

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní - Ústav technické matematiky



Bakalářská práce

**Numerické řešení stacionárního rozložení teploty pomocí
metody konečných prvků**

Praha, 2016

Autor: Václav Pokorný

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta strojní, Ústav technické matematiky

Technická 4, 166 07 Praha 6

Akademický rok 2015/2016

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

pro: Václava Pokorného

studijní program: Teoretický základ strojího inženýrství

Název tématu: Numerické řešení stacionárního rozložení teploty pomocí metody konečných prvků

Zásady pro vypracování:

1. Formulace okrajové úlohy pro stacionární rozložení teploty.
2. Seznámení se se základním matematickým aparátem.
3. Slabá formulace problému a Galerkinův problém.
4. Princip metody konečných prvků.
5. Problematika praktické realizace problému na nestruturované síti.

Rozsah grafických prací: zobrazení numerických výsledků ve formě grafů

Rozsah bakalářské práce: 20 - 30 stran

Seznam odborné literatury:

1. P. Sváček, M. Feistauer, Metoda konečných prvků, Vydavatelství ČVUT, 2007
2. K. Rektorys, Variační metody, Academia, Praha 1999.

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Petr Sváček, PhD.

Datum zadání bakalářské práce: 25.4.2016

Datum odevzdání bakalářské práce: 30.7.2016

J. Fořt

Prof. Ing. Jaroslav Fořt, CSc.
vedoucí Ú12101



M. Valášek

Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
děkan FS, ČVUT v Praze

V Praze dne

Neodevzdá-li student bakalářskou práci včas, je povinen tuto skutečnost předem písemně zdůvodnit, pokud bude omluva (předaná prostřednictvím studijního oddělení děkanovi) děkanem uznána, určí děkan studentovi náhradní termín konání státní závěrečné zkoušky (zůstávají dva termíny SZZ). Pokud tuto skutečnost student řádně neomluví nebo omluva nebude děkanem uznána, určí děkan studentovi termín pro opakování státní závěrečné zkoušky. SZZ je možné opakovat pouze jednou (SZŘ čl. 22, odst. 3, 4).

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Zadání bakalářské práce převzal dne: 25.4.2016

Michal Holový

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....
Podpis

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu práce, panu doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D., za trpělivé vedení při tvorbě celé této práce. Také děkuji všem lidem, kteří mě při tvoření této práci podporovali. Jsem jim velmi vděčný.

Abstrakt

Tato práce se zabývá stacionární úlohou vedení tepla a matematickou formulací příslušné okrajové úlohy. Tato klasická formulace je přepsána v tzv. slabém smyslu a numericky aproximována pomocí metody konečných prvků. Metoda konečných prvků je podrobně popsána včetně jejího praktického použití. Součástí práce je i praktická realizace metody konečných prvků pomocí vývoje vlastního programu v programovacím jazyce C. Použitý program je otestován a jsou ukázány numerické výsledky.

Abstract

The thesis is interested in the problem of heat conduction and mathematical formulation of the relevant boundary-value problem. The classical formulation is rewritten into the so-called weak formulation and numerically approximated by the finite element method. The finite element method is described in details including its practical realization. The finite element method is implemented in a new program written in C programming language. The program is tested and numerical results are shown.

Klíčová slova

Úloha vedení tepla, Metoda konečných prvků, 2D síť

Seznam symbolů

T	$[K]$	teplota
t	$[s]$	čas
\vec{q}	$[W \cdot m^{-2}]$	hustota tepelného toku
$\vec{\tau}$	$[J \cdot m^{-3}]$	tenzor dynamických napětí
$\vec{\Delta}$	$[s^{-1}]$	tenzor rychlosti deformace
ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$	hustota
c_p	$[J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}]$	měrná tepelná kapacita
\vec{u}	$[m \cdot s^{-1}]$	vektor rychlosti proudění
\dot{Q}	$[W]$	tepelný tok
$\dot{Q}^{(g)}$	$[W \cdot m^{-3}]$	objemový zdroj tepelného toku
λ	$[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}]$	součinitel tepelné vodivosti
PDR		Zkratka pro parciální diferenciální rovnici
MKP		Zkratka pro metodu konečných prvků
ODD		Zkratka pro ostrou diagonální dominanci matice
SPD		Zkratka pro symetrii a pozitivní definitnost matice
PIM		Zkratka pro prostou iterační metodu
SOR		Zkratka pro superrelaxační iterační metodu

Obsah

1	Úvod	6
1.1	Úlohy vedení tepla	6
1.2	Formulace okrajové úlohy a řešitelnost úlohy	7
2	Matematický aparát	8
2.1	Použité značení	8
2.2	Spojitosť funkce	8
2.3	Derivace, diferenciální operátory a integrály	9
2.4	Použité věty a definice pojmů	10
2.4.1	Numerické řešení soustav lineárních rovnic	14
3	Matematický popis úlohy stacionárního vedení tepla	16
3.1	Klasický problém	16
3.2	Slabá formulace	17
3.3	Aproximace slabého řešení metodou konečných prvků	19
4	Metoda konečných prvků	21
4.1	Diskretizace problému	21
4.1.1	Triangulace dvourozměrné oblasti	21
4.1.2	Volba prostoru a báze	22
4.1.3	Referenční element	23
4.1.4	Výpočet matice tuhosti \mathbb{A}	26
4.1.5	Výpočet vektoru pravé strany	27
4.1.6	Zahrnutí okrajových podmínek úlohy	27
4.1.7	Numerické řešení soustavy lineárních rovnic	27
5	Programová realizace	31
5.1	Algoritmizace problému	31
5.1.1	Příprava	31
5.1.2	Implementace triangulace τ_h oblasti Ω	32
5.1.3	Formát <i>.msh</i>	33
5.1.4	Načtení dat ze souboru <i>.msh</i>	34
5.1.5	Sestavení matice \mathbb{A} a vektoru pravé strany \vec{b}	34
5.1.6	Numerické řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{\alpha} = \vec{b}$	35
5.2	Výsledky	35
5.2.1	Sítě pro výpočet	35
5.2.2	Výpočet řešení	36
5.2.3	Ověření správnosti řešení	38
6	Závěr	41

1 Úvod

V technických úlohách se často vyskytuje úloha sdílení tepla. Sdílení tepla, také tzv. *termokinetika*, je nauka zabývající se šířením tepla v prostoru a čase. Podle fyzikálních parametrů a prostředí, kde se teplo šíří, rozeznáváme tři základní druhy sdílení tepla, tedy *vedení*, *proudění* a *sálání*, viz [12].

Vedení tepla je také označováno jako tzv. *kondukce*. Princip *kondukce* je založen na energetické výměně mikropohybu molekul uvažované hmoty, který je způsoben rozdílem teplot. Uvažujeme-li časově stálý děj, pak se jedná o nejjednodušeji popsatelný způsob sdílení tepla, viz další části této práce.

Sdílení tepla *prouděním* se také označuje jako tzv. *konvekce*. *Konvekce* je přenos tepla v proudící hmotě, kde se mísí jednotlivé molekuly o různých teplotách. Rozdíl těchto teplot je hnací silou tohoto přenosu tepla. Popis tohoto jevu je již poněkud komplikovanější, neboť zde hrají roli i další faktory jako jsou rychlost proudění, popřípadě typ proudění a další.

Sálání se také odborně označuje jako tzv. *radiace*. *Radiace* spočívá v přenosu tepla elektromagnetickým vlněním o určité vlnové délce, což umožňuje přenos tepla i ve vakuu. Ve vakuu se teplo přenáší pouze *sáláním*, neboť *kondukce* i *konvekce* jsou založené na existenci hmotného média.

1.1 Úlohy vedení tepla

Nejjednodušším případem sdílení tepla je časově stálé vedení tepla, odborně nazývané jako tzv. *stacionární*. Tento děj popisuje přenos tepla *kondukcí* v případě časově stálého teplotního pole. Cílem této práce je popsat numerické řešení tohoto děje pomocí výpočetní techniky, i když víme, že v mnoha praktických případech se vyskytují komplikovanější úlohy.

Pro fyzikální popis vycházíme z rovnice vedení tepla vyjadřující také zákon zachování energie proudící tekutiny v otevřené soustavě, viz [12]. Pokud uvažujeme, že na zkoumanou soustavu působí z vnějších sil pouze tlak, pak jsme schopni formulovat zákon zachování energie tzv. **Fourierovou-Kirchhoffovou rovnicí** pro teplotu T ve tvaru

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \vec{\tau} : \vec{\Delta} + \dot{Q}^{(g)}, \quad (1)$$

viz [16]. Dále stručně objasníme význam jednotlivých členů této rovnice. Zde člen $\frac{DT}{Dt}$ je tzv. *materiálová derivace*, \vec{q} je tzv. *hustota tepelného toku*, $\vec{\tau}$ je tzv. *tenzor dynamických napětí* vyjadřující smyková napětí v tekutině, následně $\vec{\Delta}$ označuje tzv. *tenzor rychlosti deformace*, dále ρ je *hustota* a c_p je *měrná tepelná kapacita* uvažované tekutiny za konstantního tlaku, viz [16]. Rozepíšeme-li *materiálovou derivaci* pomocí parciálních derivací, pak získáme tuto rovnici (1) ve tvaru

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \vec{q} + \vec{\tau} : \vec{\Delta} + \dot{Q}^{(g)}. \quad (2)$$

Fyzikální význam členu $\frac{\partial T}{\partial t}$ je změna teploty s časem (*Pozn.*: Také nazývaná jako *akumulace teploty* v čase). Tento člen vyjadřuje nestacionaritu řešeného problému. Člen $\vec{u} \cdot \nabla T$ symbolizuje *konvektivní* přenos tepla způsobený prouděním tekutiny, kde \vec{u} značí *vektor rychlosti* proudící tekutiny. (*Pozn.*: Tím, že tekutina proudí, dochází k “unášení” tepla a

následně i ke změně teplotního profilu v tekutině.) Člen $-\nabla \cdot \vec{q}$ vyjadřuje přenos tepla *vedením*. Tento přenos zahrnuje konduktivní přenos v tuhém tělese a konvektivní přenos na stěnách tohoto tělesa. Příkladem je rovinná stěna pece, která je složena z více izolačních vrstev. Hustota tepelného toku \vec{q} je dána **Fourierovým zákonem** jako

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T, \quad (3)$$

kde λ je tzv. *součinitel tepelné vodivosti*. Dosazením **Fourierova zákona** (3) do rovnice (2) získáme

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \lambda \nabla^2 T + \vec{\tau} : \vec{\Delta} + \dot{Q}^{(g)}. \quad (4)$$

Člen $\vec{\tau} : \vec{\Delta}$ symbolizuje přenos tepla, který je způsoben vazkými silami v proudící tekutině, tedy jde o vznik tepla třením. Poslední člen rovnice $\dot{Q}^{(g)}$ vyjadřuje přítomnost tzv. *objemového zdroje tepelného toku* (Pozn.: Jde tedy o tepelný tok \dot{Q} na objem.). Příkladem může být elektrický proud procházející vodičem. Vlivem elektrického odporu materiálu se vodič zahřívá a tím vzniká teplo, které se konduktivním vedením přenáší.

V případech stacionárního přenosu tepla vedením bez vnitřního zdroje tepla se rovnice (4) zredukuje na **Laplaceovu rovnici**, kterou pak píšeme jako

$$-\lambda \Delta T = 0. \quad (5)$$

Pokud uvažujeme přítomnost vnitřního zdroje tepla, pak se jedná o **Poissonovu rovnici**, která je obecnějším případem **Laplaceovy rovnice**, tuto rovnici zapisujeme jako

$$-\lambda \Delta T = \dot{Q}^{(g)}. \quad (6)$$

1.2 Formulace okrajové úlohy a řešitelnost úlohy

Všechny předcházející úlohy pro korektní formulaci vyžadují doplnění dodatečných podmínek, např. počátečních a okrajových. Okrajové podmínky lze uvažovat jako matematický model popisující chování teploty u stěny ovlivněné vnějším prostředím (teplota vnějšího prostředí, materiál, proudění, atp.). Výsledným problémem je okrajová úloha, jejíž řešení nás zajímá. O řešitelnosti této úlohy lze však něco málo říci jen ve speciálních případech. Úlohu stacionárního přenosu tepla jsme schopni v určitých případech řešit analyticky. Díky rychlému rozvoji výpočetní techniky je však možné řešit i případy, které analyticky vyřešit nedokážeme. Jedná se o tzv. *numerická řešení*, kterými jsme schopni přesná řešení dostatečně dobře aproximovat. Tato aproximace však závisí na mnoha faktorech, o kterých se zmíníme v dalších částech. V této práci řešíme úlohu vedení tepla numerickou aproximací rovnice (6) pomocí tzv. *metody konečných prvků* (MKP), která je navíc založena na tzv. *slabé formulaci* rovnice (6) zahrnující také okrajové podmínky. K této formulaci budeme potřebovat matematický aparát.

2 Matematický aparát

V dalších částech budeme pracovat se standardním matematickým aparátem, který zde pro přehlednost stručně uvedeme. Vzhledem k tomu, že potřebný matematický aparát je mnohdy nad rámec bakalářského studia, omezíme se zde na výčet definic, tvrzení a vět, které využijeme v dalších částech práce. Podrobnější informace o užitém matematickém aparátu lze nalézt v [14].

2.1 Použité značení

V této práci budeme používat následující značení: Symbolem \mathbb{R} značíme množinu reálných čísel a symbolem \mathbb{N} množinu přirozených čísel. Symbolem \mathbb{R}^n značíme n -rozměrný vektorový prostor, viz [10], jehož prvky jsou n -rozměrné vektory nebo také n -tice reálných čísel. Prvky \mathbb{R}^n , vektory, značíme malým písmenem se šipkou např. \vec{a}, \vec{b}, \dots , popřípadě malým tučným písmenem $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ a v ojedinělých případech i pomocí tučného velkého písmena tedy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$. Takto vždy budeme značit sloupcový vektor (tedy matici o jednom sloupci), pokud neuvedeme jinak. Symbolem $\mathbb{R}^{p \times q}$ značíme množinu všech reálných matic typu $p \times q$. Matice značíme velkým písmenem tj. $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$. Symbolem \mathbb{E}_n značíme jednotkovou matici $\mathbb{E}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. (Pozn.: Pokud je rozměr matice zřejmý, pak píšeme pouze \mathbb{E} .) Symbolem $C^n(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ značíme množinu spojitých funkcí, které mají spojitě n -té parciální derivace na G . Pokud je $n = 0$ tedy hovoříme o množině $C^0(G)$, kde jsou spojitě pouze nulté parciální derivace, pak tuto množinu značíme pouze symbolem $C(G)$. Symbolem

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p}$$

Značíme normu vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Je-li $p = 1$ mluvíme o normě součtové, pro $p = 2$ o normě Euklidovské a pro $p = \infty$ o normě maximové. Užitím vektorové normy lze také definovat normu maticovou, viz [14]. Maticovou normu matice \mathbb{U} značíme obdobně $\|\mathbb{U}\|$. Symbolem $\rho(\mathbb{U})$ značíme spektrální poloměr matice \mathbb{U} , tj. $\rho(\mathbb{U}) = \max_i |\lambda_i|$, kde λ_i jsou vlastní čísla matice \mathbb{U} .

