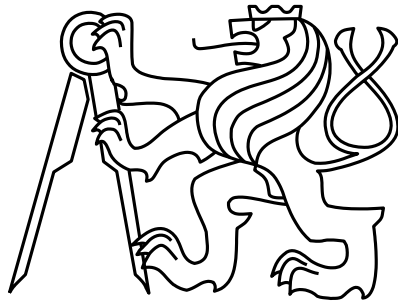


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

---

FAKULTA STROJNÍ  
ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY  
Odbor mechaniky a mechatroniky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Stabilizace setrvačnými účinky

Praha, 2016

Róbert Lexmann

# Anotačný list

Meno autora:	Róbert Lexmann
Názov bakalárskej práce:	Stabilizace setrvačnými účinky
Anglický názov:	Stabilizing by inertial effects
Akademický rok:	2015/2016
Študijný odbor:	Teoretický základ strojního inženýrství
Ústav, odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor mechaniky a mechatroniky
Vedúci bakalárskej práce:	Ing. Jan Zavřel, Ph.D
Bibliografické údaje:	Počet strán: 33 Počet obrázkov: 25 Počet tabuliek: 4 Počet príloh: 4
Kľúčové slová:	Stabilizácia, dynamika, mechatronika, inverzné kyvadlo, riadenie, Computed torque control, Cubli
Keywords:	Stabilization, dynamics, mechatronics, inverse pendulum, control, Computed torque control, Cubli

## Abstrakt:

Táto práca pojednáva o problematike vyvažovania a stabilizácie telies zotrvačnými účinkami. V úvode sú predstavené vybrané konštrukcie inverzných kyvadiel, predovšetkým projekt Cubli, možnosti ich využitia a taktiež je zdôvodnená potreba ich ďalšieho výskumu. Nasleduje prehľad niekoľkých metód riadenia mechanických sústav s viacerými stupňami voľnosti, vrátane metódy Computed torque control (CTC). V praktickej časti sa potom realizuje rovinný model projektu Cubli, zahrňujúci zostavenie pohybových rovníc popisujúcich dynamiku systému, návrh adekvátnej metódy riadenia, konštrukciu experimentálneho zariadenia a jeho uvedenie do činnosti s pomocou platformy Arduino.

## Abstract:

This thesis discusses the subject of balancing and stabilizing of bodies by inertial effects. In introduction, certain constructions of inverted pendulums are presented, especially the Cubli project, as well as their applications and the motivation for their future research. Then, a few examples of control methods for mechanical systems with multiple degrees of freedom are listed, including Computed torque control (CTC). In the practical part a planar model of the Cubli project is developed, consisting of deriving system dynamics equations, proposing an adequate control algorithm, construction of the experimental device and its operation using the Arduino platform.

# Prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne a použil iba podklady uvedené v priloženom zozname literatúry.

V Prahe dňa \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

podpis

# Pod'akovanie

Rád by som poďakoval v prvom rade vedúcemu tejto práce Ing. Zavřelovi za pevné vedenie a ochotný prístup. Ďakujem taktiež pánovi Boháčkovi, technikovi mechatronického laboratória, za veľkú pomoc a dobré postrehy pri stavbe experimentálneho zariadenia. V neposlednom rade ďakujem slečne Darabošovej za vytrvalú podporu pri písaní tejto práce.

# Obsah

Anotačný list	i
Prehlásenie	ii
PodĎakovanie	iii
Zoznam použitých symbolov	2
Zoznam obrázkov	3
Zoznam tabuliek	4
1. Úvod	5
2. Ciele práce	6
3. Problematika inverzných kyvadiel	7
3.1 Newtonove pohybové zákony	7
3.2 Fyzikálne kyvadlo – stabilná a labilná poloha	7
3.3 Regulačný obvod so spätnou väzbou – stabilizovanie nestabilnej sústavy	10
3.4 Realizácia inverzného kyvadla	10
3.4.1 Konštrukčné prevedenie	10
3.5 Metódy riadenia	12
3.5.1 PID regulátor	13
3.5.2 Computed torques control	13
3.6 Projekt Cubli	15
4. Realizácia experimentu – replika Cubli	17
4.1 Zostavenie rovníc dynamiky systému	17
4.1.1 Metóda uvoľňovania	18
4.1.2 Lagrangeove rovnice II. druhu	19
4.1.3 Matematický popis pohonu	21
4.2 Simulácia zariadenia v prostredí Simulink	22
4.2.1 Odhad parametrov na základe CAD modelu	22
4.2.2 Testovacia simulácia modelu	23
4.2.3 Simulácia s použitím riadenia	24
4.3 Voľba komponentov	27
4.4 Výroba a stavba zariadenia	27
4.5 Experiment	30
5. Záver	31
6. Použitá literatúra	32
7. Zoznam príloh	33

## Zoznam použitých symbolov

F	sila	[N]
p	hybnosť	[kg.m.s <sup>-1</sup> ]
t	čas	[s]
v	rýchlosť	[m.s <sup>-1</sup> ]
a	zrýchlenie	[m.s <sup>-2</sup> ]
m	hmotnosť	[kg]
I	moment zotrvačnosti	[kg.m <sup>2</sup> ]
L, l	vzdialenosť	[m]
g	tiažové zrýchlenie	[kg.m.s <sup>-2</sup> ]
R	reakčný účinok	[N]
x, y	poloha	[m]
φ	uhol natočenia	[rad]
E <sub>P</sub>	potenciálna energia	[J] = [kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-2</sup> ]
α	uhlové zrýchlenie	[rad.s <sup>-2</sup> ]
M	moment	[Nm]
k <sub>L</sub>	koeficient pasívneho odporu ložiska	[Nm.s <sup>2</sup> ] = [kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
E <sub>K</sub>	kinetická energia	[J] = [kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-2</sup> ]
Q	zovšeobecnená vonkajšia sila	[N], prípadne [Nm]
R	ohmický odpor	[Ω]
U	elektrické napätie	[V]
I	elektrický prúd	[A]
n	otáčky	[ot.min <sup>-1</sup> ]
i	prevodový pomer	[-]

## Zoznam obrázkov

Obr. 1 – Využívanie momentu zotrvačnosti pri krasokorčuľovaní. [2] .....	5
Obr. 2 - Fyzikálne kyvadlo.....	8
Obr. 3 - Uvoľnenie fyzikálneho kyvadla.....	8
Obr. 4 - Priebeh potenciálnej energie fyzikálneho kyvadla v závislosti na polohe.....	9
Obr. 5 - Uzatvorený regulačný obvod so spätnou väzbou. ....	10
Obr. 6 - Lineárne inverzné kyvadlo. ....	11
Obr. 7 - Rotačné inverzné kyvadlo. ....	11
Obr. 8 - Schéma Computed torques control.....	14
Obr. 9 – Cubli balansujúce na hrane. ....	15
Obr. 10 - Cubli stojace na rohu. ....	16
Obr. 11 - Schéma experimentálneho zariadenia.....	17
Obr. 12 – uvoľnená sústava.....	18
Obr. 13 – CAD model – pohľad spredu .....	22
Obr. 14 – CAD model – pohľad zozadu .....	22
Obr. 15 – Testovacie zapojenie modelu sústavy v prostredí Simulink. ....	23
Obr. 16 – Odozva sústavy na postrčenie zo zvislej vzpriamenej polohy vyššie popísaným impulzom. ....	24
Obr. 17 - Simulačný model zariadenia zapojeného v URO spolu s diskretným PID regulátorom .....	24
Obr. 18 – Priebeh vonkajšej poruchovej sily v čase (striedavé impulzy). ....	25
Obr. 19 – Odozva svorkového napätia na motore ovládaného regulátorom na vonkajšiu poruchu. ....	26
Obr. 20 – Priebeh výchylky kyvadla od nulovej (vzpriamenej) polohy v prípade popísaného rušenia a regulácie.....	26
Obr. 21 – Zmontované zariadenie – pohľad spredu.....	28
Obr. 22 – Zmontované zariadenie - pohľad zozadu.....	28
Obr. 23 – Zariadenie už s novým motorom a pridaným molitanom. ....	29
Obr. 24 – Elektronika zariadenia s popismi. Encoder 1 sníma otáčky motoru, encoder 2 výchylku kyvadla od vzpriamenej polohy. ....	29
Obr. 25 – Inovovaná konštrukcia zariadenia pripravená na experimentovanie. ....	30

## Zoznam tabuliek

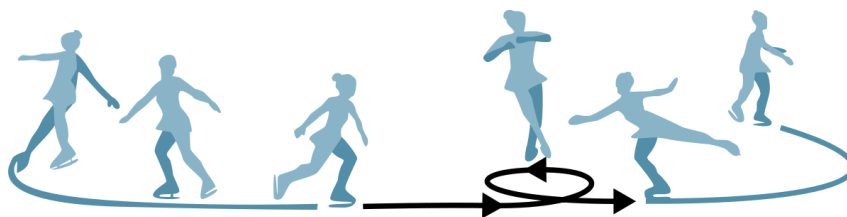
Tab. 1 – Modelové parametre pohonu. ....	21
Tab. 2 – Modelové parametre sústavy. ....	23
Tab. 3 – Parametre použitého regulátoru. ....	25
Tab. 4 – Výkonnostné parametre pohonu. ....	27



# 1. Úvod

Isaac Newton svojimi tromi pohybovými zákonmi, ktoré prezentoval v roku 1687 v diele *Philosophiae naturalis principia mathematica*, dnes známymi jednoducho ako Newtonove pohybové zákony, položil prvé základy mechaniky v podobe, v akej ju poznáme dodnes [1].

Prvý Newtonov zákon, známy taktiež ako zákon zotrvačnosti, popisuje vlastnosť hmoty zostať v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ na ňu nepôsobia žiadne vonkajšie sily. Táto vlastnosť je veľmi jednoducho pozorovateľná v bežnom živote, napríklad pri prudkom brzdení či rozbiehaní vozidla. V takýchto prípadoch ju človek vníma skôr ako sprievodný jav, existujú však aplikácie, kde je zotrvačnosť telies cieľavedome využívaná. Ako prvý príklad možno uviesť jazdcov motocrossu – počas skoku korigujú naklonenie motocyklu dozadu alebo dopredu pridaním plynu, resp. brzdením. Zotrvačnosť zadného kolesa sa princípom akcie a reakcie prejaví žiadanou rotáciou celého stroja a tým umožňuje jazdcovi vo vzduchu do určitej miery kontrolovať následný dopad. Ďalším príkladom z bežného života sú krasokorčuliari, ktorí si počas skokov s rotáciou si pomáhajú tak, že v priebehu skoku stiahnu ruky k telu, čím znížia svoj moment zotrvačnosti a v konečnom dôsledku tým zvýšia rýchlosť svojej rotácie, vďaka čomu sa dokážu v priebehu jediného skoku viackrát otočiť okolo svojej osi. Ku koncu skoku potom ruky opäť rozťahnu, čím rotáciu výrazne spomalia a tým docelia hladší a kontrolovanejší dopad.



Obr. 1 – Využívanie momentu zotrvačnosti pri krasokorčuľovaní. [2]

Pre túto prácu je kľúčové využitie zotrvačných účinkov v inverzných kyvadlách. Tento pojem predstavuje mechanizmus, ktorý sa vhodným riadením pohybov stabilizuje v inak nestabilnej polohe, v ktorej sa ťažisko kyvadla nachádza nad jeho podporou. Tieto zariadenia majú tradične svoje pevné miesto v laboratóriách riadenia, kde pri vývoji riadiacich metód a algoritmov slúžia na ich testovanie a porovnávanie dosahovaných parametrov. Typickými úlohami riešenými na inverzných kyvadlách sú napríklad spätnoväzobná stabilizácia, nelineárne pozorovatele alebo redukcia nelineárneho modelu [3]. Testované riadiace metódy následne nachádzajú uplatnenie v mechatronických systémoch všetkých druhov, využívajú sa medzi inými napríklad na stabilizovanie chôdze humanoidných robotov, riadenie automatických manipulátorov či polohovanie vo výrobných strojoch.

## 2. Ciele práce

Cieľom tejto práce je získať prehľad o súčasnom stave problematiky inverzných kyvadiel z pohľadu samotnej konštrukcie, ako aj možnosti ich riadenia, mimo iné aj o metóde Computed torques.

Ďalším cieľom je oboznámenie sa s projektom Cubli. Po základnej charakteristike projektu bude nasledovať zostavenie pohybových rovníc pre rovinný model systému. Vychádzajúc z týchto vzťahov sa sústava nasimuluje pomocou softwaru MATLAB/Simulink a navrhne sa vhodné riadenie.

