**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**Fakulta stavební**
**Katedra mechaniky**

# Dynamická analýza lávky pro pěší

# Dynamic analysis of the footbrifge

Bakalářská práce

Studijní program: Stavební inženýrství
Studijní obor: Dopravní stavby a konstrukce

Vedoucí práce: Prof. Ing. Jiří Máca, CSc.

**Jan Štěpánek**

**Praha 2016**

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**
**Fakulta stavební**
Thákurova 7, 166 29 Praha 6

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Štěpánek Jméno: Jan Osobní číslo: 410124

Zadávající katedra: K132 - Katedra mechaniky

Studijní program: SI - Stavební inženýrství

Studijní obor: K - Konstrukce a dopravní stavby

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce: Dynamická analýza lávky pro pěší

Název bakalářské práce anglicky: Dynamic analysis of the footbridge

Pokyny pro vypracování:
Vytvoření rovinného a prostorového výpočetního modelu lávky pro pěší..
Výpočet vlastních frekvencí a tvarů kmitání.
Posouzení odezvy na zatížení chodci.

Seznam doporučené literatury:
J. Kala - Numerical simulation of suspension footbridge focused on human comfort criteria.
Safety and Reliability of Complex Engineered Systems, pp 2965-2970
2015 Taylor & Francis Group, London

Jméno vedoucího bakalářské práce: Prof. Ing. Jiří Máca, CSc.

Datum zadání bakalářské práce: 22. 2. 2016 Termín odevzdání bakalářské práce: 20. 5. 2016

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v bakalářské práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

24. 2. 2016

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)

# Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá dynamickou analýzou cyklistické lávky v Čelákovicích. Obsahuje dvourozměrný model konstrukce pro zjištění vlastních frekvencí a ověření jejich výpočtu přibližnými metodami. Dále je zde sestaven třírozměrný desko-prutový model, na kterém je stanovena dynamická odezva na zatížení chodci a porovnána s mezním stavem použitelnosti dle Eurokódu.



# Abstract

The thesis is primarily concerned with the dynamic analysis of the cycling footbridge in Čelákovice. It contains a planar model of construction whose purpose is to find out natural frequencies and verify them by approximate methods. Spatial plane-beam model is also included, which is used to determine the acceleration response of load induced by pedestrians and to compare the results to limit state of usability by Eurocode.



# Klíčová slova

lávka pro pěší, modální analýza, vlastní tvar, vlastní frekvence, vynucené kmitání, zrychlení

# Key words

Footbridge, modal analysis, natural mode, natural frequency, forced vibration, acceleration

# Poděkování

Zde bych rád poděkoval všem, kteří mi pomohli při zpracování této práce, zejména společnosti PONTEX za poskytnutí nezbytných podkladů, všem vyučujícím za předané znalosti a především vedoucímu práce Prof. Ing. Jiřímu Mácovi, CSc.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci vypracoval samostatně bez jakékoliv nedovolené pomoci a že všechny použité zdroje jsou uvedeny v přiloženém seznamu.

# Obsah


1 Úvod ... 1

2 Cíle práce ... 2

3 Popis konstrukce ... 3

4 Základní úlohy stavební dynamiky ... 6

4.1 Soustavy s jedním stupněm volnosti ... 6

4.2 Soustavy s více stupni volnosti ... 6

4.2.1 Vlastní kmitání ... 6

4.2.2 Vynucené kmitání ... 7

5 Rovinný model ... 8

5.1 Tvorba modelu ... 8

5.1.1 Účel 2D simulace ... 8

5.1.2 Geometrie konstrukce ... 8

5.1.3 Použité materiály ... 10

5.1.4 Průřezové charakteristiky ... 11

5.2 Vlastní frekvence a tvary kmitání ... 13

5.3 Vliv osových sil na vlastní frekvence ... 14

5.3.1 Osové síly v závěsech ... 15

5.3.2 Výsledky ... 15

5.4 Rayleighova metoda ... 16

5.4.1 Teorie energetické metody ... 16

5.4.2 Diagonální matice hmotnosti a vektor zatížení ... 17

5.4.3 Výpočet a výsledky ... 18

5.5 Metoda postupných aproximací ... 20

5.6 Porovnání výsledků ... 21

6 Prostorový model ... 23

6.1 Tvorba modelu ... 23

6.1.1 Geometrie konstrukce ... 23
6.1.2 Hmoty ... 26
6.1.3 Průřezové charakteristiky ... 27
6.1.4 Nastavení sítě ... 31
6.2 Vlastní frekvence a tvary kmitání ... 31
6.3 Odezva konstrukce na zatížení chodci ... 33
6.3.1 Zatěžovací stavy ... 34
6.3.2 Tlumení ... 36
6.3.3 Výsledky ... 37
6.4 Pohlcovač kmitů ... 38
6.4.1 Návrh pohlcovače ... 38
6.4.2 Výsledky ... 40
7 Závěr ... 41
8 Seznam obrázků ... 42
9 Seznam tabulek ... 43
10 Seznam literatury ... 44
11 Přílohy ... 45
11.1 Výpočet metody postupných aproximací ... 45
11.2 Vastní tvary a frekvence prostorového modelu ... 49

# 1 Úvod

Moje práce se zabývá dynamickou analýzou cyklistické lávky přes Labe v Čelákovicích. Tuto konstrukci jsem si vybral, protože je to jedna z velice zajímavých staveb realizovaných během posledních let. S rozpětím hlavního pole 156 metrů se stala největším zavěšeným mostem v České republice. Při výstavbě byla použita technologie nevyztužené mostovky z ultra vysokohodnotného betonu (ultra-high-performance concrete – UHPC), se kterou byly do té doby v České republice jen minimální zkušenosti. V roce 2015 získala ocenění od Amerického betonářského institutu (ACI) v rámci soutěže ACI Excellence Awards 2015.

Obecně lze říci, že vlastní frekvence mostů závisí na jejich tuhosti a hmotnosti. Vzhledem k tomu, že konstrukce je velmi subtilní a s velkým rozpětím, lze očekávat vlastní frekvence v rozmezí 0,6 - 4,8 Hz, kterým je třeba se vyhnout při navrhování lávek. Tyto frekvence jsou problematické vzhledem k možnému vzniku rezonance s lidskou chůzí, případně během, a to jak v podélném, tak příčném směru. V těchto případech pak může dojít ke vzniku nadměrných zrychlení a překročení mezního stavu použitelnosti – pohody chodců. V extrémních případech dochází též k nadměrným deformacím a namáhání konstrukce, které může vést až k jejímu poškození například v místě detailů náchylných na namáhání únavou. Dosažení těchto stavů je třeba předejít pomocí modální analýzy a stanovení odezvy na zatížení chodci.

# 2 Cíle práce

Úkolem této práce je vytvoření jednoduchého rovinného modelu mostu a následné určení prvních vlastních tvarů a frekvencí pomocí softwaru SCIA Engineer. Jako kontrolní výpočet bude zjištěna první vlastní frekvence také Rayleighovou energetickou metodou a metodou postupných aproximací.

Dále bude model rozšířen na prostorový pro určení tvarů kmitání v příčném a torzním směru, které nelze na rovinném zjednodušení určit.

Na prostorovém modelu bude stanovena odezva na zatížení chodci ve svislém i příčném směru, které bude simulováno harmonickými silami.

V případě, že bude docházet k nepřijatelnému kmitání konstrukce, bude navrhnuto řešení pomocí pohlcovače kmitání.

# 3 Popis konstrukce

Výstavba lávky v Čelákovicích byla zahájena v listopadu 2012 a dokončena v dubnu 2014. Její slavnostní otevření proběhlo 21. 6. 2014.[12] Jde o osově symetricky zavěšenou konstrukci o rozpětí polí 43,0 m + 156,0 m + 43,0 m s dvojicí ocelových pylonů vysokých 36 metrů, jedním na každé straně řeky. Její výška nad vodní hladinou je zvolena tak, aby byl s rezervou zajištěn plavební profil.

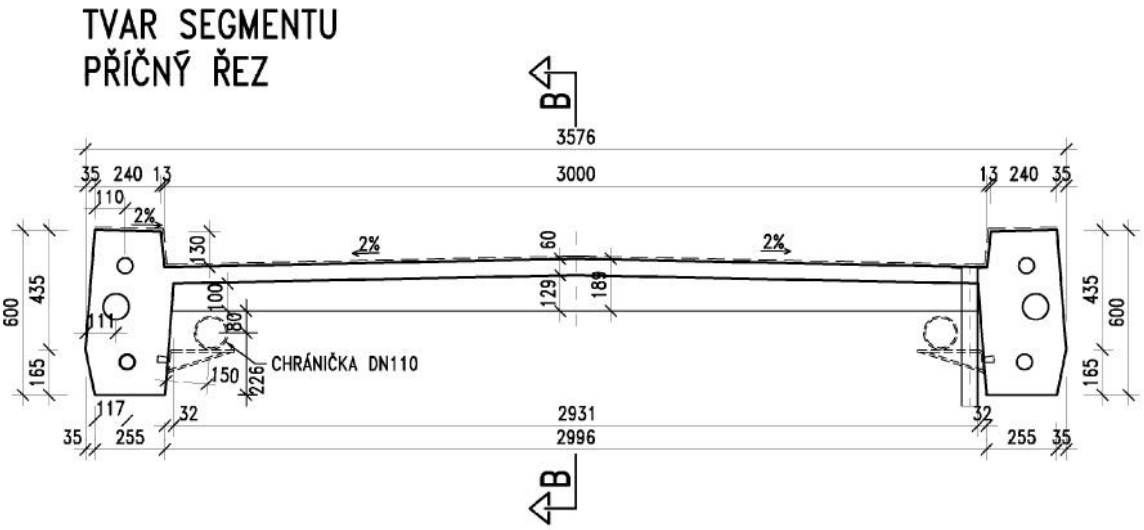
Mostovka je tvořena předpjatými segmenty z UHPC, který byl vyvinut společností TBG METROSTAV s.r.o. speciálně pro tento účel. Jedná se o beton s rozptýlenou výztuží z ocelových vláken dosahující vyšších pevností než C110/130. Každý segment, betonovaný na místě do formy, má délku 11,3 metry a je tvořen dvěma hlavními nosníky po stranách mostovky, příčnými žebry s osovou vzdáleností 920 milimetrů a deskou tloušťky 60 milimetrů. Most byl stavěn postupným zavěšováním segmentů na závěsy pomocí montážního vozíku. Postupovalo se souběžně od obou břehů směrem ke středu konstrukce.[7]

Zajímavostí je, že deska mostovky není vyztužena ani konstrukční výztuží, a jde tedy o beton tloušťky 60 milimetrů namáhaný ohybem na rozpětí 920 milimetrů. Z tohoto důvody byly provedeny zátěžové zkoušky jak na částech, tak na celém segmentu a byla zjištěna násobně vyšší únosnost, než je dle [5] doporučeno.

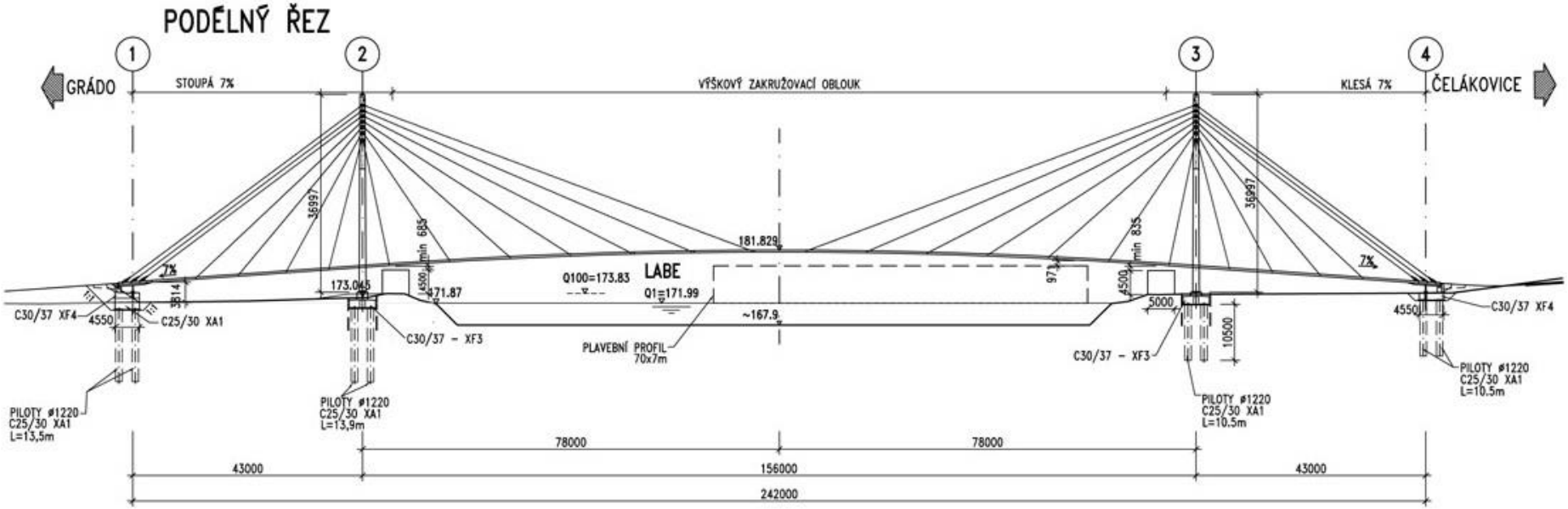
Mostovka je podepřena v místě pylonů, kde je zabráněno jejímu svislému a vodorovnému posunu, nikoliv však pootočením. Dále je zavěšena pomocí uzavřených lan systému Redaelli, které jsou kotveny k vnější straně nosníků mostovky pomocí zabetonovaných ocelových svařenců. Pylony ve tvaru A jsou tvořeny dvěma ocelovými lichoběžníkovými profily a nahoře, v místě napojení závěsů, jsou propojeny.

Celá konstrukce je podélně předepnuta pomocí kombinace tyčového a lanového předpětí. Tyčové předpětí bylo aktivováno již v průběhu montáže segmentů před lepením spáry mezi segmenty. Lanové předpětí se soudržností je taženo spojitě přes celou délku konstrukce a bylo napnuto až po jejím dokončení. [7]

*obr. 3.1: pohled na lávku v Čelákovicích*




*obr. 3.2: příčný řez mostovky [7]*




*obr. 3.3: zjednodušený podélný řez [12]*

# 4 Základní úlohy stavební dynamiky

## 4.1 Soustavy s jedním stupněm volnosti

Dynamika je část mechaniky, která se zabývá příčinami pohybu hmotných objektů. Podle D'Alembertova principu, který je vyjádřením druhého Newtonova zákona, je součet všech sil včetně sil setrvačných působící na těleso v daném směru nulový. Pokud na soustavu nepůsobí žádná vnější v čase proměnná síla, jde o vlastní kmitání. Pro hmotný bod s jedním stupněm volnosti to lze vyjádřit pohybovou rovnicí:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \tag{4.1}$$

Kde je výchylka $u$, hmotnost $m$, útlum $c$ a tuhost $k$. Její řešení bez uvažování vlivu tlumení a pomocí zápisu s amplitudou a vlastní kruhovou frekvencí je:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.2}$$

Kde výchylka je závislá na amplitudě $u_0$, vlastní kruhové frekvenci $\omega_0$ a fázovém posunu $\varphi_0$. Je to pohyb, při kterém těleso kmitá bez tlumení a bez vlivu dalších sil s vlastní frekvencí $f_0$. Vztah mezi periodou $T$ – nejkratší dobou, za kterou nastává znovu tatáž výchylka, vlastní úhlovou frekvencí $\omega_0$ a frekvencí $f_0$:

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{4.3}$$

A pro jeden stupeň volnosti platí:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.4}$$

## 4.2 Soustavy s více stupni volnosti

Úlohami stavební dynamiky je řešení vlastního a vynuceného kmitání. V praxi je velmi často nutné řešit geometricky složité problémy, které je možné zjednodušit pomocí soustav s konečným počtem stupňů volnosti.

### 4.2.1 Vlastní kmitání

Při tomto kmitání nepůsobí na konstrukci žádné síly. Cílem je stanovit dynamické charakteristiky systému. Počet vlastních tvarů a frekvencí odpovídá počtu stupňů volnosti[9]. Při zanedbání tlumení lze pohybovou rovnici zapsat maticově ve tvaru:

$$\boldsymbol{Ku}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0} \tag{4.5}$$

kde $\boldsymbol{K}$ je matice tuhosti, $\boldsymbol{M}$ matice hmotnosti a $\boldsymbol{u}$ vektor posunů. Vyjádření posunu a zrychlení $\ddot{\boldsymbol{u}}(t)$ pomocí vlastního tvaru $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\Phi}\,(\mathrm{Acos}(\omega\mathrm{t}) + \mathrm{Bsin}(\omega\mathrm{t})) \tag{4.6}$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}(t) = -\omega^2\boldsymbol{u}(t)$$

Dosazením do (4.5) a úpravou získáme rovnici:

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi} = 0 \tag{4.7}$$

A pro ní musí platit:

$$det(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}) = 0 \tag{4.8}$$

Z tohoto vztahu lze určit všechny vlastní frekvence $\omega_n$. Jejich počet n je roven počtu stupňů volnosti. To je problém hledání vlastních čísel, který odpovídá řešení polynomu n-tého stupně, které je však pro vysoký počet stupňů volnosti velmi náročné. Je tedy vhodné zvolit metody přibližné nebo iterační, které software zvládne snáze. Je možné použít například k metodu postupných aproximací, jenž je blíže popsána v kapitole 5.5, nebo metodu iterace podprostoru, která je používaná programem SCIA Engineer pro řešení vlastních tvarů v této práci.

### 4.2.2 Vynucené kmitání

Pokud na konstrukci působí v čase proměnná síla, je cílem stanovit dynamickou odezvu. Maticový zápis pohybové rovnice:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{f}(t) \tag{4.9}$$

Kde $\boldsymbol{C}$ je matice útlumu. Jedno z možných řešení je metoda rozkladu do vlastních tvarů, kdy se odezva stanoví jako kombinace jednotlivých vlastních tvarů kmitání. Výhodou této metody je, že při uvažování klasického útlumu dojde k rozpadu soustavy na n nezávislých rovnic[9].

Další možností řešení je přímá integrace. Pohybové rovnice se řeší postupně v časových krocích, kdy se derivace vyjádří pomocí diferencí a ze soustavy diferenciálních rovnice se stane soustava rovnic algebraických. Tento princip využívá například Newmarkova metoda nebo metoda centrálních diferencí.

# 5 Rovinný model

## 5.1 Tvorba modelu

### 5.1.1 Účel 2D simulace

Pro potřeby modální analýzy byl vytvořen zjednodušený prutový model v programu SCIA Engineer 15.1.106. Informace o materiálech a geometrii mostu byly čerpány z podkladů poskytnutých společností Pontex, spol. s r.o. [7] Cílem tohoto modelu je zjistit vlastní tvary a frekvence mostu ve svislém směru pomocí modální analýzy v softwaru. Vzhledem k výraznému napětí v závěsech je třeba vyšetřit, jak velký vliv má jejich osová síla na matici tuhosti. Tomu bude věnována kapitola 5.3

Dále je určena první vlastní frekvenci Rayleighovou energetickou metodou a metodou, pro kterou je software využit pouze pro řešení úlohy jako statické. Dvoudimenzionální model nenabízí možnost zjistit vlastní tvary v příčném a torzním směru, ty jsou však neméně důležité a zabývá se jimi kapitola 6.2.

### 5.1.2 Geometrie konstrukce

Data pro vytváření geometrie modelu byla čerpána z [7]. S využitím osové symetrie konstrukce bylo možné vytvářet prutové prvky pouze poloviny modelu, ale pro správné statické působení při výpočtu však bylo potřeba pomocí funkce zrcadlení model do končit jako celý most.

Mostovka v krajních polích má rozpětí 43 m, její výškový průběh je lineární. Ve 43. metru konstrukce stojí pylon, z jehož horní části vede celkem 14 dvojic závěsů. 3 dvojice vedou rovnoběžně do místa ložiska na začátku konstrukce, 4 dvojice nesou krajní pole a zbývajících 7 dvojic nese polovinu středního pole. Mezi pylony je průběh mostovky parabolický, s vrcholem v ose symetrie, a plynule navazuje na lineární části. Celé schéma je zobrazeno na obr. 5.1.

Uzly modelu jsou v místech připojení závěsů na mostovku, podepření mostovky pylony, uložení pylonů na spodní stavbu a připojení závěsů na pylony. Tyto uzly jsou propojeny prutovými prvky.

U závěsů je třeba zachovat pouze tahové působení, jejich připojení na obou stranách jsou tedy modelována jako vnitřní klouby konstrukce a funkce prvků je nastavena tak, že mohou přenášet pouze osové síly.

Uložení pylonů na spodní stavbu je uvažováno jako vetknutí. Podpory v místě ložisek na koncích mostu nejsou stejné, což je narušení celkové symetrie, ale je nutné

z hlediska statického působení. Na jedné straně mostu je umístěna pevná kloubová podpora a na druhém posuvná. V případě, že by byly obě posuvné, by podélnou tuhost zajišťovaly pouze závěsy a mohlo by dojít k rozhoupání mostu v podélném směru (při tomto nastavení podpor se skutečně objevil vlastní tvar v podélném směru, který ovšem neodpovídá skutečnému chování konstrukce). Na druhou stranu, pokud by byly obě krajní podpory kloubové pevné, mostovka by mohla působit jako tlačený oblouk, vznikaly by v ní nepřiměřené síly a byla by zvýšena její tuhost vlivem klenbového působení. U reálné konstrukce není toto schéma reálné především z důvodu teplotní roztažnosti, čímž se ovšem tato práce nezabývá.

Příčné podepření mostovky v místě pylonu bylo u rovinného modelu vytvořeno pomocí kloubového křížení, kde je povoleno vzájemné pootočení dvou průběžných prvků, je však zabráněno jejich vzájemnému posunu. Celý problém je podrobněji řešen u prostorového modelu v kapitole 6.1 .