2.2 Spojitost funkce

V této práci používáme pojem *spojitost funkce*. Tento pojem patří mezi pojmy definované v základním bakalářském studiu užitím limity funkce. Připomeňme, že říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **limitu** rovnou hodnotě $a \in \mathbb{R}$ a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a,$$

pokud platí pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v nějakém okolí bodu x_0 následující implikace

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

Přesná definice limity posloupnosti viz [9]. Dále připomeňme pojem spojitosti funkce f . O funkci f říkáme, že je **spojitá** v bodě x_0 jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dále budeme mluvit o spojitosti funkce f na intervalu $I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$. O funkci $f(x)$ říkáme, že je spojitá na intervalu I , jestliže je spojitá v každém bodě tohoto intervalu, viz také [9]. S výše uvedenými pojmy limita, spojitost v bodě a spojitost na množině pracujeme obdobně jak pro funkce jedné proměnné, tak i pro funkce více proměnných, viz [10].

2.3 Derivace, diferenciální operátory a integrály

Připomeňme, že pro funkci jedné proměnné $f(x)$ značíme derivaci této funkce jako $f'(x)$ nebo $\frac{df(x)}{dx}$. Pro funkce více proměnných užíváme pojem *parciální derivace*, viz [10]. Parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ jsou funkce udávající změnu funkce ve směru zvolené souřadnice zavedeného souřadného systému. V této práci používáme značení $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ pro parciální derivaci funkce $f(\mathbf{x})$ podle souřadnice x_i . Změnu funkce $f(\mathbf{x})$ můžeme hledat také v libovolném směru, který je dán vektorem \mathbf{s} , pak tuto změnu nazýváme parciální derivací ve směru \mathbf{s} a značíme symbolem $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}}$. Pro výpočet parciální derivace funkce v libovolném směru užíváme gradient funkce, který zapisujeme pomocí Hamiltonova operátoru také označovaným jako operátor nabla (obecně v n -rozměrném prostoru). V této práci se omezíme na dvourozměrný prostor se zavedeným kartézským souřadným systémem Ox_1x_2 . V tomto prostoru zapisujeme operátor ∇ jako vektor

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (7)$$

Aplikací operátoru nabla na libovolnou funkci $f(\mathbf{x})$, která má spojitě alespoň první parciální derivace v uvedeném dvourozměrném prostoru podle souřadnic x_1, x_2 , dostáváme gradient funkce $f(\mathbf{x})$, tedy

$$\text{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right). \quad (8)$$

Geometrický význam gradientu nám říká, že se jedná o vektor udávající směr největšího růstu funkce $f(\mathbf{x})$. Pro připomenutí zde uvedme, že parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ ve směru \mathbf{s} a v bodě A lze vyjádřit užitím gradientu jako

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\nabla f(A) \cdot \mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|_2}. \quad (9)$$

Dalším diferenciálním operátorem je operátor divergence, viz [10], který je definován jako skalární součin operátoru nabla s vektorovou funkcí $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Zapisujeme jako

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (10)$$

Fyzikálním významem operátoru divergence je popis tzv. *zřídlovosti* proudového pole. Popis takového pole je obsažen v bilanční rovnici hmotnosti, kterou také nazýváme **rovnici kontinuity** více viz [16]. (*Pozn.:* Ve zjednodušení tato rovnice říká, že v proudovém poli nestlačitelné tekutiny tato tekutina nevzniká ani nezaniká.)

Důležitým diferenciálním operátorem je Laplaceův operátor, který lze formálně zapsat jako divergenci gradientu funkce $f(\mathbf{x})$, nebo podrobněji jako skalární součin operátoru nabla s gradientem funkce $f(\mathbf{x})$. Tedy jako

$$\nabla \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \text{div grad } f(\mathbf{x}) = \Delta f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} \right). \quad (11)$$

Dále připomeňme pravidla pro derivování složené funkce. Nejprve uvažujme složenou funkci jedné proměnné. Složenou funkci jedné proměnné derivujeme podle pravidla o derivaci složené funkce viz [5]. Funkci $(f \circ g)(x)$ formálně derivujeme jako

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x), \quad (12)$$

viz [5]. Složenou funkci více proměnných $f(x_1, x_2) = z(g(x_1, x_2), h(x_1, x_2))$ derivujeme podle pravidla

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad (13)$$

viz [10].

Ačkoliv rovnice vedení tepla je parciální diferenciální rovnicí (PDR), při jejím řešení pomocí metody konečných prvků (MKP) budeme užívat její integrální formulaci. Pro integraci ve dvourozměrném prostoru užíváme dvojný integrál, viz [10], tedy

$$\iint_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (14)$$

kde zápis zjednodušíme $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast. Vzhledem k formulaci okrajové úlohy potřebujeme další předpoklady na hranici této oblasti. Pro zjednodušení v této práci uvažujeme oblast Ω pouze jako polygonální oblast, tedy oblast, jejíž hranice je po částech lomená čára. Obecnějším nárokem na vlastnosti hranice oblasti je Lipschitzovská spojitost hranice, viz [14]. Pro integraci přes hranici oblasti užíváme křivkový integrál.

Křivkový integrál skalární funkce φ po křivce tvořené hranicí oblasti (hranice omezené oblasti je uzavřená křivka) značíme jako

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{x}) dS, \quad (15)$$

případně integrál po křivce $\Gamma \subset \partial\Omega$ (část hranice) značíme

$$\int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) dS, \quad (16)$$

vlastnosti křivkového integrálu viz [10].

2.4 Použité věty a definice pojmů

Věta o divergenci nebo také Gaussova—Greenova věta, viz [8], udává vztah mezi trojným integrálem přes oblast Ω a plošným integrálem po uzavřené ploše $\partial\Omega$. Klíčovým vztahem, který získáme při splnění předpokladů Gaussovy věty, viz [10], je rovnice

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx, \quad (17)$$

kde \mathbf{f} je vektorová funkce a \vec{n} je vektor jednotkové vnější normály k hranici $\partial\Omega$. Speciálně pro funkci $\mathbf{f}(u, v) = uv \vec{e}_i$, z rovnice (17) dostaneme vztah

$$\int_{\partial\Omega} uv n_i dS = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x}. \quad (18)$$

Nyní vidíme, že přesunutím druhého ze sčítanců v argumentu integrálu z pravé strany na levou dostáváme tvrzení Greenovy věty.

Věta 1 (Greenova věta). *Nechť funkce $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ a nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s Lipschitzovskými spojitou hranicí. Pak platí následující vztah*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u v n_i \, dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mathbf{x}, \quad (19)$$

kde $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ je ve dvourozměrném prostoru jednotková vnější normála na hranici Ω .

Greenova věta platí i v obecnější podobě pro funkce z tzv. *Sobolevových prostorů*, viz [14]. Tento prostor má i další užitečné vlastnosti viz [11], [1].

Při výpočtu metodou konečných prvků pracujeme s tzv. *referenčními elementy*. Pro transformaci referenčních elementů na elementy v uvažovaném dvourozměrném souřadném systému užíváme větu o substituci.

Věta 2 (Věta o substituci). *Nechť $J : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ je prosté, spojitě diferencovatelné zobrazení oblasti $\hat{\Omega}$ na oblast Ω a funkce $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Pak*

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = \int_{\hat{\Omega}} f(J(\hat{x})) |J'(\hat{x})| \, d\hat{x}, \quad (20)$$

kde $|J'(\hat{x})|$ je absolutní hodnota determinantu Jacobiho matice zobrazení J .

(Pozn.: Zde prostor $C(\bar{\Omega})$ lze nahradit tzv. *Lebesguovým prostorem* $L^1(\Omega)$, viz [14].)

Chceme-li náš problém řešit numerickými metodami, pak je nezbytné dopředu vědět, že hledané řešení existuje a že je jednoznačné (výjimkou jsou případy jednoznačnosti řešení až na aditivní konstantu). Problematikou existence a jednoznačnosti řešení se mimo jiné zabýval Peter David Lax (1926 - *), který v roce 2005 získal Abelovu cenu. Peter Lax byl oceněn za fundamentální příspěvky k teorii a aplikacím parciálních diferenciálních rovnic a k výpočtům jejich řešení, viz [6]. Důležitou částí jeho práce je Laxova—Milgramova věta. Touto větou jsou formulovány požadavky na řešenou úlohu, za kterých existuje její jednoznačné řešení. Tato věta, kterou uvádíme níže, obsahuje matematické pojmy *linearita*, *bilinearita* a *symetrie*. Jejich význam ukážeme v další části na konkrétní úloze. Definici zbývajících, lze nalézt například v [14] nebo v [11].

Věta 3 (Laxova—Milgramova věta). *Nechť V je Banachův prostor, L lineární forma na V a \mathbf{a} je symetrická bilineární forma na V . Nechť dále existují kladné konstanty M, m, C takové, že pro libovolné $u, v \in V$ platí*

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(u, v)| &\leq M \|u\|_V \|v\|_V, \\ \mathbf{a}(u, u) &\geq m \|u\|_V^2, \\ |L(v)| &\leq C \|v\|_V. \end{aligned} \quad (21)$$

Pak existuje právě jedno $u^* \in V$ takové, že

$$\mathbf{a}(u^*, v) = L(v). \quad (22)$$

Navíc

$$\|u^*\|_V \leq \frac{C}{m}. \quad (23)$$

Důkaz této věty nalezneme v [14]. Zde symbolem $\|u\|_v$ je míněna norma v Banachově prostoru V . Pojem Banachova prostoru výrazně přesahuje látku probíranou v základním kurzu na FS ČVUT v Praze. Z těchto důvodů zde pouze uvedeme příklady Banachových prostorů z literatury, viz [14], [11].

Základním Banachovým prostorem je Lebesgueův prostor $V = L^p(\Omega)$ obsahující funkce, které splňují

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty. \quad (24)$$

Normou na tomto prostoru je

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (25)$$

Speciálně pro $p = 2$ dostáváme prostor $L^2(\Omega)$, který je navíc prostorem se skalárním součinem (Hilbertův prostor) definovaným

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx. \quad (26)$$

Všimněme si, že pro reálné funkce platí

$$(f, f)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (27)$$

Dále pak ukážeme, že na tomto prostoru platí tzv. *Cauchyova—Schwarzova nerovnost*

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (28)$$

V další práci spíše využijeme Sobolebovův prostor $V = H^1(\Omega)$, viz [11], tvořený funkcemi, které splňují

$$\int_{\Omega} \left(|f(\mathbf{x})|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|^2 \right) d\mathbf{x} < +\infty. \quad (29)$$

Normou na tomto prostoru pak je

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \left(|\varphi(\mathbf{x})|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|^2 \right) d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

Omezíme-li se pouze na funkce nulové na hranici $\partial\Omega$ (případně na její části $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$), značíme tento prostor $V = H_0^1(\Omega)$. V tomto případě lze na prostoru V užít normu

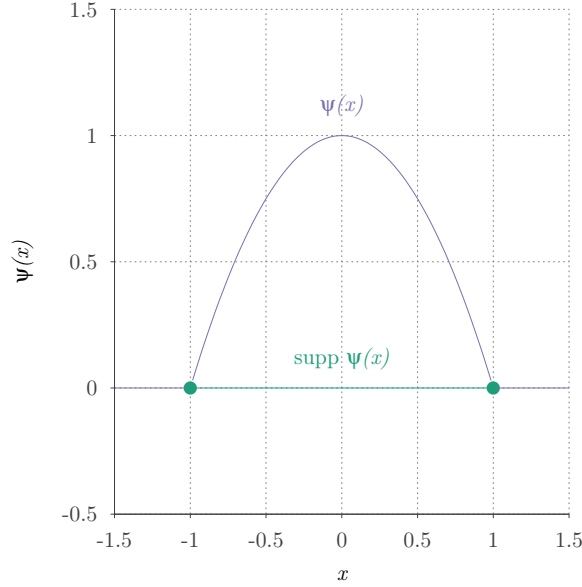
$$\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|^2 \right) d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (31)$$

viz Poincaréova—Friedrichsova nerovnost, kterou můžeme nalézt například v [14].

V souvislosti s volbou báze funkcí $\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x})$ tvořících bázi prostoru konečných prvků H_h používáme pojem *nosič*. Pro funkci $\psi \in C^\infty(\Omega)$ nosičem $\text{supp } \psi$ rozumíme takovou množinu, pro kterou platí

$$\text{supp } \psi = \overline{\{x \in \Omega : \psi(x) \neq 0\}}, \quad (32)$$

kde symbolem \overline{M} míníme uzávěr množiny M , viz [10]. Pro názornost uvádíme konkrétní příklad. Mějme funkci $\psi(x) = \max(1 - x^2, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Ze vztahu (32) vyplývá, že $\text{supp } \psi = \langle -1, 1 \rangle$, viz obrázek 1.



Obr. 1: Nosič funkce $\psi(x)$

Pro ověření platnosti předpokladů Laxovy—Milgramovy věty často užíváme Cauchyovy—Schwarzovy nerovnosti (??). Každý skalární součin, tedy i $(f, g)_{L^2(\Omega)}$, splňuje následující

$$(f + g, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2(\Omega)} + (g, w)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f, g, w \in L^2(\Omega) \quad (33)$$

a

$$(\alpha f, g)_{L^2(\Omega)} = \alpha(f, g)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega). \quad (34)$$

Dále splňuje požadavky symetrie

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = (g, f)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega), \quad (35)$$

tedy se jedná o tzv. *bilineární symetrickou formu*. Dále je také splněno

$$(f, f)_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall f \in L^2(\Omega) \quad (36)$$

V prostoru $L^2(\Omega)$ navíc platí (viz [7])

$$(f, f)_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow f = 0. \quad (37)$$

Užitím těchto vztahů nyní dokážeme platnost nerovnosti (28). Dle vztahu (36) lze ukázat, že platí

$$(f + \lambda g, f + \lambda g)_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad (38)$$

pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^2(\Omega)$. Užitím linearit (33 - 35) dostáváme vztah

$$(g, g)_{L^2(\Omega)} \lambda^2 + 2\lambda(f, g)_{L^2(\Omega)} + (f, f)_{L^2(\Omega)} \geq 0. \quad (39)$$

Vztah (39) je kvadratickou nerovnicí. Diskriminant odpovídající kvadratické rovnici splňuje $D \leq 0$, tedy

$$D = 4(f, g)_{L^2(\Omega)}^2 - 4(f, f)_{L^2(\Omega)}(g, g)_{L^2(\Omega)} \leq 0. \quad (40)$$

Následnou úpravou a užitím vztahu (27) dostáváme Cauchyovu—Schwarzovu nerovnost

$$|(f, g)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega). \quad (41)$$

2.4.1 Numerické řešení soustav lineárních rovnic

Metodou konečných prvků získáme soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{\alpha} = \vec{b}$. Tato soustava je řešitelná buď přímými nebo iteračními metodami. Příkladem iterační metody je tzv. *prostá iterační metoda* (PIM), kterou používáme pro řešení soustav ve tvaru

$$\vec{\alpha} = \mathbb{U}\vec{\alpha} + \vec{V}. \quad (42)$$

(Pozn.: Na tento tvar lze upravit řešenou soustavu $\mathbb{A}\vec{\alpha} = \vec{b}$. Tyto úpravy jsou uvedeny dále v této práci.) Tento tvar pak použijeme jako předpis pro iterační proces, tedy

$$\vec{\alpha}^{(k+1)} = \mathbb{U}\vec{\alpha}^{(k)} + \vec{V}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (43)$$

kde $\mathbb{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je čtvercová matice. Dále se budeme zabývat konvergencí iteračních metod, tedy nejprve připomeňme definici tohoto pojmu: Říkáme, že *iterační metoda* pro danou soustavu lineárních rovnic je *konvergentní*, pokud pro libovolné počáteční přiblížení $\alpha^{(0)}$ posloupnost $\{\alpha^{(k)}\}$ získaná předpisem této iterační metody konverguje k přesnému řešení této soustavy rovnic.

