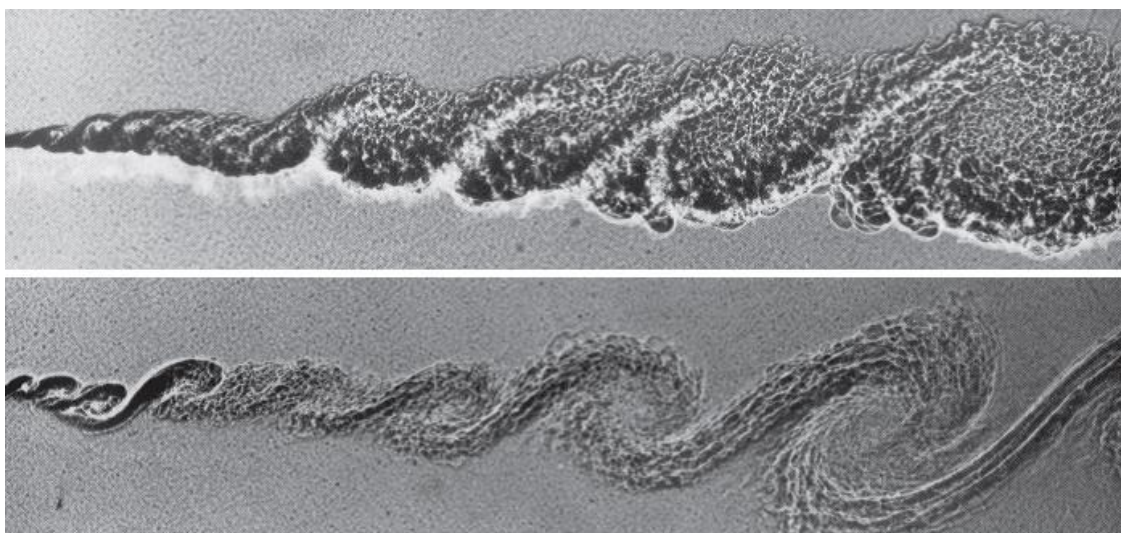
$$\begin{aligned} \frac{l_\eta}{\delta} &\sim Re^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{u_\eta}{U} &\sim Re^{-\frac{1}{4}} \\ \frac{\tau_\eta}{\delta/U} &\sim Re^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.7a-c)$$

Z výše uvedených vztahů je patrné, že pokud vzroste velikost Reynoldsova čísla, dojde ke zvýšení rozdílu mezi velkými a malými měřítka. Hlavní rozdíl mezi dvěma turbulentními proudy se stejnou velikostí nejmenších měřítek a rozdílnými Reynoldsovými čísly, spočívá ve skutečnosti, že turbulentní proudění při relativně malé hodnotě Reynoldsova čísla obsahuje poměrně hrubé struktury malých měřítek (obr. 1.9 nalevo). Avšak rychlostní profily či postupné rozšiřování paprsku jsou nezávislé na

velikosti Reynoldsova čísla. Ukázka proudění tekutiny v paprsku je uvedena na obr. 1.9 a příklad směšovacích vrstev je zobrazen na obr. 1.10.



**Obr. 1.9** Turbulentní paprsky při rozdílných velikostech Reynoldsova čísla - (nalevo) případ relativně malého Reynoldsova čísla ( $Re \sim 2,5 \times 10^3$ ), napravo případ relativně vysokého Reynoldsova čísla ( $Re \sim 10^4$ ). [11]



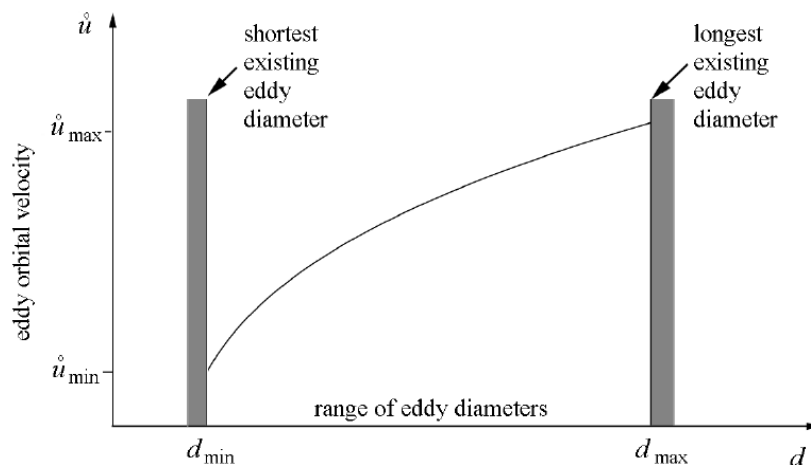
**Obr. 1.10** Příklad směšovacích vrstev. Horní proudění se odehrává při rychlostech 38 m/s a spodní proudění 100 m/s. Proudění probíhá zleva doprava. [21]

Při proudění tekutiny v osově symetrickém paprsku zůstává hodnota Reynoldsova čísla neměnná  $Re_\delta \equiv U\delta/\nu \equiv konst.$ , tj. Reynoldsovo číslo je nezávislé na poloze ve směru proudění. Pokud budeme

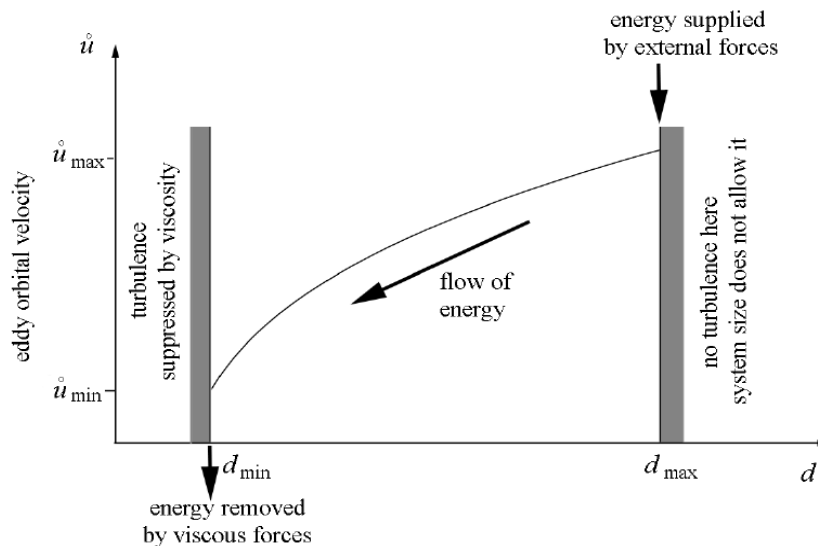
považovat Reynoldsovo číslo za kvalifikaci intenzity turbulence, zjistíme, že turbulentní charakter prouku je silně ovlivněn počáteční hybností toku.

### 1.7 Energetická kaskáda

V nejjednodušším případě lze považovat turbulenci za shluk mnoha vírů o rozdílné velikosti a síle. Dvě základní charakteristiky vírů, které mají velký význam na proudění tekutiny, jsou charakteristická vírová orbitální rychlost  $\hat{u}$  a charakteristický rozměr (průměr) víru  $d$ .



**Obr. 1.11** Orbitální rychlost víru  $\hat{u}$  versus délkový rozměr víru  $d$  v homogenní turbulenci. Největší měřítka dosahují největší orbitální rychlosti. [9]



**Obr. 1.12** Turbulentní energetická kaskáda. Na základě této teorie dochází k předávání energie od vnějších sil největším možným měřítkům. Postupně dochází k transportu energie skrze jednotlivé víry nejmenším měřítkům, kde je energie disipována viskozitou. [9]

Turbulentní pohyby zahrnují široké rozmezí měřítek od makroměřítka, kterým je energie dodávána, až po mikroměřítka, ve kterých dochází k disipaci energie v důsledku viskozity (Kolmogorov

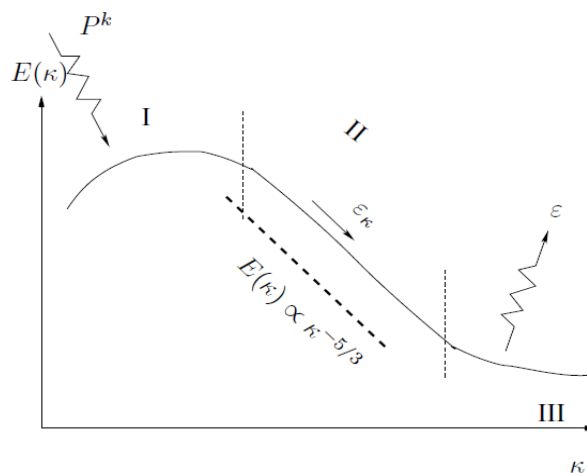
1941). Energie je v důsledku spolupůsobení vírů předávána od větších vírových struktur k menším. Tento proces je známý jako energetická kaskáda (*energy cascade*).

Za předpokladu stacionární turbulence (nemění se intenzita turbulence), je množství energie, předávané z jednoho velikostního měřítka následujícímu, neměnné. Z toho vyplývá, že žádné velikostní měřítko vírů nezvyšuje či nesnižuje množství energie v čase. Množství, ve kterém je energie dodávána největším možným měřítkům ( $d_{max}$ ) je *teoreticky* rovné množství energie, které je disipované v nejmenších měřítcích ( $d_{min}$ ).

Čím je množství energie dodané do systému větší, tím stálější (silnější) víry budou vytvořeny. Z obr. 11 je patrné, že s velikostí rozměru víru  $d$  vzrůstá velikost orbitální rychlosti  $u$ . Tato okolnost nelze zřetelně objasnit, a proto musí být přijímána jako výsledek teorie. Z této teorie vyplývá, že největší víry dosahují největší orbitální rychlosti a obsahují největší množství kinetické energie.

### 1.8 Energetické spektrum

V teorii turbulence se setkáváme s pojmem energetickém spektrum (*energy spectrum* nebo též *power spectrum*), jenž symbolizuje rozdělení kinetické energie na jednotku hmotnosti napříč různými délkovými měřítky. Na obr. 1.13 značí  $P^k$  množství energie, které je do systému dodáváno a  $\varepsilon$  značí množství disipované energie ze systému. Množství disipované energie  $\varepsilon$  je závislé na množství energie do systému dodané  $P^k$ .



**Obr. 1.13** Spektrum kinetické energie  $k$  turbulence. [10]

*POZN. Spektra jsou základní statistické charakteristiky signálů náhodného charakteru, které v sobě obsahují informaci o velikosti struktur. [28]*

**Oblast I.** – (oblast velkých vírů obsahujících energii)

V této oblasti se nacházejí velké víry, které přenášejí většinu energie. Tyto víry spolupůsobí se středním proudem, od kterého přebírají energii.

### **Oblast II.** – (transportní oblast)

Existence této oblasti je podmíněna plně vyvinutým turbulentním prouděním, tj. pokud je Reynoldsovo číslo dostatečně vysoké. Víry v této oblasti představují transportní střední oblast (*mid-region*). Turbulence v této oblasti je izotropní. Tato oblast je označována jako transportní oblast, jelikož zde dochází k přenosu energie z první oblasti do třetí oblasti.

### **Oblast III.** – (oblast malých izotropních měřítek)

V této oblasti jsou víry malé, izotropní a vyskytuje se zde disipace. Energie je postupně přeměňována z kinetické energie na teplo (vzrůstá teplota). Měřítko vírových struktur jsou popisovány pomocí Kolmogorových měřítek.

Vlnové číslo (*wave number*):

$$\kappa = \frac{2\pi}{\text{vlnová délka}} = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{d} \quad (1.8)$$

Vlnové číslo a vlnová délka jsou obdobou frekvence a periody v časové oblasti s tím rozdílem, že se jedná o vektorové veličiny orientované v prostoru.

Energie vírových struktur vyjádřená v diferenciálním tvaru pomocí vlnového čísla:

$$dE = E(\kappa) d\kappa \quad (1.9)$$

Rovnice (1.9) představuje příspěvek energie mezi sousedními měřítky v závislosti na vlnovém čísle.

Celkové množství kinetické energie  $E$  lze vyjádřit v závislosti na vlnovém čísle jako:

$$E = \int_{\kappa_{min}}^{\infty} E(\kappa) d\kappa = \frac{U^2}{2} \quad (1.10)$$

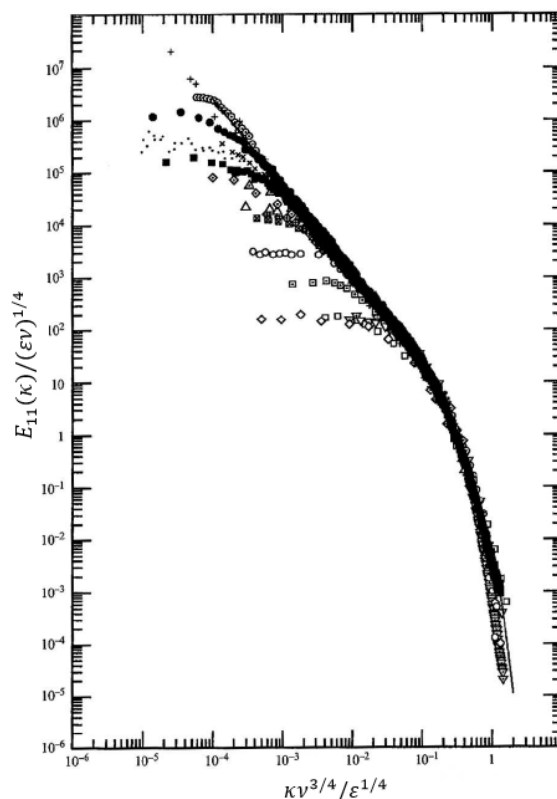
Význam výše uvedené rovnice (1.10) spočívá v rozdělení kinetické energie mezi jednotlivá vírové struktury (vlnová čísla) a jejich následné integraci. Spektrum kinetické energie je schematicky uvedeno na obr. 1.13 a experimentální hodnoty energetického spektra turbulence jsou uvedeny na obr. 1.14.

Spektrální přenos energie za jednotku času:

$$E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (1.11)$$

kde je  $C_K$  Kolmogorova konstanta, pro kterou platí  $C_K = 1,5$ . Výraz (1.11) je též známý jako *Kolmogorovův spektrální zákon* nebo *-5/3 spektrum*) a udává, že pokud se jedná o zcela turbulentní proudění (vysoké hodnoty Reynoldsova čísla), budou energetická spektra představovat ve druhé oblasti -5/3 pokles (obr. 1.13). Spektrum -5/3 velmi dobře popisuje přenos energie ve *druhé oblasti* (obr. 1.13). Na níže uvedeném obr. 1.14 je uvedena superpozice mnoha podélných energetických

spekter. Příčná linie, ve které se překrývají data v rozmezí  $10^{-4} < \kappa v^{3/4} / \varepsilon^{1/4} < 10^{-1}$  koresponduje s  $-5/3$  rozdělením.



**Obr. 1.14** Podélné energetické spektrum turbulence určené na základě mnoha pozorování v laboratoři. [9]

### 1.9 Přechod laminárního do turbulentního proudění

U laminárního proudění bylo prokázáno, že po překročení jisté velikosti rychlosti se proudění stává nestabilní a dochází k přechodu do turbulentního režimu proudění. Hodnota kritické velikosti rychlosti, při které dochází k nerovnováze, se odvíjí od charakteru proudění, typu a velikosti počátečních nerovnoměrností (rozmuchů). Nestabilita počíná v mezní vrstvě ve formě dvourozměrných vln, které jsou nestálé a následně se transformují na vlny trojrozměrné. Tento proces je velice rychlý, a proto přechod do turbulence probíhá na krátké vzdálenosti. Přechod do turbulence je charakterizovaný pomocí Reynoldsova čísla  $Re$ .

Reynoldsovo číslo udává poměr setrvačných a vazkých sil:

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U D}{\nu} \quad (1.12)$$

Při volné smykové turbulenci (paprsky) probíhá přechod do turbulentního proudění při velmi malých hodnotách Reynoldsova čísla (10 – 100). [4]



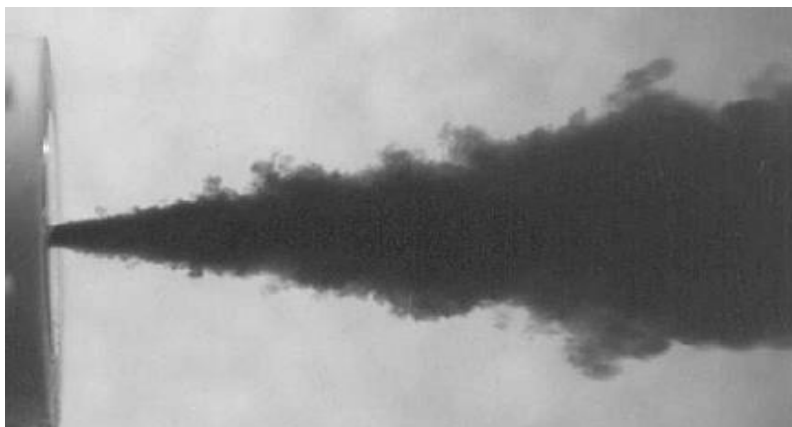


**Obr. 1.15** Přechod laminárního do turbulentního režimu proudění.

Pokud je  $Re$  proudu tekutiny vyšší oproti jeho kritické hodnotě  $Re_{cr}$  (reprezentované kritickou rychlostí), nemusí to jistě znamenat, že by laminární proudění nemohlo existovat, nicméně je nestabilní a malé poruchy mohou být příčinou přechodu do turbulentního režimu proudění. Na druhé straně, pokud je velikost  $Re$  menší než  $Re_{cr}$ , dochází k utlumení poruch vlivem viskozity tekutiny.

## PAPRSEK TEKUTINY

Paprsek je proud tekutiny (kapaliny či vzdušiny), který vytéká z jistého otvoru (např. trysky). Na základě druhu tekutiny v paprsku se rozlišují paprsky kapalné, plynné a několikafázové. Podle podmínek proudění se dělí paprsky na ponořené a volné. [16] Ponořené paprsky vytékají do shodného prostředí, zatímco volné paprsky vytékají do vzduchu při atmosférickém tlaku. Paprsky vznikají při interakci dvou tekutin. Na rozhraní vytékající tekutiny a okolní (paprsek-obklopující) tekutiny se vytvoří smykové vrstvy, které vystupují z hrany trysky a lineárně se rozšiřují ve směru proudění. Smykové vrstvy vymezují těleso paprsku, avšak jejich přesné určení není snadné v důsledku existence nestabilní, divergentní hranice mezi okolní a pronikající tekutinou. Rozeznáváme dva hlavní druhy paprsků - *turbulentní a laminární*.



**Obr. 2.1** Vodní paprsek vypouštěný z trysky do nádrže s vodou. [7]

*POZN.: Při pronikání jedné tekutiny do druhé, jež se nachází v klidu, způsobí rychlostní tření (velocity shear), vytvořené mezi pronikající a okolní tekutinou, turbulenci a promíchávání.*

### 2.1 Použití turbulentních paprsků

Turbulentní paprsky mají široké uplatnění ve vodním hospodářství. Mají výborné promíchávací vlastnosti (difúzní charakter), proto je lze použít při dávkování např. dezinfekčních činidel do daného objemu vody. Vedle difúzního charakteru, lze využít další vlastnosti proudění, kterou je přenos hybnosti proudu. Tato vlastnost může být využita při tréninku plavců (obr. 2.2a) v bazénech či ve speciálních vanách, kde jsou paprsky použity jako protiproud a simulují proudění vody v řece/moři. Hybnost proudu může být použita k masáži osob na koupalištích či v lázních. Při vhodné konfiguraci trysek a úpravě tvaru bazénu bývají ponořené vodní paprsky využívány na tzv. „divokých řekách“ k uvedení jistého objemu vody do pohybu. Hojně jsou využívány v energetickém průmyslu, kde dochází k výtoku paprsku z trysky na lopatky turbíny (obr. 2.5a), což má za následek uvedení oběžného kola do rotačního pohybu a následnému převedení mechanické energie na výrobu elektrického proudu

v generátoru. Využívají se při čištění potrubí (stokové sítě, drenážní potrubí), kde se do potrubí aplikuje tryska, ze které vytéká proud tekutiny (vody) na stěny potrubí, což má za následek odstranění ulpělých nečistot na vnitřní stěně potrubí.

Ve stavebnictví jsou využívány zejména v *geotechnice* (trysková injektáž) na zlepšení vlastností zeminy. Podstatou technologie je injektáž z vrtu do okolní zeminy pod vysokým tlakem (30-55 MPa). Paprsek tekutiny proudí skrze trysky a rozpojuje zeminu na úlomky nebo zrna, přičemž dochází k vzájemnému mísení zeminy s injektážní směsí, což vede k následnému vytvoření sloupů, lamel či jejich kombinací. [26] Dalším možným případem využití paprsků ve stavebnictví je *vzduchotechnika*, ve které se paprsky využívají k cirkulaci vzduchu v budovách. Na zámcích či náměstích tvoří paprsky vody okrasný prvek - fontány.

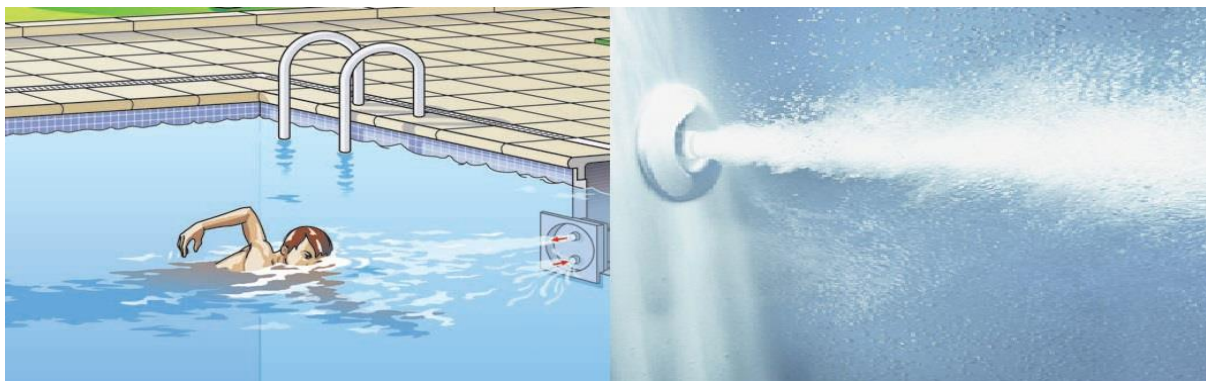
V *zemědělství* se používají vodní paprsky při zavlažování (zemědělských plodin či zvířat), při dávkování pesticidů, insekticidů nebo jiných látek z letadel nebo traktorů.

Značné využití nacházejí v *letectví*, kde byly nejpodrobněji zkoumány základní vlastnosti paprsků tekutiny (vzduchu), jelikož se vyskytují za motory letadel. Vedle leteckých motorů se paprsky vyskytují u běžných spalovacích nebo parních motorů.

Paprsky jsou využívány nejen lidmi, ale také živočichy. Například chobotnice využívá paprsku tekutiny vytlačovaného ze sifonu (tělesného orgánu), aby mohla uniknout predátorům. Dále může využít inkoust ke zmatení predátora – opět vypouštěného formou paprsku, kde se projevuje příznivá vlastnost, kterou je difúzní charakter (promíchání inkoustu s vodou).

Již ve starověku byly využívány paprsky tekutiny (vodní páry) v předchůdci parní turbíny zvaném *Aeolipile* (též *aeolipyle* či *eolipile*) - vynálezce *Héron z Alexandrie* (zvaný též *Méchanikos*). Jednalo se o první stroj přeměňující energii páry na rotační pohyb pomocí dvou trysek. Stroj se skládal z uzavřené nádrže s vodou, potrubí, rotující koule a dvou trysek. Voda v uzavřené nádobě byla přiváděna k varu, což postupně vedlo k produkci vodní páry, která byla přiváděna prostřednictvím potrubí do rotační koule s tryskami, z nichž postupně unikala vodní pára formou turbulentního paprsku. Paprsky vodní páry působí na rameni odpovídajícím jejich vzdálenosti, což má za následek otáčivý účinek síly (moment síly). O pár století později německý fyzik a matematik *Johann Andreas von Segner* vynalezl v 18. století reakční turbínu na stejném principu jako *Aeolipile*, přičemž místo vodní páry použil vodních paprsků.

Paprsky tekutiny jsou využívány v mnoha dalších případech při řezání kovů, foukání listů, v energetice, ve sprchách, na vodovodních řadech, v odstřikovacích zařízeních, při hašení požáru, na rozhánění demonstrujících davů a v mnoha dalších případech.



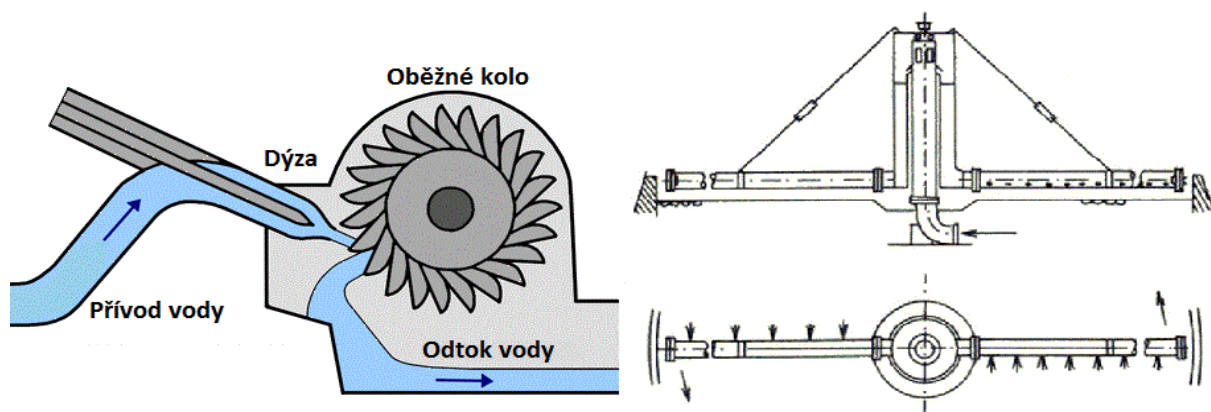
Obr. 2.2a,b Paprsek tvořící protiproud pro plavce (vlevo) a tryska masážní vany (vpravo).



Obr. 2.3a,b Ukázka obarvených paprsků (vlevo), (vpravo) ukázka proudového motoru dopravního letadla, proudový motor funguje na principu zákona akce a reakce (třetí Newtonův zákon).



Obr. 2.4a,b Trysková injektáž (vlevo) a Aeolipile (vpravo).



Obr. 2.5a,b Peltonova turbína (vlevo) a Segnerovo kolo (vpravo).

## 2.2 Výskyt turbulentních paprsků

Pozorovat turbulentní paprsky v přírodě není neobvyklé. Případem turbulentního paprsku může být vypouštění odpadních vod do moře (obr. 2.6b) popř. do řeky nebo při zaústění řeky do jezera nebo moře. Příkladem turbulentního paprsku může být vzduch vydechovaný nosem nebo ústy. Velryby při vynoření nad hladinu vydechují vzduch a zkondenzované vodní páry z otvoru umístěného na hřbetě ve formě *výtrysku* (turbulentní paprsek), podle kterého je dokonce možné rozlišit druh kytovce. [12]



**Obr. 2.6a,b** Asuánská přehrada - Egypt (vlevo) a vypouštění odpadních vod do moře (vpravo).



**Obr. 2.7a,b** Gejzír Strokkur na Islandu (vlevo) a hydrotermální průduch – *White smoker* (vpravo).

Výskyt turbulentních paprsků je spjatý s vulkanickou činností, při které dochází k ohřívání podpovrchové vody, která se nepravidelně dostává na povrch ve formě gejzíru (obr. 2.7a). V místech na mořském dně, kde se stýkají litosférické desky, je možné pozorovat hydrotermální průduchy (obr. 2.7b), které produkují velké množství vody obohacené o minerály a jsou významnou složkou tamního ekosystému. Příkladem turbulentních paprsků mohou být i *artéské vody* – vody s napjatou hladinou, kdy může při navrtání nepropustné vrstvy docházet k výtrysku vody na povrch. Turbulentní paprsky je možné pozorovat u spodních výpustí přehrad nebo při výtoku ze savek vodních elektráren (obr. 2.6a).

## 2.3 Pronikání jedné tekutiny do druhé

Příkladem pronikání jedné tekutiny do druhé mohou být odpadní vody vypouštěné z kanalizace do řek, jezer nebo oblaka kouře vystupující z komína do okolní atmosféry. V každém případě tekutina vytéká z relativně úzkého otvoru a vniká do většího objemu tekutiny s rozdílnými vlastnostmi (rozdílné rychlosti proudění, směru proudění, teploty atd.).