Nakoniec sa zariadenie skonštruuje, vyrobí a zmontuje. Osadí sa pohonom a snímačmi ovládanými pomocou vývojovej platformy Arduino a s využitím navrhnutej metódy riadenia sa zrealizuje experiment.

## 3. Problematika inverzných kyvadiel

### 3.1 Newtonove pohybové zákony

Vo svojom diele *Philosophiae naturalis principia mathematica* z roku 1687 Isaac Newton po prvýkrát zhrnul tri pohybové zákony, dnes známe ako Newtonove pohybové zákony. Tieto zákony tvoria základ klasickej mechaniky, označovanej aj ako newtonovská, ktorá je platná pre „bežné“ podmienky – v oblastiach rýchlostí pohybu zanedbateľných voči rýchlosti svetla a teda bez výrazných prejavov relativistických efektov. Tieto tri zákony sú nasledovné:

1. Newtonov zákon (zákon zotrvačnosti) – v inerciálnej vzťažnej sústave teleso zostáva v stave pokoja alebo rovnomerného priamočiareho pohybu, pokiaľ na ňu nepôsobí žiadna vonkajšia sila.
2. Newtonov zákon (zákon sily) – časová zmena hybnosti je rovná výslednej pôsobiacej sile; matematicky:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1)$$

Za predpokladu časovo nemennej hmotnosti telesa nadobudne zákon jednoduchšiu a zaužívanejšiu podobu:

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} \quad (2)$$

3. Newtonov zákon (zákon akcie a reakcie) – každá akcia vyvoláva reakciu, ktorá má rovnakú veľkosť, ale pôsobí v opačnom smere.

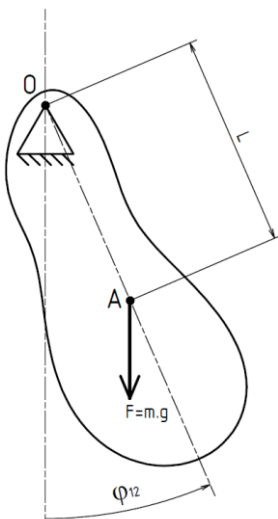
Z týchto zákonov sa vychádza pri zostavovaní tzv. Newton-Eulerových rovníc popisujúcich dynamiku mechanického systému.

### 3.2 Fyzikálne kyvadlo – stabilná a labilná poloha

Fyzikálnym kyvadlom je každé tuhé teleso zavesené takým spôsobom, že sa vplyvom vlastnej tiaže môže kývať okolo osi neprechádzajúcej jeho ťažiskom.

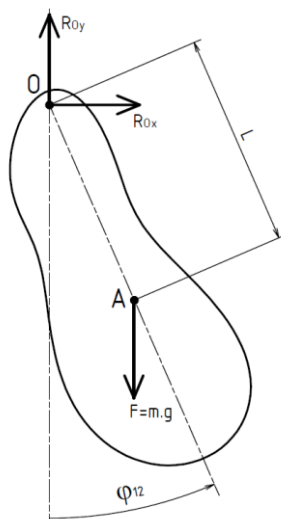
Pre popis jeho dynamiky sú významné nasledovné parametre:

- $m_2$  – hmotnosť kyvadla
- $I_{2A}$  – moment zotrvačnosti kyvadla k ťažisku A
- $L$  – vzdialenosť ťažiska A od osi otáčania O
- $g$  – veľkosť tiažového zrýchlenia



Obr. 2 - Fyzikálne kyvadlo.

Na zostavenie pohybových rovníc je možné použiť napríklad metódu uvoľnenia, t.j. náhrady väzby príslušnými reakciami, v tomto prípade rotačnej väzby v bode O:



Obr. 3 - Uvoľnenie fyzikálneho kyvadla.

$$m_2 \cdot \ddot{x}_A = R_{Ox} \quad (3)$$

$$m_2 \cdot \ddot{y}_A = R_{Oy} - m_2 \cdot g \quad (4)$$

$$I_{2A} \cdot \ddot{\varphi}_{12} = -R_{Ox} \cdot L \cdot \cos \varphi_{12} - R_{Oy} \cdot L \cdot \sin \varphi_{12} \quad (5)$$

Zároveň musia platiť nasledovné kinematické väzby:

$$x_A = L \cdot \sin \varphi_{12} \rightarrow \ddot{x}_A = L \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \ddot{\varphi}_{12} - L \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \dot{\varphi}_{12}^2 \quad (6)$$

$$y_A = L \cdot (1 - \cos \varphi_{12}) \rightarrow \ddot{y}_A = L \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \ddot{\varphi}_{12} + L \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \dot{\varphi}_{12}^2 \quad (7)$$

Dosadením (6) a (7) do (3) a (4) a odtiaľ následne do (5) vznikne rovnica:

$$(I_{2A} + m_2 L^2) \cdot \ddot{\varphi}_{12} = I_{2O} \cdot \ddot{\varphi}_{12} = -m_2 \cdot g \cdot L \cdot \sin \varphi_{12} \quad (8)$$

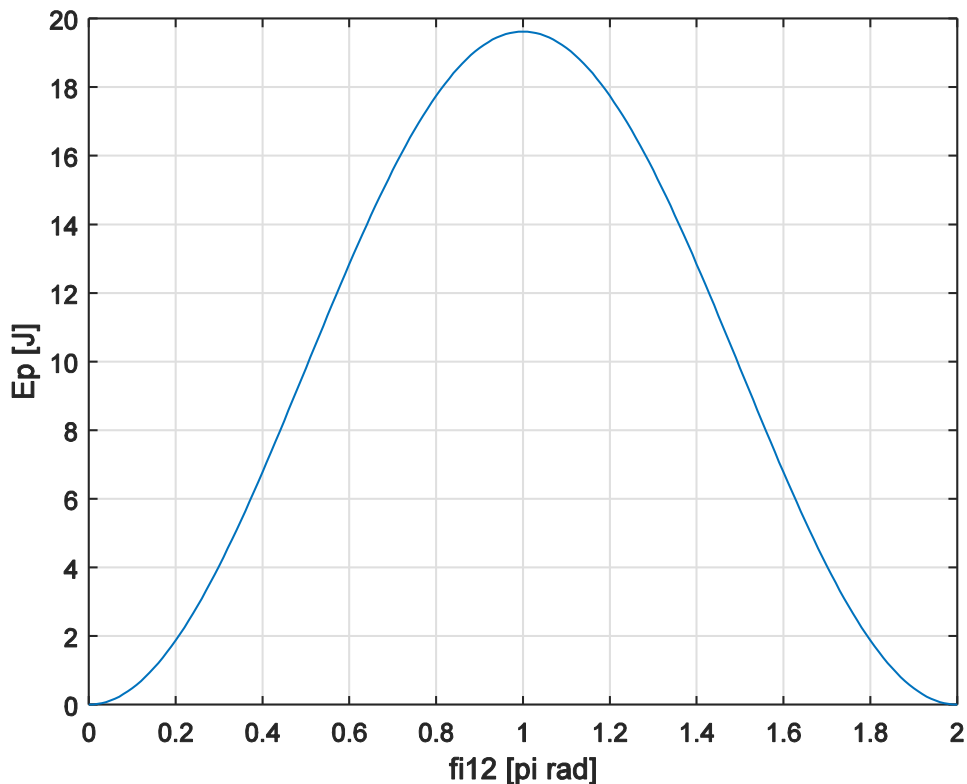
Táto rovnica sa nazýva aj vlastná pohybová rovnica, čo znamená, že nesie informáciu o pohybe sústavy (zvyšné rovnice sú potrebné pre stanovenie reakcií v ose otáčania, pre účely vyšetrovania pohybu kyvadla však nie sú významné). Táto rovnica napovedá, že uhlové zrýchlenie  $\ddot{\varphi}_{12}$  môže byť nulové v dvoch polohách, a to pre  $\varphi_{12} = 0^\circ$  a  $\varphi_{12} = 180^\circ$ . Stabilita polôh sa stanoví derivovaním potenciálnej energie podľa uhlovej súradnice. Za hladinu nulového potenciálu bola zvolená poloha kolmo dole, t.j.  $\varphi_{12} = 0^\circ$ :

$$E_p = m_2 \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos \varphi_{12}) \quad (9)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_{12}} = m_2 \cdot g \cdot L \cdot \sin \varphi_{12} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_{12}^2} = m_2 \cdot g \cdot L \cdot \cos \varphi_{12} \quad (11)$$

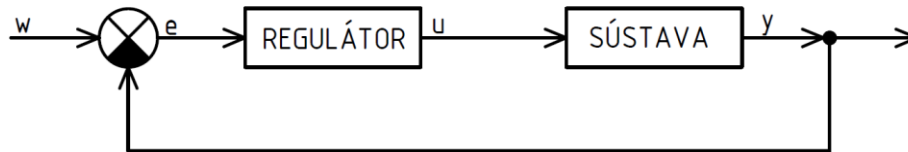
Prvá derivácia nadobúda nulovú hodnotu pre zmienené polohy, čo značí, že sa v nich nachádzajú extrémny priebehu potenciálnej energie. V polohe  $\varphi_{12} = 0^\circ$  je druhá derivácia kladná, preto je v tejto polohe  $E_p$  minimálna, naopak vo vzpriamenej polohe  $\varphi_{12} = 180^\circ$  je druhá derivácia záporná,  $E_p$  v nej dosahuje maximum. Dolná poloha je teda polohou stabilnou a horná labilnou (vychádzajúc z princípu, že všetko v prírode smeruje do stavu čo najnižšej energie). Zatiaľ čo v stabilnej polohe kyvadlo zotrúva spontánne, do polohy labilnej sa už po vychýlení samovoľne nevráti.



Obr. 4 - Priebeh potenciálnej energie fyzikálneho kyvadla v závislosti na polohe.

### 3.3 Regulačný obvod so spätnou väzbou – stabilizovanie nestabilnej sústavy

Nestabilnú sústavu je možné stabilizovať zapojením do uzatvoreného regulačného obvodu so spätnou väzbou [4].



Obr. 5 - Uzatvorený regulačný obvod so spätnou väzbou.

Takéto zapojenie teda umožňuje vytvoriť inverzné kyvadlo, t.j. kyvadlo stabilné v hornej polohe. Zmysel inverzných kyvadiel spočíva práve v testovaní a porovnávaní parametrov dosahovaných rôznymi metódami riadenia aplikovanými na tieto nestabilné a nelineárne systémy [5].

### 3.4 Realizácia inverzného kyvadla

Inverzné kyvadlá existujú v neprebernom množstve rôznych konštrukčných prevedení. Bežne používané kyvadlá však vo svojej podstate majú určité spoločné charakteristické prvky.

Ich základná schéma pozostáva z vyvažovaného členu – kyvadla (teleso, prípadne sústava telies; obvykle tyč, resp. tyče), ktoré je rotačne spojené s pohyblivou podporou – aktuovaným členom. Riadený je len pohyb podpory, poloha kyvadla je voči nej voľná, nie je ovládaná priamo a nie je ani daná žiadnymi kinematickými väzbami, z čoho vyplýva ďalšia charakteristická črta inverzných kyvadiel – majú viac stupňov voľnosti ako aktuátorov<sup>1</sup>.

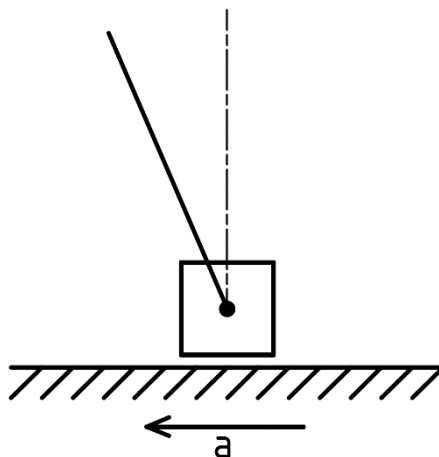
Relatívny pohyb kyvadla voči podpore, nevyhnutný pre vyváženie inverzného kyvadla, t.j. jeho stabilizovanie vo vzpriamenej polohe, je umožnený zotrvačnými účinkami pôsobiacimi na kyvadlo počas pohybu podpory.

#### 3.4.1 Konštrukčné prevedenie

Podľa typu pohybu ovládaného prvku možno kyvadlá rozdeliť na dva základné typy:

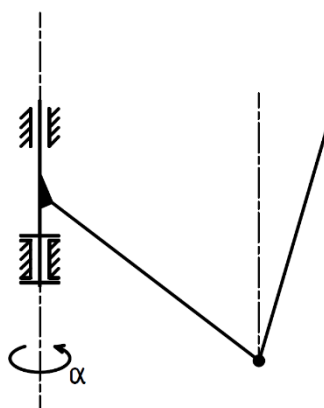
- s posuvným pohybom (klasické) – vid'. napr. [6]
  - ovládaný prvok sa pohybuje po lineárnej trajektórii
  - lineárny pohyb podpory je realizovaný buďto jej posúvaním pomocou napríklad remeňa alebo oceľového lanka, alebo môže byť podpora samotná pohyblivá

<sup>1</sup> V anglicky písaných textoch je používaný veľmi výstižný výraz *underactuated*.