Program je schopný vygenerovat konzistentní matici hmotnosti ze zadaných prvků a jim přiřazeným materiálům. Na mostovce je však také zatížení od vozovky, zábradlí a odvodnění, které je třeba do modelu vložit samostatně. Hmotnost mostního vybavení je $g_{vyb} = 163kg/m$ [2]. Hmotnost příčných žeber desky, která nejsou v průřezu zahrnuta, je rozpočítána na 1m:

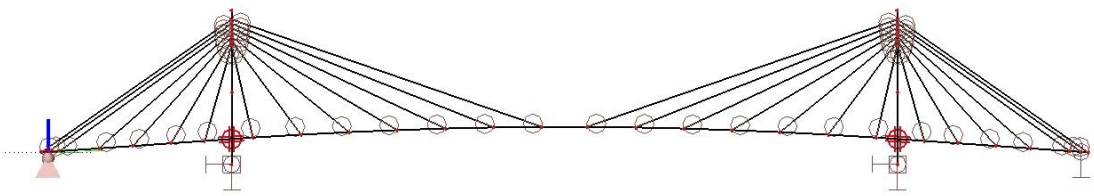
$$g_{ze} = a * b * l * \rho * \frac{1}{s} \tag{5.1}$$

$$g_{ze} = 0{,}11 * 0{,}1 * 2{,}931 * 2500 * \frac{1}{0{,}92} \tag{5.2}$$

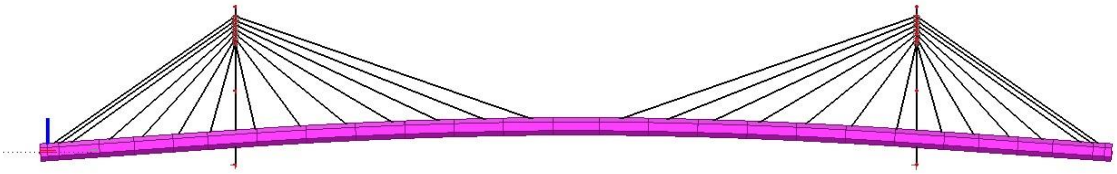
$$g_{ze} = 91{,}1kg/m \tag{5.3}$$

Celková hmotnost, která na mostě působí, ale není vypočtena programem:

$g_{ost} = g_{vyb} + g_{ze} = 254{,}1\ kg/m$. Pro tento účel jsou na všech prutech mostovky použity liniové hmoty dle obr. 5.2.



*obr. 5.1: statické schéma*



*obr. 5.2: liniové hmoty na rovinném modelu*

### 5.1.3 Použité materiály

Na výstavbu mostovky byl použit UHPC s rozptýlenou výztuží z ocelových vláken, ze kterého byly betonovány segmenty délky 11,3 m. Šlo o historicky první použití UHPC ve formě transportbetonu na území České republiky. Jeho naměřené charakteristiky odpovídají třídě C130/150, pro výpočet byl však konzervativně uvažován C110/130 [6]. Tato technologie byla zvolena především z důvodů trvanlivosti, která je u vysokohodnotných betonů výrazně vyšší než u betonů běžných. Pro model, který uvažuje lineárně elastické chování materiálu, jsou důležité charakteristiky:

Youngův modul pružnosti $E_1$ = 45 GPa

objemová hmotnost ρ1 = 2600 kg/m$^3$ (s vlivem hmotnosti předpínací výztuže)

Pylony a jejich příčné spojení vedené těsně pod mostovkou jsou svařované z oceli S355J2.

$E_2$ = 210 GPa

$\rho_2$ = 7850 kg/m$^3$

Na závěsy je použito systému Redaelli. Jde o plně uzavřená ocelová lana (full lucked coil strands – FLC). Výrobce poskytuje informace o průměru, ploše a výsledné tahové tuhosti. Dnes jsou některá prodávaná lana o jiném průměru, než která byla použita při výstavbě (±1mm) [10]. Pro porovnání byla vybrána lana s nejbližšími charakteristikami. Z tab. 5.1 je vidět, že lze použít jeden materiál pro modelování různých závěsů.

$E_3$ = 165 GPa

$\rho_3$ = 8300 kg/m$^3$

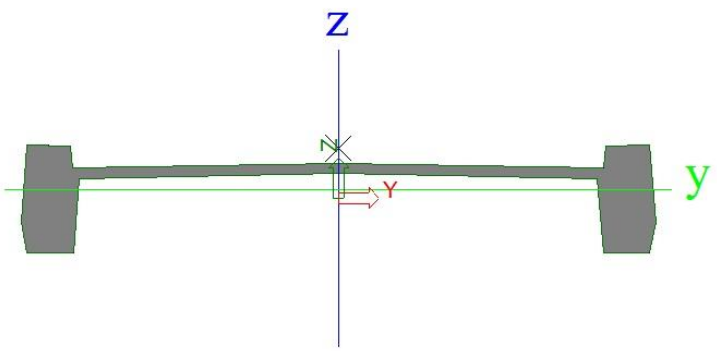
| FLC | informace od výrobce | | | | vypočteno | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| d použité | d nabízené | A | EA | M | E | ρ |
| [mm] | [mm] | [mm$^2$] | [MN] | [kg/m] | [MPa] | [kg/m$^3$] |
| 20.0 | 20.0 | 266.0 | 43.9 | 2.2 | 165037.6 | 8270.676692 |
| 24.0 | 24.0 | 383.0 | 63.2 | 3.2 | 165013.1 | 8355.091384 |
| 28.0 | 28.0 | 521.0 | 86.0 | 4.3 | 165067.2 | 8253.358925 |
| 32.0 | 32.0 | 681.0 | 112.0 | 5.7 | 164464.0 | 8370.044053 |
| 35.0 | 36.0 | 862.0 | 142.0 | 7.2 | 164733.2 | 8352.668213 |

*tab. 5.1: charakteristiky závěsů [10], upraveno*

### 5.1.4 Průřezové charakteristiky

Průřezy jsou vytvořeny v programu Autocad 2015 od společnosti Autodesk Inc. a importovány do programu Scia Engineer, který již vypočítá potřebné průřezové charakteristiky.

Mostovka je modelována dle příčného řezu z obr. 3.2 :

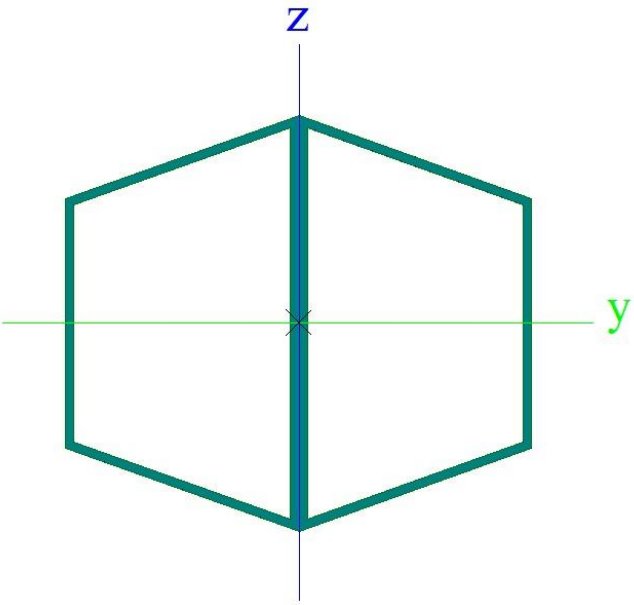



*obr. 5.3: liniové hmoty na rovinném modelu*

| | | |
|---|---|---|
| A | 5,1368e-01 | m^2 |
| Ay | 2,0693e-01 | m^2 |
| Az | 3,0449e-01 | m^2 |
| AL | 9,0877e+00 | m^2/m |
| AD | 9,0877e+00 | m^2/m |
| cYUSS | 0 | mm |
| cZUSS | 48 | mm |
| α | 0,00 | deg |
| Iy | 1,2369e-02 | m^4 |
| Iz | 9,9113e-01 | m^4 |
| iy | 155 | mm |
| iz | 1389 | mm |
| Wely | 3,5582e-02 | m^3 |
| Welz | 5,6378e-01 | m^3 |
| Wply | 6,4012e-02 | m^3 |
| Wplz | 6,6863e-01 | m^3 |
| Mply+ | 1,54e+07 | Nm |
| Mply- | 1,54e+07 | Nm |
| Mplz+ | 1,60e+08 | Nm |
| Mplz- | 1,60e+08 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 234 | mm |
| It | 6,9891e-03 | m^4 |
| Iw | 2,6082e-02 | m^6 |
| βy | -3380 | mm |
| βz | 0 | mm |

*tab. 5.2: průřezové charakteristiky mostovky*

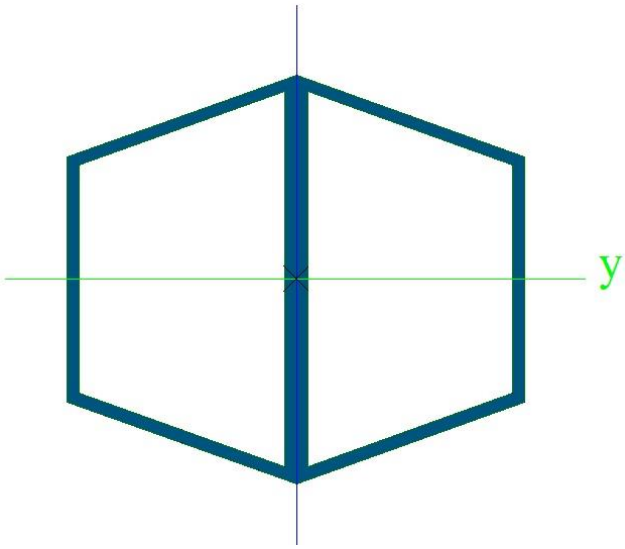
Jednotlivé sloupy pylonů mají po výšce proměnný lichoběžníkový profil. Pro účel rovinného modelu je tento členěný pylon sloučen do jednoho proměnného průřezu, který zachovává jeho tuhost v rovině modelu. Změna tuhosti mimo rovinu není pro tento případ relevantní. Zde jsou uvedeny jejich charakteristiky v místě uložení na základ, a nahoře v místě závěsů.




*obr. 5.4: příčný průřez pylonu ve vetknutí*

| | | |
|---|---|---|
| A | 1,7556e-01 | m^2 |
| Ay | 7,9796e-02 | m^2 |
| Az | 1,1792e-01 | m^2 |
| AL | 4,4732e+00 | m^2/m |
| AD | 1,1005e+01 | m^2/m |
| cYUSS | 56834 | mm |
| cZUSS | 4190 | mm |
| α | 0,00 | deg |
| Iy | 2,7414e-02 | m^4 |
| Iz | 2,9919e-02 | m^4 |
| iy | 395 | mm |
| iz | 413 | mm |
| Wely | 4,3862e-02 | m^3 |
| Welz | 4,2741e-02 | m^3 |
| Wply | 6,2300e-02 | m^3 |
| Wplz | 5,3006e-02 | m^3 |
| Mply+ | 2,21e+07 | Nm |
| Mply- | 2,21e+07 | Nm |
| Mplz+ | 1,88e+07 | Nm |
| Mplz- | 1,88e+07 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 0 | mm |
| It | 3,9846e-02 | m^4 |
| Iw | 2,2405e-05 | m^6 |
| βy | 0 | mm |
| βz | 0 | mm |

*tab. 5.3: průřezové charakteristiky pylonu ve vetknutí*




*obr. 5.5: příčný průřez pylonu ve vrcholu*

| | | |
|---|---|---|
| A | 1,2478e-01 | m^2 |
| Ay | 5,9062e-02 | m^2 |
| Az | 8,5305e-02 | m^2 |
| AL | 3,2200e+00 | m^2/m |
| AD | 7,7982e+00 | m^2/m |
| cYUSS | 60948 | mm |
| cZUSS | 4259 | mm |
| α | 0,00 | deg |
| Iy | 9,8726e-03 | m^4 |
| Iz | 1,0906e-02 | m^4 |
| iy | 281 | mm |
| iz | 296 | mm |
| Wely | 2,1939e-02 | m^3 |
| Welz | 2,1646e-02 | m^3 |
| Wply | 3,1511e-02 | m^3 |
| Wplz | 2,7186e-02 | m^3 |
| Mply+ | 1,12e+07 | Nm |
| Mply- | 1,12e+07 | Nm |
| Mplz+ | 9,65e+06 | Nm |
| Mplz- | 9,65e+06 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 0 | mm |
| It | 1,4630e-02 | m^4 |
| Iw | 4,1361e-06 | m^6 |
| βy | 0 | mm |
| βz | 0 | mm |

*tab. 5.4: průřezové charakteristiky pylonu ve vrcholu*

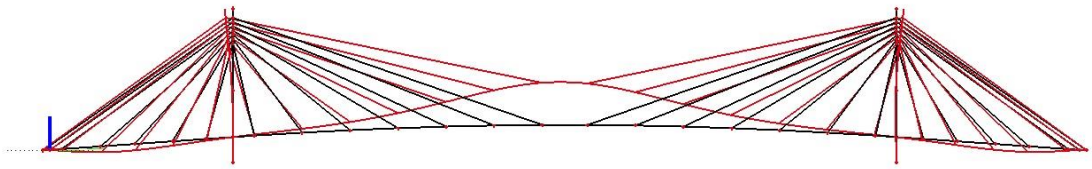
Závěsy jsou vytvořeny jako kruhové průřezy o ploše $As_2$ odpovídající dvojnásobku plochy z tabulky ze statického výpočtu [7].

| Závěs, číslování | Typ | $As_1$ 1 lano | $As_2$ zdvojené lano |
|---|---|---|---|
| | | [$mm^2$] | [$mm^2$] |
| 101, 401 | FLC20 | 266 | 532 |
| 102, 402 | FLC20 | 266 | 532 |
| 103, 403 | FLC20 | 266 | 532 |
| 104, 404 | FLC28 | 521 | 1042 |
| 105, 405 | FLC35 | 815 | 1630 |
| 106, 406 | FLC35 | 815 | 1630 |
| 107, 407 | FLC35 | 815 | 1630 |
| 201, 301 | FLC20 | 266 | 532 |
| 202, 302 | FLC20 | 266 | 532 |
| 203, 303 | FLC25 | 416 | 832 |
| 204, 304 | FLC28 | 521 | 1042 |
| 205, 305 | FLC31 | 639 | 1278 |
| 206, 306 | FLC35 | 815 | 1630 |
| 207, 307 | FLC35 | 815 | 1630 |

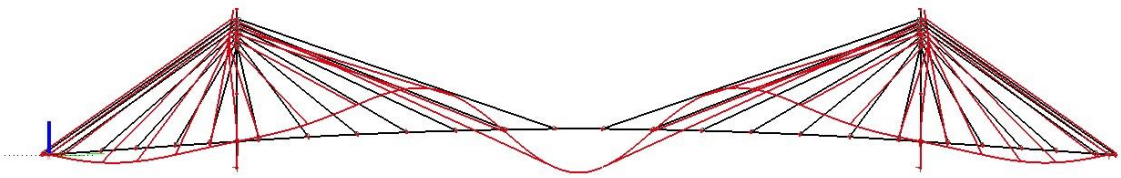
*tab. 5.5: plocha závěsů*

## 5.2 Vlastní frekvence a tvary kmitání

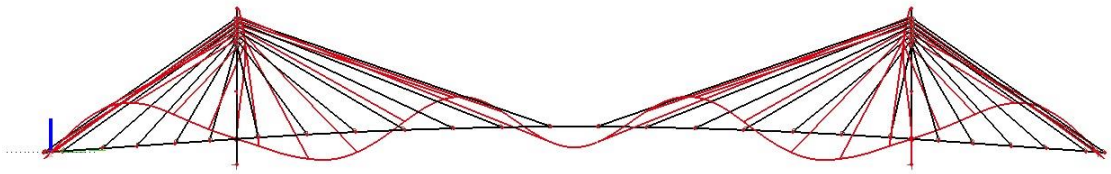
Pomocí programu Scia Engineer bylo zjištěno prvních 5 vlastních tvarů kmitání ve svislém směru.



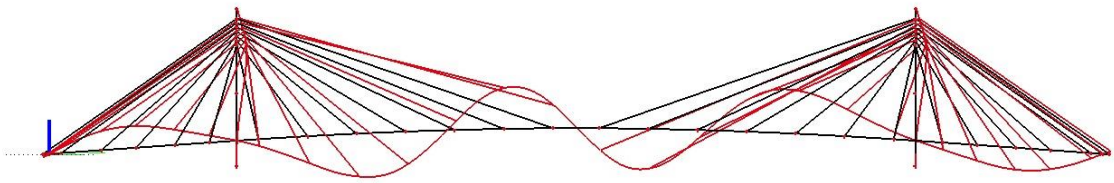
*obr. 5.6: 2. vlastní tvar, f = 0,8171 Hz*



*obr. 5.7: 3. vlastní tvar, f = 1,1750 Hz*



*obr. 5.9: 4. vlastní tvar, f = 1,4374 Hz*



*obr. 5.8: 5. vlastní tvar, f = 1,6424*

Vlastní tvary jsou seřazeny podle svých frekvencí. První tvar je symetrický a v každém poli směřují všechny výchylky jedním směrem. S rostoucími vlastními frekvencemi se tvary stávají složitější. Za povšimnutí stojí střídání symetrických a antisymetrických tvarů, kdy následující má vždy více o jeden bod, ve kterém nastává lokální extrém výchylky. To odpovídá chování prostě podepřeného nosníku se spojitě rozloženou hmotou. Pro první tvar jsou tyto body 3, právě jeden pro každé pole.

Podle očekávání má most vlastní frekvence v rozmezích, která mohou být potenciálně nebezpečná pro vznik rezonance s lidskou chůzí nebo během. Bude proto nutné ověřit odezvu na dynamické zatížení chodci. Tímto tématem se zabývá kapitola 6.3.

## 5.3 Vliv osových sil na vlastní frekvence

Matice tuhosti konstrukce není dána jen geometrií prvků a jejich průřezy, ale mají na ní vliv také osové síly. Pomocí matice geometrické tuhosti lze zavést vliv statických osových sil na kmitání konstrukce.[2] V Programu Scia Engineer lze s tímto vlivem provést nelineární statický výpočet pro zjištění statických posunů, nebo modální analýzu, jejímž výsledkem jsou vlastní tvary. Odezva na harmonické zatížení je řešena jako lineární výpočet, ve kterém se osové síly neuplatní. Cílem této kapitoly je ukázat rozdíl mezi vlastními frekvencemi bez vlivu napětí v závěsech z kapitoly 5.2 a frekvencemi, u kterých je tento vliv uvažován.

### 5.3.1 Osové síly v závěsech

Velikost sil $F_G$ v závěsech při stálém zatížení je převzata ze statického výpočtu [7].

| Závěs, číslování | max $F_{e,k}$ | max $F_{e,d}$ | $F_{R,d}$ | max $F_{e,d}$ < $F_{R,d}$ ? | max $F_{e,d}$ / $F_{R,d}$ | σ max,k | % $f_{p,k}$ | Stále celkem | Max při montáži |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $F_G$ | $F_{p,k}$ |
| | [kN] | [kN] | [kN] | | | [MPa] | | [kN] | [kN] |
| 101, 401 | 130.1 | 182 | 239 | ok | 76% | 489 | 34% | 75.6 | 76.7 |
| 102, 402 | 134.6 | 188 | 239 | ok | 79% | 506 | 35% | 82.1 | 82.1 |
| 103, 403 | 134.6 | 188 | 239 | ok | 79% | 506 | 35% | 87.1 | 107.3 |
| 104, 404 | 228.9 | 320 | 470 | ok | 68% | 439 | 31% | 133.6 | 133.6 |
| 105, 405 | 466.2 | 653 | 736 | ok | 89% | 572 | 40% | 287.8 | 321.8 |
| 106, 406 | 465.8 | 652 | 736 | ok | 89% | 572 | 40% | 287.8 | 291.5 |
| 107, 407 | 465.8 | 652 | 736 | ok | 89% | 572 | 40% | 282.1 | 286.2 |
| 201, 301 | 152.3 | 213 | 239 | ok | 89% | 573 | 40% | 90.7 | 116.7 |
| 202, 302 | 149.9 | 210 | 239 | ok | 88% | 564 | 39% | 90.5 | 122.7 |
| 203, 303 | 198.4 | 278 | 375 | ok | 74% | 477 | 33% | 117.8 | 148 |
| 204, 304 | 250.3 | 350 | 470 | ok | 75% | 480 | 33% | 155.7 | 180.6 |
| 205, 305 | 296.4 | 415 | 575 | ok | 72% | 464 | 32% | 185.1 | 202.6 |
| 206, 306 | 341.4 | 478 | 736 | ok | 65% | 419 | 29% | 205.9 | 242.2 |
| 207, 307 | 404.5 | 566 | 736 | ok | 77% | 496 | 34% | 276.8 | 284.5 |

*tab. 5.6: osové síly v závěsech [7], upraveno*

Tyto síly byly vneseny na závěsy pomocí funkce počáteční napětí a pro jejich kontrolu byl proveden statický nelineární výpočet. Průhyb uprostřed rozpětí od vlastní tíhy je na skutečné konstrukci nulový. S uvážením ostatního stálého zatížení byl v tomto modelu zjištěn $u_{max} = 41{,}4$ mm, což je hodnota zanedbatelná pro mostní pole dlouhé 156 m.