Jedná se o výtok otvorem, při kterém se rozlišují tři základní vlastnosti paprsků (tab. 1) - *hybnost*, působení *vztlakových sil* nebo působení *obou vlivů*. Další rozlišující charakteristikou paprsků může být průběh pronikání, který dělí paprsky na *souvislé* (nepřerušované) a *nesouvislé* (přerušované). [8]

**Tabulka 1:** Základní rozdělení paprsků

	<b>Nepřerušovaný průběh pronikání</b> (Continuous injection)	<b>Přerušovaný průběh pronikání</b> (Intermittent injection)
<b>Hybnost</b>	Paprsek ( <i>Jet</i> )	Přerušovaný paprsek ( <i>Puff</i> )
<b>Vztlak</b>	Oblaka ( <i>Plumes</i> )	Termální oblak ( <i>Thermal Plume</i> )
<b>Hybnost a vztlak</b>	Nadnášený paprsek ( <i>Buoyant jet or Forced Plume</i> )	Přerušovaný, nadnášený paprsek ( <i>Buoyant Puff</i> )

Hybnost proudu:

$$M = \rho u^2 A \quad (2.1)$$

Vztlaková síla:

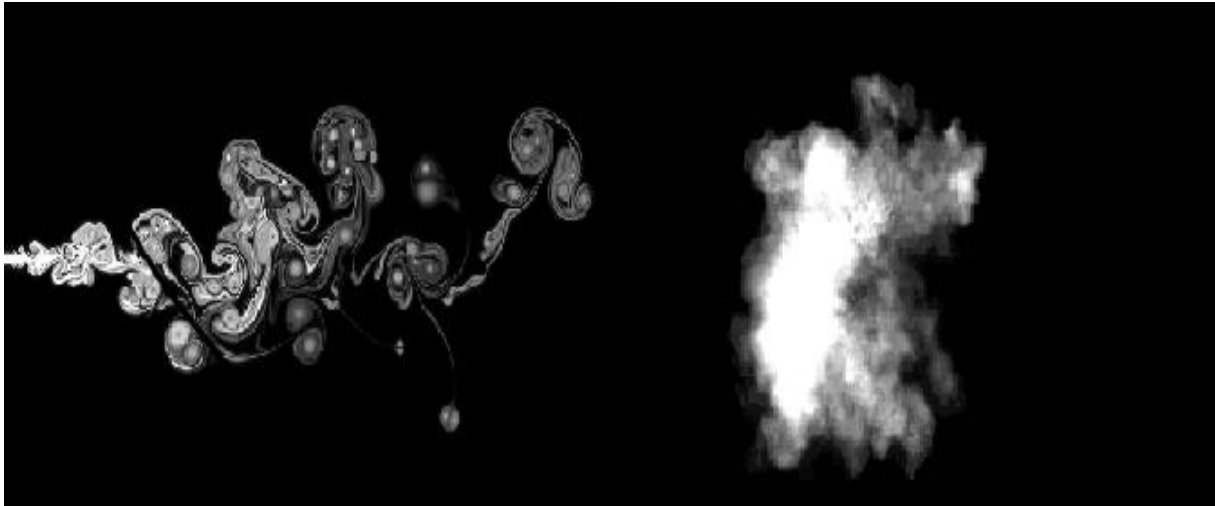
$$F_{vz} = (\rho_s - \rho) g V \quad (2.2)$$

Froudovo hustotní číslo (*Densimetric Froude number*)

$$Fr_d = \frac{u}{\sqrt{g' l_d}}$$

$$g' = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g \quad (2.3a-b)$$

Froudovo číslo je popisováno jako poměr setrvačných a vztlakových sil v proudu tekutiny. Froudovo číslo udává míru nadnášení proudu tekutiny.



Obr. 2.8a,b Vlevo paprsek (*Jet*) a vpravo přerušovaný paprsek (*Puff*).



Obr. 2.9a,b Oblak (*Plume*) znečištění vtékající do Michiganského jezera (vlevo) a termální oblak (*Thermal Plume*) lávy - sopka Bárðarbunga na Islandu (vpravo).



Obr. 2.10a,b Vlevo nadnášený (pozitivní) paprsek (*Buoyant Jet*) a vpravo přerušovaný nadnášený paprsek (*Buoyant Puff*).

## 2.4 Rozdělení paprsků

Prosté paprsky (*Jets*), oblaka (*Plumes*) a nadnášené paprsky (*Buoyant Jets*) mohou být tříděny podle tří základních skupin parametrů, tj. podle parametrů paprsku, prostředí a jejich geometrie [5]. Rozdělení paprsků je uvedeno v tab. 2-4.

### **První skupina – parametry paprsku (*jet parameters*)**

První skupina - *základní parametry paprsků* - rozlišuje paprsky na základě turbulence resp. režimu proudění na paprsky *laminární* a *turbulentní*. Výskyt laminárních paprsků je ojedinělý, jelikož postačí velmi malé hodnoty Reynoldsova čísla (10 – 100), aby se stal paprsek turbulentním. [4]

Druhou charakteristikou rozdělení paprsků podle první skupiny je působení vztlakové síly na tekoucí paprsek, kde se vyskytují dva případy, kterými jsou *nenadnášený (non-buoyant)* a *nadnášený (buoyant) paprsek*. Příkladem nenadnášeného paprsku může být paprsek tekutiny dopadající na lopatky Peltonovy turbíny. Nadnášený paprsek (*buoyant jet*) vzniká při působení vztlakové síly na paprsek. Příklad nadnášeného turbulentního paprsku je uveden na obr. 2.10a. Na tomto obrázku je znázorněn *vzestupný paprsek (positive)*, jehož hustota je menší oproti okolnímu médiu, proto dochází k pohybu paprsku směrem ke hladině. Druhým příkladem by byl paprsek *sestupný (negative)*, jehož hustota je vyšší oproti okolnímu médiu. V tomto případě by paprsek klesal ke dnu nádoby.

Posledním parametrem této skupiny je *objem*, jenž vymezuje paprsky na základě velikosti průtočného množství.

### **Druhá skupina - parametry prostředí (*ambient parameters*)**

Druhá skupina parametrů – *parametry prostředí* – dělí okolní prostředí podle režimu proudění na *turbulentní* a *laminární*, přičemž kritériem je opět Reynoldsovo číslo.

Dalším významným parametrem druhé skupiny je rozdělení dle pohybu tekutiny. Vyskytují se zde dva hlavní případy, kterými jsou *nepohyblivé (stagnant)* a na *tekoucí (flowing)* prostředí. Kritériem rozdělení prostředí podle pohybu je směr proudění (vektory rychlosti). U nepohyblivého prostředí jsou vektory rychlosti nulové – prostředí se nachází v klidovém stavu. Tekoucí prostředí rozlišuje tři základní případy proudění (orientace vektorů rychlosti). Pokud je směr proudění tekutiny rovnoběžný se směrem proudění tekutiny v paprsku, bývá prostředí označováno jako *souhlasně tekoucí (co-flow)*. Opačným případem je *tekoucí proti (counter-flow)*, ve kterém se paprsek tekutiny nachází v prostředí, jenž proudí proti směru proudu tekutiny v paprsku. Prostředí, jenž proudí příčně na směr proudění v paprsku, je označováno jako *příčně tekoucí (cross-flow)*. Jedná se o kombinaci předešlých případů.

Poslední charakteristikou rozdělení paprsků podle prostředí je stratifikace prostředí. Vyskytují se zde dva základní případy rozdělení prostředí, kterými jsou prostředí *homogenní (homogenous)*



a *stratifikované (stratified)*. Homogenní prostředí je ve všech bodech neměnné - stejnorodé. Stratifikované prostředí se sestává z jednotlivých vrstev, které mají různé vlastnosti. Příkladem stratifikovaného prostředí může být teplotní inverze, při které se studený, těžký vzduch nachází pod teplým, lehčím vzduchem.

### **Třetí skupina – geometrické parametry (*geometrical factors*)**

Poslední skupina parametrů – *geometrické parametry* – rozlišuje jednotlivé paprsky podle tvaru výtoku (trysky) na *kruhový (round, circular)* a *štěrbinový (slot)*.

Druhým kritériem rozdělení je způsob zjednodušení popisu paprsku na *rovinný (2D)* případ a na *prostorový (3D)* případ.

Jedním z nejdůležitějších parametrů paprsku je směr proudění tekutiny vztažený ke směru gravitačního zrychlení. Rozlišují se tři základní případy – paprsky *svislé (vertical)*, kdy je proudění tekutiny v paprsku rovnoběžné se směrem gravitačního zrychlení. Příkladem svislých paprsků může být gejzír obr. 2.7a. Pokud je směr proudění kolmý na směr gravitačního zrychlení, jsou dané paprsky tekutiny označovány jako *vodorovné (horizontal)*. Posledním příkladem rozdělení paprsků podle směru proudění vůči gravitačnímu zrychlení jsou paprsky nakloněné (*inclined*), které tvoří přechodový stupeň mezi paprsky *svislými a vodorovnými*.

Následně je možné rozdělovat paprsky podle polohy výtoku vůči hladině okolní tekutiny. Rozlišují se celkem dva základní případy. Prvním případem je paprsek *ponořený (submerged)*, u kterého nedochází k ovlivnění proudění v paprsku v důsledku výskytu hladiny tj. rozhraní dvou tekutin. Druhým případem je paprsek *hladinový (surface)*, u kterého dochází k deformaci rychlostních profilů v důsledku přítomnosti rozhraní dvou tekutin. Předcházející rozdělení tvoří jistou paralelu rozdělení podle druhé skupiny (stratifikované prostředí).

Dále je možné rozlišovat paprsky podle vlivu stěn. Prvním případem je paprsek *volný (free jet)*, který není vedený pevnou stěnou. Druhým případem je paprsek *stěnový (wall jet)*, u kterého dochází k vedení proudu tekutiny pevnou stěnou. Posledním kritériem třetí skupiny je rozdělení dle počtu paprsků (tj. podle zapojení) na *samostatný paprsek (single-port)* a *dva a více paprsků (multi-port)*.

**Tabulka 2: Parametry paprsku**

Paprsek (Jet)	Turbulence (Turbulence)	Turbulentní (Turbulent)	
		Laminární (Laminar)	
	Vztlak (Buoyancy)	Nenadnášený (Nonbuoyant)	
		Nadnášený (Buoyant)	Vzestupný (Positive) Sestupný (Negative)
	Objem (Volume)		

**Tabulka 3: Parametry prostředí**

Prostředí (Ambient)	Turbulence (Turbulence)	Turbulentní (Turbulent)	
		Laminární (Laminar)	
	Proud (Current)	V klidu (Stagnant)	
		Tekoucí (Flowing)	Příčně (Cross-flow)
			Souhlasně (Co-flow)
			Proti proudu (Counter-flow)
Stratifikace (Stratification)	Homogenní (Homogeneous)		
	Rozvrstvená (Stratified)		

**Tabulka 4: Geometrické parametry**

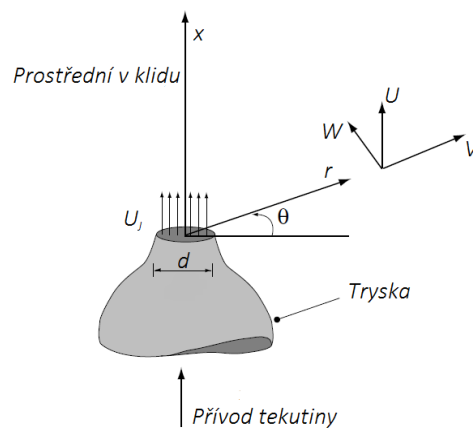
Geometrie (Geometry)	Tvar (Shape)	Kruhový (Round)
		Štěrbínovitý (Slot)
	Rozměr (Dimension)	Rovinný (2D)
		Prostorový (3D)
	Orientace (Orientation)	Svislý (Vertical)
		Nakloněný (Inclined)
		Vodorovný (Horizontal)
	Ponoření (Submergention)	Ponořený (Submerged)
		Hladinový (Surface)
	Hranice (Boundary)	Volný paprsek (Free Jet)
		Stěnový paprsek (Wall Jet)
	Instalace (Instalation)	Single-port
		Multi-port

*POZN. Rozdělení paprsků poprvé prezentovali autoři Gu a Stefan (1988), avšak v důsledku nejasností u některých termínů nebo jejich absence bylo původní rozdělení přepracováno do výše uvedené formy.*

## ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI TURBULENTNÍCH PAPRSKŮ

### 3.1 Popis proudění v turbulentním paprsku

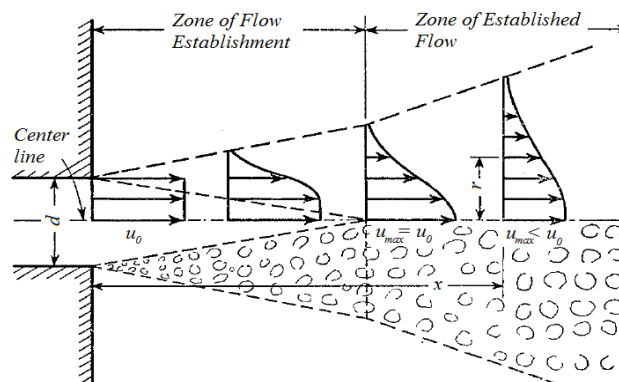
Newtonovská tekutina stacionárně vytéká z kruhové trysky o průměru  $d$ . Rozdělení rychlosti po průřezu trysky se uvažuje jako konstantní (rovnoměrné). Paprsek tekutiny vytéká z trysky do prostředí, které se skládá z téže tekutiny a nachází se v absolutním klidu. Dále nedochází k ovlivnění proudění přítomností pevných stěn či hladiny, a proto lze proudění tekutiny v paprsku považovat za osově symetrické.



**Obr. 3.1** Zjednodušený třírozměrný náčrt kruhové trysky v polárních souřadnicích. [18]

V ideálním případě je proudění v paprsku kompletně definované pomocí rychlosti tekutiny v trysce  $U_j$ , průměrem trysky  $d$  a kinematickou viskozitou  $\nu$ . Odtud vyplývá, že jediným bezrozměrným parametrem proudění je Reynoldsovo číslo  $Re$ .

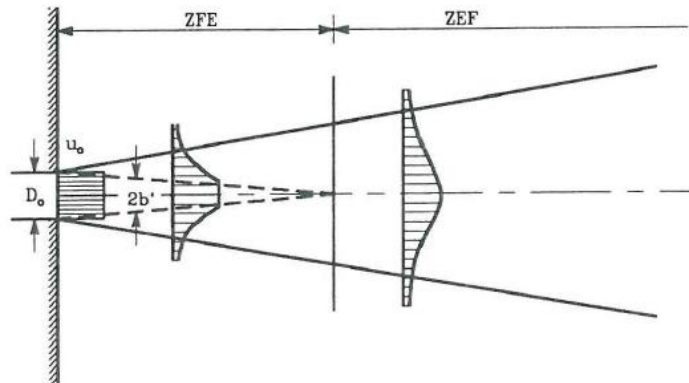
Při proudění tekutiny v paprsku lze v zásadě rozlišovat dvě základní oblasti proudění. První oblast je označována jako oblast vývinu proudění (*Zone of Flow Establishment*), druhá oblast jako oblast vyvinutého proudění (*Zone of Established Flow*).



**Obr. 3.2** Hlavní oblasti proudění paprsku tekutiny. [2]

### 3.1.1 Oblast vývinu proudění

Za oblast vývinu proudění (*ZFE*) je považován úsek mezi ústím trysky a koncem jádra paprsku. Tento úsek je roven délce jádra paprsku. V oblasti vývinu proudění dochází k transformaci rovnoměrného rozdělení rychlosti po průřezu na počátku oblasti (ústí trysky) na křivku zvonovitého tvaru (na konci úseku). Velikost tohoto úseku se odvíjí od průměru trysky  $d = D_0$  a jeho velikost je určena délkou jádra paprsku.



**Obr. 3.3** Oblast vývinu proudění (*ZFE*). Čárkované čáry označují jádro paprsku. [5]

V oblasti vývinu proudění (*ZFE*) může být rychlost  $u$  popsána pomocí následujících rovnic: [5]

$$u = u_0 \quad (\text{pro } r = b')$$

$$u = u_0 \exp \left\{ -\frac{(r - b')^2}{b^2} \right\} \quad (\text{pro } r > b') \quad (3.1a-b)$$

Oblast vývinu proudění je vymezena divergentní hranicí (mezní vrstvou), která se vytvoří na pomezí pronikající a okolní tekutiny. Pokud se okolní tekutina nachází v klidu, uvažují se nulové rychlosti na vnější straně mezní vrstvy. Za předpokladu rovnoměrného rozdělení rychlostí na konci trysky jsou rychlosti uvnitř jádra paprsku rovny rychlostem na konci trysky.

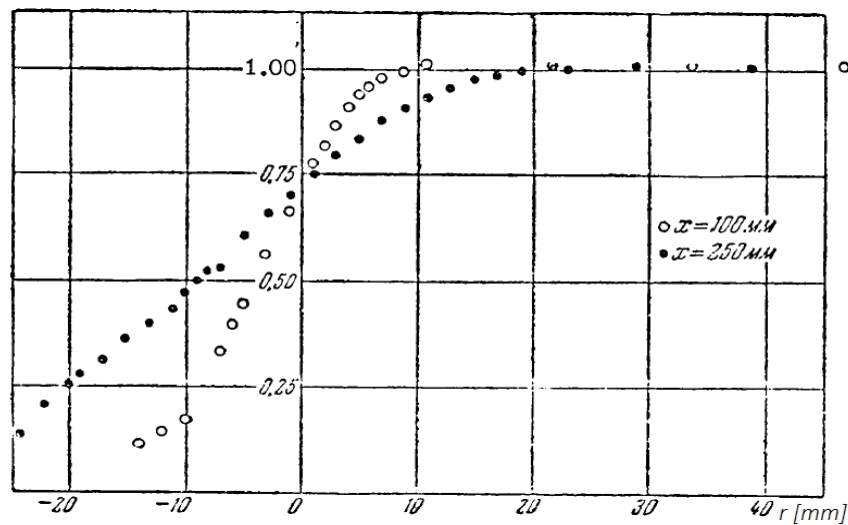
#### 3.1.1.1 Délka oblasti vývinu proudění

Na základě experimentálních pozorování turbulentních paprsků byla určena délka jádra paprsku (oblasti vývinu proudění) v závislosti na průměru trysky hodnotou  $L_{ZFE} = 6,2 D_0$ . [5] Nicméně předešlá hodnota popisující délku jádra paprsku se může značně lišit, a proto se v literatuře objevuje obecnější výraz pro délku jádra paprsku  $L_{ZFE} = (6 \div 10) D_0$ . [27]

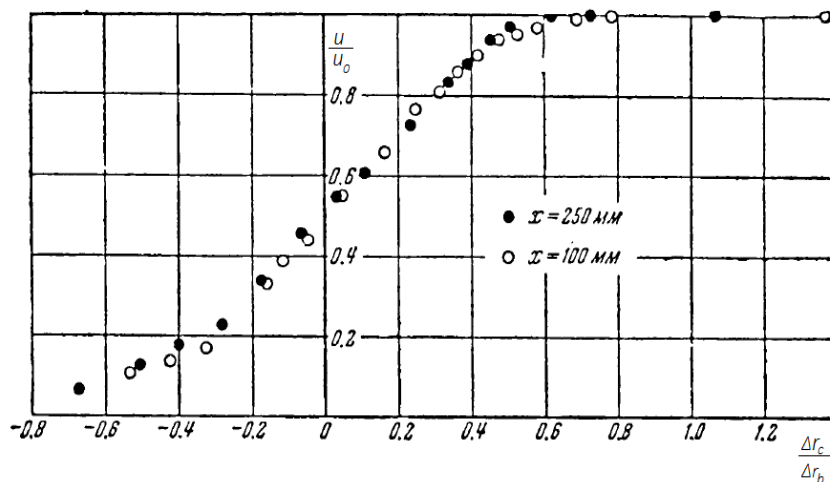
#### 3.1.1.2 Rozdělení rychlostí v mezní vrstvě oblasti vývinu proudění

Abramovich v roce 1938 provedl experimentální studii oblasti vývinu proudění pro osově symetrický paprsek tekutiny (vzduch), která vytékala z kruhové trysky o průměru  $d = 0,1 \text{ m}$  při rychlostech až

$u = 40 \text{ m/s}$ . Rychlostní profily získané v mezní vrstvě oblasti vývinu proudění ve vzdálenostech  $x = 0,1$  a  $0,25 \text{ m}$  od trysky jsou znázorněny na obr. 3.4.



**Obr. 3.4** Rychlostní profily v různých průřezech mezní vrstvy v osově symetrickém paprsku ve vzdálenostech  $x = 100$  a  $250 \text{ mm}$  od konce trysky. [1]



**Obr. 3.5** Bezrozměrné rychlostní profily v mezní vrstvě oblasti vývinu proudění u ponořeného osově symetrického paprsku ( $r_0 = 50 \text{ mm}$ ). [1]

Profily na obr. 3.4 jsou vyneseny v bezrozměrné formě na obr. 3.5 podle vztahu: [1]

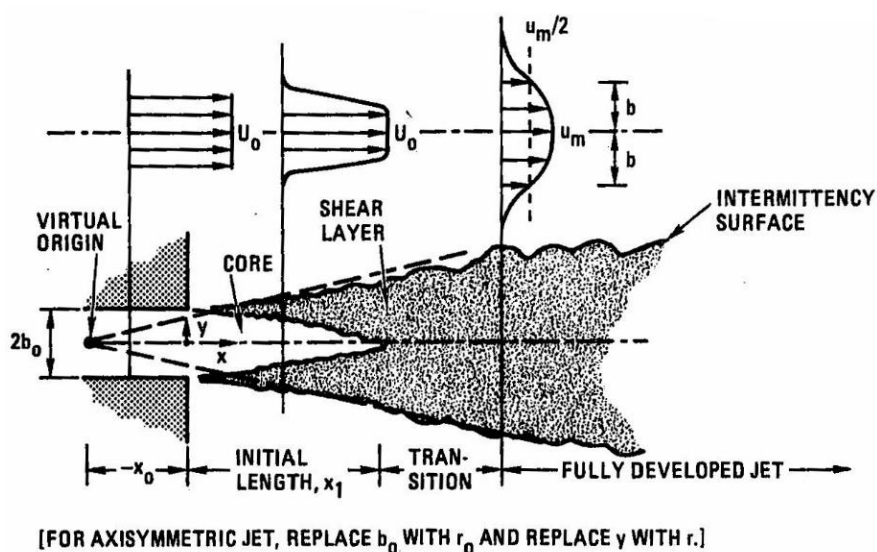
$$\frac{u}{u_0} = f\left(\frac{\Delta r_c}{\Delta r_b}\right) \quad (3.2)$$

kde je  $u_0$  počáteční vstupní rychlost tekutiny na konci trysky,  $\Delta r_c = r - r_c$  je vzdálenost mezi bodem měření a bodem, ve kterém je rychlost poloviční, než je tomu v jádře paprsku ( $u_c = 0,5u_0$ ),  $\Delta r_b = (r_{0,9} - r_{0,1})$  je vzdálenost mezi body, ve kterých je rychlost 0,9 resp. 0,1 rychlosti v ústí trysky ( $u/u_0 = 0,9$ ) a ( $u/u_0 = 0,1$ ). Tyto poměry (měřítka) popisující tloušťku mezní vrstvy paprsku byly použity z důvodu obtížného exaktního odvození.

Rychlostní profily osově symetrického paprsku vyznačené na obr. 3.5 indikují, že v oblasti vývinu proudění v malých vzdálenostech od trysky ( $\frac{x}{d} < 3$ ) jsou rychlostní profily v mezní vrstvě (v rozdílných průřezech) podobné (*similar*).

### 3.1.2 Oblast vyvinutého proudění

Oblast vyvinutého proudění (*ZEF*) navazuje ve směru proudění na oblast vývinu proudění (*ZFE*). Na počátku této oblasti nabývají rychlostní profily křivky tvaru zvonu (*bell curve*), avšak po uplynutí jisté vzdálenosti (transientní oblasti) přechází na tvar Gaussova rozdělení. Rychlostní profily v této oblasti se postupně stávají širší (plynulý nárůst šířky paprsku) a plošší (osová rychlost se vzdáleností od trysky klesá).

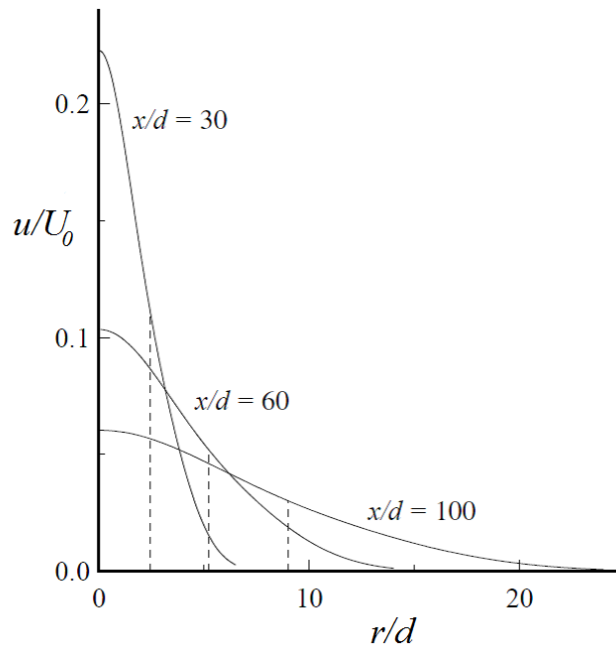


Obr. 3.6 Paprsek tekutiny.

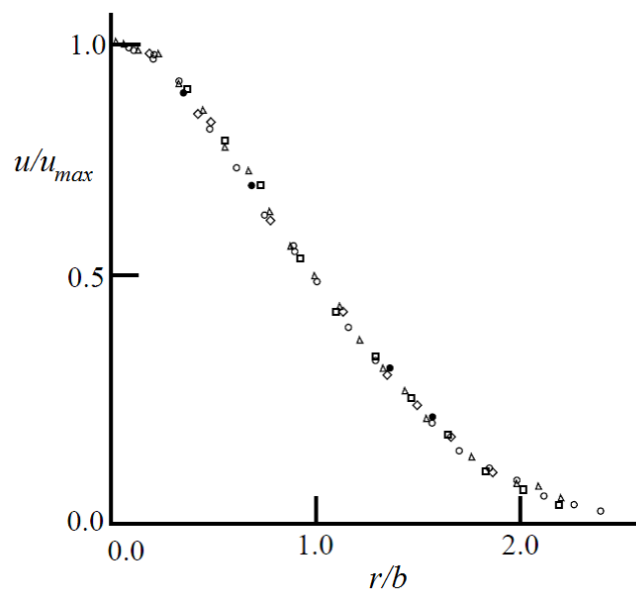
#### 3.1.2.1 Rozdělení rychlosti v oblasti vyvinutého proudění

Již z vizuálního pozorování turbulentních paprsků je patrné, že rychlosti v podélném směru osy  $x$  převládají oproti rychlostem ve zbylých směrech. Pokud se jedná o proudění, dostatečně vzdálené od pevných stěn, je možné popsat rozdělení profilových rychlostí pomocí Gaussova rozdělení. Jednotlivé profily se odlišují různou velikostí šikmosti Gaussova rozdělení, avšak tvar rozdělení zůstává neměnný. Tato okolnost vyplývá z rozdílné velikosti maximální rychlosti a šířky paprsku. Jelikož se jedná o symetrické rozdělení, je na obr. 3.7 uvedena pouze polovina profilu, přičemž hodnota  $r = 0$  je osou paprsku (profilu).

Zajímavějších výsledků rozdělení rychlosti po průřezu je dosaženo při převedení hodnot z obr. 3.7 do bezrozměrné formy grafu (obr. 3.8). Z obr. 3.8 je patrné, že při vynesení do bezrozměrné formy splývají jednotlivé křivky v jednu univerzální křivku, která dokládá důležitý poznatek o rozdělení profilových rychlostí v paprsku, kterým je vzájemná podobnost rychlostních profilů (*self-similarity*).



**Obr. 3.7** Příčné profily průměrné osové rychlosti v kruhové trysce při Reynoldsově čísle  $Re = 95\,500$ . Čárkované čáry značí poloviční šířku  $r_{1/2}(x)$  jednotlivých profilů. [18]

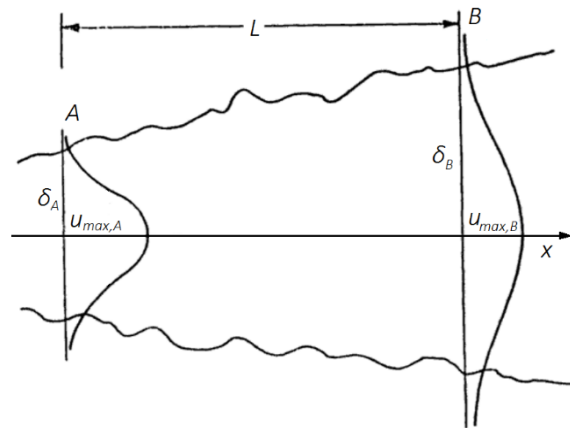


**Obr. 3.8** Střední osová rychlost vzhledem k příčné vzdálenosti v turbulentním kruhovém paprsku  $Re \approx 10^5$ . Symboly  $\circ$ ,  $x/d = 40$ ;  $\Delta$ ,  $x/d = 50$ ;  $\square$ ,  $x/d = 60$ ;  $\diamond$ ,  $x/d = 75$ ;  $\bullet$ ,  $x/d = 97,5$ . [18]

### 3.1.3 Vzájemná podobnost

Za předpokladu plně vyvinutého turbulentního proudění v paprsku (platí pro velké hodnoty Reynoldsova čísla  $Re$ ), můžeme použít princip vzájemné podobnosti proudění (*self-similarity* jinak též *self-preservation*). Vzájemná podobnost udává, že příslušné profily mají stejný tvar, který je nezávislý na vzdálenosti ve směru proudění, přičemž se tyto profily liší pouze ve velikosti jednotlivých charakteristik proudění a šířce paprsku.

V místech plně vyvinuté turbulence můžeme při volné smykové turbulenci uvažovat, že proudění již není ovlivněno počátečními podmínkami proudu. Uvnitř oblasti plně vyvinutého proudění, jsou vlastnosti proudění v každém bodě určeny vlastnostmi proudění v předešlém místě.



**Obr. 3.9** Vzájemná podobnost rychlostních profilů v ose symetrickém turbulentním paprsku. [25]

Pokud v oblasti plně vyvinutého proudění předchází profil *A* profilu *B* (obr. 3.9) ve směru proudění, potom se proudění v profilu *B* odvíjí od proudění v profilu *A* ve směru, který je nezávislý na přesné poloze profilů *A, B*. Z předešlého tvrzení lze usuzovat, že proudění je ve všech polohách vzájemně podobné. [21]

Vzájemná podobnost při volném smykovém proudění byla ověřena mnoha experimenty a velmi dobře dokládá chování jednotlivých charakteristik proudění a turbulence. Již se nepředpokládá vliv počátečních podmínek a není zde žádná délka či rychlost, při které by došlo k ovlivnění proudu.