Pro konvergenci PIM platí následující věta.

Věta 4 (Nutná a postačující podmínka PIM). *Prostá iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}) < 1$.*

Důkaz této věty viz [15]. Dále budeme používat vztah mezi maticovou normou $\|\mathbb{U}\|$ a spektrálním poloměrem $\rho(\mathbb{U})$. Tento vztah je uveden v následující větě.

Věta 5. *Pro každou čtvercovou matici \mathbb{U} a její libovolnou normu platí nerovnost*

$$\rho(\mathbb{U}) \leq \|\mathbb{U}\|. \quad (44)$$

Důkaz této věty vyplývá z vlastností normy, viz [2]. Mějme vlastní číslo λ čtvercové matice \mathbb{U} a k němu příslušející vlastní vektor \vec{v} . Z definice vlastních čísel, viz [14] platí

$$\lambda \vec{v} = \mathbb{U}\vec{v}. \quad (45)$$

Znormujeme-li tuto rovnici, pak dostáváme

$$\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\| = \|\mathbb{U}\vec{v}\| \leq \|\mathbb{U}\| \|\vec{v}\|, \quad (46)$$

Jestliže $\|\vec{v}\| \neq 0$, pak platí

$$|\lambda| \leq \|\mathbb{U}\|. \quad (47)$$

Pokud zvolíme jako vlastní číslo $\lambda = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$, pak užitím definice spektrálního poloměru dostáváme

$$\rho(\mathbb{U}) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| \leq \|\mathbb{U}\|. \quad (48)$$

Je-li splněna postačující podmínka pro konvergenci metody, tedy ($\|\mathbb{U}\| < 1$), pak je možné provést odhad chyby v k -té iteraci od přesného řešení podle následující věty.

Věta 6. Je-li $\|\mathbb{U}\| < 1$, pak je prostá iterační metoda konvergentní (k přesnému řešení $\vec{\alpha}^{(*)}$). Navíc platí následující odhad chyby

$$\|\vec{\alpha}^{(k)} - \vec{\alpha}^{(*)}\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|}{1 - \|\mathbb{U}\|} \|\vec{\alpha}^{(k)} - \vec{\alpha}^{(k-1)}\|, \|\vec{\alpha}^{(k)} - \vec{\alpha}^{(*)}\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|^k}{1 - \|\mathbb{U}\|} \|\vec{\alpha}^{(1)} - \vec{\alpha}^{(0)}\|. \quad (49)$$

Platnost prvního tvrzení je patrná ze vztahu (48) a věty 4. Důkaz druhého tvrzení viz [15].

V této práci v souvislosti s podmínkami konvergence iteračních metod používáme pojmy *ostrá diagonální dominance* a *symetrická pozitivně definitní matice*, viz [15]. Nejprve připomeňme pojem *ostře diagonální dominance*.

Definice 1 (Ostře diagonálně dominantní matice). Matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazýváme ostře diagonálně dominantní (ODD), pokud platí

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in 1, \dots, n, \quad (50)$$

nebo

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|, \quad \forall i \in 1, \dots, n. \quad (51)$$

Dále pak připomínáme pojem *pozitivně definitní matice*.

Definice 2 (Pozitivně definitní matice). Matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazýváme pozitivně definitní pokud pro libovolný vektor $\mathbf{x} \neq 0$ platí

$$\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{x} = \sum_{x,j=1}^n x_i a_{ij} x_j > 0, \quad (52)$$

Pro úplnost připomeňme ještě definici *symetrické matice*.

Definice 3 (Symetrická matice). Říkáme, že matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická, pokud platí

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (53)$$

pro všechna i, j , tj.

$$\mathbb{A}^T = \mathbb{A}. \quad (54)$$

Dále v této práci užíváme Gaussovu—Seidelovu iterační metodu, která je dána předpisem (130). Konvergence této metody je dána postačujícími podmínkami, které jsou uvedeny v následující větě, kterou nalezneme v [2].

Věta 7 (Postačující podmínky Gaussovy—Seidelovy iterační metody). *Gaussova—Seidelova iterační metoda pro řešení soustavy $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$ konverguje nezávisle na volbě počáteční aproximace, je-li splněna některá z postačujících podmínek:*

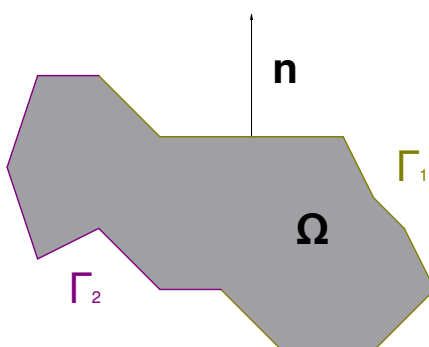
1. matice \mathbb{A} je ostře diagonálně dominantní (ODD),
2. matice \mathbb{A} je symetrická a pozitivně definitní (SPD).

3 Matematický popis úlohy stacionárního vedení tepla

Stacionární rozložení teploty v tuhém tělese matematicky popisujeme parciální diferenciální rovnicí. Jedná se o **Poissonovu rovnici**, která patří do skupiny rovnic tzv. *eliptického* typu, viz. [2]. Praktický význam této rovnice jsme uvedli již v úvodu. Podělíme-li rovnici (6) tepelnou vodivostí λ a vzniklý podíl $\frac{\dot{Q}^{(g)}}{\lambda}$ označíme jako funkci f a teplotu T označíme jako funkci u , pak dostáváme **Poissonovu rovnici** ve tvaru

$$-\Delta u = f, \quad (55)$$

kterou dále doplníme smíšenými okrajovými podmínkami. Formulovanou okrajovou úlohu pak budeme řešit na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. V této práci budeme uvažovat oblast Ω jako omezenou polygonální oblast, viz Obrázek 2.



Obr. 2: Schéma oblasti Ω .

3.1 Klasický problém

Při hledání klasického řešení smíšené okrajové úlohy pro rovnici (55) hledáme funkci $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ takovou, že splňuje

$$-\Delta u = f, \quad \text{v } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (56)$$

a navíc platí

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \quad (57a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \vartheta \quad \text{na } \Gamma_2, \quad (57b)$$

kde Γ_1, Γ_2 jsou navzájem disjunktní části hranice $\partial\Omega$ takové, že

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega. \quad (58)$$

V našem případě jsme tedy použili Dirichletovy (viz (57a)) a Neumanovy (viz (57b)) okrajové podmínky. Obecně je však možné uvažovat i jiné okrajové podmínky, viz [12].

3.2 Slabá formulace

Uvažujme $u \in C^2$ řešení úlohy (56 - 57) a testovací funkci $v \in \mathcal{V} = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$. Rovnici (56) přenásobme touto funkcí v a integrací přes oblast Ω dostáváme

$$\int_{\Omega} -\Delta u v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (59)$$

Aplikací Greenovy věty (19) získáme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta u v \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v \, d\mathbf{x} = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \left(-\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 - \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right) v \, dS}_{= 0, \text{ neboť } v \in \mathcal{V}} + \\ &+ \int_{\Gamma_2} \underbrace{\left(-\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 - \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right) v \, dS}_{-\nabla u \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\vartheta, \text{ z OP}} + \int_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x}}_{\nabla u \cdot \nabla v} = \\ &- \int_{\Gamma_2} (\vartheta v) \, dS + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (60)$$

Dosazením upravené levé strany ze vztahu (60) do rovnice (59) a převedením členu se znaménkem minus na pravou stranu dostáváme vztah

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f v) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} (\vartheta v) \, dS, \quad (61)$$

který platí pro libovolné $v \in \mathcal{V}$. Všimněme si, že se v rovnici (61) vyskytují pouze první parciální derivace funkcí u, v . Pro existenci integrálů v rovnici (61) stačí uvažovat funkce u, v například z prostoru $C^1(\bar{\Omega})$ (dokonce stačí integrovatelnost prvních derivací). Dále zde předpokládáme, že f je integrovatelná funkce na oblasti Ω a ϑ je integrovatelná na Γ_2 . V další části tyto nároky ještě upřesníme.

Pro účely slabé formulace definujme formu a (zobrazení z $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$) pro libovolné $u, v \in \mathcal{V}$ (nebo obecněji například z $C^1(\bar{\Omega})$)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) \, d\mathbf{x} \quad (62)$$

a

$$L(v) = \int_{\Omega} (f v) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} (\vartheta v) \, dS. \quad (63)$$

Slabou formulaci problému (56) pak lze napsat takto: Hledáme funkci u (např. $u \in \mathcal{V}$) takovou, že platí

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (64)$$

Všimněme si některých vlastností forem a a L . Vidíme, že platí

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in \mathcal{V}, \quad (65)$$

tedy forma a je tzv. *symetrická*. Dále platí

$$a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w), \quad \forall u, v, w \in \mathcal{V} \quad (66)$$

a

$$a(\alpha u, v) = \alpha a(u, v), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}. \quad (67)$$

Tedy a je tzv. *lineární* v první složce. Vzhledem k symetrii (65) vidíme, že a je také tzv. *bilineární*. Definice symetrické a bilineární formy můžeme najít například v [14]. Pro formu L obdobně platí

$$L(u + v) = L(u) + L(v), \quad \forall u, v \in \mathcal{V} \quad (68)$$

a také

$$L(\alpha u) = \alpha L(u), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{V}. \quad (69)$$

Tedy forma L je tzv. *lineární*. Definici lineární formy, lze nalézt například v [14]. Všimněme si, že dále platí

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} > 0, \quad \text{pro } u \neq 0, u \in \mathcal{V}, \quad (70)$$

neboť $a(u, u) \geq 0$ a rovnost nastává pouze pro konstantní funkce $u \in \mathcal{V}$ (*Pozn.* Jediná přípustná konstanta je vzhledem k nulové okrajové podmínce rovna nule.) Označíme-li

$$\|u\|_V = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (71)$$

vidíme, že platí vztah

$$a(u, u) \geq m \|u\|_V^2, \quad (72)$$

pro $m = 1$ a pro libovolné $u \in \mathcal{V}$. Užitím Cauchyovy—Schwarzovy nerovnosti, viz [14], lze ukázat i platnost vztahu

$$a(u, v) \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad (73)$$

pro $M = 1$ a pro libovolné $u, v \in \mathcal{V}$. Pokud požadujeme navíc $f \in L^2(\Omega)$ a $\vartheta \in L^2(\partial\Omega)$ tedy

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 d\mathbf{x} < +\infty, \quad \int_{\Gamma_2} |\vartheta(x)|^2 dS < +\infty, \quad (74)$$

lze ukázat i platnost vztahu

$$|L(v)| \leq C \|v\|_V, \quad \text{pro } v \in \mathcal{V}. \quad (75)$$

Pro zaručení existence a jednoznačnosti zbývá užít Laxovy—Milgramovy věty. Zvolený prostor \mathcal{V} s normou danou vztahem (71) ale není úplný, viz [11]. Vidíme, že pro její splnění, potřebujeme na místo \mathcal{V} použít Banachův prostor V . Pro danou úlohu jde o prostor $V = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_1\}$, kde symbolem $H^1(\Omega)$ je značen Hilbertův prostor, viz například [11].

Slabá formulace problému (56 - 57) je pak dána takto: hledáme takové $u \in V$, pro které platí

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (76)$$

Vzhledem k předchozímu jsou splněny předpoklady Laxovy—Milgramovy věty a úloha (76) má jediné řešení $u \in V$.

3.3 Aproximace slabého řešení metodou konečných prvků

Pro aproximaci řešení uvažujme prostor $V_h \subset V$, přičemž $\dim V_h = N_h < +\infty$. Přibližné řešení budeme tedy hledat v prostoru V_h . Zde existuje nějaká báze $\varphi_i, i = 1, \dots, N_h$. Následně tedy budeme hledat aproximaci $u_h \in V_h$ přesného řešení $u \in V$ tak, aby bylo splněno

$$\int_{\Omega} (\nabla u_h \cdot \nabla v_h) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f v_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} (\vartheta v_h) \, dS, \quad \forall v_h \in V_h \quad (77)$$

a tak, že lze vyjádřit libovolnou funkci $u_h \in V_h$ jako lineární kombinaci prvků báze. Takto diskrétně formulovaná úloha se nazývá *Galerkinova*, viz [11]. Následně hledáme řešení u_h problému (76) ve tvaru

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \varphi_j, \quad (78)$$

kde $\alpha_j, j = 1 \dots N_h$ jsou váhové koeficienty jednotlivých bázových funkcí φ_j . Dosazením vztahu (78) do zjednodušené diskrétní formulace Galerkinovy úlohy (77) získáváme

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \left(\int_{\Omega} (\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i) \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\Omega} (f \varphi_i) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \vartheta \varphi_i \, dS. \quad (79)$$

Všimněme si, že funkce v_h z původního vztahu (77) je libovolnou funkcí z prostoru V_h , můžeme ji tedy speciálně volit jako funkci bázovou $\varphi_i, i = 1 \dots N_h$. Dále vidíme, že rovnice (79) je soustavou lineárních rovnic ve tvaru

$$\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}, \quad (80)$$

kde $\vec{\alpha} = (\alpha_i)$, $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $\vec{b} = (b_i)$ s prvky

$$a_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i) \, d\mathbf{x}, \quad (81)$$

$$b_i = \int_{\Omega} (f \varphi_i) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \vartheta \varphi_i \, dS. \quad (82)$$

Pro zjednodušení budeme v dalších částech práce uvažovat $\vartheta(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2$.