### 5.3.2 Výsledky

Pomocí softwaru byly znovu určeny vlastní frekvence. Jejich hodnoty jsou porovnány s frekvencemi z kapitoly 5.2 v tab. 5.7

| vlastní tvar č. | $f_i$ s osovými silami | $f_j$ bez osových sil | poměr $f_i/f_j$ | odchylka vzniklá zanedbání vlivu napětí |
|---|---|---|---|---|
| | [Hz] | [Hz] | [-] | [%] |
| 1 | 0.706 | 0.6832 | 1.033 | 3.34 |
| 2 | 0.876 | 0.8171 | 1.072 | 7.21 |
| 3 | 1.2511 | 1.175 | 1.065 | 6.48 |
| 4 | 1.5197 | 1.4347 | 1.059 | 5.92 |
| 5 | 1.6888 | 1.6424 | 1.028 | 2.83 |

*tab. 5.7: vyhodnocení vlivu osových sil v závěsech*

Zde zjištěné frekvence jsou vyšší, což odpovídá tahovému charakteru napětí v závěsech. Pokud by byly podobné subtilní prvky namáhány tlakem, mohlo by naopak dojít ke snížení vlastních frekvencí. Odchylka vzniklá zanedbáním osových sil se pohybuje v řádech jednotek procent. Pro účely této práce je její velikost přijatelná, ale v některých případech, zejména při řešení odezvy na specifické frekvence, by bylo třeba výpočet upravit.

## 5.4 Rayleighova metoda

### 5.4.1 Teorie energetické metody

Tato metoda vychází z principu zachování mechanické energie. Pro dodržení toho zákonu musí být maximum kinetické energie rovno maximu potenciální energie.

$$maxE_k = maxE_p \tag{5.4}$$

Derivací (4.2) lze vyjádřit rychlost jako $v = u_A\omega\cos(\omega t + \varphi)$, maximální rychlost je tedy $v_{max} = u_A\omega$ a maximum kinetické energie:

$$maxE_k = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2u_A^2 \tag{5.5}$$

Při uvažování lineárně-elastického materiálu je síla potřebná na vytvoření výchylky přímo úměrná velikosti výchylky, v tomto případě ji představuje vratná síla $F$:

$$F = ku \tag{5.6}$$

Ve chvíli, kdy je kinetická energie nulová, je nulová též rychlost a vzniká maximum výchylky i potenciální energie.

$$maxEp = \int_0^{u_A} Fdu = \int_0^{u_A} kudu = \frac{1}{2}ku_A^2 \tag{5.7}$$

Dosazením (5.5) a (5.7) do (5.4) je možné snadno určit vzorec (4.4) pro přesný výpočet vlastní frekvence soustavy s 1 stupněm volnosti.

Pro více stupňů volnosti je ovšem potřeba znát první vlastní tvar. Ten lze odhadnout pomocí výchylek od statického zatížení, které je zvoleno v jeho očekávaném směru a velikostí je úměrné hmotnostem v daných bodech. Tím ovšem vnášíme do výpočtu nepřesnost, protože odhadnutý vlastní tvar není energeticky ten nejméně náročný, který odpovídá první vlastní frekvenci. To vede k závěru, že zjištěná vlastní frekvence touto metodou bude vždy vyšší než skutečná.

Rozšíření pro N stupňů volnosti:

$$F = ku_A \rightarrow F_i = k\Phi_i \tag{5.8}$$

Kde $F_i$ jsou síly respektující první vlastní tvar a velikost hmotností a $\Phi_i$ jsou výchylky vyvolané tímto zatížením.

Úpravou (5.5) a (5.7) při použití vztahu (5.8) získáme maximum potenciální energie v závislosti na vektoru zatížení a maximum kinetické energie.

$$maxE_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} F_i \Phi_i \tag{5.9}$$

$$maxE_k = \omega^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \Phi_i^2 \tag{5.10}$$

Dosazením (5.9) a (5.10) do (5.4) a úpravou odhadneme první vlastní frekvenci:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} F_i \Phi_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i \Phi_i^2}} \tag{5.11}$$

### 5.4.2 Diagonální matice hmotnosti a vektor zatížení

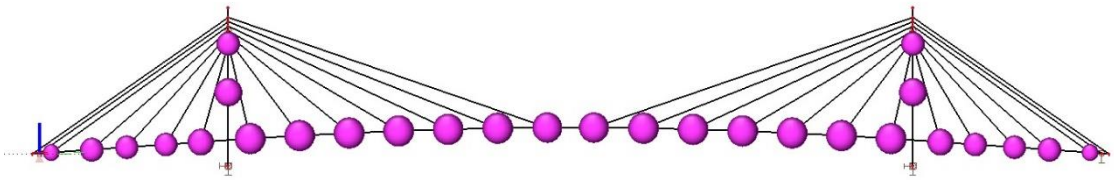
Pro účely výpočtu je třeba nastavit hmotnosti materiálů na nulu, tím se programu zamezí automatickému generování konzistentní matice tuhosti z vlastní váhy. Hmoty se pak rozdělí diskrétně po bodech mostovky a pylonů. Aby se zabránilo vzniku frekvencí na lanech, jejich hmoty se zanedbají. Pro větší zpřesnění výpočtu by bylo možné přiřadit vždy jednu polovinu hmoty závěsu na vrchol pylonu a druhou do místa ukotvení závěsu k mostovce. Do každého uzlu je vždy přiřazena hmota odpovídající polovině vzdálenosti mezi vedlejšími body. Například hmota v místě prvního závěsu v krajním poli:

$$m1 = \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2}\right)\left(A_{seg}\rho_1 + \ g_{ost}\right) \tag{5.12}$$

$$m1 = \left(\frac{2{,}662}{2} + \frac{9{,}271}{2}\right)(0{,}5137 * 2600 + \ 254{,}1) \tag{5.13}$$

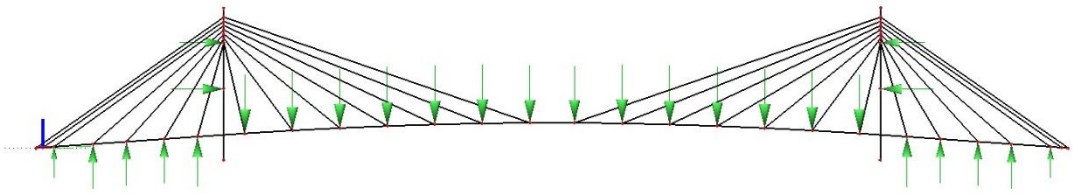
$$m1 = 9484\ kg \tag{5.14}$$

Celá diagonála matice hmotnosti je uvedena v tab. 5.8 a její model zobrazen na obr. 5.10.



*obr. 5.10: diskrétní rozložení hmot na modelu*

Abychom obdrželi správný výsledek, vektor zatížení musí působit ve směru výchylek prvního vlastního tvaru. Poměry velikostí jeho složek musí být rovny poměru velikostí hmotností v daných bodech. Výsledný vektor v Newtonech odpovídá číselně diagonále matice hmotnosti.



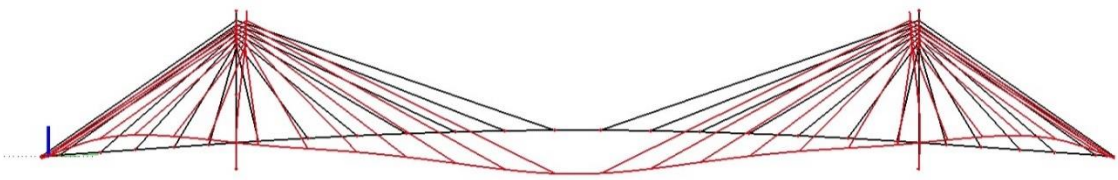
*obr. 5.11: zatěžovací vektor energetické metody na modelu*

### 5.4.3 Výpočet a výsledky

Pomocí softwaru byly zjištěny statické posuny od zatěžovacího vektoru ve zvolených bodech a v programu MS Excel byl vypočten podle vztahů z kapitoly 5.4.1 odhad první vlastní frekvence. Díky tomu, že byla vymodelována i diskrétní matice hmotnosti, bylo možné porovnat výsledky energetické metody se softwarovým výpočtem používajícím stejnou matici hmotnosti.

| diagonála diskrétní **M** | | energetická metoda | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L[m] | M[kg] | bod č. | $m_i$ [kg] | $F_i$ [N] | $\phi_i$[mm] | $\phi_i$[m] | $F_i\phi_i$ | $m_i\phi_i^2$ |
| 5.966 | 9484 | 1 | 9484 | 9484 | 6.1 | 0.0061 | 57.85 | 0.35 |
| 8.63 | 13719 | 2 | 13719 | 13719 | 21.8 | 0.0218 | 299.08 | 6.52 |
| 8.466 | 13458 | 3 | 13458 | 13458 | 24.2 | 0.0242 | 325.69 | 7.88 |
| 8.451 | 13435 | 4 | 13435 | 13435 | 17.5 | 0.0175 | 235.10 | 4.11 |
| 9.622 | 15296 | 5 | 15296 | 15296 | 8.1 | 0.0081 | 123.90 | 1.00 |
| 11.289 | 17946 | 6 | 17946 | 17946 | 6.1 | 0.0061 | 109.47 | 0.67 |
| 11.291 | 17949 | 7 | 17949 | 17949 | 17.1 | 0.0171 | 306.93 | 5.25 |
| 11.292 | 17951 | 8 | 17951 | 17951 | 27.1 | 0.0271 | 486.47 | 13.18 |
| 11.291 | 17949 | 9 | 17949 | 17949 | 38.7 | 0.0387 | 694.64 | 26.88 |
| 11.292 | 17951 | 10 | 17951 | 17951 | 51.5 | 0.0515 | 924.47 | 47.61 |
| 11.292 | 17951 | 11 | 17951 | 17951 | 63.6 | 0.0636 | 1141.68 | 72.61 |
| 10.96 | 17423 | 12 | 17423 | 17423 | 71.3 | 0.0713 | 1242.27 | 88.57 |
| 10.96 | 17423 | 13 | 17423 | 17423 | 70.8 | 0.0708 | 1233.56 | 87.34 |
| 11.292 | 17951 | 14 | 17951 | 17951 | 62.3 | 0.0623 | 1118.34 | 69.67 |
| 11.292 | 17951 | 15 | 17951 | 17951 | 49.8 | 0.0498 | 893.95 | 44.52 |
| 11.291 | 17949 | 16 | 17949 | 17949 | 37 | 0.0370 | 664.12 | 24.57 |
| 11.292 | 17951 | 17 | 17951 | 17951 | 25.7 | 0.0257 | 461.34 | 11.86 |
| 11.291 | 17949 | 18 | 17949 | 17949 | 16.1 | 0.0161 | 288.98 | 4.65 |
| 11.289 | 17946 | 19 | 17946 | 17946 | 5.7 | 0.0057 | 102.29 | 0.58 |
| 9.622 | 15296 | 20 | 15296 | 15296 | 7.7 | 0.0077 | 117.78 | 0.91 |
| 8.451 | 13435 | 21 | 13435 | 13435 | 16.7 | 0.0167 | 224.36 | 3.75 |
| 8.466 | 13458 | 22 | 13458 | 13458 | 23.2 | 0.0232 | 312.23 | 7.24 |
| 8.63 | 13719 | 23 | 13719 | 13719 | 21 | 0.0210 | 288.10 | 6.05 |
| 5.966 | 9484 | 24 | 9484 | 9484 | 5.9 | 0.0059 | 55.96 | 0.33 |
| 13.885 | 16188 | 25 | 16188 | 16188 | 4.9 | 0.0049 | 79.32 | 0.39 |
| 13.885 | 16188 | 26 | 16188 | 16188 | 1.5 | 0.0015 | 24.28 | 0.04 |
| 14.474 | 13647 | 27 | 13647 | 13647 | 14 | 0.0140 | 191.05 | 2.67 |
| 14.474 | 13647 | 28 | 13647 | 13647 | 11.1 | 0.0111 | 151.48 | 1.68 |
| Σ | | | | | | | 12154.71 | 540.9 |

*tab. 5.8: výpočet energetické metody*



*obr. 5.12: Deformovaná konstrukce od zatěžovacího vektoru*

Dle vzorce (5.11) $\omega_1$ = 4,740 $s^{-1}$ a podle (4.3) $f_1$ = 0,754 Hz. Jako částečnou kontrolu správnosti můžeme použít fakt, že frekvence vypočtená touto metodou, by měla být nepatrně vyšší než přesně vypočtená frekvence, což odpovídá výsledku.

Vlastní frekvence s diskrétní $\boldsymbol{M}$ a se zanedbáním hmotnosti závěsů, která byla vypočtena programem: $f_1 = 0{,}6923$.

## 5.5 Metoda postupných aproximací

Pomocí této metody lze iterativně určit všechny vlastní tvary konstrukce, avšak je nutné určovat je postupně od nejnižšího a zavést do výpočtu podmínky ortogonality vlastních tvarů. V této kapitole je zjišťován pouze první. Vycházíme ze vztahu

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{K}\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+1}} \tag{5.15}$$

Kde $\overline{\boldsymbol{x}}$ je vektor posunů od statického zatížení, $\boldsymbol{x}$ vznikne znormováním $\overline{\boldsymbol{x}}$ a po přenásobení maticí hmotnosti slouží jako vstupní zatěžovací vektor pro další iteraci.

Nejdříve je zvolen vektor $\overline{\boldsymbol{x}}_0$, v tomto případě jednotkový. Přenásobením maticí hmotnosti a znormováním je získán vektor $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}}$. Tím je zatížena konstrukce a výsledkem statického výpočtu je vektor posunů $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$, program tedy provedl operaci $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}}$. Jeho znormováním je získán $\boldsymbol{x}_1$ a stejným způsobem probíhají další kroky iterace.

Při kontrole, zda **x** konverguje, a jak přesně již známe vlastní tvar, je možné vycházet z Rayleighova kvocientu $\rho$, který je definován vztahem

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}} \tag{5.16}$$

platným pro libovolný nenulový vektor $\boldsymbol{x}$. Lze dokázat[1], že

$$\omega_1^2 \leq \rho(x) \leq \omega_n^2 \tag{5.17}$$

A úpravou (4.7) můžeme získat

$$\omega^2 = \frac{\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}}{\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}} \tag{5.18}$$

Z uvedených vztahů je vidět, že takový vektor $\boldsymbol{x}$, který minimalizuje Rayleighův kvocient, je zároveň prvním vlastním tvarem a platí pro něj

$$\omega_1^2 = \rho(\boldsymbol{x}) \tag{5.19}$$

a pro jednotlivé prvky vektoru $\boldsymbol{x}$ platí

$$\omega_1^2 = \frac{x_k}{\bar{x}_{k+1}} \tag{5.20}$$

Dosazením (5.15)do (5.16) je v tomto případě možné $\rho$ vyjádřit jako:

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x}_k}{\overline{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T \boldsymbol{M} \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+1}}} \tag{5.21}$$

Jedno z možných kritérií konvergence je porovnání relativního rozdílu $\rho(\boldsymbol{x})$ pro dvě po sobě jdoucí iterace. Pokud kritérium není splněno, pokračuje se další iterací. Pokud splněno je, výpočet je již dostatečně přesný[9], tedy

$$\left| \frac{\rho(\boldsymbol{x})_{k+1} - \rho(\boldsymbol{x})_k}{\rho(\boldsymbol{x})_{k+1}} \right| < tolerance \tag{5.22}$$

Při výpočtu byla použita diagonální matice hmotnosti vytvořená v kapitole 5.4.2. Rayleighův kvocient byl vypočten pouze u poslední iterace a pro průběžnou kontrolu byla pozorována změna $\overline{\boldsymbol{x}}$ mezi iteracemi. Jednotlivé kroky výpočtu jsou uvedeny v příloze 11.1. Ze vzorce (5.21) byl po 4. iteraci určen ρ = 18,968, podle (5.19) $\omega_1$ = 4,355 $s^{-1}$ a podle (4.3) $f_1$ = 0,693 Hz. Je vidět, že tato metoda konverguje velice rychle a již mezi 3. a 4. iterací téměř nedochází ke změně zatěžovacího vektoru. Celý proces byl navíc prodloužen volbou jednotkového $\overline{\boldsymbol{x}}_0$. Pokud by byl tento vektor zvolen ve směru očekávaného prvního tvaru, například podobným způsobem jako v kapitole 5.4.2, konvergence by probíhala ještě rychleji [1].

## 5.6 Porovnání výsledků

Pro rovinný model bylo získáno několik výsledků, která vypovídají o zvolených metodách a aproximacích. K vyhodnocení vlivu napínacích sil v táhlech došlo již v kapitole 5.3. Tyto výsledky zde nejsou srovnávány, neboť ostatní metody byly použity na modelu, který vliv osových sil zanedbává. Jako nejpřesnější je uvažován výpočet provedený programem metodou iterace podprostoru, z tohoto důvodu budou ostatní metody srovnány s ním. Dále je zde patrný vliv diskretizace matice hmotnosti, proto je uvedena odchylka A, která porovnává vypočtené frekvence ostatními způsoby se softwarovým výpočtem s konzistentní $\boldsymbol{M}$ a odchylka B, která je srovnává se softwarovým výpočtem s diagonální $\boldsymbol{M}$.

| typ výpočtu | M | 1. vl. frekvence [Hz] | odchylka A % | odchylka B % |
|---|---|---|---|---|
| výpočet v programu SCIA Engineer | konzistentní | 0.6832 | 0.00 | 1.31 |
| | diagonální | 0.6923 | 1.33 | 0.00 |
| energetická metoda | diagonální | 0.754 | 10.36 | 8.91 |
| metoda postupných aproximací | diagonální | 0.693 | 1.43 | 0.10 |

*tab. 5.9: porovnání výsledků rovinného modelu*

Zajímavé je srovnání softwarového výpočtu s konzistentní a diagonální $\boldsymbol{M}$, ve které není uvažována hmotnost závěsů. Rozdíl jejich výsledků je pouze 1,33 %, jde tedy o vhodnou aproximaci, která dokáže zjednodušit výpočet při vnesením minimální chyby. Samozřejmě záleží na tvaru a typu konstrukce a na hustotě bodů, do kterých jsou soustředěny hmoty.

Odchylka energetické metody je v tomto případě poměrně vysoká, konkrétně 8,91 %. Jde však o metodu přibližnou. Tento výsledek je přijatelný a může sloužit k jednoduchému a rychlému odhadu první vlastní frekvence.

Metodou postupných aproximací bylo již po 4. iteraci dosaženo výsledku s relativní odchylkou pouze 0,1 %. Touto metodou je možné se libovolně přiblížit k přesnému výsledku při dostatečném počtu iterací. Lze používat pro zjišťování vlastní frekvence a tvaru a vzhledem k rychlé konvergenci může být přijatelně výpočetně náročná.

# 6 Prostorový model

## 6.1 Tvorba modelu

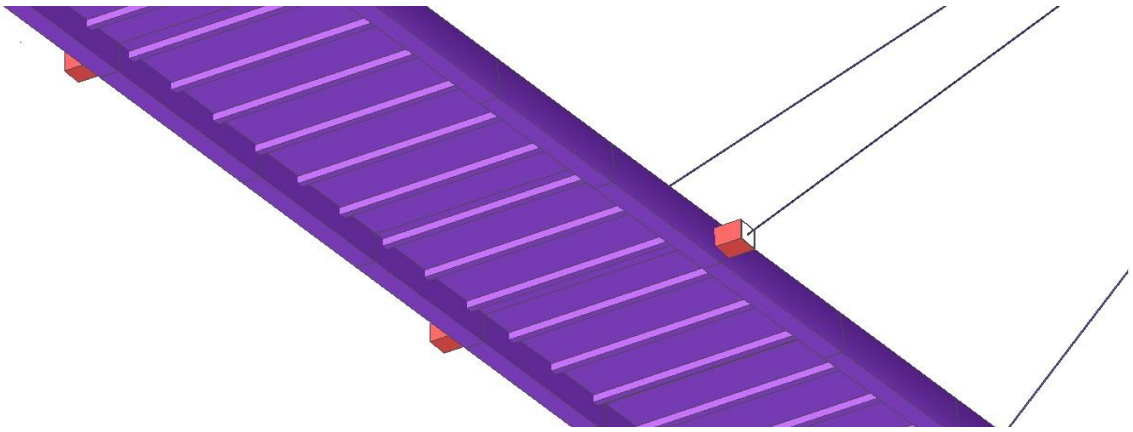
Vytvoření tohoto modelu je nutné především z důvodu, že problematika dynamické analýzy se netýká pouze svislého směru, ale je potřeba řešit konstrukci jako prostorovou pro postihnutí všech efektů a tvarů kmitání. Vzhledem k délce mostovky a její tuhosti lze očekávat, že se mezi prvními vlastními tvary objeví také tvary torzní a horizontální příčné, které jsou taktéž důležité pro řešení odezvy na zatížení chodci.

Data pro vytvoření bylo možné částečně převzít z rovinného modelu a doplnit je informacemi z [7]. Použité materiály jsou popsány v kapitole 5.1.3.

### 6.1.1 Geometrie konstrukce

Mostovka, na rozdíl od rovinného modelu, není tvořena jen pomocí prutového prvku, ale jde o desko-prutovou konstrukci. Na obou stranách jsou hlavní nosníky. Ty jsou propojeny deskovým prvkem tloušťky 60 mm, který je vyztužený žebry s osovými vzdálenostmi 920 mm. Pro zachování geometrie příčného řezu je deska odsazena od střednic nosníků o 112 mm. Žebra jsou modelována jako prismatické pruty výšky 100 mm, přestože jejich průřez je proměnný ze 100 na 129 mm. Jejich výška je důležitá například pro lokální ohyb desky mostovky, ne však pro chování konstrukce jako celku. V tomto modelu je tedy proměnnost průřezu zanedbána. Síť uzlů v podélném směru je zahuštěna oproti rovinnému modelu, vzdálenosti jednotlivých bodů jsou cca 3 m.