Střední rychlost  $u(x, r)$  vyjádřená následujícím vztahem: [21]

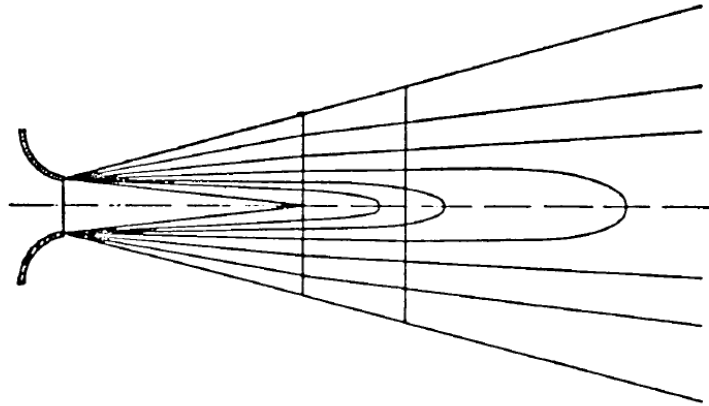
$$u(x, r) = u_{max}(x)f(\eta), \text{ kde } \eta = \frac{r}{\delta(x)} \quad (3.3)$$

který popisuje střední rychlostní profil jako funkci  $f(\eta)$ , na základě šířky profilu  $\delta(x)$ , a velikosti profilu reprezentované osovou rychlostí  $u_{max}(x)$ . [21]

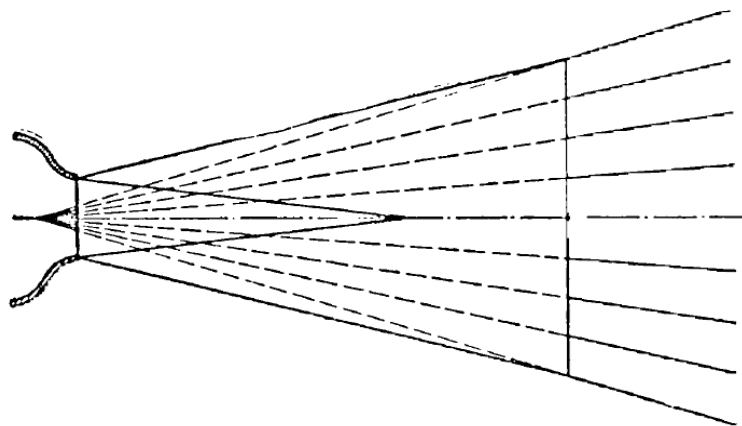
### 3.1.4 Linie konstantní velikosti rychlosti

Při spojení bodů o stejné velikosti rychlosti získáváme níže uvedené obr. 3.10 a obr. 3.11. Průběh konstantních velikostí rychlostí je uveden na obr. 3.10. Při vztažení profilových rychlostí k maximální rychlosti v průřezu získáme obr. 3.11. Z obr. 3.11 je patrné, že při zavedení závislosti mezi rychlostmi v daném průřezu a maximální rychlostní, získáme přímkové spojnice konstantní rychlosti. Linie konstantní velikosti rychlosti ve tvaru přímky jsou důsledkem vzájemné podobnosti rychlostních profilů.





**Obr. 3.10** Linie konstantních velikostí rychlosti ponořeného paprsku. [1]



**Obr. 3.11** Linie konstantních velikostí rychlosti ve tvaru  $\left(\frac{u}{u_{max}}\right) = konst.$  u ponořeného paprsku. [1]

Linie konstantní velikosti rychlosti (izovely) vycházejí z jednoho bodu, který je označován jako *virtuální počátek*. Při vyjádření profilové rychlosti ve tvaru  $(u/u_{max})$  lze dospět k závěru, že rychlost v profilu v daném bodě průřezu je funkcí polohy bodu v průřezu. [1]

$$\frac{u}{u_{max}} = f\left(\frac{r}{b}\right) \quad (3.4)$$

Vzhledem k lineárnímu rozšiřování paprsku může být vztah (3.4) rozšířen na vztah: [1]

$$\frac{u}{u_{max}} = f\left(\frac{r}{x}\right) \quad (3.5)$$

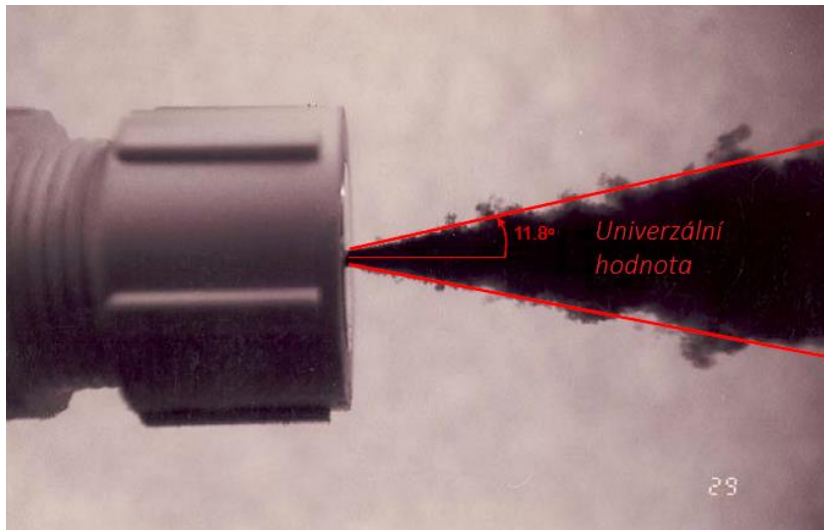
### 3.1.5 Vstupní úhel

Experimentální výsledky pozorování proudění v osově symetrických turbulentních paprscích prokázaly, že obálka turbulence (těleso paprsku) zaujímá téměř kuželovitý tvar. Tento tvar je způsoben přímou úměrností mezi poloměrem paprsku  $r$  a polohou  $x$  na ose paprsku. Z poznatku o konstantním nárůstu poloměru paprsku vyplývá, že poloměr (šířka) paprsku tekutiny lineárně narůstá.

Pro poloměr paprsku platí:

$$r = S \cdot x \quad (3.6)$$

Lineární nárůst šířky tekutiny je možné popsat pomocí tzv. vstupního úhlu (*opening angle*), jehož vrchol se nachází na ose paprsku a rameno tohoto úhlu protíná hranu trysky. Experimentální měření vstupního úhlu pro různé druhy tekutin prokázaly, že jeho velikost je nezávislá na druhu tekutiny. Velikost vstupního úhlu činí přibližně  $11,8^\circ$ .



Obr. 3.12 Vstupní úhel (*Opening Angle*). [7]

Pro koeficient úměrnosti platí: [7]

$$r(x) = \operatorname{tg}(11,8^\circ) = \frac{1}{5}x$$

$$S = \frac{1}{5} = 0,2$$

(3.7a-b)

### 3.1.6 Virtuální počátek

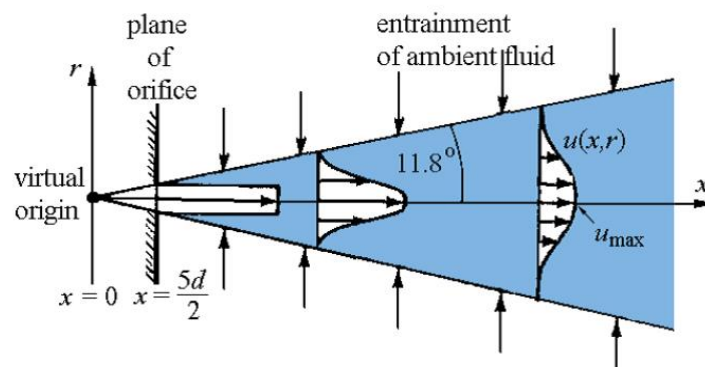
Virtuální počátek (*Virtual Origin*) osově symetrického paprsku udává polohu vrcholu kužele  $x_0$  (turbulentní obálky) na ose  $x$ . V místě polohy virtuálního počátku je šířka paprsku nulová. Na obr. 3.13 je poloha virtuálního počátku umístěna ve vzdálenosti  $5d/2$  uvnitř trysky. Tato vzdálenost vychází z konstantního nárůstu šířky paprsku a předpokladu, že šířka paprsku je v místě ústí trysky rovna průměru trysky  $d$ . Nicméně z experimentálních studií proudění tekutiny v paprscích vyplývá, že poloha virtuálního počátku se může značně lišit a dochází k přesunu virtuálního počátku za ústí trysky (v jádře paprsku). Poloha virtuálního počátku se vyjadřuje pomocí násobků průměru trysky  $d$ , avšak dalším vlivem, jenž může mít vliv na polohu virtuálního počátku je stupeň turbulence, ačkoliv často nebývá udáván. [24]

### 3.1.7 Základní popis rychlostí v paprsku

Na základě experimentálně spočtených profilových rychlostí je možné konstatovat, že rozložení rychlosti po průřezu lze popsat pomocí Gaussova rozdělení. Jednotlivé rychlostní profily se odlišují především rozdílnými hodnotami osové rychlosti  $u_{max}(x)$  a šířkou paprsku  $\delta$ .

Rozdělení rychlosti po průřezu lze tedy popsat pomocí:

$$u(x, r) = u_{max} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.8)$$



**Obr. 3.13** Schematický popis paprsku tekutiny pronikající do tekutiny v klidu. Paprsek se lineárně rozšiřuje ve směru proudění. Okolní tekutina vstupuje do paprsku pod konstantním úhlem  $\theta$  podél osy  $x$ . [7]

Pomocí základních statistických poznatků o Gaussově rozdělení je možné popsat šířku rozdělení, které pokrývá 95% plochy pomocí  $4\sigma$ . Při aplikaci rozdělení na osově symetrický paprsek lze pro směrodatnou odchylku a šířku paprsku psát: [7]

$$4\sigma = \delta = 2R$$

$$\sigma = \frac{x}{10} \quad (3.9a-b)$$

Nyní je možné popsat tvar rychlostních profilů: [7]

$$u(x, r) = u_{max} \exp\left(-\frac{50r^2}{x^2}\right) \quad (3.10)$$

Při pronikání paprsku tekutiny do objemu tekutiny, který se nachází v absolutním klidu, je pronikající paprsek jediným zdrojem hybnosti. Dále je možné při absenci okolních sil (zrychlujících či zpomalujících) uvažovat hybnost proudění za neměnnou. Nicméně v důsledku disipace kinetické energie na teplo dochází k jistému poklesu hybnosti. [16] Avšak pro praktické účely je možné uvažovat hybnost proudu podél  $x$  za konstantní.

Hybnost proudění tekutiny v kruhovém paprsku:

$$M_0 = M_0(x) = \int_A \rho u(\mathbf{u} dA) = konst.$$

$$\int_0^{\infty} \rho u^2 2\pi r dr = \rho U_0^2 \frac{\pi d^2}{4} \quad (3.11a-b)$$

Sílu proudu tekutiny v paprsku lze přibližně vyjádřit pomocí vztahu: [14]

$$F \equiv \int (\rho \overline{U^2} + \bar{p}) dA \quad (3.12)$$

Pomocí Reynoldsova rozkladu na střední a fluktuující složky rychlosti je možné popsat sílu proudění tekutiny v paprsku pomocí vztahu: [14]

$$F(x) = \int_0^b \rho [(\bar{u}^2 + u'^2) + \bar{p}] dA \equiv \int_0^b f(x, r) dA \quad (3.13)$$

Určit sílu proudění pomocí měření rychlosti a tlaku je velmi pracné a obtížné. Z tohoto důvodu je snazší vyjádřit sílu proudu pomocí středního rychlostního profilu.

Alternativní způsob určení síly proudu v paprsku: [14]

$$\frac{F(x)}{M_0} - F(x_0) = KM_0 \ln \frac{x}{x_0} \quad (3.14)$$

Pro koeficient  $K$  platí: [14]

$$K = \alpha'^2 B^2 \left[ \frac{k}{2} \frac{\tan \theta}{(k \tan \theta - 1)} - \frac{k^2}{4} \frac{(1 + \tan^2 \theta)}{(-1 + k \tan \theta)^2} \right] \quad (3.15)$$

kde je koeficient strhávání tekutiny  $\alpha'$  určený jako poměr radiální složky rychlosti  $v$  vůči osově (maximální) rychlosti  $u_{max}$ .

Za předpokladu, že  $F(x_0) = M_0$  lze určit vztah pro stanovení síly proudu: [14]

$$\frac{F(x)}{M_0} - 1 = K \ln \frac{x}{x_0} \quad (3.16)$$

Ze znalosti hybnosti paprsku (3.11b) a rozdělení rychlostí po průřezu (3.8) je možné určit vztah pro výpočet maximální rychlosti: [8]

$$u_{max} = \frac{5d}{x} U_0 \quad (3.17)$$

U osově symetrického paprsku se maximální rychlost nachází na ose symetrie. Pro maximální rychlost (tj. osovou) je typické, že postupně s rostoucí vzdáleností ve směru proudění hyperbolicky klesá. Hodnota maximální rychlosti závisí na počáteční hybnosti proudu, hustotě tekutiny a na poloze na ose  $x$ .

Na základě výše uvedených předpokladů lze psát: [18]

$$u_{max} = f(M_0, \rho, x) \quad (3.18)$$

Pomocí průběhu maximální rychlosti je možné určit vztah pro výpočet průměrné rychlosti. Je možné vycházet z rovnice kontinuity, ze které se ze znalosti velikosti průtoku a průtočné plochy stanoví průměrná velikost rychlosti.

Pro průměrnou rychlost platí: [8]

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^\infty u \, 2\pi r \, dr = \frac{u_{max}}{2} = \frac{5d}{2x} U_0 \quad (3.19)$$

Při proudění tekutiny v paprsku se předpokládá, že hybnost proudu tekutiny v paprsku zůstává neměnná, avšak rychlost tekutiny v paprsku klesá s rostoucí vzdáleností ve směru proudění, a proto musí (při zachování konstantní hodnoty hybnosti proudu) docházet k navýšení průtočného množství.

Výpočet objemového průtoku: [8]

$$Q = \int_0^\infty u \, 2\pi r \, dr = \frac{\pi}{50} u_{max} x^2 = \frac{\pi d}{10} U_0 x \quad (3.20)$$

Přírůstek průtočného množství podél osy  $x$  udává míru strhávání okolní tekutiny a je možné jej popsat pomocí vztahu: [8]

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{\pi d}{10} U_0 \quad (3.21)$$

Z výše uvedeného vztahu (3.21) je možné určit rychlost strhávání, jež je radiální rychlostí  $v$  nezbytnou k přesunu strženého objemu tekutiny pomocí rovnice kontinuity lze psát (v diferenciálním tvaru): [8]

$$dQ = v \, dA \quad (3.22)$$

Při zavedení výrazu  $dA = 2\pi R \, dx$  lze rovnici kontinuity přepsat do tvaru: [8]

$$\frac{dQ}{dx} = 2\pi R v = \frac{2\pi x v}{5} \quad (3.23)$$

Srovnáním vztahů (3.21) a (3.23) je možné určit vztah pro zjištění radiální složky rychlosti: [8]

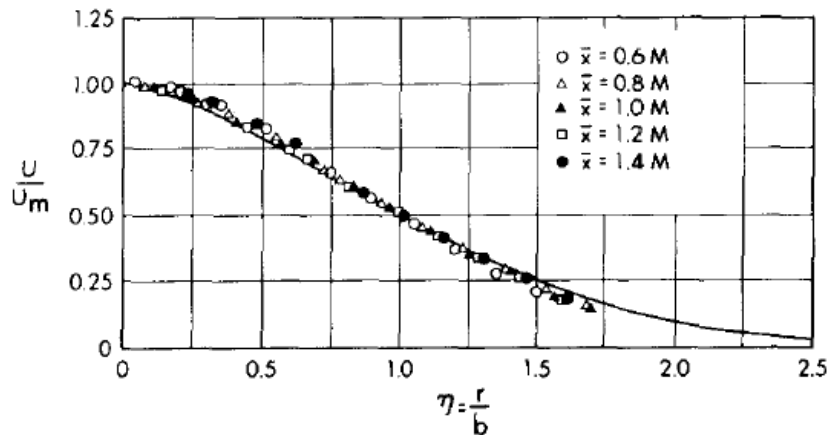
$$v = \frac{U_0 d}{4x} = 0,05 u_{max} = 0,10 \bar{u} \quad (3.24)$$

*POZN.: Ve výše uvedeném vztahu (3.24) je patrné, že velikosti radiálních rychlostí dosahují zhruba 5% osových rychlostí. Nicméně z experimentálních měření vyplývá, že velikosti příčných (radiálních) rychlostí dosahují velikosti 3% [18]; popř. 2,6% [14] maximálních rychlostí.*

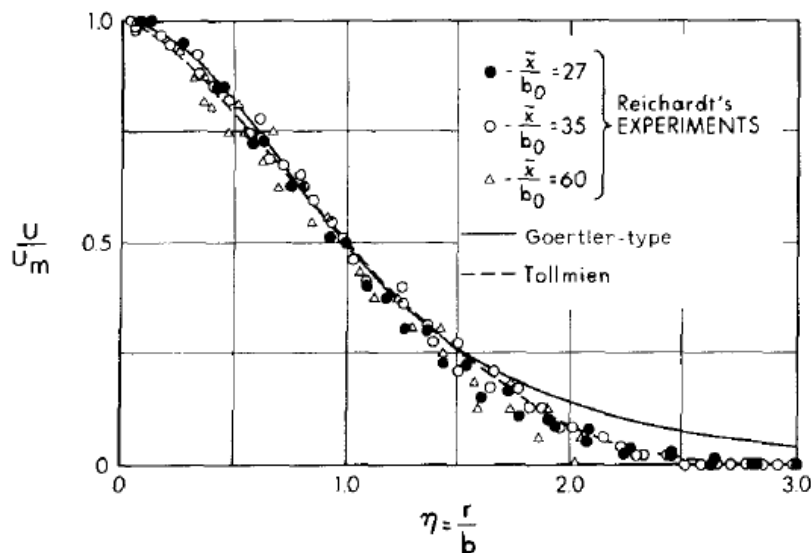
## 3.2 Experimentální výsledky

### 3.2.1 Vztahy pro výpočet maximální rychlosti

Prvním, kdo se zabýval experimentálním zkoumáním rychlostí v paprsku tekutiny, byl *Trüpel (1915)*. Své pozorování prováděl na kruhové trysce o průměru  $d = 0,045 \text{ m}$  při rychlostech  $u$  až  $85 \text{ m/s}$ . Další pozorování provedli *Reichardt (1942)*, *Corrsin (1946)*, *Hinze a Zijnen (1949)*, *Albertson (1950)* a další.



**Obr. 3.14** Porovnání experimentálně stanovených hodnot profilových rychlostí v bezrozměrné formě grafu s Tollmienovým řešením. [20]



**Obr. 3.15** Porovnání experimentálně stanovených hodnot profilových rychlostí v bezrozměrné formě grafu s Tollmienovým a Görtlerovým řešením. [20]

Z výše uvedeného obr. 3.14 je patrné, že Tollmienovo řešení dobře popisuje rozdělení experimentálně naměřených profilových rychlostí, avšak v blízkosti osy symetrie ztrácí na přesnosti (patrné z obr. 3.14) a je zde lepší použít Görtlerova řešení. Při použití Tollmienova a Görtlerova řešení na porovnání výsledků s experimentálními výsledky Reichardta (obr. 3.15) je patrné, že v blízkosti osy

paprsku vystihuje Görtlerovo řešení průběh rychlosti lépe, než je tomu u Tollmienova řešení. Nicméně s rostoucí velikostí  $\eta$  začíná Tollmienovo řešení podstatně lépe popisovat průběh experimentálních výsledků. Na základě této skutečnosti je lepší při porovnávání výsledných hodnot profilové rychlosti použít obě řešení a omezit se vždy na jistou oblast, kde dané řešení poskytuje dobré výsledky.

Při aplikaci Tollmienova řešení na experimentální výsledky Trüpla nabývá koeficient  $a$  při rovnoměrném rozložení rychlosti po průřezu hodnoty  $a = 0,066$ . [20] Pokud rozdělení rychlostí po průřezu na konci trysky není rovnoměrné, vzroste hodnota koeficientu  $a$  na hodnotu  $a = 0,076$ . [20] Abramovich zjistil, že hodnota koeficientu  $a$  roste lineárně v poměru průměrné a maximální rychlosti v paprsku.

Za předpokladu rovnoměrného rozdělení rychlosti ( $a = 0,066$ ) lze na základě Tollmienova řešení obdržet vztah pro výpočet maximální rychlosti: [20]

$$u_{max}/U_0 = 7,32/(x/d) \quad (3.25)$$

Pro Görtlerův typ rozdělení, vztažené na experimentální výsledky Reichardta, nabývá rovnice pro poměr rychlostí tvaru (pro velikost konstanty  $\sigma = 18,5$ ): [20]

$$u_{max}/U_0 = 5,75/(x/d) \quad (3.26)$$

Hinze a Zijnen (1949) na základě svých experimentálních pozorování uvádějí vztah: [20]

$$u_{max}/U_0 = \frac{6,39}{\left(\frac{\bar{x}}{d} + 0,6\right)} \quad (3.27)$$

Virtuální počátek (*virtual origin*) byl při jejich výzkumu uvažován ve vzdálenosti  $0,6d$  za koncem trysky. Na základě dříve provedených německých a ruských experimentů, doporučil Abramovich (1963) volit vzdálenost za koncem trysky hodnotou  $2,2d$ . V důsledku nejistot, vzniklých při určení této vzdálenosti, je doporučováno, aby byl virtuální počátek v samotné trysce. Na základě jejich experimentů doporučuje Albertson (1950) vztah: [20]

$$u_{max}/U_0 = 6,2/(\bar{x}/d) \quad (3.28)$$

Hussein (1994) doporučuje na základě experimentálních výsledků vztah: [18]

$$u_{max}/U_0 = \frac{B}{(x - x_0)/d} \quad (3.29)$$

kde  $B$  je empiricky stanovená konstanta. Pro měření rychlosti pomocí žhaveného drátku (*hot-wire*) je určena hodnotou  $B = 5,9$ , a na základě laseru (Doppler-data) hodnotou  $B = 5,8$ . Začátek této úsečky se nachází ve virtuálním počátku  $x_0$ .

*Panchapakesan a Lumley* (1993) na základě svých experimentů doporučují ve výše uvedeném vztahu (3.29) volit velikost konstanty  $B = 6,06$ . [18]

*Karimipannah* (1996) doporučuje volit hodnotu koeficientu  $B$  ve vztahu (3.29) hodnotou  $B = 6,68$ . [14]

Pro praktické účely doporučuje Rajaratman vztah: [20]

$$u_{max}/U_0 = 6,3/(x/d) \quad (3.30)$$

Vedle vztahů na určení rychlosti v paprsku lze nalézt i vztahy na určení koeficientu úměrnosti vztahené ke střední hodnotě maximální profilové rychlosti (tab. 5). Pro praktické účely lze uvažovat hodnotu koeficientu úměrnosti dle vztahu (3.7b), jenž je uveden na začátku této kapitoly tj.  $S_{1/2} = 0,1$ .

**Tabulka 5:** Experimentálně naměřené hodnoty koeficientu úměrnosti

Tollmienovo řešení	$S_{1/2} = 0,082$
Corrsinova data (1946)	$S_{1/2} = 0,084$
Abramovich (1963)	$S_{1/2} = 0,097$
Albertson (1950)	$S_{1/2} = 0,0965$
Hinze a Zijnen (1949)	$S_{1/2} = 0,094$
Panchapakesan (1993)	$S_{1/2} = 0,096$
Hussein (1994) <i>Hot-wire data</i>	$S_{1/2} = 0,102$
Hussein (1994) <i>laser-Doppler data (LDA)</i>	$S_{1/2} = 0,094$

### 3.2.2 Vztahy pro výpočet průtoku

Stanovení průtočného množství v oblasti vývinu proudění (ZFE):  $x \leq 6,2d$  [27]

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + 0,083 \frac{x}{d} + 0,0128 \left(\frac{x}{d}\right)^2 \quad (3.31)$$

Stanovení průtočného množství v oblasti vyvinutého proudění (ZEF):  $x \geq 6,2d$  [27]

$$\frac{Q}{Q_0} = 0,32 \frac{x}{d} \quad (3.32)$$



### 3.3 Tollmienovo a Görtlerovo řešení

#### 3.3.1 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice pro turbulentní kruhový paprsek vycházejí z *Reynoldsovy rovnice* a z *rovnice kontinuity*. Za předpokladu nevířivého proudění lze považovat změnu úhlu  $\theta$  za nulovou (obr. 3.13), z čehož vyplývá, že složky obvodové rychlosti  $w$  jsou nulové. Příčné rychlosti  $v$  jsou, při proudění tekutiny v paprsku, oproti osovým rychlostem  $u_{mac}$  zanedbatelné ( $v \sim 0,03u_{mac}$ ) [18]. Na základě výše zmíněných předpokladů lze zjednodušit Reynoldsovu rovnici (4.8b). Při použití výše zmíněných předpokladů lze provést zjednodušení Reynoldsovy rovnice na tvar:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial r\tau}{\partial r} \quad (3.33)$$

Rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial}{\partial x} ru + \frac{\partial}{\partial r} rv = 0 \quad (3.34)$$

Pro praktické účely je možné  $dp/dx$  považovat za nulové a tvar rovnice hybnosti lze popsat: [20]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial r\tau}{\partial r} \quad (3.35)$$

#### 3.3.2 Tollmienovo řešení

##### 3.3.2.1 Tollmienovo rozdělení rychlostí v příčném směru na směr proudění

Pro získání rozložení rychlosti, máme dvě pohybové rovnice (3.34) a (3.35), avšak tři neznámé veličiny  $u$ ,  $v$  a  $\tau$ . Tollmienovo řešení používá ke stanovení velikosti třetí neznámé veličiny  $\tau$  Prandtlův model směšovací délky.

Prandtlův model směšovací délky pro  $\tau$ :

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (3.36)$$

Za předpokladu konstantního nárůstu šířky paprsku lze psát jako  $l = \beta b = \beta C_1 x = Cx$ , kde jsou  $\beta$  a  $C$  neznámé konstanty. Při dosazení výše uvedených předpokladů do vztahu (3.36) dostáváme:

$$\tau = \rho C^2 x^2 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (3.37)$$

Při položení konstanty  $C^2 = a^3$ , kde je  $a$  další konstanta dostáváme:

$$\frac{u}{u_{max}} = f_1 \left( \frac{r}{b} \right) = f_1 \left( \frac{r}{C_1 x} \right) = f_2 \left( \frac{r}{x} \right) = f \left( \frac{r}{ax} \right) = f(\phi) \quad (3.38)$$

kde je  $\phi = r/ax$ .

Pro Stokesovy proudové funkce  $\psi$  platí:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (3.39a-b)$$

Vyjádřením  $\psi$  ze vztahu (3.39) a na základě poznatku (3.38) získáváme:

$$\psi = \int_0^r ru \, dr = \int_0^r ru_{max} f \, dr = u_{max} a^2 x^2 F(\phi) \quad (3.40)$$

kde je

$$F(\phi) = \int_0^\phi \phi f \, d\phi \quad (3.41)$$

Pomocí rovnice hybnosti (3.11b) lze maximální (osovou) rychlost vyjádřit:

$$\frac{u_{max}}{U_0} = \frac{B}{d} \quad (3.42)$$

Popřípadě:

$$u_{max} = BU_0 d/x = n/x \quad (3.43)$$

Podle výše uvedených vztahů (3.38) až (3.43) lze určit na počátku neznámé veličiny  $u$ ,  $v$  a  $\tau$ :

$$u = u_{max} f(\phi) = \frac{n}{x} \frac{1}{\phi} F'$$

$$v = \frac{na}{x} \left( F' - \frac{F}{\phi} \right)$$

$$\tau_t = \rho a \left( \frac{n}{x} \right)^2 \left( \frac{F''}{\phi} - \frac{F'}{\phi^2} \right)^2 \quad (3.44a-c)$$

Po dosazení vztahů (3.44a-c) do pohybových rovnic (3.34), (3.35) a následné úpravě obdržíme základní vztah pro Tollmienovo rozdělení rychlosti (3.45), což je nelineární obecná diferenciální rovnice 2. řádu.

$$\boxed{\left( F'' - \frac{1}{\phi} F' \right)^2 = FF'} \quad (3.45)$$

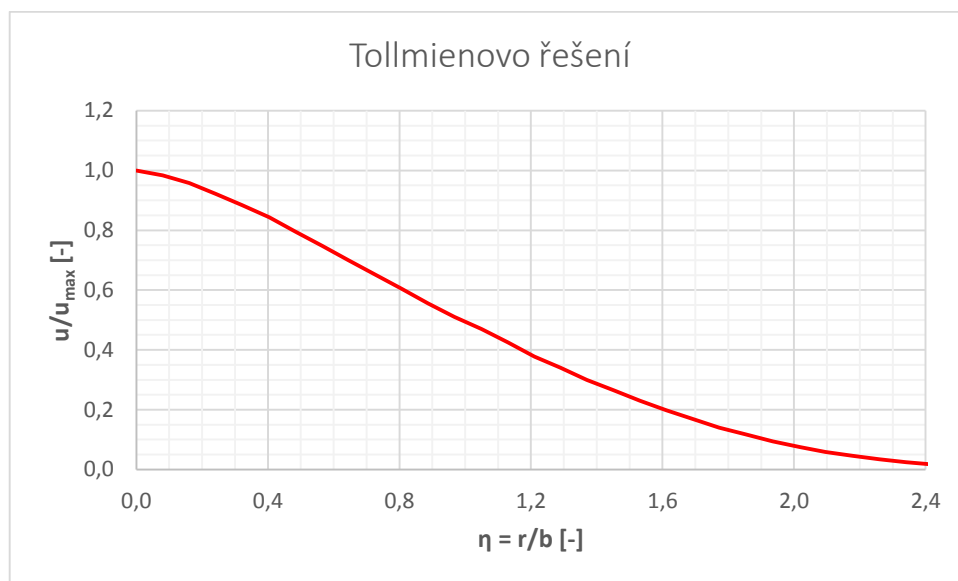
Okrajové podmínky výše uvedeného vztahu jsou:

$$r = 0; \phi = 0; u = u_{max}; F'/\phi = 1, \text{ tj. } F'(0) = 0$$

$$r = 0; \phi = 0; v = 0; \text{ tj. } F' - (F/\phi) = 0, F' = F/\phi, F(0) = 0$$

$$r = \infty; \phi = \infty; u = 0; F'(\phi)/\phi = 0; F'(\infty) = 0$$

Tollmien vypočítal několik řešení výše uvedené ODR 2. řádu, přičemž v Příloze I. jsou uvedeny hodnoty pro  $u/u_{max}$  v závislosti na  $\phi$  a  $\eta$ . Hodnoty  $\eta$  lze získat jednoduchou transformací hodnot  $\phi$  pomocí vztahu  $b = 1,24ax$ .