Ze vztahu (81) vidíme, že platí

$$a_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i) \, d\mathbf{x} = a_{ji}, \quad (83)$$

tedy platí i

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^T. \quad (84)$$

Z výše uvedeného plyne, že matice \mathbb{A} je symetrická, viz Definice 3. Uvažujme-li $u = v$, pak ze vztahu (62) plyne

$$a(u, u) = \int_{\Omega} (\nabla u)^2 \, d\mathbf{x} > 0, \quad \text{pro } u \neq 0. \quad (85)$$

Speciálně pro $u = \sum_{i=1}^{N_h} z_i \varphi_i$, kde vektor $\mathbf{z} \neq 0$, platí

$$a \left(\sum_i z_i \varphi_i, \sum_j z_j \varphi_j \right) = \sum_i \sum_j \underbrace{a(\varphi_i, \varphi_j)}_{=a_{i,j}} z_i z_j = \mathbf{z}^T \mathbb{A} \mathbf{z}. \quad (86)$$

Vzhledem k nerovnosti (85) a (86) dostáváme platnost vztahu

$$\mathbf{z}^T \mathbb{A} \mathbf{z} > 0, \quad (87)$$

tedy matice \mathbb{A} je pozitivně definitní. Pro symetrickou pozitivně definitní matici \mathbb{A} můžeme numericky řešit soustavu lineárních rovnic (80) Gaussovou—Seidelovou iterační metodou, nebo superrelaxační metodou (SOR), viz [13]. O těchto metodách se více zmíníme v dalších částech práce.

4 Metoda konečných prvků

Víme, že můžeme přibližně řešit Poissonovu rovnici na oblasti Ω s Lipchitzovskými spojitou hranicí a víme, že toto řešení spočívá ve vhodném zvolení báze a následném sestavení soustavy lineárních rovnic. Zatím jsme však tento problém řešili pouze obecně. Pokud budeme uvažovat konkrétní triangulaci τ_h oblasti Ω , pak vyvstává mnoho dalších otázek jako například volba počtu a umístění vrcholů (jemnost) triangulace, sestavení soustavy lineárních rovnic, její řešení a další. Řešení těchto praktických problémů objasníme v následujících částech této práce.

4.1 Diskretizace problému

Diskrétní řešení našeho problému je podmíněno vhodnou volbou triangulace τ_h a následnou volbou prostoru konečných prvků H_h a jeho báze. Nejprve se tedy zabýváme triangulací τ_h oblasti Ω . Dále se budeme zabývat vhodnou volbou prostoru konečných prvků H_h a vhodnou volbou jeho báze. Pro sestavení soustavy lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{a} = \vec{b}$ uijeme tzv. *referenční element* \hat{K} , který používáme pro vhodné zvolení bázových funkcí prostoru konečných prvků H_h . Tyto bázové funkce a jejich parciální derivace pak transformujeme na element $K \in \tau_h$, kde použijeme numerickou kvadraturu pro numerické integrování na jednotlivých elementech $K \in \tau_h$ a následně sestavení soustavy lineárních rovnic. Výslednou soustavu lineárních rovnic pak řešíme numerickými metodami. Tento postup nyní podrobněji vysvětlíme.

4.1.1 Triangulace dvourozměrné oblasti

Mějme omezenou polygonální oblast $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Uvažujme τ_h triangulaci oblasti Ω , splňující následující vlastnosti:

- (a) Triangulace τ_h je tvořena konečným počtem uzavřených trojúhelníků K .
- (b) $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \tau_h} K$.
- (c) Pro $K_i, K_j \in \tau_h, K_i \neq K_j$, je buď $K_i \cap K_j = \emptyset$ nebo je průnik $K_i \cap K_j$ tvořen společným vrcholem nebo $K_i \cap K_j$ je tvořen stranou K_i a K_j .

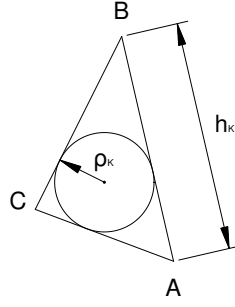
Jestliže jsou výše uvedené podmínky splněny pro triangulaci τ_h , pak ji nazýváme tzv. *přípustnou*, viz [3], [14].

Při vyšetřování konvergence metody se také uvažuje limitní proces $h \rightarrow 0_+$ a je tedy nutné uvažovat systém triangulací $\{\tau_h\}_{h \in (0, h_0)}$. Na tento systém triangulací se pak klade další předpoklad (viz [3]): necht existuje takové $c > 0$, pro které platí

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq c, \quad \forall K \in \tau_h, \forall h \in (0, h_0), \quad (88)$$

kde h_K je délka nejdelší strany trojúhelníka K a ρ_K je poloměr kružnice vepsané tomuto trojúhelníku, viz obrázek 3. Pokud systém triangulací $\{\tau_h\}_{h \in (0, h_0)}$ splňuje podmínku (88), pak ho nazýváme tzv. *regulárním*. Dále volíme index h tak, aby bylo splněno

$$h = \max_{K \in \tau_h} (h_K). \quad (89)$$



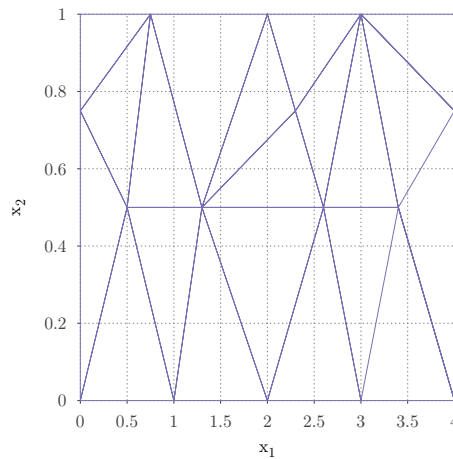
Obr. 3: Element K triangulace τ_K

Také budeme používat charakteristické hodnoty triangulace τ_h , které zde zavedeme. Symbolem N_{points} rozumíme celkový počet vrcholů triangulace a $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N_{points}}$ jsou souřadnice těchto vrcholů. $N_{\Gamma_1}, N_{\Gamma_2}$ značí počet vrcholů ležících na hranici $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$, nebo $\Gamma_2 \subset \partial\Omega$ oblasti $\bar{\Omega}$, kde $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Odečteme-li počet vrcholů na hranici od počtu všech vrcholů dostáváme $N_h = N_{points} - N_{\Gamma_1} - N_{\Gamma_2}$. Pro algoritmizaci problému pak vytvoříme pole *marker_border_line* o N_{points} prvcích, kde bude pro každý vrchol triangulace τ_h uložena hodnota 1 pro vrcholy ležící na hranici oblasti Ω a hodnota 0 pro zbývající vrcholy. Význam tohoto pole vysvětlíme dále v této práci.

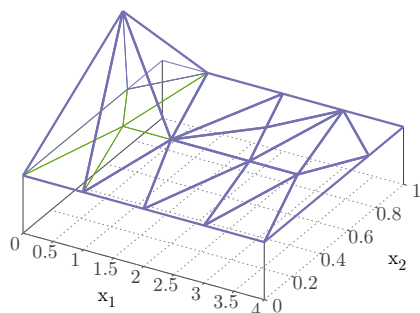
4.1.2 Volba prostoru a báze

Mějme přípustnou triangulaci τ_h polygonální omezené oblasti Ω , viz obrázek 4. Na této triangulaci budeme volit prostor konečných prvků H_h jako prostor po částech lineárních funkcí. Bázové funkce $\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{N_h}(\mathbf{x})$ tvořící bázi prostoru H_h budeme speciálně volit tak, aby ve vrcholech triangulace \mathbf{p}_i platilo

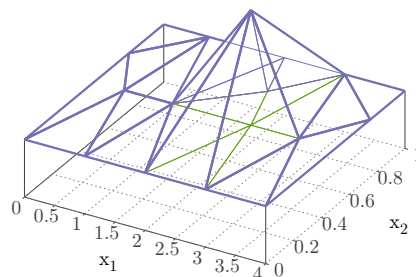
$$\varphi_j(\mathbf{p}_i) = \delta_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N_{points}\}. \quad (90)$$



Obr. 4: Triangulace τ_h polygonální oblasti Ω



(a) Bázová funkce $\varphi_j(\mathbf{x})$ a její nosič $\text{supp } \varphi_j(\mathbf{x})$

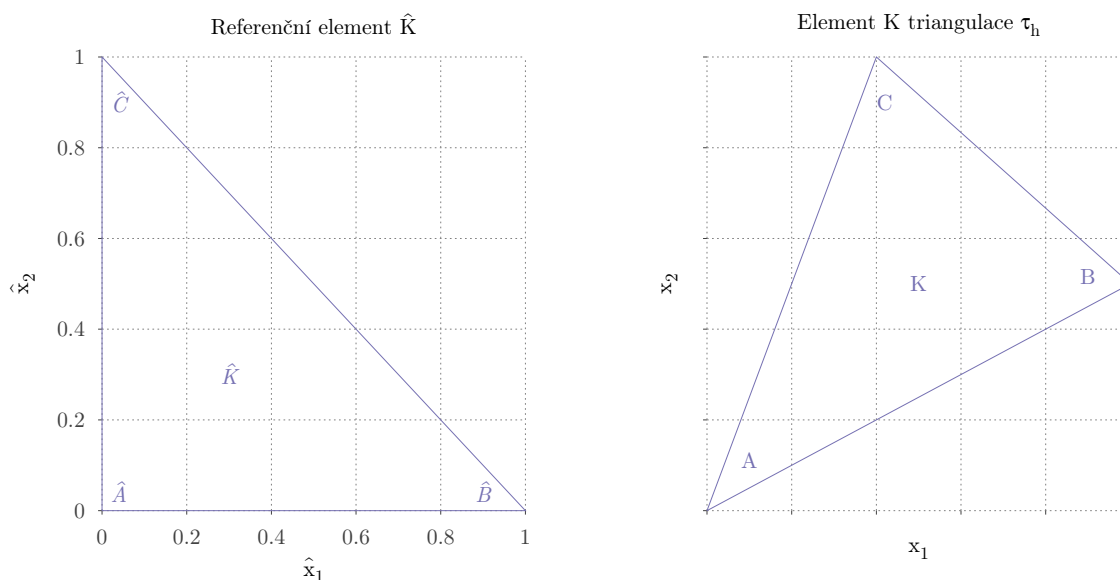


(b) Bázová funkce $\varphi_k(\mathbf{x})$ a její nosič $\text{supp } \varphi_k(\mathbf{x})$

Graf takovéto bázové funkce $\varphi_j(\mathbf{x})$ je pak jehlan s výškou jedna a podstavou danou nosičem $\text{supp } \varphi_j(\mathbf{x})$, viz obrázek 5a a 5b.

4.1.3 Referenční element

Bázové funkce na referenčním elementu Při výpočtu matice tuhosti \mathbb{A} a vektoru pravé strany \vec{b} používáme bázových funkcí a jejich derivací, které transformujeme z tzv. *referenčního elementu* \hat{K} na obecný element $K \in \tau_h$, viz obrázek 6. Bázové funkce na referenčním elementu s vrcholy $\hat{A} = (0, 0)$, $\hat{B} = (1, 0)$ a $\hat{C} = (1, 0)$ značíme



Obr. 6: Referenční element \hat{K} a obecný element $K \in \tau_h$

$\hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{\mathbf{x}})$ a volíme je takto

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= \hat{x}_1, \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= \hat{x}_2.\end{aligned}\tag{91}$$

Dosadíme-li souřadnice vrcholů $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ do předpisu bázových funkcí (91), vidíme, že každá bázová funkce je nenulová právě v jednom jí příslušném vrcholu $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

Transformace Uvažujme nyní obecný trojúhelník K v triangulaci τ_h s vrcholy $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ a $C = (c_1, c_2)$, viz obrázek 6. Referenční trojúhelník \hat{K} transformujeme na trojúhelník $K \in \tau_h$ pomocí *bijektivní afinní transformace* F_K . Pro F_K platí

$$F_K : \hat{K} \rightarrow K, \quad \mathbf{x} = F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{B}_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K,\tag{92}$$

kde matice \mathbb{B}_K a vektor \mathbf{b}_K jsou dány

$$\mathbb{B}_K = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_K = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.\tag{93}$$

Jednotlivé souřadnice získáme rozepsáním vztahu (92) tj.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \mathbb{B}_K \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}.\tag{94}$$

V této práci budeme používat také inverzní transformaci F_K^{-1} , která je dána

$$F_K^{-1} : K \rightarrow \hat{K}, \quad \hat{\mathbf{x}} = F_K^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}_K^{-1} \mathbf{x} - \mathbb{B}_K^{-1} \mathbf{b}_K.\tag{95}$$

Rozepsáním vztahu (95) dostáváme vztah

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbb{B}_K^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \mathbb{B}_K^{-1} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}.\tag{96}$$

Matice \mathbb{B}_K^{-1} , jejíž prvky označíme b^{ij} , je dána vzorcem

$$\mathbb{B}_K^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{B}_K} \begin{bmatrix} c_2 - a_2 & -c_1 + a_1 \\ -b_2 + a_2 & b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix},\tag{97}$$

kde $\det \mathbb{B}_K$ vypočítáme vzorcem

$$\det \mathbb{B}_K = (b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1).\tag{98}$$

Transformace bázových funkcí a jejich derivací Zavedené bázové funkce $\hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{\mathbf{x}})$ transformujeme z referenčního elementu \hat{K} na element $K \in \tau_h$ jako funkce $\varphi_A(\mathbf{x}), \varphi_B(\mathbf{x}), \varphi_C(\mathbf{x})$ předpisem

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_j(F_K^{-1}(\mathbf{x})),\tag{99}$$

tedy

$$\varphi(x_1, x_2) = \hat{\varphi}(\hat{x}_1, \hat{x}_2),\tag{100}$$

kde $\mathbf{x} = F_K(\hat{\mathbf{x}})$. Při výpočtu derivací funkce φ užijeme pravidlo o derivování složené funkce, viz vztah (13). Nejprve potřebujeme derivace vnitřních funkcí. Parciálně derivujeme vztah (96) podle souřadnice x_1 , tedy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \mathbb{B}_K^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (101)$$

a parciálním derivováním podle x_2 dostáváme

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbb{B}_K^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (102)$$

Pokud napíšeme tyto dva vztahy do jedné maticové rovnice pak vidíme, že platí

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbb{B}_K^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Užijeme-li pravidla pro derivaci složené funkce, viz (13), a parciálně derivujeme libovolnou bázovou funkci $\varphi(x_1, x_2)$, viz předpis (100) podle x_1 a x_2 pak platí

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (104)$$

kde $\mathbf{x} = F_K(\hat{\mathbf{x}})$. Užitím vztahu (103) dostáváme

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_1} b^{11} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_2} b^{21} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_1} b^{12} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_2} b^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{11} & b^{21} \\ b^{12} & b^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} = (\mathbb{B}_K^{-1})^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}, \quad (105)$$

nebo také ve tvaru

$$(\nabla \varphi(\mathbf{x}))^T = (\mathbb{B}_K^{-1})^T (\hat{\nabla} \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}))^T. \quad (106)$$

Transponujeme-li rovnici (107), pak dostáváme

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \hat{\nabla} \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbb{B}_K^{-1} \quad (107)$$

Numerická kvadratura Integraci libovolné funkce $g(\mathbf{x})$ definované na elementu $K \in \tau_h$ užitím věty o substituci (20) transformujeme na referenční element \hat{K} , tedy

$$\int_K g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}} g(F_K(\hat{\mathbf{x}})) |\det \mathbb{B}_K| d\hat{\mathbf{x}}. \quad (108)$$

Na referenčním elementu \hat{K} funkci $\hat{g}(\hat{\mathbf{x}})$ přibližně integrujeme pomocí obecné numerické kvadratury tj.

$$\int_{\hat{K}} \hat{g}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \approx |\hat{K}| \sum_{m=1}^M \omega_m \hat{g}(\boldsymbol{\xi}_m), \quad (109)$$

kde $\boldsymbol{\xi}_m$ jsou uzly a ω_m jsou váhy hodnot numerické kvadratury, viz [14]. Všimněme si, že speciálně pro funkci $g(\mathbf{x}) = 1$ dostáváme užitím rovnosti (108) vztah

$$\int_K d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K| d\hat{\mathbf{x}} = |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} d\hat{\mathbf{x}}, \quad (110)$$

kde $|\det \mathbb{B}_K|$ je konstantní na trojúhelníkovém elementu $K \in \tau_h$. Plošný integrál z jedné je roven obsahu plochy, tedy platí

$$|\det \mathbb{B}_K| = \frac{|K|}{|\hat{K}|}. \quad (111)$$

V praktických výpočtech je numerická kvadratura volena tak, aby byla přesná pro polynomy stupně 2.