Obr. 6 - Lineárne inverzné kyvadlo.

- s rotačným pohybom – použité napr. v [3] a [5]
  - ovládaný prvok rotuje, bod otáčania kyvadla teda obieha po kružnicovej trajektórii



Obr. 7 - Rotačné inverzné kyvadlo.

Podľa zložitosti telesa kyvadla ich možno rozdeliť na kyvadlá:

- jednoduché
- dvojité
- trojité

So zložitou kyvadla pochopiteľne rastie počet stupňov voľnosti sústavy a teda aj celková náročnosť úlohy stabilizácie a riadenia [5].

## 3.5 Metódy riadenia

Vzhľadom k tomu, že inverzné kyvadlá slúžia na testovanie, porovnávanie a vývoj riadiacich algoritmov, existuje mnoho metód na ich stabilizáciu. Táto práca sa bude podrobnejšie zaoberať nasledovnými metódami:

- Proportional-integral-derivative regulation (PID) [4]
- Computed torques control (CTC) [7]

Ďalšie používané metódy sú napríklad:

- Linear-quadratic regulator (LQR) [5], [8]
- Sliding-mode control [9], [10]
- Fuzzy logika [6]
- Neurónové siete [4]

Cieľom všetkých uvedených metód je (viď. Obr. 5) na regulačnú odchýlku  $e$  (rozdiel skutočnej a žiadanej polohy) zareagovať adekvátnym akčným zásahom  $u$  (v prípade inverzných kyvadiel napäťový alebo prúdový signál do motoru, ktorý sa prejaví úmerným zrýchlením aktuovaného prvku a v konečnom dôsledku zmenou polohy kyvadla smerom k požadovanej polohe).

Metódy riadenia možno rozdeliť do dvoch základných kategórií. Prvou sú klasické metódy, ktoré sú založené na prenosovom popise. Prenosom  $G$  sa rozumie pomer výstupu systému  $y$  ku vstupu  $u$  určený z Laplaceovho obrazu diferenciálnej rovnice sústavy. Postup určenia prenosu vyzerá vo všeobecnej forme nasledovne ( $y^{(n)}$  značí  $n$ -tú časovú deriváciu  $y$ ,  $Y$  je Laplaceov obraz  $y$ ):

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_0 \cdot y = b_0 \cdot u + \dots + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)} + b_m \cdot u^{(m)} \quad (12)$$

$$a_n \cdot s^n \cdot Y + a_{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot Y + \dots + a_0 \cdot Y = b_0 \cdot U + \dots + b_{m-1} \cdot s^{m-1} \cdot U + b_m \cdot s^m \cdot U \quad (13)$$

$$G_{UY} = \frac{Y}{U} = \frac{y}{u} = \frac{b_0 + \dots + b_m \cdot s^m}{a_n \cdot s^n + \dots + a_0} \quad (14)$$

Obvykle  $n > m$  a určuje rád systému. Tieto metódy sú relatívne jednoduché, na druhú stranu sú však použiteľné len pre lineárne systémy, čo v praxi znamená, že pre skutočné, nelineárne systémy fungujú vyhovujúco len v určitom okolí pracovného bodu, v ktorom sa sústava správa dostatočne lineárne. Typickým predstaviteľom je PID regulácia.

Druhá skupina je nazývaná súhrnne moderné metódy riadenia. Tieto možno rozdeliť do ďalších dvoch podskupín. Prvá zahŕňa metódy, ktoré vychádzajú z tzv. stavového popisu. Stavový vektor  $x$  je vektor veličín, ktoré v každom časovom okamihu jednoznačne popisujú konfiguráciu systému. Počet týchto veličín zodpovedá rádu systému.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (15)$$

Tieto systémy sa veľmi často zjednodušujú na modely LTI (Linear Time Invariant – lineárny časovo nemenný systém). V takom prípade funkcia  $f$  prejde do tvaru lineárnej funkcie a bude časovo nezávislá.



$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (16)$$

$$y = C \cdot x + D \quad (17)$$

Zástupcom tejto skupiny je napríklad metóda LQR [11]. S dnešnou výpočtovou technikou je možné efektívne pracovať taktiež s nelineárnymi systémami, čo vedie k výskumu a rozvoju nelineárných metód riadenia.

Posledná kategória zastrešuje metódy založené na princípoch umelej inteligencie. Takéto ovládače sa vyznačujú adaptabilitou a schopnosťou učiť sa, zároveň nevyžadujú analýzu systému. Prekážky predstavuje nutnosť tréningu a nepredvídateľnosť výsledkov pri vstupoch príliš rozdielnych od dát použitých na tréning. Medzi tieto metódy je možné zaradiť napríklad Fuzzy logiku a neurónové siete.

Pre bližšie informácie o rôznych metódach riadenia mechatronických sústav viď. [4].

### 3.5.1 PID regulátor

Regulácia pomocou PID regulátoru je z uvedených metód najjednoduchšia. Jedná sa o reguláciu klasickou spätnou väzbou popísanou pomocou prenosov. Medzi jej prednosti práve jej jednoduchosť, vyžaduje totiž minimálnu znalosť regulovanej sústavy. Na druhú sa to však môže prejaviť nižšou kvalitou regulačného pochodu v porovnaní s ostatnými metódami (napr. dlhšou dobou stabilizácie či nežiaducimi prekmity).

PID regulátor na regulačnú odchýlku reaguje podľa nasledovného vzťahu:

$$u = r_0 \cdot e + r_I \cdot \int_0^t e \cdot d\tau + r_D \cdot \frac{de}{dt} \quad (18)$$

prípadne:

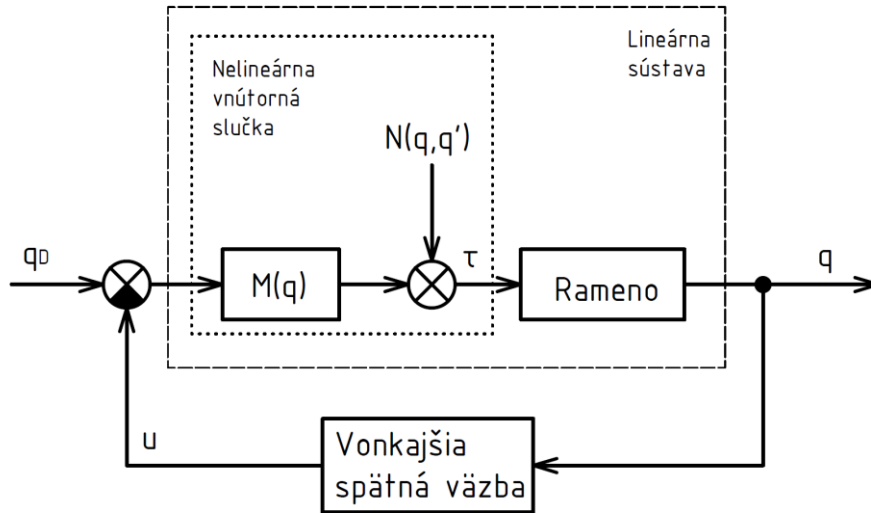
$$u = T_P \cdot \left( e + \frac{1}{T_I} \cdot \int_0^t e \cdot d\tau + T_D \cdot \frac{de}{dt} \right) \quad (19)$$

Parametre PID regulátoru sa stanovujú buďto niektorou z experimentálnych metód popísaných v [12], alebo za predpokladu znalosti analytického popisu odozvy sústavy na akčný zásah  $u$  je možné ich určiť metódou algebraického predpisu koreňov prenosu uzatvoreného regulačného obvodu (URO). Predpis koreňov sa odvíja od požadovaných vlastností URO, medzi inými napríklad doba ustálenia, kompenzácia poruchy, veľkosť prekmity a iné.

### 3.5.2 Computed torques control

Metóda Computed torques (ďalej len CTC) sa radí medzi moderné riadiace metódy založené na spätnej väzbe stavovej. Mnoho riadiacich systémov aplikovaných v robotike je považovaných za

špeciálny prípad CTC. Jej významnou prednosťou je schopnosť riadiť značne nelineárne systémy, pričom pri presnej znalosti všetkých dynamických parametrov sústavy pracuje mimoriadne dobre. Naopak rôzne nepresnosti a neistoty určenia parametrov systému sú príčinou neuspokojivých výsledkov. Metóda CTC je vhodná napríklad na riadenie robotických manipulátorov [7].



Obr. 8 - Schéma Computed torques control.

Vychádza sa z rovnice dynamiky robotického ramena vo všeobecnom tvare:

$$M(q) \cdot \ddot{q} + N(q, \dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (20)$$

kde  $q(t)$  je poloha,  $\tau(t)$  je akčný zásah a  $\tau_d(t)$  je porucha.

Regulačná odchýlka od žiadanej polohy (trajektórie)  $q_D$  je definovaná ako:

$$e = q_D - q \quad (21)$$

Aby bolo možné dať regulačnú odchýlku  $e$  do súvislosti s akčným zásahom  $\tau$ , je treba ju dvakrát zderivovať.

$$\dot{e} = \dot{q}_D - \dot{q} \quad (22)$$

$$\ddot{e} = \ddot{q}_D - \ddot{q} \quad (23)$$

Vyjadrením  $\ddot{q}$  z rovnice (23) a dosadením do (20) vplynie vzťah:

$$\ddot{e} = \ddot{q}_D + M^{-1} \cdot (N + \tau_d - \tau) \quad (24)$$

ktorý je možno ďalej rozložiť na riadiacu a poruchovú funkciu:

$$u = \ddot{q}_D + M^{-1} \cdot (N - \tau) \quad (25)$$

$$w = M^{-1} \cdot \tau_d \quad (26)$$

Stavový vektor je možno zdefinovať nasledovne:

$$x = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (27)$$

a dynamiku regulačnej odchýlky potom popisuje rovnica:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot w \quad (28)$$

Rovnicu (25) možno obrátiť do tvaru:

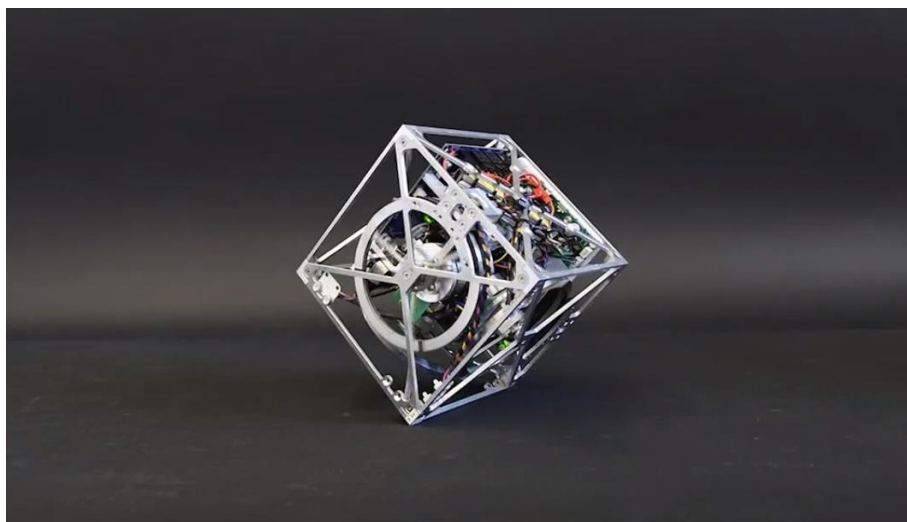
$$\tau = M(\ddot{q}_D - u) + N \quad (29)$$

Rovnica (29) je označovaná ako zákon CTC. Platí, že akčný zásah  $u(t)$  stabilizujúci rovnicu dynamiky regulačnej odchýlky popísanú vzťahom (28) do nuly zabezpečí sledovanie žiadanej trajektórie  $q_D(t)$ .