**Graf. 3.1** Příklad Tollmienova řešení rozdělení profilových rychlostí v bezrozměrné formě.

### 3.3.2.2 Průběh osových rychlostí podle Tollmiena

Při aplikaci Tollmienova rozdělení na rovnici hybnosti proudu tekutiny v paprsku (3.11b) lze obdržet vztah pro vyjádření maximální (osové) rychlosti:

$$u_{max}/U_0 = 0,965/(ax/r_0) \quad (3.46)$$

### 3.3.3 Görtlerovo řešení

#### 3.3.3.1 Görtlerovo rozdělení rychlostí v příčném směru na směr proudění

Görtlerovo řešení využívá pro stanovení neznámé veličiny  $\tau$  Prandtlova modelu vírové viskozity.

Prandtlův model vírové viskozity:

$$\tau = \rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.47)$$

Pro rozdělení rychlosti po průřezu platí obdobný vztah jako pro Tollmienovo řešení:

$$u = u_{max} f(\xi) \quad (3.48)$$

kde je  $\xi = \sigma r/x$ .

Pro Görtlerovo řešení lze opět použít výrazu pro maximální rychlost  $u_{max} = n/x$ , kde je  $n = BU_0 d$ .

Při použití Stokesovy proudové funkce lze obdržet vztah:

$$\psi = \int_0^r ru \, dr = \frac{nx}{\sigma^2} \int_0^\xi \xi f \, d\xi = \frac{nx}{\sigma^2} F(\xi) \quad (3.49)$$

kde je

$$F(\xi) = \int_0^\xi \xi f \, d\xi \quad (3.50)$$

Nyní je možné získat vztah pro určení svislé složky rychlosti  $v$ , pro který platí:

$$v = \frac{n}{\sigma} \frac{1}{x} \left( F' + \frac{F}{\xi} \right) \quad (3.51)$$

Pro vodorovnou složku rychlosti  $u$  platí:

$$u = \frac{n}{x} \frac{F'}{\xi} \quad (3.52)$$

Při zavedení výrazu  $\varepsilon = ku_{max}b$ , kde  $k$  je konstanta, do vztahu (3.47) lze obdržet vztah pro  $\varepsilon$ , přičemž platí, že  $\varepsilon$  není závislé na poloze  $x$ . Pro kruhový paprsek při použití Prandtlova modelu vírové viskozity na určení smykového napětí  $\tau$  je vírová viskozita konstantní.

$$\varepsilon = k \frac{n}{x} C_1 x = knC_1 \quad (3.53)$$

Z konstantní velikosti vírové viskozity vyplývá, že řešení bude podobné případu laminárního paprsku s drobnou odlišností:

$$\varepsilon/\nu = kC_1 B(U_0 d/\nu) \quad (3.54)$$

Po úpravách obdržíme:

$$\tau = \rho knC_1 \frac{\partial u}{\partial r} = (\rho knC_1) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{n}{x} \frac{F'}{\xi^2} \right) \quad (3.55)$$

Popřípadě:

$$\tau = \frac{\bar{k}n\sigma}{x^2} \left( \frac{F''}{\xi} - \frac{F'}{\xi^2} \right) \quad (3.56)$$

kde je  $\bar{k} = \rho knC_1$ . Po dosazení výše uvedených výrazů pro  $u$ ,  $v$  a  $\tau$  do pohybových rovnic a následné úpravě opět obdržíme nelineární ODR 2. řádu:

$$\boxed{F' - \xi F'' = FF'} \quad (3.57)$$

kde byla velikost parametru  $\sigma$  určena pomocí vztahu  $1/\sqrt{kC_1}$ .

Okrajové podmínky výše uvedeného vztahu jsou:

$$r = 0, u = u_{max} \text{ nebo } \xi = 0, F'/\xi = 1, F'(0) = 0$$

$$r = 0, v = 0 \text{ nebo } \xi = 0 \text{ tj. } F' - (F/\xi) = 0 \text{ nebo } F(0) = 0$$

$$r = \infty; u = 0 \text{ nebo } \xi = \infty, F'/\xi = 0; F'(\infty) = 0$$

Řešením rovnice (3.57) lze dospět k výrazu:

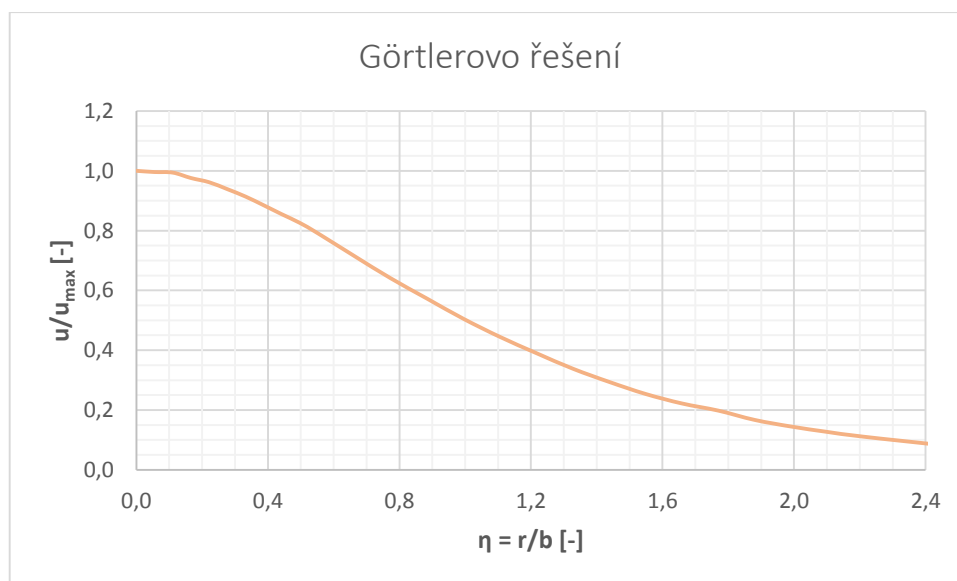
$$F = \frac{0,5\xi^2}{1 + 0,125\xi^2} \quad (3.58)$$

Poté platí:

$$\frac{u}{u_{max}} = \frac{1}{1 + 0,125\xi^2}$$

$$\sigma \frac{v}{u_{max}} = \frac{\xi - 0,125\xi^2}{2(1 + 0,125\xi^2)^2} \quad (3.59a-b)$$

Výsledné hodnoty rozdělení rychlostí ve formě  $u/u_{max}$  jsou uvedeny v Příloze I., přičemž hodnoty  $\eta$  lze určit pomocí vztahu  $\sigma b/x = 1,81$ .



**Graf 3.2** Příklad Görtlerova řešení rozdělení profilových rychlostí v bezrozměrné formě.

### 3.3.3.2 Průběh osových rychlostí podle Görtlera

Při aplikaci Görtlerova rozdělení na rovnici hybnosti proudu tekutiny v paprsku (3.11b) lze obdržet vztah pro vyjádření maximální (osové) rychlosti:

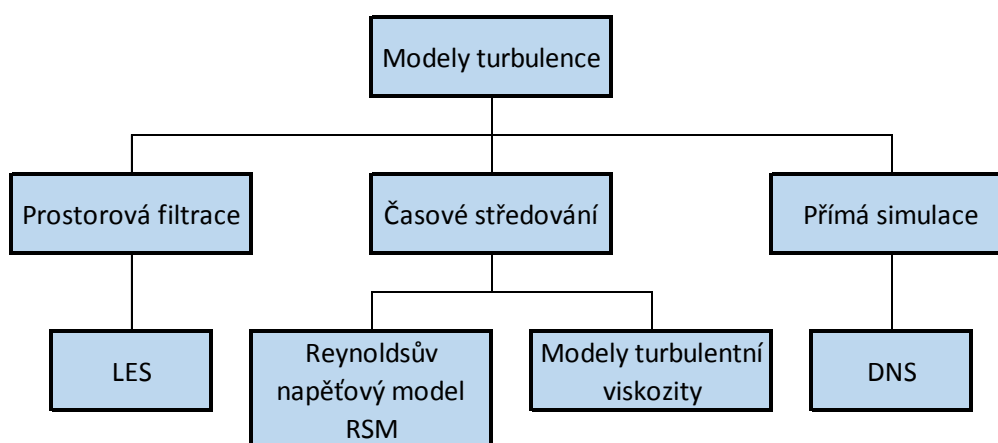
$$\frac{u_{max}}{U_0} = \frac{\sigma}{1,61} \frac{1}{x/r_0} \quad (3.60)$$

## MODELOVÁNÍ TURBULENCE

Modelování turbulentního proudění je ve fázi vývoje a odvíjí se od rozvoje výpočetní techniky a matematiky. Turbulence je deterministicky náhodný pohyb částic tekutiny. Jelikož podstata turbulence nebyla zcela objasněna, používají se zjednodušené modely. Jednotlivé modely turbulence jsou vhodné vždy pro určité typy úloh a odvíjí se od empirických poznatků. Volba turbulentního modelu závisí na charakteru proudění, požadované přesnosti řešení, výpočetní technice a množství času pro simulaci proudění.

### 4.1 Základní přístupy modelování turbulentního proudění

Implementace metod používaných v turbulenci je založena na použití metod numerické matematiky (provádí se diskretizace problému v prostoru a v čase). Obecně každá metoda matematického modelování vyžaduje jistou prostorovou a časovou diskretizaci, aby byla schopna modelovat gradienty všech veličin, které v daném problému přicházejí v úvahu.[28]



**Obr. 4.1** Metody matematického modelování turbulentního proudění. Použité zkratky: *LES* – *Large Eddy Simulation*, *DNS* – *Direct Numerical Simulation*. [3]

#### 4.1.1 Metoda přímé numerické simulace (DNS - Direct Numerical Simulation)

Metoda používaná pouze za určitých omezujících požadavků na velkou kapacitu počítače. Počet potřebných uzlových bodů výpočetní sítě lze řádově odhadnout z *Kolmogorovova mikroměřítka turbulence*. Počet stupňů volnosti  $n$  daného problému souvisí s počtem prvků diskretizační sítě a odvíjí se od velikosti největších struktur  $l_0$  a nejmenších struktur  $l_\eta$ .

Platí tedy následující úměra:

$$n = (l_0/l_\eta)^3 \sim Re^{9/4} \quad (4.1)$$

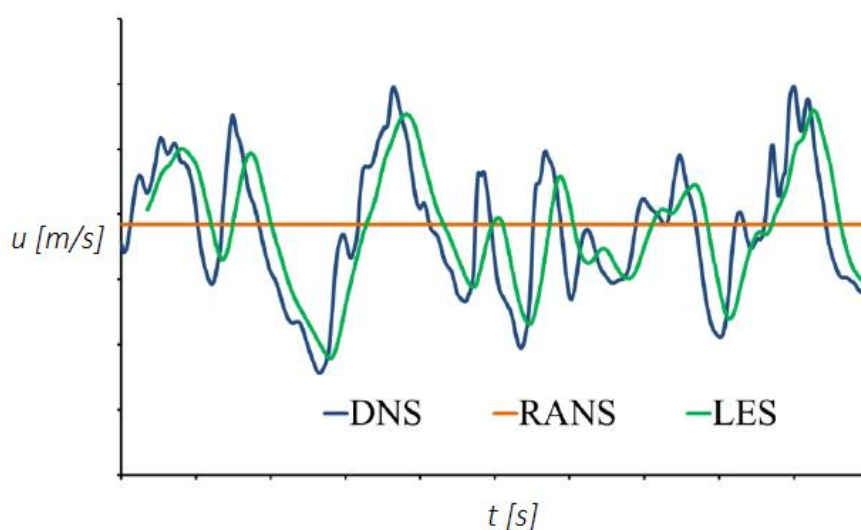
Obrovské množství elementů sítě a časově závislá simulace s velmi malým časovým krokem vede k technické nerealnosti inženýrských výpočtů. Metoda DNS se používá jen ve speciálních případech pro výzkumné účely. S rostoucím Reynoldsovým číslem dochází k nárůstu objemu dat, což vede k nerealnosti využití u praktických výpočtů při stávající výpočetní technice. Metoda DNS poskytuje dokonalý obraz fyziky proudící tekutiny. Výsledky jsou považovány za ekvivalentní výsledkům experimentů z hlediska věrohodnosti, avšak komplexností informací experimenty převyšují. [28]

#### 4.1.2 Metoda konečných vírů (LES – Large Eddy Simulation)

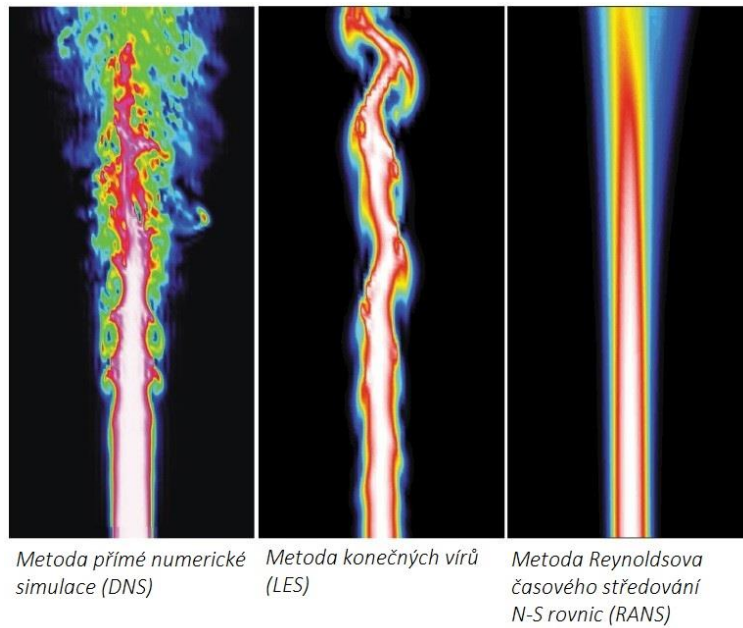
Jedná se o metodu, která je založena na myšlence filtrování Navier-Stokesových rovnic. Problém je rozdělen na dvě části, přičemž struktury větší než jistá mezní velikost jsou modelovány odděleně oproti strukturám menším. Velké struktury (víry) jsou simulovány stejně jako v metodě DNS, avšak malé struktury jsou modelovány jako v metodě RANS. Model malých turbulentních struktur je modifikován s ohledem na omezenou velikost modelových struktur, jedná se o tzv. „subgrid model“ – modelující struktury menší než je rozměr buňky sítě.

#### 4.1.3 Metoda Reynoldsova časového středování Navier-Stokesových rovnic (RANS Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)

Pro většinu inženýrských úloh turbulentního proudění se využívají modely turbulence, které jsou založeny na metodě časového (Reynoldsova) středování veličin turbulentního proudění a na následující proceduře časového středování základních rovnic. Metody modelování turbulentního proudění pomocí RANS lze rozdělit do dvou skupin. První skupinou jsou metody využívající myšlenky turbulentní vazkosti a druhou skupinou jsou metody využívající modelování Reynoldsových napětí.



**Obr. 4.2** Metoda DNS poskytuje přesný časový průběh sledované veličiny, metoda RANS pouze střední hodnotu v čase a výsledkem metody LES je vyhlazený signál. [28]

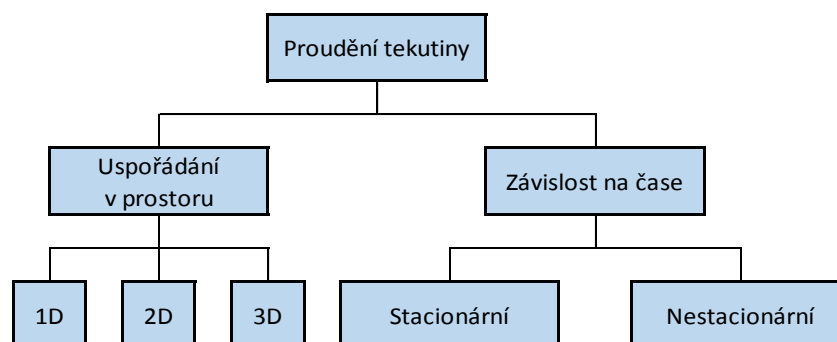


**Obr. 4.3** Porovnání základních metod při modelování paprsku tekutiny.

Volba metody matematického modelování dané problematiky je předurčena praktickými hledisky. Metoda DNS připadá v úvahu pouze v případech, kdy je úloha charakterizována jednoduchou geometrií, Reynoldsovo číslo je velmi nízké a je k dispozici výkonný počítač. Při řešení naprosté většiny praktických inženýrských úloh se musíme spokojit s přístupem RANS, pouze ve výjimečných případech lze použít metodu LES, metoda DNS je používána pro speciální vědecké úlohy. [28]

## 4.2 Rozdělení proudění

Proudění reálných tekutin lze rozdělit pomocí základních fyzikálních veličin – času a prostoru. Při rozdělení proudění dle uspořádání v prostoru se rozlišuje počet dimenzí – proudění třírozměrné (3D), kde jsou veličiny popsány třemi složkami prostoru; proudění dvourozměrné (2D), kde jsou veličiny popsány dvěma složkami a proudění jednorozměrné (1D) tj. proudění po křivce. Rozdělení proudění podle závislosti na čase se dělí na proudění ustálené (stacionární), které je nezávislé na čase a proudění neustálené (nestacionární), které je časově proměnné.



**Obr. 4.4** Základní rozdělení proudění na základě času a prostoru. [3]



### 4.3 Základní rovnice popisující proudění

Matematické modelování vychází ze základních rovnic proudění, kterými jsou *rovnice kontinuity*, *pohybová rovnice* a *energetická rovnice* (pokud je proudění stlačitelné, nebo zahrnuje přenos tepla).

Rovnice vychází ze tří fyzikálních zákonů:

1. *Zákon zachování hmoty* (rovnice kontinuity)
2. *Zákona zachování hybnosti* (Navier-Stokesovy rovnice)
3. *Zákona zachování energie* (energetická rovnice)

Další bilanční rovnice mohou být použity, pokud dochází ke směšování, hoření nebo k chemickým reakcím.

#### Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity vyjadřuje zákon zachování hmoty.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (4.2)$$

#### Navier-Stokesovy rovnice

Navier-Stokesovy rovnice vyjadřují rovnováhu sil působících na element proudící, viskózní kapaliny.

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i \quad (4.3)$$

První člen v soustavě N-S rovnic představuje zrychlení tekutiny, druhý člen reprezentuje členy představující nelineární zrychlení, které způsobuje u vyšších Reynoldsových čísel nestabilitu tj. náhodnost. První člen na pravé straně rovnice představuje tlakový gradient, následující člen resp. členy značí smyková napětí tekutiny způsobené její viskozitou. Tato smyková napětí způsobují deformaci tekutiny.

#### Energetická rovnice

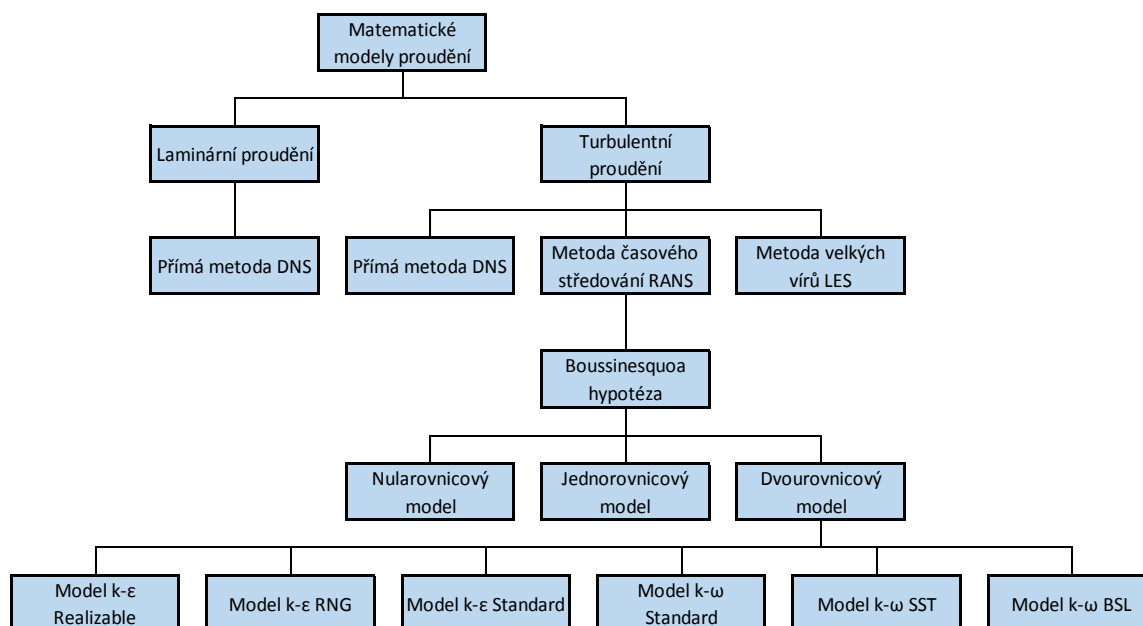
Energetická rovnice popisuje vedení tepla.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (u_j T)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \alpha \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)^2 \quad (4.4)$$

První člen na levé straně v energetické rovnici popisuje akumulaci tepla v kapalině, následující člen (členy) představuje konvekci (přestup tepla v důsledku proudění). První člen na pravé straně reprezentuje kondukcí (vedení tepla v tekutině). Poslední členy představují teplo vyvolané deformací a pohybem tekutiny.

## 4.4 Statistické modely turbulence

Výpočet turbulentního smykového proudění spočívá v přítomnosti Reynoldsova napětí v rovnicích popisujících střední pohyb tekutiny. Na rozdíl od laminárního proudění systém rovnic turbulentního proudění není v důsledku přítomnosti Reynoldsových napětí uzavřený, proto je nutné doplnit jej o přídatné rovnice či empirické vztahy. Doplněný systém lze pak označovat jako model turbulence. Modely turbulence lze dělit do několika skupin (obr. 4.5).



**Obr. 4.5** Výčet použitých dvourovnicových modelů použitých při řešení problematiky papsku. [3]

### 4.4.1 Reynoldsova rovnice

Turbulentní proudění má náhodný charakter, ale statisticky je stabilní. Při využití statistické metody časového středování lze turbulentní proudění řešit pomocí N-S rovnic. Okamžité hodnoty lze dle O. Reynoldse (1895) rozložit na časově středovanou část a flukтуаční složku. Jedná se o tzv. „Reynoldsovův rozklad“ na časově střednou složku  $\overline{u}(x, t)$  a flukтуаční složku  $u'(x, t)$ .

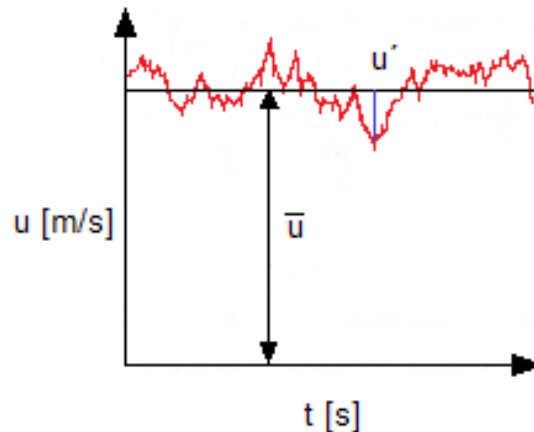
$$u(x, t) = \overline{u}(x, t) + u'(x, t) \quad (4.5)$$

Střední hodnota rychlosti:

$$\overline{u}_x = \frac{1}{T} \int_0^T u_x dt \quad (4.6)$$

Střední hodnota fluktuací rychlosti:

$$\overline{u'_x} = \frac{1}{T} \int_0^T u'_x dt = 0 \quad (4.7)$$



**Obr. 4.6** Fluktuace a časově středovaná část rychlosti.

Při aplikaci Reynoldsova rozkladu veličin (rychlost, tlak) do *rovnice kontinuity* a *Navier-Stokesovy rovnice* a jejich středováním lze získat středované formy:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho \bar{u}_i = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u'_i u'_j}) \quad (4.8a-b)$$

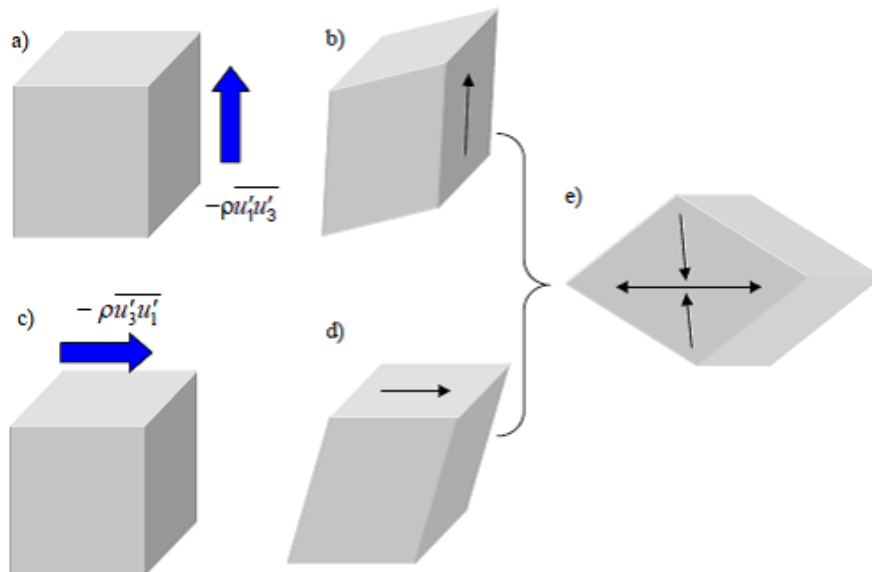
Středovaná Navier-Stokesova rovnice se také nazývá Reynoldsova rovnice. Její poslední člen  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  je tenzor napětí, jehož vznik souvisí s fluktuacemi rychlosti a je označován jako tenzor Reynoldsových napětí. Tato napětí existují jen při turbulentním proudění. Ve zcela vyvinutém turbulentním proudění je až na vazkou podvrstvu tenzor Reynoldsových napětí minimálně o dva řády větší než tenzor středního vazkého napětí (druhý člen na levé straně rovnice (4.8b)). [28]

#### 4.4.2 Reynoldsovo napětí

Při idealizaci proudění pomocí elementárních krychlí o objemu  $dV$  dochází při proudění tekutiny, jejíž rychlost není po průřezu konstantní, k deformaci krychle z důvodu rozdílných rychlostí na jednotlivých plochách krychle (obr. 4.7(b)). Rychlost, pomocí které je tekutina o odlišné hustotě transportována přes plochu krychle, je tok hybnosti. Účinky toku hybnosti a síly na plochu krychle, jež se deformuje, jsou shodné.

Tekutina, pohybující se svislou fluktuací rychlostí  $u'_3$  se promíchává s tekutinou pohybující se vodorovnou rychlostí  $u'_1$ . Výsledkem promíchávání tekutin je složka Reynoldsových napětí  $-\rho \overline{u'_1 u'_3}$ . Obdobná situace nastává, pokud se změní strana krychle (obr. 4.7(c)), opět dochází k deformaci, která má jinou orientaci. Na obr. 4.7(e) jsou znázorněny deformace pro případy (a), (c). Jelikož jsou vzniklé deformace identické, pro jednotlivé deformace platí, že  $\overline{u'_3 u'_1} = \overline{u'_1 u'_3}$ . Stejný počet kombinací

vznikne pro plochy kolmé k dalším souřadnicovým směrům, získá se devět složek Reynoldsových napětí, které lze uspořádat do tenzoru napětí.



Obr. 4.7 Deformační účinky Reynoldsových napětí. [3]

Tenzor Reynoldsových napětí:

$$\begin{bmatrix} \overline{u'_1 u'_1} & \overline{u'_1 u'_2} & \overline{u'_1 u'_3} \\ \overline{u'_2 u'_1} & \overline{u'_2 u'_2} & \overline{u'_2 u'_3} \\ \overline{u'_3 u'_1} & \overline{u'_3 u'_2} & \overline{u'_3 u'_3} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Turbulentní tok hybnosti působí tedy jako napětí a je nazván Reynoldsovo napětí, pro které lze odvodit také transportní rovnice.

#### 4.4.2 Boussinesquova hypotéza

Mezi klasické metody modelování Reynoldsových napětí patří Boussinesquova hypotéza o turbulentní viskozitě. Podle této hypotézy jsou Reynoldsova napětí úměrná středním gradientům rychlosti obdobně, jako u vazkých napětí (Newtonův zákon). Konstantou úměrnosti je turbulentní viskozita  $\mu_t$ .