4.1.4 Výpočet matice tuhosti \mathbb{A}

Integrace na elementech triangulace Jedním z požadavků přípustné triangulace τ_h je $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K$. Pro libovolnou integrovatelnou funkci $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tedy platí

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (112)$$

Výpočet prvků matice tuhosti a_{ij} lze zapsat jako

$$a_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i) \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i) \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in \tau_h} a_{ij}^K, \quad (113)$$

kde $a_{ij}^K = \int_K (\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i) \, d\mathbf{x}$ nazýváme lokálním příspěvkem na elementu K do matice \mathbb{A} .

Integrace na referenčním elementu Lokální příspěvky a_{ij}^K na jednotlivých elementech $K \in \tau_h$ vypočítáme užitím inverzní transformace F_K^{-1} tj. vztahu (107) jako

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \int_K \nabla \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} (\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}) \mathbb{B}_K^{-1}) \cdot (\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j(\hat{\mathbf{x}}) \mathbb{B}_K^{-1}) \, d\hat{\mathbf{x}} = \\ &= |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} \left(\left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2} \right) \mathbb{B}_K^{-1} \right) \cdot \left(\left(\frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_1}, \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_2} \right) \mathbb{B}_K^{-1} \right) \, d\hat{\mathbf{x}} = \\ &= |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} \left(\left(b^{11} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1} + b^{21} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2}, \left(b^{12} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1} + b^{22} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2} \right) \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\left(b^{11} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_1} + b^{21} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_2} \right), \left(b^{12} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_1} + b^{22} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_2} \right) \right) \right) \, d\hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (114)$$

dále užitím numerické kvadratury (108), (109), (111) a upravením dostáváme

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &\approx |K| \sum_{m=1}^M \omega_m \left[\left(b^{11} \frac{\hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial \hat{x}_1} + b^{21} \frac{\partial \hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial \hat{x}_2} \right) \left(b^{11} \frac{\hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial \hat{x}_1} + b^{21} \frac{\partial \hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial \hat{x}_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(b^{12} \frac{\hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial \hat{x}_1} + b^{22} \frac{\partial \hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial \hat{x}_2} \right) \left(b^{12} \frac{\hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial \hat{x}_1} + b^{21} \frac{\partial \hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\xi}_m)}{\partial \hat{x}_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (115)$$

Výpočet prvků a_{ij} matice \mathbb{A} se provádí postupně po jednotlivých elementech a výpočet a_{ij}^K dle (115). Takto sestavená matice \mathbb{A} je tzv. *řídká*. Pro řídké matice se vzhledem k velké paměťové úspoře vyplatí ukládat jednotlivé prvky do tří polí, kde jsou uloženy řádkové i a sloupcové j indexy a hodnota prvku *hodnota*. Příkladem je uložení matice \mathbb{A}_1 , viz (116), uvedené v tabulce 1. Toto uložení, které například používá program Matlab, se nazývá *triplet* (Pozn.: Existují i jiné alternativy uložení řídkých matic, například *Row Compressed Format* (RCF)).

$$\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (116)$$

Tabulka 1: Uložení řídké matice \mathbb{A}_1 do tzv. *tripletu*

i	j	hodnota
1	1	1
5	1	2
2	2	1
4	2	1
3	3	1
4	4	1
5	1	1
5	5	1

4.1.5 Výpočet vektoru pravé strany

Integrace na elementech triangulace Obdobně jako v případě prvků matice \mathbb{A} lze psát

$$b_i = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in \tau_h} b_i^K, \quad (117)$$

kde symbolem $b_i^K = \int_K f(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ značíme lokální příspěvky na elementu K do vektoru pravé strany \vec{b} .

Integrace na referenčním elementu Transformujeme-li integrál (117) na referenční element \hat{K} , pak dostáváme vztah

$$b_i^K = \int_K f(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} f(F_K(\mathbf{x})) \varphi_i(\hat{\mathbf{x}}) \, d\mathbf{x} \quad (118)$$

Pro výpočet tohoto integrálu použijeme numerickou kvadraturu, tedy

$$b_i^K \approx |K| \sum_{m=1}^M \omega_m f(F_K(\boldsymbol{\xi}_m)) \hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\xi}_m). \quad (119)$$

4.1.6 Zahnutí okrajových podmínek úlohy

Sestavíme-li matici \mathbb{A} a vektor pravé strany \vec{b} , získáváme soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$, jejíž dimenze je $N_{points} - N_{\Gamma_1} - N_{\Gamma_2}$, a lze ukázat, že tato matice \mathbb{A} není regulární. Okrajové podmínky úlohy (57a) a (57b) zohledníme tak, že do matice tuhosti \mathbb{A} vložíme

$$a_{jj} = 1, \quad (120)$$

pro taková j , která odpovídají vrcholům na hranici $\partial\Omega$, kde jsou předepsány nulové okrajové podmínky. Toto realizujeme průchodem pole *marker_border_line*, kde nalezneme indexy $j = \{1, \dots, N_{points}\}$, pro které je v tomto poli uložena hodnota 1. Tyto indexy použijeme pro zápis hodnot do matice \mathbb{A} . Zohledněním okrajových podmínek získáme regulární matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{N_{points} \times N_{points}}$, tedy soustava $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$ má právě jedno řešení.

4.1.7 Numerické řešení soustavy lineárních rovnic

Soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$, kde $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{N_{points} \times N_{points}}$, můžeme řešit buď přímými (finitními) nebo iteračními (numerickými) metodami.

Přímé řešení soustavy Principem přímých metod řešení je provedení konečného počtu elementárních operací vedoucích k přesnému řešení soustavy. Příkladem takových metod jsou Gaussova eliminační metoda, popřípadě metoda druhých odmocnin a další, viz [13]. Často užívanou metodou je jmenovaná Gaussova eliminační metoda. Praktická implementace této metody vyžaduje efektivní využití paměti při ukládání matice \mathbb{A} do počítače. Uvažujeme-li totiž triangulaci τ_h o 10^3 vrcholech, pak je ukládaná matice \mathbb{A} typu $10^3 \times 10^3$ a pro její úplné uložení do paměti potřebujeme pole o 10^6 prvcích. Pro zmírnění paměťových nároků na počítač, využíváme vlastností matice \mathbb{A} , která je řídkou, symetrickou a pásovou maticí. Díky těmto vlastnostem je po modifikaci možné ukládat pouze $10^3 \times M$ prvků, kde M je šířka pásu matice \mathbb{A} . Nezanedbatelným problémem finitních metod je zaokrouhlování ukládaných hodnot. Zaokrouhlením vzniká chyba, která se s každou další operací, kde je již zaokrouhlená hodnota použita, zvětšuje, viz [17].

Numerické řešení soustavy V praktické implementaci, o které se zmíníme dále v této práci, jsou pro řešení soustav lineárních rovnic užity tzv. *iterační metody*, viz [2], [15], [13]. Z tohoto důvodu se těmto metodám budeme věnovat podrobněji. Mějme soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$, kde matice \mathbb{A} je čtvercová regulární matice typu $n \times n$, tedy soustava má právě jedno řešení $\vec{\alpha}^{(*)} \in \mathbb{R}^n$. Princip iteračních metod spočívá v konstrukci posloupnosti vektorů $\vec{\alpha}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ takových, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{\alpha}^{(k)} = \vec{\alpha}^{(*)}. \quad (121)$$

Při výpočtu jednotlivých členů posloupnosti postupujeme od počátečního přiblížení $\vec{\alpha}^{(0)}$, jehož vhodná volba urychluje proces konvergence k přesnému řešení $\vec{\alpha}^{(*)}$. Posloupnost je předepsána rekurentně, tedy lze ji zapsat takto

$$\vec{\alpha}^{(k)} = F_k \left(\vec{\alpha}^{(k-1)}, \vec{\alpha}^{(k-2)}, \dots, \vec{\alpha}^{(1)}, \vec{\alpha}^{(0)} \right), \quad (122)$$

avšak obvykle se používá pouze

$$\vec{\alpha}^{(k)} = F_k \left(\vec{\alpha}^{(k-1)} \right), \quad (123)$$

kde $F_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. V tomto případě mluvíme o tzv. *stacionární jedнокrokové metodě*, viz [2]. Je-li soustava lineárních rovnic řešena iterační metodou, pak vlivem konečného počtu provedených iterací, viz (122), nelze na rozdíl od přímých metod získat přesné řešení. Provedeme-li k iterací, pak dosaženým přibližným řešením je vektor $\vec{\alpha}^{(k)}$. Chyba iterační metody pak je

$$\left\| \vec{\alpha}^{(k)} - \vec{\alpha}^{(*)} \right\| \geq 0, \quad (124)$$

kde lze užít libovolné maticové normy, viz [15].

Základní iterační metodou je tzv. *prostá iterační metoda* (PIM). Tato metoda se používá pro řešení soustav rozepsaných ve tvaru $\vec{\alpha} = \mathbb{U} \vec{\alpha} + \vec{V}$. Tento tvar získáme například rozepsáním soustavy $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$ ve tvaru

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \mu \left(\vec{b} - \mathbb{A} \vec{\alpha} \right), \quad (125)$$

kde $\mu \neq 0$ je vhodná reálná konstanta. Vidíme tedy, že soustavu jsme přepsali ve tvaru

$$\vec{\alpha} = \underbrace{(\mathbb{E} - \mu \mathbb{A})}_{\mathbb{U}} \vec{\alpha} + \underbrace{\mu \vec{b}}_{\vec{V}}. \quad (126)$$

Pokud nyní použijeme iteračního procesu tak, že do pravé strany dosadíme počáteční přiblížení $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^{(0)}$ a vypočítáme nové přiblížení $\vec{\alpha}^{(1)}$, pak se při opakování a splnění podmínek konvergence budeme limitně blížit k přesnému řešení $\vec{\alpha}^{(*)}$. Předpis prosté iterační metody tedy píšeme ve tvaru

$$\vec{\alpha}^{(k+1)} = \mathbb{U} \vec{\alpha}^{(k)} + \vec{V}. \quad (127)$$

Konvergence PIM je zaručena, pokud jsou splněny předpoklady Věty 4, a odhad chyby v k -té iteraci lze provést podle Věty 6 za předpokladu, že platí $\|\mathbb{U}\| \leq 1$ pro nějakou normu matice. Prostá iterační metoda se užívá k důkazu konvergence dalších iteračních metod jako je například Jacobiho nebo Gaussova-Seidelova iterační metoda. Gaussova—Seidelova iterační metoda se používá pro řešení soustav lineárních rovnic $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$, kde matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Předpis této metody odvodíme vypíšeme-li i -tý řádek řešené soustavy

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \alpha_j + a_{ii} \alpha_i + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \alpha_j = b_i \quad (128)$$

a vyjádříme-li neznámou α_i s tím předpokladem, že žádný diagonální prvek matice \mathbb{A} není nulový tj. $a_{ii} \neq 0, \forall i = \{1, \dots, N_{points}\}$, pak dostáváme

$$\alpha_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \alpha_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \alpha_j \right], \quad (129)$$

V tomto tvaru pak budeme počítat další přiblížení $\alpha_i^{(k+1)}$ s tím, že pro všechny prvky α_j s indexem $j < i$ použijeme jejich $(k+1)$ -ní iteraci a pro ostatní prvky použijeme jejich k -tou iteraci, tedy

$$\alpha_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \alpha_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \alpha_j^{(k)} \right]. \quad (130)$$

Tímto vztahem je dán předpis pro Gaussovu—Seidelovu iterační metodu, která se také nazývá *metoda postupných oprav*, viz [2]. Pro odvození maticového tvaru uvažujme, že matice \mathbb{U} je složena ze tří submatic, dolní trojúhelníkové matice \mathbb{L} , diagonální matice \mathbb{D} a horní trojúhelníkové matice \mathbb{P} , tedy $\mathbb{A} = (\mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P})$. Dosadíme-li tento zápis do soustavy lineárních rovnic $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$ a tuto soustavu vhodně upravíme, pak dostáváme

$$\begin{aligned} (\mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}) \vec{\alpha} &= \vec{b}, \\ (\mathbb{L} + \mathbb{D}) \vec{\alpha} &= \vec{b} - \mathbb{P} \vec{\alpha}. \end{aligned} \quad (131)$$

Vidíme, že pokud diagonála \mathbb{D} neobsahuje nulové prvky, platí

$$\det(\mathbb{L} + \mathbb{D}) \neq 0, \quad (132)$$

tedy matice $(\mathbb{L} + \mathbb{D})$ je regulární a tudíž k ní existuje inverzní matice $(\mathbb{L} + \mathbb{D})^{-1}$. Touto maticí nyní zleva přenásobíme poslední tvar rovnice (131), tedy

$$\vec{\alpha} = \left[-(\mathbb{L} + \mathbb{D})^{-1} \mathbb{P} \right] \vec{\alpha} + (\mathbb{L} + \mathbb{D})^{-1} \vec{b}. \quad (133)$$

Tuto rovnici užijeme pro výpočet $\vec{\alpha}^{(k+1)}$ a přepíšeme ji jako

$$\vec{\alpha}^{(k+1)} = \underbrace{\left[-(\mathbb{L} + \mathbb{D})^{-1} \mathbb{P} \right]}_{\mathbb{U}_{GS}} \vec{\alpha}^{(k)} + \underbrace{(\mathbb{L} + \mathbb{D})^{-1} \vec{b}}_{\vec{V}_{GS}} \quad (134)$$

Jestliže uijeme uvedené substitute, viz rovnice (134), pak vidíme

$$\vec{\alpha}^{(k+1)} = \mathbb{U}_{GS} \vec{\alpha}^{(k)} + \vec{V}_{GS}. \quad (135)$$

Gaussovu—Seidelovu iterační metodu lze tedy zapsat ve tvaru PIM. Konvergence této metody je zajištěna splněním stejných kriterií jako v případě PIM, viz Věta 4. Vzhledem k obtížnosti určení vlastních čísel matice \mathbb{U}_{GS} , viz [13], se však pro ověření konvergence používají kriteria podle Věty 7, tedy zjišťujeme, zda je matice soustavy buď ODD, viz Definice 1, nebo SPD, viz Definice 2 a 3. Obdobně lze použít i vztahů pro odhad chyby v k -té iteraci, viz Věta 6.