*obr. 6.1: pohled na mostovku zespod - konstrukce*

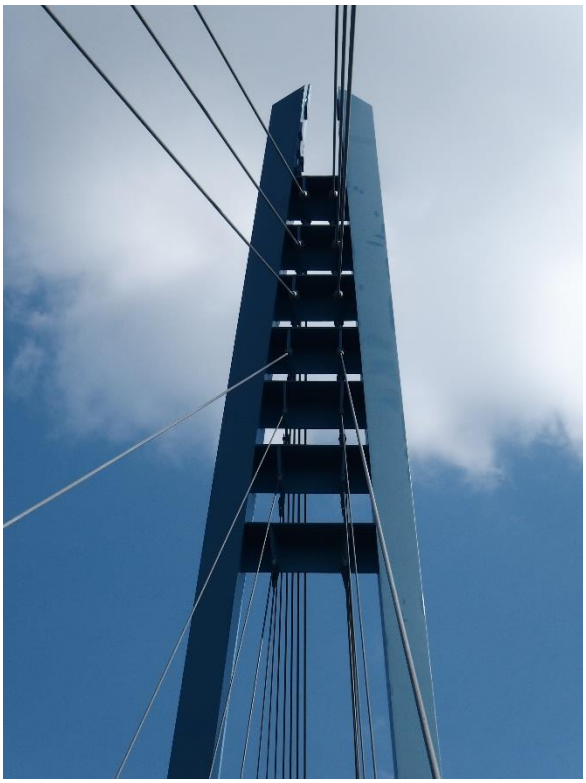


*obr. 6.2: pohled na mostovku zespod - model*

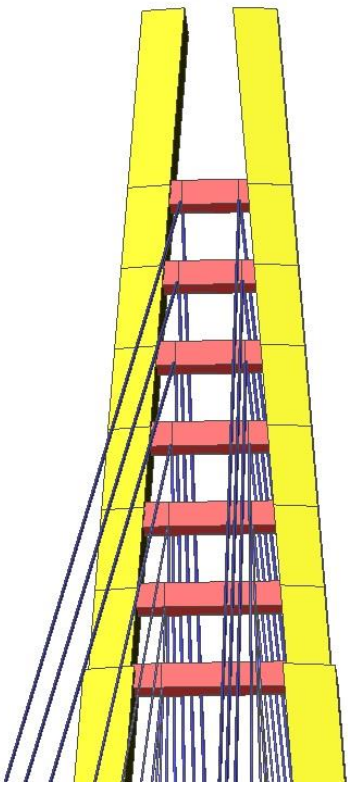
Pylony jsou vytvořeny pomocí sbíhajících se prutových prvků. V místě uložení na základ je osová vzdálenost jejich sloupů 6,5 m a ve vrcholu 1 m. Ve výšce 2,8 m, těsně pod průběžně procházející mostovkou, jsou propojeny ocelovou trubkou, ke které je uprostřed její délky připojena mostovka. Toto spojení zabraňuje mostovce v posunech vůči pylonu. Nejde však o tuhé spojení, takže může docházet k vzájemnému pootočení pylonu a mostovky. Tento přípoj je realizován pomocí krátkého prutu vedoucího ze středu propojovací trubky ke spodnímu žebru mostovky. Na vlastních tvarech je vidět, že chování takto modelovaného přípoje odpovídá očekávání.

Podpory mostovky jsou modelovány tak, aby bylo zachováno statické působení z dvourozměrného modelu, ale postihlo i prostorové chování konstrukce. Pod každým nosníkem na obou koncích mostu je umístěna jedna kloubová podpora. Posunu v podélném směru je zabráněno pouze na jedné straně konstrukce, v příčném a svislém směru ve všech podporách. Vzhledem k osové vzdálenosti podpor nosníků 3,3 m je zabráněno taktéž torzi mostovky a nadzvedávání z ložisek, protože podpory s touto vzdáleností mohou přenášet krouticí moment. Uložení jednotlivých sloupů pylonů na základ je modelováno jako vetknutí.

Propojení pylonů v horní části, ke kterým jsou připojeny závěsy, jsou modelována pomocí uzavřeného válcovaného profilu. Vzhledem k malé délce prvků je zde jejich možnost deformace zanedbatelná, jde tedy pouze o zachování geometrie konstrukce použitím dostatečně tuhých prutů.



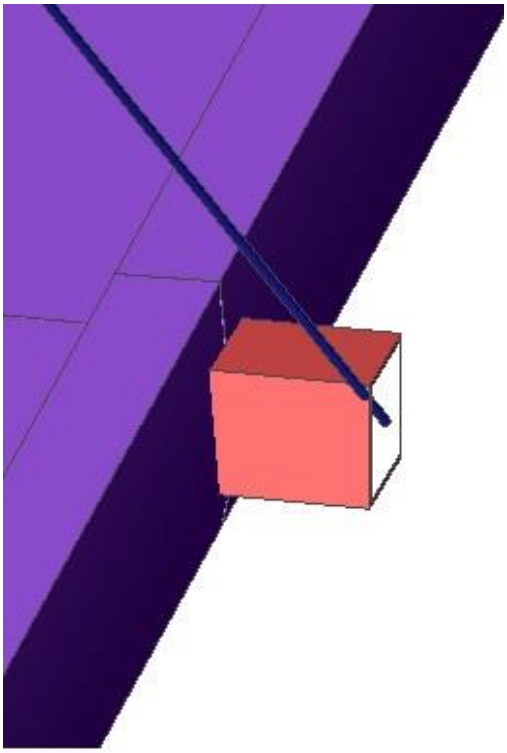
*obr. 6.4: pohled na vrchol pylonu - konstrukce*



*obr. 6.3: pohled na vrchol pylonu - model*

Připojení závěsů k mostovce je na skutečné konstrukci provedeno pomocí ocelových svařenců zabetonovaných do segmentů mostovky a závěsy tak nevycházejí z osy nosníku, ale jsou posunuty o cca 0,5 m směrem ven. Pro zjišťování vlastních tvarů v příčném i svislém směru by toto jejich odsazení téměř nemělo mít vliv, avšak pro tvary torzní je tato vzdálenost nezanedbatelná. Torzní tuhost mostovky je dána jak vlastní tuhostí betonových segmentů, tak dvěma rovinami závěsů, v závislosti na jejich vzdálenosti. Pokud by bylo zkráceno rameno, na kterém mohou závěsy působit proti kroucení mostovky o 0,5m na každé straně, mohlo by dojít k výraznému vnesení chyby. V modelu je místo ocelových svařenců použit tentýž prvek, kterým je vytvořeno spojení v horní části pylonů z důvodu, že jde pouze o zachování dostatečné tuhosti přípoje.

*obr. 6.6: pohled na ukotvení závěsu - konstrukce*



*obr. 6.5: pohled na ukotvení závěsu - model*

### 6.1.2 Hmoty

Program generuje hmoty z průřezů a materiálů, avšak je nutné provést některé opravy.

Ostatní stálé zatížení od vozovky a zábradlí $g_{vyb} = 163kg/m$ bylo rovnoměrně rozděleno na hlavní nosníky, pro každý je tedy spojitá hmota $g_{vyb}/2 = 81{,}5kg/m$.

Vzhledem k tomu, že deska mezi nosníky se vztahuje k jejich střednicím, dochází ke zdvojení materiálu v části nosníku, kde je jak průřez nosníku, tak deska. Tato plocha je $A_{fikt}$= 8,8*10$^{-3}$ m$^2$. Hmota na každém nosníku, která v modelu je, ale nenachází se ve skutečné konstrukci:

$$m_{fikt} = A_{fikt}\rho_1 = 8{,}8 * 10^{-3} * 2600 \tag{6.1}$$

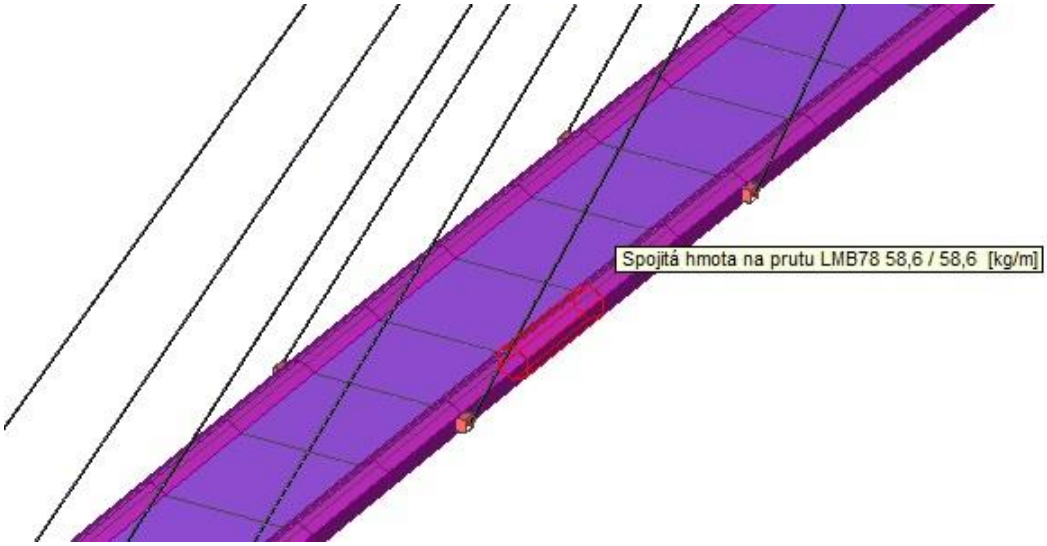
$$m_{fikt} = 22{,}9\ kg/m \tag{6.2}$$

Výsledná velikost liniové hmoty přidané na každý nosník:

$$m_{přid} = m_{vyb} - m_{fikt} \tag{6.3}$$

$$m_{přid} = 81{,}5 - 22{,}9 \tag{6.4}$$

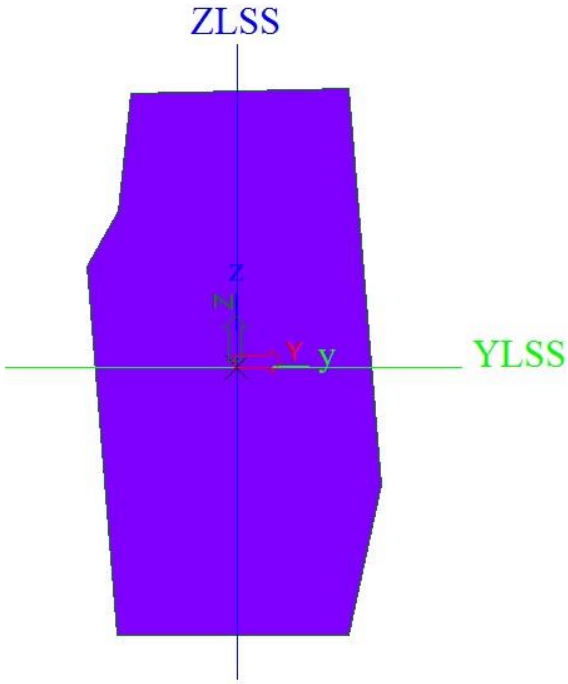
$$m_{přid} = 58{,}6\ kg/m \tag{6.5}$$




*obr. 6.7: liniové hmoty na prostorovém modelu*

### 6.1.3 Průřezové charakteristiky

Průřezy prutových prvků byly vytvořeny stejným způsobem jako u rovinného modelu popsaným v kapitole 5.1.4.

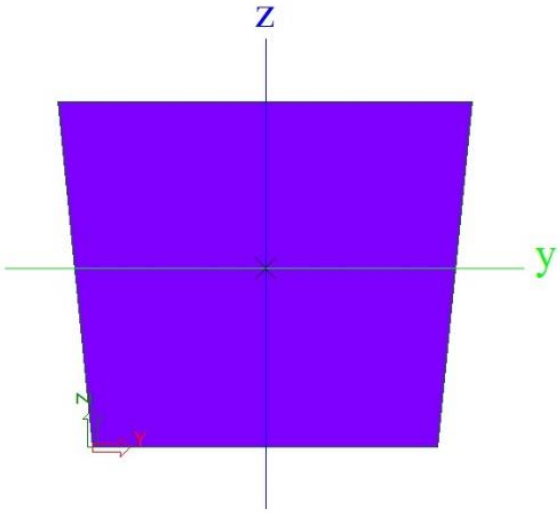



*obr. 6.8: průřez levého nosníku*

| | | |
|---|---|---|
| A | 1,6915e-01 | m^2 |
| Ay | 1,4335e-01 | m^2 |
| Az | 1,4540e-01 | m^2 |
| AL | 1,7062e+00 | m^2/m |
| AD | 1,7062e+00 | m^2/m |
| cYUSS | 2 | mm |
| cZUSS | -6 | mm |
| IYLSS | 4,7266e-03 | m^4 |
| IZLSS | 1,1527e-03 | m^4 |
| IYZLSS | -1,5090e-05 | m^4 |
| α | 0,24 | deg |
| Iy | 4,7266e-03 | m^4 |
| Iz | 1,1526e-03 | m^4 |
| iy | 167 | mm |
| iz | 83 | mm |
| Wely | 1,5473e-02 | m^3 |
| Welz | 7,0895e-03 | m^3 |
| Wply | 2,4296e-02 | m^3 |
| Wplz | 1,2053e-02 | m^3 |
| Mply+ | 5,83e+06 | Nm |
| Mply- | 5,83e+06 | Nm |
| Mplz+ | 2,89e+06 | Nm |
| Mplz- | 2,89e+06 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 0 | mm |
| It | 4,2066e-03 | m^4 |
| Iw | 0,0000e+00 | m^6 |
| βy | 4 | mm |
| βz | 7 | mm |

*tab. 6.1: průřezové charakteristiky nosníku mostovky*

Pravý nosník vznikl z levého zobrazením v osové souměrnosti, má tedy stejné průřezové charakteristiky.



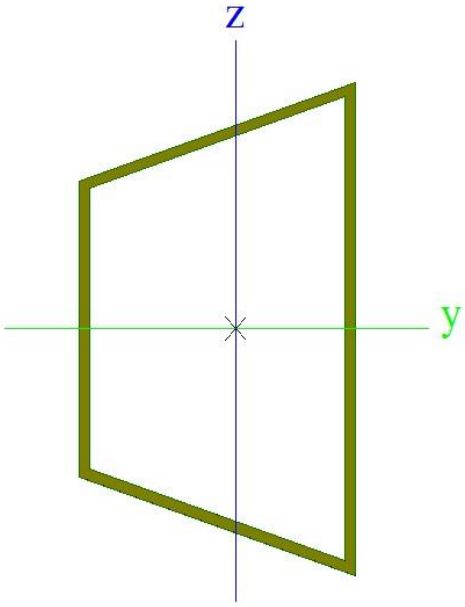

*obr. 6.9: průřez žebra desky*

| | | |
|---|---|---|
| A | 1,1000e-02 | m^2 |
| Ay | 9,2322e-03 | m^2 |
| Az | 9,1438e-03 | m^2 |
| AL | 4,2100e-01 | m^2/m |
| AD | 4,2100e-01 | m^2/m |
| cYUSS | 50 | mm |
| cZUSS | 52 | mm |
| α | 0,00 | deg |
| Iy | 9,1414e-06 | m^4 |
| Iz | 1,1183e-05 | m^4 |
| iy | 29 | mm |
| iz | 32 | mm |
| Wely | 1,7745e-04 | m^3 |
| Welz | 1,8639e-04 | m^3 |
| Wply | 2,7443e-04 | m^3 |
| Wplz | 3,0333e-04 | m^3 |
| Mply+ | 6,59e+04 | Nm |
| Mply- | 6,59e+04 | Nm |
| Mplz+ | 7,28e+04 | Nm |
| Mplz- | 7,28e+04 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 0 | mm |
| It | 2,5341e-05 | m^4 |
| Iw | 0,0000e+00 | m^6 |
| βy | 2 | mm |
| βz | 0 | mm |

*tab. 6.2: průřezové charakteristiky žebra desky*

Deska mostovky tloušťky 60 mm je vytvořena pomocí funkce „deska se žebry“ viz obr. 6.2.

Sloupy pylonu mají po výšce proměnný průřez, který se zužuje směrem nahoru. Tloušťka plechu 26 mm je konstantní a lichoběžníkový profil se proporcionálně zmenšuje.




*obr. 6.10: průřez sloupu pylonu*

| | | |
|---|---|---|
| A | 8,7781e-02 | m^2 |
| Ay | 3,8493e-02 | m^2 |
| Az | 5,9055e-02 | m^2 |
| AL | 3,4866e+00 | m^2/m |
| AD | 6,7523e+00 | m^2/m |
| cYUSS | 55336 | mm |
| cZUSS | 2091 | mm |
| α | 0,00 | deg |
| Iy | 1,3707e-02 | m^4 |
| Iz | 6,9576e-03 | m^4 |
| iy | 395 | mm |
| iz | 282 | mm |
| Wely | 2,1931e-02 | m^3 |
| Welz | 1,7478e-02 | m^3 |
| Wply | 3,1150e-02 | m^3 |
| Wplz | 2,2611e-02 | m^3 |
| Mply+ | 1,11e+07 | Nm |
| Mply- | 1,11e+07 | Nm |
| Mplz+ | 8,03e+06 | Nm |
| Mplz- | 8,03e+06 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 0 | mm |
| It | 9,6563e-05 | m^4 |
| Iw | 0,0000e+00 | m^6 |
| βy | 0 | mm |
| βz | 46 | mm |

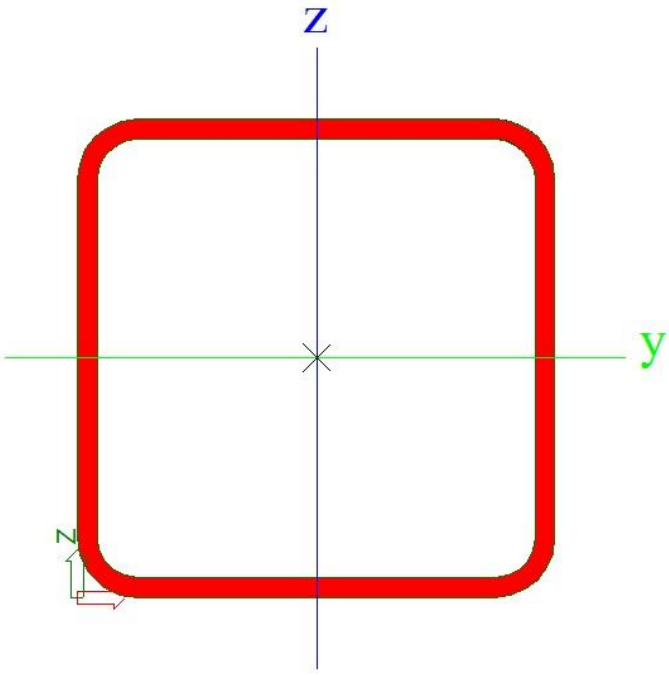
*tab. 6.3: průřezové charakteristiky pylonu ve vetknutí*

| | | |
|---|---|---|
| A | 7,5077e-02 | m^2 |
| Ay | 3,2738e-02 | m^2 |
| Az | 5,0557e-02 | m^2 |
| AL | 2,9980e+00 | m^2/m |
| AD | 5,7751e+00 | m^2/m |
| cYUSS | 59409 | mm |
| cZUSS | 2277 | mm |
| α | 0,00 | deg |
| Iy | 8,5875e-03 | m^4 |
| Iz | 4,3465e-03 | m^4 |
| iy | 338 | mm |
| iz | 241 | mm |
| Wely | 1,5977e-02 | m^3 |
| Welz | 1,2712e-02 | m^3 |
| Wply | 2,2800e-02 | m^3 |
| Wplz | 1,6528e-02 | m^3 |
| Mply+ | 8,09e+06 | Nm |
| Mply- | 8,09e+06 | Nm |
| Mplz+ | 5,87e+06 | Nm |
| Mplz- | 5,87e+06 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 0 | mm |
| It | 8,2521e-05 | m^4 |
| Iw | 0,0000e+00 | m^6 |
| βy | 0 | mm |
| βz | 39 | mm |

*tab. 6.5: průřezové charakteristiky pylonu v polovině výšky*

| | | |
|---|---|---|
| A | 6,2389e-02 | m^2 |
| Ay | 2,7463e-02 | m^2 |
| Az | 4,2055e-02 | m^2 |
| AL | 2,5100e+00 | m^2/m |
| AD | 4,7991e+00 | m^2/m |
| cYUSS | 62130 | mm |
| cZUSS | 2305 | mm |
| α | 0,00 | deg |
| Iy | 4,9363e-03 | m^4 |
| Iz | 2,4912e-03 | m^4 |
| iy | 281 | mm |
| iz | 200 | mm |
| Wely | 1,0970e-02 | m^3 |
| Welz | 8,7126e-03 | m^3 |
| Wply | 1,5756e-02 | m^3 |
| Wplz | 1,1406e-02 | m^3 |
| Mply+ | 5,59e+06 | Nm |
| Mply- | 5,59e+06 | Nm |
| Mplz+ | 4,05e+06 | Nm |
| Mplz- | 4,05e+06 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 0 | mm |
| It | 6,8500e-05 | m^4 |
| Iw | 0,0000e+00 | m^6 |
| βy | 0 | mm |
| βz | 33 | mm |

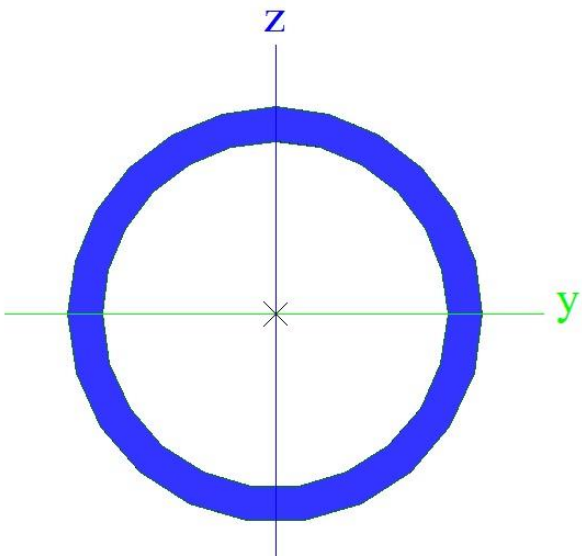
*tab. 6.4: průřezové charakteristiky pylonu ve vrcholu*