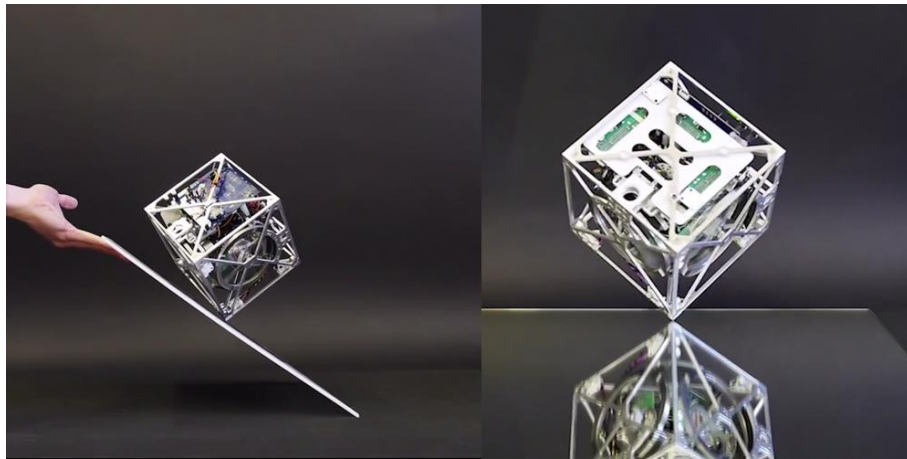
Týmito úpravami sa riešenie nelineárneho problému zmenilo na hľadanie vhodného vstupu  $u(t)$  navrhnutím vhodnej spätnej väzby. Možné je použiť okrem rôznych pokročilejších metód napríklad aj rôzne varianty PID regulátoru.

## 3.6 Projekt Cubli

Cubli je mechatronické zariadenie v tvare kocky o dĺžke hrany 15 cm, ktoré je schopné postaviť sa na hranu, prípadne na roh, a v tejto polohe balansovať. Umožňuje mu to vnútorná konštrukcia pozostávajúca s troch poháňaných zotrvačiek s navzájom kolmými osami. Pre vyskočenie do vzpriamenej polohy sa tieto disky roztočia na veľkú uhlovú rýchlosť a následne sú nárazom zastavené. Po dosiahnutí žiadanej polohy sa zariadenie vyvažuje využitím momentových účinkov zotrvačiek.



Obr. 9 – Cubli balansujúce na hrane.



*Obr. 10 - Cubli stojace na rohu.*

Cubli je vo svojej podstate taktiež inverzným kyvadlom, svojou konštrukciou sa však vymyká z obvykle zaužívanej základnej schémy popísanej v odseku 3.4. Princípiálne podobná konštrukcia je využitá napr. aj v [10]. Cubli však nepotrebuje žiadny základný nosný rám a aj vďaka tomu je kompaktné. Na druhú stranu vyvažovanie predstavuje zložitejšiu problematiku v tom zmysle, že ani poháňané hmoty (zotrvačník a rotor motoru), ani vyvažované hmoty (doska a stator motoru) systému nie sú priamo polohovateľné voči vonkajšiemu súradnicovému systému, na rozdiel od napríklad lineárneho inverzného kyvadla, kde je poloha pojazdu priamo aktuovaná. Vďaka kombinácii týchto unikátnych vlastností predstavuje neobvyklý, atraktívny a divácky pôsobivý spôsob testovania nových riadiacich metód, ktorý zároveň predstavuje výzvu pre implementované riadiace systémy. [8]

## 4. Realizácia experimentu – replika Cubli

Cieľom experimentálnej časti tejto práce je vytvoriť rovinné inverzné kyvadlo fungujúce na rovnakom princípe ako Cubli. Táto úloha zahŕňa nasledovné body:

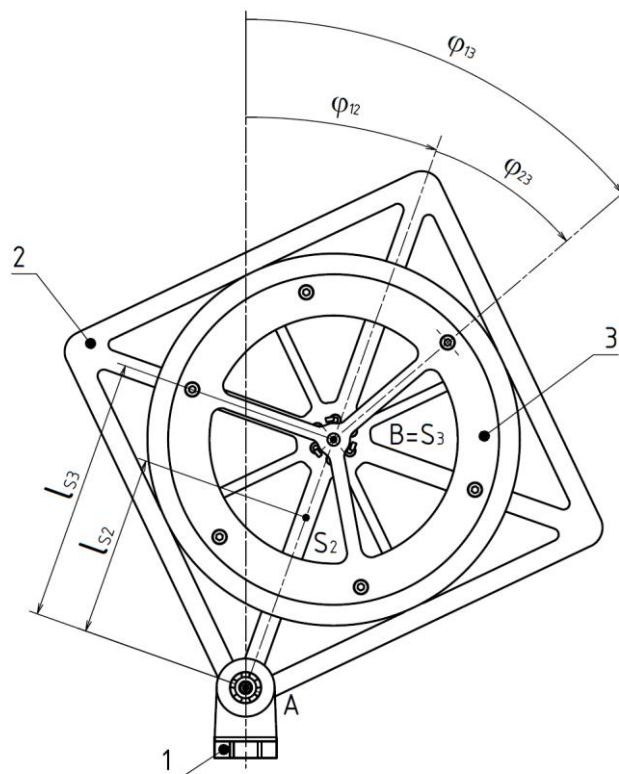
- zostavenie pohybových rovníc systému
- predbežný návrh konštrukcie, odhad rozmerov a dynamických parametrov
- simulácia zariadenia v prostredí MATLAB/Simulink
- voľba a návrh metódy riadenia
- výber vhodných komponentov (pohon, čidlá)
- stavba zariadenia
- experiment

### 4.1 Zostavenie rovníc dynamiky systému

Zariadenie pozostáva v princípe z troch častí:

1. základný rám
2. vyvažované hmoty (nosná doska, stator motoru)
3. aktuované hmoty (rotor motoru, zotrvačník)

Základnú schému zariadenia zobrazuje Obr. 10:



Obr. 11 - Schéma experimentálneho zariadenia.

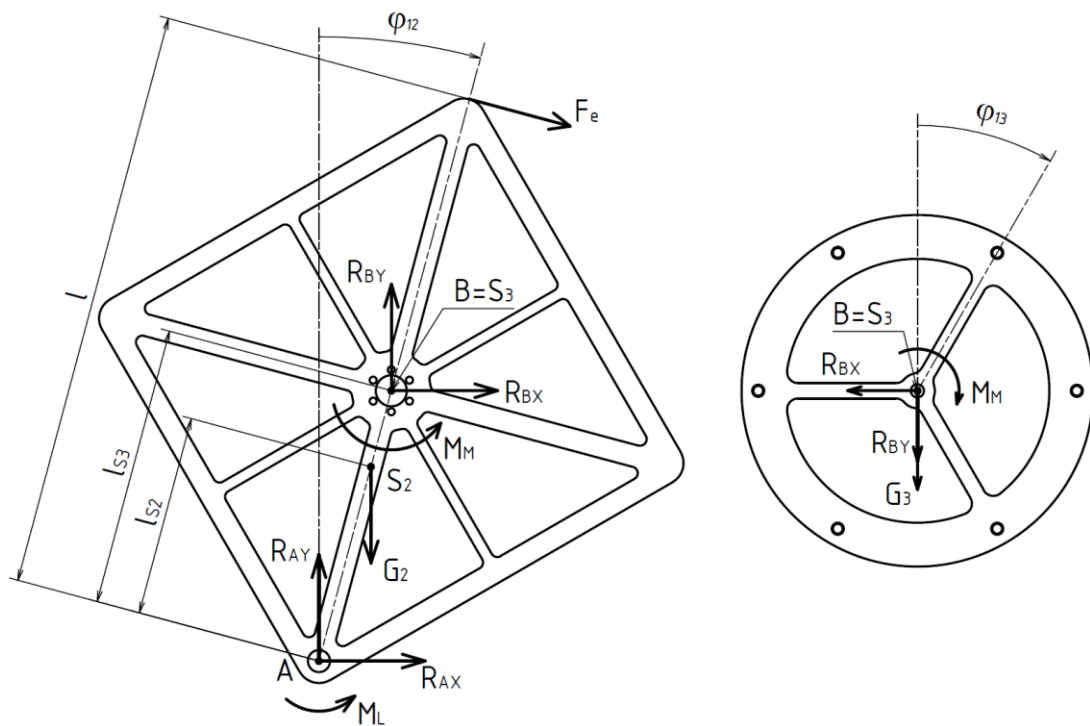
Uhly  $\varphi_{12}$  a  $\varphi_{13}$  predstavujú natočenie telies 2 a 3 voči rámu 1, uhol  $\varphi_{23}$  natočenie zotrvačníku voči doske, vzdialenosti  $l_{S2}$ , resp.  $l_{S3}$  určujú polohu ťažísk  $S_2$ , resp.  $S_3$ , body A a B označujú rotačné kinematické väzby.

Pohybové rovnice je možno zostaviť viacerými cestami. V tejto práci budú použité nasledovné dve:

- metóda uvoľňovania
- Lagrangeove rovnice II. druhu

### 4.1.1 Metóda uvoľňovania

Jednotlivé pohyblivé členy zariadenia po uvoľnení, t.j. náhrade kinematických väzieb príslušnými reakčnými účinkami, sú na Obr. 11:



Obr. 12 – uvoľnená sústava

Sily  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$  sú reakčné účinky v rotačných väzbách,  $G_2$  a  $G_3$  tiažové sily častí 2 a 3,  $M_M$  je moment od motoru,  $F_e$  je vonkajšia poruchová sila pôsobiaca na rameno  $l$  a  $M_L$  je pasívny odpor v ložiskách.

Na základe tohto uvoľnenia možno zostaviť Newton-Eulerove pohybové rovnice:

$$m_2 \cdot \ddot{x}_{12} = R_{Ax} + R_{Bx} \quad (30)$$

$$m_2 \cdot \ddot{y}_{12} = R_{Ay} + R_{By} \quad (31)$$

$$I_{2A} \cdot \ddot{\varphi}_{12} = R_{Bx} \cdot l_{S3} \cdot \cos \varphi_{12} - R_{By} \cdot l_{S3} \cdot \sin \varphi_{12} + m_2 \cdot g \cdot l_{S2} \cdot \sin \varphi_{12} - M_M + F_e \cdot l - M_L \quad (32)$$

$$m_3 \cdot \ddot{x}_{13} = -R_{Bx} \quad (33)$$

$$m_3 \cdot \ddot{y}_{13} = -R_{By} - m_3 \cdot g \quad (34)$$

$$I_{3S3} \cdot \ddot{\varphi}_{13} = M_M \quad (35)$$

Zároveň musia platiť nasledovné kinematické väzby:

$$x_{13} = l_{S3} \cdot \sin \varphi_{12} \rightarrow \ddot{x}_{13} = -l_{S3} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \dot{\varphi}_{12}^2 + l_{S3} \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \ddot{\varphi}_{12} \quad (36)$$

$$y_{13} = l_{S3} \cdot \cos \varphi_{12} \rightarrow \ddot{y}_{13} = -l_{S3} \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \dot{\varphi}_{12}^2 - l_{S3} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \ddot{\varphi}_{12} \quad (37)$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{12} + \varphi_{23} \rightarrow \ddot{\varphi}_{13} = \ddot{\varphi}_{12} + \ddot{\varphi}_{23} \quad (38)$$

Vzťahy (36), (37) a (38) sa dosadia do rovníc (33), (34) a (35) a následne sa z (33) a (34) vyjadria reakcie  $R_{Bx}$  a  $R_{By}$ , za ktoré sa potom dosadí do (32). Po zjednodušujúcich úpravách vychádzajú vzťahy:

$$(I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2) \cdot \ddot{\varphi}_{12} = (m_2 \cdot l_{S2} + m_3 \cdot l_{S3}) \cdot g \cdot \sin \varphi_{12} - M_M + F_e \cdot l - M_L \quad (39)$$

$$I_{3S3} \cdot (\ddot{\varphi}_{12} + \ddot{\varphi}_{23}) = M_M \quad (40)$$

Vyjadrením uhlových zrýchlení  $\ddot{\varphi}_{12}$  a  $\ddot{\varphi}_{23}$  a popisanim pasívneho odporu v ložiskách vzťahom:

$$M_L = k_L \cdot \dot{\varphi}_{12} \quad (41)$$

Vychádzajú výsledné rovnice dynamiky systému:

$$\ddot{\varphi}_{12} = \frac{(m_2 \cdot l_{S2} + m_3 \cdot l_{S3}) \cdot g \cdot \sin \varphi_{12} - M_M + F_e \cdot l - k_L \cdot \dot{\varphi}_{12}}{I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2} \quad (42)$$

$$\ddot{\varphi}_{23} = \frac{M_M \cdot (I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2 + I_{3S3})}{I_{3S3} \cdot (I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2)} - \frac{(m_2 \cdot l_{S2} + m_3 \cdot l_{S3}) \cdot g \cdot \sin \varphi_{12} + F_e \cdot l - k_L \cdot \dot{\varphi}_{12}}{I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2} \quad (43)$$

## 4.1.2 Lagrangeove rovnice II. druhu

Všeobecný tvar Lagrangeových rovníc II. druhu je nasledovný:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i \quad (44)$$

$E_k$  predstavuje celkovú kinetickú energiu sústavy,  $q_i$  jednotlivé súradnice a  $Q_i$  je zovšeobecnená vonkajšia sila pre príslušnú súradnicu.