Poslední iterační metodou, kterou zde uvedeme, je superrelaxační metoda (SOR). Složkový tvar této metody odvodíme z předpisu (130), kde místo hodnoty jedna v čitateli zavedeme parametr $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$, tj.

$$\alpha_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \alpha_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \alpha_j^{(k)} \right]. \quad (136)$$

Konvergenci této metody zjišťujeme pomocí maticového tvaru. Tento tvar opět vychází ze soustavy lineárních rovnic

$$\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}, \quad (137)$$

kde matice \mathbb{A} je regulární, tedy existuje pouze jediné řešení této soustavy. Tuto soustavu vynásobíme parametrem $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$ a rozložíme matici \mathbb{A} jako $\mathbb{A} = (\mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P})$. Dosazením do vztahu 137 dostáváme

$$\begin{aligned} \omega (\mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}) \vec{\alpha} &= \omega \vec{b}, \\ (\omega \mathbb{L} + \omega \mathbb{D} + \omega \mathbb{P}) \vec{\alpha} &= \omega \vec{b}. \end{aligned} \quad (138)$$

Pokud v závorce na levé straně přičteme a odečteme matici \mathbb{D} a upravíme, tedy

$$\begin{aligned} (\mathbb{D} - \mathbb{D} + \omega \mathbb{L} + \omega \mathbb{D} + \omega \mathbb{P}) \vec{\alpha} &= \omega \vec{b}, \\ (\mathbb{D} + \omega \mathbb{L}) \vec{\alpha} &= [(1 - \omega) \mathbb{D} - \omega \mathbb{P}] \vec{\alpha} + \omega \vec{b}, \end{aligned} \quad (139)$$

pak vidíme, že matice $\mathbb{D} + \omega \mathbb{L}$ je regulární a tudíž existuje její inverze $(\mathbb{D} + \omega \mathbb{L})^{-1}$. Touto maticí dále vynásobíme vztah (139) zleva a dostáváme

$$\vec{\alpha} = \{(\mathbb{D} + \omega \mathbb{L})^{-1} [(1 - \omega) \mathbb{D} - \omega \mathbb{P}]\} \vec{\alpha} + (\mathbb{D} + \omega \mathbb{L})^{-1} \omega \vec{b}. \quad (140)$$

Pokud tímto vztahem budeme počítat na levé straně $\vec{\alpha}^{(k+1)}$ z $\vec{\alpha}^{(k)}$ na pravé straně, pak dostáváme předpis superrelaxační metody (SOR) ve tvaru

$$\vec{\alpha}^{(k+1)} = \{(\mathbb{D} + \omega \mathbb{L})^{-1} [(1 - \omega) \mathbb{D} - \omega \mathbb{P}]\} \vec{\alpha}^{(k)} + (\mathbb{D} + \omega \mathbb{L})^{-1} \omega \vec{b}. \quad (141)$$

Tento tvar obdobně jako u Gaussovy—Seidelovy iterační metody odpovídá PIM, tedy pro zjišťování konvergence metody lze užít Vět 4 a 6. Lze také ukázat, že pro $\omega \in (0, 2)$ a pro matice \mathbb{A}, \mathbb{D} , které jsou SPD, tato metoda konverguje k přesnému řešení soustavy, viz [13].

5 Programová realizace

V rámci této práce jsme vytvořili program *mesh_postprocessing.c* v jazyce C, který umí problém vedení tepla numericky vyřešit na triangulaci τ_h omezené oblasti Ω s polygonální hranicí $\partial\Omega$, na které je předepsána nulová okrajová podmínka. O dalších funkcích toho programu se zmíníme dále v této práci.

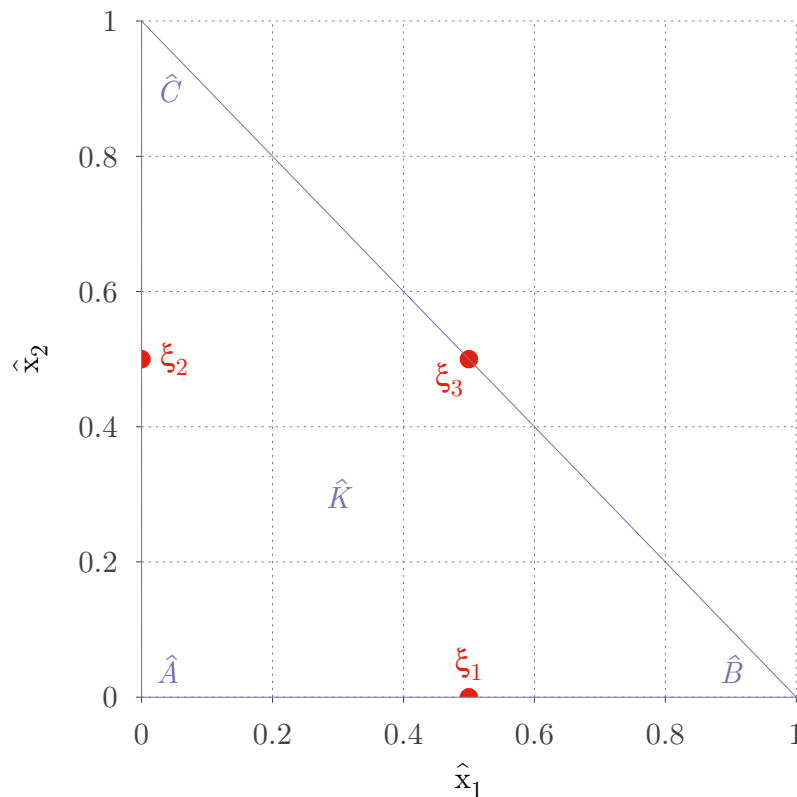
5.1 Algoritmizace problému

Algoritmus řešení problému vedení tepla programem *mesh_postprocessing.c* se skládá z jednotlivých kroků, které nyní popíšeme.

5.1.1 Příprava

Referenční element \hat{K} V našem programu užíváme referenční element \hat{K} dle obrázku 6.

Numerická kvadratura V programu je implementována numerická kvadratura s uzly $\xi_m(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, $m \in \{1, 2, 3\}$, které jsou umístěny ve středech stran referenčního elementu \hat{K} tj. $\xi_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0.5, 0)$, $\xi_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 0.5)$, $\xi_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0.5, 0.5)$, viz obrázek 7. Váhy ω_m jsou v jednotlivých uzlech stejné $\omega_m = \frac{1}{6}$ (Pozn.: Hodnota $\omega_m = \frac{1}{6}$ již zohledňuje velikost plochy referenčního elementu, která je $S_{\hat{K}} = \frac{1}{2}$.)



Obr. 7: Uzly numerické kvadratury $\xi_m(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ na referenčním elementu \hat{K}

Volba bázových funkcí na referenčním elementu \hat{K} Na referenčním elementu volíme bázové funkce $\varphi_{\hat{A}}(\hat{\mathbf{x}})$, $\varphi_{\hat{B}}(\hat{\mathbf{x}})$, $\varphi_{\hat{C}}(\hat{\mathbf{x}})$ dle předpisu (91). Dále užíváme také parciální derivace těchto bázových funkcí dle souřadnic \hat{x}_1, \hat{x}_2 , tj.

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{\mathbf{x}}) &= 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2, & \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{A}}}{\partial \hat{x}_1} &= -1, & \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{A}}}{\partial \hat{x}_2} &= -1, \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{x}_1, & \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{B}}}{\partial \hat{x}_1} &= 1, & \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{B}}}{\partial \hat{x}_2} &= 0, \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{x}_2, & \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{C}}}{\partial \hat{x}_1} &= 0, & \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{C}}}{\partial \hat{x}_2} &= 1.\end{aligned}\tag{142}$$

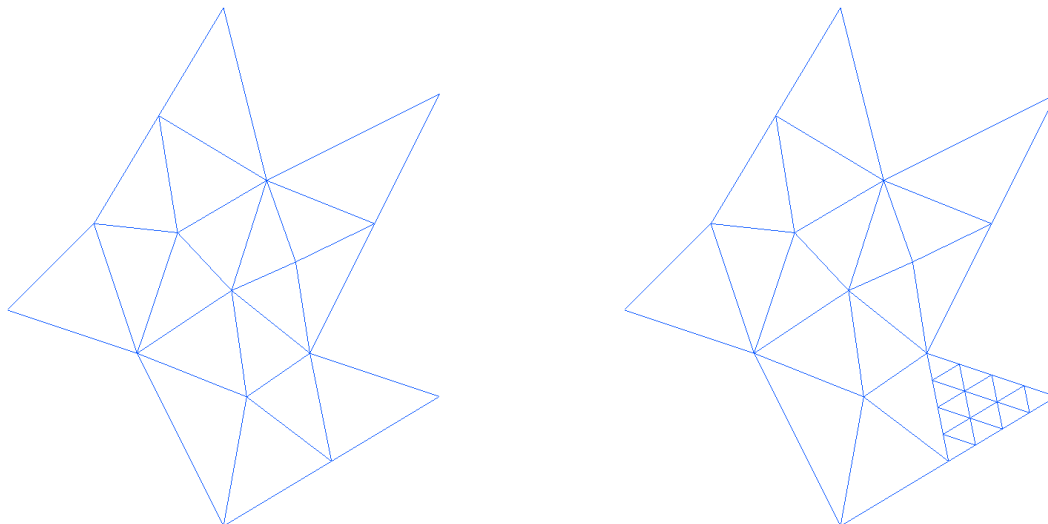
Pro užití numerické kvadratury potřebujeme znát hodnoty bázových funkcí $\hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, $\hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, $\hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ a jejich parciálních derivací v uzlech kvadratury ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Tyto hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.

Tabulka 2: Hodnoty bázových funkcí a jejich derivací v uzlech kvadratury

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
$\hat{\varphi}_{\hat{A}}$	0.5	0.5	0
$\frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{A}}}{\partial x_1}$	-1	-1	-1
$\frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{A}}}{\partial x_2}$	-1	-1	-1
$\hat{\varphi}_{\hat{B}}$	0.5	0	0.5
$\frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{B}}}{\partial x_1}$	1	1	1
$\frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{B}}}{\partial x_2}$	0	0	0
$\hat{\varphi}_{\hat{C}}$	0	0.5	0.5
$\frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{C}}}{\partial x_1}$	0	0	0
$\frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{C}}}{\partial x_2}$	1	1	1

5.1.2 Implementace triangulace τ_h oblasti Ω

Triangulaci τ_h omezené oblasti Ω s polygonální hranicí realizujeme užitím tzv. *sítě*. Tato síť představuje rozmístění jednotlivých vrcholů triangulace τ_h oblasti Ω . Pro tvorbu takové sítě jsme v naší práci použili opensourceový program Gmsh. Tento program mimo jiné umí pro zadané hranice oblasti Ω vygenerovat síť, kterou lze uložit do formátu *.msh*. Síť v tomto formátu užíváme pro načtení hodnot programem *mesh_postprocessing.c*, který provede na této síti řešení problému vedení tepla. Program Gmsh obsahuje mnoho dalších utilit, viz [18]. Rozmístění vrcholů sítě je třeba provést vhodně s ohledem na povahu řešeného problému. Například u problémů, kde očekáváme výskyt oblasti s velkým gradientem hledané veličiny, je vhodné do takové oblasti umístit dostatečné množství abychom byli schopni zachytit danou změnu pomocí po částech lineárních, kvadratických, atp. funkcí. Konkrétním příkladem je řešení proudění mezi lopatkami turbíny, kde očekáváme výskyt tlakové rázové vlny. Vzhledem k tomu, že neočekáváme tyto oblasti s vysokým gradientem hledané veličiny v celé oblasti Ω , pak užíváme tzv. *lokálních zjemnění*. Tato lokální zjemnění jsme implementovali do programu *mesh_postprocessing.c*. Ukázka lokálního zjemnění sítě, viz obrázek 8a založeného na výběru elementů $K \in \tau_h$, které mají být zjemněny, a na počtu zjemnění $P \in \mathbb{N}$, je uveden na obrázku 8. Provedením takového lokálního zjemnění sítě se však sestavení matice \mathbb{A} komplikuje, neboť se v této síti vyskytují tzv. *visící uzly* (Pozn.: V angličtině hanging nodes). V této chvíli není výpočet s visícími uzly plně odladěn, v této práci se tedy omezíme na výpočty se sítěmi, kde se tyto uzly nevyskytují. Problematika visících uzlů je více rozvinuta například v [4].