Laminární proudění molekulová viskozita (Newtonův zákon viskozity):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (4.10)$$

Vírová turbulentní viskozita:

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.11)$$

Předpoklad Boussinesquovy hypotézy:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \leftrightarrow \tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.12)$$

Obecně:

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.13)$$

Reynoldsovy rovnice poté přechází do tvaru:

$$\frac{\partial D \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ v_{eff} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) \quad (4.14)$$

kde je součinitel efektivní vazkosti  $v_{eff}(x, t) = \nu + \nu_T(x, t)$ . Turbulentní viskozita je vlastnost proudění (funkcí polohy a času). Výhodou Boussinesquovy hypotézy je nízká výpočetní náročnost na určení turbulentní viskozity. Nevýhodou je předpoklad, že turbulentní viskozita je izotropní skalární veličina. Nicméně podmínka izotropní turbulentní viskozity je dobře splněna pro proudění s jedním dominujícím turbulentním napětím. [28]

#### 4.4.3 Dvourovnicové modely turbulence (FLUENT)

##### 4.4.3.1 Modely $k-\varepsilon$ (Standard, RNG, Realizable)

Jedná se o dvourovnicové modely  $k-\varepsilon$ , které umožňují určení délkového i časového měřítko prostřednictvím dvou samostatných transportních rovnic. Patří mezi nejpoužívanější modely turbulence v inženýrské praxi. Níže uvedené modely (Standard, RNG a Realizable) řeší transportní rovnice pro  $k$  a  $\varepsilon$  a modelují Reynoldsova napětí pomocí turbulentní viskozity  $\mu_t$  podle Boussinesquovy hypotézy. Jednotlivé modely se liší způsobem stanovení turbulentní viskozity, v turbulentních Prandtlových číslech řídících turbulentní difuzi  $k$  a  $\varepsilon$  a v podmínkách generace a zániku v rovnici pro  $\varepsilon$ .

##### **Model $k-\varepsilon$ Standard**

Tento model navrhli *Launder a Spalding* v roce 1974. Patří k nejnámějším a v inženýrské praxi nejvyužívanějším modelům modelování turbulentního proudění. Mezi jeho výhody při modelování přenosu hybnosti a tepla patří ekonomičnost výpočtu a dostatečná přesnost pro široký rozsah typů turbulentního proudění. Hlavním předpokladem řešení daného modelu je plně vyvinuté turbulentní proudění a zanedbatelnost molekulární viskozity. Proto je tento model použitelný jen při vysokých Reynoldsových číslech. Je vhodný pro případy řešení volného smykového proudění s malými gradienty tlaku. [29]

*POZN.: Z následujících kapitol vyplývá, že model  $k-\varepsilon$  Standard vykazuje oproti zbylým modelům výborné vlastnosti při modelování volného proudění, tj. proudění tekutiny v paprsku, proto zde budou uvedeny základní rovnice, z nichž tento model vychází.*

Turbulentní vazkost:

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \sqrt{k} L \quad (4.15)$$

Modelová transportní rovnice pro turbulentní energii je použita ve tvaru:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j k)}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \bar{\rho} \varepsilon \quad (4.16)$$

Obdobným způsobem, jakým byla odvozena transportní rovnice pro Reynoldsova napětí resp. pro turbulentní energii, je možné odvodit exaktní transportní rovnici pro rychlost disipace  $\varepsilon$ . Avšak transportní rovnice pro rychlost disipace obsahuje velké množství neznámých korelací turbulentních veličin vyšších řádů a jejich aproximace je velmi obtížná. Z tohoto důvodu se používá tzv. modelová transportní rovnice, jež byla navržena jako ekvivalent rovnice pro turbulentní energii. Tuto transportní rovnici lze pro modely s turbulentní vazkostí upravit do tvaru:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\varepsilon}{k} C_{\varepsilon 1} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - \frac{\varepsilon}{k} C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon \quad (4.17)$$

kde je produkce kinetické energie  $P_k$ , pro kterou platí:

$$P_k = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left( \bar{\rho} k + \mu_t \frac{\partial \tilde{U}_l}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_k} \quad (4.18)$$

Model obsahuje celkem pět empirických konstant:  $C_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_{1\varepsilon}$  a  $C_{\varepsilon 2}$ , které je možné určit pomocí jednoduchých případů proudění či numerickou optimalizací. Podle Patela, Rodiho a Scheurerera se v různých variantách modelu  $k$ - $\varepsilon$  většinou používají hodnoty  $C_\mu = 0,09$ ;  $\sigma_k = 1,0$ ;  $\sigma_\varepsilon = 1,30$ ;  $C_{1\varepsilon} = 1,44$  a  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ . [19]

### Model $k$ - $\varepsilon$ RNG

Tento model byl odvozen pomocí statistické metody *renormalization group method* – RNG. Oproti modelu  $k$ - $\varepsilon$  Standard má několik vylepšení. Obsahuje člen navíc -  $R_\varepsilon$  v rovnici pro  $\varepsilon$ , jež zlepšuje přesnost při velkých rychlostech deformace. Zahrnuje vliv vírů na turbulenci a zvyšuje přesnost pro vířivé proudění. Obsahuje analytický vzorec pro turbulentní Prandtlovo číslo a analyticky odvozenou diferenciální rovnici pro efektivní viskozitu  $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ . Tyto vlastnosti činí model RNG přesnější a spolehlivější pro širší rozsah typů proudění oproti modelu  $k$ - $\varepsilon$  Standard. [29]

### Model $k$ - $\varepsilon$ Realizable

Jedná se o nejnovější model z výše uvedených  $k$ - $\varepsilon$  modelů. Oproti modelu standard má dvě podstatné odlišnosti. Obsahuje jinou formulaci pro turbulentní viskozitu a modifikovanou transportní rovnici

pro  $\varepsilon$ . Označení „Realizable“ udává, že tento model plní jistá matematická omezení při Reynoldsových napětích v souladu s fyzikou turbulentního proudění. Mezi jeho nedostatky patří tvorba nefyzikální turbulentní viskozity v situacích, kdy se výpočetní síť skládá z rotační a stacionární zóny (např. při otáčení míchadla). Tato nekorektnost je způsobena zahrnutím účinků střední rotace do definice turbulentní viskozity. [29]

#### 4.4.3.1 Modely $k-\omega$ (Standard, SST, BSL)

Jedná se o dvourovnicové modely  $k-\omega$ , které řeší dvě dodatečné diferenciální rovnice. Rovnice pro specifickou disipaci energie má  $\omega$  oproti rovnici pro  $\varepsilon$  několik výhod. Nejvýznamnější výhodou je možnost integrace rovnice bez dalších podmínek přes viskózní podvrstvu. Modely  $k-\omega$  lépe předpovídají záporný časový spád, mezní vrstvy a odtržení proudění.

##### **Model Standard $k-\omega$**

Jedná se o modifikaci Wilcoxova modelu  $k-\omega$ , který zahrnuje modifikace pro nízká Reynoldsova čísla, stlačitelnost a smykové proudění. Slabostí Wilcoxova modelu je citlivost při řešení hodnot  $k-\omega$  ve volném proudu mimo smykové vrstvy. Model Standard tato omezení částečně odstraňuje, přesto to může mít značný efekt při řešení volného smykového proudění. Model je přesný v blízkosti stěny a s rostoucí vzdáleností od stěny jeho přesnost klesá. [29]

##### **Model SST $k-\omega$ (Shear-Stress Transport)**

Tento model spojuje robustnost a přesnost modelu  $k-\omega$  v oblasti blízko stěny a modelem  $k-\varepsilon$ , jenž je efektivnější při volném proudění s rostoucí vzdáleností od stěny. Model vznikl konvertováním modelu  $k-\varepsilon$  do formulace  $k-\omega$ . V modelu je využito funkčního předpisu, který nabývá hodnoty jedna pro model  $k-\omega$  v blízkosti stěny a s rostoucí vzdáleností od stěn funkční hodnota klesá k nule, přičemž vliv modelu  $k-\varepsilon$  postupně narůstá v závislosti, ve které vlivu modelu  $k-\omega$  ubývá. Využití obou modelů činí model SST  $k-\omega$  přesnější a spolehlivější pro širší škálu proudění oproti modelu Standard  $k-\omega$ . [29]

##### **Model $k-\omega$ BSL (Baseline)**

Základní myšlenkou pro tvorbu modelu  $k-\omega$  bylo zachovat robustnost a přesnost Wilcoxova modelu  $k-\omega$  v blízkosti stěn a využití výhod modelu  $k-\varepsilon$  na modelování volného proudění. Za účelem využití výhod modelu  $k-\varepsilon$  došlo k transformaci modelu  $k-\varepsilon$  do formulace modelu  $k-\omega$ . Model  $k-\omega$  obsahuje totožné transportní rovnice jako model  $k-\omega$  SST. Oproti modelu  $k-\omega$  SST se liší ve velikosti některých konstant. [22]

## MODEL TURBULENTNÍHO PAPRSKU

### 5.1 Popis tvorby modelu

Na tvorbu modelu turbulentního ponořeného paprsku byly využity dvourovňové modely založené na turbulentní vazkosti a časovém středování Reynolds Navier-Stokesových rovnic (RANS). Konkrétně se jedná o modely  $k-\varepsilon$  (Realizable, RNG, Standard) a  $k-\omega$  (Standard, SST, BSL).

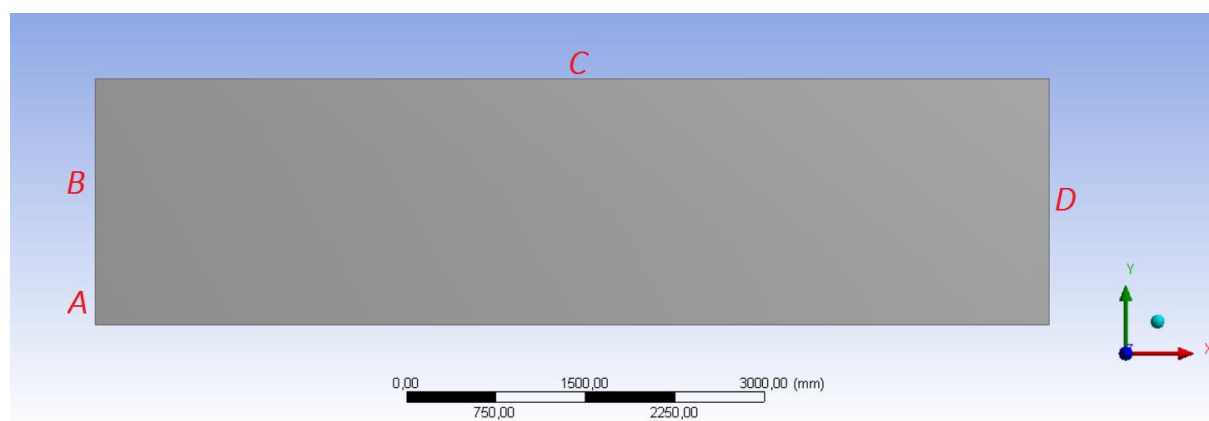
Postup řešení problematiky paprsku:

- 1) Pre-processing
  - a. Tvorba geometrie
  - b. Tvorba výpočetní sítě
  - c. Nastavení okrajových a počátečních podmínek
  - d. Nastavení fyzikálních parametrů modelu
  - e. Nastavení řešiče
- 2) Simulace – numerické řešení
- 3) Post-processing
  - a. Vyhodnocování výsledků
  - b. Návrh

### 5.2 Pre-Processing

#### 5.2.1 Tvorba geometrie

Použitá geometrie má tvar obdélníka o rozměrech uvedených v tab. 6. Rozměr  $D$  je zvolen s dostatečnou rezervou, aby nedocházelo k ovlivnění proudění tekutiny v paprsku. Základním poznatkem pro volbu velikosti rozměru  $D$  je velikost vstupního úhlu. Poloměr trysky  $r$  odpovídá rozměru  $A$ . Rozměry navržené geometrie jsou uvedeny v tab. 6.



Obr. 5.1 Geometrie modelu.



**Tabulka 6:** Rozměry základní geometrie modelu

Rozměr A	50 mm
Rozměr B	2000 mm
Rozměr C	8000 mm
Rozměr D	2050 mm

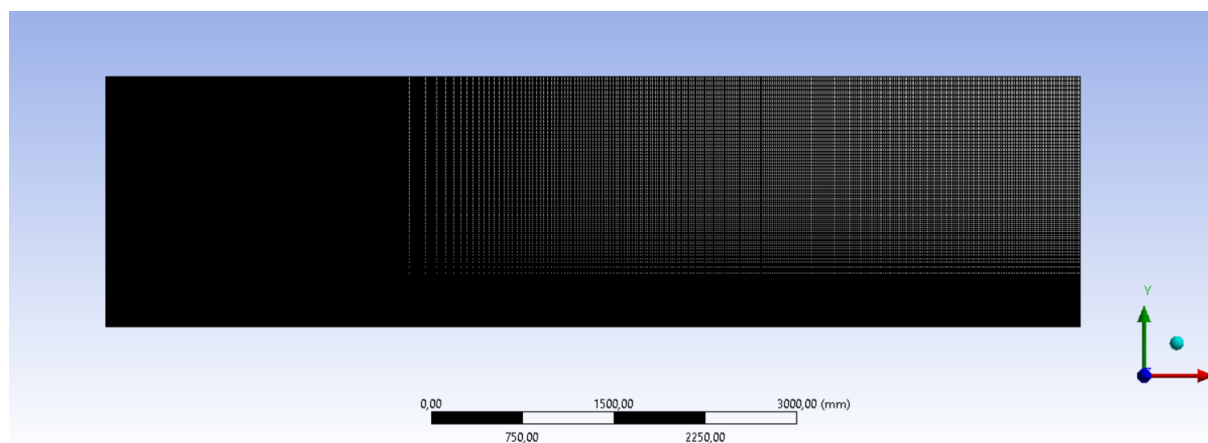
### 5.2.2 Tvorba výpočetní sítě

Návrh výpočetní sítě vychází z poznatků o proudění tekutiny v paprsku. Ze znalosti proudění lze v místech velkých gradientů výpočetní síť zahustit a v místech malých gradientů lze výpočetní síť zředit, tím je dosaženo snížení nároků na čas výpočtu. Aby nedocházelo k negativnímu ovlivnění kvality výpočtu, je zahuštění realizováno jako plynulé. Jedná se především o místa v blízkosti výtoku a osy paprsku. Zahuštění sítě bylo provedeno ve dvou směrech (směru proudění, tj. zleva doprava a zezdola nahoru). Zahuštění sítě ve směru proudění bylo provedeno po celé délce výpočetní oblasti, zatímco zahuštění ve svislém směru bylo provedeno pouze po délce hraně *B*, jelikož na úseku *A* (šířka trysky) byla výpočetní síť nezahuštěna.

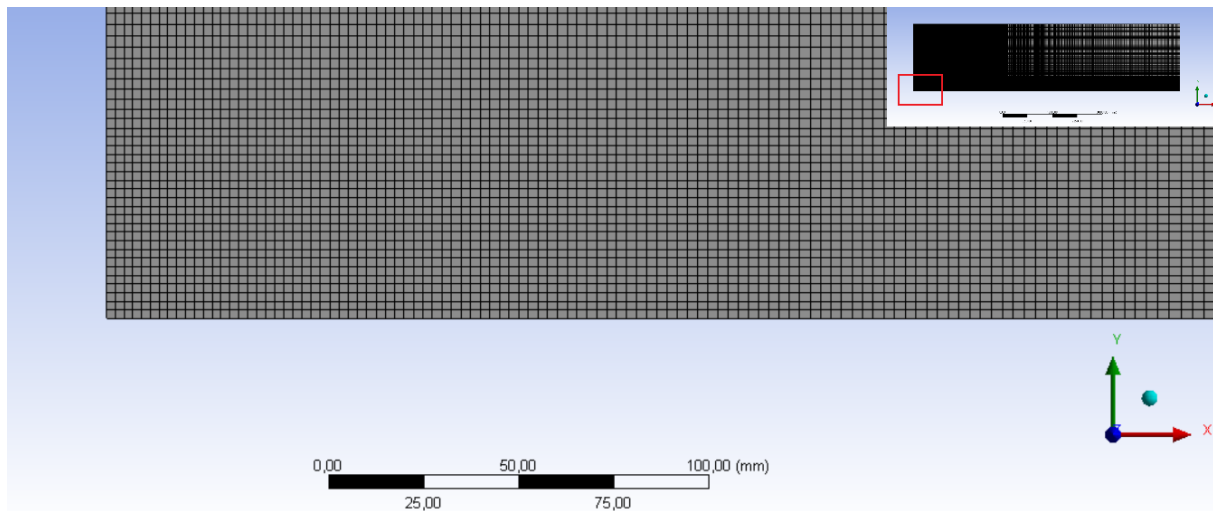
Parametry sítě:

- Povrchová 2D síť
- Čtyřúhelníková, strukturovaná síť
- Počet elementů 158 400

Nejvýznamnějším kritériem pro posouzení kvality buňky je nesouměrnost, kdy se posuzuje, jak hodně se buňka svým tvarem blíží ideálnímu pravidelnému geometrickému tvaru v souladu s odpovídajícím schématem sítě. Pokud je buňka jakkoliv deformována, je její kvalita horší. Obecně se kvalita každé buňky vyjadřuje bezrozměrným číslem v rozsahu 0 – 1, kde 0 znamená výsledek nejlepší a naopak 1 výsledek nejhorší, tedy problematickou buňku pro výpočty. [17]



**Obr. 5.2** Výpočetní 2D síť, proudění tekutiny je ve směru zleva doprava.



Obr. 5.3 Levý dolní roh výpočetní sítě (vstupní podmínka rychlosti).

**Mesh Quality:**

Minimum Orthogonal Quality = 1.00000e+00  
(Orthogonal Quality ranges from 0 to 1, where values close to 0 correspond to low quality.)

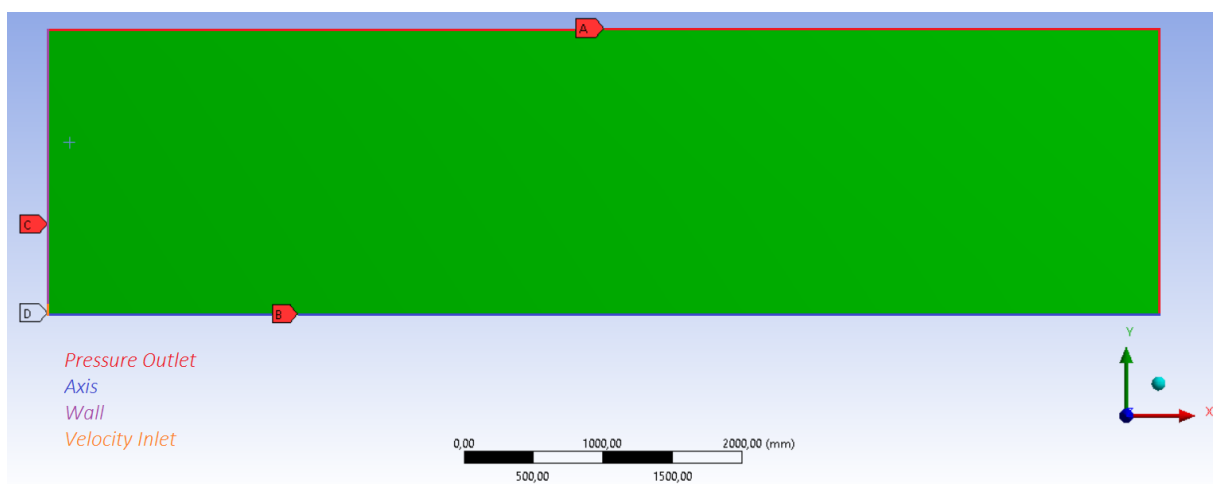
Maximum Ortho Skew = 0.00000e+00  
(Ortho Skew ranges from 0 to 1, where values close to 1 correspond to low quality.)

Maximum Aspect Ratio = 1.65481e+01

Obr. 5.4 Kvalita výpočetní sítě

### 5.2.3 Nastavení okrajových podmínek

Rozlišují se celkem dva druhy okrajových podmínek – *okrajové podmínky na hranici* a *podmínky pro oblasti kontinuity*.



Obr. 5.5 Okrajové podmínky použitého modelu.

Okrajové podmínky na hranici:

- A. Výstupní podmínka tlaku (*pressure outlet*)
- B. Osová podmínka (*axis*)

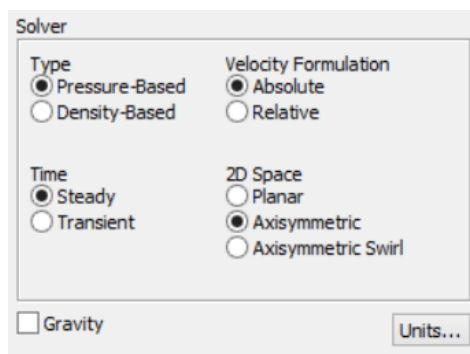
- C. Stěnová funkce (*wall*)
- D. Vstupní podmínka rychlosti (*velocity inlet*)

Podmínky pro oblast kontinuity:

- 1. Oblast kontinuity (*surface body - water*) – zelená barva (obr. 5.5)

#### 5.2.4 Nastavení parametrů modelu

##### Základní nastavení



Obr. 5.6 Základní nastavení simulace.

##### Volba modelu

Na řešení problematiky ponořeného turbulentního paprsku byly uplatněny modely:

- 1) Model  $k-\varepsilon$  Realizable
- 2) Model  $k-\varepsilon$  RNG
- 3) Model  $k-\varepsilon$  Standard
- 4) Model  $k-\omega$  Standard
- 5) Model  $k-\omega$  SST
- 6) Model  $k-\omega$  BSL

##### Volba materiálu (tekutiny)

Za proudící tekutinu byla zvolena voda, jejíž základní parametry jsou uvedeny v tab. 7. Parametry tekutiny (vody) v tab. 7 jsou uvažovány konstantními hodnotami.

Tabulka 7: Parametry tekutiny

Hustota	$\rho = 998,2 [kg.m^3]$
Dynamická viskozita	$\mu = 0,001003 [Pa.s^{-1}]$

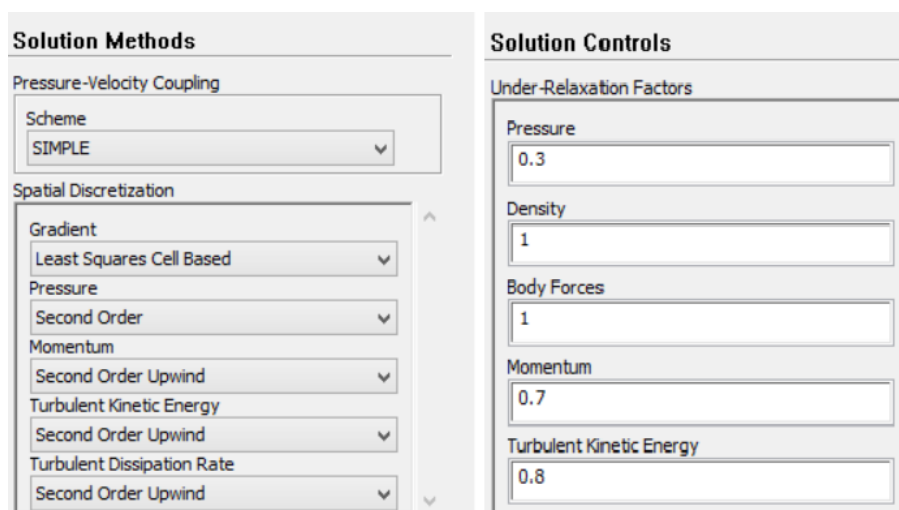
##### Nastavení okrajových podmínek

Okrajové podmínky byly pro všechny použité modely zvoleny konstantními hodnotami. Vstupní podmínka rychlosti (*velocity inlet*) byla určena hodnotou  $10 [m.s^{-1}]$ . Výstupní podmínka tlaku

(*pressure outlet*) byla určena hodnotou  $0 [N.m^{-2}]$ . Stěnová funkce (*wall*) byla navolena jako nepohyblivá stěna (*stationary wall*) bez prokluzu (*no slip*). Velikost turbulentní intenzity byla pro veškeré modely nastavena konstantní hodnotou 5%.

### 5.2.5 Nastavení řešiče

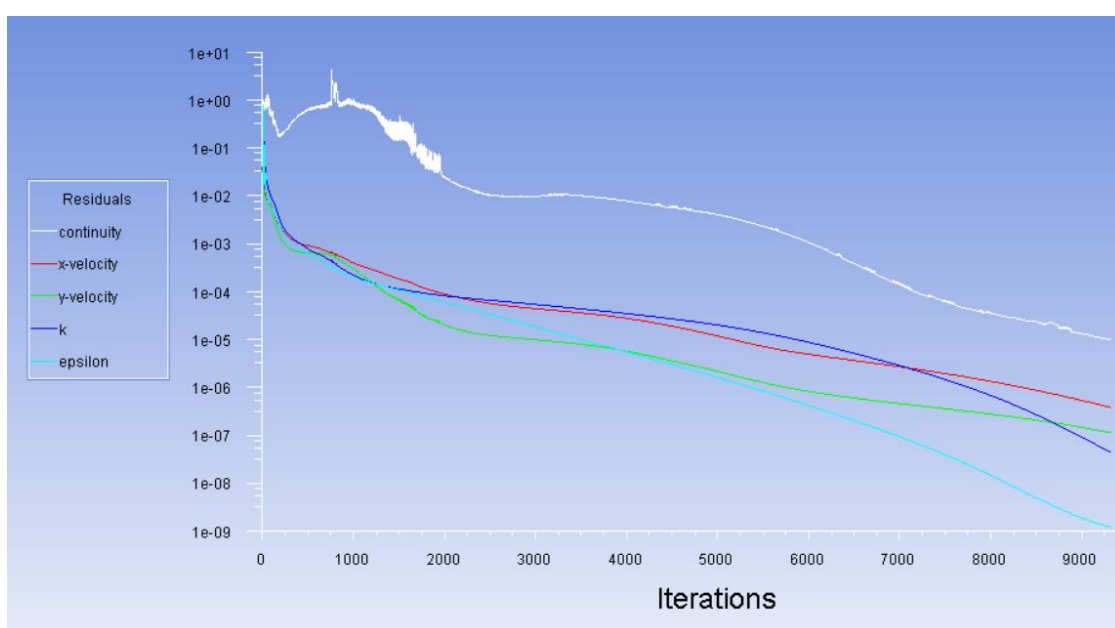
#### Metody řešení a kontrola řešení



Obr. 5.7 Základní nastavení řešiče.

### 5.3 Simulace

Za účelem získání kvalitních výsledků byla nastavena minimální velikost reziduí na hodnotu  $10E-05$  pro všechna rezidua (continuity, x-velocity, y-velocity, k a epsilon). Počet iterací se pro jednotlivé modely pohyboval okolo 10 000 (pro modelStandard 9 316).



Obr. 5.8 Průběh jednotlivých reziduí v závislosti na počtu iterací.

## 5.4 Post-processing

### 5.4.1 Vyhodnocování výsledků

V části vyhodnocování výsledků byly zkoumány výsledné hodnoty velikosti osově (maximální) rychlosti ve směru proudění a velikosti příčných rychlostí v jednotlivých profilech. Profily byly voleny po vzdálenosti odpovídající jednomu metru. Rychlosti byly převedeny do bezrozměrných forem grafu, kde byly postupně verifikovány. Kritériem pro vyhodnocení správnosti výsledků byly pro osově rychlosti experimentální vztahy pro stanovení osových rychlostí. Velikosti rychlostí v příčných profilech byly porovnány s Tollmienovým a Görtlerovým řešením. Dalšími charakteristikami paprsku, které byly zkoumány, byla délka jádra paprsku  $L_{ZFE}$ , poloha virtuálního počátku  $x_0$  a koeficient úměrnosti  $S_{1/2}$ .

#### 5.4.1.1 Vyhodnocení délky jádra paprsku

Při vyhodnocování rychlostí byly určeny délky jádra průřezu  $L_{ZEF}$  v závislosti na průměru trysky  $d$ . Výsledné hodnoty velikosti délky jádra paprsku jsou uvedeny v tab. 8.

**Tabulka 8:** Délka oblasti vývinu proudění

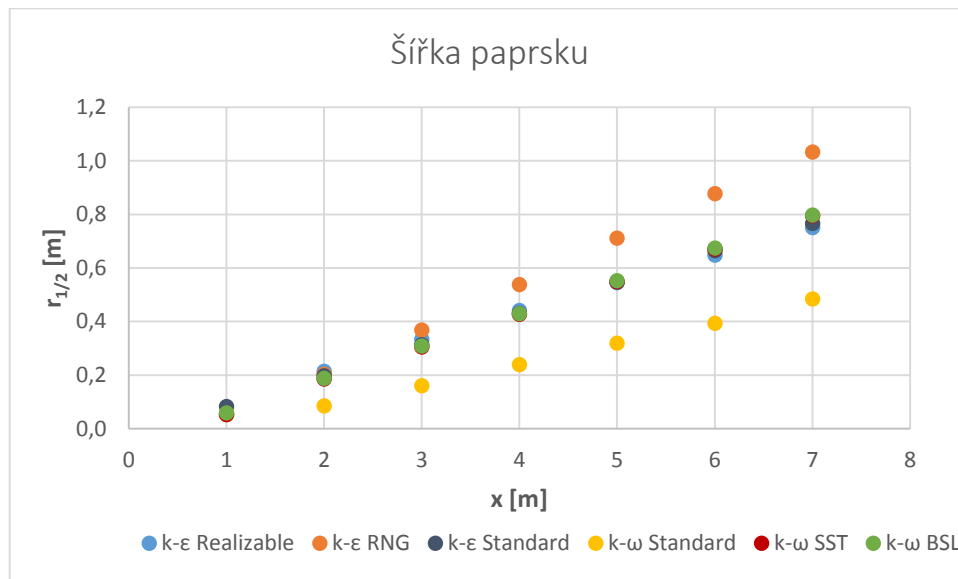
Model $k-\varepsilon$ Realizable	$L_{ZFE} = 9,5d$
Model $k-\varepsilon$ RNG	$L_{ZFE} = 10,1d$
Model $k-\varepsilon$ Standard	$L_{ZFE} = 7,7d$
Model $k-\omega$ Standard	$L_{ZFE} = 15,2d$
Model $k-\omega$ SST	$L_{ZFE} = 9,9d$
Model $k-\omega$ BSL	$L_{ZFE} = 9,7d$
Albertson	$L_{ZFE} = 6,2d$

Z výsledných hodnot délky jádra průřezu je patrné, že nejmenších hodnot délky jádra paprsku dosahuje model  $k-\varepsilon$  Standard a nejvíce se blíží hodnotám, které uvádí Albertson. Největší hodnoty délky jádra průřezu nabízí model  $k-\omega$  Standard, který dosahuje téměř dvojnásobku délky jádra paprsku modelu  $k-\varepsilon$  Standard a je zároveň nejvíce vzdálen od experimentálních výsledků. Zbylé modely poskytují vesměs obdobné hodnoty délky jádra paprsku.