Celková kinetická energia sústavy:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I_{2A} \cdot \dot{\varphi}_{12}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \dot{x}_{13}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \dot{y}_{13}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{3S3} \cdot \dot{\varphi}_{13}^2 \quad (45)$$

Opäť sa uplatnia kinematické vzťahy:

$$x_{13} = l_{S3} \cdot \sin \varphi_{12} \rightarrow \dot{x}_{13} = l_{S3} \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \dot{\varphi}_{12} \quad (46)$$

$$y_{13} = l_{S3} \cdot \cos \varphi_{12} \rightarrow \dot{y}_{13} = -l_{S3} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \dot{\varphi}_{12} \quad (47)$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{12} + \varphi_{23} \rightarrow \dot{\varphi}_{13} = \dot{\varphi}_{12} + \dot{\varphi}_{23} \quad (48)$$

Po ich dosadení do (45) a zjednodušujúcich úpravách nadobúda vzťah pre kinetickú energiu tvar:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot (I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2 + I_{3S3}) \cdot \dot{\varphi}_{12}^2 + I_{3S3} \cdot \dot{\varphi}_{12} \cdot \dot{\varphi}_{23} + \frac{1}{2} \cdot I_{3S3} \cdot \dot{\varphi}_{23}^2 \quad (49)$$

Derivácie  $E_k$  potrebné pre zostavenie Lagrangeových rovníc:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_{12}} = (I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2 + I_{3S3}) \cdot \dot{\varphi}_{12} + I_{3S3} \cdot \dot{\varphi}_{23} \quad (50)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_{12}} \right) = (I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2 + I_{3S3}) \cdot \ddot{\varphi}_{12} + I_{3S3} \cdot \ddot{\varphi}_{23} \quad (51)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_{12}} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_{23}} = I_{3S3} \cdot \dot{\varphi}_{12} + I_{3S3} \cdot \dot{\varphi}_{23} \quad (53)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_{23}} \right) = I_{3S3} \cdot \ddot{\varphi}_{12} + I_{3S3} \cdot \ddot{\varphi}_{23} \quad (54)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_{23}} = 0 \quad (56)$$

Zovšeobecnené vonkajšie sily je možné stanoviť napríklad princípom virtuálnych prác:

$$Q_1 \cdot \delta \varphi_{12} + Q_2 \cdot \delta \varphi_{23} = -G_2 \cdot \delta y_{S2} - G_3 \cdot \delta y_{S3} + M_M \cdot \delta \varphi_{23} + F_e \cdot l \cdot \delta \varphi_{12} - M_L \cdot \delta \varphi_{12} \quad (57)$$

Variácie  $\delta y_{S2}$  a  $\delta y_{S3}$  sa nahradia s využitím kinematických vzťahov:

$$y_{S2} = l_{S2} \cdot \cos \varphi_{12} \rightarrow \delta y_{S2} = -l_{S2} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \delta \varphi_{12} \quad (58)$$

$$y_{S3} = l_{S3} \cdot \cos \varphi_{12} \rightarrow \delta y_{S3} = -l_{S3} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \delta \varphi_{12} \quad (59)$$

Po ich dosadení do (57):

$$Q_1 \cdot \delta \varphi_{12} + Q_2 \cdot \delta \varphi_{23} = [(G_2 \cdot l_{S2} + G_3 \cdot l_{S3}) \cdot \sin \varphi_{12} + F_e \cdot l - M_L] \cdot \delta \varphi_{12} + M_M \cdot \delta \varphi_{23} \quad (60)$$

Porovnaním koeficientov v (60) sa ukazuje, že:

$$Q_1 = (G_2 \cdot l_{S2} + G_3 \cdot l_{S3}) \cdot \sin \varphi_{12} + F_e \cdot l - M_L \quad (61)$$

$$Q_2 = M_M \quad (62)$$



Zostavením Lagrangeových rovníc II. druhu vznikajú vzťahy:

$$(I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2 + I_{3S3}) \cdot \ddot{\varphi}_{12} + I_{3S3} \cdot \ddot{\varphi}_{23} = (G_2 \cdot l_{S2} + G_3 \cdot l_{S3}) \cdot \sin \varphi_{12} + F_e \cdot l - M_L \quad (63)$$

$$I_{3S3} \cdot \ddot{\varphi}_{12} + I_{3S3} \cdot \ddot{\varphi}_{23} = M_M \quad (64)$$

Ich riešením pre  $\ddot{\varphi}_{12}$  a  $\ddot{\varphi}_{23}$  po rozpísaní tiažových síl a pasívneho odporu v ložiskách sú vzťahy:

$$\ddot{\varphi}_{12} = \frac{(m_2 \cdot l_{S2} + m_3 \cdot l_{S3}) \cdot g \cdot \sin \varphi_{12} - M_M + F_e \cdot l - k_L \cdot \dot{\varphi}_{12}}{I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2} \quad (65)$$

$$\ddot{\varphi}_{23} = \frac{M_M \cdot (I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2 + I_{3S3})}{I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2} - \frac{(m_2 \cdot l_{S2} + m_3 \cdot l_{S3}) \cdot g \cdot \sin \varphi_{12} + F_e \cdot l - k_L \cdot \dot{\varphi}_{12}}{I_{2A} + m_3 \cdot l_{S3}^2} \quad (66)$$

Tieto rovnice zodpovedajú rovniciam (42) a (43) odvodenými metódou uvoľňovania.

### 4.1.3 Matematický popis pohonu

S ohľadom na fakt, že riadením sa nebude ovládať priamo moment pôsobiaci na zotrvačník, je vhodné zostaviť model motoru, ktorý bude popisovať závislosť generovaného momentu na napätí na vstupných svorkách (ktoré je riadiaci systém pomocou PWM signálov a H-mostíku schopný regulovať).

V experimentálnom zariadení je použitý motor Maxon A-max 32 (236669) spolu s prevodovkou GP 32 A (166156). Podrobné informácie o zostave pohonu sú obsiahnuté v priloženom katalógovom liste, vid'. príloha I. Pre zostavenie modelu sú potrebné nasledovné parametre:

Svorkový odpor	$R_T$	4,13	$\Omega$
Momentová konštanta	$k_M$	35,2	nMm/A
Rýchlostná konštanta	$k_S$	271	rpm/V
Prevodový pomer	$i_{pr}$	4,8	-

Tab. 1 – Modelové parametre pohonu.

Jedná sa o jednosmerný (DC) motor, ktorý býva obvykle modelovaný vzťahmi:

$$U = U_i + R_T \cdot I \quad (67)$$

$$U_i = \frac{1}{k_S} \cdot n \quad (68)$$

$$M_M = k_M \cdot I \quad (69)$$

kde  $U_i$  je indukované napätie v motore. Z týchto vzťahov je možné určiť závislosť  $M_M = f(U)$ :

$$M_M = k_M \cdot \frac{U - U_i}{R_T} = \frac{k_M}{R_T} \cdot U - \frac{k_M}{k_S \cdot R_T} \cdot n \quad (70)$$

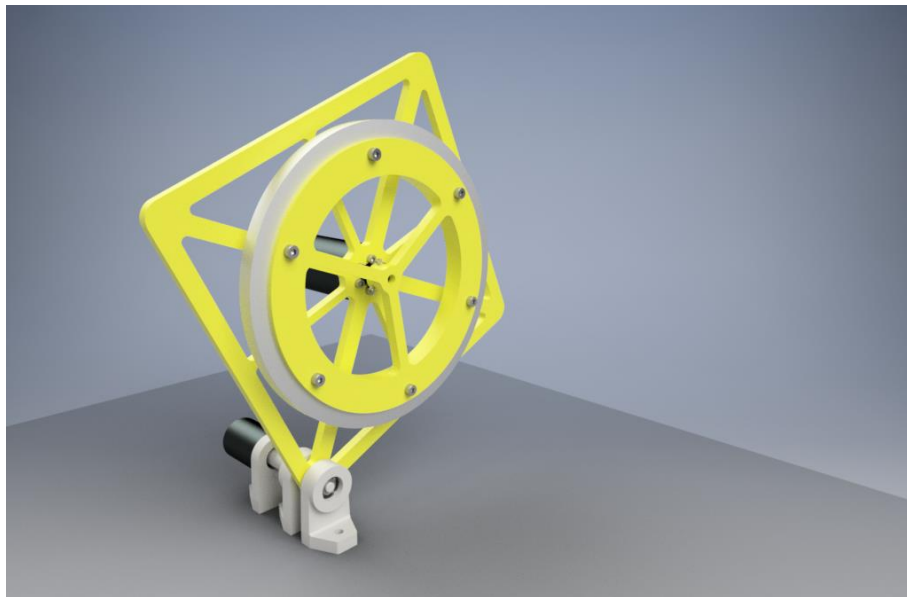
a po vyjadrení otáčok motoru pomocou uhlovej rýchlosti poháňaných častí 3:

$$M_M = \frac{k_M}{R_T} \cdot U - \frac{k_M}{k_S \cdot R_T} \cdot \frac{60 \cdot i_{pr}}{2 \cdot \pi} \cdot \dot{\varphi}_{23} \quad (71)$$

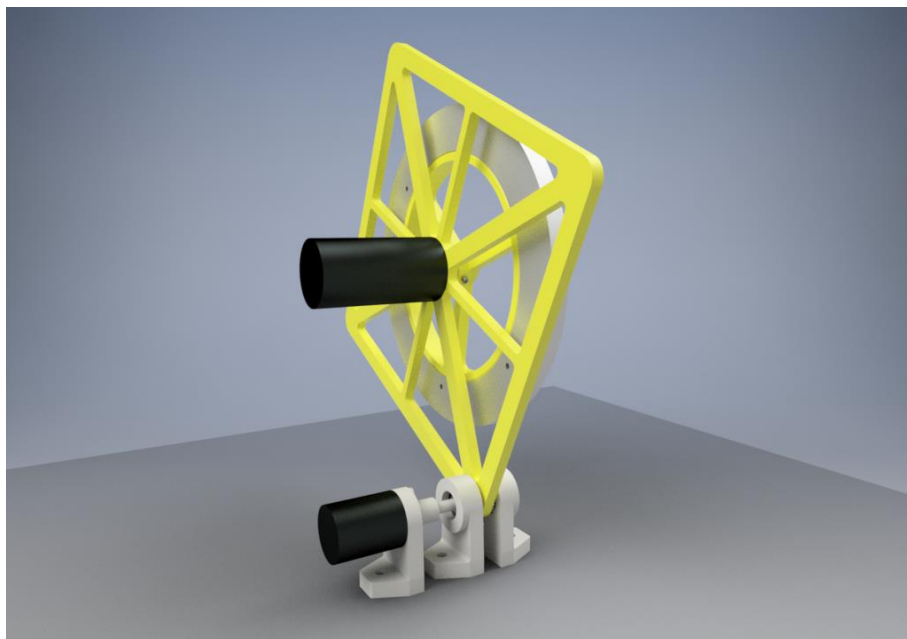
## 4.2 Simulácia zariadenia v prostredí Simulink

### 4.2.1 Odhad parametrov na základe CAD modelu

CAD model navrhovaného zariadenia je vyobrazený na Obr. 13 a Obr. 14:



Obr. 13 – CAD model – pohľad spredu



Obr. 14 – CAD model – pohľad zozadu

Pomocou inšpekčných nástrojov softwaru Autodesk Inventor boli stanovené nasledovné parametre:

$m_2$	0,442	kg
$m_3$	0,059	kg
$l_{S2}$	0,127	m
$l_{S3}$	0,127	m
$I_{2A}$	$7,898 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$I_{3S3}$	$0,236 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

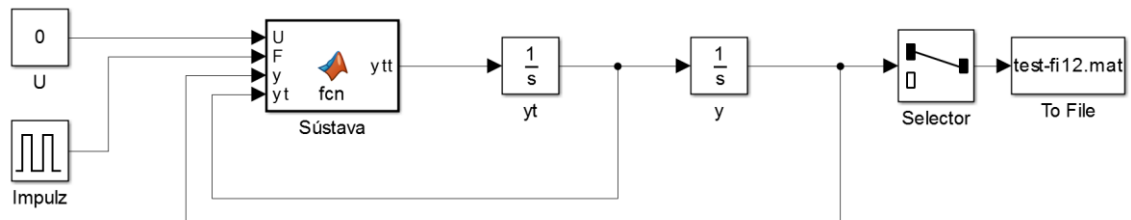
Tab. 2 – Modelové parametre sústavy.