*obr. 6.11: průřez přípojného prvku závěsů*

| | | |
|---|---|---|
| A | 1,3704e-02 | m^2 |
| Ay | 6,8460e-03 | m^2 |
| Az | 6,8460e-03 | m^2 |
| AL | 1,1360e+00 | m^2/m |
| AD | 2,1922e+00 | m^2/m |
| cYUSS | 150 | mm |
| cZUSS | 150 | mm |
| α | 0,00 | deg |
| Iy | 1,8348e-04 | m^4 |
| Iz | 1,8348e-04 | m^4 |
| iy | 116 | mm |
| iz | 116 | mm |
| Wely | 1,2232e-03 | m^3 |
| Welz | 1,2232e-03 | m^3 |
| Wply | 1,4506e-03 | m^3 |
| Wplz | 1,4506e-03 | m^3 |
| Mply+ | 5,14e+05 | Nm |
| Mply- | 5,14e+05 | Nm |
| Mplz+ | 5,14e+05 | Nm |
| Mplz- | 5,14e+05 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 0 | mm |
| It | 3,0601e-04 | m^4 |
| Iw | 2,5312e-06 | m^6 |
| βy | 0 | mm |
| βz | 0 | mm |

*tab. 6.6: průřezové charakteristiky přípojného prvku závěsů*




*obr. 6.12: průřez propojení pylonu pod mostovkou*

| | | |
|---|---|---|
| A | 6,7719e-03 | m^2 |
| Ay | 4,5828e-03 | m^2 |
| Az | 4,5828e-03 | m^2 |
| AL | 5,2776e-01 | m^2/m |
| AD | 9,6756e-01 | m^2/m |
| cYUSS | 57860 | mm |
| cZUSS | 952 | mm |
| α | 0,00 | deg |
| Iy | 2,0237e-05 | m^4 |
| Iz | 2,0237e-05 | m^4 |
| iy | 55 | mm |
| iz | 55 | mm |
| Wely | 2,4092e-04 | m^3 |
| Welz | 2,4092e-04 | m^3 |
| Wply | 3,3284e-04 | m^3 |
| Wplz | 3,3284e-04 | m^3 |
| Mply+ | 1,18e+05 | Nm |
| Mply- | 1,18e+05 | Nm |
| Mplz+ | 1,18e+05 | Nm |
| Mplz- | 1,18e+05 | Nm |
| dy | 0 | mm |
| dz | 0 | mm |
| It | 1,8370e-06 | m^4 |
| Iw | 0,0000e+00 | m^6 |
| βy | 0 | mm |
| βz | 0 | mm |

*tab. 6.7: průřezové charakteristiky propojení pylonu pod mostovkou*

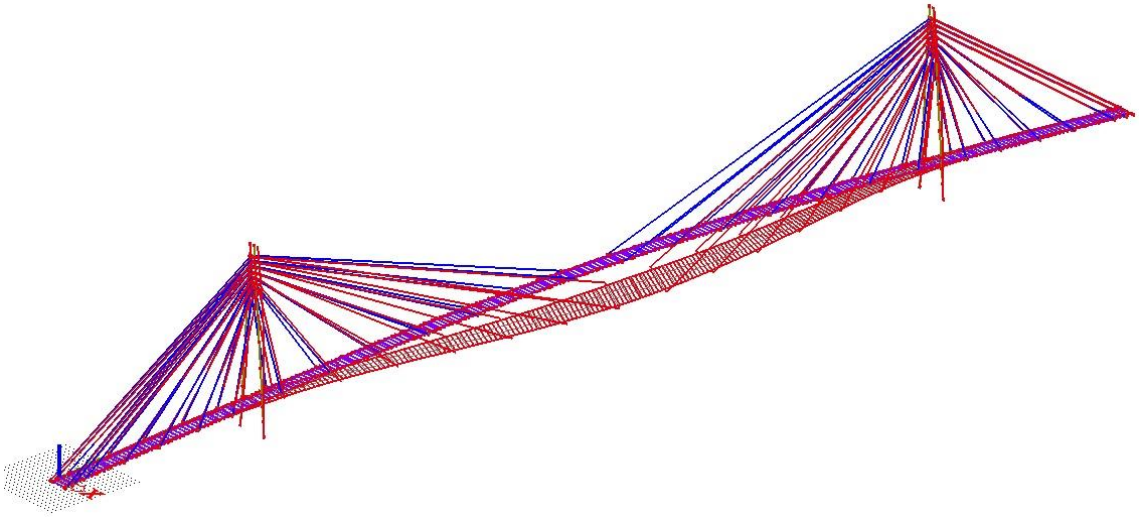
### 6.1.4 Nastavení sítě

Na výsledky výpočtu může mít značný vliv nastavení sítě bodů, které na prutech a deskách software generuje. Při nastavení dělení prutových prvků na více než jednu část však v tomto případě dochází k výpočtu mnoha vlastních frekvencí závěsů, které jsou výrazně nižší než frekvence mostu. Z tohoto důvodu je v softwaru zakázáno vytváření dalších uzlů po délce prutových prvků. U lan je důležitá pouze jejich tahová deformace a nepůsobí na ně žádné zatížení po jejich délce. Body na mostovce byly oproti rovinnému modelu zhuštěny, i tato síť je tedy pro výpočet dostatečná. Další možnost řešení je nastavení nulových hmotností pro materiál závěsů a rozdělení jejich hmotností do bodů mostovky a pylonů. I v tomto případě nedojde k výpočtu jejich vlastních frekvencí.

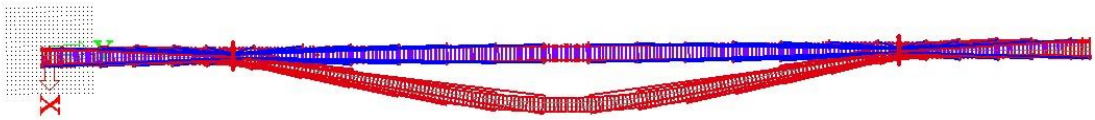
U deskových prvků bylo porovnáno nastavení průměrné velikosti prvků 1 m a 0,5 m a výsledné rozdíly vlastních frekvencí byly menší než 1%, byla tedy ponechána hustota sítě 1 m.

## 6.2 Vlastní frekvence a tvary kmitání

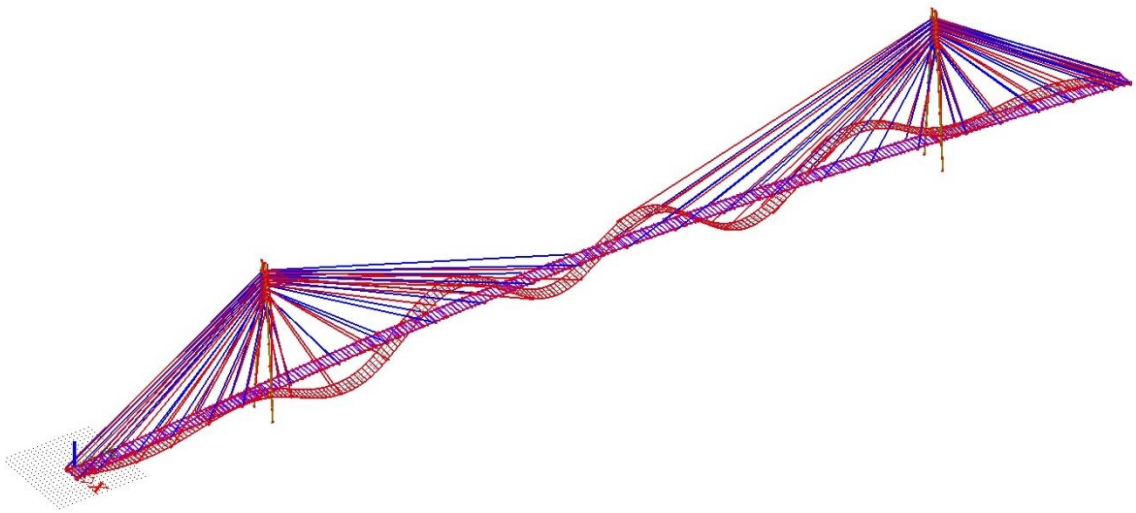
Pomocí programu SCIA Engineer bylo určeno (13) vlastních tvarů a frekvencí konstrukce. Tento relativně vysoký počet bylo nutné získat především z důvodů uvedených v kapitole 6.3, kde je nutné znát tvar a frekvenci nejbližší ke 2Hz.



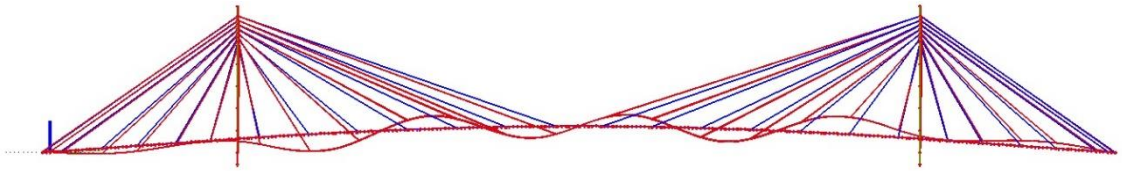
*obr. 6.13: 1. vlastní tvar – f = 0,5887, axonometrie*



*obr. 6.14: 1. vlastní tvar – f = 0,5887, pohled proti ose Z*



*obr. 6.15: 13. vlastní tvar – f = 2,0448, axonometrie*



*obr. 6.16: 13. vlastní tvar – f = 2,0448, pohled proti ose X*

Na obrázcích 6.13 – 6.16 jsou vybrány tvary, které byly dále použity pro výpočet v kapitole 6.3. Obrázky ostatních zjištěných vlastních tvarů jsou uvedeny v příloze 11.2.

Mezi prvními 13 vlastními tvary bylo nalezeno 8 svislých, 2 horizontální příčné, 2 tvary příčného kmitání pylonů a 1 torzní. Dle očekávání se na prvním místě objevil vlastní tvar horizontální, protože v tomto směru je tuhost konstrukce nízká. Následují 4 tvary vertikální a na 6. místě je tvar torzní. Tuhost v kroucení mostovky je sice malá, ale použití dvou rovin závěsů ji výrazně zvětšuje. 11. a 12. vlastní tvar jsou tvary kmitání pylonů. V 11. jsou výchylky obou pylonů ve stejném směru a ve 12. jdou směrem opačným. Jejich frekvenční rozdíl je dán torzní tuhostí mostovky. Znalost těchto dvou tvarů však nelze pro modelování zatížení chodci využít, protože pohyb po mostovce nemůže způsobit výrazné periodické namáhání kolmo na pylon.

Výpis vlastních tvarů a frekvencí a jejich porovnání s výsledky dosaženými na rovinném modelu je uveden v tab. 6.8

| Srovnání vlastních frekvencí rovinného a prostorového modelu | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| typ tvaru | Vlastní tvar č. | | $f_i$ [Hz] | | rozdíl prostorového a rovinného modelu [%] |
| | prostorový model | rovinný model | prostorový model | rovinný model | |
| horizontální | 1 | - | 0.5887 | - | - |
| vertikální | 2 | 1 | 0.6293 | 0.6832 | 8.57 |
| vertikální | 3 | 2 | 0.8086 | 0.8171 | 1.05 |
| vertikální | 4 | 3 | 1.1568 | 1.175 | 1.57 |
| vertikální | 5 | 4 | 1.4368 | 1.4347 | 0.15 |
| torzní | 6 | - | 1.4744 | - | - |
| horizontální | 7 | - | 1.5799 | - | - |
| vertikální | 8 | 5 | 1.629 | 1.6424 | 0.82 |
| vertikální | 9 | - | 1.7192 | - | - |
| vertikální | 10 | - | 1.8189 | - | - |
| pylon | 11 | - | 1.8684 | - | - |
| pylon | 12 | - | 1.986 | - | - |
| vertikální | 13 | - | 2.0448 | - | - |

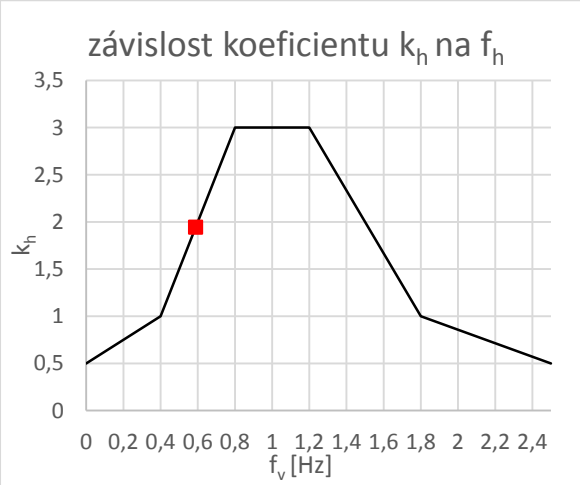
*tab. 6.8: porovnání vlastních frekvencí rovinného a prostorového modelu*

## 6.3 Odezva konstrukce na zatížení chodci

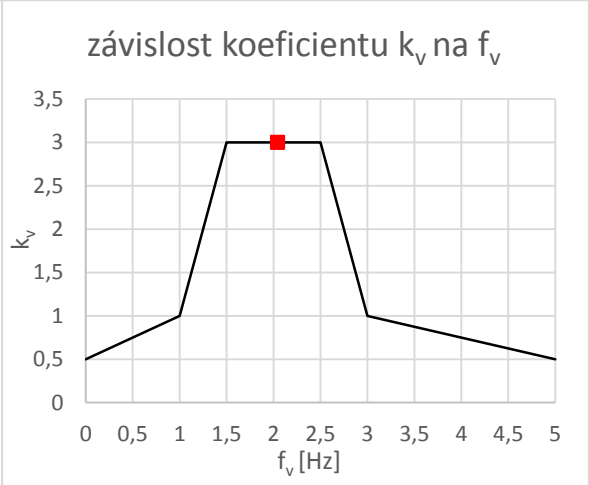
Zatížení chodci je periodicky působící a může při něm docházet k nadměrným zrychlením na konstrukci. Proto je potřeba posoudit mezní stav použitelnosti – pohoda chodců. Toto zatížení je vzhledem k jeho proměnnému charakteru problematické modelovat. Každý chodec má jinou frekvenci kroku, průběh zatížení během jednoho kroku je různý i v závislosti na činnosti viz obr. 6.17. Důležité je oddělit frekvence svislého a vodorovného zatížení chůzí, protože frekvence vodorovného zatížení je poloviční oproti svislému a může docházet k rezonanci s jinými vlastními frekvencemi mostu. Dále se u chodců objevuje skupinové chování a může také docházet k synchronizaci chodec – konstrukce. Existuje řada možností jak zatížení modelovat. Ty jsou zmíněny například v [6]. Vzhledem k tomu, že v platné normě není přesně předepsán žádný způsob, byl v tomto případě zvolen zjednodušený model uvedený v [4].

### 6.3.1 Zatěžovací stavy

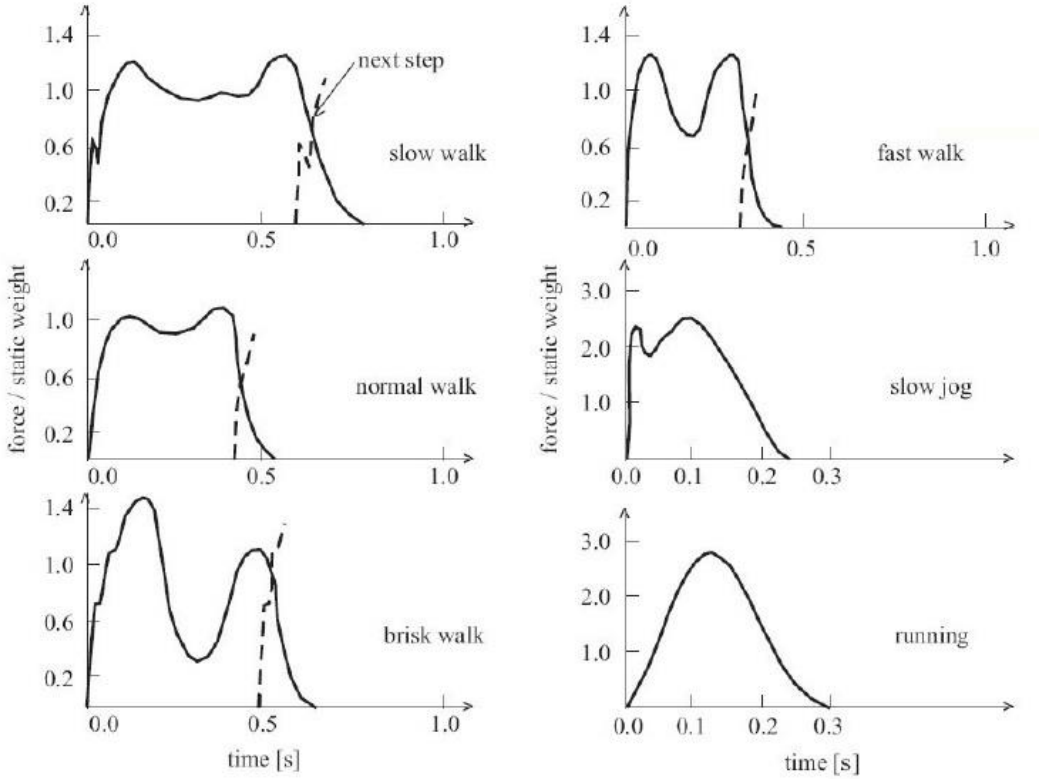
Podle [4] je možné složit posouzení z jednotlivých zatěžovacích stavů pro svislé a příčné kmitání. Velikost zatěžovacích sil je závislá na vybraných frekvencích a je upravena koeficienty $k_v$ pro svislé a $k_h$ pro vodorovné zatížení. Jejich hodnoty jsou získány z grafů 6.1 a 6.2 [7].




*Graf 6.1: závislost koeficientu $k_h$ na $f_h$*




*Graf 6.2: závislost koeficientu $k_v$ na $f_v$*




*obr. 6.17: možné průběhy zatížení chodcem v jedné periodě [8]*

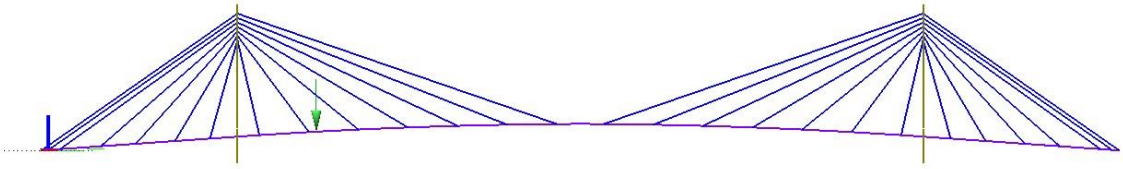
Pro zjištění dynamických účinků od svislé složky kroku je nutné vybrat frekvenci nejbližší 2 Hz a jí odpovídající vlastní tvar. V tomto případě je to 13. tvar a $f_v = f_{13} = 2{,}0448$ Hz.

První svislý zatěžovací stav tvoří jedna harmonická svislá síla $Q_{gv}$, reprezentující skupinu 8 – 15 chodců. Tato síla je umístěna v místě největší výchylky daného vlastního tvaru.

$$Q_{gv}(t) = 280k_v \sin(2\pi f_v t) \tag{6.6}$$

$$Q_{gv}(t) = 280 * 3 * \sin(2\pi * 2{,}0448t) \tag{6.7}$$

$$Q_{gv}(t) = 840 \sin(2\pi * 2{,}0448t)\ [N] \tag{6.8}$$



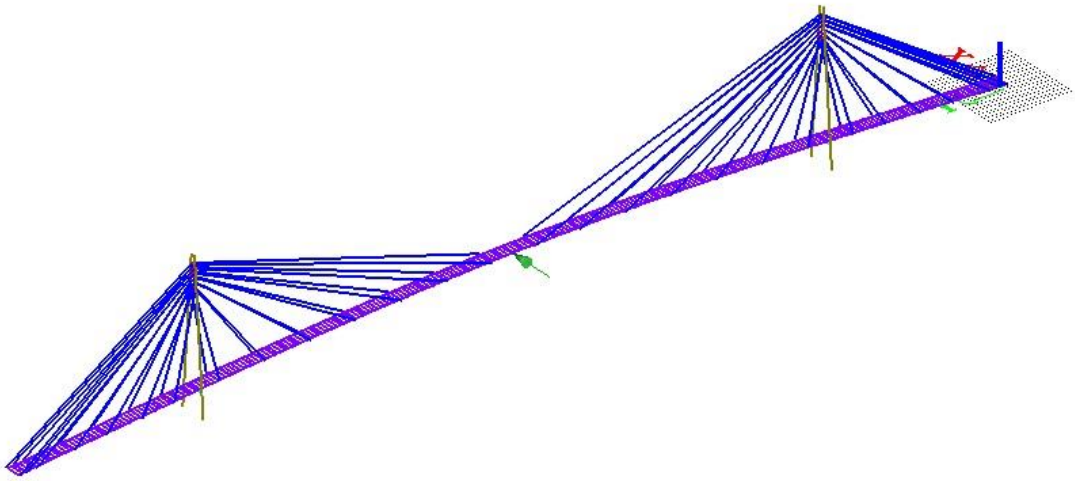
*obr. 6.18: svislý zatěžovací stav – zatížení silou* $Q_{gv}(t)$

Pro vodorovné účinky chůze je vybrána vlastní frekvence ve vodorovném příčném směru nejblíže k 1 Hz, $f_h = f_1 = 0{,}5887$ Hz. Ve vodorovném zatěžovacím stavu je mostovka zatížena osamělou horizontální silou $Q_{gh}$, působící v místě největší výchylky, která se nachází uprostřed rozpětí hlavního pole.

$$Q_{gh}(t) = 70k_h \sin(2\pi f_h t) \tag{6.9}$$

$$Q_{gh}(t) = 70 * 1{,}94 * \sin(2\pi * 0{,}5887t) \tag{6.10}$$

$$Q_{gh}(t) = 135{,}8 \sin(2\pi * 0{,}5887t)\ [N] \tag{6.11}$$



*obr. 6.19: vodorovný zatěžovací stav – zatížení silou* $Q_{gh}(t)$

Vzhledem k tomu, že pro svislý zatěžovací stav byla vybrána až 13. vlastní frekvence, bylo rozhodnuto zjistit odezvu také pro dva nejnižší svislé vlastní tvary. Jedná se o tvary druhý a třetí, protože právě ty u mostních konstrukcí bývají často problematické z hlediska svého příspěvku do celkové odezvy konstrukce Zatížení bylo stanoveno stejným způsobem jako pro 13. vlastní frekvenci.