#### 5.4.1.2 Vyhodnocení polohy virtuálního počátku a koeficientu úměrnosti

Poloha virtuálního počátku pro osově symetrické proudění tekutiny v paprsku se nachází na ose  $x$ . Virtuální počátek byl určen na základě znalosti průběhu šířky paprsku, přičemž platí, že virtuální počátek  $x_0$  se nachází v místě nulové šířky paprsku  $b(x_0) = 0$ . Pro určení šířky paprsku byly využity experimentální poznatky o proudění tekutiny v paprsku, tj. šířka paprsku lineárně narůstá ve směru proudění (koeficient úměrnosti je konstantní). Ze známého průběhu osově rychlosti  $u_{max}$  lze určit místo v průřezu, kde je rychlost poloviční rychlosti paprsku ( $u(r_{1/2}) = 0,5u_{max}$ ). Proložení těchto

bodů, reprezentujících místa poloviční (střední) rychlosti v paprsku přímkou, je možné určit velikost koeficientu úměrnosti  $S_{1/2}$ , která odpovídá směrnici přímky vzniklé proložením bodů a polohu virtuálního počátku  $x_0$ , který odpovídá průsečíku dané přímky s osou  $x$ .



**Graf 5.1** Výsledné hodnoty šířky paprsku.

Z výše uvedeného grafu 5.1 je patrné, že velikosti šířky paprsku  $r_{1/2}$  jsou přibližně stejné pro modely  $k-\varepsilon$  Realizable,  $k-\varepsilon$  Standard,  $k-\omega$  SST a  $k-\omega$  BSL, zatímco modely  $k-\varepsilon$  RNG a  $k-\omega$  Standard se výrazně odlišují. Výsledné hodnoty koeficientu úměrnosti  $S_{1/2}$  a virtuálního počátku  $x_0$  jsou uvedeny v tab. 9.

**Tabulka 9:** Zjištěné velikosti polohy virtuálního počátku a koeficientu úměrnosti

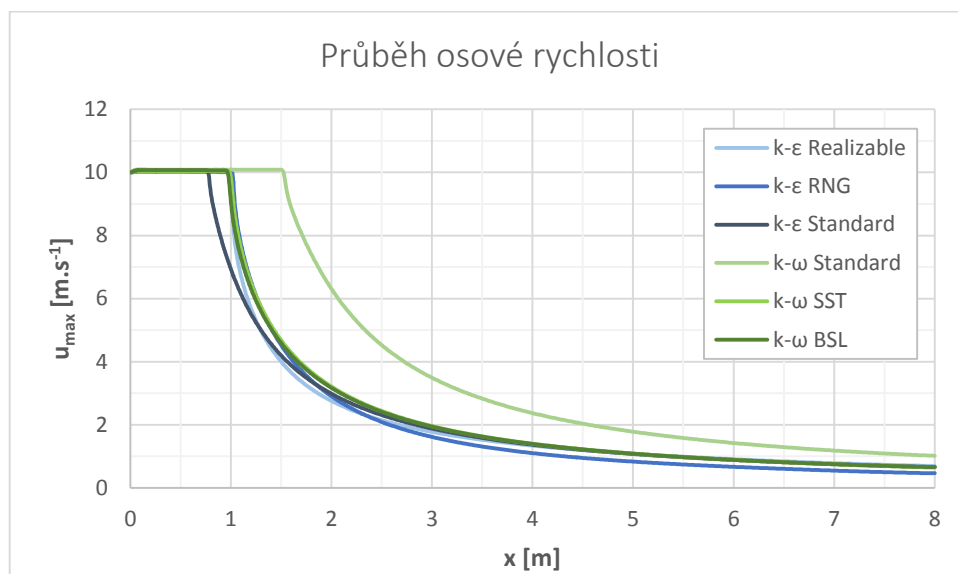
	Poloha virtuálního počátku $x_0$	Koeficient úměrnosti $S_{1/2}$
Model $k-\varepsilon$ Realizable	$x_0 = 1,6d$	$S_{1/2} = 0,110$
Model $k-\varepsilon$ RNG	$x_0 = 7,3d$	$S_{1/2} = 0,165$
Model $k-\varepsilon$ Standard	$x_0 = 2,7d$	$S_{1/2} = 0,115$
Model $k-\omega$ Standard	$x_0 = 6,9d$	$S_{1/2} = 0,076$
Model $k-\omega$ SST	$x_0 = 5,4d$	$S_{1/2} = 0,123$
Model $k-\omega$ BSL	$x_0 = 4,8d$	$S_{1/2} = 0,122$

Veškeré hodnoty virtuálního počátku uvedené v tab. 9 jsou kladné, z čehož vyplývá, že jsou umístěny za ústím trysky ve směru proudění. Výše uvedené hodnoty virtuálních počátků byly stanoveny při hodnotě intenzity turbulence rovné 5%.

#### 5.4.1.3 Vyhodnocení osových rychlostí

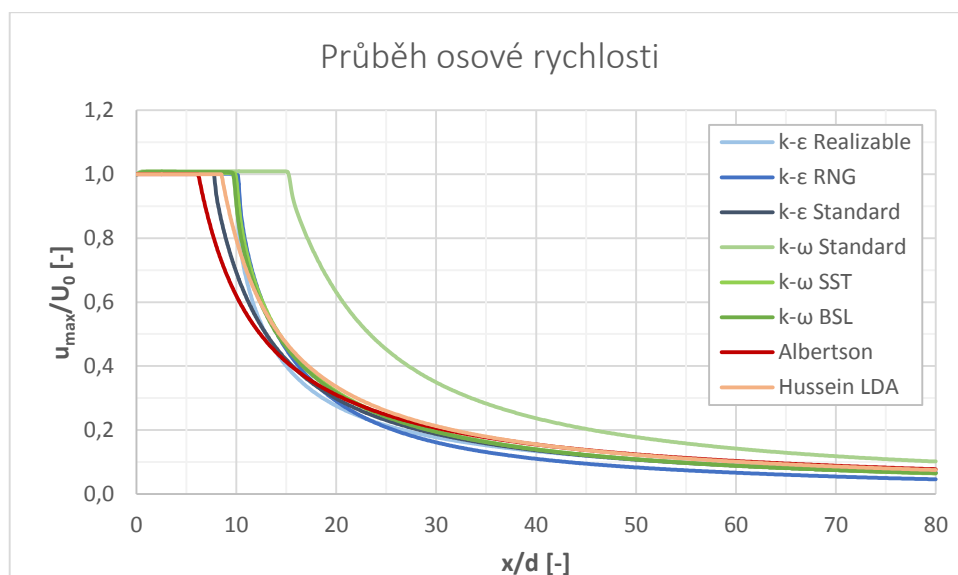
Srovnání osových (maximálních) rychlostí je uvedeno na grafu 5.2. K poklesu osových rychlostí dochází nejdříve u modelu  $k-\varepsilon$  Standard (nejkratší  $L_{ZFE}$ ). Modely  $k-\varepsilon$  Realizable,  $k-\omega$  SST a  $k-\omega$  BSL dosahují

přibližně stejných velikostí osové rychlosti a s rostoucí vzdáleností ve směru proudění dosahují obdobných hodnot jako model  $k-\varepsilon$  Standard. Model  $k-\varepsilon$  RNG poskytuje ve vzdálenostech  $x/d > 25$  nejmenší hodnoty osové rychlosti. Model  $k-\omega$  Standard představuje výrazné odchylení velikostí maximálních rychlostí od hodnot rychlostí získaných ze zbylých modelů.



**Graf 5.2** Průběh osových rychlostí v závislosti na poloze  $x$ .

Vynesením velikostí osových rychlostí z grafu 5.2 do bezrozměrné formy grafu získáme grafu 5.3. Při použití experimentálně zjištěných vztahů je patrné, že hodnoty osové (maximální) rychlosti spočtené pomocí modelu  $k-\omega$  Standard nelze považovat za reálné. Z ostatních modelů nejlépe koresponduje s experimentálními vztahy podle Albertsona a Hussein LDA model  $k-\varepsilon$  Standard.



**Graf 5.3** Srovnání osové rychlosti v bezrozměrném tvaru s experimentálními vztahy.

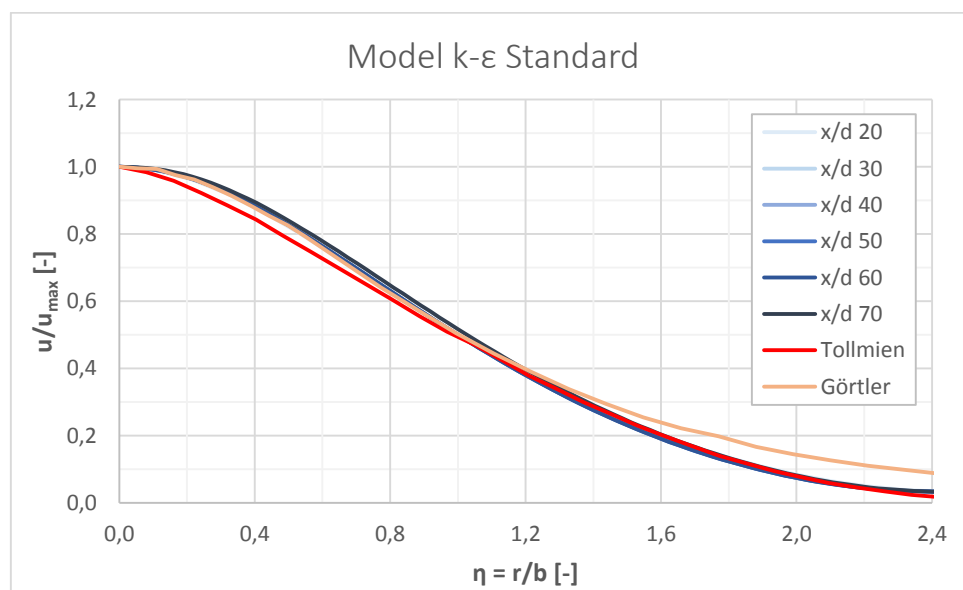
Nicméně výsledné hodnoty maximálních rychlostí získané pomocí modelů  $k-\varepsilon$  Realizable,  $k-\omega$  SST a  $k-\omega$  BSL se příliš neliší od hodnot získaných z experimentálních vztahů a po uplynutí vzdálenosti

$x/d = 15$  vesměs splývají společně s experimentálními vztahy a modelem  $k-\varepsilon$  Standard. Model  $k-\varepsilon$  RNG vykazuje zpočátku obdobné velikosti osových rychlostí jako modely  $k-\varepsilon$  Realizable,  $k-\omega$  SST, a  $k-\omega$  BSL, avšak přibližně ve vzdálenostech  $x/d > 20$  začíná vykazovat drobné odlišnosti od experimentálních vztahů. Nejvyšších hodnot osové rychlosti dosahuje model  $k-\omega$  Standard, zatímco nejmenších hodnot model  $k-\varepsilon$  RNG.

#### 5.4.1.4 Vyhodnocení průřezových rychlostí

Výsledné velikosti průřezových rychlostí získané na základě modelů  $k-\varepsilon$  a  $k-\omega$  byly vyneseny do bezrozměrných forem grafů a následně srovnány s Tollmienovým a Görtlerovým řešením rozložení rychlosti po průřezu. Na základě experimentálních poznatků a Tollmienově a Görtlerově řešení (podrobně rozebráno v předchozím textu) byla tato řešení aplikována vždy na jistou oblast, ve které nejlépe popisovala experimentální výsledky.

Při porovnání rychlostních profilů bylo zjištěno, že nejvěrohodnější velikosti profilových rychlostí poskytuje model  $k-\varepsilon$  Standard (graf 5.4). Výsledky porovnání rychlostních profilů s Tollmienovým a Görtlerovým řešením jsou uvedeny v přílohách na konci práce (přílohy III-VII).



**Graf 5.4** Porovnání výsledků modelu  $k-\varepsilon$  Standard s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.

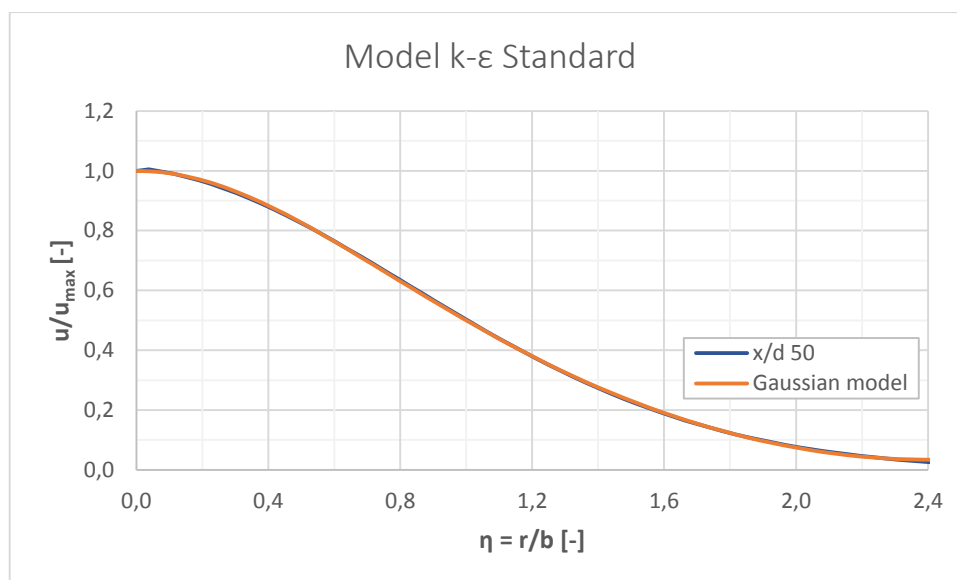
Model  $k-\varepsilon$  Standard velmi dobře koresponduje s Görtlerovým řešením v oblasti osy symetrie paprsku až do vzdálenosti přibližně  $\eta = 1,0$ . Ve vzdálenostech  $1,0 < \eta < 2,4$  jsou výsledky modelu velmi dobře popisovány pomocí Tollmienova řešení.



## 5.2 Zpracování výsledků modelu $k-\varepsilon$ Standard

### 5.2.1 Rozdělení rychlostí v bezrozměrné formě

Na základě srovnání použitých modelů  $k-\varepsilon$  a  $k-\omega$  bylo zjištěno, že nevhodnější model pro výpočet proudění ponořeného turbulentního paprsku je model  $k-\varepsilon$  Standard. Následně bude uvedena analýza dat modelu  $k-\varepsilon$  Standard s návrhem rovnic, popisujících obdržené výsledky.



**Graf 5.5** Vynesení rychlostních profilů do bezrozměrné formy.

Výše uvedený graf 5.5 dokládá, že při rozdělení v bezrozměrné formě ( $u/u_{max}, r/b$ ) splývají jednotlivé křivky rozdělení rychlosti po průřezu téměř v jednu univerzální křivku (ve vzdálenostech  $x/d > 20$ ). Pro získání předpisu funkce popisující křivku rozdělení rychlostí ve formě ( $u/u_{max}, r/b$ ) byla provedena aplikace několika modelů, z nichž nejlépe vystihuje dané rozložení rychlosti v bezrozměrné formě právě Gaussův model. Aplikace Gaussova modelu (rozdělení) byla provedena na profilové rychlosti středního profilu ( $x/d = 50$ ) vyšetřované oblasti ( $20 < x/d < 70$ ).

Gaussův model:

$$\frac{u}{u_{max}} = \alpha e^{\frac{-(\eta-\beta)^2}{2\gamma^2}} \quad (5.1)$$

kde je  $\eta = r/b$ .

Koeficienty Gaussova modelu získané z modelu  $k-\varepsilon$  Standard:

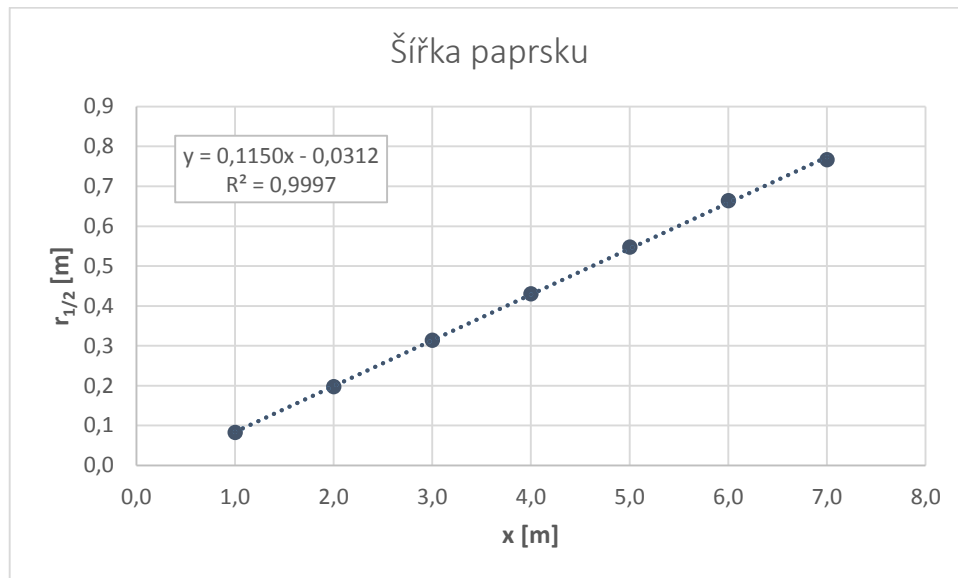
$$\alpha = 1,014\ 56; \beta = -0,092\ 45; \gamma = 0,921\ 66 \quad (5.2)$$

Výsledný tvar rozdělení rychlosti v bezrozměrné formě ( $20 < x/d < 70$ ):

$$\frac{u}{u_{max}} = 1,015 e^{\frac{-(\eta+0,093)^2}{1,699}} \quad (5.3)$$

### 5.2.2 Šířka paprsku

Ve vztahu (5.3) pro určení rozložení rychlostí v bezrozměrné formě vystupuje šířka paprsku  $b$ , která odpovídá svislé souřadnici  $r_{1/2}$ , při níž je rychlost poloviční rychlosti maximální (osové). Průběh šířky  $r_{1/2}$  paprsku je uveden na grafu 5.6.



**Graf 5.6** Průběh šířky paprsku v závislosti na  $x$ .

Za předpokladu konstantního nárůstu šířky paprsku můžeme body, reprezentující šířku paprsku při  $r(0,5u_{max})$ , proložit přímkou (graf 5.6). Následně je možné určit závislost šířky paprsku vzhledem ke vzdálenosti na ose  $x$ .

Šířka jádra paprsku:

$$b = 0,114\ 98x - 0,031\ 19 \quad (5.4)$$

Na základě výše uvedeného vztahu (5.4), jenž popisuje šířku paprsku, lze určit polohu virtuálního počátku  $x_0$ . Pro polohu virtuálního počátku (za předpokladu osově symetrického proudění) platí, že čáry reprezentující místa konstantní rychlosti protínají osu, tj.  $r_{1/2}(x) = b(x) = 0$ .

Poloha virtuálního počátku:

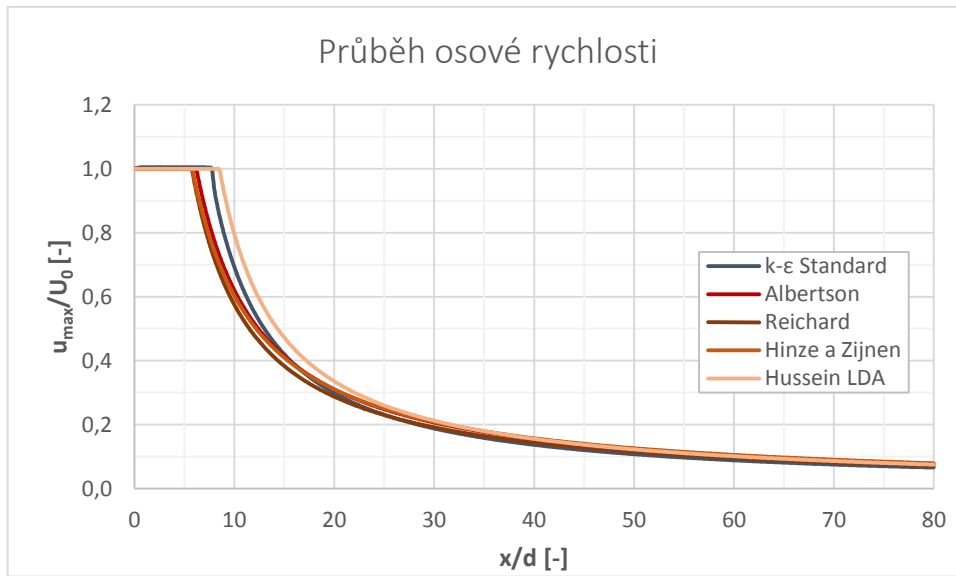
$$x_0 = 2,7d \quad (5.5)$$

Pomocí vztahu (5.4) lze určit vztah pro výpočet  $\eta$ , pro který platí:

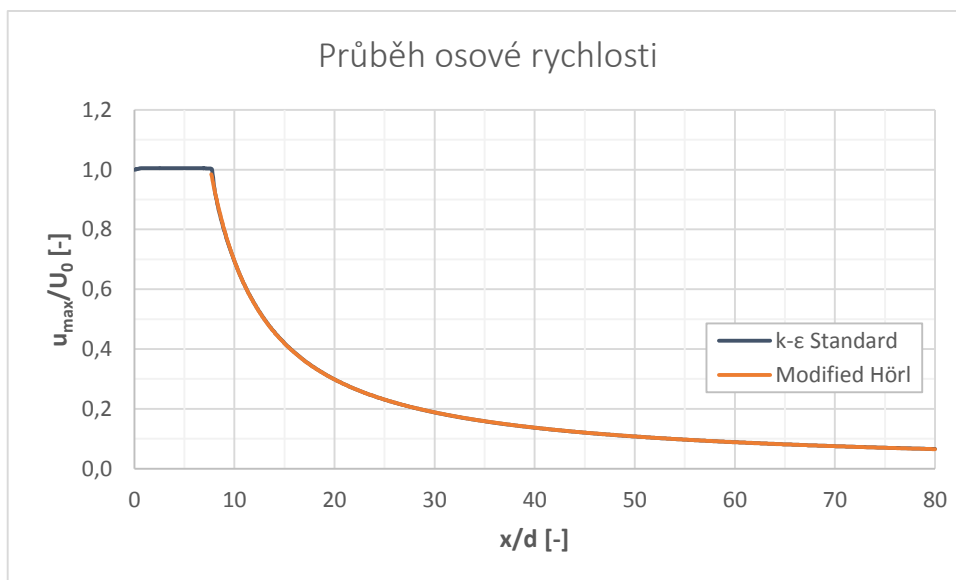
$$\eta = \frac{r}{0,115x - 0,031} \quad (5.6)$$

### 5.2.3 Rozdělení osových rychlostí

Ze srovnání hodnot osových rychlostí získaných pomocí modelu  $k-\varepsilon$  Standard se vztahy získanými na základě experimentálních dat vyplývá, že hodnoty osových rychlostí modelu  $k-\varepsilon$  Standard ve vzdálenostech větších než  $x/d = 15$  odpovídají experimentálně stanoveným výrazům (Albertson, Hinze a Zijnen, Reichardt). Srovnání experimentálních výrazů průběhu osových rychlostí se spočteným průběhem modelu  $k-\varepsilon$  Standard je patrné z níže uvedeného grafu 5.7.



**Graf 5.7** Porovnání modelu  $k-\varepsilon$  Standard s experimentálně stanovenými výrazy.



**Graf 5.8** Hörlův modifikovaný model rozdělení.

Modifikovaný Hörlův model lze použít k popisu poklesu osových rychlostí v bezrozměrné formě. Pokles osových rychlostí nastává po jisté vzdálenosti, která odpovídá délce jádra paprsku. Z tohoto důvodu je nezbytné rozlišovat ve směru proudění dva úseky. V prvním úseku, který je vymezen ústím trysky a délkou jádra paprsku, jsou osových rychlostí rovné rychlostem v trysce (za předpokladu

rovnoměrného rozložení rychlosti po průřezu). Zatímco ve druhém úseku, který počíná koncem jádra paprsku, dochází k poklesu osově rychlosti, jež lze popsat Hörlovým modifikovaným modelem. Grafické srovnání výsledků modelu  $k-\varepsilon$  Standard a Hörlova modifikovaného modelu jsou uvedeny na graf 5.8. Největší rozdíly ve spočtených rychlostech modelu  $k-\varepsilon$  Standard a Hörlovým modifikovaným modelem se vyskytují v oblasti přechodu z prvního (ZFE) do druhého úseku (ZEF). Nicméně tyto nepřesnosti nejsou nijak významné, a proto lze považovat Hörlovův modifikovaný model za velmi přesný. Hörlovův modifikovaný model:

$$\frac{u_{max}}{U_0} = \alpha \beta^{\frac{d}{x}} \left(\frac{x}{d}\right)^{\gamma} \quad (5.7)$$

Délka jádra paprsku určená pomocí modelu ( $k-\varepsilon$  Standard):

$$L_{ZFE} = 7,7d \quad (5.8)$$

Koeficienty Hörlova modifikovaného modelu získané z modelu  $k-\varepsilon$  Standard:

$$\alpha = 5,577\ 33; \beta = 15,193\ 12; \gamma = -1,022\ 96 \quad (5.9)$$

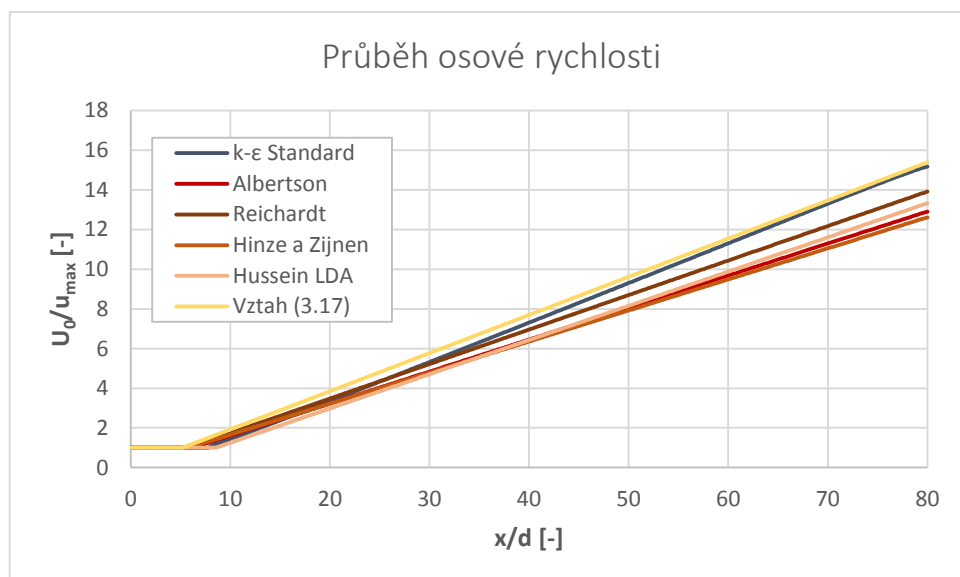
Vztah pro rozdělení osově rychlosti dle Hörlova modifikovaného modelu ( $x > L_{ZFE}$ ):

$$\frac{u_{max}}{U_0} = 5,577 * 15,193^{\frac{d}{x}} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1,023} \quad (5.10)$$

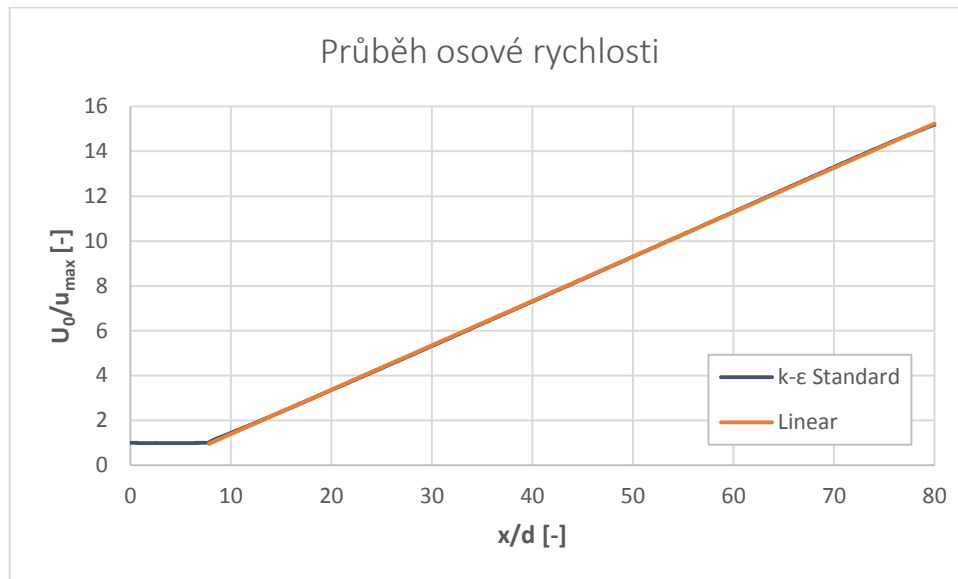
Alternativní způsob vyjádření osově rychlosti spočívá ve vyjádření rychlosti ve tvaru ( $U_0/u_{max}; x/d$ ), jež je inverzním případem k prvnímu způsobu. V důsledku vzájemné podobnosti profilů se osově rychlosti nacházejí v jedné přímce.