(a) Síť H_0 na oblasti Ω (b) Zjemněná síť H_0 na oblasti Ω pro $P = 2$

Obr. 8: Zjemněná síť H_0 na oblasti Ω

5.1.3 Formát *.msh*

Soubor ve formátu *.msh* obsahuje strukturovaně uložená data sítě. Struktura uložení dat je následující. Nejprve je uvedena sekce **\$MeshFormat**, která udává informace o souboru. (*Pozn.:* Konkrétně udává verzi, typ (ASCII) souboru a datový typ ukládaných hodnot (double).) Dále jsou uvedeny jednotlivé vrcholy s jejich souřadnicemi v sekci **\$Nodes**, kde první hodnota udává celkový počet vrcholů, a v našem případě je jako poslední uvedena sekce **\$Elements**, kde je opět nejprve počet všech elementů, pak jsou uloženy indexy vrcholů, ze kterých se elementy skládají, a další data. Těchto sekcí může být i více, viz [18]. Názorný příklad struktury uložení datového souboru *.msh* je naznačen v tabulce 3

Tabulka 3: Příklad struktury uložení dat ve formátu *.msh*

\$MeshFormat
2.2 0 8
\$EndMeshFormat
\$Nodes
N_{points}
.
.
.
\$EndNodes
\$Elements
$N_{elements}$
.
.
.
\$EndElements

5.1.4 Načtení dat ze souboru *.msh*

Načítání dat z *.msh* souboru probíhá ve dvou cyklech. Prvním cyklem zjistíme hodnoty počtu vrcholů N_{points} a počtu elementů $N_{elements}$ sítě. Tyto hodnoty použijeme pro dynamickou alokaci paměti. Po skončení prvního cyklu naalokujeme pole pro načtení souřadnic vrcholů $\mathbf{p}_i, i \in \{1, \dots, N_{points}\}$, viz tabulka 4. Pole *marker_border_line* sloužící k identifikaci vrcholů na hranici hodnotou jedna vyplňujeme až při průchodu sekcí \$Elements, neboť jsou zde uloženy hraniční strany, ze kterých toto pole tvoříme. Obdobně naalokujeme i pole pro načtení elementů, které budeme značit $E_i, i \in \{1, \dots, N_{elements}\}$, viz tabulka 5. (*Pozn.:* Ve skutečnosti je načítání elementů složitější, protože rozeznáváme různé druhy elementů, například hraniční strany, trojúhelníky, popřípadě čtyřúhelníky a další. Markery slouží k ukládání specifických vlastností elementů, tj. příslušnost elementu E_i do suboblasti sítě, atp.) Druhý cyklus pak slouží k načtení hodnot souřadnic

Tabulka 4: Alokovaná pole pro načtení souřadnic vrcholů \mathbf{p}_i

index \mathbf{p}_{i+1}	x	y	marker_border_line
0	0 / 1
\vdots	\vdots	\vdots	0 / 1
$(N_{points} - 1)$	0 / 1

Tabulka 5: Alokovaná pole pro načtení elementů sítě E_i

index	A	B	C	markery
0	index \mathbf{p}_A	index \mathbf{p}_B	index \mathbf{p}_C	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$N_{elements} - 1$

$\mathbf{p}_i, i \in \{1, \dots, N_{points}\}$ a elementů $E_i, i \in \{1, \dots, N_{elements}\}$ do naalokovaných polí v paměti.

5.1.5 Sestavení matice \mathbb{A} a vektoru pravé strany \vec{b}

Vytvoříme tzv. *Triplet* pro matici \mathbb{A} , kam budeme ukládat lokální příspěvky $a_{ij}^K, i, j \in \{1, 2, 3\}$ na elementu $K \in \tau_h$. Obdobně vytvoříme pole b o N_{points} prvcích, kam budeme ukládat lokální příspěvky $b_i^K, i \in \{1, 2, 3\}$ pro každý element $K \in \tau_h$. Kompletní matici \mathbb{A} a vektor pravých stran získáme pokud projdeme cyklus přes všechny elementy $K \in \tau_h$ a provedeme následující operace.

Transformace F_K^{-1} a F_K Implementace v programu vyplývá ze vztahu (95), tedy potřebujeme na elementu $K \in \tau_h$ s vrcholy $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ sestavit matici \mathbb{B}_K^{-1} , viz vztah (97). Tuto matici sestavíme z matice \mathbb{B}_K , viz vztah (93), a jejího determinantu $\det \mathbb{B}_K$ dle vztahu (98).

Lokální příspěvek a_{ij}^K Na elementu $K \in \tau_h$ vypočítáme lokální příspěvky $a_{ij}^K, i, j \in \{1, 2, 3\}$ užitím vztahu (115) a užitím připravené numerické kvadratury pro $M = 3$. Jednotlivé příspěvky pak ukládáme do připraveného *Tripletu*. Následkem toho, že jednotlivé

vrcholy \mathbf{p}_i přísluší více elementům, se v *Tripletu* matice \mathbb{A} objeví prvky, které mají stejné řádkové i a sloupcové j indexy. Tento problém vyřešíme setříděním *Tripletu* pomocí algoritmů pro rychlé třídění např. *quicksort*, a následným sečtením prvků se sobě si odpovídajícími si indexy. Takto vytvořená matice \mathbb{A} však není regulární, protože v ní nejsou zohledněny okrajové podmínky, které zohledníme provedením postupu v části 4.1.6.

Lokální příspěvek b_i^K Výpočet lokálních příspěvků $b_i^K, i \in \{1, 2, 3\}$ realizujeme užitím vztahu (119) s tím, že funkce $f(\mathbf{x})$ je dána zadáním řešeného problému.

5.1.6 Numerické řešení soustavy $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$

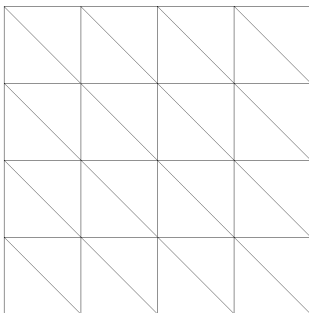
Sestavenou soustavu $\mathbb{A} \vec{\alpha} = \vec{b}$ numericky řešíme iteračními metodami. Jak jsme již dokázali, viz část 3.3, je matice \mathbb{A} symetrická a pozitivně definitní, tedy dle Věty 7 je zaručena konvergence Gaussovy—Seidelovy iterační metody a také pro parametr $\omega \in (0, 2)$ i superrelaxační metody, dle [13]. Tyto metody jsme implementovali do našeho programu *mesh_postprocessing.c*.

5.2 Výsledky

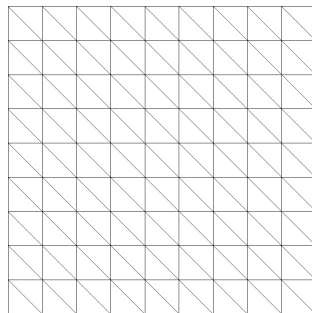
Problém vedení tepla formulovaný v části 3.1 řešíme na testovací omezené oblasti Ω s polygonální hranicí $\partial\Omega$, kde je předepsána nulová Dirichletova okrajová podmínka na hranici $\partial\Omega$, pro funkci $f(x_1, x_2) = 2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$.

5.2.1 Sítě pro výpočet

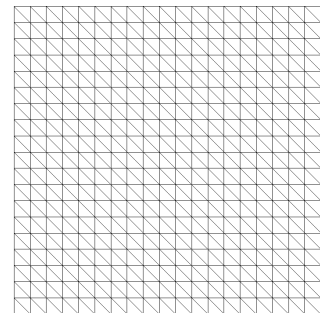
Pro numerické řešení tohoto problému jsou programem *Gmsh* vygenerovány tyto sítě: základní síť H_1 s h_1 , viz obrázek 9a, další dvě jemnější sítě H_2, H_3 s h_2 a h_3 , viz obrázky 9b, 9c, a pro ukázání výpočtu na dalších nestrukturovaných sítích jsou to síť H_4 , viz obrázek 10a, a síť H_5 , viz obrázek 10b.



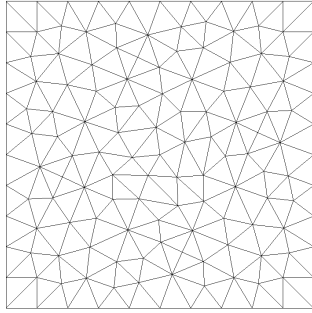
(a) Síť H_1 na oblasti Ω



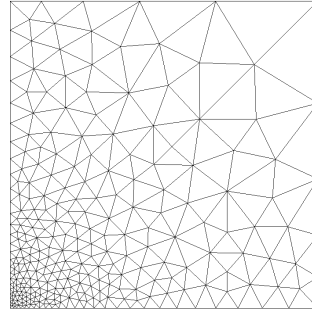
(b) Síť H_2 na oblasti Ω



(c) Síť H_3 na oblasti Ω



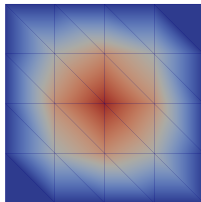
(a) Síť H_3 na oblasti Ω



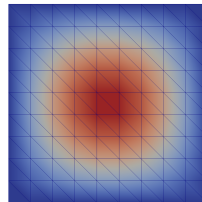
(b) Síť H_3 na oblasti Ω

5.2.2 Výpočet řešení

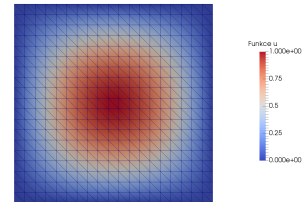
Následně užijeme sestaveného programu *mesh_postprocessing.c*, kde je implementován algoritmus popsáný v části 5.1. Výsledky výpočtu jsou programem exportovány do formátu *.vtk*, tedy je možné je vizualizovat programem *paraview*, viz [20]. Obdobně jsou také výsledky exportovány do datového souboru, který je možné vykreslit programem *gnuplot*, viz [19]. V obou případech se jedná o opensourceové programy. Vizualizované výsledky programem *paraview* jsou uvedeny na obrázcích 11a — 12b, kde jsou vypočítané výsledky zleva pro sítě H_1, H_2 a H_3 v jednotném měřítku (*Pozn.* Výpočet na sítích různé jemnosti jsme provedli pro ověření nezávislosti řešení na síti, které zde nebudeme více rozebírat, více viz [14]). Obdobně jsou uvedeny vizualizované výsledky programem *gnuplot* na obrázcích 13 — 17.



(a) Výsledky pro síť H_1

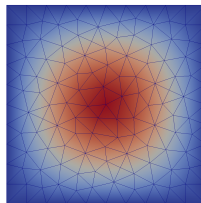


(b) Výsledky pro síť H_2

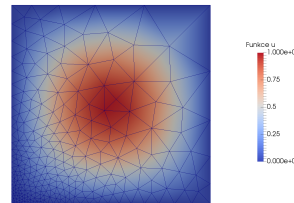


(c) Výsledky pro síť H_3

Obr. 11: Vizualizované výsledky programem *paraview*

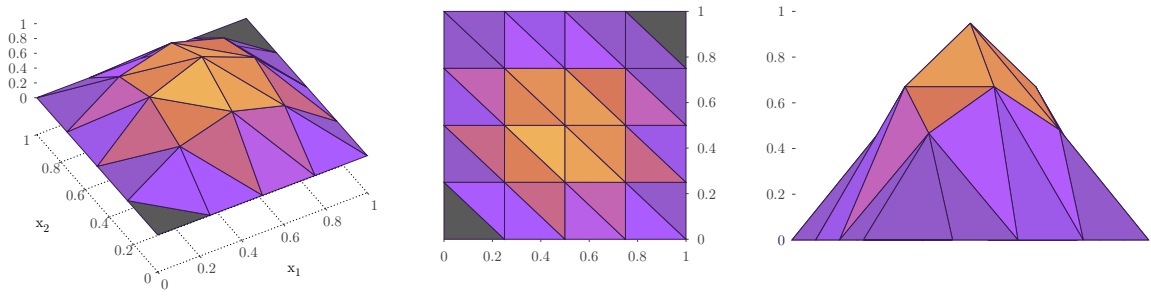


(a) Výsledky pro síť H_4

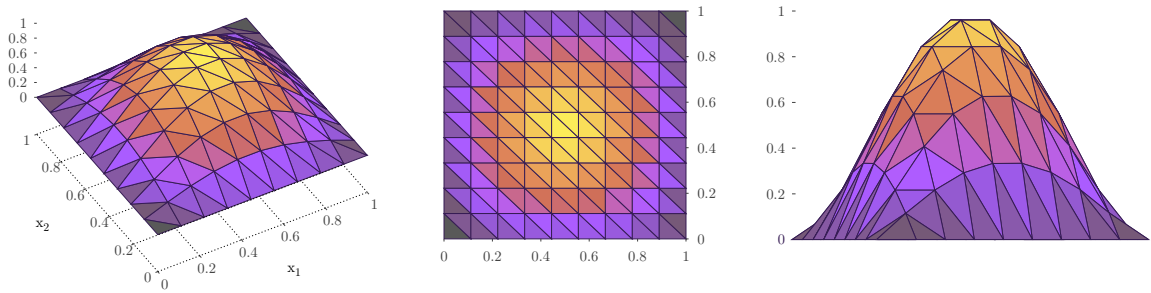


(b) Výsledky pro síť H_5

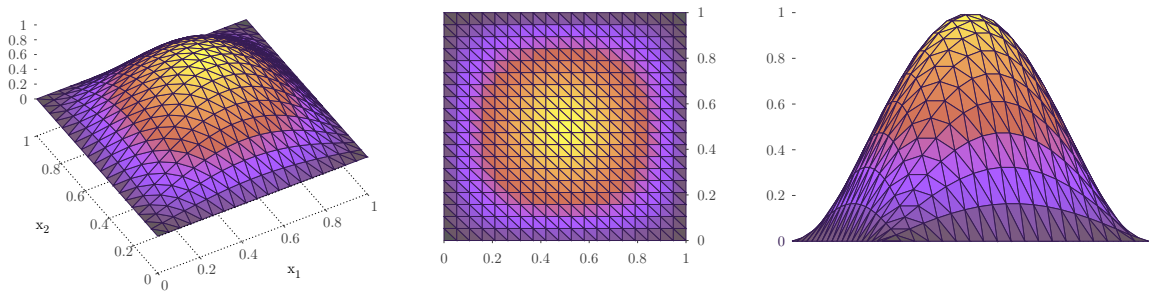
Obr. 12: Vizualizované výsledky programem *paraview*