Tieto hodnoty budú použité v simulácii zariadenia.

## 4.2.2 Testovacia simulácia modelu

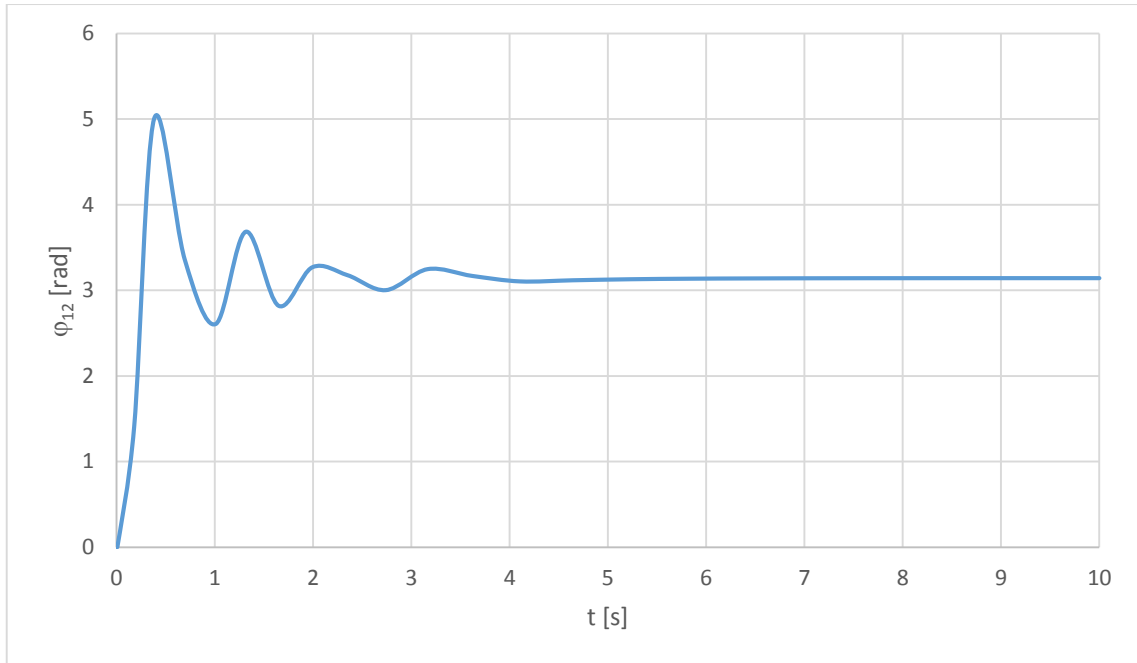
Vychádzajúc z rovníc dynamiky zariadenia odvodených v odseku 4.1 sa v prostredí programu Simulink zostaví blok predstavujúci sústavu, ktorý v podstate nahradzuje reálne experimentálne zariadenie pre potreby návrhu a ladenia metódy riadenia.

Tento model sa kontrolne otestuje vychýlením zo vzpriamenej polohy ( $\varphi_{12} = 0$ ) malou silou  $F_e$  a sleduje sa priebeh uhlu  $\varphi_{12}$ , aby sa overilo, že chovanie modelu zodpovedá očakávanému správaniu skutočného zariadenia (ustálenie v dolnej polohe, t.j.  $\varphi_{12} = 180^\circ$ ).



Obr. 15 – Testovacie zapojenie modelu sústavy v prostredí Simulink.

Na vstupoch je nulové ovládacie napätie a impulz vonkajšej sily (1 N po dobu 0,2 s).

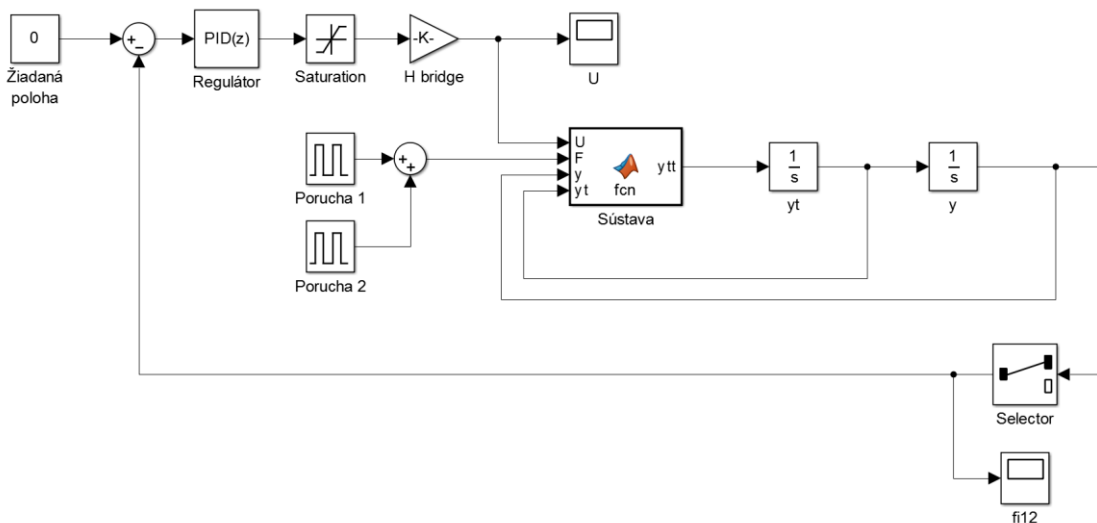


Obr. 16 – Odozva sústavy na postrčenie zo zvislej vzpriamenej polohy vyššie popísaným impulzom.

Sústava sa v simulácii ustálila v polohe  $\varphi_{12} = \pi \text{ rad} = 180^\circ$ , čo zodpovedá očakávaniu založenom na empirickej skúsenosti.

### 4.2.3 Simulácia s použitím riadenia

Otestovaný model sústavy sa zapojí do uzatvoreného regulačného obvodu (URO). Použitie metódy CTC by pre toto zariadenie nemalo veľký prínos vzhľadom k tomu, že systém je v pracovnom rozsahu výchylek prakticky lineárny (pre malé uhly do  $5^\circ$  s dostatočnou presnosťou platí zjednodušenie  $\sin \varphi \approx \varphi$ ) a nie je teda nutné ho linearizovať. Na riadenie sa použije diskrétny PID regulátor, a to z dôvodu, že sa jedná o jednoduchú metódu s minimálnou citlivosťou na presnosť identifikácie systému (na rozdiel od CTC). Preto bude následne vhodný taktiež na implementáciu do skutočného experimentálneho zariadenia.



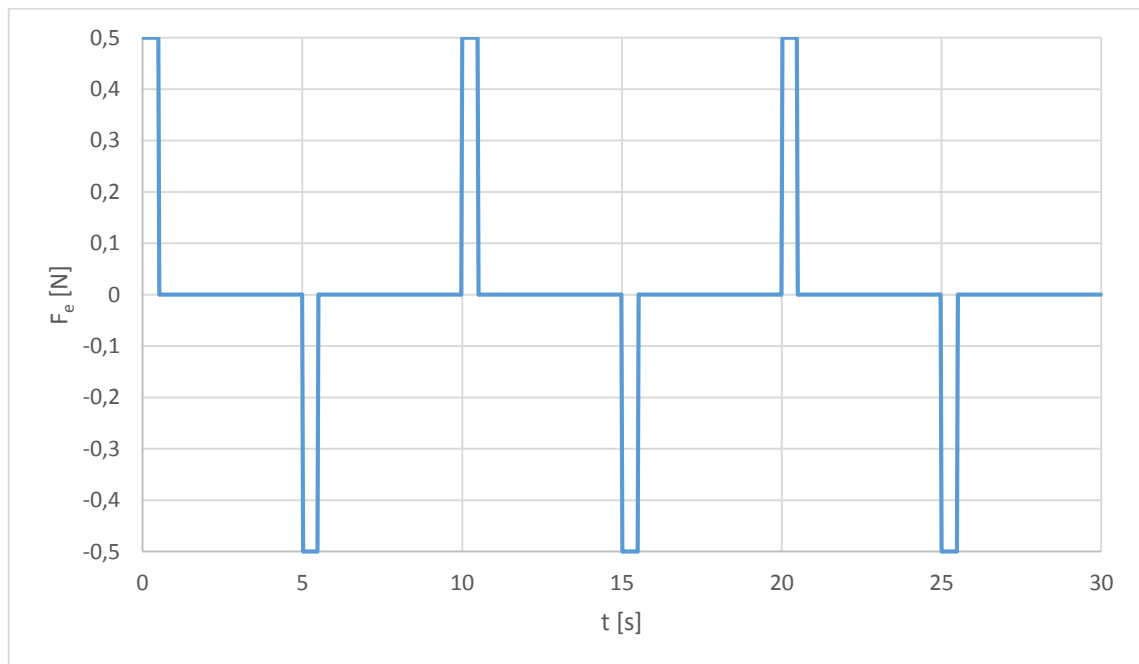
Obr. 17 - Simulačný model zariadenia zapojeného v URO spolu s diskrétnym PID regulátorom

Po vytvorení simulačného modelu bolo použité dialógové okno nastavenia PID regulátoru, ktoré umožňuje ladenie parametrov podľa požadovanej odozvy systému. Zvolená bola mierne pomalšia reakcia s cieľom obmedziť častú zmenu smeru otáčania motoru, ktorá by príliš zaťažovala elektroniku pohonu, a robustnejšie chovanie, ktoré by sa malo prejavovať menšími prechodmi, ktoré sú taktiež nežiaduce. Parametre, ktoré software na základe týchto požiadaviek určil, sú obsiahnuté v Tab. 3.

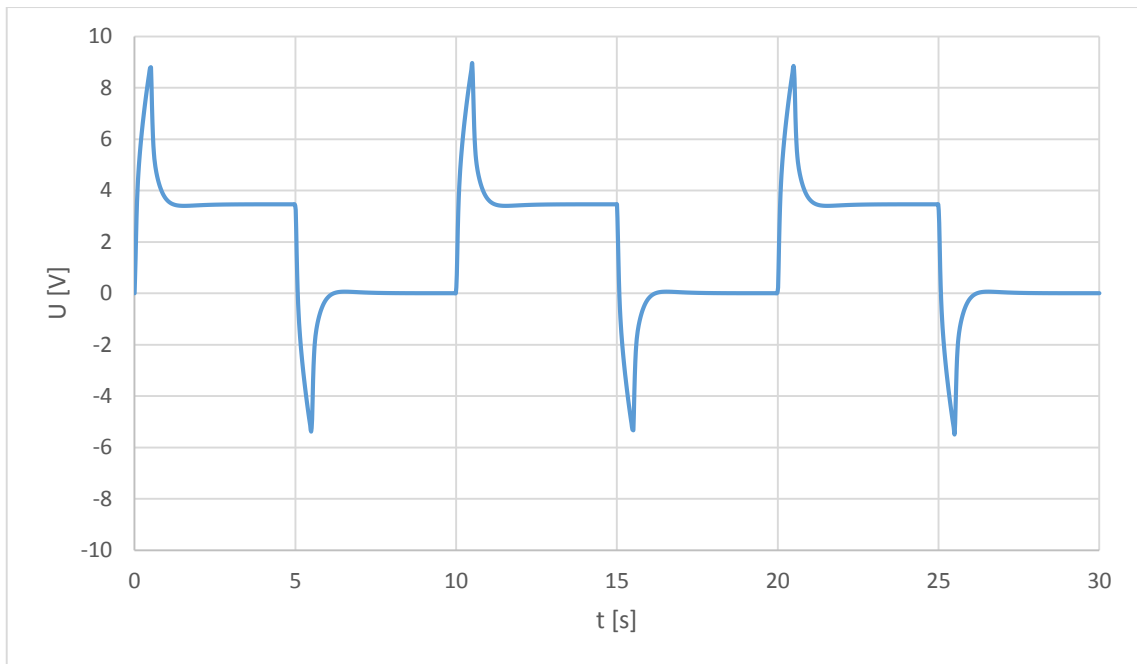
$P + I \cdot T_s \cdot \frac{1}{z-1} + D \cdot \frac{N}{1 + N \cdot T_s \cdot \frac{1}{z-1}}$	
P	-177,929
I	-235,748
D	-16,485
N	180,692
T <sub>s</sub>	0,01

Tab. 3 – Parametre použitého regulátoru.