Přímkové proložení dat:

$$\frac{U_0}{u_{max}} = \alpha + \beta \frac{x}{d} \quad (5.11)$$



Graf 5.9 Porovnání výsledků modelu  $k-\varepsilon$  Standard s experimentálními výrazy a vztahem (3.17).



**Graf 5.10** Aplikace lineárního modelu na data získaná z modelu  $k-\varepsilon$  Standard.

Koeficienty lineárního modelu získané z výsledků modelu  $k-\varepsilon$  Standard:

$$\alpha = -0,583\ 24 ; \beta = 0,197\ 78 \quad (5.12)$$

Vztah pro rozdělení osové rychlosti dle lineárního modelu ( $x > L_{ZFE}$ ):

$$\frac{U_0}{u_{max}} = -0,583 + 0,198 \frac{x}{d} \quad (5.13)$$

Úpravou (5.13) lze dospět k výrazu ( $x > L_{ZFE}$ ):

$$\frac{u_{max}}{U_0} = \frac{5,056}{\left(\frac{x}{d} - 2,949\right)} \quad (5.14)$$

#### 5.2.4 Výsledný průběh rychlostí

Sloučením vztahů pro výpočet osové rychlosti ve směru proudění a vztahu popisujícího rozdělení rychlosti v bezrozměrné formě doplněného o vztah pro výpočet šířky paprsku lze získat rovnice popisující rozdělení rychlosti v ponořeném turbulentním paprsku. Oblast platnosti vzorců  $x/d > 20$ .

Výsledný průběh rychlostí:

$$u(x, r) = 5,655 * U_0 * 15,193 \frac{d}{x} \left(\frac{d}{x}\right)^{1,023} e^{\frac{-\left(\frac{r}{0,115x-0,031}+0,093\right)^2}{1,699}} \quad (5.15)$$

Alternativní způsob:

$$u(x, r) = \frac{5,136 * U_0}{\left(\frac{x}{d} - 2,949\right)} e^{\frac{-\left(\frac{r}{0,115x-0,031}+0,093\right)^2}{1,699}} \quad (5.16)$$

## ZÁVĚR

Pro modelování problematiky ponořeného turbulentního paprsku byly využity modely založené na modelování turbulentní viskozity. Konkrétně se jednalo o dvourovnicové modely  $k-\varepsilon$  (Realizable, RNG, Standard) a modely  $k-\omega$  (Standard, SST, BSL). Výsledky modelů  $k-\varepsilon$  a  $k-\omega$  byly srovnány s experimentálními výrazy a řešením rozdělení rychlosti po průřezu dle Tollmiena a Görtlera, což vedlo k závěru, že nej přesnější výsledky podává právě model  $k-\varepsilon$  Standard. Následně byly pro výsledné hodnoty rychlostí modelu  $k-\varepsilon$  Standard zpracované předpisy funkcí, které popisují průběh osových rychlostí a rozložení rychlostí po průřezu.

Průběh funkce profilových rychlostí podává dobré výsledky ve vzdálenosti  $x/d > 20$ , tj. v místech plně vyvinutého turbulentního proudění, kde dochází k uplatnění principu vzájemné podobnosti (jednotlivé profily splývají po vynesení do bezrozměrné formy do jednoho). Experimentální výsledky profilových rychlostí v oblasti plně vyvinutého turbulentního proudění lze nejlépe popsat pomocí Gaussova modelu, a proto byl tento model aplikován i na výsledky profilových rychlostí modelu  $k-\varepsilon$  Standard.

Průběh osových rychlostí popisují celkem dva vztahy (vztah 5.10 a 5.14). Výraz 5.10 vychází z Hörlova modifikovaného modelu (hyperbolická funkce) aplikovaného na hodnoty rychlostí v bezrozměrném tvaru  $(u_{max}/U_0; x/d)$ , zatímco výraz 5.14 je inverzním případem vztahu 5.10. Důsledkem vzájemné podobnosti profilů je lineární průběh rychlostí v odpovídajících si bodech v průřezu ve formě  $(U_0/u_{max}; x/d)$ , proto je možné použít lineární model na určení průběhu rychlostí. Průběh osových rychlostí popisovaný pomocí Hörlova modifikovaného modelu (výraz 5.10) a lineárního modelu (5.14) vystihují průběh osové rychlosti v oblasti vyvinutého proudění  $L_{ZEF}$ . Do této vzdálenosti jsou osové rychlosti rovné vstupním rychlostem ( $u_{max} = U_0$ ). Spojením vztahů pro průběh rychlosti po průřezu s průběhem osové rychlosti získáme výrazy 5.15 a 5.16, které umožňují určení bodové rychlosti o souřadnicích  $x$  a  $r$ , přičemž počátek souřadného systému se nachází v ústí trysky (proudění je osově symetrické kolem osy  $x$ ). Platnost výrazů 5.15, 5.16 je omezena na vzdálenosti ( $x/d > 20$ ).

Dalšími faktory, které byly vyhodnocovány, byla délka jádra paprsku a koeficient úměrnosti. Ze všech použitých modelů se nejvíce blíží experimentálnímu výrazu podle Albertsona právě model  $k-\varepsilon$  Standard. Rozdíl ve výsledcích experimentálních měření podle Albertsona a naměřených hodnot modelu  $k-\varepsilon$  Standard činí přibližně 1,5 násobek průměru trysky. Nicméně experimentálních výrazů pro délku jádra paprsku lze nalézt celou řadu, kde se výsledky pohybují okolo (6-10) násobků průměru trysky, a proto lze považovat výsledky modelu  $k-\varepsilon$  Standard za věrohodné. Srovnáním experimentálně naměřených koeficientů úměrnosti (tab. 5) s výsledky použitých modelů (tab. 9) lze dospět k závěru,

že model  $k$ - $\varepsilon$  Realizable poskytuje nejlepší výsledky koeficientu úměrnosti, i když dochází k odchýlení jednotlivých výsledků o více než 10%. Výsledky modelu  $k$ - $\varepsilon$  Standard se příliš neliší od výsledků modelu  $k$ - $\varepsilon$  Realizable, avšak od experimentálně stanovených hodnot koeficientu úměrnosti dosahují rozdílu až 15%. Poměrně odlišné hodnoty koeficientů úměrnosti mohou být z části vykompenzovány polohou virtuálního počátku, který se u modelu  $k$ - $\varepsilon$  nachází 2,7 násobku průměru trysky  $d$  od počátku souřadného systému (zvolený na ose v ústí trysky).

Významným faktorem podílejícím se na přesnosti a věrohodnosti výsledků je diskretizace modelu. V důsledku osově symetrického proudění byla geometrie navržena jako rovinná 2D, přičemž při nastavení řešení byl použit případ *axisymmetric* (osově symetrický případ). Tento případ je možné použít pro proudění tekutiny v paprsku, kdy se na rovinné geometrii resp. výpočetní síti řeší proudění ve 360° okolo osy. Pokud by byla problematika paprsku řešena jako *planar* (rovinný případ), došlo by k výraznému zkreslení obdržných výsledků (Příloha IX). Tento případ by našel uplatnění, pokud by se jednalo o proudění ze štěrbinové (obdélníkové) trysky, kdy by byl poměr mezi výškou trysky  $h$  a šířkou trysky  $b$  dostatečně velký (tryska by byla dostatečně dlouhá, aby nedocházelo k ovlivnění proudění ze stran). Další možností nastavení řešení by byl případ *axisymmetric swirl* (opět osově symetrický případ s nenulovou rotační složkou), avšak proudění v paprsku se uvažuje jako nevířivé (složky rychlosti  $w$  se uvažují nulové).

Veškeré použité modely vycházely z jedné (universální) výpočetní sítě, která byla realizována jako strukturovaná, čtyřúhelníková s počtem elementů 158 400. Výpočetní síť byla vytvořena na základě poznatků o proudění tekutiny v paprsku, kdy bylo v místech očekávaných velkých gradientů rychlostí provedeno zahuštění výpočetní sítě. Zahuštění výpočetní sítě bylo plynulé, aby nedocházelo ke skokovým změnám, které by mohly vést k negativnímu ovlivnění výpočtu. Volbou zahuštění výpočetní sítě lze dosáhnout nižších nároků na celkovou výpočtovou paměť počítače a úspory času simulace. Výrazným ušetřením výpočtového času byla možnost řešení proudění jako osově symetrické, kdy se bylo možné omezit pouze na rovinnou geometrii resp. výpočetní síť. Důležitým krokem pro obdržení kvalitních výsledků bylo zvýšení přesnosti výpočtu jednotlivých reziduí (kontinuity, rychlosti ve směru osy  $x$ , rychlosti ve směru osy  $y$ , kinetické energie  $k$ , a množství disipace energie  $\varepsilon$ ) na velikost alespoň  $10E-05$ . Rozdíl v hustotě výpočetní sítě se nejvíce uplatňuje v blízkosti osy paprsku. V příloze VIII jsou uvedeny dva rychlostní profily, které jsou zjišťované na výpočetní síti s různým počtem elementů. Největší citlivost výsledků na hustotu výpočetní sítě se projevuje v blízkosti osy paprsku, kde jsou největší rychlostí gradienty a zároveň největší křivost rychlostního profilu, a proto je nutné zhustit v těchto místech výpočetní síť.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] ABRAMOVICH, G. N. *The Theory of Turbulent Jets*. 1. vydání. Massachusetts: The MIT Press, 1963. ISBN 9780262511377.
- [2] ALBERTSON, M. L., Y. B. DAI, R. A. JENSEN a Hunter ROUSE. *Diffusion of Submerged Jet*. New York: American Society of Civil Engineers, 1950.
- [3] BLEJCHAŘ, Tomáš. *Turbulence Modelování CFX: Učební text*. 1. vydání. Ostrava: VŠB, 2010.
- [4] BREUSERS, H. N. C. *International Course in Hydraulic Engineering: Lecture Notes on Turbulence*. 1. vydání. Delft: Delft Hydraulics, 1989.
- [5] CHEN a HAI-BO. *Turbulent Boyant Jets and Plumes in Flowing Ambient Environments*. 3. vydání. Aalborg: Department of Civil Engineering, Aalborg University, 1991. ISBN 87-90034-16-3.
- [6] CUSHMAN-ROISIN, Benoit. Turbulent Jets. In: *Thayer School of Engineering at Dartmouth* [online]. Dartmouth [cit. 2016-04-02]. Dostupné z: <https://engineering.dartmouth.edu/~d30345d/courses/engs43/Turbulent-Jet.pdf>
- [7] CUSHMAN-ROISIN, Benoit. Turbulent Jets: Turbulence in Fluids. In: *Thayer School of Engineering at Dartmouth* [online]. Dartmouth [cit. 2016-04-02]. Dostupné z: <https://thayer.dartmouth.edu/~d30345d/courses/engs250/Jets.pdf>
- [8] CUSHMAN-ROISIN, Benoit. Turbulent Jets: Environmental Fluid Mechanics. In: *Thayer School of Engineering at Dartmouth* [online]. Dartmouth [cit. 2016-04-02]. Dostupné z: <https://thayer.dartmouth.edu/~d30345d/courses/engs151/EFM-Jets-Puffs.pdf>
- [9] CUSHMAN-ROISIN, Benoit. *Environmental Fluid Mechanics*. 1. vydání. Dartmouth College: Thayer School of Engineering, 2014.
- [10] DAVIDSON, Lars. *Fluid mechanics, turbulent flow and turbulence modeling* [online]. 1. vydání. Göteborg, Sweden: Division of Fluid Mechanics, Department of Applied Mechanics Chalmers University of Technology, 2016 [cit. 2016-03-31]. Dostupné z: [http://www.tfd.chalmers.se/~lada/postscript\\_files/solids-and-fluids\\_turbulent-flow\\_turbulence-modelling.pdf](http://www.tfd.chalmers.se/~lada/postscript_files/solids-and-fluids_turbulent-flow_turbulence-modelling.pdf)
- [11] DIMOTAKIS, Paul. *Some issues on turbulent mixing and turbulence* [online]. California Institute of Technology Pasadena, California 91125 [cit. 2016-03-31]. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.41.5461&rep=rep1&type=pdf>
- [12] Jak je to s vodotryskem velryb. In: *SAVClupol.cz* [online]. UPOL [cit. 2016-04-02]. Dostupné z: [http://www.savci.upol.cz/faq/kapsa/kk\\_11.htm](http://www.savci.upol.cz/faq/kapsa/kk_11.htm)
- [13] Johann Andreas von Segner: Hungarian physicist and mathematician. In: *Encyclopædia Britannica* [online]. Encyclopaedia Britannica [cit. 2016-04-02]. Dostupné z: <http://www.britannica.com/biography/Johann-Andreas-von-Segner>
- [14] KARIMIPANAH, Taghli. *Turbulent jets in confined spaces: Application in mixing ventilation, Experimental and Numerical Studies*. Gävle, Sweden, 1996. Disertační práce. Kungl Tekniska Högskolan.
- [15] KOLÁŘ, Václav. *Hydraulika*. 1. vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966.



- [16] KOLÁŘ, Václav, Cyril PATOČKA a Jiří BÉM. *Hydraulika*. 1. vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1983.
- [17] KOZUBKOVÁ, Milada. *Modelování proudění tekutin Ansys, CFX* [online]. 1. vydání. Ostrava: VŠB – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2008 [cit. 2016-03-31]. Dostupné z: <http://www.338.vsb.cz/PDF/Kozubkova-Fluent.pdf>
- [18] POPE, Stephen B. *Turbulent flows*. 1. vydání. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge, 2000. ISBN 0 521 59125 2.
- [19] PŘÍHODA, Jaromír a Petr LOUDA. *Matematické modelování turbulentního proudění*. První vydání. Praha: ČVUT, Thákurova 1, 160 41 Praha 6, 2007. ISBN 978-80-01-03623-5.
- [20] RAJARATMAN, N. *Developments in Water Science: Turbulent Jets*. 1. vydání. Amsterdam: Elsevier, 1976. ISBN 9780080869964.
- [21] SU, Lester. Turbulent Free Shear Flows: Jets. In: *Applied Fluid Imaging Laboratory* [online]. Baltimore: Johns Hopkins University, 2005 [cit. 2016-04-03]. Dostupné z: <http://www.imaging.me.jhu.edu/PDF/635lec05-turbshear1.pdf>
- [22] The Menter Baseline Turbulence Model: Standard Menter Baseline Two-Equation Model (BSL). *Turbulence Modeling Resource: Langley Research Center* [online]. Langley [cit. 2016-04-30]. Dostupné z: <http://turbmodels.larc.nasa.gov/bsl.html>
- [23] TENNEKES, H. a J. L. LUMLEY. *A First Course in Turbulence*. 1. vydání. The Massachusetts Institute of Technology: Kingsport Press United States of America, 1972. ISBN 0 262 20019 8.
- [24] TESAŘ, Václav. *Mezní vrstvy a turbulence*. 2. vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1996. ISBN 80-01-00675-1.
- [25] TOWNSEND, A. A. *The structure of turbulent shear flow*. 2. vydání. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1976. ISBN 0 521 29819 9.
- [26] Trysková injektáž. In: *Zakládání staveb* [online]. Praha: Zakládání staveb, a.s. [cit. 2016-04-02]. Dostupné z: <http://www.zakladani.cz/cz/tryskova-injektaz>
- [27] Turbulent Jets: Theory and Models. In: *Lunds Tekniska Högskola* [online]. Lunds [cit. 2016-02-28]. Dostupné z: <http://www.lth.se/fileadmin/tvrl/files/vvr176/lecture5.pdf>
- [28] URUBA, Václav. *Turbulence*. 1. vydání. Praha: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 8001043304.
- [29] VLČEK, Petr. Modelování turbulentního proudění. In: *Chemické a potravinářské strojnictví. Fakulta strojní ČVUT Praha* [online]. Praha [cit. 2016-03-31]. Dostupné z: <http://chps.fsid.cvut.cz/pt/2013/pdf/3509.pdf>

## SEZNAM OBRÁZKŮ

- Obr. 1.1a** Kresba turbulentního proudění - autor Leonardo da Vinci (kolem roku 1500).
- Obr. 1.1b** Obraz *Hvězdná noc* (patrné turbulentní struktury na obloze) - autor Vincent van Gogh (1889).
- Obr. 1.2** Příklad turbulence v přírodě - North Pier, Tynemouth (U. K.).  
Dostupné z: <https://www.flickr.com/photos/ventnor49/16224230719/in/photolist-gHFqxR-ezKq5B-nF6VGN-dtpo6i-oht1m9-ofg59Y-4vBARH-es4kmm-aunqXG-qugSL2-8Cax2S-6tffQr-35pn8k-6iyYWD-bjc9g6-rtaupM-8QR7E1-bCszmt-mzK6fu-eXBGYQ-9TpCin-9gVA4o-6Jt32u-5PNqug-5ECJoV-qZkyDa-nZvoR6-pd2DFF-oHzJE9-d2Fij1-obiRvi-fmcseE-7tWzLr-4EPaCL-dckbuT-Cd8tN-4ATddk-aEhpFb-nKnoYr-eCcrX4-aL5yD-bL5ooc-74Pfiw-dXSUji-oWZzr9-brDVgP-oKK4hC-4PSuhq-cM2XgC-5uo5cT>
- Obr. 1.3** Rychlostní profil turbulentní mezní vrstvy.
- Obr. 1.4** Paprsek (*Jet*) tekutiny vytékající z trysky. Volná smyková vrstva vzniká na horní a spodní hranici oblasti proudění.
- Obr. 1.5** Směšovací vrstvy (*Mixing Layers*).  
Dostupné z: [http://berndnoack.com/images/brn\\_ml\\_exp.jpg](http://berndnoack.com/images/brn_ml_exp.jpg)
- Obr. 1.6** Obtékání překážky a tvorba úplavů (*Wakes*).  
Dostupné z: <http://fuckyeahfluidynamics.tumblr.com/image/66970850100>
- Obr. 1.7** Kaskáda vírů různé velikosti.
- Obr. 1.8** Příklady velkých a malých vírů.
- Obr. 1.9** *Turbulentní paprsky* při rozdílných velikostech Reynoldsova čísla případ relativně malého Reynoldsova čísla ( $Re \sim 2,5 \times 10^3$ ), (napravo) případ relativně vysokého Reynoldsova čísla ( $Re \sim 10^4$ ).
- Obr. 1.10** Příklad *směšovacích vrstev*. Horní proudění se odehrává při rychlostech 38 m/s a spodní proudění 100 m/s. Proudění probíhá zleva doprava.
- Obr. 1.11** Orbitální rychlost víru  $\omega$  versus délkový rozměr víru  $d$  v homogenní turbulenci. Největší měřítka dosahují největších orbitálních rychlostí.
- Obr. 1.12** Turbulentní energetická kaskáda. Na základě této teorie dochází k předávání energie od vnějších sil největším možným měřítkům. Postupně dochází k transportu energie skrze jednotlivé víry nejmenším měřítkům, kde je energie disipována viskozitou
- Obr. 1.13** Spektrum kinetické energie  $k$  turbulence.
- Obr. 1.14** Podélné energetické spektrum turbulence určené na základě mnoha pozorování v laboratoři.
- Obr. 1.15** Přechod laminárního do turbulentního režimu proudění.  
Dostupné z: <https://www.flickr.com/photos/wwarby/11775069136/in/photolist-iWwiPo-hne86D-bjBHmg-aciAMH-nFXM8K-e915zd-bZaLZQ-gFTvaT-fD5hSj-8EvcNt-a6YkbN-9ry6qr-aPiwCZ-oVvjJS-9aXBfM-mvcXGZ-fJfmk7-8QspCo-9vNYF6-obrBTw-nJ34gt-8WhA8U-aavBWq-fusxYH-cnUYz9-6Uk2tq-iTc5DF-8hPNqP-dDNZgD-7t9WSK-cjpQp5-6Vd8wr-8Qthwd-89322-5tT2Qw-eZefUF-4C66tx-914jxY-pPMWoD-ox4JQ7-mpQPtt-c5XXRL-fhkLXX-8zXigJ-58rFbG-dYBPFQ-9coefA-7VnXiX-84skqW-9c6eSR>

- Obr. 2.1** Vodní paprsek vypouštěný z trysky do nádrže s vodou.
- Obr. 2.2a** Paprsek tvořící protiproud pro plavce.  
Dostupné z: <http://www.riverflowwatercare.com/Product/6-Pool-Fittings-and-Accessories/47-Counter-Current-Jet-swim.aspx>
- Obr. 2.2b** Tryska masážní vany.  
Dostupné z: <http://www.maax.com/~media/images/spa%20therapy/spa%20lifestyle/water-massage-whirlpool-pro.jpg?h=310&la=en&w=310>
- Obr. 2.3a** Ukázka obarvených paprsků.  
Dostupné z: <http://s3.reutersmedia.net/resources/r/?m=02&d=20150619&t=2&i=1057599325&w=644&fh=&fw=&ll=&pl=&sq=&r=LYNXMPEB5IOYQ>
- Obr. 2.3b** Ukázka proudového motoru dopravního letadla, proudový motor funguje na principu zákona akce a reakce (třetí Newtonův zákon).  
Dostupné z: <http://www.mvp.cufo.cz/materialy/66a.htm>
- Obr. 2.4a** Trysková injektáž.  
Dostupné z: [http://www.geobos.com.tr/images/faaliyet/f2\\_5.jpg](http://www.geobos.com.tr/images/faaliyet/f2_5.jpg)
- Obr. 2.4b** Aeolipile.  
Dostupné z: <http://modelengines.info/aeolipile/DSCF4274.JPG>
- Obr. 2.5a** Peltonova turbína.  
Dostupné z: <http://www.seilnacht.com/Lexikon/pelt02.gif>
- Obr. 2.5b** Segnerovo kolo.  
Dostupné z: [http://homen.vsb.cz/hgf/546/Materialy/Radka\\_2010/images/bio/obr3.jpg](http://homen.vsb.cz/hgf/546/Materialy/Radka_2010/images/bio/obr3.jpg)
- Obr. 2.6a** Asuánská přehrada – Egypt.  
Dostupné z: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/Aswan\\_Dam.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/Aswan_Dam.jpg)
- Obr. 2.6b** Vypouštění odpadních vod do moře.  
Dostupné z: <http://followgreenliving.com/wp-content/uploads/2014/08/sewage.jpg>
- Obr. 2.7a** Gejzír Strokkur na Islandu.  
Dostupné z: <http://citymagazine.si/wp-content/uploads/2013/10/Strokkur-geyser-660x509.jpg>
- Obr. 2.7b** Hydrotermální průduch – *White smoker*.  
Dostupné z: [http://www.letelegramme.fr/ar/imgproxy.php/PhotoIntuitions/2012/03/01/1618085\\_11599947-fumeurs04q-20120301-r127d.jpg?article=20120301-1001618085&aaammj=20120301](http://www.letelegramme.fr/ar/imgproxy.php/PhotoIntuitions/2012/03/01/1618085_11599947-fumeurs04q-20120301-r127d.jpg?article=20120301-1001618085&aaammj=20120301)
- Obr. 2.8a** Paprsek (*Jet*).  
Dostupné z: [https://www.uni-due.de/imperia/md/images/ivg/stroemungssimulation/gallery\\_kempf\\_rfcopy.jpeg](https://www.uni-due.de/imperia/md/images/ivg/stroemungssimulation/gallery_kempf_rfcopy.jpeg)
- Obr. 2.8b** Přerušovaný paprsek (*Puff*).  
Dostupné z: <https://i.ytimg.com/vi/snAC5Y5DTSU/maxresdefault.jpg>
- Obr. 2.9a** Oblak (*Plume*) znečištění vtékající do Michiganského jezera.  
Dostupné z: [http://www.therapidian.org/sites/default/files/article\\_images/grand-river-plume.jpg](http://www.therapidian.org/sites/default/files/article_images/grand-river-plume.jpg)
- Obr. 2.9b** Termální oblak (*Thermal plume*) lávy - sopka Bárðarbunga na Islandu.  
Dostupné z: <http://glacierhub.org/wp-content/uploads/2014/12/lava-at-Bardarbunga-and-volcanic-gasses-source-Ragnar-Axelsson-Morgnebladid1.jpg>

- Obr. 2.10a** Nadnášený (pozitivní) paprsek (*Buoyant Jet*).  
Dostupné z: [http://www.cormix.info/images/41,Hotler,ETH,Switzerland\(A15\)l.jpg](http://www.cormix.info/images/41,Hotler,ETH,Switzerland(A15)l.jpg)
- Obr. 2.10b** Přerušovaný nadnášený paprsek (*Buoyant Puff*).  
Dostupné z: [https://36.media.tumblr.com/f1093d82345cdad92510bee1b154b669/tumblr\\_mwbbjn9LID1sllnp9o1\\_500.jpg](https://36.media.tumblr.com/f1093d82345cdad92510bee1b154b669/tumblr_mwbbjn9LID1sllnp9o1_500.jpg)
- Obr. 3.1** Zjednodušený třírozměrný nákras kruhové trysky v polárních souřadnicích.
- Obr. 3.2** Hlavní oblasti proudění paprsku tekutiny.
- Obr. 3.3** Oblast vývinu proudění (*ZFE*). Čárkované čáry označují jádro paprsku.
- Obr. 3.4** Rychlostní profily v různých průřezech mezní vrstvy v osově symetrickém paprsku ve vzdálenostech  $x=100$  a  $250$  mm od konce trysky.
- Obr. 3.5** Bezrozměrné rychlostní profily v mezní vrstvě oblasti vývinu proudění u ponořeného osově symetrického paprsku ( $r_0 = 50$  mm).
- Obr. 3.6** Paprsek tekutiny.  
Dostupné z: <http://www.advancedaquarist.com/2011/7/afeature>
- Obr. 3.7** Příčné profily průměrné osové rychlosti v kruhové trysce při Reynoldsově čísle  $Re = 95\,500$ . Čárkované čáry značí poloviční šířku  $r_{1/2}(x)$  jednotlivých profilů.
- Obr. 3.8** Střední osová rychlost vzhledem k příčné vzdálenosti v turbulentním kruhovém paprsku  $Re \approx 105$ . Symboly  $\circ$ ,  $x/d = 40$ ;  $\Delta$ ,  $x/d = 50$ ;  $\square$ ,  $x/d = 60$ ;  $\diamond$ ,  $x/d = 75$ ;  $\bullet$ ,  $x/d = 97,5$ .
- Obr. 3.9** Vzájemná podobnost rychlostních profilů v osově symetrickém turbulentním paprsku
- Obr. 3.10** Linie konstantních velikostí rychlosti ponořeného paprsku.
- Obr. 3.11** Linie konstantních velikostí rychlosti ve tvaru  $\left(\frac{u}{u_{max}}\right) = konst.$  u ponořeného paprsku
- Obr. 3.12** Vstupní úhel (*Opening Angle*).
- Obr. 3.13** Schematický popis paprsku tekutiny pronikající do tekutiny v klidu. Paprsek se lineárně rozšiřuje ve směru proudění. Veškeré rychlostní profily, kromě profilů v blízkosti ústí trysky si jsou podobné. Okolní tekutina vstupuje do paprsku pod konstantním úhlem  $\theta$  podél osy  $x$ .
- Obr. 3.14** Porovnání experimentálně stanovených hodnot profilových rychlostí v bezrozměrné formě grafu s Tollmienovým řešením.
- Obr. 3.15** Porovnání experimentálně stanovených hodnot profilových rychlostí v bezrozměrné formě grafu s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.
- Obr. 4.1** Metody matematického modelování turbulentního proudění. Použité zkratky: *LES* – *Large Eddy Simulation*, *DNS* – *Direct Numerical Simulation*.
- Obr. 4.2** Metoda DNS poskytuje přesný časový průběh sledované veličiny, metoda RANS pouze střední hodnotu v čase a výsledkem metody LES je vyhlazený signál.
- Obr. 4.3** Porovnání základních metod při modelování paprsku tekutiny.  
Dostupné z: <http://www.buffalo.edu/content/dam/www/news/imported/hires/giviflames.jpg>
- Obr. 4.4** Základní rozdělení proudění na základě času a prostoru.
- Obr. 4.5** Výčet použitých dvourovnicových modelů použitých při řešení problematiky paprsku.
- Obr. 4.6** Fluktuace a časově středovaná část rychlosti.

- Obr. 4.7** Deformační účinky Reynoldsových napětí.
- Obr. 5.1** Geometrie modelu.
- Obr. 5.2** Výpočetní 2D síť, proudění tekutiny je ve směru zleva doprava.
- Obr. 5.3** Levý dolní roh výpočetní sítě (vstupní podmínka rychlosti).
- Obr. 5.4** Kvalita výpočetní sítě.
- Obr. 5.5** Okrajové podmínky použitého modelu.
- Obr. 5.6** Základní nastavení simulace.
- Obr. 5.7** Základní nastavení řešiče.
- Obr. 5.8** Průběh jednotlivých reziduí v závislosti na počtu iterací.