Zatěžovací síla $Q_{gv,2}(t)$ pro druhou vlastní frekvenci:

$$Q_{gv,2}(t) = 280k_v \sin(2\pi f_v t) \tag{6.12}$$

$$Q_{gv,2}(t) = 280 * 0{,}815 * \sin(2\pi * 0{,}6293t) \tag{6.13}$$

$$Q_{gv,2}(t) = 228 * \sin(2\pi * 0{,}6293t)\ [N] \tag{6.14}$$

Zatěžovací síla $Q_{gv,3}(t)$ pro třetí vlastní frekvenci:

$$Q_{gv,3}(t) = 280k_v \sin(2\pi f_v t) \tag{6.15}$$

$$Q_{gv,3}(t) = 280 * 0{,}904 * \sin(2\pi * 0{,}8086t) \tag{6.16}$$

$$Q_{gv,3}(t) = 253 * \sin(2\pi * 0{,}8086t)\ [N] \tag{6.17}$$

### 6.3.2 Tlumení

Pro zjištění správné odezvy na zatížení je nezbytné zvolení odpovídajícího tlumení. Použito bylo proporcionální (Rayleighovo) tlumení. Stanovení logaritmického dekrementu $d$ bylo provedeno podle návodu [11], který přebírá postup z ENV 1991-2-4:1995 přílohy C.

$$d = d_s + d_a + d_d \tag{6.18}$$

Kde $d_s$ je základní konstrukční tlumení, $d_a$ základní aerodynamické tlumení a $d_d$ tlumení od speciálních zařízení. Pro tento případ je $d_d$ = 0, $d_a$ je zanedbáno, tedy $d_a$ = 0 a:

$$d_s = a_1 * n_1 + b_1 \tag{6.19}$$

Kde $n_1$ je vlastní ohybová frekvence, $a_1$ a $b_1$ jsou parametry závislé na typu konstrukce. Pro betonový předpjatý most bez trhlin jsou jejich hodnoty:

$a_1$ = 0

$b1$ = 0,04

Dosazením do rovnice (6.18) byl získán logaritmický dekrement útlumu, který byl použit pro výpočet.

$$d = (0 * f_i + 0{,}04) + 0 + 0 \tag{6.20}$$

$$d = 0{,}04 \tag{6.21}$$

Při znalosti $d$ a vztahu (6.22) lze také určit součinitel poměrného útlumu $\xi$.

$$d = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{6.22}$$

$$0{,}04 = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{6.23}$$

A výsledný součinitel $\xi = 0{,}64\ \%$.

### 6.3.3 Výsledky

Lineárním výpočtem v programu SCIA Engineer byly pomocí zatěžovacích stavů z kapitoly 6.3.1 určeny maximální amplitudy výchylek na konstrukci. S jejich znalostí bylo možné pomocí vztahu (6.24) určit maximální zrychlení a. To bylo následně porovnáno s mezním stavem použitelnosti – pohody chodců dle [5] v tab. 6.9

$$a = A\omega^2 \sin(\omega t) \tag{6.24}$$

| zatěžovací stav | maximální Aplituda A[mm] | f[Hz] | ω[$s^{-1}$] | maximum zrychlení a = $\omega^2 A$ [$m/s^2$] | limitní zrychlení $a_{lim}$[$m/s^2$] | a < $a_{lim}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| svislý - $f_2$ | 15.3 | 0.6293 | 3.954 | 0.239 | 0.7 | ano |
| svislý - $f_3$ | 8 | 0.8086 | 5.081 | 0.206 | 0.7 | ano |
| svislý - $f_{13}$ | 4.5 | 2.0448 | 12.848 | 0.743 | 0.7 | ne |
| vodorovný - $f_1$ | 7 | 0.5887 | 3.699 | 0.096 | 0.2 | ano |

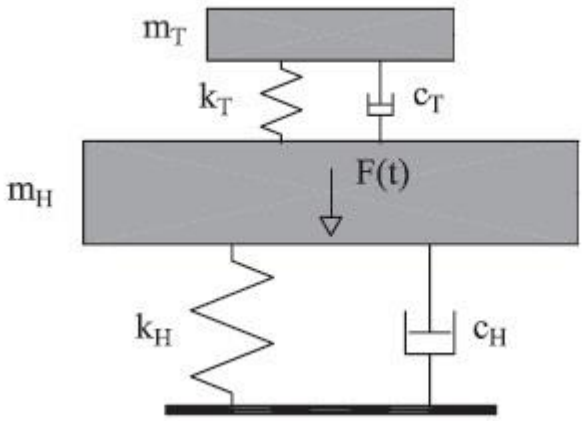
*tab. 6.9: výsledky zatížení chodci*

V případě zatížení svislou osamělou silou s rezonanční frekvencí $f_{13}$ je limit překročen o cca 6 %. Vzhledem k uvedeným aproximacím použitým v modelu mostu a s přihlédnutím k tomu, že byl použit velmi zjednodušený model zatížení, nelze s jistotou říci, zda může být limitní hodnota na skutečné konstrukci dosažena. Toto riziko však existuje, a proto byl v kapitole 6.4 navrhnut pohlcovač kmitů, který může jednoduchým způsobem problém vyřešit.

## 6.4 Pohlcovač kmitů

### 6.4.1 Návrh pohlcovače

Vzhledem k nevyhovění podmínky pro maximální zrychlení ve svislém směru byl navrhnut pohlcovač kmitů podle obr. 6.20




*obr. 6.20: schéma pohlcovače kmitání [3], upraveno*

Kde je:

$m_T$ – hmotnost pohlcovače

$k_T$ – tuhost pohlcovače

$c_T$ – útlum pohlcovače

$m_H$ – hmotnost konstrukce

$k_H$ – tuhost konstrukce

$c_H$ – útlum konstrukce

V tomto případě je zjednodušeně uvažován pohlcovač bez tlumiče, tedy $c_T$ = 0. Díky tomu lze stále využít klasického útlumu pro lineární výpočet. Vzhledem k tomu, že řešená frekvence odpovídá antisymetrickému vlastnímu tvaru, bylo rozhodnuto vytvořit 2 stejné pohlcovače umístěné na konstrukci v místě obou největších výchylek.

Celková hmotnost pohlcovače je zvolena jako 1 % z hmotnosti konstrukce, na které $m_H$ = 441 t (dle součtu diagonály matice hmotnosti z tab. 5.8). Podíl jejich hmotností je značen γ.

$$\gamma = 0{,}01 = \frac{2 * m_T}{m_H} \tag{6.25}$$

$$m_T = 441 * \frac{0{,}01}{2} \tag{6.26}$$

$$m_T \cong 2{,}2\ t \tag{6.27}$$

Optimální frekvence $f_{T,opt}$, na kterou je naladěn pohlcovač podle [3]:

$$f_{T,opt} = \frac{f_H}{1+\gamma} \tag{6.28}$$

$$f_{T,opt} = \frac{2{,}0448}{1+0{,}01} \tag{6.29}$$

$$f_{T,opt} = 2{,}0246\ Hz \tag{6.30}$$

Kde $f_H$ je vlastní frekvence konstrukce bez tlumiče.

Tuhost $k_T$ byla stanovena úpravou vzorce (4.4)

$$k_T = m_T * (2\pi f_{T,opt})^2 \tag{6.31}$$

$$k_T = 2{,}2 * (2\pi * 2{,}0246)^2 \tag{6.32}$$

$$k_T = 356{,}0\ kN/m \tag{6.33}$$

V modelu byly vytvořeny 2 hmoty o velikosti $m_T$ a připojeny pružně s tuhostí $k_T$ ve svislém směru. Po této úpravě byl znovu proveden výpočet vlastních tvarů a frekvencí, protože instalace pohlcovače kmitů změní hledanou vlastní frekvenci konstrukce a je nutné ji znát, aby ji bylo možné dosadit do rovnice (6.6) zatěžovacího stavu. Zjištěná vlastní frekvence odpovídající tomuto tvaru $f_v$ = 1,8294 Hz.

Zatěžovací síla $Q_{gv}$ je stanovena podle postupu uvedeného v kapitole 6.3.1.

$$Q_{gv}(t) = 280k_v \sin(2\pi f_v t) \tag{6.34}$$

$$Q_{gv}(t) = 280 * 3 * \sin(2\pi * 1{,}8294t) \tag{6.35}$$

$$Q_{gv}(t) = 840 \sin(2\pi * 1{,}8294t)\ [N] \tag{6.36}$$

### 6.4.2 Výsledky

Výpočet byl proveden se stejnými parametry jako v případě bez pohlcovače kmitů, změněna byla pouze frekvence zatěžovací síly.

| zatěžovací stav | Amplituda A[mm] | f[Hz] | ω[$s^{-1}$] | maximum zrychlení a = $\omega^2 A$ [$m/s^2$] | limitní zrychlení $a_{lim}$[$m/s^2$] | a < $a_{lim}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Svislý – $f_{13}$ | 2.2 | 1.8294 | 11.494 | 0.291 | 0.7 | ano |

*tab. 6.10: výsledek po přidání pohlcovače kmitání*

V tab. 6.10 je vidět, že i pohlcovač kmitů bez tlumiče o hmotnosti 1 % z celkové hmotnosti konstrukce dokázal snížit zrychlení z 0,743 na 0,291 $m/s^2$, což je hodnota vyhovující. V [3] je doporučená hmotnost pohlcovače 3-5 % hmotnosti konstrukce, v tomto případě by však takto vysoká hmotnost pohlcovače vedla na zbytečně velké statické zatížení.

# 7 Závěr

Dynamická analýza lávky na rovinném modelu byla provedena úspěšně. Ověření výpočtu prvních vlastních frekvencí bylo uskutečněno pomocí přibližné Rayleighovy energetické metody a metody postupných aproximací. Výsledné hodnoty odpovídají softwarovému výsledku, který byl zjištěn pomocí iterace podprostoru.

Na prostorovém modelu byly zjištěny vlastní tvary a frekvence konstrukce, které se oproti rovinnému modelu rozšířily o tvary torzní, příčné a tvary kmitání pylonů. Pomocí zjednodušeného modelu zatížení skupinou chodců byla zjištěna odezva konstrukce. Ve vodorovném směru nebylo dosaženo limitních hodnot, ve svislém směru však byla zjištěna možnost vzniku nadměrných zrychlení, proto byl navrhnut pohlcovač kmitání. Po jeho přidání konstrukce vyhověla.

# 8 Seznam obrázků

obr. 3.1: pohled na lávku v Čelákovicích ..... 4
obr. 3.2: příčný řez mostovky [7] ..... 4
obr. 3.3: zjednodušený podélný řez [12] ..... 5
obr. 5.1: statické schéma ..... 9
obr. 5.2: liniové hmoty na rovinném modelu ..... 10
obr. 5.3: liniové hmoty na rovinném modelu ..... 11
obr. 5.4: příčný průřez pylonu ve vetknutí ..... 12
obr. 5.5: příčný průřez pylonu ve vrcholu ..... 12
obr. 5.6: 2. vlastní tvar, f = 0,8171 Hz ..... 13
obr. 5.7: 3. vlastní tvar, f = 1,1750 Hz ..... 13
obr. 5.8: 4. vlastní tvar, f = 1,4374 Hz ..... 14
obr. 5.9: 5. vlastní tvar, f = 1,6424 ..... 14
obr. 5.10: diskrétní rozložení hmot na modelu ..... 18
obr. 5.11: zatěžovací vektor energetické metody na modelu ..... 18
obr. 5.12: Deformovaná konstrukce od zatěžovacího vektoru ..... 19
obr. 6.1: pohled na mostovku zespod - konstrukce ..... 23
obr. 6.2: pohled na mostovku zespod - model ..... 24
obr. 6.3: pohled na vrchol ..... 25
obr. 6.4: pohled na vrchol ..... 25
obr. 6.5: pohled na ukotvení ..... 26
obr. 6.6: pohled na ukotvení ..... 26
obr. 6.7: liniové hmoty na prostorovém modelu ..... 27
obr. 6.8: průřez levého nosníku ..... 28
obr. 6.9: průřez žebra desky ..... 28
obr. 6.10: průřez sloupu pylonu ..... 29
obr. 6.11: průřez přípojného prvku závěsů ..... 30
obr. 6.12: průřez propojení pylonu pod mostovkou ..... 30
obr. 6.13: 1. vlastní tvar – f = 0,5887, axonometrie ..... 31
obr. 6.14: 1. vlastní tvar – f = 0,5887, pohled proti ose Z ..... 31
obr. 6.15: 13. vlastní tvar – f = 2,0448, axonometrie ..... 32
obr. 6.16: 13. vlastní tvar – f = 2,0448, pohled proti ose X ..... 32
obr. 6.17: možné průběhy zatížení chodcem v jedné periodě [8] ..... 34
obr. 6.18: svislý zatěžovací stav – zatížení silou $Q_{gv}(t)$ ..... 35
obr. 6.19: vodorovný zatěžovací stav – zatížení silou $Q_{gh}(t)$ ..... 36

obr. 6.20: schéma pohlcovače kmitání [3], upraveno ..... 38

# 9 Seznam tabulek

tab. 5.1: charakteristiky závěsů [10], upraveno ..... 11
tab. 5.2: průřezové charakteristiky mostovky ..... 11
tab. 5.3: průřezové charakteristiky pylonu ve vetknutí ..... 12
tab. 5.4: průřezové charakteristiky pylonu ve vrcholu ..... 12
tab. 5.5: plocha závěsů ..... 13
tab. 5.6: osové síly v závěsech [7], upraveno ..... 15
tab. 5.7: vyhodnocení vlivu osových sil v závěsech ..... 16
tab. 5.8: výpočet energetické metody ..... 19
tab. 5.9: porovnání výsledků rovinného modelu ..... 22
tab. 6.1: průřezové charakteristiky nosníku mostovky ..... 28
tab. 6.2: průřezové charakteristiky žebra desky ..... 28
tab. 6.3: průřezové charakteristiky pylonu ve vetknutí ..... 29
tab. 6.4: průřezové charakteristiky pylonu ve vrcholu ..... 29
tab. 6.5: průřezové charakteristiky pylonu v polovině výšky ..... 29
tab. 6.6: průřezové charakteristiky přípojného prvku závěsů ..... 30
tab. 6.7: průřezové charakteristiky propojení pylonu pod mostovkou ..... 30
tab. 6.8: porovnání vlastních frekvencí rovinného a prostorového modelu ..... 33
tab. 6.9: výsledky zatížení chodci ..... 38
tab. 6.10: výsledek po přidání pohlcovače kmitání ..... 40

# 10 Seznam literatury


[1] BITTNAR, Zdenek a Jiří ŠEJNOHA. *Numerické metody mechaniky*. Praha: ČVUT, 1992. ISBN 80-01-00855-X.

[2] BITTNAR, Zdenek. *Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981. Teoretická knižnice inženýra.

[3] DAZIO Alessandro. *Fundamentals of Structural Dynamics.* An-Najah National University, 2013.

[4] *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí – Část 2: Zatížení mostů dopravou, příloha X*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví.

[5] *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí – Část 2: Zatížení mostů dopravou*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2005.

[6] MÅRTENSSON Anders and Martin NILSSON. *Dynamic Analysis of Pedestrian Load Models for Footbridges.* Göteborg, Sweden 2014. Master's thesis. Chalmers university of technology, Department of Civil and Enviromental Engineering.

[7] PONTEX SPOL. *SO-201 Lávka přes Labe - statický výpočet.* Pontex, spol. s r.o., 2013.

[8] KULHÁNEK František, *Nejdelší lávka pro pěší a cyklisty v České republice* [online]. 2015, [cit. 2015-05-02]. Dostupné z http://imaterialy.dumabyt.cz/rubriky/

[9] MÁCA Jiří, Dynamika stavebních konstrukcí 1 - Soustavy s konečným počtem stupňů volnosti [přednáška]. Praha: ČVUT [cit. 2016.02-01]

[10] REDAELLI TECNA S.P.A. *full lockted coil strands* [online]. © 2016 Redaelli Tecna S.p.A [cit. 2016-02.01]. Dostupné z: http://www.redaelli.com/en/products/ropes/full-locked-coil-strands/full-locked-coil-strands/

[11] TENDELOO Van. *Výukový manuál Dynamika – školení pro pokročilé* [online]. SCIA GROUP nv., 2011, [cit. 20.3.2016]. Dostupné z http://scia-online.cz/

[12] TICHÁ Zdeňka. *Slavnostní otevření lávky přes Labe* [online]. 2014, [cit. 2016-04-01]. Dostupné z http://www.celakovice.cz/cs/mesto/rozvoj-mesta/projekty/lavka-pres-labe/

# 11 Přílohy

## 11.1 Výpočet metody postupných aproximací

| iterace č.0 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| bod č. | M[kg] | $\overline{x}_0$[m] | $M\overline{x}_0$[kgm] | $Mx_0$[kN] |
| 1 | 9484 | 1 | 9484 | 1.000 |
| 2 | 13719 | 1 | 13719 | 1.447 |
| 3 | 13458 | 1 | 13458 | 1.419 |
| 4 | 13435 | 1 | 13435 | 1.417 |
| 5 | 15296 | 1 | 15296 | 1.613 |
| 6 | 17946 | 1 | 17946 | 1.892 |
| 7 | 17949 | 1 | 17949 | 1.893 |
| 8 | 17951 | 1 | 17951 | 1.893 |
| 9 | 17949 | 1 | 17949 | 1.893 |
| 10 | 17951 | 1 | 17951 | 1.893 |
| 11 | 17951 | 1 | 17951 | 1.893 |
| 12 | 17423 | 1 | 17423 | 1.837 |
| 13 | 17423 | 1 | 17423 | 1.837 |
| 14 | 17951 | 1 | 17951 | 1.893 |
| 15 | 17951 | 1 | 17951 | 1.893 |
| 16 | 17949 | 1 | 17949 | 1.893 |
| 17 | 17951 | 1 | 17951 | 1.893 |
| 18 | 17949 | 1 | 17949 | 1.893 |
| 19 | 17946 | 1 | 17946 | 1.892 |
| 20 | 15296 | 1 | 15296 | 1.613 |
| 21 | 13435 | 1 | 13435 | 1.417 |
| 22 | 13458 | 1 | 13458 | 1.419 |
| 23 | 13719 | 1 | 13719 | 1.447 |
| 24 | 9484 | 1 | 9484 | 1.000 |
| 25 | 16188 | 1 | 16188 | 1.707 |
| 26 | 16188 | 1 | 16188 | 1.707 |
| 27 | 13647 | 1 | 13647 | 1.439 |
| 28 | 13647 | 1 | 13647 | 1.439 |

| iterace č.1 | | |
|---|---|---|
| $\bar{x}_1$[mm] | $M\bar{x}_1$[kgmm] | $Mx_1$[kN] |
| 0.1 | 948 | 1.000 |
| 0.2 | 2744 | 2.893 |
| 0.3 | 4038 | 4.257 |
| 0.3 | 4299 | 4.533 |
| 0.0 | 0 | 0.000 |
| 0.3 | 5384 | 5.677 |
| 1.1 | 19744 | 20.818 |
| 1.9 | 34107 | 35.962 |
| 2.9 | 52053 | 54.884 |
| 3.9 | 70008 | 73.816 |
| 4.8 | 86164 | 90.851 |
| 4.9 | 85373 | 90.017 |
| 4.3 | 74919 | 78.994 |
| 4.0 | 71804 | 75.709 |
| 3.4 | 61033 | 64.353 |
| 2.6 | 46668 | 49.207 |
| 1.7 | 30517 | 32.176 |
| 0.9 | 16154 | 17.033 |
| 0.2 | 3589 | 3.784 |
| 0.1 | 1530 | 1.613 |
| 0.3 | 4030 | 4.250 |
| 0.4 | 5383 | 5.676 |
| 0.3 | 4116 | 4.340 |
| 0.1 | 948 | 1.000 |
| 0.0 | 0 | 0.000 |
| 0.3 | 4856 | 5.121 |
| -0.5 | -6823 | -7.194 |
| -0.2 | -2729 | -2.878 |

| iterace č.2 | | |
|---|---|---|
| $\bar{x}_2$[mm] | $M\bar{x}_2$[kgmm] | $Mx_2$[kN] |
| -10.4 | -98635.162 | 1.000 |
| -36.8 | -504863.285 | 5.118 |
| -38.4 | -516802.568 | 5.240 |
| -25.6 | -343924.600 | 3.487 |
| -11.0 | -168257.027 | 1.706 |
| 8.6 | 154336.660 | -1.565 |
| 32.0 | 574377.686 | -5.823 |
| 66.7 | 1197324.523 | -12.139 |
| 119.0 | 2135967.021 | -21.655 |
| 187.5 | 3365792.325 | -34.124 |
| 255.7 | 4590043.187 | -46.536 |
| 293.4 | 5111941.061 | -51.827 |
| 279.5 | 4869759.804 | -49.371 |
| 223.8 | 4017409.719 | -40.730 |
| 156.1 | 2802134.304 | -28.409 |
| 96.2 | 1726722.920 | -17.506 |
| 52.1 | 935241.494 | -9.482 |
| 23.4 | 420013.683 | -4.258 |
| 5.9 | 105882.127 | -1.073 |
| -7.6 | -116250.310 | 1.179 |
| -18.4 | -247195.806 | 2.506 |
| -28.5 | -383564.406 | 3.889 |
| -27.9 | -382763.197 | 3.881 |
| -7.9 | -74924.787 | 0.760 |
| -7.6 | -123030.360 | 1.247 |
| 7.9 | 127886.821 | -1.297 |
| -29.4 | -401213.691 | 4.068 |
| -18.6 | -253829.070 | 2.573 |

| iterace č.3 | | |
|---|---|---|
| $\overline{x}_3$[mm] | $M\overline{x}_3$[kgmm] | $Mx_3$[kN] |
| 6.4 | 60698.561 | 1.000 |
| 23.0 | 315539.553 | 5.198 |
| 24.4 | 328384.965 | 5.410 |
| 16.1 | 216296.331 | 3.563 |
| 6.5 | 99424.607 | 1.638 |
| -4.3 | -77168.330 | -1.271 |
| -14.7 | -263854.750 | -4.347 |
| -30.5 | -547502.218 | -9.020 |
| -56.6 | -1015930.533 | -16.737 |
| -94.3 | -1692769.153 | -27.888 |
| -135.5 | -2432345.920 | -40.073 |
| -161.6 | -2815574.899 | -46.386 |
| -155.4 | -2707551.605 | -44.607 |
| -120.7 | -2166672.713 | -35.696 |
| -78.4 | -1407349.964 | -23.186 |
| -44.2 | -793359.179 | -13.070 |
| -22.5 | -403895.079 | -6.654 |
| -10.2 | -183082.888 | -3.016 |
| -2.9 | -52043.758 | -0.857 |
| 4.7 | 71891.639 | 1.184 |
| 12.0 | 161214.656 | 2.656 |
| 18.8 | 253017.924 | 4.168 |
| 18.0 | 246943.998 | 4.068 |
| 5.0 | 47420.751 | 0.781 |
| 4.0 | 64752.821 | 1.067 |
| -4.2 | -67990.462 | -1.120 |
| 18.4 | 251099.725 | 4.137 |
| 9.7 | 132373.224 | 2.181 |