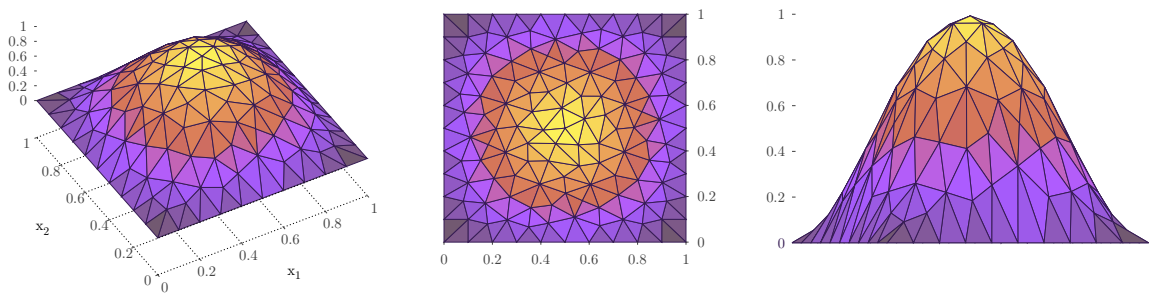
Obr. 13: Výsledky pro síť H_1



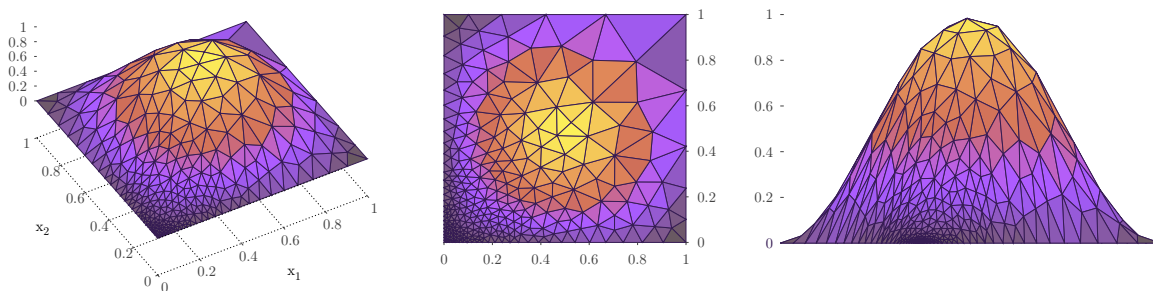
Obr. 14: Výsledky pro síť H_2



Obr. 15: Výsledky pro síť H_3



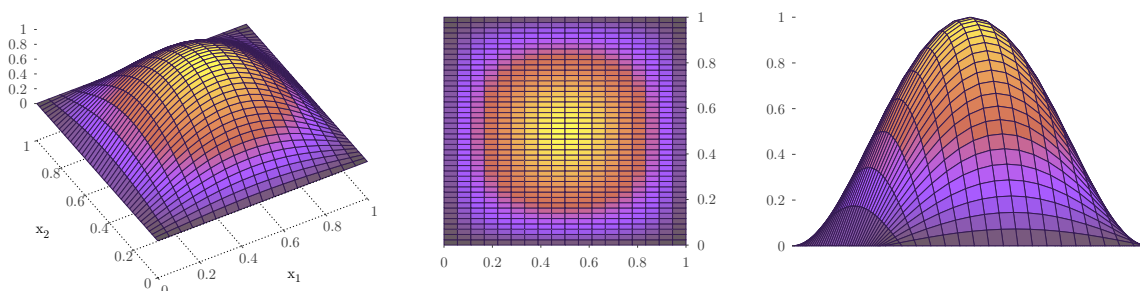
Obr. 16: Výsledky pro síť H_4



Obr. 17: Výsledky pro síť H_5

5.2.3 Ověření správnosti řešení

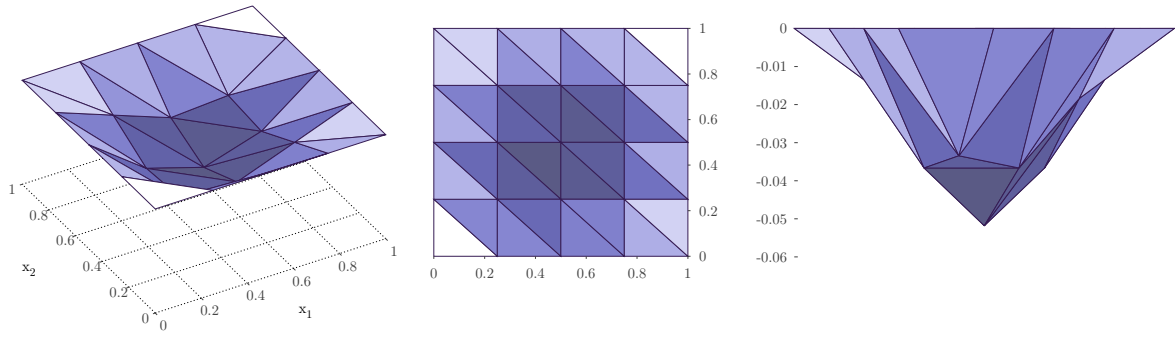
Na testovací oblasti Ω takového tvaru známe analytické řešení, tedy $u = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$, viz obrázek 18 (*Pozn.:* O správnosti tohoto řešení se můžeme přesvědčit užitím vztahu (11)). Užitím analytického řešení problému porovnáme výsledné hodnoty v jednotlivých bodech sítě \mathbf{p}_i , $i = \{1, \dots, N_{points}\}$, viz tabulka 6, kde jsou uvedeny největší odchylky numerického od analytického řešení pro sítě $H_1 - H_5$, a obrázky 19 – 23, kde je programem *gnuplot* vizualizována odchylka v podobě 3D grafu.



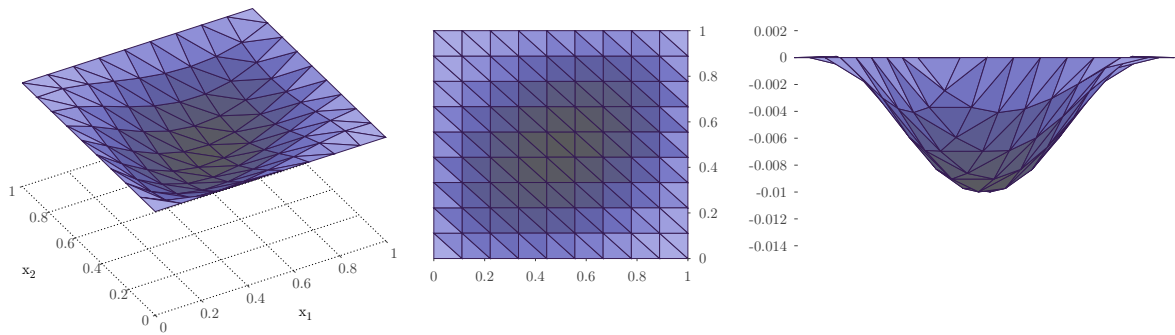
Obr. 18: Analytické řešení problému vedení tepla na oblasti Ω

Tabulka 6: Maximální odchylky numerického od analytického řešení pro sítě $H_1 - H_5$

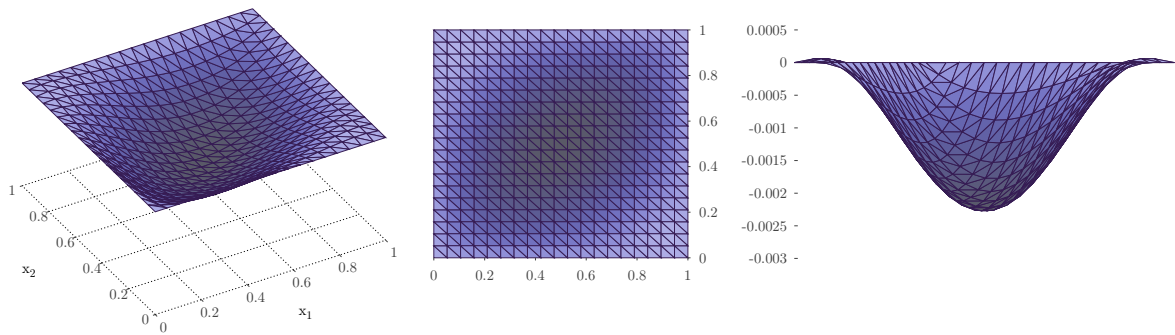
Síť	Maximální odchylka
H_1	0.0518129564472415
H_2	0.0099958072132438
H_3	0.0022704775132192
H_4	0.0071973986907374
H_5	0.0175977136648198



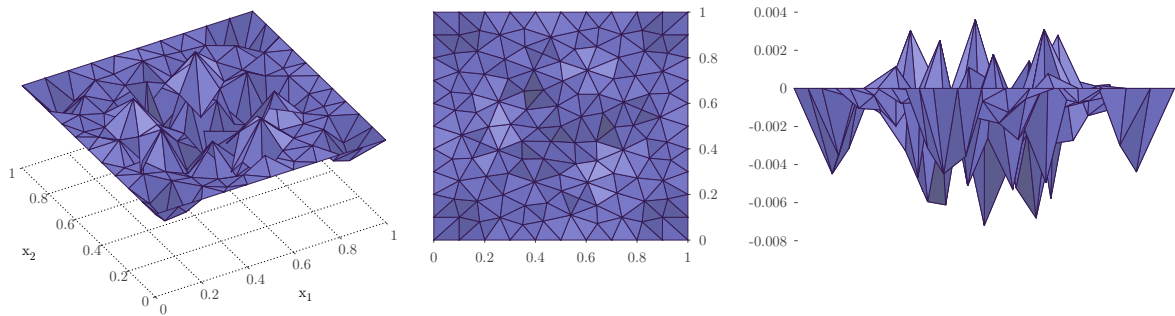
Obr. 19: Odchylka od analytického řešení pro síť H_1



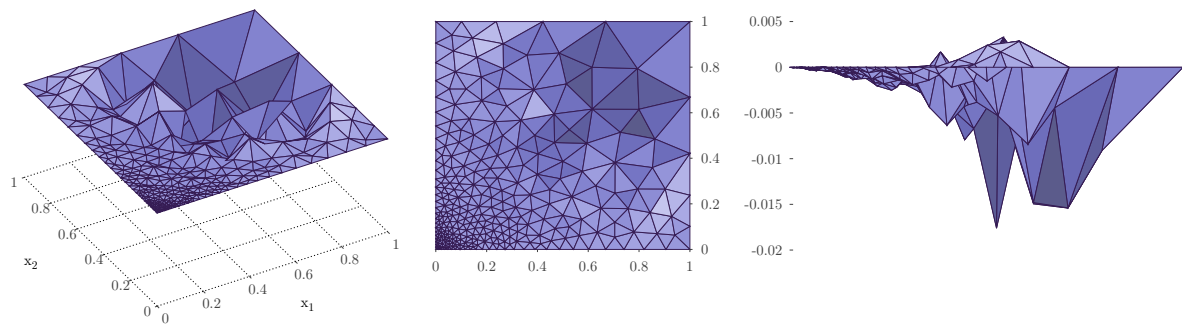
Obr. 20: Odchylka od analytického řešení pro síť H_2



Obr. 21: Odchylka od analytického řešení pro síť H_3



Obr. 22: Odchylka od analytického řešení pro síť H_4



Obr. 23: Odchylka od analytického řešení pro síť H_5

Z uvedených výsledků vidíme, že čím jemnější výpočetní síť, tím se výsledek více blíží k přesnému řešení. Také vidíme, že odchylka u nestrukturovaných výpočetních sítí má více fluktuující charakter. Lze tedy říci, že vytvořeným programem *mesh_postprocessing.c* jsme získali správné výsledky pro uvedené síť.

6 Závěr

Tato práce se zabývala řešením úlohy vedení tepla v tuhém tělese, respektive v jeho řezu (tj. dvourozměrný problém). Tato úloha byla popsána jako eliptická Poissonova rovnice doplněná o okrajové podmínky předepsané na hranici $\partial\Omega$ omezené polygonální oblasti Ω . Tyto okrajové podmínky byly pro jednoduchost voleny nulové. Úloha byla formulována ve slabém smyslu a diskretizována pomocí metodou konečných prvků. Pomocí této metody byla sestavena soustava lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{\alpha} = \vec{b}$. Tato soustava byla řešena iteračními metodami, konkrétně Gaussovou—Seidelovou iterační metodou a superrelaxační metodou. Celý proces řešení byl algoritmizován a vytvořen v programu *mesh_postprocessing.c* v jazyce C. Vzhledem k modulárnímu charakteru programu obsahuje tento program i více funkcí než jsme uvedli. Tyto funkce ještě nejsou plně odladěny. Příkladem je výpočet na několikanásobně selektivně zjemněné síti s visícími uzly. Výsledné řešení je programem exportováno do formátu *.vtk* pro program *paraview* a do datového souboru pro vizualizaci programem *gnuplot*. Výsledky byly vypočítány pro několik zjemněných sítí pro otestování správné funkce programu. Správnost výsledného řešení byla ověřena porovnáním s přesným analytickým řešením a také sledováním maximální odchylky od přesného řešení. Z výsledků je zřejmé, že pro jemnější výpočetní síť bylo získáno přesnější řešení. Mimo jiné tímto byla ověřena i správná funkčnost sestaveného programu.

Seznam použité literatury

- [1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] J. Benda, R. Černá, *Numerická Matematika, Doplnkové skriptum*, Nakladatelství ČVUT v Praze, 2008.
- [3] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] P. Di Stolfo, A. Schröder, N. Zander, S. Kollmannsberger, *An easy treatment of hanging nodes in hp-finite elements*, Dostupné z: http://www.cie.bgu.tum.de/publications/paper/2016_Di_Stolfo_FEAD.pdf v 10:00 16.7.2016.
- [5] H.-J. Bartsch, *Matematické vzorce*, Mladá fronta v Praze, 2002.
- [6] M. Křížek, L. Somer, M. Markl, O. Kowalski, P. Pudlák, I. Vrkoč, *Prvních deset Abelových cen za matematiku*, Dostupné z: <http://users.math.cas.cz/~krizek/pdf/a18.pdf>, v 10:00 16.7.2016.
- [7] J. Lukeš, J. Malý, *Míra a integrál*, Univerzita Karlova, Praha, 1993.
- [8] J. Malý, L. Pick, M. Zelený, *Plošný a křivkový integrál*, Dostupné z: <http://physics.ujep.cz/~jmalý/vp1.pdf>, v 10:00 16.7.2016.
- [9] J. Neustupa, *Matematika I*, Nakladatelství ČVUT v Praze, 2008.
- [10] J. Neustupa, *Matematika II*, Nakladatelství ČVUT v Praze, 2015.
- [11] K. Rektorys, *Variační metody*, Nakladatelství Academia v Praze, 1999.
- [12] M. Sazima, V. Kmoníček, J. Schneller a kol., *Teplota*, SNTL - Státní nakladatelství technické literatury v Praze, 1989.
- [13] K. Segeth, *Numerické metody algebry* Nakladatelství ČVUT v Praze, 2011.
- [14] P. Sváček, M. Feistauer, *Metoda konečných prvků*, Nakladatelství ČVUT v Praze, 2006.
- [15] P. Sváček, *Numerická matematika, poznámky k přednáškám* Dostupné z: http://marian.fsik.cvut.cz/~svacek/numericka_matematika/pdf/lecture_notes.pdf, v 10:00 16.7.2016.
- [16] J. Šesták, F. Rieger, *Přenos hybnosti, tepla a hmoty*, Nakladatelství ČVUT v Praze, 1998.
- [17] B. Teplý, *Metoda konečných prvků*, Editační středisko VUT Brno, 1981.
- [18] *Gmsh*, Dostupné z: <http://gmsh.info>, v 10:00 16.7.2016.
- [19] *Gnuplot*, Dostupné z: <http://www.gnuplot.info>, v 10:00 16.7.2016.
- [20] *Paraview*, Dostupné z: <http://www.paraview.org>, v 10:00 16.7.2016.