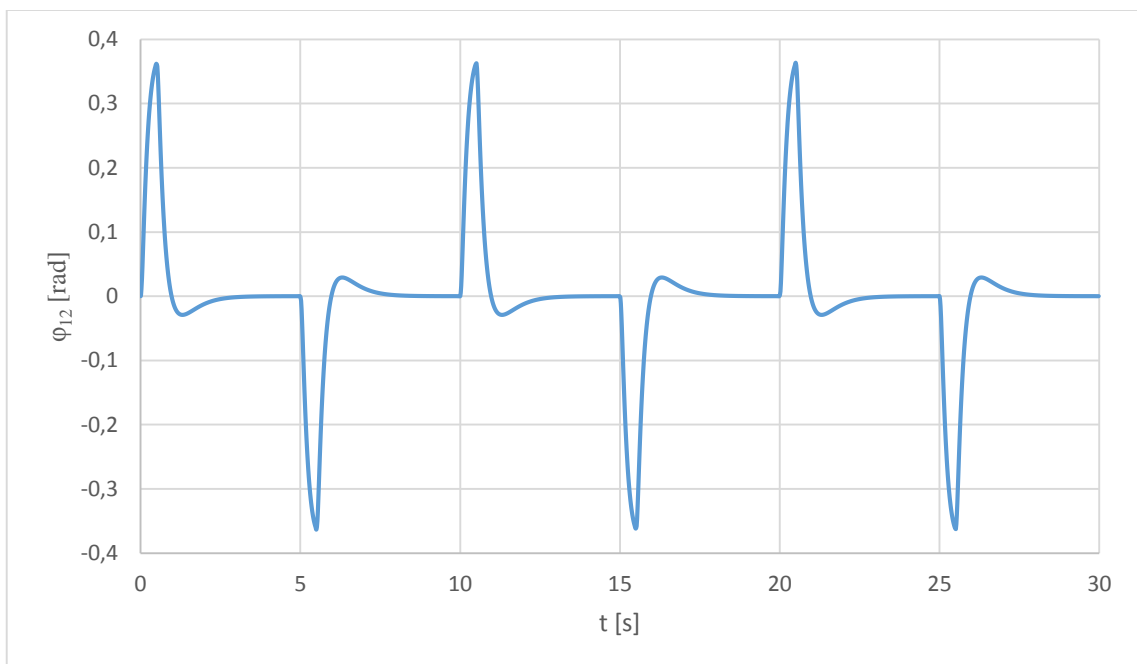
Výsledky simulácie popisujú nasledovné grafy:



Obr. 18 – Priebeh vonkajšej poruchovej sily v čase (striedavé impulzy).



Obr. 19 – Odozva svorkového napätia na motore ovládaného regulátorom na vonkajšiu poruchu.



Obr. 20 – Priebeh výchylky kyvadla od nulovej (vzpriamenej) polohy v prípade popísaného rušenia a regulácie.

Simulácia zariadenia ukazuje odozvu systému na vychýľovanie periodickými striedavými impulzmi vonkajšej sily  $F_e = 0,5 \text{ N}$ . Riadiace napätie dosahovalo maximálnu hodnotu približne 9 V a maximálna výchylka  $\varphi_{12}$  činila o niečo viac ako  $10^\circ$ . Zariadenie na stabilizáciu potrebovalo čas približne 2,5 s.

## 4.3 Voľba komponentov

Pre sprevádzkovanie navrhovaného zariadenia boli zvolené nasledovné komponenty:

- pohon:

Motor <b>Maxon A-max 32</b> (236669), prevodovka <b>Maxon GP 32 A</b> (166156)		
Výkon	20	W
Napájanie	24	V
Prevodový pomer	4,8:1	-
Voľnobežné otáčky	1160	rpm
Záberový moment	675	mNm

Tab. 4 – Výkonnostné parametre pohonu.

- H-mostík **BRIDGE20** (možnosť napájať až 28 V zdrojom, nezávislé riadenie dvoch DC motorov pomocou PWM signálov s možnosťou zmeny smeru otáčania)
- encoder na motore (snímanie otáčok): **Avago HEDS – 5540 A11** (2048 pulzov na otáčku)
- encoder na základnej doske (snímanie polohy): **Megatron** (4096 pulzov na otáčku)
- **Arduino Mega 2560**

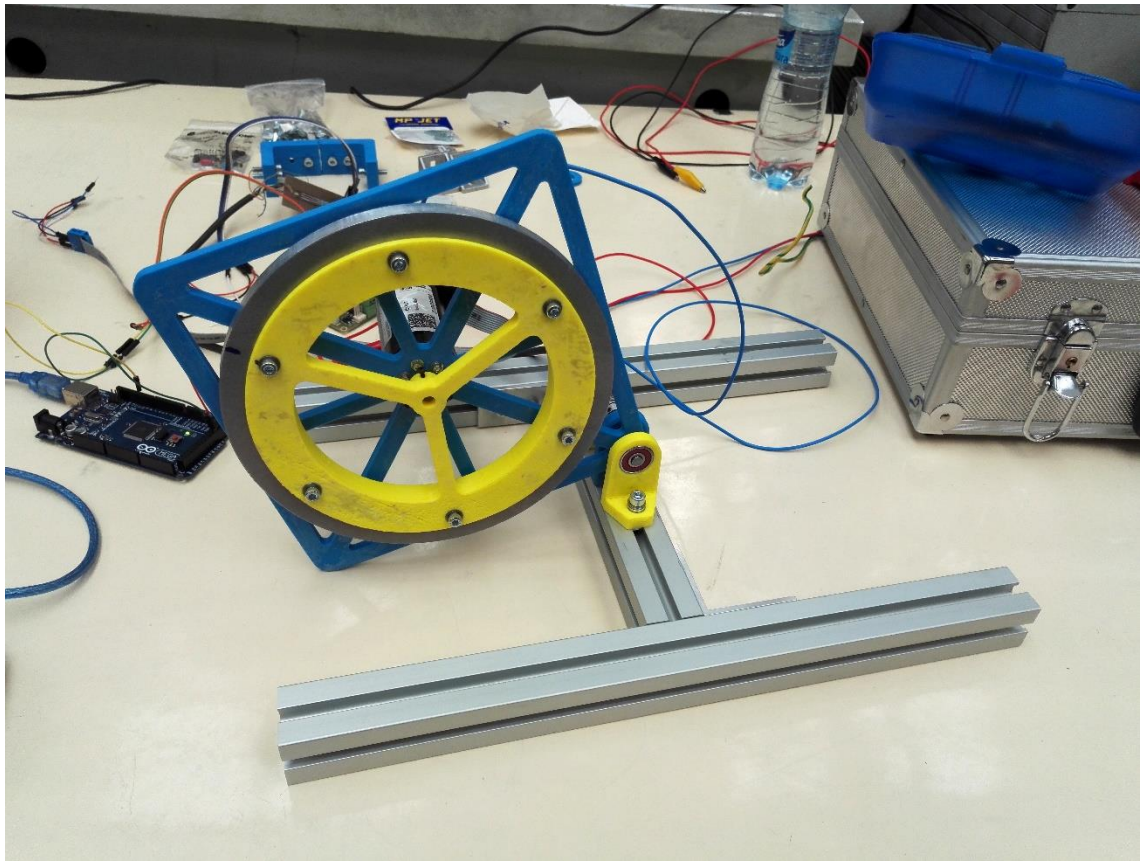
Podrobnejšie informácie o komponentoch sú obsiahnuté v prílohách I, II, III a IV.

## 4.4 Výroba a stavba zariadenia

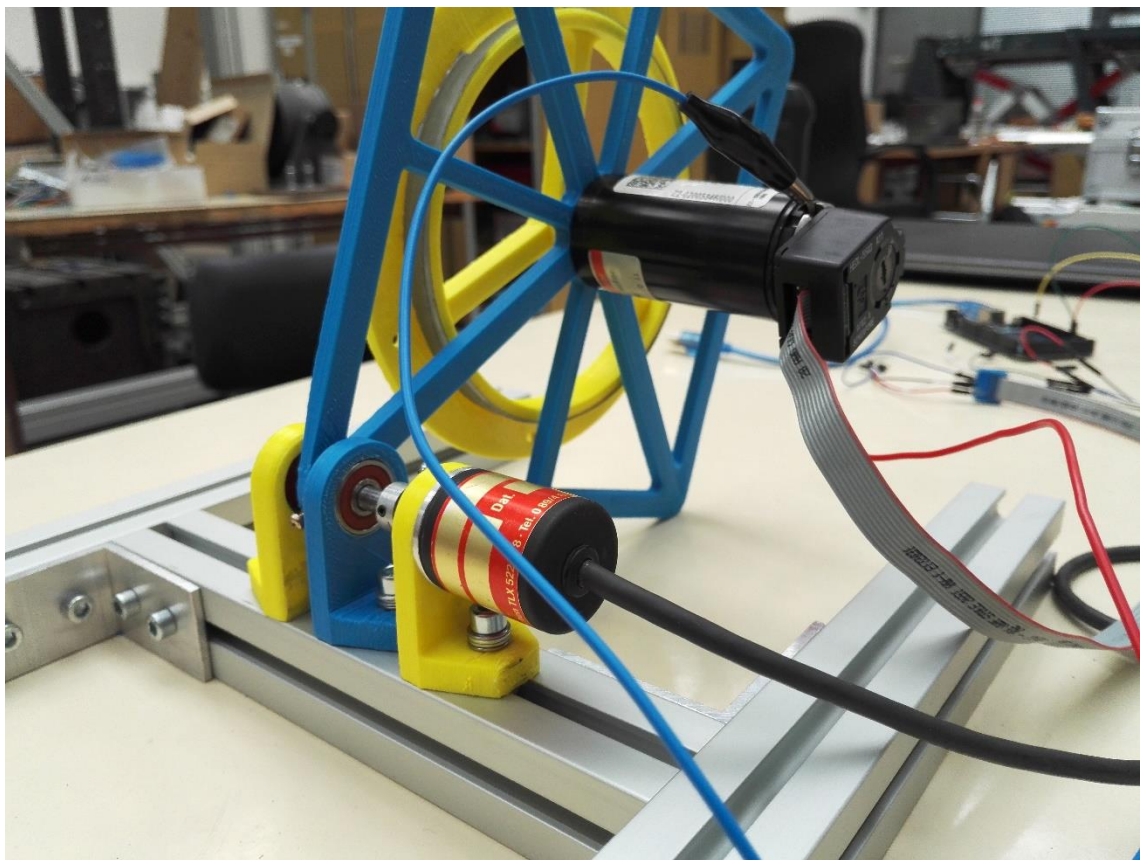
Na základe návrhu zariadenia v CAD-e sa s drobnými konštrukčnými úpravami zariadenie následne vyrobilo. Väčšina dielov bola vytlačená z ABS plastu na 3D tlačiarňi. Menovite to bola nosná doska, náboj zotrvačníku, uloženia ložísiak a úchyt encoderu snímajúceho uhol  $\varphi_{12}$ . Nosná osička bola vysústružená z ocele a veniec zotrvačníku vyfrézovaný z hliníkovej dosky. Celá zostava sa uchytila na rám z hliníkových profilov usporiadaných do tvaru H.

Po skompletovaní zariadenia sa oživila elektronika. Oba encodere boli napájané priamo z Arduina a taktiež ním boli snímané. Na interpretáciu signálov bola použitá knižnica *Encoder* (autorom Paul Stoffregen). Motor bol napájaný cez H-mostík, ktorého výstupné napätie bolo regulované PWM signálom z Arduina. H-mostík bol pripojený z bezpečnostných dôvodov najprv na 12 V, neskôr na 24 V zdroj.

Pôvodne bol použitý motor bez prevodovky, ten však na výstupnom hriadeľi nemal dostatočný moment a navyše roztáčal ťažký zotrvačník na príliš veľké otáčky (až 5000 ot/min). To malo negatívny vplyv v tom, že po skokovom znížení PWM signálu na 0 sa motor choval ako dynamo a indukované napätie pôsobiace proti napätiu zdroja spálilo čip H-mostíku. Z týchto dôvodov bol motor nakoniec nahradený alternatívou s prevodovkou. Od ťažkého zotrvačníku sa nakoniec upustilo úplne, na motore sa točil len plastový náboj. Mal dostatočný moment zotrvačnosti na to, aby zariadenie bolo schopné vyvažovania a zároveň nebol príliš hmotný na to, aby sa prejavoval negatívnymi vedľajšími efektmi v podobe priveľkého indukovaného napätia.