## SEZNAM GRAFŮ A TABULEK

<b>Graf 3.1</b>	Příklad Tollmienova řešení rozdělení profilových rychlostí v bezrozměrné formě.
<b>Graf 3.2</b>	Příklad Görtlerova řešení rozdělení profilových rychlostí v bezrozměrné formě.
<b>Graf 5.1</b>	Výsledné hodnoty šířky paprsku.
<b>Graf 5.2</b>	Průběh osových rychlostí v závislosti na poloze $x$ .
<b>Graf 5.3</b>	Srovnání osových rychlostí v bezrozměrném tvaru s experimentálními vztahy.
<b>Graf 5.4</b>	Porovnání výsledků modelu $k$ - $\varepsilon$ Standard s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.
<b>Graf 5.5</b>	Vynesení rychlostních profilů do bezrozměrné formy.
<b>Graf 5.6</b>	Průběh šířky paprsku v závislosti na $x$ .
<b>Graf 5.7</b>	Porovnání modelu $k$ - $\varepsilon$ Standard s experimentálně stanovenými výrazy.
<b>Graf 5.8</b>	Hörlův modifikovaný model rozdělení.
<b>Graf 5.9</b>	Porovnání výsledků modelu $k$ - $\varepsilon$ Standard s experimentálními výrazy a vztahem (3.17).
<b>Graf 5.10</b>	Aplikace lineárního modelu na data získaná z modelu $k$ - $\varepsilon$ Standard.
<b>Tabulka 1</b>	Základní rozdělení paprsků
<b>Tabulka 2</b>	Parametry paprsku
<b>Tabulka 3</b>	Parametry prostředí
<b>Tabulka 4</b>	Geometrické parametry
<b>Tabulka 5</b>	Experimentálně naměřené hodnoty koeficientu úměrnosti
<b>Tabulka 6</b>	Rozměry základní geometrie modelu
<b>Tabulka 7</b>	Parametry tekutiny
<b>Tabulka 8</b>	Délka oblasti vývinu proudění
<b>Tabulka 9</b>	Zjištěné velikosti polohy virtuálního počátku a koeficientu úměrnosti

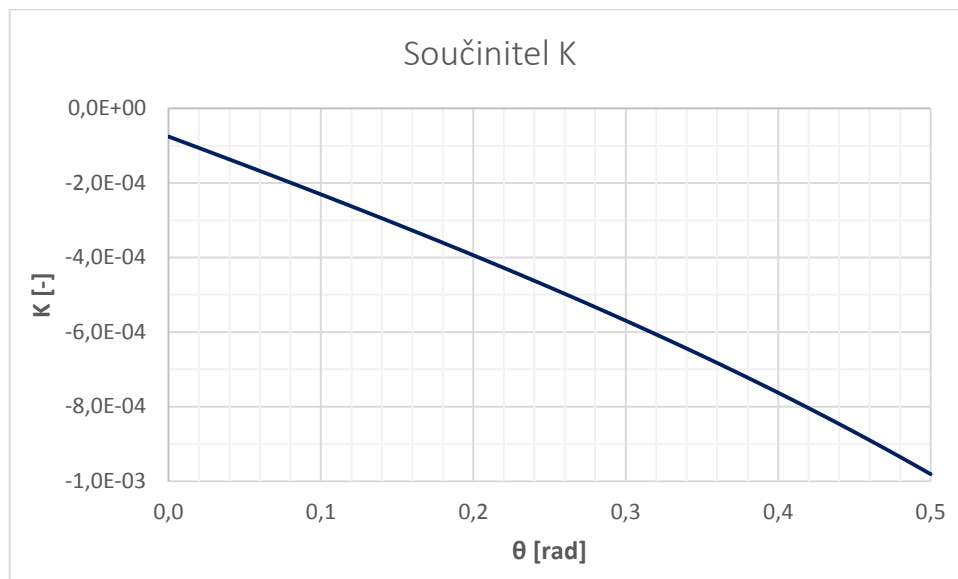
## SEZNAM PŘÍLOH

- Příloha I.** Tollmienovo a Görtlerovo řešení rozdělení rychlosti po průřezu.
- Příloha II.** Velikost součinitele  $K$  v závislosti na velikosti úhlu strhávání tekutiny  $\theta$  při konstantní velikosti součinitele  $B = 6,68$ , koeficientu strhávání tekutiny  $\alpha' = 0,026$  a velikosti turbulentní kinetické energie  $k = 0,10$ .
- Příloha III.** Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\varepsilon$  Realizable s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.
- Příloha IV.** Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\varepsilon$  RNG s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.
- Příloha V.** Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\omega$  Standard s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.
- Příloha VI.** Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\omega$  SST s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.
- Příloha VII.** Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\omega$  BSL s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.
- Příloha VIII.** Ukázka vlivu počtu elementů výpočetní sítě na výsledný tvar rychlostního profilu ( $x/d = 50$ ). Modrá barva (Test 1) reprezentuje výpočetní použitou při tvorbě jednotlivých modelů, zatímco červená barva (Test 2) reprezentuje síť s méně než polovičním počtem elementů. Struktura výpočetní sítě byla pro oba případy neměnná, pouze došlo ke snížení počtu elementů.
- Příloha IX.** Ukázka rozdílné velikosti rychlostní v profilu ( $x/d = 50$ ). Příklad *axisymmetric* je možné využít při modelování s využitím RANS modelů, kdy je daná problematika osově symetrická okolo centrální osy ( $360^\circ$ ). V případě, kdy je daná problematika paprsku řešena jako *planar* (symetrické podél centrální osy 2D), dochází k výraznému odchýlení výsledků modelu od skutečnosti.
- Příloha X.** Modely  $k-\varepsilon$  (Realizable, RNG, Standard).
- Příloha XI.** Modely  $k-\omega$  (Standard, SST, BSL).

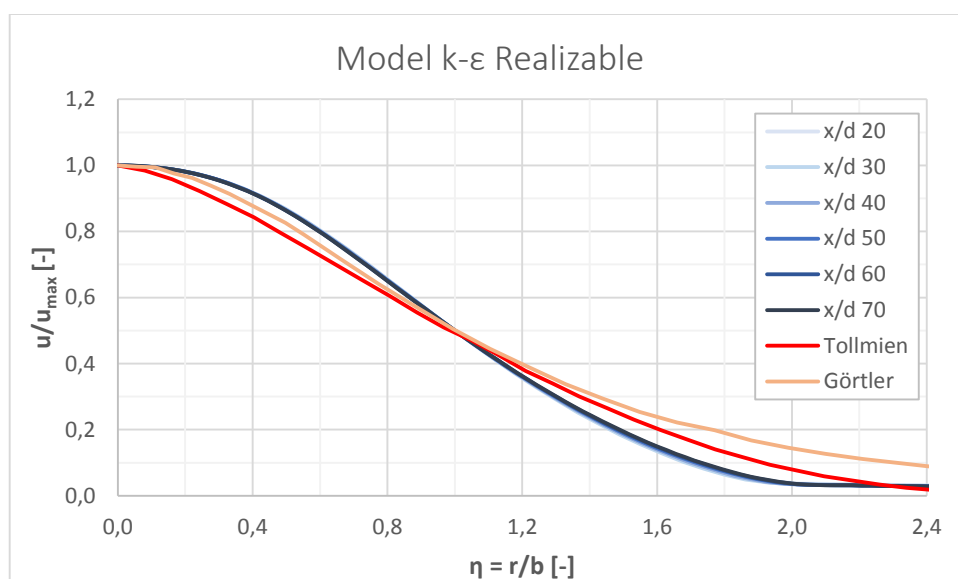
*Příloha I. Tollmienovo a Görtlerovo řešení rozdělení rychlosti po průřezu*

Tollmienovo řešení			Görtlerovo řešení		
$\Phi = \frac{r}{ax}$	$\eta = \frac{r}{b}$	$\frac{u}{u_{max}}$	$\xi = \frac{\sigma r}{x}$	$\eta = \frac{r}{b}$	$\frac{u}{u_{max}}$
0,0	0,000	1,000	0,0	0,000	1,000
0,1	0,080	0,984	0,1	0,055	0,996
0,2	0,161	0,958	0,2	0,111	0,994
0,3	0,242	0,922	0,3	0,166	0,976
0,4	0,322	0,884	0,4	0,221	0,962
0,5	0,404	0,843	0,5	0,276	0,939
0,6	0,484	0,795	0,6	0,332	0,914
0,7	0,565	0,748	0,7	0,387	0,885
0,8	0,645	0,700	0,8	0,442	0,855
0,9	0,725	0,653	0,9	0,497	0,826
1,0	0,806	0,605	1,0	0,552	0,791
1,1	0,887	0,555	1,2	0,663	0,715
1,2	0,967	0,510	1,4	0,773	0,641
1,3	1,050	0,470	1,6	0,885	0,572
1,4	1,130	0,425	1,8	0,995	0,505
1,5	1,210	0,378	2,0	1,105	0,445
1,6	1,290	0,340	2,2	1,215	0,391
1,7	1,370	0,300	2,4	1,328	0,338
1,8	1,451	0,265	2,6	1,438	0,294
1,9	1,531	0,230	2,8	1,548	0,254
2,0	1,612	0,198	3,0	1,659	0,222
2,1	1,692	0,169	3,2	1,770	0,198
2,2	1,772	0,140	3,4	1,880	0,167
2,3	1,853	0,117	3,6	1,990	0,145
2,4	1,935	0,094	3,8	2,100	0,127
2,5	2,019	0,075	4,0	2,210	0,111
2,6	2,095	0,059	4,5	2,490	0,079
2,7	2,178	0,046	5,0	2,762	0,059
2,8	2,260	0,034	6,0	3,315	0,033
2,9	2,340	0,024	-	-	-
3,0	2,420	0,017	-	-	-
3,1	2,500	0,011	-	-	-
3,2	2,580	0,007	-	-	-
3,3	2,660	0,003	-	-	-
3,4	2,740	0,000	-	-	-

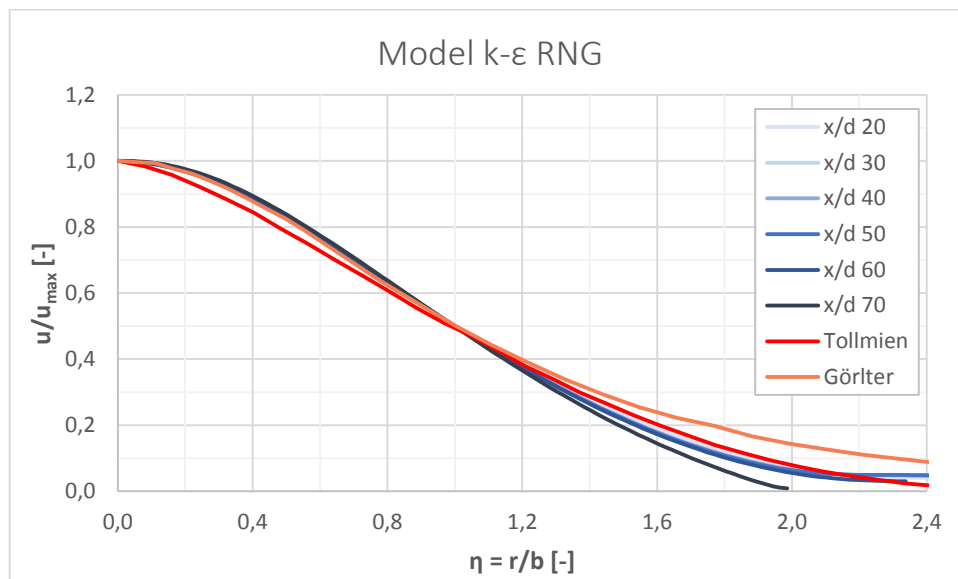




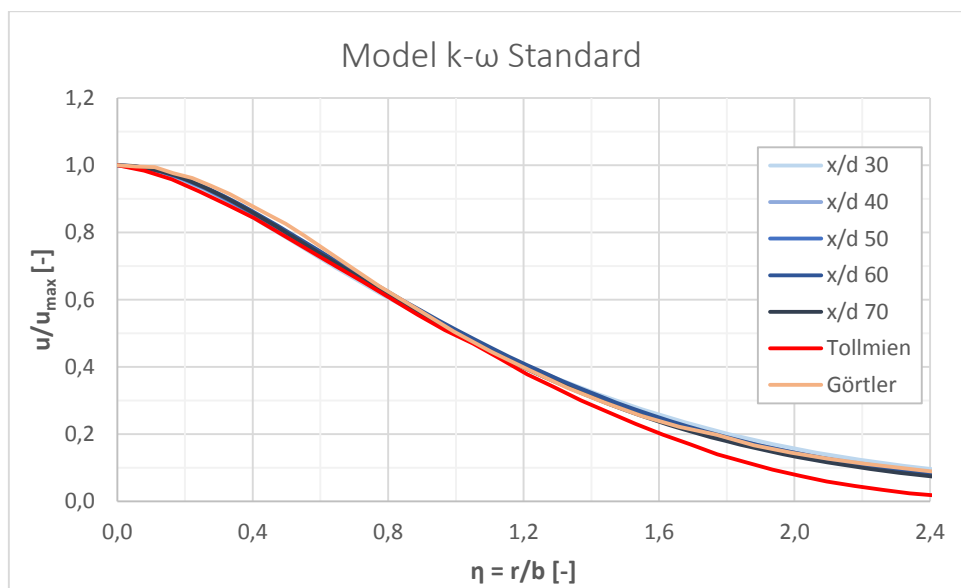
**Příloha II.** Velikost součinitele  $K$  v závislosti na velikosti úhlu strhávání tekutiny  $\theta$  při konstantní velikosti součinitele  $B = 6,68$ , koeficientu strhávání tekutiny  $\alpha' = 0,026$  a velikosti turbulentní kinetické energie  $k = 0,10$ . [14]



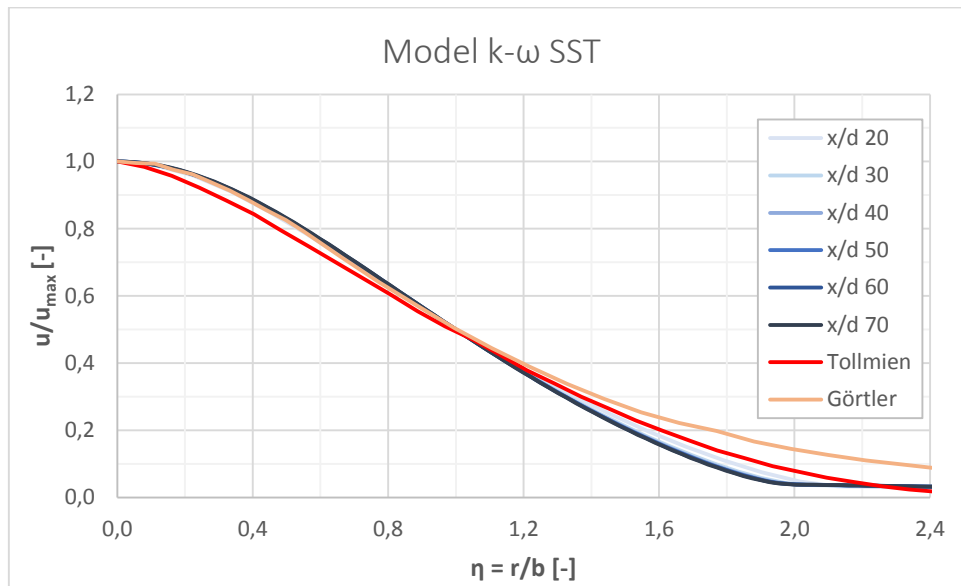
**Příloha III.** Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\varepsilon$  Realizable s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.



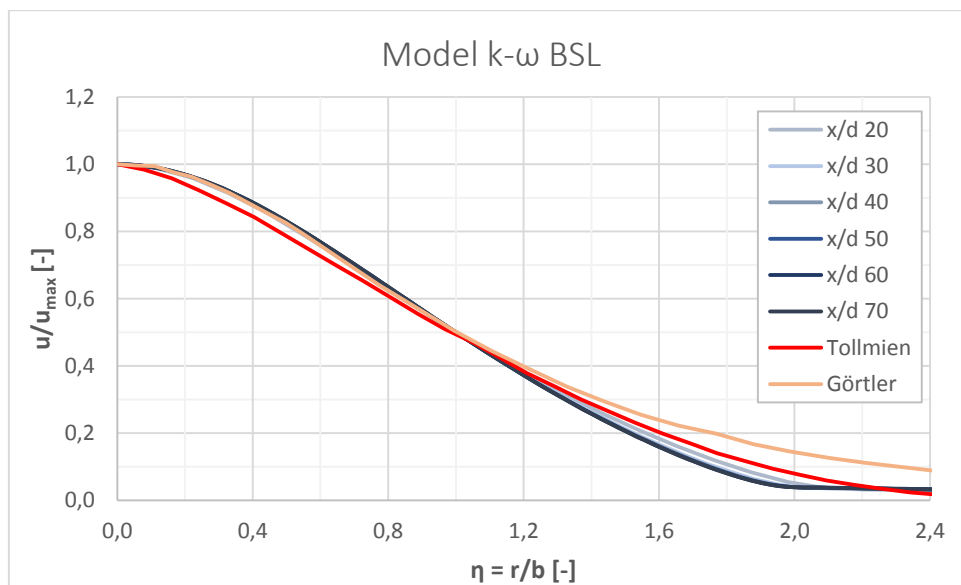
Příloha IV. Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\varepsilon$  RNG s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.



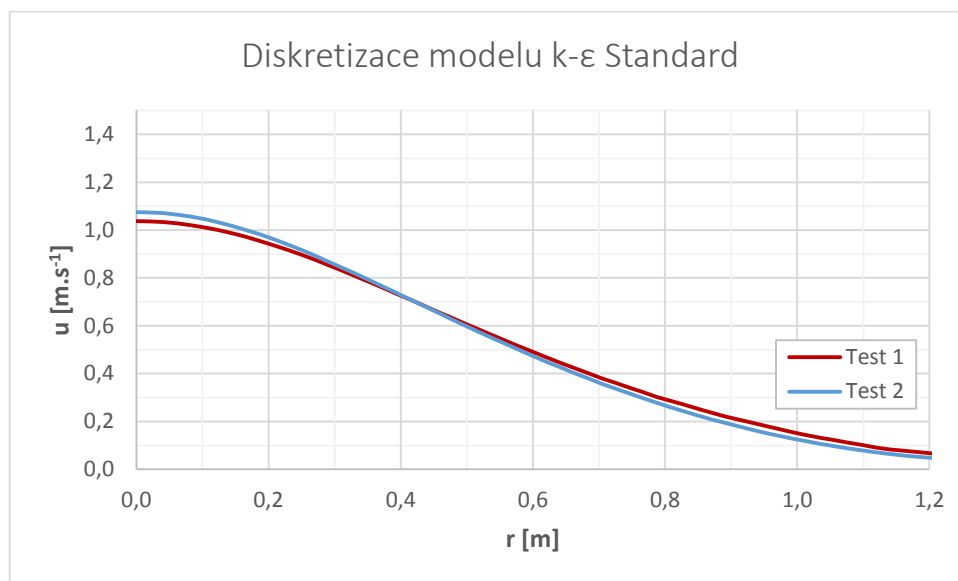
Příloha V. Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\omega$  Standard s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.



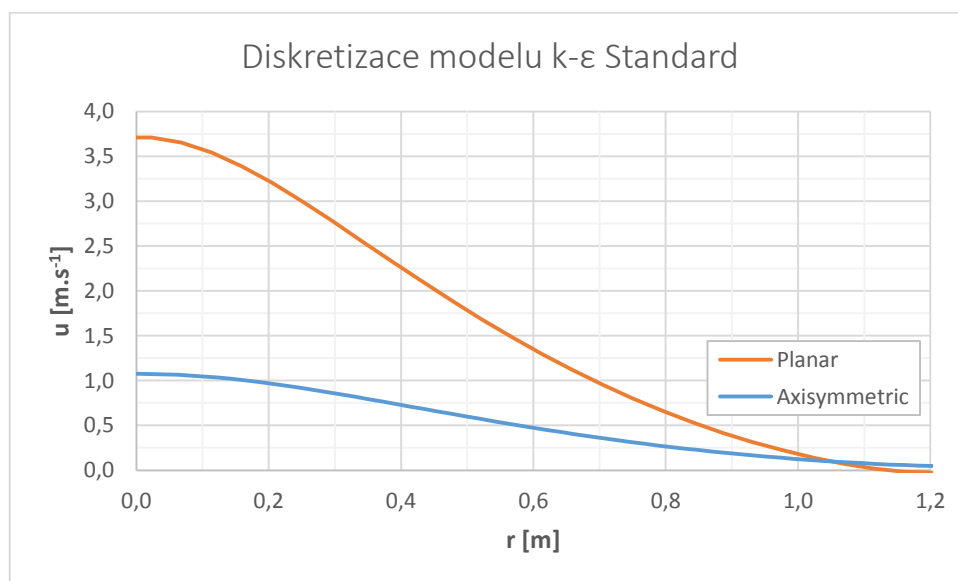
**Příloha VI.** Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\omega$  SST s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.



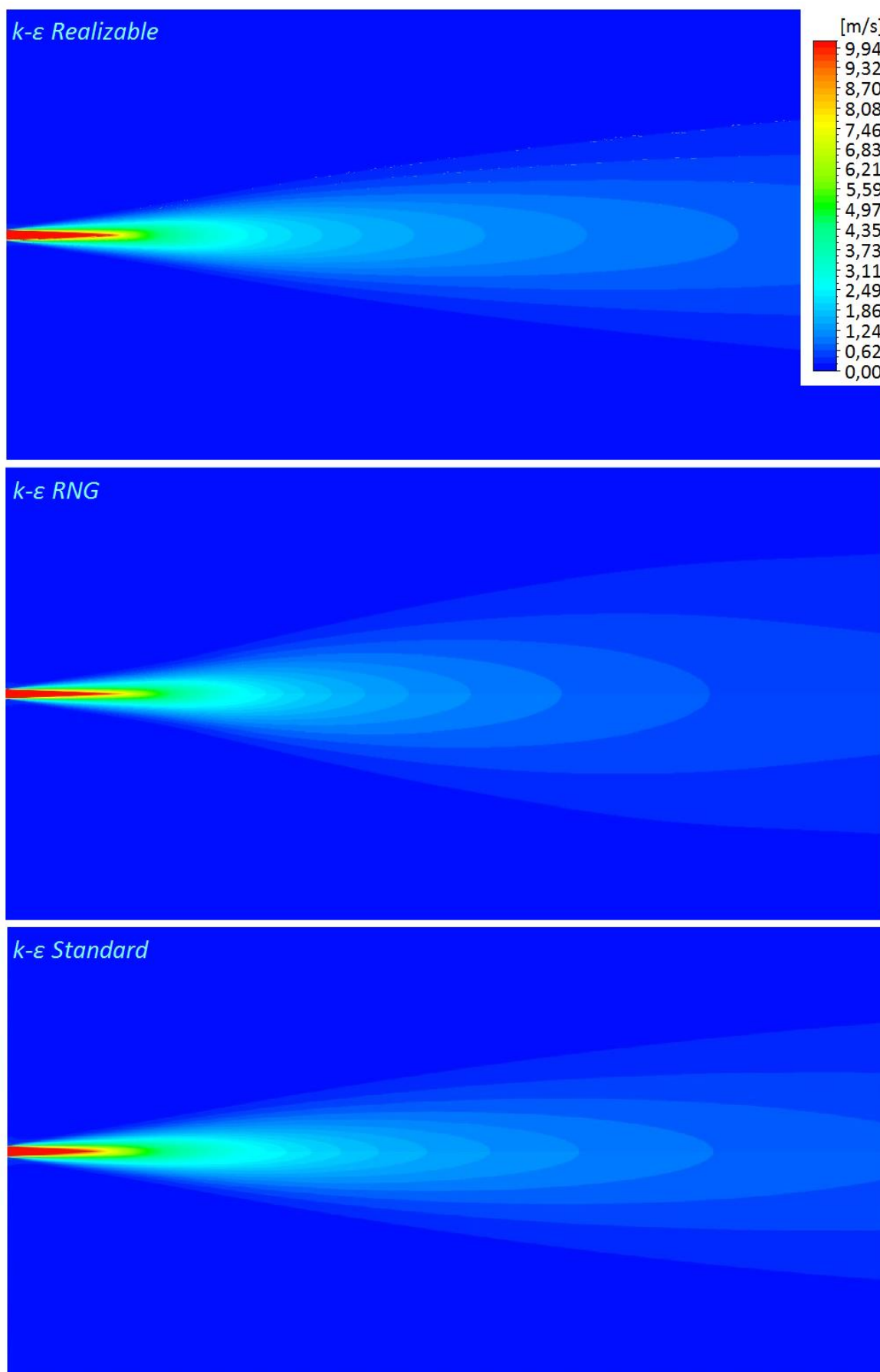
**Příloha VII.** Porovnání průběhu rychlostí v bezrozměrné formě pomocí modelu  $k-\omega$  BSL s Tollmienovým a Görtlerovým řešením.



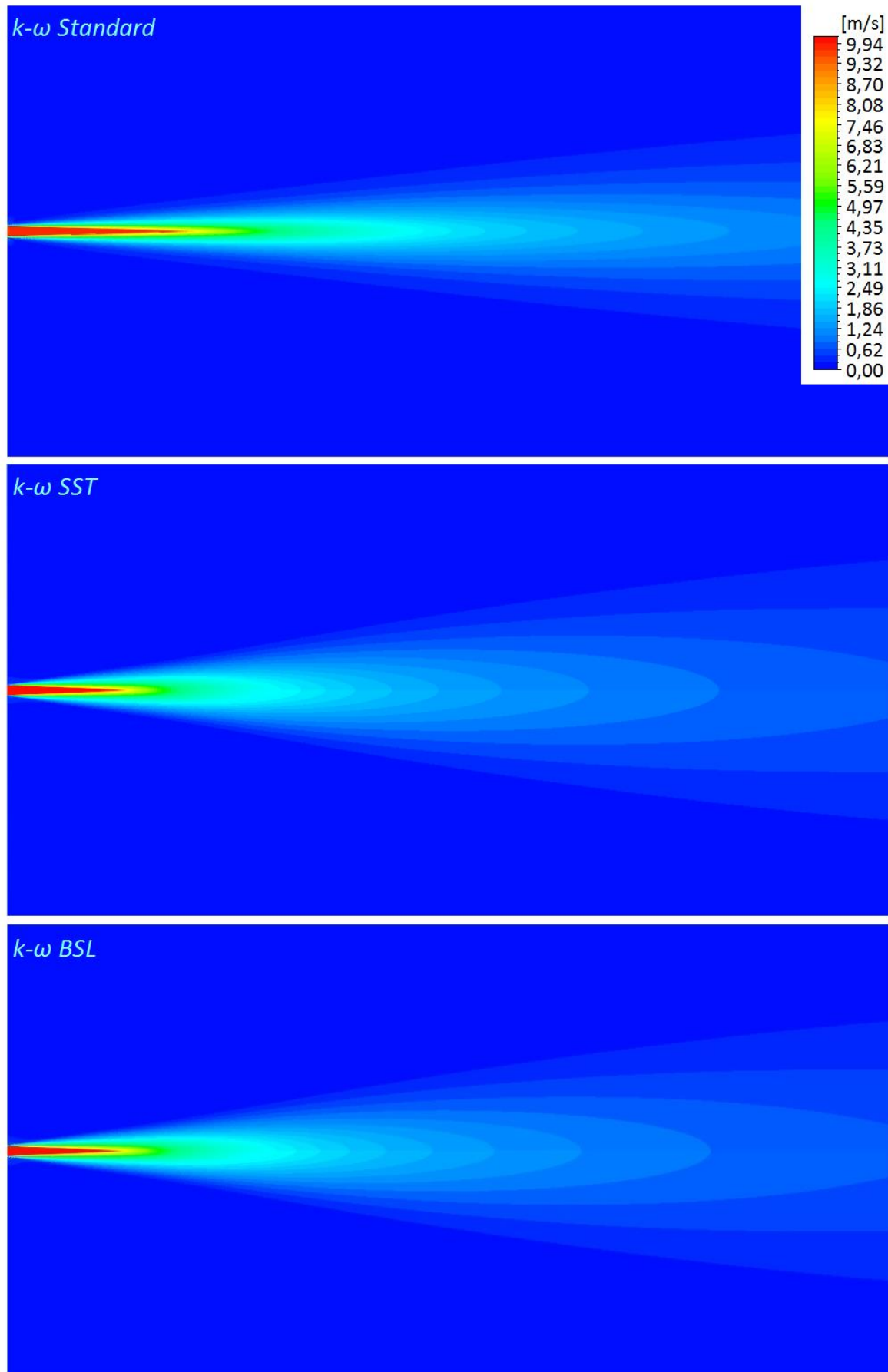
**Příloha VIII.** Ukázka vlivu počtu elementů výpočetní sítě na výsledný tvar rychlostního profilu ( $x/d = 50$ ). Modrá barva (Test 1) reprezentuje výpočetní síť použitou při tvorbě jednotlivých modelů, zatímco červená barva (Test 2) reprezentuje síť s méně než polovičním počtem elementů. Struktura výpočetní sítě byla pro oba případy neměnná, pouze došlo ke snížení počtu elementů.



**Příloha IX.** Ukázka rozdílné velikosti rychlostní v profilu ( $x/d = 50$ ). Příklad *axisymmetric* je možné využít při modelování s využitím RANS modelů, kdy je daná problematika osově symetrická okolo centrální osy (360°). V případě, kdy je daná problematika paprsku řešena jako *planar* (symetrické podél centrální osy 2D), dochází k výraznému odchýlení výsledků modelu od skutečnosti.



Příloha X. Modely  $k-\epsilon$  (Realizable, RNG, Standard).



Příloha XI. Modely  $k-\omega$  (Standard, SST, BSL).