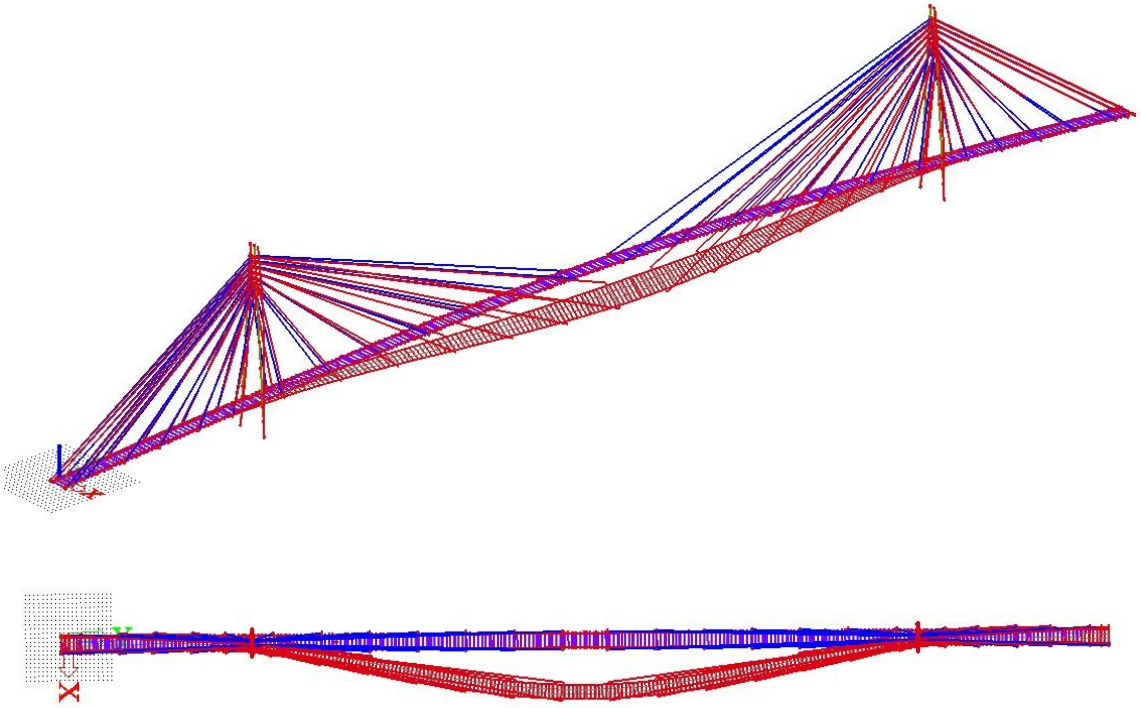
| iterace č.4 | | |
|---|---|---|
| $\overline{x}_4$[mm] | $M\overline{x}_4$[kgmm] | $Mx_4$[kN] |
| 5.6 | 53111.241 | 1.000 |
| 20.2 | 277126.042 | 5.218 |
| 21.4 | 288009.764 | 5.423 |
| 14.1 | 189427.221 | 3.567 |
| 5.7 | 87187.732 | 1.642 |
| -3.7 | -66400.656 | -1.250 |
| -12.2 | -218981.493 | -4.123 |
| -25.2 | -452362.488 | -8.517 |
| -47.2 | -847207.087 | -15.952 |
| -80.1 | -1437866.481 | -27.073 |
| -117.4 | -2107434.768 | -39.680 |
| -141.8 | -2470597.282 | -46.517 |
| -136.9 | -2385224.033 | -44.910 |
| -105.3 | -1890228.970 | -35.590 |
| -66.9 | -1200914.702 | -22.611 |
| -36.6 | -656944.479 | -12.369 |
| -18.3 | -328501.331 | -6.185 |
| -8.3 | -148979.212 | -2.805 |
| -2.5 | -44865.308 | -0.845 |
| 4.1 | 62713.983 | 1.181 |
| 10.6 | 142406.280 | 2.681 |
| 16.6 | 223409.443 | 4.206 |
| 15.9 | 218133.865 | 4.107 |
| 4.4 | 41730.261 | 0.786 |
| 3.4 | 55039.898 | 1.036 |
| -3.7 | -59896.359 | -1.128 |
| 15.8 | 215618.242 | 4.060 |
| 8.2 | 111903.138 | 2.107 |

| dílčí výsledky 1 | | |
|---|---|---|
| $\omega^2[s^{-2}]$ | $\omega[s^{-1}]$ | f[Hz] |
| 18.828 | 4.339 | 0.691 |
| 18.758 | 4.331 | 0.689 |
| 18.784 | 4.334 | 0.690 |
| 18.812 | 4.337 | 0.690 |
| 18.787 | 4.334 | 0.690 |
| 19.146 | 4.376 | 0.696 |
| 19.851 | 4.455 | 0.709 |
| 19.940 | 4.465 | 0.711 |
| 19.756 | 4.445 | 0.707 |
| 19.395 | 4.404 | 0.701 |
| 19.015 | 4.361 | 0.694 |
| 18.775 | 4.333 | 0.690 |
| 18.701 | 4.324 | 0.688 |
| 18.884 | 4.346 | 0.692 |
| 19.307 | 4.394 | 0.699 |
| 19.896 | 4.460 | 0.710 |
| 20.256 | 4.501 | 0.716 |
| 20.246 | 4.500 | 0.716 |
| 19.111 | 4.372 | 0.696 |
| 18.886 | 4.346 | 0.692 |
| 18.651 | 4.319 | 0.687 |
| 18.658 | 4.320 | 0.687 |
| 18.651 | 4.319 | 0.687 |
| 18.721 | 4.327 | 0.689 |
| 19.382 | 4.403 | 0.701 |
| 18.701 | 4.324 | 0.688 |
| 19.186 | 4.380 | 0.697 |
| 19.489 | 4.415 | 0.703 |

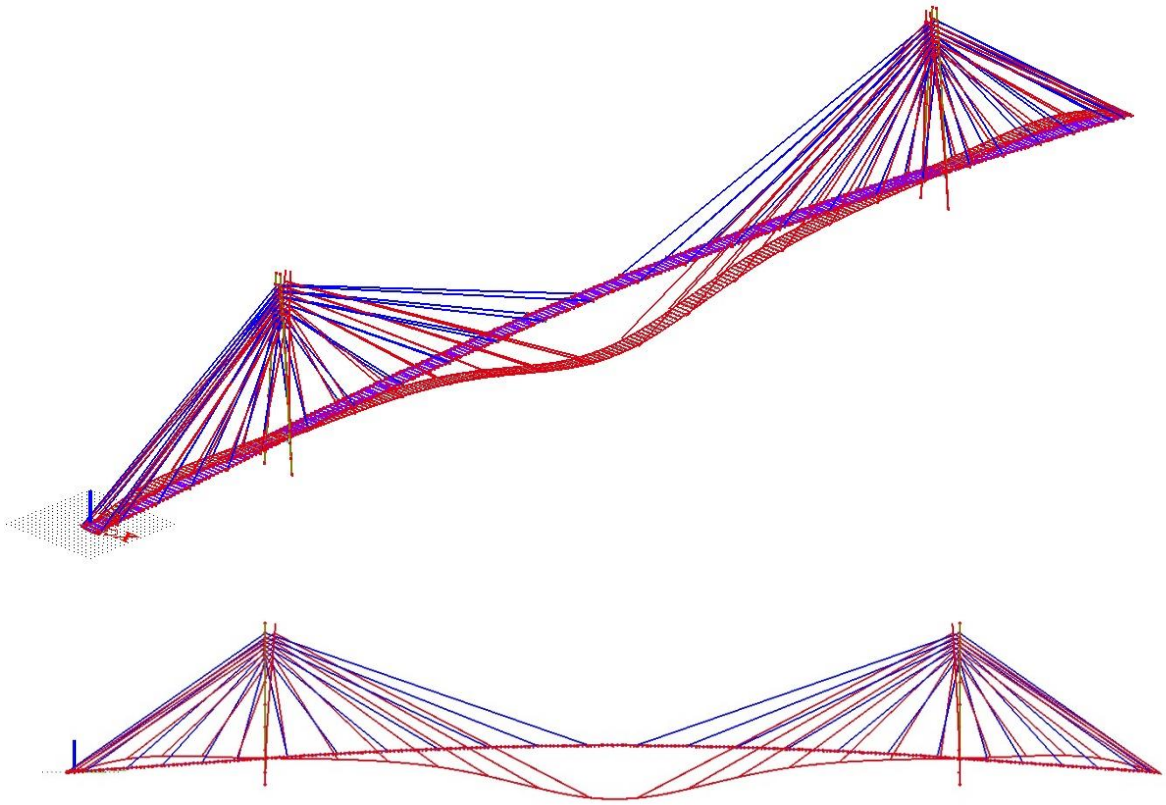
| dílčí výsledky 2 | | |
|---|---|---|
| M | $\overline{x}_4^T M x_3$ | $\overline{x}_4^T M \overline{x}_4$ |
| 9484 | 5.04E+08 | 26752928 |
| 13719 | 1.98E+10 | 1.05E+09 |
| 13458 | 2.1E+10 | 1.12E+09 |
| 13435 | 9.07E+09 | 4.82E+08 |
| 15296 | 2.18E+09 | 1.16E+08 |
| 17946 | 1.51E+09 | 79125304 |
| 17949 | 1.71E+10 | 8.61E+08 |
| 17951 | 7.32E+10 | 3.67E+09 |
| 17949 | 2.55E+11 | 1.29E+10 |
| 17951 | 7.2E+11 | 3.71E+10 |
| 17951 | 1.52E+12 | 7.97E+10 |
| 17423 | 2E+12 | 1.06E+11 |
| 17423 | 1.85E+12 | 9.91E+10 |
| 17951 | 1.21E+12 | 6.41E+10 |
| 17951 | 5E+11 | 2.59E+10 |
| 17949 | 1.54E+11 | 7.75E+09 |
| 17951 | 3.92E+10 | 1.94E+09 |
| 17949 | 8.07E+09 | 3.98E+08 |
| 17946 | 6.9E+08 | 36123678 |
| 15296 | 1.14E+09 | 60160203 |
| 13435 | 5.08E+09 | 2.72E+08 |
| 13458 | 1.25E+10 | 6.72E+08 |
| 13719 | 1.22E+10 | 6.53E+08 |
| 9484 | 3.09E+08 | 16515838 |
| 16188 | 9.51E+08 | 49040393 |
| 16188 | 1.09E+09 | 58076382 |
| 13647 | 1.22E+10 | 6.34E+08 |
| 13647 | 3.33E+09 | 1.71E+08 |
| Σ | 8.45E+12 | 4.45E+11 |

## 11.2 Vlastní frekvence a tvary kmitání prostorového modelu

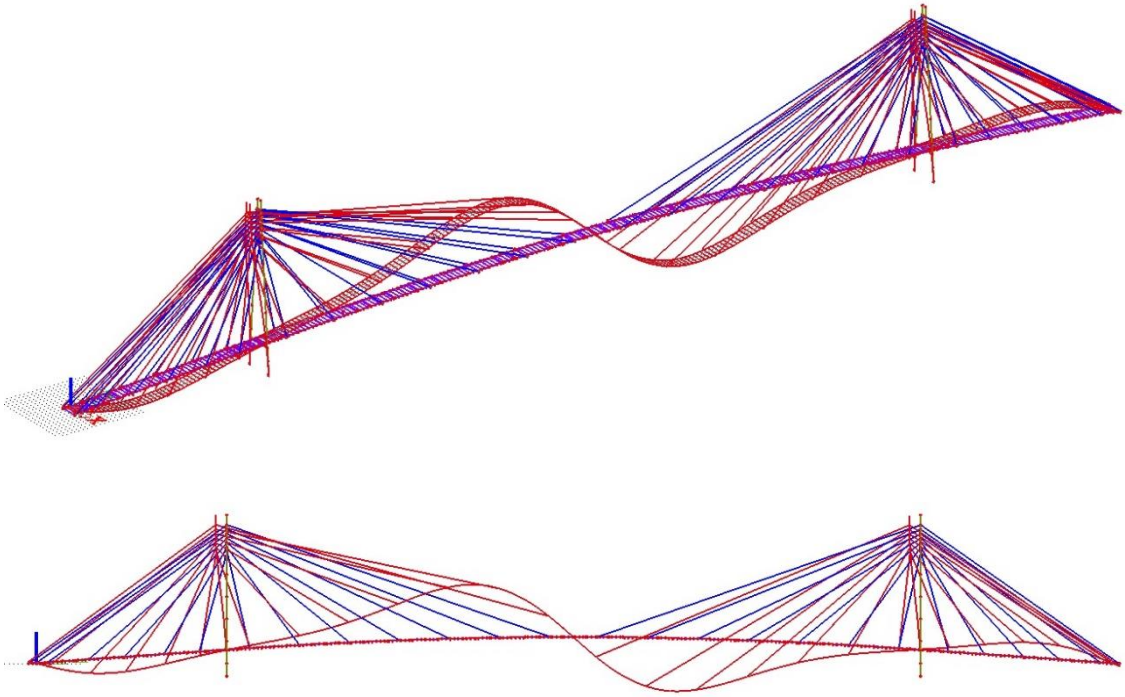
1. Vlastní tvar - horizontální, $f_1$ = 0,5887 Hz



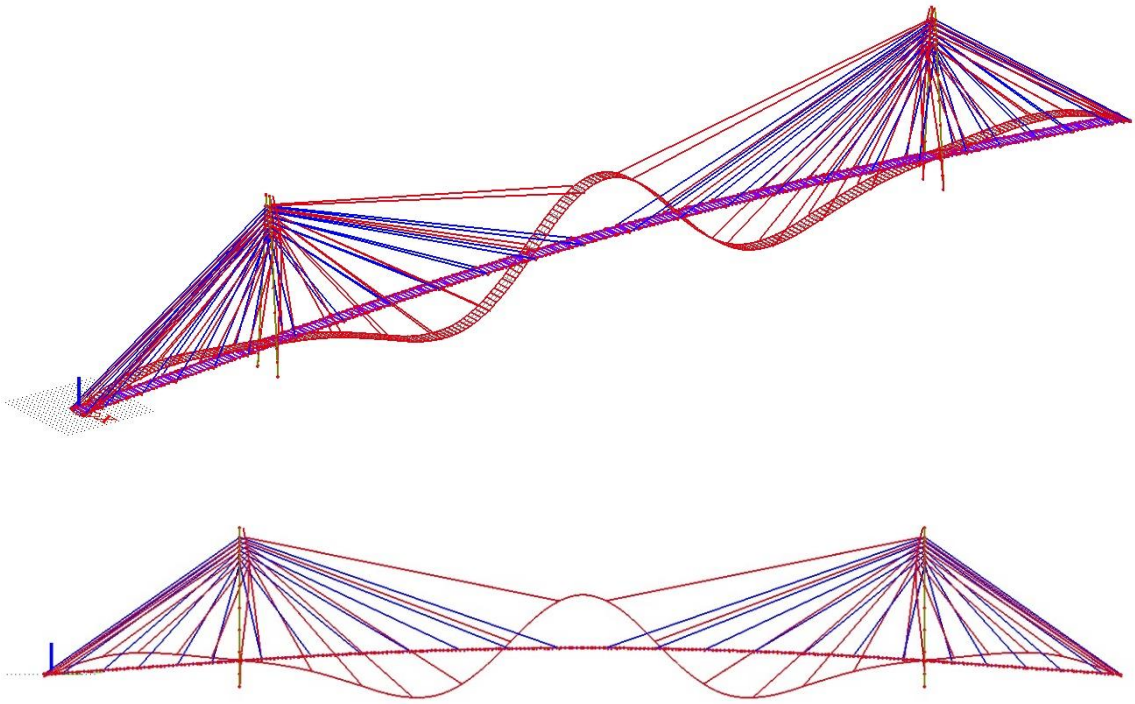
2. Vlastní tvar – vertikální, $f_2$ = 0,6293 Hz



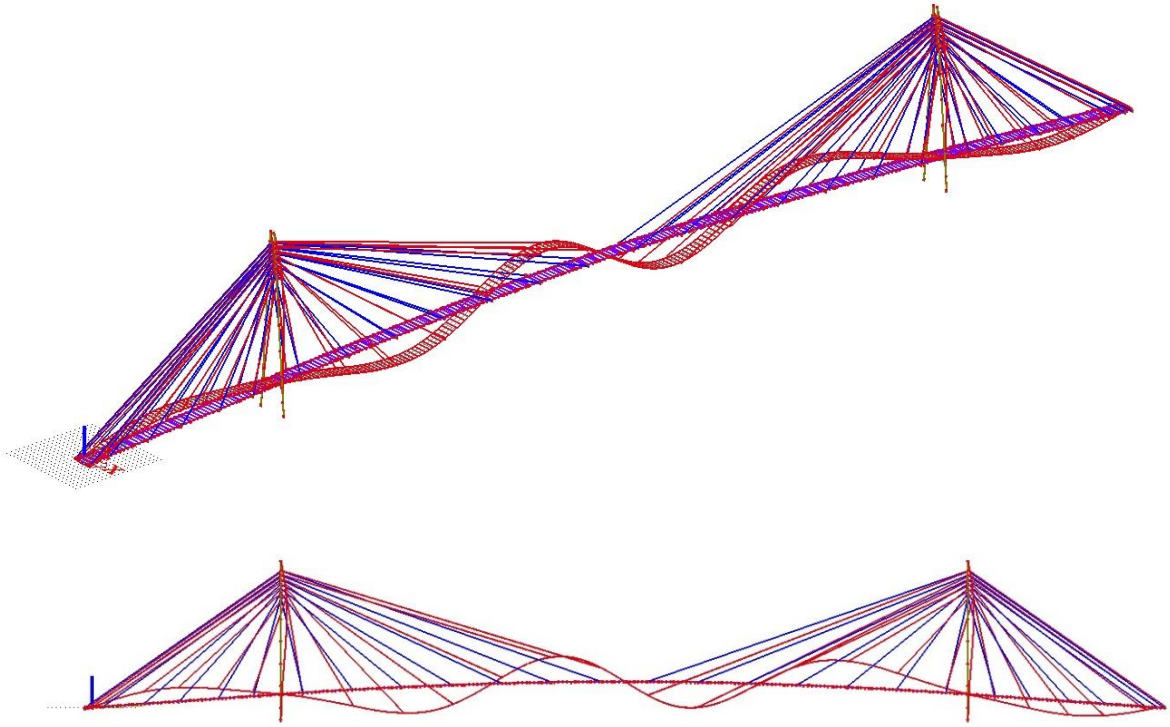
3. Vlastní tvar – vertikální, $f_3$ = 0,8086 Hz