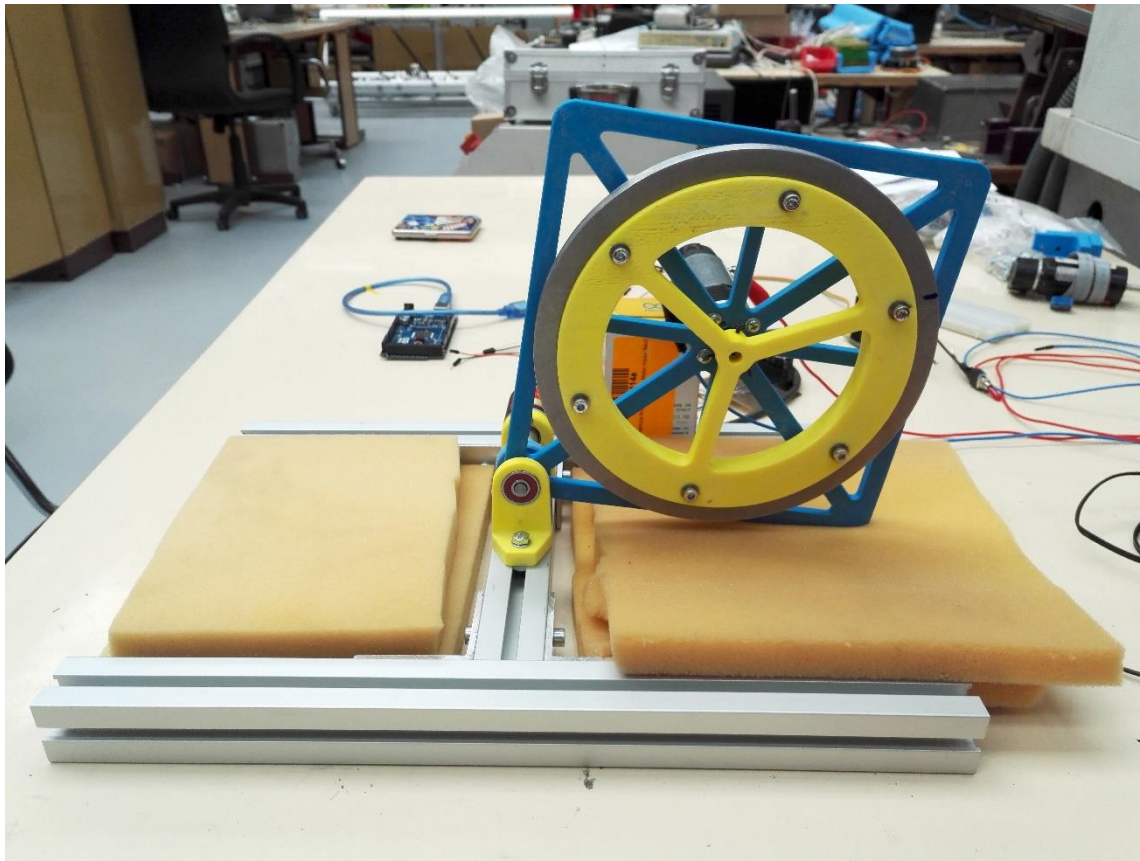


Obr. 21 – Zmontované zariadenie – pohľad spredu.

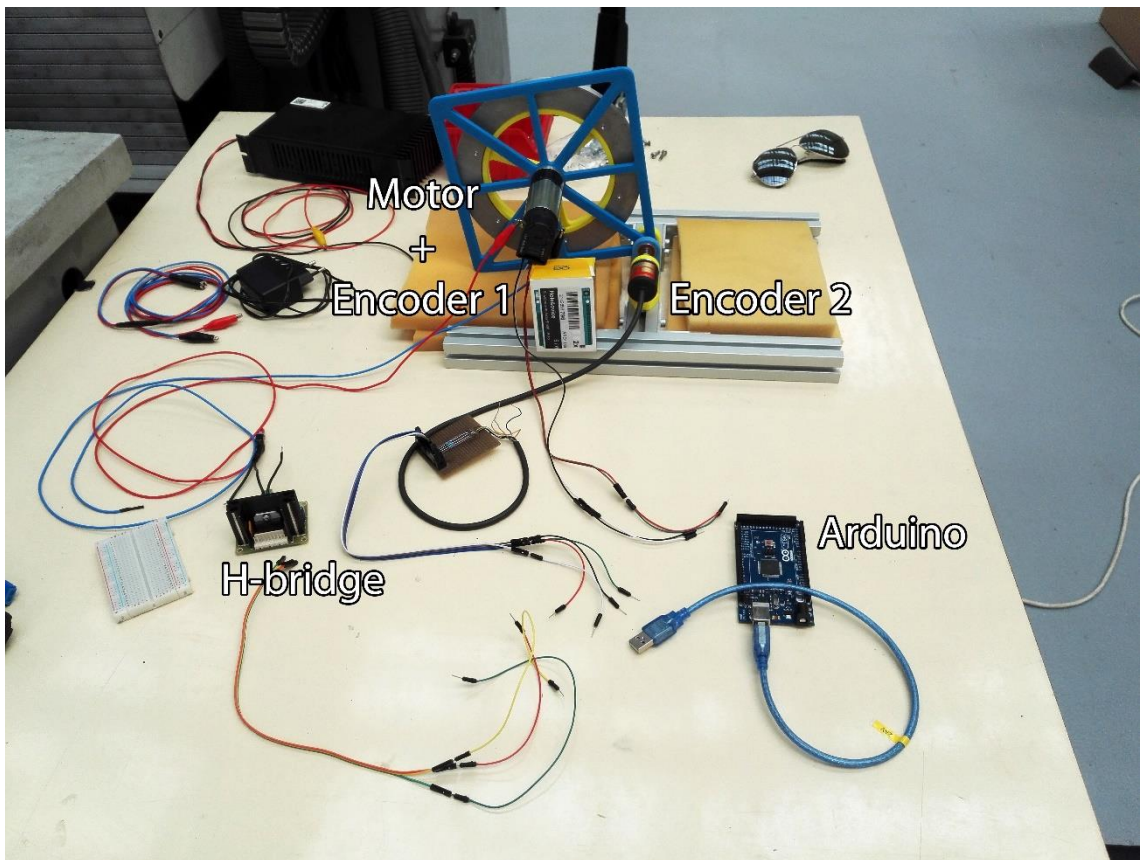


Obr. 22 – Zmontované zariadenie - pohľad zozadu.





Obr. 23 – Zariadenie už s novým motorom a pridaným molitanom.



Obr. 24 – Elektronika zariadenia s popismi. Encoder 1 sníma otáčky motoru, encoder 2 výchylku kyvadla od vzpriamenej polohy.

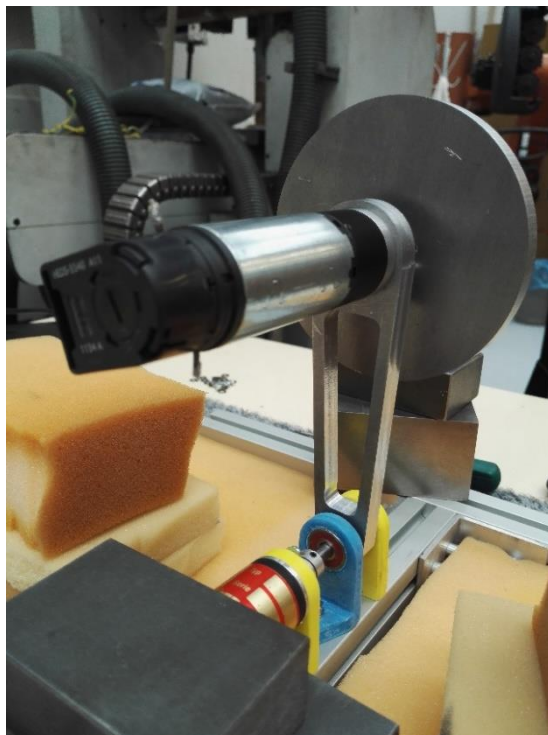
## 4.5 Experiment

Pokus bol realizovaný s riadením pomocou rôznych kombinácií nastavenia PID regulátoru. Parametre boli prvotne nastavené podľa simulovaného modelu a podľa skutočnej odozvy sa následne upravovali metódou pokus-omyl. Zariadenie sa chovalo dobre, pohyby zotrvačníku nasvedčovalo tomu, že riadenie reagovalo správne a chvíľami to vyzeralo, že sa mu podarí sa stabilizovať.

Nanešťastie základná doska vyrobená z ABS plastu bola veľmi poddajná. To spôsobovalo, že sa v okolí stabilnej polohy riadenie dostávalo do rezonancie a silné vibrácie ho nakoniec destabilizovali. Pri poslednom teste táto rezonancia spôsobila také prudké zmeny otáčok motoru, že to spálilo H-mostík.

Pre ďalšie experimenty sú preto vyrobené diely tuhšej konštrukcie približne rovnakých dynamických parametrov. Upustilo sa od ABS plastu, nové teleso kyvadla, rovnako ako aj zotrvačník, sú z duralu. Zotrvačník má menšie čelné hádzanie a iné nevyváženosti a nosná ojníčka je podstatne pevnejšia, zároveň však stále veľmi ľahká.

Nová prepracovaná konštrukcia bola odskúšaná s dočasne zapožičaným H-mostíkom, ktorý však kvôli maximálnemu svorkovému napätiu na výstupe 12 V výrazne obmedzil točivý moment motoru. Ten v dôsledku malého svorkového napätia nedokázal zariadením výraznejšie pohnúť. Pri skúšobnom priamom pripojení na zdroj 24 V napätia sa situácia zmenila, motor mal dostatok krútiaceho momentu, preto ďalšie experimenty s pôvodným opraveným H-mostíkom snád prinesú prvé úspešné stabilizovanie zariadenia.



Obr. 25 – Inovovaná konštrukcia zariadenia pripravená na experimentovanie.

## 5. Záver

V tejto práci bola preskúmaná problematika inverzných kyvadiel. Boli zmienené rôzne konštrukčné prevedenia a taktiež príklady metód ich riadenia. Okrem iných popisuje táto práca aj metódu Computed torques.

Práca sa ďalej zaoberala predovšetkým projektom Cubli. Boli odvodené pohybové rovnice rovinného modelu zariadenia. Tento systém bol následne nasimulovaný v prostredí MATLAB/Simulink s navrhnutou metódou riadenia.

Nakoniec sa navrhnuté a nasimulované zariadenie vyrobilo, zmontovalo a s riadením zabezpečeným pomocou platformy Arduino bol realizovaný experiment. Bohužiaľ vinou nevhodnej konštrukcie a voľby materiálu sa nepodarilo dosiahnuť uspokojivých výsledkov. Pre ďalšie experimenty je už pripravená nová, prepracovaná konštrukcia.

## 6. Použitá literatura

- [1] G. E. Christianson, Isaac Newton, Cary, US: Oxford University Press (US), 2005.
- [2] H. Gringar, “Wikipedia Commons,” 2005. [Online]. Available: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Axel\\_Paulsen\\_jump\\_without\\_text.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Axel_Paulsen_jump_without_text.svg).
- [3] K. J. Åström and K. Furuta, “Swinging up a pendulum by energy control,” *Automatica*, vol. 36, no. 2, pp. 287-295, 2000.
- [4] M. Valášek, Mechatronika, Praha: Vydavatelství ČVUT, 1995.
- [5] S. Jadlovská and J. Sarnovský, “A Complex Overview of the Rotary Single,” pp. 305-310, 2012.
- [6] M. I. El-Hawwary, A. L. Elshafei, H. M. Emará and H. A. Abdel Fattah, “Adaptative Fuzzy Control of the Inverted Pendulum Problem,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 6, pp. 1135-1144, November 2006.
- [7] F. Piltan, M. Mirzaei, F. Shahriari, I. Nazari and S. Emamzadeh, “Design Baseline Computed Torque Controller,” *Internation Journal of Engineering*, vol. 6, no. 3, pp. 129-141, 2012.
- [8] M. Gajamohan, M. Merz, I. Thommen and R. D'Andrea, “The Cubli: A Cube that can Jump Up and Balance,” in *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vilamoura, 2012.
- [9] G. Bartolini, Modern Sliding Mode Control Theory: New Perspectives and Applications, Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [10] N. Khalid and A. Y. Memon, “Output Feedback Stabilization of an Inertia Wheel Pendulum Using Sliding Mode Control,” in *UKACC International Conference on Control*, Loughborough, 2014.
- [11] B. Messner, D. Tilbury, R. Hill and J. Taylor, “University of Michigan: Control Tutorials for MATLAB & Simulink,” [Online]. Available: <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>.
- [12] P. Zítek, M. Hofreiter a J. Hlava, Automatické řízení, 3. ed., Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004.

## 7. Zoznam príloh

- I. Dokumentácia zostavy pohonu Maxon 244746
- II. Dokumentácia H-mostíku BRIDGE20
- III. Dokumentácia encoderu Avago HEDS – 5540 A11
- IV. Dokumentácia platformy Arduino Mega 2560