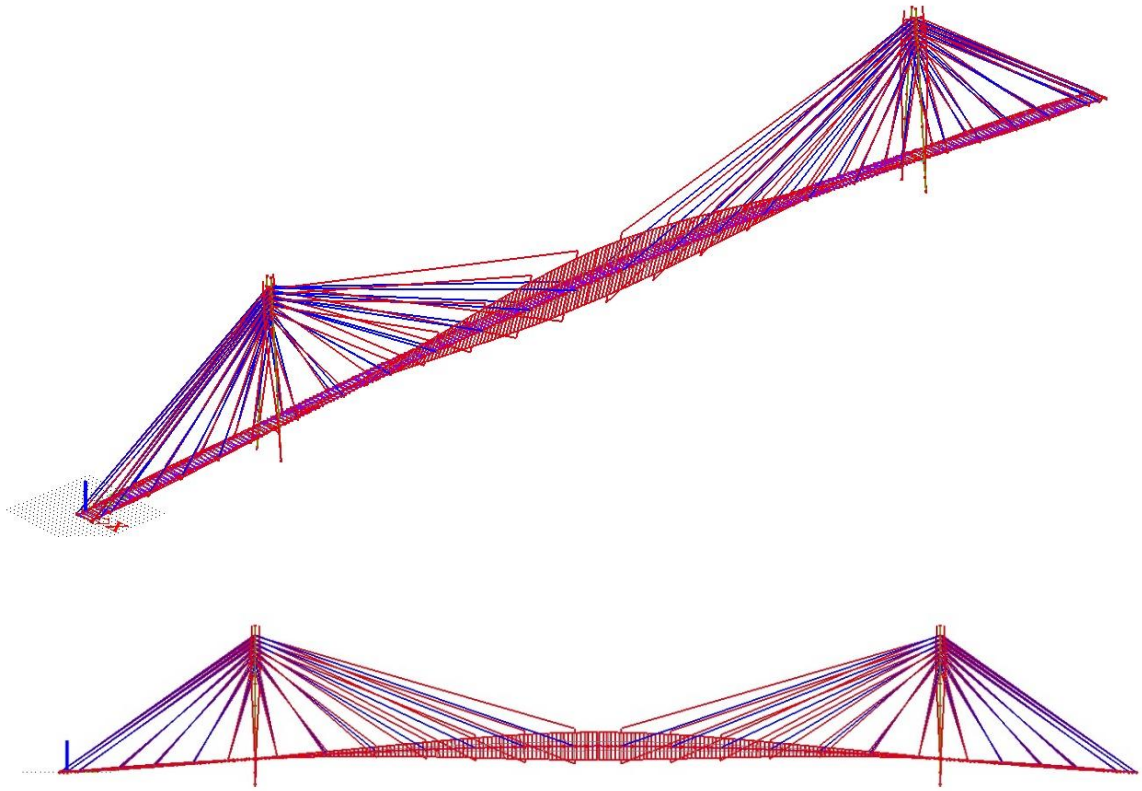
4. Vlastní tvar – vertikální, $f_4$ = 1,1568 Hz –



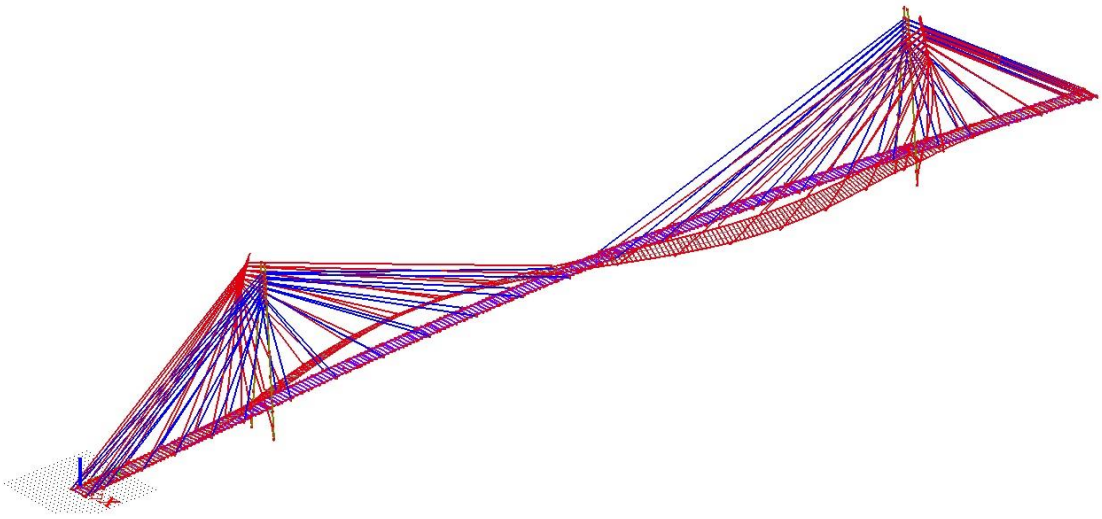
5. Vlastní tvar – vertikální, $f_5$ = 1,4368 Hz

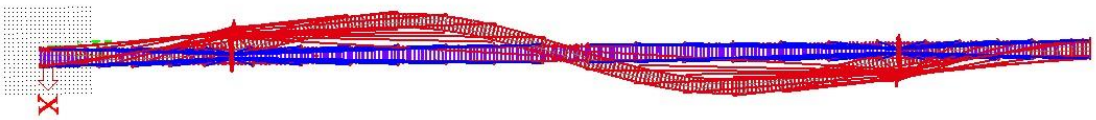


6. Vlastní tvar – torzní, $f_6$ = 1,47448 Hz

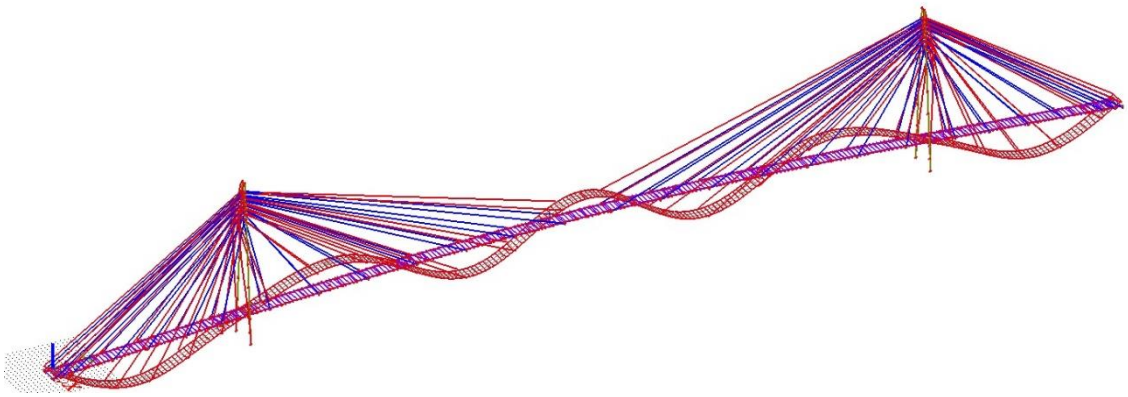


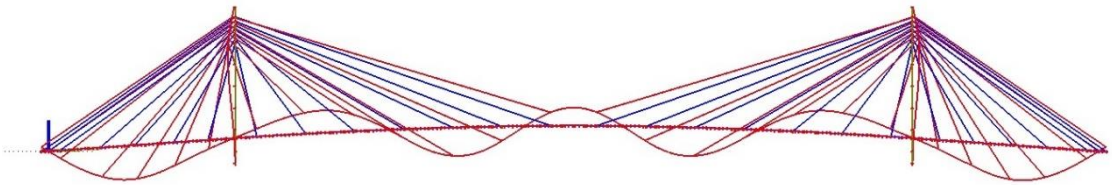
7. Vlastní tvar – horizontální, $f_7$ = 1,5799 Hz



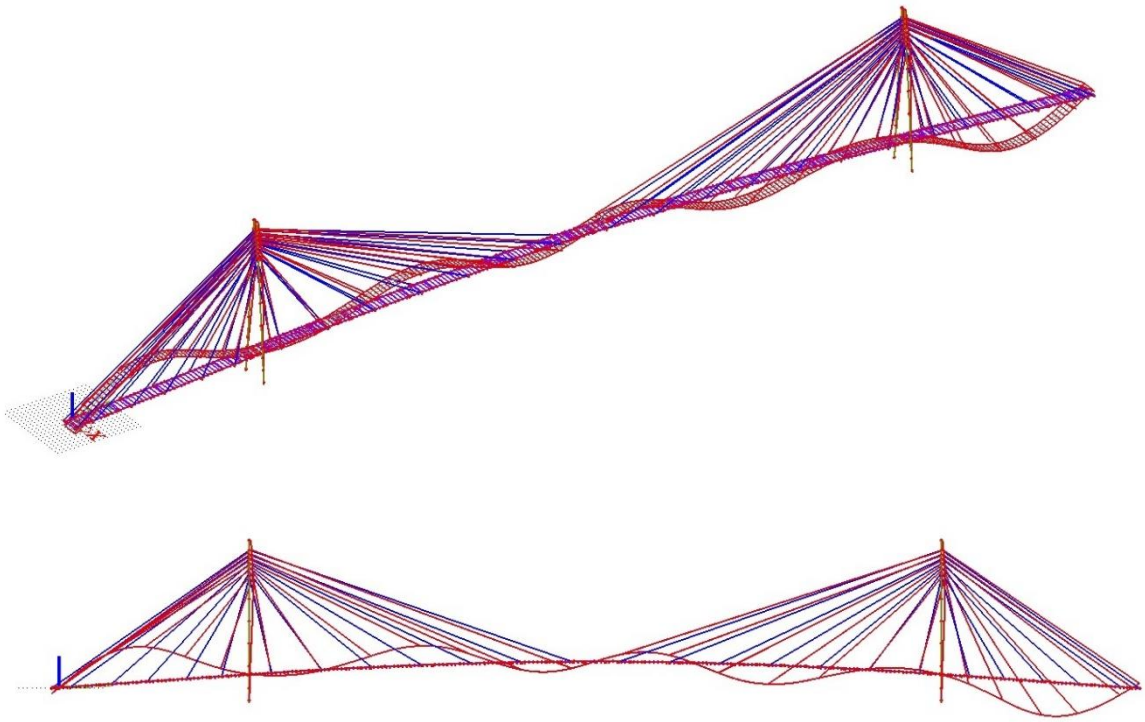


8. Vlastní tvar – vertikální, $f_8$ = 1,6290 Hz

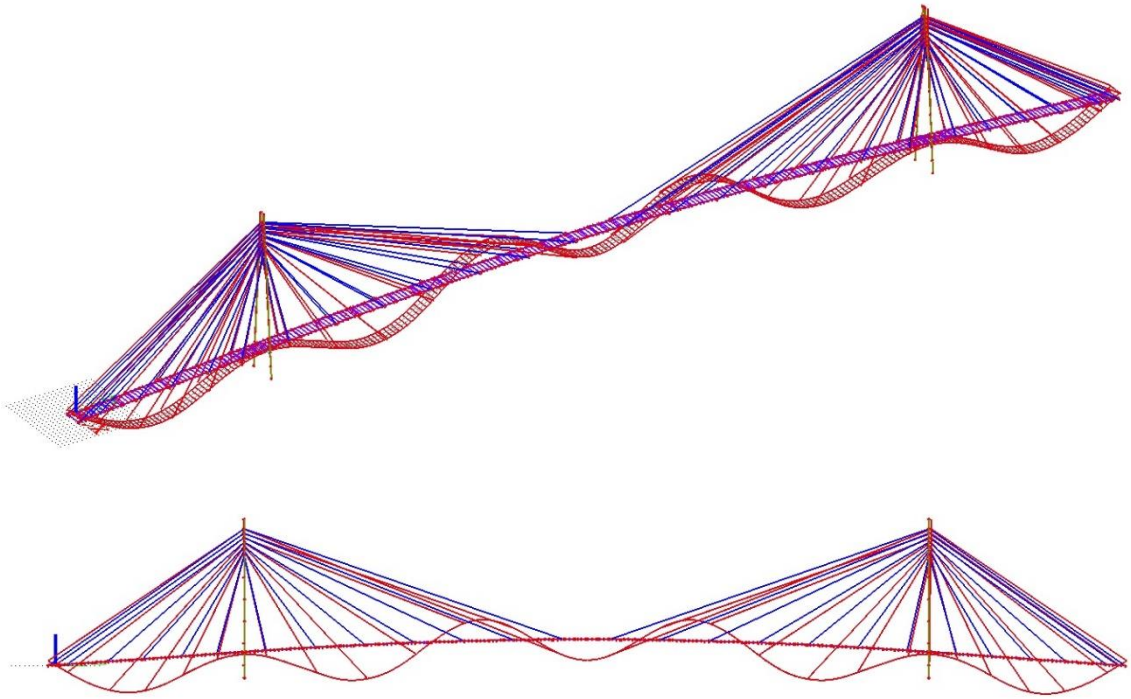




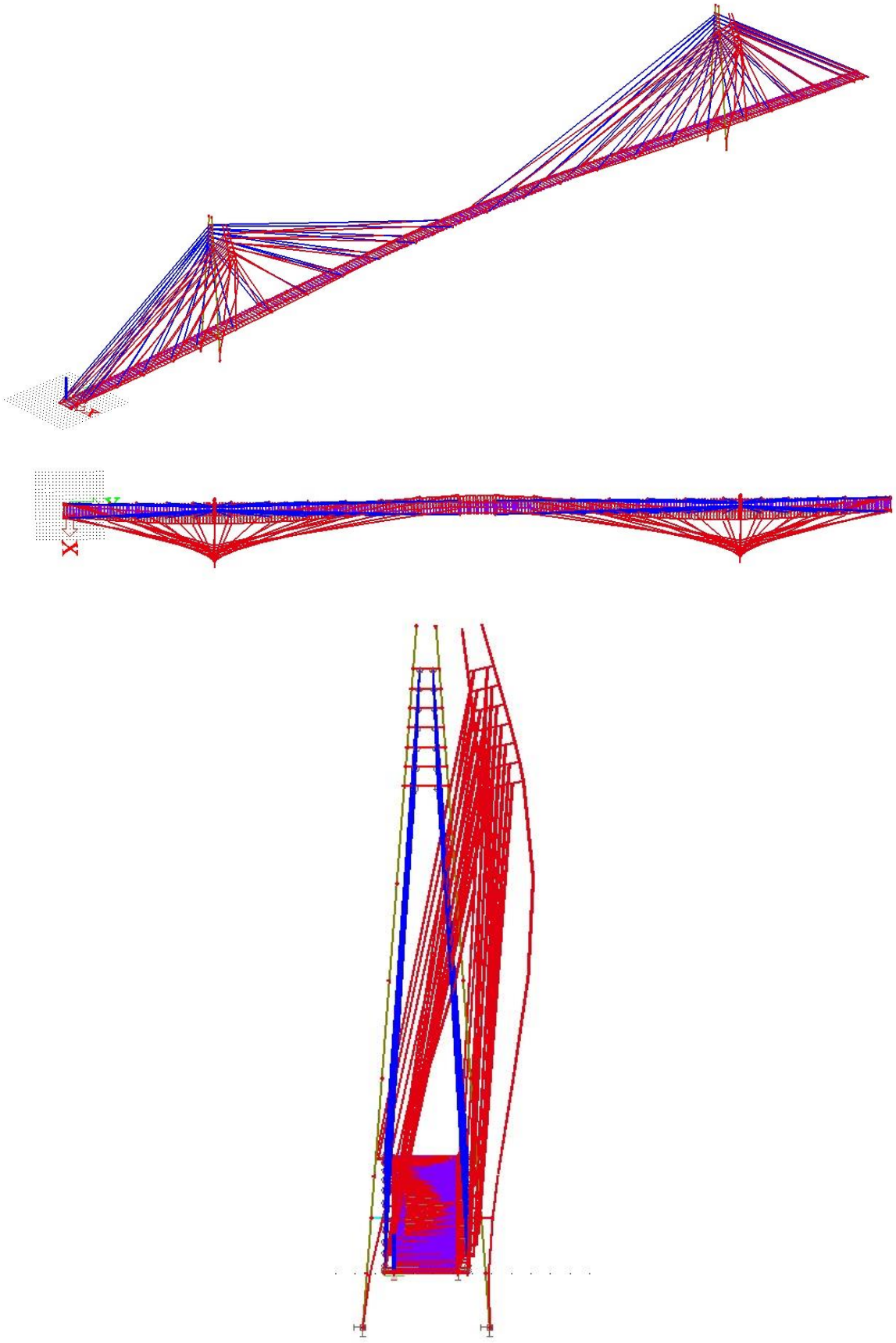
9. Vlastní tvar – vertikální, $f_9$ = 1,7192 Hz



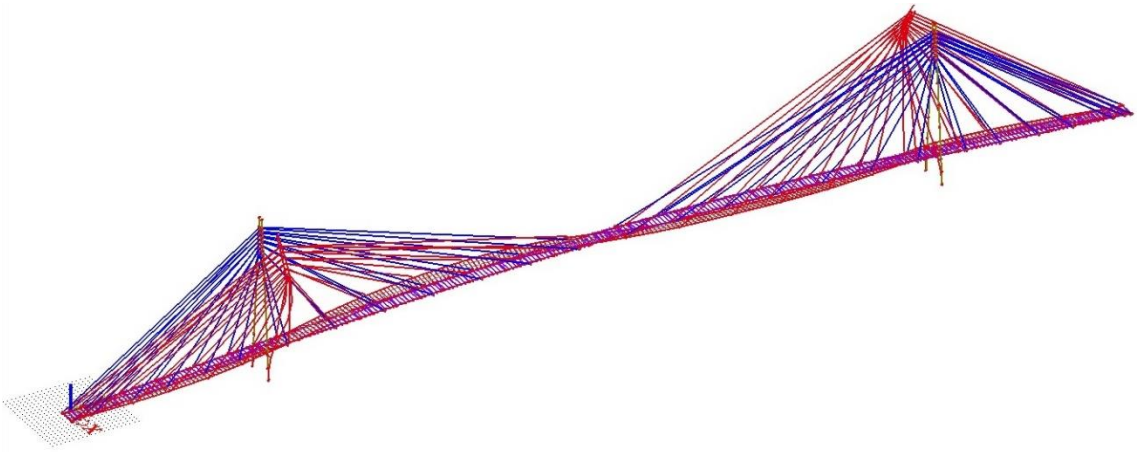
10. Vlastní tvar – vertikální, $f_{10}$ = 1,8189 Hz

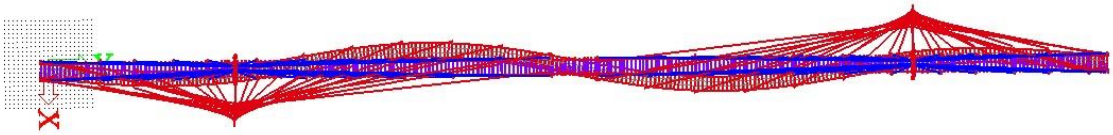


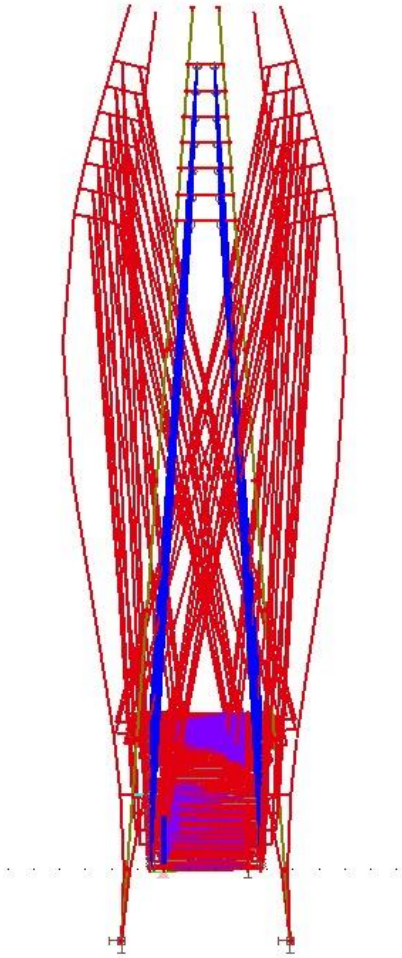
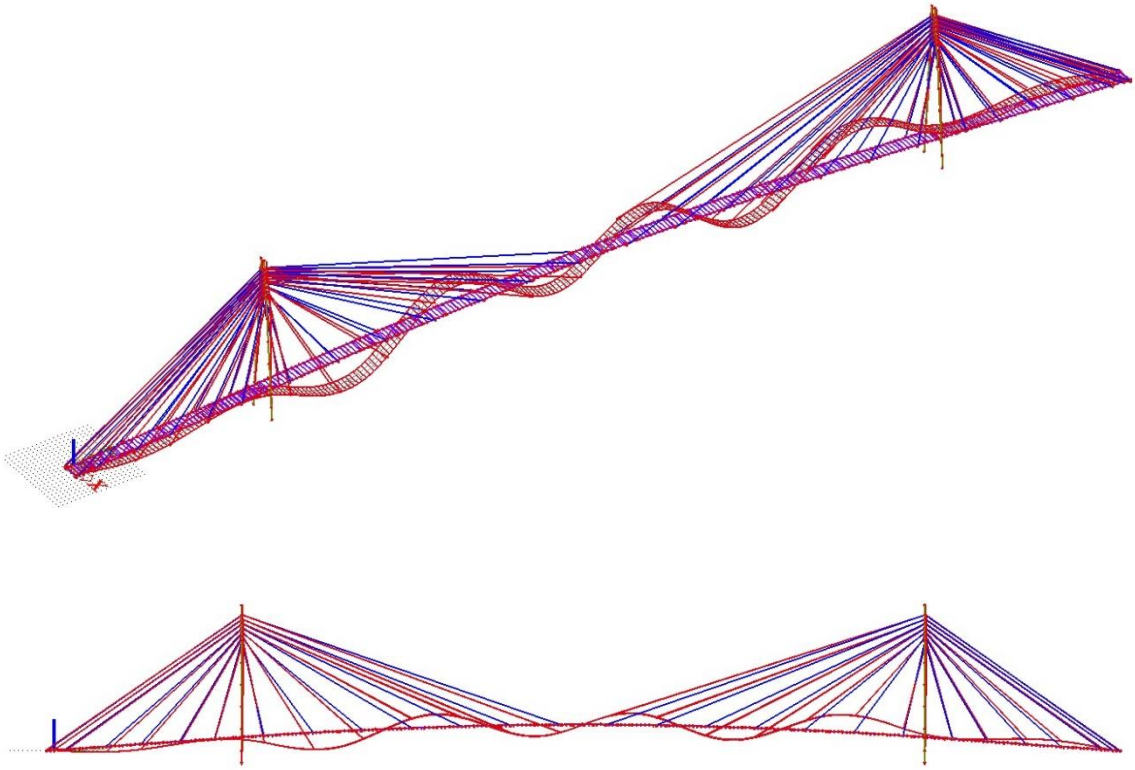
11. Vlastní tvar – pylon, $f_{11}$ = 1,8684 Hz



12. Vlastní tvar – pylon, $f1_2$ = 1,9860 Hz







13. Vlastní tvar – vertikální, $f_{13}$ = 2,0448 Hz